4
2 g.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

TRANSFORMACIONES DE MARTINGALAS DE CUADRADO INTEGRABLE

T E S I S

Que para obtener el grado de:

Actuario

Presenta

Alberto Contreras Cristán

México, D. F.

Diciembre 1990

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

ϕ1 ALGUNOS CONCEPTOS Y RESULTADOS PREVIOS.

ϕ1. ALGUNOS CONCEPTOS Y RESULTADOS DE TEORIA DE LA MEDIDA Y PROBABILIDAD.

En éste capítulo recordaremos los tipos de convergencia que hay para una sucesión de variables aleatorias, así como algunas de las relaciones existentes entre los mismos, también estudiaremos algunos resultados que son consecuencia de éstas relaciones.

La mayoría de las demostraciones de las relaciones entre tipos de convergencia se pueden encontrar en algunos textos como por ejemplo [8] (ver bibliografía), no obstante incluimos algunas demostraciones en la sección de convergencia 1.3.

Por último se repasan (sin demostrar) algunas propiedades de la esperanza condicional.

1.1. DEFINICION: a) Sea X un conjunto no vacío, una familia de subconjuntos del total X se llama un π-sistema si es cerrada bajo intersección.

(b) Una familia de subconjuntos del total $\mathcal{L}\subset P(X)$ se llama λ-sistema (ó sistema Dynkin) si:

(i) $X\in\mathcal{L}$.
(ii) $E,F\in\mathcal{L}$ y $F\subset E \Rightarrow E-F\in\mathcal{L}$ (cerradura bajo diferencias propias).
(iii) $(E_n)_n$ es una sucesión creciente de elementos de $\mathcal{L}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\in\mathcal{L}$.

OBSERVACIONES: Intersecciones arbitrarias de π(y λ) sistemas son a su vez $\pi(\lambda)$ sistemas, lo anterior nos permite hablar del $\pi(\lambda)$ sistema generado por una familia $\mathbb{E} \subset P(X)$ que denotamos $\pi(\mathbb{E})$ ($\mathcal{L}(\mathbb{E})$).

1.2. TEOREMA. (Lema de las Clases Monótonas): Sean $G \subset P(X)$ un π-sistema y $\mathcal{L}$ un λ-sistema tales que $G \subset \mathcal{L}$, entonces $\sigma(C) \subset \mathcal{L}$.

1.3. DEFINICIONES (Convergencia): Sean (X,S,μ) un espacio de medida y $(fn)_n \subset \mathbb{M}(X,S)^*$ una sucesión de funciones. Decimos que:

(i) $(fn)_n$ converge casi dondequiera a $f \in \mathbb{M}(X,S)$ si existe $N \in S$ tal que: $\mu(N)=0$ y $fn(x) \underset{n\to\infty}{\to} f(x)$ si $x \in N^c$

(ii) $(fn)_n$ converge en MEDIDA a $f \in \mathbb{M}(X,S)$ si

$\lim\limits_{n\to\infty} \mu(\{x \in X: |fn(x)-f(x)| \geq \varepsilon\})=0 \quad \forall \varepsilon>0$

(iii) $(f_n)_n$ converge CASI UNIFORMEMENTE a $f \in \mathbb{M}(X,S)$ si $\forall \delta>0$

$\exists F \in S$ con $\mu(F)<\delta$ y tal que (f_n) converge uniformemente a f en F^c

(iv) Si además $(f_n)_n \subset L^p(X,S,\mu)$ $(p\geq 1)$

$(f_n)_n$ converge EN MEDIA P ó EN L^p a $f \in L^p(X,S,\mu)$ si $\|fn-f\|_p \to 0$ $(n\to\infty)$

(v) Si μ es una medida de probabilidad sobre (X,S) y $\{Xn\}_{n\geq 1}$ es una suc. de v.a. definidas en (X,S,μ) decimos que $X_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X$ EN DISTRIBUCION ($X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$) si y sólo si $F_{X_n}(x) \to F_X(x)$ $\forall x$ punto de continuidad de

F_X $(F_{X_n}(x)=P(Xn\leq x),\ F_X(x)=P[X\leq x])$.

1.3.1. TEOREMA (Riesz): Sea $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ un espacio de medida (μ no necesariamente finita) entonces:

---

* $\mathbb{M}(X,S)=\{f:X\longrightarrow \mathbb{R} / f$ es S-medible$\}$

$X_n \longrightarrow X$ en medida $\Rightarrow \exists$ una subsucesión $\{X_{n_k}\}_{k\geq 1}$ de $\{X_n\}_{n\geq 1}$ t. q. $X_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} X$ c. d. y $X_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} X$ c. u.

1.3.2. TEOREMA (Egorov): Sea $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ un espacio de medida t. q. $\mu(\Omega)<\infty$. Entonces:

$X_n \to X$ c. d. $\Rightarrow$ $X_n \to X$ en medida.

