16
24

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

FALLA DE ORIGEN

LOGICA DE LA NEGOCIACION

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

XAVIER CORVERA POIRE

MEXICO D. F. ENERO 1991

CONTENIDO:

L ó g i c a   d e   l a   N e g o c i a c i ó n .

PREFACIO

Conflicto de Intereses

Un conflicto de intereses se da cuando un individuo tiene un fin primario opuesto, o cuando menos distinto, al de alguien más, y éste no puede controlar en su totalidad todos los factores que intervienen en el resultado; estos factores pueden ser las decisiones de otros individuos o bien elementos dependientes del azar.

La teoría de juegos en sus inicios intenta dar una explicación y una guía del comportamiento más "inteligente" en tales situaciones puramente competitivas, lo que comúnmente se denomina juegos no-cooperativos.

El desarrollo de la teoría de juegos en los últimos años se ha enfocado en gran parte al estudio de juegos cooperativos y es esta área la que se estudia en el presente trabajo bajo el título de "Lógica de la Negociación", explicando diferentes soluciones propuestas que puede tener un negocio, visto como un juego cooperativo.

Presentamos una breve introducción a los juegos bipersonales no cooperativos en el capítulo I; el capítulo II se enfoca al estudio de los juegos cooperativos bipersonales, y el tercer capítulo está dedicado a los juegos n-personales, en los cuales se estudia la factibilidad de asociación entre subgrupos de jugadores que comparten los mismos intereses.

En el presente se buscan dos objetivos primordialmene: el primero consiste en mostrar la clase o el tipo de negocios a los cuales es más factible aplicarles una solución u otra, para lo cual se presetan las soluciones teóricas más relevantes que existen para juegos cooperativos, con ejemplos que procuran estar apegados a la realidad, la mayoría de éstos han sido desarrollados en base a casos prácticos y su solución presentada pretede ser la más adecuada para ese tipo de negocio en particular. El segundo objetivo consiste en proporcionar una idea de cómo puede ser resuelto un problema real de negociación, qué o cuánto pueden los participantes razonablemente esperar obtener si realizan tal negocio con ciertas características, si conviene asociarse con otros individuos o no; y en caso afirmativo, con quién o quiénes, cómo habrían de repartirse las ganancias dentro de una asociación si éstas son fraccionables y en qué tipo de negocios se puede amenazar a otros individuos si no colaboran tanto como se desea.

La mayor parte de los teoremas se enuncian sin demostración, por no considerarse necesario para el objetivo del presente.

INTRODUCCION A LA TEORIA DE JUEGOS

Un juego puede consistir de una secuencia de movimientos como ocurre en el ajedrez o puede consistir de un solo movimiento por cada uno de sus participantes. El análisis presente está limitado a los juegos del segundo tipo. En este contexto, una estrategia es la especificación de un movimiento en particular por uno de los participantes en el juego. Por ejemplo, en un juego donde el precio de un cierto artículo es la única variable, una estrategia consiste en la selección de un precio en particular; si tanto el precio como el gasto en publicidad son variables, una estrategia consiste en la selección de valores particulares tanto para el precio como para la inversión en publicidad. Se supodrá que cada participante cuenta con un número finito de estrategias.

Los juegos pueden ser clasificados de acuerdo a diferentes criterios, en particular haremos uso de los siguietes dos: (1) el resultado neto del juego y (2) el número de sus integrantes. Nos referimos al resultado neto del juego como la suma total de las ganancias de todos sus integrantes, ésta puede ser (a) suma cero o (b) suma distinta de cero. El segundo criterio hace la división de acuerdo a juegos de (a) 2 jugadores y juegos de (b) n jugadores, con $n > 2$.

1 JUEGOS BIPERSONALES DE SUMA CERO

Un juego bipersonal de suma cero es estrictamente competitivo (no cooperativo), dado que un jugador obtiene lo que el otro pierde. En general si el jugador uno (I) tiene m estrategias, y el jugador dos (II) tiene n, los posibles resultados del juego están dados por la matriz de pagos:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

en la cual a_{ij} es la ganancia que obtiene I si él utiliza su estrategia pura i (elige el i-ésimo renglón) y II utiliza su estrategia pura j (elige la j-ésima columna). Como el juego es de suma cero, la ganancia correspondiente para II es $-a_{ij}$.

La teoría de juegos postula patrones de comportamiento que buscan determinar equilibrio en estas situaciones. Los jugadores buscan encontrar una estrategia que los proteja con una ganancia mínima contra lo peor que les pueda suceder, si I elige su estrategia i, la mínima ganancia para I, equivalente a la ganancia máxima para II bajo esa estrategia de I, está dada por el menor elemento del renglón i:

$$\min_j \{ a_{ij} \}$$

ésta es la ganancia esperada (la llamamos ganancia esperada porque interviene un factor no conocido para I, el movimiento de II) de I bajo el criterio de lo peor que le puede suceder. I desea maximizar su ganancia mínima esperada, entonces I elige una estrategia i, la cual maximice $\min \{ a_{ij} \}$ sobre j. De esta manera I garantiza tener una ganancia de cuando menos:

$$\alpha = \max_i \{ \min_j \{ a_{ij} \} \}$$

la cual puede ser mayor. II pensando de la misma manera que I, sobre la columna j, se fijará en lo peor que le puede pasar:

$$\max_i \{ a_{ij} \}$$

entonces II busca una estrategia j tal que pueda garantizar una pérdida máxima:

$$\beta = \min_j \{ \max_i \{ a_{ij} \} \}$$

donde si:

$$\alpha = \max_i \{ \min_j \{ a_{ij} \} \} = a_{kh} = \min_j \{ \max_i \{ a_{ij} \} \} = \beta$$

decimos que a_{kh} es el valor del juego, y la k-ésima estrategia de I junto con la h-ésima estrategia de II constituyen un par de estrategias en equilibrio.

La matriz de pagos puede ser reducida mediante el concepto de dominancia, en general, la columna j domina a la k si $a_{ij} \leq a_{ik}$ $\forall$ i, y el renglón i domina al h si $a_{ij} \geq a_{hj}$ $\forall$ j. Bajo este criterio tanto las columnas como renglones dominados pueden ser eliminados de la matriz de pagos sin alterar el valor del juego, las estrategias óptimas originales pueden variar, lo cual no altera los pagos esperados de los jugadores.

Un juego en el cual $\alpha \neq \beta$ se puede resolver mediante la asignación probabilística para cada una de sus estrategias, a éstas les llamamos estrategias mixtas.

1.1 ESTRATEGIAS MIXTAS

Utilizar una estrategia mixta sigifica que el jugador en cuestión eligirá cada uno de sus posibles movimientos con una probabilidad asignada.

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_m$ las probabilidades que I empleará para cada una de sus m estrategias, donde $0 \le x_i$ $(i=1,\ldots,m)$ y $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$. Una selección al azar no le permitirá a II anticipar la selección de I aún sabiendo los valores probabilísticos de cada una de sus estrategias. El jugador II puede de igual manera asignar probabilidades a sus estrategias, sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ con $y_i \ge 0$, $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$. De esta manera si II elige su estrategia j con probabilidad de 1, la ganancia esperada de I será:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i .$$

El problema en el que se encuentran cada uno de los jugadores consiste en seleccionar un conjunto óptimo de valores probabilísticos, x^* y y^*, para lo cual definimos:

$$e(x^*, y^*) = v$$

en donde v es el valor del juego, y:

$$e(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=}^{n} a_{ij}\, x_i\, y_j$$

equivalente a la ganancia esperada de I cuando él utiliza la estrategia x y II la estrategia y. Los jugadores buscan x^*, y^* tal que:

$$e(x^*, y_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* \ge v \qquad j=1\ldots n$$

y

$$e(x_i, y^*) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \le v \qquad i=1\ldots m$$

Antes de ver algún método para obtener v y las estrategias mixtas óptimas, es útil que hagamos mención del siguiente teorema:

TEOREMA:

En un juego bipersonal de suma cero siempre existe solución (v y estrategias óptimas x^* ,y^*) y v es único.

Si ambos jugadores seleccionan sus estrategias mixtas, la ganancia esperada para I puede ser determinada de la siguiente manera:

$$e_1(x,y) = \sum_{j=1}^{n} y_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \right) \geq \sum_{j=1}^{n} y_j v$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i y_j \geq v$$

y la pérdida esperada de II:

$$e_2(x,y) = \sum_{i=1}^{m} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \right) \leq \sum_{i=1}^{m} x_i v$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i y_j \leq v$$

tales cantidades son idénticas, la ganancia esperada de I equivale a la pérdida esperada de II:

$$v \leq e_1(x,y) = e_2(x,y) \leq v$$

Como se mencionó anteriormente, si I emplea su estrategia mixta óptima, su ganancia esperada no puede ser menor que v, sin importar la estrategia que II elija. Para resolver un juego bipersonal de suma cero, un procedimiento general es utilizar la programación lineal.

1.2 EQUIVALENCIA DE UN JUEGO BIPERSONAL DE SUMA CERO, Y UN PROBLEMA DE PROGRAMACION LINEAL.

Las estrategias óptimas de los jugadores, así como el valor del juego, pueden ser determinados convirtiendo los juegos bipersonales de suma cero a problemas de programación lineal.

A partir de las definiciones de α y β se concluye que:

$$\alpha \leq v \leq \beta$$

Es muy sencillo demostrar que, si a una matriz de pagos M de un juego bipersonal de suma cero con valor de juego v, le sumamos una constante c a cada una de sus entradas, entonces el valor del juego de la nueva matriz M' es equivalente a:

$$v' = c + v$$

y las estrategias óptimas no quedan afectadas, pues las relaciones de disigualdad que existen en la matriz entre unos valores y otros no se altera. Por lo tanto podemos suponer sin perdidad de generalidad que $v > 0$.

Sean:

$$z_j = \frac{y_j}{v} \qquad j = 1 \ldots n$$

$$w_i = \frac{x_i}{v} \qquad i = 1 \ldots m$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{v} = \sum_{j=1}^{n} z_j$$

y

$$\frac{1}{v} = \sum_{i=1}^{n} w_i$$

II desea que hacer que su pérdida máxima esperada sea lo menor posible, equivalente a decir que $1/v$ sea lo más grande posible:

$$\text{MAX } z_1 + z_2 + \ldots + z_n$$

s.c.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \leq 1 \qquad i=1,\ldots,m$$

$$z_j \geq 0 \qquad j=,\ldots n$$

mientras que I pretende que su ganancia mínima esperada sea lo mayor posible, o bien, que 1/v sea lo menor posible:

$$\text{MIN } w_1 + w_2 + \ldots + w_m$$

s.c.

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \geq 1 \qquad j=1,\ldots,n$$

$$w_i \geq 0 \qquad i=1,\ldots m$$

El problema planteado para I representa el Dual del problema planteado para II. A partir de z_j y de w_i óptimos, se obtienen las estrategias y^*, x^* para II y para I respectivamente. Si v inicialmente fué incrementado, bastará con restarle ese mismo valor.

De esta manera podemos resolver fácilmente cualquier juego bipersonal de suma cero, lo que es de gran ayuda para resolver juegos bipersonales cooperativos.

INTRODUCCION A LOS PROBLEMAS DE NEGOCIACION

En un proceso de negociación los jugadores tienen la posibilidad material y jurídica de adquirir contratos comunes irrevocables. Una vez que el acuerdo sea precisado y ratificado, los jugadores pierden el control individual de sus decisiones; entonces se estudian los niveles de utilidad de las distintas coaliciones (asociaciones), así como la estabilidad de las mismas. Las estrategias disponibles, esenciales para la solución en juegos no-cooperativos intervienen indirectamente en una negociación, en lugar de manejar el concepto de <<estrategia óptima>>, se manejará directamente el concepto de <<estabilidad de las coaliciones>>.

2 NEGOCIACION ENTRE DOS JUGADORES

En este capítulo, los juegos cooperativos bipersonales son estudiados desde distintos puntos de vista. Los modelos de negociación tratan con situaciones en las cuales los jugadores inician su negociación con determinados niveles de utilidad, aquello que obtendrían si no logran ponerse de acuerdo. Existirá un conjunto factible de resultados que pueden alcanzar si deciden cooperar; sin embargo, en ausencia de acuerdo alguno, no hay nada que los jugadores puedan hacer para mejorar su situación, o bien para empeorar la del otro. Distinto es el caso analizado en 2.6, donde un jugador puede presionar al otro para que actúe de determinada manera, amenázandolo con hacerlo perder mucho más de lo esperado. A continuación presentamos algunos ejemplos sencillos en los que ha de intervenir una negociación.

ej. 2a) Una negociación simple

La unidad de materia prima para fabricar cierto producto se vende de acuerdo al siguiente criterio:

$ 10 / unidad si se compran q unidades ó más, y
$ 12 / unidad si se compran q-1 unidades o menos.