1.3.3. TEOREMA: Sea $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ un espacio de medida finita y $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $\mathcal{F}$-medibles entonces: $X_n \to X$ en medida $\Leftrightarrow$ cada subsucesión de $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una subsucesión que converge c. d.

DEMOSTRACION.

$\Rightarrow$) De la definición de convergencia en medida se tiene que toda subsucesión $\{X_{n_k}\}_{k\geq 1}$ de $\{X_n\}_{n\geq 1}$ converge en medida a X, por el teorema 1.3.1

$\exists \left\{X_{n_{k_i}}\right\}_{i\geq 1}$

subsucesión de $\left\{X_{n_k}\right\}_{k\geq 1}$ t.q. $X_{n_{k_i}} \xrightarrow[i\to\infty]{} X$ c. d.

$\Leftarrow$) Supongamos que $X_n \not\to X$ en medida $\Rightarrow$ existen $\delta>0$ y $\varepsilon>0$ t.q. $\forall N\in\mathbb{N}$ $\exists N_o\geq N$ t.q. $\mu\{|X_{N_o}-X|\geq\varepsilon\}\geq\delta$ i.e. se puede construir una subsucesión

$\left\{X_{n_k}\right\}_{k\geq 1}$ de $\left\{X_n\right\}_{n\geq 1}$ t.q. $\lim_{k\to\infty} \mu\{\omega: |X_{n_k}-X|\geq\varepsilon\}\geq\delta$

$\therefore$ ninguna subsucesión de $\left\{X_{n_k}\right\}_{k\geq 1}$ converge en medida y como $\mu(\Omega)<\infty$ el teorema 1.3.2 nos dice que ninguna subsucesión de $\left\{X_{n_k}\right\}_{k\geq 1}$ converge c.d.

1.3.4. TEOREMA: Si $X_n\in L^p(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ $\forall n$, $X\in L^p(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ con $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X$ en L^p entonces $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X$ en medida.

DEMOSTRACION. De la desigualdad de Tchebyshev

$$\mu\{|Xn-X|\geq\varepsilon\}\leq\frac{E|Xn-X|^p}{\varepsilon^p}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

ya que $||Xn-X||_p=\left\{\int_\Omega|Xn-X|^p d\mu\right\}^{1/p}=E^{1/p}|Xn-X|^p\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

1.3.5. TEOREMA: Si $(Xn)_{n\in\mathbb{N}}\subset L^p(\Omega,\mathcal{F},\mu)$; $X\in L^p(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ con $Xn\xrightarrow[n\to\infty]{}X$ en L^p

entonces $\exists\left\{Xn_k\right\}_{k\geq1}$ subsucesión de $\left\{Xn\right\}_{k\geq1}$ t.q. $Xn_k\xrightarrow[k\to\infty]{}X$ c.d.

DEMOSTRACION. Por el teorema 1.3.4. $Xn\xrightarrow[n\to\infty]{}X$ en medida y por el teorema 1.3.3 cada subsucesión de $\left\{Xn\right\}_{n\geq1}$ contiene una subsucesión que converge c.d.; en particular $\left\{Xn\right\}_{n\geq1}$ debe contener una subsucesión $\left\{Xn_k\right\}_{k\geq1}$ t.q. $Xn_k\xrightarrow[k\to\infty]{}X$ c.d.

1.3.6. TEOREMA: Si Xn, X son funciones medibles en $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ y

a) $Xn\xrightarrow[c.d.]{}X$ ó $Xn\longrightarrow X$ en medida, $p\in[1,\infty]$ fijo

b) $\exists Y\in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ t.q. $|Xn|^p\leq Y$ c.d. $\forall n\in\mathbb{N}$

entonces $X\in L^p(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ y $Xn\longrightarrow X$ en L^p.

1.3.7. TEOREMA: Si $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ es un espacio de probabilidad entonces convergencia en probabilidad implica convergencia en distribución.

1.3.8. TEOREMA: Sea $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ un espacio de medida finita y $(X_n)_n$ una sucesión de v.a. con valores en $\mathbb{R}^d$, sea $f:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}^k$ continua en $B\in B(\mathbb{R}^d)$, en donde B es tal que $\mu(X^{-1}(B))=\mu(\Omega)$ y $\mu(X_n^{-1}(B))=\mu(\Omega)$ $\forall n\in\mathbb{N}$ entonces:

$$X_n\xrightarrow{\mu}X\Rightarrow f(X_n)\xrightarrow{\mu}f(X)$$

(i.e. la convergencia en medida se preserva bajo funciones continuas bajo ciertas hipótesis).

DEMOSTRACION:

(i) Por el teorema 1.3.3 hay que demostrar que toda subsucesión de $\{f(X_n)\}_n$ contiene una subsucesión que converge c.d. a $f(X)$.

ii) Por el teorema 1.3.3 dada una subsucesión $\{X_{nk}\}_{k\geq 1}$ de $\{X_n\}_{n\geq 1}$, ésta contiene una subsucesión $\{X_{nk_i}\}_{i\geq 1}$ t.q. $X_{nk_i} \xrightarrow[i\to\infty]{c.s} X$

Sean

$A_1=\{\omega: X_{nk_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} X\}$

$A_2=\{\omega: X(\omega)\in B\}$

$A_3=\{\omega: X_1(\omega)\in B\}$

$\vdots$

$A_n=\{\omega: X_{n-2}(\omega)\in B\}$

$\vdots$

entonces $\mu(A_n)=\mu(\Omega)$ y $\mu(A_n^c)=0 \;\; \forall n$

$\Rightarrow \mu\left\{\left(\bigcap_{\mathbb{N}} A_n\right)^c\right\} = \mu\left\{\bigcup_{\mathbb{N}} A_n^c\right\} \leq \sum_{\mathbb{N}} \mu(A_n^c)=0$

$\Rightarrow \mu\left(\bigcap_{\mathbb{N}} A_n\right)=\mu(\Omega)$ Sea $A=\bigcap_{\mathbb{N}} A_n$

entonces si $\omega\in A$

$X_{nk_i}(\omega) \xrightarrow[i\to\infty]{} X(\omega)$, $X(\omega)\in B$ y $X_n(\omega)\in B \;\; \forall_n$

$\Rightarrow f\left(X_{n_{k_i}}(\omega)\right) \xrightarrow[i\to\infty]{} f(X(\omega))$ (Por continuidad de f en B) $\forall \omega \in A$,

$\therefore\ f\left(X_{n_{k_i}}\right) \xrightarrow{c.d.} f(X)$

$\left\{f\left(X_{n_{k_i}}\right)\right\}_{i\geq 1}$ es una subsucesión de $\left\{f\left(X_{n_k}\right)\right\}_{k\geq 1}$.

1.4. DEFINICION: Sea $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espacio de probabilidad y $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$ una σ-álgebra, sea X una v.a. definida en $(\Omega,\mathcal{F},P)$ t.q. EX existe.

Entonces como consecuencia del teorema de Radon Nikodym existe una función $\mathcal{G}$-medible denotada $E[X/\mathcal{G}]$ t.q.

$$\int_A E[X/\mathcal{G}]dP = \int_A X dP \quad \forall A \varepsilon \mathcal{G}$$

Si existe otra función g $\mathcal{G}$-medible con la propiedad anterior entonces $g=E[X/\mathcal{G}]$ c.d. c.r. a P $(\Omega,\mathcal{G},P)$. Llamamos a $E[X/\mathcal{G}]$d "La esperanza condicional de la v.a. X c.r. a la σ-álgebra $\mathcal{G}$".

1.4.1. PROPIEDADES DE LA ESPERANZA CONDICIONAL.

Sea X una v.a. definida en $(\Omega,\mathcal{F},P)$ t.q. EX existe y sea $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$ entonces:

(a) Si X es $\mathcal{G}$-medible entonces $E[X/\mathcal{G}]=X$ c.d. $(\Omega,\mathcal{G},P)$.
(b) Si X es constante c.d., X=C entonces $E[X/\mathcal{G}]=C$ c.d. $(\Omega,\mathcal{G},P)$.
(c) Si $X\geq 0$ c.d. $(\Omega,\mathcal{F},P)$ entonces $E[X/\mathcal{G}]\geq 0$ c.d. $(\Omega,\mathcal{G},P)$.
(d) Sea Y una v.a. en $(\Omega,\mathcal{F},P)$ t.q. E(Y) existe sean a, b ε $\mathbb{R}$ entonces $E[aX+bY/\mathcal{G}]=aE[X/\mathcal{G}]+bE[Y/\mathcal{G}]$ c.d. $(\Omega,\mathcal{G},P)$.
(e) Sea $\{Xn\}_{n\geq 1}$ una sucesión no decreciente de v.a's no negativas que converja c.d. a una v.a. X si EXn existe ∀n y si EX existe entonces:

$0 \leq \lim_{n\to\infty} E[Xn/\mathcal{G}] = E[X/\mathcal{G}]$ c.d. $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ (Convergencia Monótona)

(f) Si $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\} \Rightarrow E[X/\mathcal{G}] = EX$ c.d.

(g) (Jensen) Si g es una función convexa de I a $\mathbb{R}$, en donde I es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y X es una v.a. definida en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $X(\omega) \in T$ $\forall \omega$ y EX finita entonces: $E(g(X)|U) \geq g(E(X|U))$ c.d. ($U \subset \mathcal{F}$ σ-álgebra).