$(q>0,\ q \in \mathbb{Z})$

Una compañía I, al iniciar el día compró una cantidad x_1 (con $x_1 \geq q$) unidades de materia prima para su producción pero por algún motivo imprevisto, I tiene que detener su operación a mitad del día; por cuestiones de calidad esta materia prima será inservible al día siguiente, por lo cual, I está interesada en vender su sobrante x_2, donde $x_2 = [\, x_1 / 2 \,]$; una compañía II está interesada en adquirir esa cantidad de unidades. Cuál ha de ser el precio justo de esa transacción, considerando que $x_2 \ll q$?

ej. 2b) Una cláusula adicional (5)

La Secretaría de Comunicaciones y Transportes (SCT) firmó un contrato con una constructora para la realización de un túnel que forma parte de una autopista. A lo largo del trabajo se han presentado numerosas dificultades y el trabajo no estará terminado en el tiempo acordado sin una fuerza de trabajo extra. Con esta fuerza adicional es posible iniciar simultáneamente los dos frentes del túnel, la entrada y la salida, e implicaría un costo incremental de $ 1 MM (MM = unidades de millón). La SCT y la constructora discuten una cláusula adicional en el contrato inicial. Si las dos partes no logran llegar a un acuerdo sobre esta cláusula adicional, por un lado la constructora deberá pagar a la SCT $ 1.5 MM por la demora, y por otro lado la SCT será la responsable de un costo evaluado en $ 3.5 MM debido al retraso de la apertura del túnel. Bajo estas condiciones ¿ Qué participación en el millón deberá absorber cada una de las empresas?

2.1 JUEGOS COOPERATIVOS BIPERSONALES

A diferencia de los juegos no-cooperativos en los que está prohibido todo tipo de discusión antes de jugar, para juegos cooperativos se consideran los siguientes puntos:

i) Todo mensaje formulado por un jugador antes de mover es transmitido sin distorsión alguna al otro jugador.

ii) Todo acuerdo es inviolable y cada uno está sujeto a las reglas del juego.

iii) Las evaluaciones de los resultados por parte de los jugadores no varían debido a las negociaciones previas.

A manera de ejemplo considérese la siguiente matriz de pagos:

$$\begin{bmatrix} (1,4) & (0,0) \\ (0,0) & (4,1) \end{bmatrix}$$

en donde (a_{ij},b_{ij}) son respectivamente las ganancias de I y II cuando juegan sus estrategias puras i y j. Si I y II juegan respectivamente las estrategias mixtas $\binom{x}{1-x}$ y $\binom{y}{1-y}$ los pagos están dados por:

$$e_1(x,y)=5xy+4-4x-4y \qquad e_2(x,y)=5xy+1-x-y$$

La zona sombreada de la figura (2.1.1) representa la región de pagos en el caso no cooperativo. La curva representa los pagos máximos que pueden tener los jugadores bajo las siguientes suposiciones:

- I piensa como si estuviese jugado el juego bipersonal de suma cero:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- y II piensa como si jugara en la posición del jugador I el juego bipersonal de suma cero:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de esta manera los jugadores obtienen unas estrategias óptimas de juego para esos juegos en particular. Ambas ganancias e_1 y e_2 podrían llegar a su máximo, pero al aumentar cualquiera de las dos la otra inmediatamente disminuye.

En un problema de este tipo, un resultado que habría de ser satisfactorio para ambos jugadores, dada la simetría de la matriz, sería:

$$(1/2,4/2) + (4/2,1/2) = (5/2,5/2)$$

el cual queda fuera de la región de pagos señalada para el caso no cooperativo (ver figura 2.1.1). En un juego cooperativo la región de pagos (D) está comprendida por las combinaciones lineales convexas de los vértices de la figura, que representan los pagos correspondientes a las estrategias puras. La región de pagos se presenta de la siguiente manera: (Fig. 2.1.2) en donde D está representada por la zona sombreada. Por lo que se puede apreciar en la figura anterior, dado un juego bipersonal, el conjunto de pagos si los jugadores no cooperan, es un subconjunto del conjunto de pagos del mismo juego donde los jugadores están dispuestos a cooperar.

Nota: Tenemos que aclarar que no todos los pagos de las estrategias puras son necesariamente vértices de la región de pagos D, pues es posible que alguno de estos pagos sea una combinación lineal convexa de los demás.

Nuestra región de pagos en el caso cooperativo en general es mayor que en el caso no cooperativo, para limitar nuestra atención a los puntos más importantes dentro de la misma, introducimos el concepto de conjunto de negociación.

2.2 CONJUNTO DE NEGOCIACION

¿En cuál de los posibles pagos en el juego cooperativo estarán los jugadores de acuerdo?, ¿ Qué punto dentro de D elegirán ? Partamos por clasificar los conjuntos que son de nuestro interés.

DEF. Dominación conjunta: (7)

Un par de pagos (u,v) en un juego cooperativo está dominado conjuntamente por (u',v') si $u' \geq u$, $v' \geq v$ y $(u',v') \neq (u,v)$.

DEF. Optimo de Pareto: (7)

Un par de pagos (u,v) es óptimo de Pareto si no está conjuntamente dominado. Por lo tanto, un pago óptimo de Pareto no podrá ser mejorado simultáneamente para ambos jugadores.

Desde luego los jugadores estarán siempre interesados en los pagos óptimos de Pareto para llegar a algún acuerdo, de otra manera habría cuando menos un jugador capaz de mejorar su resultado por sí mismo. Cada jugador debe esperar cooperando, más de lo que por sí sólo puede obtener, estos valores que independientemente pueden obtener son:

$$v_I = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} e_1(x,y) \qquad\qquad v_{II} = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} e_2(x,y)$$

v_I (v_{II}) representa la mínima ganancia que I (II) puede obtener, utilizando la estrategia óptima x (y) dentro de su conjunto de estrategias X (Y), bajo el supuesto de que II (I) juega tratando de minimizar el pago esperado de I (II) mediante su estrategia y (x), óptima de su conjunto de estrategias factibles Y (X).

De esta manera cualquiera que sea el resultado de la sesión de negocios, I tiene que recibir cuando menos v_I y II cuando menos v_{II}, de otra forma ellos tendrían un mejor resultado ignorando al oponente y jugando la estrategia maximin como en un juego no cooperativo.

DEF. Conjunto de Negociación (7)

El conjunto de negociación se define de la siguiente manera:

$$B=\{(u,v) \mid u \geq v_I,\ v \geq v_{II},\ (u,v) \text{ es óptimo de Pareto en } D\}.$$

Se debe aclarar que se están considerando los pagos en la misma escala, es decir, la utilidad que recibe un jugador al obtener 4 es el cuádruple de la utilidad que recibe otro jugador obteniendo 1; hecho que en la realidad puede ser diferente, debido a las variaciones en preferencias por parte de los jugadores, pero para simplficar el estudio, y hacerlo objetivo no debemos considerar comparaciones entre preferencias interpersonales.

ej 2.2) Supongamos el juego

$$\begin{bmatrix} (6,-3) & (-4,1) \\ (10,1) & (5,11) \end{bmatrix}$$

en la figura 2.2 se ilustra el conjunto de todos los pagos posibles, cuyos vértices representan los pagos que los jugadores recibirían jugando sus estrategias puras: $\binom{x}{1-x}$ $x\in(1,0)$ para I, y $\binom{y}{1-y}$ $y\in(1,0)$ para II. El conjunto B está determinado por aquellos puntos mayores que (v_I,v_{II}) óptimos de Pareto.

El objetivo ahora es determinar dentro del conjunto de negociación B, cuál es un punto más adecuado que satisfaga a ambos jugadores.

2.3 PROCEDIMIENTO DE SHAPLEY

Como anteriormente se mencionó, para determinar el punto óptimo dentro de B, se parte de considerar la situación que prevalecerá en caso de que las partes involucradas no lleguen a ningún acuerdo. Suponemos que esta primera evaluación es particularmente simple, por ejemplo, si la transacción entre las dos compañías (ej. 2a) no se lleva a cabo, la posición del jugador 1 sería poseer materia prima que ya no puede usar, y la del jugador 2 sería comprar x_2 unidades de materia prima con un costo de \$ 12 por unidad.

En resumen la negociación más simple se refiere al reparto de una suma c, sabiendo que el jugador 1 puede obtener independientemente una suma a; y el jugador 2 una suma b, en la cual $a, b \leq c$. Esta situación se presenta de manera gráfica en el diagrama de la figura 2.3.1. en la cual:

D = Conjunto de todos los pares posibles de pagos cuando ambos jugadores utilizan estrategias mixtas.

En este diagrama el triángulo (0,0), (0,c), (c,0) corresponde a D, el punto R representa la situación de no-acuerdo, corresponde al punto de ruptura. Los puntos sobre el segmento cc corresponden a todas las distribuciones posibles de la suma c, se comprende fácilmente que las únicas reparticiones razonables determinadas por los jugadores son las del segmento AB, que corresponde al conjunto de negociación B. Si ambas partes son igualmente razonables, el resultado es el punto S, simétrico entre A y B, tomando como origen la situación de no-acuerdo. Las coordenadas del punto S son:

$a+(c-a-b)/2$, ganancia del jugador 1,
$b+(c-a-b)/2$, ganancia del jugador 2.

Llamamos a este procedimiento de Shapley por ser un caso particular del valor de Shapley para juegos n-personales, que se discutirán más adelante.

La solución teórica para el problema de la venta de materia prima (ej. 2a) corresponde a \$6 , dado que a=0, pues I jugando sólo, obtiene 0; b=-12, lo que le costaría a II la unidad de materia prima comprándola directamente a la fábrica ; y c es la suma que ambos se habrían de dividir si se ponen de acuerdo, que para este caso es 0 (para la transacción, I y II no toman en cuenta a la proveedora de materia prima).

El pago para I es el promedio de lo que él puede asegurar, a, y c-b, el valor marginal en lo que contribuye al establecer una coalición con II.

Para el caso general debe considerarse que cada acuerdo entre jugadores se manifiesta por un cierto nivel de satisfacción para los mismos. Esta satisfacción se expresa a manera de utilidad,

$$u_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) \text{ para el jugador } i,$$

donde los parámetros $x_1, x_2, \ldots, x_n$ corresponden a las diferentes cláusulas del acuerdo. En estas condiciones la figura 2.3.1 es reemplazada por la figura 2.3.2.

R, punto de ruptura, representa el nivel de satisfacción obtenido por cada jugador en caso de no acuerdo, cuyas coordenadas representan utilidad. Los niveles de satisfacción que pueden alcanzar utilizando estrategias mixtas corresponden al conjunto D (convexo), el conjunto de negociación B es el segmento curvilíneo A'B'.

2.4 LA SOLUCION DE NASH

2.4.1 AXIOMAS DE NEGOCIACION DE NASH (2)

Se supone existe una transacción entre los jugadores en la cual el conjunto de pagos factibles es un conjunto convexo, cerrado y acotado D. (La región de pagos de un juego finito y cooperativo siempre es cerrado, acotado y convexo).

Nash considera un punto de ruptura, aquél al que los jugadores llegarían si no se pusieran de acuerdo en la transacción:

$$(u_o, v_o) \in D \quad \text{(punto de ruptura).}$$

y considera que los jugadores están de acuerdo en seguir los axiomas que a continuación se enumeran, de tal forma que éstos les indiquen un procedimiento para llegar a una solución satisfactoria.

Define el procedimiento como una función del punto de ruptura a otro punto en el mismo conjunto D.

$$\psi((u_o,v_o),D)=(u^*,v^*).$$

bajo los siguientes axiomas:

N1 $u^* \geq u_o$, $v^* \geq v_o$ (mayor o igual que el punto de ruptura).

N2 $(u^*,v^*) \in D$ (factibilidad).

N3 si $(u,v) \in D$, $u \geq u^*$, $v \geq v^*$ $\Rightarrow$ $u = u^*$, $v = v^*$.
(óptimo de Pareto).

N4 si $D_1 \subseteq D_2$, $\psi((u_o,v_o),D_2) = (u^*,v^*)$ y $(u^*,v^*) \in D_1$ entonces
$\psi((u_o,v_o),D_1) = (u^*,v^*)$
(Independencia de alternativas irrelevantes).

N5 Sea D' obtenido de D mediante la transformación :
$u' = au + b$, $v' = cv + d$, $a,c > 0$.
si $\psi((u_o,v_o),D) = (u^*,v^*) \Rightarrow \psi((au_o+b,cv_o+d),D') = (au^*+b,cv^*+d)$
(Invarianza bajo transformaciones lineales).

N6 si D es simétrico, tal que si $(u,v) \in D \Rightarrow (v,u) \in D$ y $u_o = v_o$
entonces $u^* = v^*$.(Simetría).