(h) Si $G_1 \subset G_2 \subset \mathcal{F}$ son sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$ y $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ entonces $E(E[Y|G_2]|G_1) = E(Y|G_1)$ c.d.

(i) Mismas hipótesis que en (h) entonces $E[E(Y|G_1)|G_2] = E[Y|G_1]$ c.d.

(j) $E[E(X|U)] = EX$.

(k) Si X y Y son v.a. independientes tales que EY existe entonces $E[Y|\sigma(X)] = E(Y)$ c.d.

1.4.2. OBSERVACION: Para el espacio vectorial $L(\Omega, \mathcal{F}, P)$ podemos definir un producto interior como: $\langle X, Y \rangle = E(XY)$.

Entonces $||X||_2^2 = \langle X, X \rangle$ y como $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es de Banach con la norma $||\,||_2$, se tiene que $(L^2(\Omega, \mathcal{F}, P), \langle , \rangle)$ es un espacio de Hilbert, para el cual se tiene la desigualdad de Schwarz

$$|\langle X, Y \rangle| \leq ||X||_2 \; ||Y||_2$$

si la aplicamos a $Y=1$ y $X=|Z|$ con $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$|\langle |Z|, 1 \rangle| = \int_\Omega 1 \cdot |Z| dP = \int_\Omega |Z| dP = E|Z| \leq || \, |Z| \, ||_2 = \langle |Z|, |Z| \rangle^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{ \int_\Omega |Z|^2 dP \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \therefore \quad E|Z| \leq (E|Z|^2)^{\frac{1}{2}}$$

1.4.3. TEOREMA: Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $U \subset \mathcal{F}$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$ entonces el conjunto $L^2(\Omega, U, P)$ es un subespacio vectorial cerrado ($||\,||_2$-cerrado) del espacio vectorial $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Si $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ entonces la proyección ortogonal de X en $L^2(\Omega, U, P)$ es $E[X|U]$.

DEMOSTRACION. Como $L^2(\Omega,U,P)$ es por sí mismo un espacio vectorial (usando la desigualdad de Minkowski) y $L^2(\Omega,U,P)\subset L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ ya que $U\subset\mathcal{F}$ entonces $L^2(\Omega,U,P)$ es subespacio de

$L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$.

P.d. $\overline{L^2(\Omega,U,P)}\subset L^2(\Omega,U,P)$.

Sea $Z\in\overline{L^2(\Omega,U,P)}$ entonces $\exists(Zn)_n\subset L^2(\Omega,U,P)\subset L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ t.q. $||Zn-Z||_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

(y como $(L^2(\Omega,\mathcal{F},P),||\,||_2)$ es completo entonces $Z\in L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$).

Por el teorema 1.3.5 $\exists\{Zn_k\}_{k\geq 1}$ subsucesión de $\{Zn\}_{n\geq 1}$ t.q. $Zn_k \xrightarrow[k\to\infty]{} Z$ c.d. pero como $Z'(\omega)=\lim_{k\to\infty} Zn_k(\omega)$ es u-medible (limites puntuales de sucesiones u-medibles son u-medibles)

$\Rightarrow \quad Z(\omega)=Z'(\omega)$ c.d.

$\therefore$ Z es u-medible (se supone que (Ω,U,P) es completo)

$\therefore$ $L^2(\Omega,U,P)$ es cerrado en $(L^2(\Omega,\mathcal{F},P),||\,||_2)$.

Ahora sea $X\in(\Omega,\mathcal{F},P)$ y sea Y la proyección ortogonal de X en $L^2(\Omega,U,P)$ entonces

$\langle X-Y,Z\rangle=0\ \forall Z\in L^2(\Omega,U,P)$ en particular si

$$G\in U \text{ y } 1_G(\omega)=\begin{cases}1 & \text{si } \omega\in G\\ 0 & \text{si } \omega\notin G\end{cases}$$

como $P(\Omega)<\infty \Rightarrow 1_G\in L^2(\Omega,U,P)$

$$\therefore \quad 0=\langle X-Y,1_G\rangle=\int_\Omega (X-Y)\cdot 1_G\,dP=\int_G (X-Y)\,dP$$

$\therefore \quad \int_G X\,dP=\int_G Y\,dP$ y esto sucede $\forall G\in U$

$\therefore$ $Y=E[X|U]$ c.d.

1.4.4. TEOREMA: Sean $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espacio de probabilidad. $X\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ y $U\subset\mathcal{F}$ sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$, la esperanza condicional es un operador lineal y contínuo de $L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ en $L^1(\Omega,U,P)\subset L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$.

DEMOSTRACION:

$$\Phi: L^1(\Omega,\mathcal{F},P) \longrightarrow L^1(\Omega,\mathcal{F},P) \qquad \Phi(X)=E\left[X|U\right]$$

SI $X\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ entonces por 1.4.1 (j) Φ está bien definida y por 1.4.1 (d) Φ es lineal.