Los axiomas N1,N2 y N3 son bien aceptados pues se pretende que los jugadores tengan un mejor resultado mediante su colaboración, que éste sea factible y que sea lo más alto posible. El axioma N5 es lógico suponerlo dado que las funciones de utilidad son definidas de manera lineal, y se considera que se llega al mismo resultado pese a que todo el conjunto de pagos se maneje en otra escala o en casos económicos en distinta moneda. El axioma N6 implica que los jugadores tienen el mismo poder de juego en caso de simetría y de que $u_o = v_o$. El axioma N4 es el más criticado, la razón se puede explicar de la siguiente manera: dado un conjunto con un cierto punto de ruptura (u_o,v_o) y con una solución (u^*,v^*) al cual se le resta un area, sin afectar su convexidad ni (u_o,v_o), en el nuevo subconjunto existirá la misma solución (u^*,v^*) a pesar de que las posibilidades de juego se hayan reducido solamente para alguno de los jugadores. De manera más clara, supóngase los conjuntos de negociación:

$$B_1 = \{ \lambda(1,10) + (1-\lambda)(2,0),\ 0 \le \lambda \le 1 \}$$

$$B_2 = \{ \lambda(0,20) + (1-\lambda)(2,0),\ 0 \le \lambda \le 1 \}$$

en los cuales la solución, como adelante se explica, es $(u^*,v^*)=(1,10)$, pese a que $B_1 \subseteq B_2$ y que por lo tanto I en B_2 tiene muchas más posibilidades de juego.

Nash demostró que hay un procedimiento ψ que satisface los axiomas N1 a N6 y que éste es único.

2.4.2 TEOREMA DE NASH

(i) Si existen puntos $(u,v) \in D$, $u > u_o$, $v > v_o$, definimos la función:

$$f(u,v)=(u-u_o)(v-v_o)$$

definida sobre $(u,v) \in D$, $u > u_o$, $v > v_o$, cuyo máximo se presenta en un único punto (u^*,v^*), y definimos:

$$\psi((u_o,v_o),D) = (u^*,v^*).$$

(ii) Si no hay puntos $(u,v) \in D$ tales que $u > u_o$, $v > v_o$ entonces:
(a) existen puntos de la forma (u,v_o), $u \ge u_o$ ó
(b) (u_o,v), $v \ge v_o$.

Si u^* es el máximo de los valores u de los puntos del primer tipo, v^* es el máximo de los valores v de los puntos del segundo tipo entonces definimos para el caso (a):

$$\psi((u_o,v_o),D) = (u^*,v_o)$$

y para el caso (b):

$$\psi((u_o,v_o),D) = (u_o,v^*)$$

El procedimiento ψ definido para todos los casos, satisface los axiomas N1 a N6 y es la única función que lo cumple.

LEMA:

Si existen puntos $(u,v) \in D$ tales que $u > u_o$, $v > v_o$, entonces $f=(u-u_o)(v-v_o)$ siempre tiene un máximo sobre $(u,v) \in D$, $u > u_o$, $v > v_o$ y este máximo es único.

DEM:

D es cerrado y acotado y si tomamos la intersección con la región $u \geq u_o$, $v \geq v_o$ que también es cerrada, obtenemos un conjunto cerrado y acotado por lo tanto f alcanza su máximo en el conjunto intersección. El máximo no se encuentra en la frontera (u,v_o) ó (u_o,v) porque en esos puntos f es cero, y es positiva en el resto de la región; por lo tanto hay un máximo para f definido en $(u,v) \in D$, $u > u_o$, $v > v_o$.

Para demostrar unicidad supóngase que existen dos puntos $(u_1,v_1) \neq (u_2,v_2)$ ㄱ $f(u_1,v_1) = f(u_2,v_2) = M$. Como $M > 0$, si $u_1 = u_2 \Rightarrow v_1 = v_2$, podemos suponer $u_1 < u_2$ y $v_1 > v_2$ ($u_1 > u_2$, $v_1 < v_2$ se prueba de manera similar). Como D es convexo contiene el punto:

$$(u_3,v_3) = (u_1,v_1)/2 + (u_2,v_2)/2$$

por lo tanto:

$$f(u_3,v_3)=f(u_1,v_1)/2 + f(u_2,v_2)/2 + (u_2-u_1)(v_1-v_2)/4$$

$$= M + (u_2-u_1)(v_1-v_2) / 4 > M,$$

∇. l.q.q.d.

Por lo tanto, en las condiciones definidas, f alcanza un máximo único.

DEM. Teorema de Nash.

El primer punto es demostrar que ψ satisface N1 a N6 para los distintos casos:

(i) $\psi((u_o,v_o),D) = (u^*,v^*)$, trivialmente N1 y N2 se cumplen.

Para N3, si $u \geq u^* \geq u_o$ y $v \geq v^* \geq v_o$ entonces:

$$f(u,v) = (u-u_o)(v-v_o) \geq (u^*-u_o)(v^*-v_o) = f(u^*,v^*).$$

Como (u^*,v^*) maximiza $f(u,v)$, esto implica que $f(u,v) = f(u^*,v^*)$ y

$$\therefore \quad u = u^*,\ v = v^*.$$

N4, si $D_1 \subset D_2$ y (u^*,v^*) maximiza $f(u,v)$ sobre D_2, es evidente que la maximiza sobre un conjunto menor D_1.

N5, si (u^*,v^*) maximiza $f(u,v)$ sobre D, entonces debe maximizar $ac(u-u_o)(v-v_o)$ sobre D dado que $ac > 0$. Así pues (u^*,v^*) maximiza $((au+b)-(au_o+b))((cv+d)-(cv_o+d))$ sobre D ó alternativamente, (au^*+b,cv^*+d) maximiza $(u-u_o')(v-v_o')$ sobre D', donde $u_o'=au_o+b$, $v_o'=cv_o+d$.

N6, supongamos (u^*,v^*) maximiza $f(u,v)$ pero $u^* \neq v^*$, por la propiedad simétrica de D, (v^*,v^*) está en D; por convexidad:

$$(u',v')=(u^*,v^*)/2 + (v^*,u^*)/2 = (\ (u^*+v^*)/2\ ,\ (u^*+v^*)/2\ )$$

entonces:

$$f((u^*+v^*)/2,(u^*+v^*)/2 = ((u^*+v^*)/2-u_o)((u^*+v^*)/2-v_o) =$$

$$= (u^{*^2}+2u^*v^*+v^{*^2})/4 - (u^*+v^*)u_o + u_o^2,$$

en donde hemos usado que uo = vo. Como $(u^*-v^*)^2 \geq 0$ sabemos que $u^{*2}+v^{*2} > 2u^*v^*$ excepto cuando $u^* = v^*$, usando este hecho: $f(u',v') > u^*v^*-(u^*+v^*)u_o + u_o^2 = (u^*-u_o)(v^*-v_o) = f(u^*,v^*)$, esto contradice que (u^*,v^*) maximiza a f, por lo tanto $u^* = v^*$.

Para probar la unicidad del procedimiento ψ, supongamos que existe otro procedimiento ψ' que también satisface N1 a N6; luego entonces $\exists$ D, (u_o,v_o) donde $\psi((u_o,v_o),D) = (u^*,v^*)$ y $\psi'((u_o,v_o),D) = (u',v')$ con $(u^*,v^*) \neq (u',v')$. Usando los axiomas

N1 a N6 demostraremos $(u^*,v^*) = (u',v')$ así probamos la unicidad de ψ.

Por N5 tranformamos D en la región D' mediante:

$$u' = (u-u_o) / (u^*-u_o) \quad , \quad v' = (v-v_o) / (v^*-v_o)$$

entonces:

(u_o,v_o) se mapea en (0,0), (u^*,v^*) en (1,1) y (u',v') en $(\tilde{u},\tilde{v})$.

Por la definición de ψ, (1,1) maximiza uv sobre $(u,v) \in D'$, $u \geq 0$, $v \geq 0$.

Lo anterior significa que todo punto $(u,v) \in D'$, $u \geq 0$, $v \geq 0$ satisface $u + v \leq 2$, pues si existe un punto $(1+x,1-x+\varepsilon)$ en D' con $\varepsilon > 0$, entonces los puntos que unen a éste con (1,1) deben estar en D' (dado que D' es convexo). Estos son de la forma $(1-\lambda)(1,1)+\lambda(1+x,1-x+\varepsilon)$ para $0 < \lambda < 1$, y evaluando f para estos puntos obtenemos:

$$(1+\lambda)(1+\lambda(\varepsilon-x)) = 1+\lambda\varepsilon+\lambda^2x(\varepsilon-x).$$

Tomando λ lo suficientemente cercana a 0 podemos asegurar que $\lambda^2\varepsilon+\lambda x(\varepsilon-x) > 0$ dado que $\varepsilon > 0$, y esto contradice el hecho de que (1,1) maximiza uv.

Sea D_2 tal que si $(u',v') \in D' \Rightarrow (u',v'), (v',u') \in D_2$, $u + v \leq 2$ para todo punto en D_2 por lo tanto el máximo de u para puntos $(u,u) \in D_2$ es $u=1$. Cualquier procedimiento de solución satisfaciendo N3 y N6 en $((0,0),D_2)$ debe tener (1,1) como solución dado que D2 es simétrico. Más aún, cualquier procedimiento de solución que satisface N4 debe seguir teniendo (1,1) para $(D',(0,0))$. Así pues, si ψ' satisface N1 a N6 $(\tilde{u},\tilde{v}) = (1,1)$ y usando la transformación anterior obtenemos que $(\tilde{u},\tilde{v})=(u^*,v^*)$, por lo tanto ψ es único.

Faltaría por probar el teorema en el caso (ii), sólo los procedimientos :

$$\psi((u_o,v_o),D) = (u^*,v_o) \quad , \quad \psi((u_o,v_o),D) = (u_o,v^*)$$

pueden ser óptimos de Pareto, factibles y satisfacen claramente N1 a N6.

l.q.q.d.

Nuestro objetivo al presentar este procedimiento es aplicarlo en la selección de un punto en el conjunto de negociación de los juegos cooperativos.

ej. 2.4)

Canadá ha solicitado a México temporalmente mano de obra no calificada para un proyecto determinado. México intenta negociar con Canadá buscando un salario alto por trabajador, así como una contratación del mayor número de individuos, debido al alto desempleo que sufre México. Canadá por su parte, pretende minimizar salarios para poder contratar un número mayor de obreros, y de esta manera maximizar su ganancia.

¿ Cuál será el acuerdo mutuo de no. de trabajadores y sueldo ?

Sean:

t = # de trabajadores que irán a Canadá.

s = salario por trabajador exportado.

g = función inversa de demanda del producto Canadiense.

u_C= función de utilidad de Canadá.

u_M= utilidad de México, de acuerdo al beneficio social que obtiene.

$g = 100 - q$

g = precio

q = costo

$q = t$, signifiica que las salidas son proporcionales al número de empleados.

$u_C = tg - st = t(100-t) - st$

$u_M = (st)^{1/2}$

El punto de ruptura evidentemente es (0,0), la curva óptima de Pareto puede ser determinada maximizando F(t,s), como a continuación se define:

$$F(t,s) = \rho u_C + (1-\rho)u_M \qquad 0 \le \rho \le 1$$

Dado que es un juego cooperativo, mediante F(t,s) damos lugar a un conjunto de soluciones factibles que abarca todos los posibles acuerdos que puedan existir entre México y Canadá.

$$F(t,s) = \rho(t (100 - t) - st) + (1-\rho)(st)^{1/2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t,s) = \rho (100 - 2t - s) + (1/2) (1-\rho) s(ts)^{(1/2)} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial s} F(t,s) = -\rho + (1/2) (1-\rho) t (ts)^{-(1/2)} = 0$$

Despejando ρ de ambas ecuaciones, y después de unos arreglos algebraicos tenemos que:

$$u_C = 2500 - u_M^2$$

por lo tanto la solución de Nash se obtiene maximizando $u_M u_C$ respecto a u_M :

$$u_M u_C = 2500 u_M - u_M^3$$

lo que el juego da como solución: exportar a Canada 50 trabajadores, recibiendo un sueldo cada uno de $ 16.67.

2.5 SOLUCION DE ZEUTHEN Y HARSANYI

Zeuthen (1930) y Harsanyi (1956) proponen una interpretación en términos de estrategia, la cual conduce al punto de Nash. Supongamos que en una etapa de la negociación el jugador 1 propone un acuerdo que corresponde a un nivel de utilidad (u_1^1, u_2^1), mientras que la posición de 2 es proponer (u_1^2, u_2^2), donde los dos puntos son diferentes, y cada uno es óptimo de Pareto. Es lógico suponer que $u_1^1 \ge u_1^2$ y que $u_2^2 \ge u_2^1$. Simplifiquemos considerando que el punto de ruptura R es (0,0). La formulación de Zeuthen ha añadido mérito desde el punto de vista de que provee de un <<modelo psicológico plausible para el proceso de negociación>>.