Además $||\Phi(X)||_1=||E[X|U]||_1=E(|E[X/U]|)\leq E(E(|X|/U))=E|X|=||X||_1$ usando 1.4.1 (g) y (j)

$$\therefore \quad ||\Phi||=\sup_{||X||_1=1}\left\{||\Phi(X)||_1\right\}\leq \sup_{||X||_1=1}\left\{||X||_1\right\}=1$$

pero además si tomo X=1, como $P(\Omega)<\infty$

$X\in L^1$ y $||\Phi(1)||_1= ||E(1|U)||_1=||1||_1=1$

y

$||X||_1=1$

$$\therefore \quad \sup_{||X||_1=1}\left\{||\Phi(X)||_1\right\}\geq 1 \qquad \therefore \quad ||\Phi||=1$$

2

MARTINGALAS

ϕ2. MARTINGALAS

En éste capítulo estudiamos los conceptos de martingala, tiempos de paro, proceso y σ-álgebra parada, así como algunas consecuencias de las propiedades de la esperanza condicional en la teoría de martingalas. Todo lo anterior para tiempos discreto.

Por último hablaremos de dos tipos de descomposiciones una martingala (ó sobremartingala) debidas a KRICKEBERG y DOOB, las cuales serán de gran utilidad enel capítulo 4.

2.1. DEFINICION: Sea $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espacio de probabilidad fijo y $T\subset\mathbb{R}^+$. si $(\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda\in T}$ es una familia de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$ t.q. $\mathcal{F}_{\lambda_1}\subset\mathcal{F}_{\lambda_2}$ si $\lambda_1<\lambda_2$, entonces diremos que $(\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda\in T}$ es una "filtración" en $(\Omega,\mathcal{F}P)$

(Se trabajará en adelante con $T=\mathbb{N}$ ó $T=\{k,k+1,\ldots,k+n\}$).

2.1.1. DEFINICION: Una función $\tau:\Omega\longrightarrow\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ se llama "TIEMPO DE PARO" con respecto a $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in N}$ si y sólo si $[\tau=n]\in\mathcal{F}n$ $\forall n\in\mathbb{N}$. En donde $(\mathcal{F}_n)_{N\in\mathbb{N}}$ es una filtración en $(\Omega,\mathcal{F},P)$.

Equivalentemente se tendrá que τ es tiempo de paro (t.d.p.) c.r.a $(\mathcal{F}_n)_{N\in\mathbb{N}}$ si y sólo si $[\tau\leq n]\in\mathcal{F}_n$ $\forall n$.

DEMOSTRACION:

$\Rightarrow)$ $[\tau\leq n]=\bigcup_{k=1}^{n}[\tau=k]\in\mathcal{F}_n$ ya que $[\tau=k]\in\mathcal{F}_k\subset\mathcal{F}_n$ $\forall k\leq n$

$\Leftarrow)$ $[\tau=n]=[\tau\leq n]\setminus[\tau\leq n-1]\in\mathcal{F}_n$ ya que $[\tau\leq n-1]\in\mathcal{F}_{n-1}\subset\mathcal{F}_n$

2.1.2. DEFINICION: Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de v.a. definidas en $(\Omega,\mathcal{F},P)$ y sea $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una filtración en $\mathcal{F}$ decimos que el proceso $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está ADAPTADO a la familia $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si X_n es $\mathcal{F}_n$-medible $\forall n\in\mathbb{N}$.

Las definiciones anteriores tienen un significado intuitivo:

Si interpretamos al parámetro n como tiempo, y a cada evento $A \in \mathcal{F}$ como un fenómeno físico, entonces la sub-σ-álgebra $\mathcal{F}_n$ representa a los eventos que ocurren hasta el momento n.

La v. aleatorias $\mathcal{F}_n$-medibles son aquellas que dependen únicamente de lo sucedido en el universo antes del tiempo n. Si imaginamos a un observador que estudia cierto fenómeno en el universo, y que anota el tiempo $\tau(\omega)$ en que éste ocurre por vez primera, entonces el evento $[\tau \leq n]$ que ocurre si y sólo si el fenómeno considerado se produce al menos una vez antes del momento n, o bien en este instante, es información que se presenta antes de n ó hasta n.