El argumento consiste en lo siguiente:

1 debe hacer una concesión $\Leftrightarrow$

$$(u_1^1 - u_1^2)/u_1^1 \leq (u_2^2 - u_2^1)/u_2^2 \Leftrightarrow u_1^1 u_2^1 \leq u_1^2 u_2^2$$

y 2 cuando la desigualdad cambie. Este procedimiento conduce puntualmente al punto de Nash.

$$(u_1^1 - u_1^2) / u_1^1 \qquad y \qquad (u_2^2 - u_2^1) / u_2^2$$

miden respectivamente las pérdidas relativas incurridas cuando los jugadores 1 y 2 conceden o hacen una propuesta como solución al negocio; dicho de otra manera, miden el porcentaje que dejo de ganar respecto de lo que yo propuse contra lo que ha propuesto mi compañero.

Una concesión no significa necesariamente aceptar la demanda del otro, más bien, el jugador que concede está sugiriendo una proposición alternativa, que no requiera para él, hacer una futura concesión en la siguiente vuelta de negociaciones.

ej. 2.5)

En el problema planteado anteriormente, "Una cláusula adicional" (ej. 2b), el cálculo de las coordenadas del punto de ruptura nos da los siguientes resultados (unidades en MM):

a = $ -1.5 para la empresa constructora (esto corresponde a las faltas por retardo).
b = $ -2 para la SCT (fig. 2.5)

Las coordenadas de la solución teórica que realiza un reparto equitativo de gastos suplementarios son las siguientes:

$$-1.5+(-1+1.5+2)/2 = -.25 \quad \text{para la empresa constructora}$$
$$-2+(-1+1.5+2)/2 = -.75 \quad \text{para la SCT}$$

representados en la figura 2.5 por el punto S. Se puede uno cuestionar sobre el importe de la falta que la empresa constructora habría de soportar, ya que ésta debía de absorber el conjunto de costos suplementarios necesarios en caso de un retardo. La lectura de la gráfica 2.5 muestra que es suficiente un castigo de 2.25 (el punto de ruptura R' para la SCT se eleva de -2 a -3.3 + 2.25 = - 1.25), de tal manera que la solución teórica implique para la empresa constructora $1. Desde luego si se fija un castigo igual a $ 3.5, la SCT quedaría ampliamente cubierta en caso de una negociación.

Razonando bajo el criterio de Zeuthen y Harsanyi, supongamos las siguientes primeras proposiciones para la constructora y la SCT:

$$(u_1^1 , u_2^1) = (-.2 , -.8) \qquad (u_1^2 , u_2^2) = (-.3 , -.7)$$

$$u_1^1 u_2^1 = .16 \leq u_1^2 u_2^2 = .21$$

$\rightarrow$

I debe hacer una concesión (u_1^3 , u_1^3) por lo menos tan grande como el producto de la demanda del oponente, y más grande si es posible, por ejemplo:

$$(u_1^3 , u_1^3) = (-.28 , -.72)$$

donde

$$u_1^3 u_2^3 = .2016 \geq u_1^2 u_2^2 = .21$$

$\rightarrow$

el jugador II tiene que hacer una concesión, y bajo este procedimiento llegamos al punto:

$$(u_1 , u_2) = (-.25 , -.75).$$

2.6 SOLUCION DE NEGOCIACION CON AMENAZAS

Supongamos el juego

$$\begin{bmatrix} (a, b) & (-a,-b) \\ (-b,-a) & (b, a) \end{bmatrix}$$

tal que $0 < a << b$.

Su región de pagos es perfectamente simétrica respecto de la función identidad, $v_I = v_{II} = 0$, el conjunto de negociación B está constituido por una sola línea del punto (a,b) al (b,a) correspondientes a las estrategias puras (I_1,II_1) y (I_2,II_2), de tal manera que la solución de Shapley o el valor maximin de negociación es:

$$((a + b)/2 , (b + a)/2)$$

pero si el jugador II decide que el valor maximin no es suficiente para sus necesidades, y por lo tanto opta por jugar constantemente la estrategia II_1, el jugador I se encuentra en una situación crítica, ya sea a obtener un ingreso muy chico mediante I_1 o a perder una cantidad considerable jugando I_2, por lo tanto a pesar de que la región de pagos sea simétrica, el jugador II puede tratar de forzar la situación, amenazando para obtener más que I. A esta manera de jugar le llamaremos utilización de estrategias forzantes.

TEOREMA:

Supongamos un juego bipersonal finito cooperativo, en el cual los jugadores seleccionan estrategias forzantes para determinar su pago, y los resultados de la negociación están dados por el procedimiento de negociación de Nash.

Existe cuando menos un punto de equilibrio de las negociaciones forzantes, y todos los puntos de equilibrio coinciden en la misma solución en la negociación.

DEM:

La demostración se reduce a encontrar la óptima negociación. Se demostrará para el caso cuando el conjunto óptimo de Pareto es de la forma

$$\{ (u,v) \mid au + v = b,\ c_2 \geq u \geq c_1 \}$$

(en otros casos el conjunto óptimo de Pareto está formado por la unión de conjuntos del mismo tipo, y el procedimiento sería analizar cada uno por separado)

Supongamos que la estrategia forzante de I es x, y de II es y, el objetivo de I es maximizar:

$$f(u,v)=(u-e_1(x,y))(v-e_2(x,y))$$

$$=(u-e_1(x,y))(b-au-e_2(x,y))$$

$$\Rightarrow \quad u_{max}= -(\ e_2(x,y) - ae_1(x,y) + b\ )\ /\ 2a$$

$$=(\ b + \textstyle\sum_{i=1,n}\sum_{j=1,m} x_i (ae^1_{ij} - e^2_{ij}) y_j\ )$$

de tal manera que I escoge x para maximizar:

$$(1) \qquad \sum_i \sum_j x_i\ (\ ae^1_{ij} - e^2_{ij}\ )\ y_j$$

contra y. De manera análoga llegamos a:

$$v_{min}=(b - \textstyle\sum_{i=1,n}\sum_{j=1,m} x_i (ae^1_{ij} - e^2_{ij}) y_j)/2$$

y el objetivo de II es determinar la estrategia y para minimizar (1) en contra de la estrategia x.

Entonces, dado que el problema gira alrededor de (1), se puede pensar como un juego bipersonal de suma cero con matriz de pagos

$$ae_1(\ ,\ ) - e_2(\ ,\ ).$$

Las estrategias óptimas x^*, y^* de este juego serán las estrategias forzantes de negociación óptimas, y el punto de ruptura estará dado por:

$$(\ e_1(x^*,y^*)\ ,\ e_2(x^*,y^*)\ ).$$

Si la solución del juego matricial ae_1-e_2 es w^*, obtenemos la solución de negociación forzada:

$$u^*=\ (\ b + w^*\ )/(2a) \qquad v^* = (\ b - w^*\ )/2$$

Aún así se debe verificar que la solución cumpla con la condición de

$$c_1 \leq u \leq c_2.$$

de no ser así la solución de negociación forzada debe ser alguno de los puntos terminales en el conjunto de negociación.

ej. 2.6) Fusión Empresarial.

La empresa KC se encuentra en un mercado con un cierto producto, donde la demanda depende del precio y de la cantidad, que a su vez cumplen la siguiente relación:

$$p(q) = a - bq$$

(p=precio, q=cantidad, a,b>0)

Este mercado es satisfecho por la empresa KC, donde la función de costo de producción (relación costo y cantidad) es:

$$c(x_1)=c_1x_1$$

(c(x)=costo de produccion, c_1=costo unitario, x_1=cantidad)

Una nueva empresa, la PG intenta penetrar en el mismo mercado con un producto similar. Sin embargo, una cierta patente le permite tener un costo unitario de producción c_2 tal que $c_2 < c_1$. Antes de que se libere una guerra de economía de costos, las dos empresas deciden tener una junta para platicar y llegar a un acuerdo. Los términos del acuerdo previenen que la PG absorba a la KC por un paro de producción, todo esto reflejado debido al precio de compra. El objetivo es determinar el precio de compra.

La ganancia máxima que podría obtener la PG si se encontrase sola en el mercado es:

$$\Pi_2(x_2) = px_2-c_2x_2 = (a-bx_2)x_2-c_2x_2$$

con:

$$\partial\, \Pi_2(x_2) \,/\, \partial\, x_2 = -2bx_2+(a-c_2)x_2 = 0 \Rightarrow$$

$$x_2^* = (a-c_2)/2b, \qquad \Pi_2^*(x_2^*) = (a-c_2)^2 / 2b$$

Es, por lo tanto la cantidad anterior la que ha de repartirse entre las 2 empresas. Procedemos a encontrar el punto de ruptura; en caso de no llegar a ningún acuerdo, cada empresa puede amenazar de llevar la producción a un nivel x_1 para KC y x_2 para PG. Cuyas utilidades serían:

$$\Pi_1(x_1) = [a-b(x_1+x_2)]x_1-c_1x_1$$

$$\Pi_2(x_2) = [a-b(x_1+x_2)]x_2-c_2x_2$$

Estamos considerando que ambas empresas producen al mismo tiempo. Las amenazas óptimas de parte de cada una, son determinadas por el juego de suma cero en el cual la firma KC busca el máximo $\Pi_1(x_1)-\Pi_2(x_2)$, mientras que la firma PG busca el mínimo de esta cantidad:

$$\Pi_1(x_1) -\Pi_2(x_2) = \{[a-b(x_1+x_2)]x_1-c_1x_1\} - \{ [a-b(x_1+x_2)]x_2-c_2x_2\}$$

$$= [(a-bx_1)x_1-c_1x_1] - [(a-bx_2)x_2-c_2x_2]$$

Es evidente que la función de ganancia se descompone en una función de x_1 menos una función de x_2; además, estas dos funciones corresponden precisamente a las ganancias esperadas si cada empresa se encontrase sola en el mercado. Por lo tanto:

$$\underset{x1}{\text{Max}}\ \underset{x2}{\text{Min}}\ [\Pi_1(x_1)-\Pi_2(x_2)] =$$

$$\underset{x1}{\text{Max}}\ [(a-bx_1)x_1-c_1x_1] - \underset{x2}{\text{Max}}\ [(a-bx_2)x_2-c_2x_2)]$$

Recordando que Π_1^* y Π_2^* denotan las ganancias máximas del monopolio, observe que el valor del juego es $\Pi_1^* - \Pi_2^*$, las amenazas óptimas consisten en producir como si la otra empresa no existiera. En el acuerdo final las ganancia se reparten como sigue:

$$1/2\ \Pi_2^* + 1/2\ [\Pi_1^* - \Pi_2^*] = 1/2\ \Pi_1^* \quad \text{para KC.}$$

y

$$1/2\ \Pi_2^* - 1/2\ [\Pi_1^* - \Pi_2^*] = \Pi_2^* - 1/2\ \Pi_1^* \quad \text{para PG.}$$

3 NEGOCIACION A N JUGADORES CON UTILIDADES TRANSFERIBLES

En los juegos bipersonales no-cooperativos se presentan 2 coaliciones, jugador I y II actuando independientemente; en un juego bipersonal cooperativo existe una sola coalición que involucra a ambos jugadores, y en un juego n-personal habrá tantas coaliciones como conjuntos de jugadores haya en común acuerdo.

Establecer una coalición (S) implica que los jugadores en ella actúan como si fueran uno sólo, previamente a una comunicación completa entre ellos, juegan en común acuerdo un conjunto de estrategias conjuntas, con el propósito de maximizar la suma de los pagos conjuntos de los jugadores en la coalición. (Otro problema se establece al querer repartir la ganancia entre los miembros de la coalición, el cual se analizará más adelante).

$$S \subseteq N = \{ 1,2,\ldots,n \}$$

El término "Utilidades Transferibles" significa que el pago atribuido para cualquier coalición (S) en particular, consiste en la adición de todos los pagos individuales de cada miembro de la coalición, los cuales suman no más de un número en particular. Pensamos utilidades transferibles en el sentido de dinero, se da lugar a traspasos de ganancias entre miembros de una misma coalición, distinto sería el caso en juegos donde la utilidad representa satisfacción personal la cual sería difícil de transferir.

Intuitivamente se puede creer que la teoría de los juegos n-personales es simplemente una extensión de los juegos bipersonales, pero en realidad ambas teorías llegan a diferir radicalmente. Se ha observado en el campo práctico, que entre las situaciones en las que están involucrados 2 individuos y aquellas que involucran 3 o más, existe una mucha mayor diferencia que la que existe entre el 2 y el 3.