2.1.3. EJEMPLOS: (i) Sucesión del lanzamiento de una moneda.

$$\xi n = \begin{cases} +1 & \text{si sale águila con probabilidad } p \in (0,1) \\ -1 & \text{si sale sol con probabilidad } q=1-p \end{cases}$$

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ son v.a. independientes y $X_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$

(X_n respresenta el capital en la n-ésima jugada)

Sea $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} / X_n = 5\}$ (τ representa la 1ª vez que se tiene +5)

$\Omega = \{\omega : \mathbb{N} \longrightarrow \{+1,-1\}\}$; $\xi_i(\omega) = \omega(i)$

$\omega^1 = (1,1,-1,1,1,1,1,-1,\ldots\ldots) \Rightarrow \tau(\omega)=7$

$\omega^2 = (1,-1,1,-1,1,1,1,1,1,\ldots\ldots) \Rightarrow \tau(\omega)=9$

para saber si el evento $[\tau=k]$ ocurre hay que conocer $\mathcal{F}_k=\sigma(X_1,\ldots,X_k)=\sigma(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_k)$ (ver apendice I).

(ii) (Generalizado (i)).

Si $(Xn)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de v.a. definidas en $(\Omega,\mathcal{F},P)$ y si $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una filtración en $(\Omega,\mathcal{F},P)$ t.q. $(Xn)_{n\in\mathbb{N}}$ es $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adaptado tomando $B\in B(\mathbb{R})$ entonces:

Sea $\tau_B(\omega)=\inf\{n\in\mathbb{N}/X_n\in B\}$

(En particular $\tau_B(\omega)=+\infty$ si $\{n\in\mathbb{N}/Xn\in B\}=\emptyset$)

P.d. τ_B es t.d.p.

$$[\tau_B=n]=[X_n\in B]\cap\bigcap_{k=1}^{n-1}[X_k\notin B]$$

y como

$$[X_n\in B]\in\mathcal{F}_n \quad [X_k\in B]\in\mathcal{F}_k\subset\mathcal{F}_n \qquad \forall k\leq n$$

$\Rightarrow [\tau_B=n]\in\mathcal{F}_n\ \forall n \quad \therefore \tau_B$ es t.d.p. c.r.a $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(iii) Con las mismas notaciones que (ii)

$$\tau_B^1=\operatorname{Sup}\{n\in\mathbb{N}: Xn\in B\}$$

Si $\omega\in[\tau_B^1=n]\Rightarrow \operatorname{Sup}\{k\in\mathbb{N}/X_k(\omega)\in B\}=n$

$$\Rightarrow X_n(\omega)\in B \text{ y } X_{n+1}(\omega)\notin B,\ X_{n+2}(\omega)\notin B,\ldots.$$

$$\Rightarrow \omega\in[X_n\in B]\cap\bigcap_{k=n+1}^{\infty}[X_k\notin B]$$

pero $[X_k \in B]$ no necesariamente está en $\mathcal{F}_n$ para $K=n+1,n+2,\ldots$

$\therefore$ τ_B^1 NO es t.d.p. (intuitivamente $\left[\tau_B^1=k\right]$ es un evento que depende no sólo de $\mathcal{F}_k$ sino de todo el futuro).

2.1.4. TEOREMA. Si τ_1,τ_2 son dos t.d.p. c.r.a $(\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ entonces $(\tau_1+\tau_2)$, $\tau_1 \vee \tau_2$, $\tau_1 \wedge \tau_2$ son también t.d.p. c.r.a $(\mathcal{F}_n)_{n=1}$ (En particular (τ_1+n) es t.d.p.)

DEMOSTRACION:

$$[\tau_1+\tau_2=n]=\bigcup_{k=0}^{\infty}\{[\tau_1+k=n]\cap[\tau_2=k]\}\cup\{[\tau_1+\infty=n]\cap[\tau_2=+\infty]\}$$

pero como el último conjunto que unimos es el vacío

$$[\tau_1+\tau_2=n]=\bigcup_{k=0}^{\infty}\{[\tau_1=n-k]\cap[\tau_2=k]\}\cup\left\{\bigcup_{k=n+1}^{\infty}[\tau_1=n-k]\cap[\tau_2=k]\right\}$$

$$=\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)\cup\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} B_k\right);\quad \bigcup_{k=0}^{n} A_k \in \mathcal{F}_n \text{ ya que}$$

Si $k=0,1,2,\ldots,n$; se tiene $\mathcal{F}_{(n-k)}\subset\mathcal{F}_n$ y $\mathcal{F}_k\subset\mathcal{F}_n$

$\therefore$ $[\tau_1=n-k]\in\mathcal{F}_{(n-k)}\subset\mathcal{F}_n$ y $[\tau_2=k]\in\mathcal{F}_k\subset\mathcal{F}_n$

$\therefore$ $A_k\in\mathcal{F}_n$ $k=0,1,\ldots,n$ $\therefore$ $\bigcup_{k=0}^{n} A_k \in \mathcal{F}_n$

$\bigcup_{k=n+1}^{\infty} B_k=\emptyset$ ya que $n-k\leq -1$ Si $K=n+1,n+2,\ldots,$ $\therefore$ $\tau_1+\tau_2$ es t.d.p.