3.1 FUNCION CARACTERISTICA (υ)

La función característica de un juego n-personal asigna a cada subconjunto S de jugadores el máximo valor $\upsilon(S)$ que dicha coalición puede garantizar por sí misma, mediante la coordinación de las estrategias de sus miembros, sin importar el comportamiento de los restantes $N \setminus S$ jugadores.

Se definen :

X_S = conjunto de estrategias mixtas para S

$Y_{N\setminus S}$ = conjunto de estrategias mixtas para $N\setminus S$

Un juego n-personal con dos coaliciones: S y $N\setminus S$, resulta ser un juego bipersonal no cooperativo. En un juego bipersonal de suma cero, para el cual existe una única solución dada por el teorema del minimax, el valor del juego v es igual a $\upsilon(S)$:

$$\upsilon(S) = \max_{x \in X_S} \min_{y \in Y_{N\setminus S}} \sum_{i \in S} e_i(x,y)$$

donde

i) $\upsilon(N) = 0$

ii) $\upsilon(S) = -\upsilon(N\setminus S) \quad \forall\, S \subseteq N$

iii) $\upsilon(\emptyset) = 0$

iv) $\upsilon(S \cup T) \geq \upsilon(S) + \upsilon(T)$ con $S,T \subseteq N$

A continuación se mencionan algunas propiedades de la función característica que serán utiilizadas en subcapítulos posteriores.

DEF. ADITIVA Y SUPERADITIVA (2)

Sean $S,T \subseteq N$ coaliciones disjuntas, es decir, $S \cap T = \emptyset$ tal que:

a) si $\upsilon(S \cup T) \geq \upsilon(S) + \upsilon(T) \Rightarrow \upsilon$ es Superaditiva.

b) si $\upsilon(S \cup T) = \upsilon(S) + \upsilon(T) \Rightarrow \upsilon$ es Aditiva.

Por lo tanto una coalición benéfica para un grupo de individuos es del tipo superaditiva, mientras que en la aditiva los jugadores pueden jugar por ellos mismos obteniendo lo mismo que asociándose.

DEF. NO ESENCIAL (2)

Los juegos en los cuales υ es aditiva son llamados no esenciales y es trivial que:

$$\upsilon(N) = \sum_{i=1}^{n} \upsilon(\{i\})$$

DEF. ESENCIAL (2)

Un juego que no es no esencial es esencial.

ej. 3.1) Contaminación del lago (4)

Supongamos un lago alrededor del cual existen n fábricas, las cuales diariamente utilizan agua para sus procesos y, a su vez, desechan diariamente al lago todos sus desperdicios, si éstos últimos no son tratados antes de tirarse, el costo por purificar el agua para la producción diaria aumenta. Cuesta \$b/día/fábrica tratar sus desperdicios antes de tirarlos al lago, y cuesta \$ka/día/fábrica purificar el agua necesaria para su abastecimiento, donde k es el número de fábricas que no tratan sus desperdicios, y a es una constante positiva. Suponiendo que $a \leq b \leq na$, determinar la función característica.

SOL.

Consideremos primero la gran coalición N, en la cual nadie trata sus desperdicios, si un jugador cambia de "No tratar" a "Tratar Desperdicios", su contribución a la utilidad conjunta cambia de $-na$ a $-b$. Suponiendo que $b \leq na$., si todas las fábricas trataran sus desperdicios, $\Rightarrow$

$$\upsilon(N) = -nb.$$

Similarmente, para la coalición $S \subseteq N$, donde $\#S = t$ y $n-t$ son los que definitivamente no tratan sus desperdicios:

$$\upsilon(S) = -t\ (\ (n - t)a + \min\ (\ b\ ,\ ta\ )\ ) \quad \forall\ S \subseteq N$$

y

$$\upsilon(\emptyset) = 0$$

Como anteriormente se mencionó, para todo juego existe una función característica, y conviene estudiar los juegos de acuerdo a la misma, labor que se simplifica mucho considerando el concepto de equivalencia estratégica.

3.2 EQUIVALENCIA ESTRATEGICA DE LA FUNCION CARACTERISTICA

DEF. EQUIVALENCIA ESTRATEGICA (1)

Consideraremos dos funciones características como equivalentes a aquéllas que conducen a las mismas consideraciones estratégicas por parte de los jugadores.

Dos funciones características υ y υ' son equivalentes estratégicamente si:

$$\upsilon'(S) = c\upsilon(S) + \sum_{i \in S} a_i$$

El valor c se puede interpretar como una conversión monetaria de un juego a otro, es lógico pensar que un cambio de este tipo no afecta las decisiones estratégicas de los jugadores, los valores a_i's se pueden considerar como una inscripción al juego por parte de cada uno de los jugadores, lo que teóricamente no altera la manera de jugar[1]; por lo tanto, cualquier juego lo podemos normalizar de tal manera que el valor de la función característica de un individuo sea cero, y el valor de la coalición de los n jugadores sea 1.

(1) Empiricamente se ha observado que la manera de jugar de los individuos cambia de acuerdo al monto que estan arriesgando. Es comun presentar un comportamiento mas conservador despues de grandes perdidas, y menos despues de grandes ganancias. Lo cual puede ser representado mediante funciones de utilidad.

LEMA:

Todo juego esencial es equivalente estratégicamente a un juego tal que: $\upsilon'(\{i\})=0$ $1 \le i \le n$ y $\upsilon'(N)=1$.

DEM:

Sea υ la función característica del juego. Se define una función de equivalencia estratégica υ':

$$\upsilon'(S) = c\upsilon(S) - c\sum \upsilon(i) \quad \text{donde } c = \upsilon(N) - \sum \upsilon(i)$$

$i\in S \qquad\qquad\qquad i\in S$

que cumple con todas la propiedades.

ej. 3.2) En el juego Contaminación del lago (3.1)

$$\upsilon(S) = -t\ (\ (n-t)a + \min\ (\ b\ ,\ ta)\ )\ \text{donde } t=\#S,$$
$$\upsilon(i) = -\ (\ (n-1)a + \min\ (\ b\ ,a\ )\ ) = -na$$
$$\upsilon'(S) = c\ \upsilon(S) - c\sum_{i\in S}\upsilon(i)$$
$$c = 1\ /\ (\ \upsilon(N) - \sum_{i\in N}\upsilon(i)\ ) = 1\ /\ (n^2a - nb)$$

$$\upsilon'(i) = c\ (-na-(-na)) = 0$$
$$\upsilon'(N) = c\ (-nb-(-n^2a)) = 1$$
$$\upsilon'(S) = (\ t^2a + \min\ (\ b\ ,\ ta\ )\ )\ /\ (n^2a - nb) \le 1.$$

Los pagos finales o imputaciones de los jugadores, influyen determinantemente en sus decisiones previas al juego; en 3.3 se definen las imputaciones, y a partir de 3.4 se proponen soluciones para juegos n personales.

3.3 IMPUTACIONES

Evidentemente la repartición de las ganancias entre los miembros de una cierta coalición es un factor determinante para formar la coalición, desde luego, existirán individuos que favorezcan más a una determinada coalición que otros. Debemos asumir que las ganancias pueden ser divididas infinitamente y que no existe problema al transferir pagos de un jugador a otro.

DEF. IMPUTACION (2)

Una imputación en un juego n-personal con función característica υ es un vector $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ que satisface;

$$\text{i)}\qquad x_i \ge \upsilon(\{i\}) \qquad i=1,\dots,n$$

$$\text{ii)}\qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = \upsilon(N)$$

i) donde x_i es lo que finalmente obtiene el jugador i, condición bastante razonable, pues es dificil imaginar que el jugador pudiera aceptar un pago menor de lo que él esperaría recibir jugando solo y olvidándose de la coalición.

ii) utiliza en razonamiento análogo para todos los jugadores, todos unidos no querrán aceptar menos del valor total del juego, esta condición es necesaria para situarse en el conjunto óptimo de Pareto.

El valor $\upsilon(N)$ es lo máximo que pueden obtener todos los jugadores trabajando juntos.

DEF. CONJUNTO DE IMPUTACIONES $(E(\upsilon))$ (2)

$$E(\upsilon) = \{ x=(x_1,\dots,x_n) \mid x_i \geq \upsilon(i), \ \sum_{i=1}^{n} x_i = \upsilon(N) \}$$

En la figura 3.3 se ilustra el conjunto de imputaciones de un juego tripersonal, donde adoptamos un sistema de coordenadas en el cual la suma de las distancias de cualquier punto p dentro del triángulo isóceles a cada una de las rectas es una constante; $\Delta J_1 J_2 J_3$ es el conjunto de todas las imputaciones posibles, donde $J_1 = (\upsilon(1),0,0)$, $J_2 = (0,\upsilon(2),0)$ y $J_3 = (0,0,\upsilon(3))$.

Nota : En un juego no esencial la cardinalidad de $E(\upsilon)$ es 1, pues la suma de las funciones características individuales es $\upsilon(N)$, y a nadie se le puede dar menos de lo que por sí mismo podría obtener.

ej 3.3) Para el ejemplo 3.1 "Contaminación de un lago", el conjunto de imputaciones queda determinado de la siguente manera:

$$E(\upsilon) = \{ x=(x_1,\dots,x_n) \mid x_i \geq -na, \ i=1..n, \ \sum_{i=1}^{n} x_i = -nb \}$$

Uno de los conceptos más fuertes que ayudan para segregar imputaciones, es el de Dominación, que a continuación se menciona.

DOMINACION

Supongamos un juego tetrapersonal esencial de suma constante, que después de ser normalizado 0,1 resulta:

$$\upsilon(i) = 0 \qquad i \in N \qquad N=(1,2,3,4)$$
$$\upsilon(i,j) = 1/2 \qquad i,j \in N,\ i \neq j$$
$$\upsilon(i,j,k) = 1 \qquad i,j,k \in N \qquad i \neq j \neq k$$
$$\upsilon(N) = 1\ ,\ \upsilon(\emptyset) = 0$$

donde en un primer arreglo, se asocian (1,2) y (3,4) con

$$x = (x_1,x_2,x_3,x_4) = (1/4,\ 1/4,\ 1/4,\ 1/4)$$

en esta situación (1,2) le pueden proponer a (3) asociarse con ellos obteniendo los siguientes pagos:

$$x = (1/3,\ 1/3,\ 1/3,\ 0)$$

(podemos decir entonces que la imputación $(1/4,1/4,1/4,1/4)$ es dominada por la imputación $(1/3,1/3,1/3,0)$ para la coalición S = (1,2,3)) pero a su vez (4) le puede proponer a (3) asociarse con él, recibiendo un pago $x_3 \geq 1/3$, donde $x_4 = 1/2 - x_3$, por lo tanto podemos decir que la imputación (x_1,x_2,x_3,x_4) domina a la imputación $(1/3,1/3,1/3,0)$ sobre la coalición (3,4). Pero, ¿cuándo ha de terminar este proceso?

DEF: Dominación sobre (7)

Sean x,y dos imputaciones, x domina a y sobre S ($x \succ_S y$) si;

i) $x_i > y_i \quad \forall\ i \in S$

ii) $\sum_{i \in S} x_i \leq \upsilon(S)$ (significa que S tenga poder suficiente para asegurar la ganancia de sus miembros)

DEF: Dominación (7)

Sean x,y dos imputaciones, x domina a y ($x \succ y$) si;
x domina a y para alguna coalición S.

Una imputación será considerada en las negociaciones previas al juego, únicamente en el caso de que no sea dominada.

3.4 EL NUCLEO

El núcleo es un conjunto de vectores de pago que posee un criterio mínimo de aceptabilidad. El vector de pagos $x \in \mathbb{R}^n$ está en el núcleo si es factible para los integrantes de N y si ninguna coalición pudiera, por sí misma, obtener más para cada uno de sus miembros de lo que obtiene por X.

DEF. Núcleo : (2)

El núcleo del juego ($C(\upsilon)$) es el conjunto de imputaciones que no son dominadas para ninguna coalición.

TEOREMA

$$x \in C(\upsilon) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} & \sum_{i=1}^{n} x_i = \upsilon(N) \\ \text{(ii)} & \sum_{i \in S} x_i \geq \upsilon(S) \quad \forall\, S \subset N \end{cases}$$

DEM. ($\Leftarrow$)

Sea x que satisface (i) y (ii), haciendo $S=\{1\},\{2\},\ldots\{n\}$ en (ii) demostramos que x es una imputación. Supongamos que es dominada ($y \succ_S x$) entonces

$$y_i > x_i \;\; \forall\, i \in S \quad \therefore \quad \sum_{i \in S} y_i > \sum_{i \in S} x_i \geq \upsilon(S) \quad \nabla$$ (contradice la definición de dominación)

DEM. ($\Rightarrow$)

Supongamos ahora que $x \in C(\upsilon)$, como es una imputación, (i) se cumple. Supongamos que para alguna coalición S (ii) no se cumple, es decir, $\exists\, S \subseteq N \;\tau\; \sum x_i < \upsilon(S)$.

Definimos ε por:

$$\upsilon(S) = \sum_{i \in S} x_i + s\varepsilon,$$

donde $s = \#S$ es el número de jugadores en la coalición S.

$$\text{Sea} \quad y_i = \begin{cases} x_i + \varepsilon & i \in S \\ \upsilon(i) + (\upsilon(N) - \upsilon(S) - \sum_{i \notin S} \upsilon(\{i\}))/(n - s) & i \notin S \end{cases}$$

$y = (y_1, \ldots y_n)$ es una imputación dado que

$$y_i \geq \upsilon(i) \quad \forall \quad i \in 1,n \quad y \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = \upsilon(N).$$

Se cumple que

$$y_i > x_i \ \forall \ i \in S \ y \ \textstyle\sum_{i \in S} y_i = \upsilon(S).$$

Entonces y domina a x sobre S, lo que contradice que x pertenezca al núcleo, por lo tanto x debe satisfacer (ii) para cualquier coalición.

El núcleo es un conjunto convexo y cerrado, pero tiene una gran desventaja considerándolo como solución de juegos n-personales, pues para muchos el núcleo es vacío.

LEMA:

Si υ es la función característica de un juego esencial de suma constante $\Rightarrow C(\upsilon) = \{ \emptyset \}$.

DEM:

Esencial significa : $\upsilon(N) > \sum_{i=1}^{n} \upsilon(i)$.

Suma constante: $\upsilon(N \setminus S) + \upsilon(S) = \upsilon(N) \quad \forall \ S \subset N$.

Supongamos que $\exists \ x \in C(\upsilon)$, dada la propiedad de suma constante:

$$\sum_{i=2}^{n} x_i \geq \upsilon(2,3,\ldots,n) = (\upsilon(N) - \upsilon(1)) / n.$$

Como x es una imputación, $\Rightarrow x_1 + \sum_{i=2}^{n} x_i = \upsilon(N)$, por lo que concluimos:

$x_1 \leq \upsilon(1)$, $\therefore$ $x_i \leq \upsilon(i)$ $i=1,2,\ldots n.$, y como el juego es esencial:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \le \sum \upsilon(i) < \upsilon(N)$$

lo que contradice que x sea una imputación. Por lo tanto el núcleo es vacío.

Es posible determinar si un juego tiene un núcleo no vacío mediante la resolución de un problema de programación lineal, de tal manera que el núcleo existirá si el óptimo de la función objetivo es menor que $\upsilon(N)$. El problema queda determinado de la siguiente forma:

$$\text{Min } z = \sum_{i\in N} x_i$$

$$\text{s.c.} \qquad \sum_{i\in K} x_i \ge \upsilon(K) \qquad \forall\, K \subseteq N \;\tau\; K \ne N$$

así pues:

$$C(\upsilon) \ne \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad z_{min} \le \upsilon(N).$$

ej. 3.4) Mercado Ecónomico.

En un mercado económico tenemos tres comerciantes que no están forzados a negociar uno con otro y se mueven en una economía de precios controlados. El comerciante 1 es el único que cuenta con un producto, el cual lo puede vender a un precio máximo de " a " en su población, sin embargo en la población donde únicamente el comerciante 2 tiene permisos para vender, se puede obtener " b ", y en la población del comerciante 3 se puede llegar a obtener hasta " c ". Dado que: $0 < a < b \le c$, la función característica queda determinada de la siguiente manera:

$$\upsilon(\emptyset) = 0 \quad \upsilon(1) = a \quad \upsilon(2) = 0 \quad \upsilon(3) = 0$$
$$\upsilon(1,2) = b \quad \upsilon(1,3) = c \quad \upsilon(2,3) = 0 \quad \upsilon(1,2,3) = c$$

para determinar si existe el núcleo, planteamos el siguiente problema de programación lineal:

$$\text{Min } z = x_1 + x_2 + x_3$$

sc.

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad\quad\quad\quad\quad & \geq a \\ x_1 + x_2 \quad\quad\quad & \geq b \\ x_1 + x_2 + x_3 & \geq c \\ x_2 , x_3 & \geq 0 \end{aligned}$$

es trivial que $z_{min} = c \leq \upsilon(N)$, por lo tanto el núcleo sí existe.

$$(x_1,x_2,x_3) \in C(\upsilon) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \geq a, & x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \geq b, & x_2 + x_3 \geq 0 \\ x_1 + x_3 \geq c, & x_1 + x_2 + x_3 = c \end{cases}$$

simplificando:

$$C(\upsilon) = \{ x \mid (x,0,c-x),\ b \leq x \leq c \}. \text{ (ver fig 3.4)}$$

Lo que significa que el jugador 1 puede obtener desde b hasta c y el jugador 3 desde 0 hasta c-b; en este caso el jugador 2 fue benéfico para que 1 pudiera pedir a 3 ganar cuando menos b, y para que no se asocien {1,2}, 3 tiene que ofrecer a 1 algo mayor que b, desde luego, ofrecer c no le daría ninguna ganancia a 3. $E(\upsilon)$ está representado por la región sombreada del mismo triángulo en la figura 3.4.

3.5 CONJUNTOS ESTABLES (Solución de Von Neumann-Morgenstern)

Concepto semejante al núcleo, que considera un conjunto aceptable de resultados, que rara vez alcanza una solución única. En lugar de buscar una imputación con la cual estén de acuerdo todas las coaliciones, se determina un conjunto de imputaciones, de tal manera que si tomamos cualquier imputación fuera del conjunto, existe una imputación dentro del conjunto la cual es preferida por alguna coalición con poder de obtenerla.

Existen dos diferencias importantes entre el conjunto estable y el núcleo: en primer lugar, el conjunto estable no es único como el núcleo, y en segundo lugar, existen muchos juegos que tienen conjuntos estables, pero que tienen un núcleo vacío.

DEF.CONJUNTO ESTABLE (2)

Un conjunto estable $S(\upsilon)$ de un juego n-personal con función característica υ es cualquier conjunto de imputaciones tal que:

(i) si $x , y \in S(\upsilon) \Rightarrow x$ no debe dominar a y , ni y a x
(estabilidad interna).

(ii) si $z \notin S(\upsilon) \Rightarrow \exists\ x \in S(\upsilon)$ tal que $x \succ z$
(estabilidad externa).

TEOREMA: $C(\upsilon) \subseteq S(\upsilon)$

DEM:

$$\text{Supongamos } \exists\ z \in C(\upsilon) \ \tau \ z \notin S(\upsilon)$$
$$z \in C(\upsilon) \Rightarrow \upsilon(S) \le \sum_{i \in S} z_i \quad \forall\ S \subseteq N.$$
$$z \notin S(\upsilon) \Rightarrow \exists\ x \in S(\upsilon) \ \tau \ x \succ z$$
$$\Rightarrow \exists\ S \subseteq N \ \tau \ x \succ_S z .$$
$$\Rightarrow x_i \ge z_i \quad \forall\ i \in S$$
$$\upsilon(S) \le \sum z_i \le \sum x_i \le \upsilon(S)$$
$$\therefore \sum z_i = \sum x_i \quad \text{y como } x_i \ge z_i$$
$$\Rightarrow x_i = z_i\ \forall\ i \in S$$
$$\nabla. \text{ lqqd.}$$

Nótese que $C(\upsilon) \subseteq S(\upsilon) \subseteq E(\upsilon)$, todo conjunto estable debe contener al núcleo y cualquier imputación fuera del conjunto estable es dominada, de modo que las imputaciones no dominadas están dentro del conjunto estable. Existe un inconveniente importante al considerar al conjunto estable como la solución ideal, pues además de ser difícil de determinar este conjunto para cada juego, para algunos de ellos, el conjunto es vacío.

LEMA:

Una imputación 'x' nunca puede dominar a otra 'y' en la coalición de solo un jugador o en la coalición de todos.

DEM:

En el primer caso;

si $x > y \Rightarrow x_i > y_i$, y como 'y' es imputación $\Rightarrow$
$y_i \geq \upsilon(i), \Rightarrow x_i > y_i$. ∇.
(pues contradice la definición de imputación)

El segundo caso se deduce de que en la gran coalición N, no hay imputación que pueda dar más que otra.

l.q.q.d.

ej. 3.5)
Consideremos el juego

$$\upsilon(1) = \upsilon(2) = \upsilon(3) = 0$$
$$\upsilon(1,2) = \upsilon(2,3) = \upsilon(1,3) = 100$$
$$\upsilon(1,2,3) = 100$$

un conjunto estable para este juego es el siguiente:

$$S(\upsilon) = \{ (x_1,x_2,x_3) \mid x_1 + x_2 = 100 \text{ , } x_3 = 0 \}$$

otros pueden ser:

$$S_a(\upsilon) = \{ (x_1,x_2,x_3) \mid x_1 + x_2 = 100 - a, x_3 = a\} \text{ con } 0 < a \leq 50$$

Se puede comprobar fácilmente que para cualquier par de imputaciones tomadas en $S(\upsilon)$ o en $S_a(\upsilon)$ no existe dominancia de una sobre la otra para cualquier coalición. Para analizar si se cumple con la estabilidad externa, basta suponer que no se cumple, y se debe buscar una coalición S sobre la que haya dominancia, de tal manera que contradiga la suposición.

3.6 NUCLEOLO

El nucleolo está definido en relación a un conjunto de vectores de pago dados, y la idea en la que se basa es la siguiente: se busca hacer que la coalición en peor situación respecto de una imputación esté en mejores circunstancias que la coalición en peor situación respecto de cualquier otra imputación.

Un conjunto de pagos está en el nucleolo si el exceso (como a continuación se define) para ese vector de pagos (para todas las coaliciones) es lo más pequeño posible. El nucleolo tiene las siguientes propiedades, por las que se considera una solución importante en los juegos n-personales:

(a) Todo juego tiene un y sólo un nucleolo.
(b) Si existe el núcleo, el nucleolo es parte de él.

Para cualquier imputación x y cualquier coalición S,

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i$$

entonces cada coalición calcula su exceso: $\upsilon(S)-x(S)$, y mientras más grande sea este número, la coalición se encuentra en peor situación con respecto a esa imputación. Constituye la diferencia entre lo que podrían obtener por ellos mismos y lo que actualmente obtienen.

Definimos $\theta(x)$, para una imputación x en particular, como los 2^n valores $\upsilon(S)-x(S)$ $\forall$ $S \subseteq N$ ordenados decrecientemente:

$$\theta(x) = (\theta(x)_1, \theta(x)_2, \ldots, \theta(x)_{2^n})$$

Se comparan dos imputaciones de la siguiente manera:

$$\theta(x) < \theta(y) \quad \text{si} \quad \theta(x)_1 < \theta(y)_1,$$
$$\text{ó si} \quad \theta(x)_k = \theta(y)_k,$$
$$\text{para } k=1,2,\ldots i-1 \quad \text{y} \quad \theta(x)_i < \theta(y)_i,\ i \leq 2^n.$$

DEF. NUCLEOLO. (2)

El nucleolo $N(\upsilon)$ es la menor imputación de acuerdo al orden que se ha definido.

$$N(\upsilon)=\{\, x \in E(\upsilon) \mid \theta(x) < \theta(y) \ \forall\, y \in E(\upsilon) \,\}$$

ej.) Supongamos un juego con tres jugadores, tal que:

$$\upsilon(\{i\}) = 0 \ \forall \ i \in N,$$
$$\upsilon(\{1,2\}) = 4, \quad \upsilon(\{1,3\}) = 2,$$
$$\upsilon(\{2,3\}) = 3 \text{ and } \upsilon(N) = 6;$$

el vector de pagos (2,3,1) es el único elemento del nucleolo en $E(\upsilon)$ (conjunto de imputaciones). El exceso para la imputación x = (2,3,1) es el siguiente:

$$\begin{gathered}
\upsilon(\{1\}) - x(1) = 0 - 2 = -2 \\
\upsilon(\{2\}) - x(2) = 0 - 3 = -3 \\
\upsilon(\{3\}) - x(3) = 0 - 1 = -1 \\
\upsilon(\{1,2\}) - x(1,2) = 4 - 5 = -1 \\
\upsilon(\{1,3\}) - x(1,3) = 2 - 3 = -1 \\
\upsilon(\{2,3\}) - x(2,3) = 3 - 4 = -1 \\
\upsilon(\{1,2,3\}) - x(1,2,3) = 0 \\
\upsilon(\emptyset) - x(\emptyset) = 0 \quad \Rightarrow \\
\theta(x) = (0,0,-1,-1,-1,-1,-2,-3)
\end{gathered}$$

para cualquier otra imputación, el exceso de las tres coaliciones de dos jugadores seguiría sumando -3, si considerásemos otra imputación 'y' cuyo exceso para algún S con dos jugadores fuera menor que -1, entonces alguno de los otros excesos de dos jugadores tendría que ser mayor que -1, por lo que esa imputación 'y' lexicográficamente sería mayor en su tercera coordenada. Por lo tanto, la imputación x = (2,3,1) es la única que cumple la condición de acuerdo al orden definido.