Para $\tau_1\vee\tau_2$ y $\tau_1\wedge\tau_2$

$$[\tau_1\vee\tau_2\leq n]=[\tau_1\leq n]\cap[\tau_2\leq n]\in\mathcal{F}_n \qquad \forall_n$$

$[\tau_1 \wedge \tau_2 \leq n] = [\tau_1 \leq n] \cup [\tau_2 \leq n] \in \mathcal{F}_n \qquad \forall_n$

$\therefore$ $\tau_1 \vee \tau_2$ y $\tau_1 \wedge \tau_2$ son t.d.p., por último:

Si $\tau(\omega) = n$ $\forall \omega \in \Omega$ entonces

$$[\tau = k] = \begin{bmatrix} \emptyset & k \neq n \\ \Omega & k = n \end{bmatrix} \quad \text{y } \emptyset,\ \Omega \in \zeta_k \qquad \forall_k$$

$\therefore$ τ es t.d.p.

2.1.5. DEFINICION: Sea τ un t.d.p. c.r.a $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Se define la σ-ALGEBRA PARADA EN τ como:

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} / A \cap [\tau = n] \in \mathcal{F}_n \forall_n\}$$

Se probará que en efecto es una σ-álgebra

(i) Claramente $\emptyset$ y $\Omega \in \mathcal{F}_\tau$

(ii) $A \in \mathcal{F}_\tau \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}_\tau$

Si $A \in \mathcal{F}_\tau \Rightarrow A \cap [\tau = n] \in \mathcal{F}_n \ \forall_n \Rightarrow (A \cap [\tau = n])^c \in \mathcal{F}_n \forall_n$

$\Rightarrow A^c \cup [\tau \neq n] \in \mathcal{F}_n \forall_n \ldots\ldots (1)$

$\Rightarrow A^c \cap [\tau = n] = \{A^c \cup [\tau \neq n]\} \cap [\tau = n] \in \mathcal{F}_n$ por (1)

(iii) $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots \in \mathcal{F}_\tau \Rightarrow \bigcup_{\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{F}_\tau$

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $A = \bigcup_{\mathbb{N}} A_k$

$$A \cap [\tau = n] = \bigcup_{\mathbb{N}} A_k \cap [\tau = n] = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{A_k \cap [\tau = n]\}$$

Pero como $A_k \in \mathcal{F}_\tau \forall_k \Rightarrow A_k \cap [\tau = n] \in \mathcal{F}_n \ \forall_n$

$\Rightarrow \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{A_k \cap [\tau = n]\} \in \mathcal{F}_n \quad \therefore A \in \mathcal{F}_\tau$

La σ-álgebra $\mathcal{F}_\tau$ surge de la siguiente situación:

Sea $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de v.a. adaptada a $(\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ y τ un t.d.p. c.r.a $(\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ entonces si definimos:

$$X_\tau(\omega)=\begin{cases} X_{\tau(\omega)}(\omega) & \text{si} \quad \tau(\omega)<\infty \\ 0 & \text{si} \quad \tau(\omega)=\infty \end{cases} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.1.5.1)$$

entonces podriamos preguntarnos si X_τ es una v.a., la respuesta es afirmativa, de hecho verá que X_τ es $\mathcal{F}_\tau$-medible y como $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}$ se tendrá que X_τ es v.a. definida en $(\Omega,\mathcal{F},P)$.

Entonces tenemos que:

(a) $\mathcal{F}_\tau$ es una familia de eventos que guardan la información de lo ocurrido hasta el tiempo τ

(b) $\mathcal{F}_\tau$ es una σ-álgebra t.q. X_τ es $\mathcal{F}_\tau$-medible

(La definición 2.1.5.1 recibe el nombre de "proceso parado en τ").

2.1.5.2. PROPIEDADES:

(1) Sean τ_1, τ_2 dos tiempos de paro c.r.a $(\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ si $\tau_1 \leq \tau_2$ c.d. entonces:

$$\mathcal{F}_{\tau_1} \subseteq \mathcal{F}_{\tau_2}$$

(2) τ es una v.a. $\mathcal{F}_\tau$-medible.

(3) Si definimos X_τ como en (2.1.5.1) entonces X_τ es una v.a. $\mathcal{F}_\tau$-medible.

DEMOSTRACION:

(1) Primero probaremos un lema auxiliar:

$\mathcal{F}_\tau=\{A\in\mathcal{F}/A\cap[\tau\leq n]\in\mathcal{F}_n\ \forall_n\}$ (Otra caracterización de la σ-álgebra parada)

En efecto:

(i) $A\cap[\tau\leq n]=A\cap\left\{\bigcup_{k=0}^{n}[\tau=k]\right\}=\bigcup_{k=0}^{n}\{A\cap[\tau=k]\}$

pero como $A\cap[\tau=k]\in\mathcal{F}_k\subset\mathcal{F}_n$ si $k=0,1,\ldots,n$

$\Rightarrow \bigcup_{k=0}^{n}(A\cap[\tau=k])\in\mathcal{F}_n \Rightarrow$ la definición anterior de σ-álgebra parada implica ésta nueva definición.