3.7 EL VALOR DE SHAPLEY

Los conceptos de solución previamente mencionados se manejan como resultados equilibrados del juego:
- el núcleo porque no es dominado.
- el conjunto estable porque domina todo lo que esté fuera de él.
- el nucleolo porque minimiza el máximo de lo peor.

Todos estos conceptos consideran un conjunto de imputaciones que son factibles de persistir durante la negociación previa al juego. El valor de Shapley se puede calcular para cualquier juego superaditivo definido en términos de su función característica, que tenga un número finito de jugadores. Tiene la ventaja de dar una única solución que satisface tanto el raciocinio individual ($x_i \geq \upsilon(i)$) como el raciocinio de grupo ($\sum_{i\in S} x_i \geq \upsilon(S)$). El pago a cada jugador es un promedio ponderado de las contribuciones que el jugador hace en cada una de las coaliciones a las que puede pertenecer, de acuerdo al número de jugadores de esa coalición.

Shapley se enfocó a lo que cada jugador puede razonablemente esperar obtener durante las negociaciones previas al juego, y estableció tres teoremas S1,S2 y S3.

Sea $\phi_i(\upsilon)$=la ganancia esperada del jugador i con la función caracteristica υ.

S1 $\phi_i(\upsilon)$ es independiente de la clasificación de los jugadores. si π es una permutación de 1,2,...n y $\pi\upsilon$ es la función caracteristica del juego, con los números de los jugadores permutados por π, entonces:

$$\phi_{\pi(i)}(\pi\upsilon)=\phi_i(\upsilon).$$

S2 $\sum_{i=1}^{n} \phi_i(\upsilon) = \upsilon(N).$

S3 $\phi_i(u + \upsilon) = \phi_i(u) + \phi_i(\upsilon).$

S1 y S2 son razonables, pero es difícil establecer la correcta interpretación de S3, pues ¿qué implica jugar 2 juegos simultaneamente? ...

TEOREMA: Existe solamente una función que satisface S1,S2 y S3:

$$\text{(valor de Shapley)}\ \phi_i(\upsilon) = \sum_{s:i\in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} (\upsilon(S)-\upsilon(S\setminus(i)))$$

$$(s = \# S,\ n = \# N)$$

Se está considerando que los jugadores entran al juego aleatoriamente. Cuando i llega, $S\setminus(i)$ son los jugadores que ya habian entrado, entonces i obtendrá el monto extra que él logra en el juego, $\upsilon(S) - \upsilon(S\setminus(i))$. La probabilidad de que i llegue después de que hayan llegado $S\setminus(i)$ y antes de los restantes $N\setminus S$, es :

$$\gamma = (s-1)!(n-s)!/n!$$

podemos entender a $\phi_i(\upsilon)$ como la esperanza de juego para i.

ej. 3.7) Un juego de votos. (5)

Existen numerosas entidades administrativas que agrupan miembros de origen diverso y que son llamadas a tomar sus decisiones utilizando un procedimiento de voto. También hay asambleas políticas, consejos administrativos de sociedades anónimas, comisiones paritarias universitarias, del consejo de seguridad de la O.N.U. etc.

Con frecuencia, algunos miembros tienen más votos que otros, ya sea porque representan intereses más importantes (consejos de administración), o también por razones puramente políticas. Algunas veces un cierto número de miembros se juntan para formar un grupo ligado por la disiplina del voto (acuerdos secretos entre accionistas, partidos políticos), el representante del grupo dispone entonces de un número de votos de todos los reunidos. Los diversos grupos constituidos pueden tener de esta manera posturas diferentes. Las decisiones son, la mayoría de las veces tomadas por la mayoría simple de los miembros, pero no es este siempre el caso, ciertas decisiones que se juzgan más importantes necesitan de una mayoría de 2/3.

Desde el punto de vista teórico todas estas situaciones pueden formalizarse como "juegos de votos".

DEF. Juego de votos.

1) n jugadores, i es un jugador cualquiera.

2) el jugador i cuenta con un numero de votos w_i.

3) el número de votos necesarios para aprobar una cuestión está dado por q, donde:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i/2 < q \leq \sum_{i=1}^{n} w_i$$

En el cual:

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i\in S} w_i \geq q \\ 0 & \text{si } \sum_{i\in S} w_i < q \end{cases}$$

Supongamos una asamblea con n miembros, cada uno representa a una población de tamaño a_i $i=1..n$. Ciertas propuestas de la asamblea son aprobadas cuando existen cuando menos "q" votos a favor. Nuestro problema es determinar cuál es el número de votos que ha de tener cada representante de las diversas poblaciones. Sabemos que este número no es necesariamente proporcional al número de individuos de cada población, lo que se ilustra de la siguiente manera: Un juego (51;30,30,30,10) [donde los tres primeros jugadores tienen 30 votos; el cuarto 10, y se requiere de un mínimo de 51 para aprobar la propuesta], implica que el cuarto jugador no tiene ninguna importancia en su votación, pues para cualquier aprobación se requiere de cuando menos 2 de los otros jugadores, con los cuales es suficiente. Distinto sería el caso en el juego (61;30,30,30,10) en donde realmente todos tienen igual poder. Para el problema mencionado de la asamblea, la negociación funcionaría de la siguiente manera: de acuerdo al número de individuos de cada población, se daría un número de votos a cada representante, y de acuerdo al valor de " q ", se calcularía mediante el valor de Shapley lo que razonablemente cada jugador puede esperar con ese número de votos. De esta manera vemos que unos jugadores tienen más poder que otros, que no necesariamente está de acuerdo al número de individuos que representan, esto llevaría a otra negociación sobre el número de votos que corresponden a cada uno, hasta que el índice de poder de cada uno (el valor de Shapley) guarde una relación acorde con la cardinalidad de su población, y con otros criterios del grupo, previamente establecidos.

3.8 CONJUNTO DE NEGOCIACION

CONFIGURACION DE PAGOS INDIVIDUALMENTE RACIONALES (7)

DEF: Una configuración de pagos individuales raciónales consiste en un conjunto de coaliciones disjuntas $B_1, B_2, \ldots B_m$ cuya unión es N, y un vector de pagos $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tal que:

$$\text{(i)} \quad \sum_{i \in B_j} x_i = \upsilon(B_j) \text{ para } j=1,2,\ldots m.$$

$$\text{(ii)} \quad x_i \geq \upsilon(i)$$

Donde la única diferencia con la definición de imputación es la condición de optimalidad de Pareto (i), considerada para coaliciones individuales en lugar de para N.

Consideremos dos jugadores l,k , en la misma coalición B_j con $x=(x_1, \ldots x_n)$. El jugador k piensa en todas las coaliciones a las que se puede unir, pero con la exclusión del jugador l. Supongamos que existe una coalición C, de este tipo, en donde todos sus miembros pueden obtener más de lo que actualmente obtienen. Es decir,

$$\exists \ y = (y_1, \ldots, y_n) \text{ con } \sum_{i \in C} y_i = \upsilon(C), \ y_k > x_k, \ y_i \geq x_i \ \forall \ i \in C.$$

Podemos decir entonces que el jugador k tiene una objeción contra el jugador l, en la cual puede cuestionarle a l su permanencia (la de k) en B_j con el (l), cuando él (k) puede estar en una mejor situación con otros jugadores formando C.

Correspondiendo a esta situación, el jugador l puede pensar de la misma manera, es decir en todas las posibles coaliciones excluyendo a k. Supongamos $l \in D$, con $k \notin D$, de modo que:

$$\exists \ z = (z_1, \ldots, z_n) \text{ con } \sum_{i \in D} z_i = \upsilon(D), \quad z_i \geq x_i \ \forall \ i \in D, \quad z_i \geq y_i \ \forall \ i \in C \cap D$$

De este modo l tiene una contra objeción, pues le puede decir a k que puede formar una coalición D que no lo incluya, en la cual todos reciban tanto como ahora, y aquellos de D que tú (k) necesitas para formar C obtienen cuando menos, lo mismo que en C.

Si el jugador 1 no tiene una contra objeción sobre la objeción de k, se dice que la objeción de k es justificada. De manera más clara, cuando un grupo de negociantes intentan persuadir a un segundo grupo para llevar a cabo un plan que beneficia a todos sus integrantes, un tercer grupo puede tener otra proposición para el segundo grupo, con mayores utilidades para sus participantes, siendo necesarios en este plan miembros del segundo grupo que requiere el primer grupo para su plan. Entonces decimos que el grupo 1 no tiene una objeción justificada.

CONJUNTO DE NEGOCIACION (5)

DEF: El conjunto de negociación B es el conjunto de todas las configuraciones de pagos individualmente racionales en las cuales ningún jugador tiene objeción justificada contra cualquier otro miembro de la misma coalición.

TEOREMA:

Cualquiera que sea la estructura de coaliciones considerada, el conjunto de negociación relativo a esa estructura jamás es vacío.

ej. 3.8.1) A manera ilustrativa, supongamos un juego en el cual tres jugadores van a dividirse $ 1, y dos de ellos son suficientes para determinar la repartición:

$$\upsilon(i) = 0 \quad i \in N$$
$$\upsilon(i,j) = 1 \quad i,j \in N,\ i \neq j$$
$$\upsilon(N) = 1$$

primeramente [(0,0,0) (1),(2),(3)] está en el conjunto de negociación, ya que ningún jugador está en la misma coalición con otro, entonces no hay manera de hacer objeciones justificadas. [(1/2,1/2,0) (1,2),(3)] pertenece también al conjunto de negociación, supongamos que 2 tiene una objeción contra 1, y propone [(0,1/2+a,1/2-a) 0≤a≤1/2 (1),(2,3)], para esta objeción el jugador 1 tiene una contra-objeción proponiendo [

(1/2,0,1/2) (1,3) (2)], de tal manera que cualquier configuración de pagos que asigne 1/2 a cada jugador de la coalición de cardinalidad 2, y cero al otro jugador, estará en el conjunto de negociación, pues no existen para estos casos objeciones justificadas.

ej. 3.8.2) Tres ladrones (L_1,L_2,L_3) ven la posibilidad de robar un banco, debido a información filtrada saben que a una cierta hora la cantidad manejada por el banco alcanza los $12 MM (MM = unidades de millón). Los tres ladrones revisan la manera de repartir las ganancias debido a que L_2 y L_3 poseen cada uno el equipo electrónico necesario para realizar la transferencia mientras que L_1 no. Es absolutamente indispensable que mínimo se trabaje entre dos para el asalto. Debido a las limitantes de la computadora de L_3, ésta no puede tener acceso a todos los bancos de información necesarios para realizar la transferencia, por lo tanto, trabajando con esta computadora el monto del robo sería de $6 MM en lugar de $12 MM. ¿ Qué pacto ha de resultar de la negociación de los tres ladrones ?

SOL. La función característica de juego es la siguiente :
(donde i corresponde a L_i)

$$\upsilon(\emptyset) = \upsilon((1)) = \upsilon((2)) = \upsilon((3)) = 0$$
$$\upsilon((1,2)) = 12, \quad \upsilon((1,3)) = 6, \quad \upsilon((2,3)) = 12$$
$$y \quad \upsilon((1,2,3)) = 12.$$

Sea $S \subseteq N$,

si $S = ((2,3)) \Rightarrow x_2 + x_3 = 12$ y $x_1 = 0$; si $x_2 = 8$ y $x_3 = 4 \Rightarrow$ (2) tiene una objeción contra 3, la repartición de $x_2 = 9$, $x_1 = 3$ con $S =((2,1))$; si (3) puede formular una contra-objeción, tendría que proponer a (1) cuando menos $x_1 = 3$, pero entonces a (3) solo le sobraría $x_3 = 3$, menor que $x_3 = 4$ en la coalición S inicial. Por lo tanto como a $S = ((2,3))$ con $x_2 = 8$ y $x_3 = 3$, corresponde una objeción, pero no una contra-objeción, ∴ esa imputación no pertenece al conjunto de negociación, pues no hay objeción justificada.

En la figura 3.8 se muestra graficamente el conjunto de negociación, las reparticiones para S = ({2,3}) causan objeciones y contra-objeciones, representadas por el segmento BM_1. De forma análoga AM_2 para la pareja S = ({2,1}) y del segmento L_2M_3 para S = ({3,1}), lo que se resume en la siguiente tabla:

S,N\S	(1)	(2)	(3))
({2,3}),({1})	0	9	3
({2,1}),({3})	3	9	0
({3,1}),({2})	3	0	3
({2,3,1}),({Ø})	2	8	2
({1}),({2}),({3})	0	0	0

B = { (0,9,3), (3,9,0), (3,0,3), (2,8,2), (0,0,0) }

Podemos imaginar que después de una serie de discuciones, objeciones y contra-objeciones, el acuerdo finaliza en la repartición $x_1 = 2$, $x_2 = 8$ y $x_3 = 2$. Después de este acuerdo, y en ausencia de (2), (1) y (3) llegan a un segundo acuerdo que consiste en obtener cada uno $3 MM, excluyendo a 2 del negocio. De está manera (2) será independiente de que se cometa el error fatal al dejar que se constituya la coalición S = (1,3).

3.9 EL KERNEL

Se comienza con una configuración de pagos individuales racionales $(B_1,\ldots,B_m,x)$ y un conjunto de jugadores S formando una coalición. Para tal coalición definimos:

$$\text{exceso}: \qquad e(S) = v(S) - \sum_{i\in s} x_i$$

El exceso mide el monto en el cual los miembros de una coalición pueden incrementar su pago conjunto, sobre lo que ellos reciben con ese vector de pagos x.

Consideremos dos jugadores k y l perteneciendo a la misma coalición B_j, denotemos por $T_{k,l}$ todas las coaliciones formables que incluyen a k pero no a l. Definimos el exceso máximo de k sobre l como $S_{k,l}$:

$$S_{k,l} = \max_{S:S \in T_{k,l}} e(S)$$

lo que representa la mejor ventaja que 'k ' puede obtener dejando a 'l' y uniéndose a una nueva coalición, es decir, el exceso máximo de k sobre l es el mayor exceso e(S) sobre todas las coaliciones que incluyen a k, pero excluyen a l.

Sea $S^* \in T_{k,l}$ y $S_{k,l} = e(S^*)$. S^* es la coalición con mayores utilidades que tiene a k como miembro y se abstiene de tener a l como integrante. Podemos decir que $S_{k,l}$ mide la mayor contribución a una coalición que puede ser asociada con k y que no tiene relación con l.

Decimos que el jugador k pesa más sobre l si:

$$S_{k,l} > S_{l,k} \qquad y \qquad x_l > \upsilon(l)$$

Lo que significa que el jugador k espera obtener más abandonando a 'l', de lo que 'l' puede esperar abandonando a 'k', y en segundo término 'l' puede obtener más si abandona la coalición en la que se encuentra y actúa por sí mismo. (aquí podríamos decir que k está en posición de hacer una objeción para la cual l no tendría una contra objeción, así k incrementa su pago a expensas de l).

Si k no pesa más sobre l, ni l pesa más sobre k, decimos que k y l están en equilibrio, lo que se da en los sig. casos:

a) $S_{k,l} = S_{l,k}$
b) $S_{k,l} > S_{l,k}$ y $x_l = \upsilon(l)$
c) $S_{l,k} > S_{k,l}$ y $x = \upsilon(k)$

DEF. KERNEL (1)

El kernel K, es el conjunto de todas las configuraciones de pagos individualmente racionales, tal que cada par de jugadores en la misma coalición de la configuración está en equilibrio.

($\exists$ K $\forall$ juego y K $\subseteq$ B (conjunto de negociación)).

ej. 3.9) Dado que el kernel está contenido en el Conjunto de Negociación, calculémoslo para el ejemplo 3.4, Un Mercado económico:

B =

(1) , (2) , (3) :	(a,0,0) ;		m1
(12) , (3) :	(b,0,0) ;		m2
(1) , (23) :	(a,0,0) ;		m3
(13) , (2) :	(x,0,c−x),	$b \le x \le c$;	m4
(123) :	(x,0,c−x),	$b \le x \le c$;	m5

m1 : como no hay coaliciones con dos jugadores, la condición del kernel se cumple.

m2 : $S_{1,2} = c - b > S_{2,1} = 0$ y $x_2 = \upsilon((2)) = 0$ (caso b)

m3 : $S_{3,2} = c - a > S_{2,3} = b - a$ y $x_2 = \upsilon((2)) = 0$ (caso b)

m4 : $S_{1,3} = b - x = S_{3,1} = x - c$, cuando $x = (b+c)/2$ (caso a)

m5 : como cada par de jugadores en la misma coalición está en equilibrio, la condición se cumple.

por lo tanto:

K =

(1), (2), (3),	(a,0,0)
(12), (3),	(b,0,0)
(1), (23),	(a,0,0)
(13), (2),	((b+c)/2, 0, (c−b)/2)
(123)	((b+c)/2, 0, (c−b)/2).

CONCLUSIONES:

Pese a que la mayoría de los ejemplos aquí planteados fueron considerados como aplicables, en el campo práctico encontramos numerosas dificultades para la implementación de modelos de teoría de juegos cooperativos:

- Los modelos aquí mencionados están basados en fundamentos lógicos del comportamiento esperado de los individuos, pero no contamos con mucho trabajo empírico para respaldar su validez.
- En una situación organizacional existe un cierto clima psicológico de comportamiento, que de alguna manera está dado por el dominante criterio de la gerencia. La toma de decisiones en general está afectada por experiencia de la organización, así como por el pasado de sus miembros.
- Los modelos matemáticos de Teoría de Juegos frecuentemente se enfocan a controlar un número reducido de variables, pero debe considerarse que aún sabiendo que existe un gran número de variables que no están consideradas en el modelo, no por ello el modelo tiene validez cero. Una multitud de variables en el modelo es probable que resulte en una alta complejidad, así como en un costo elevado; sin embargo, el estudio profundo para la creación del modelo siempre contribuye a adquirir un conocimiento mayor sobre el comportamiento en la realidad, y resulta ser una herramienta de enseñanza que provee de experiencia práctica.
- Existen varios factores que limitan el parecido entre el modelo del juego y el negocio en la realidad, tales como: la participación gerencial en su creación, el corto tiempo de involucramiento, la motivación y el frecuente urge!

Los modelos aquí mencionados más que explicar cómo debe estar encaminada una negociación o cuál debe ser su procedimiento, se enfocan a dar una solución del problema (a excepción del procedimiento de Zuthen y Harsanyi), lo que desde luego no implica que las soluciones propuestas no puedan ser el punto final de la negociación. Visto de otra manera, estas soluciones son una excelente referencia para encaminar adecuadamete una negociación. Contando con las bases matemáticas para determinar el grupo de integrantes con los cuales conviene más asociarse, así como el valor de la utilidad esperada para una cierta negociación, se puede determinar la conveniencia de la misma.

Es difícil establecer para un caso en particular cuál ha de ser el modelo más adecuado para aplicarse, es necesario revisar los criterios en los que se basan los distintos modelos antes de hacer una selección. Debe tenerse presente que todo planteamiento de un juego, debe traer al final variables de información que permitan mejorar el modelo actual. Para casos generales se recomienda utilizar el modelo de Shapley dada la ventaja de que para todo caso existe y su valor es único.

F I G U R A S

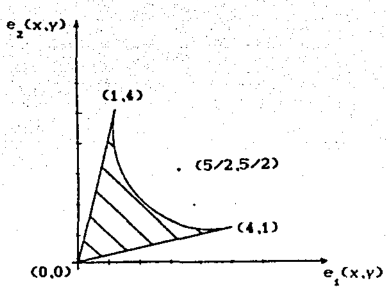

Fig. 2.1.1 Escenario no-cooperativo en un juego bi-personal.

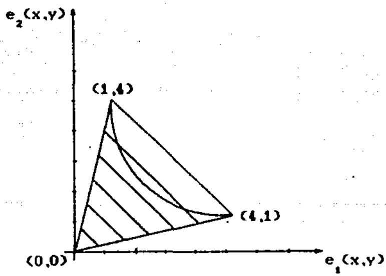

Fig. 2.1.2 Escenario cooperativo en un juego bi-personal.

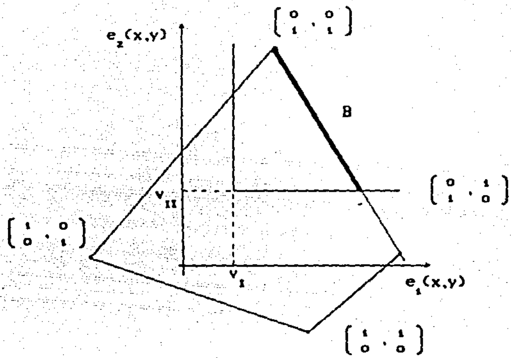

Fig. 2.2 Representación del conjunto de negociación en un juego bi-personal con una matriz asociada $M_{(2x2)}$.

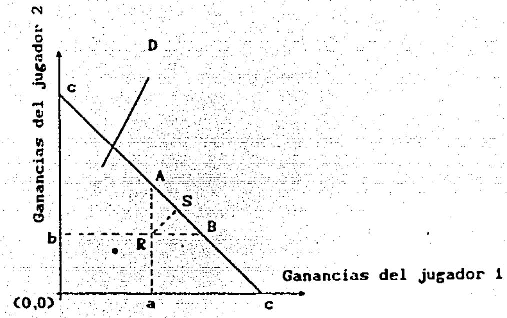

Fig. 2.3.1 Negociación a dos jugadores, un caso simple.

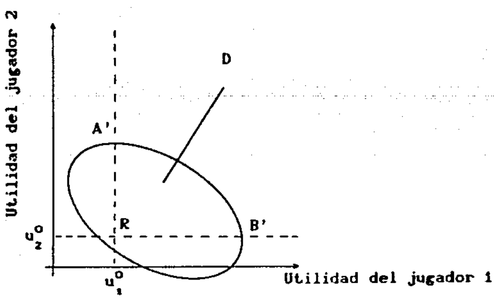

Fig. 2.3.2 Negociación a dos jugadores, caso general.

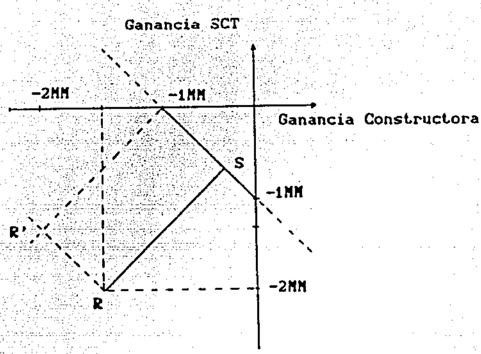

Fig. 2.5 Una negociación proporcional.

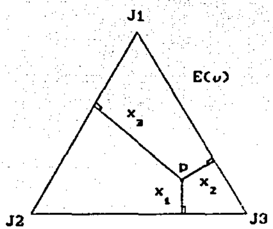

Fig 3.3 Conjunto de Imputaciones para un juego tri-personal. Para cualquier punto p ד p ∈ E(υ), $x_1 + x_2 + x_3 = c$, donde $c = \upsilon(N)$ y $x_i \geq \upsilon(i)$ $i=1,2,3$.

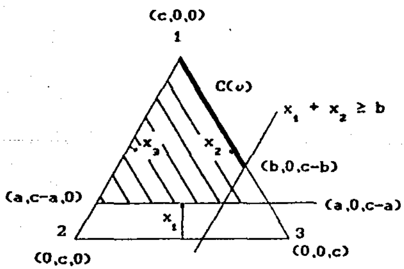

Fig. 3.4 Ilustración del Núcleo en un juego tri-personal. $C(\upsilon) = \{ (x_1,x_2,x_3) \mid x_2 = 0,\ b \leq x_1 \leq c,\ 0 \leq x_3 \leq c-b \}$

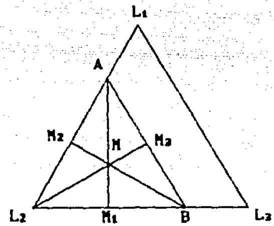

Fig. 3.8 Puntos del conjunto de negociación, M, M_1, M_2, M_3, relativos a las diferentes estructuras de coaliciones.

BIBLIOGRAFIA:

1 - Friedman James W.
Game Theory with Applications to Economics.
Oxford University Press 1986.

2 - Luce R. Duncan and Raiffa Howard.
Games and Decisions.
John Wiley & Sons, Inc. 1957.

3 - McKinsey J.C.C.
Introduction to the Theory of Games.
The Rand Corporation 1952.

4 - Moulin Hervé.
Game Theory for the Social Sciences (second and revised edition).
New York University Press 1986.

5 - Ponssard Jean-Pierre.
Logique de la négociation et théorie des Jeux.
Les Éditions d'Organisation 1977.

6 - Shubik Martin.
A Game-Theoric Approach to Political Economy.
Massachusetts Institute of Technology 1984.

7 - Thomas L.C.
Games, Theory and Applications.
Ellis Horwood Limited, Halsted Press (a division of John Wiley & Sons) 1986.