(ii) $A\cap[\tau=k]=A\cap\{[\tau\leq n]\setminus[\tau\leq n-1]\}=A\cap[\tau\leq n]\cap[\tau\leq n-1]^c$ y el último conjunto siempre está en $\mathcal{F}_n$ ya que $[\tau\leq n-1]^c\in\mathcal{F}_{n-1}\subset\mathcal{F}_n$ entonces la nueva definición de σ-álgebra parada implica la anterior.

Ahora para probar (1) sea $A\in\mathcal{F}_{\tau_1}$ y como $\tau_1\leq\tau_2$ c.d. $\Rightarrow [\tau_2\leq n]\subset[\tau_1\leq n]\ \forall_n$

$\therefore\ A\cap[\tau_2\leq n]=A\cap[\tau_2\leq n]\cap[\tau_1\leq n]=A\cap[\tau_1\leq n]\cap[\tau_2\leq n]\in\mathcal{F}_n$

ya que $A\cap[\tau_1\leq n]\in\mathcal{F}_n\forall_n$ $(A\in\mathcal{F}_{\tau_1})$

y $[\tau_2\leq n]\in\mathcal{F}_n\forall_n$ por ser τ_2 t.d.p.

$\therefore\ A\in\mathcal{F}_{\tau_2}$

(2) Como τ es t.d.p. c.r.a. $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 1}$ $\Rightarrow$

(a) $\tau:\Omega\longrightarrow\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$

y

(b) $[\tau\leq n]\in\mathcal{F}_n\ \forall_n\in\mathbb{N}$

Sea $n\in\mathbb{N}$ fijo y $m\in\mathbb{N}$

(i) Si $m\geq n \Rightarrow \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_m$ y por (b) $[\tau\leq n]\in\mathcal{F}_m$

$\therefore\ [\tau\leq n]\cap[\tau\leq m]\in\mathcal{F}_m\ (\forall m\geq n)$

(ii) Si $m<n$ $\quad [\tau\leq n]\cap[\tau\leq m]=[\tau\leq m]\in\mathcal{F}_m$ nuevamente de

(b).

$\therefore\ \forall n\in\mathbb{N}\quad [\tau\leq n]\in\mathcal{F}_\tau$

(3) (i) P.d. $\forall B\in B(\mathbb{R})\ [X_\tau\in B]\in\mathcal{F}$

$$[X_\tau\in B]=[X_\tau\in B]\cap\Omega=[X_\tau\in B]\cap\left[\bigcup_{k=0}^{\infty}[\tau=k]\cup[\tau=+\infty]\right]$$

$$=\bigcup_{k=0}^{\infty}\left([X_\tau\in B]\cap[\tau=k]\right)\cup\left([X_\tau\in B]\cap[\tau=+\infty]\right)$$

$$=\bigcup_{k=0}^{\infty}\left([X_k\in B]\cap[\tau=k]\right)\cup\left\{[X_\tau\in B]\cap[\tau=\infty]\right\}=\left\{\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k\right\}\cup C$$

Pero $A_k\in\mathcal{F}_k\subset\mathcal{F}\,\forall_k$ por ser, X_k $\mathcal{F}_k$-medible y τ tiempo de paro $\therefore \bigcup_{k=0}^{\infty}A_k\in\mathcal{F}$.

Ahora para C hay 2 casos

(a) Si $0\in B\in B(\mathbb{R})$

$\Rightarrow C=[X_\tau\in B]\cap[\tau=\infty]=[0\in B]\cap[\tau=\infty]=[\tau=\infty]$

(usando la definición 2.1.S.1).

Pero $[\tau=\infty]^c=[\tau<\infty]=\bigcup_{k=0}^{\infty}[\tau<k]$

por ser τ t.d.p. c.r.a $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$

$[\tau \leq k] \in \mathcal{F}_k$ y $[\tau = k] \in \mathcal{F}_k \;\; \forall k \geq 1$

$\Rightarrow [\tau < k] = [\tau \leq k] \setminus [\tau = k] \in \mathcal{F}_k \;\; \forall_k$

$\Rightarrow \bigcup_{k=0}^{\infty} [\tau < k] \in \mathcal{F} \Rightarrow [\tau = \infty]^c \in \mathcal{F}$

$\Rightarrow [\tau = \infty] \in \mathcal{F}$

(b) si $0 \notin B \in B(\mathbb{R})$

$\Rightarrow C = [X_\tau \in B] \cap [\tau = \infty] = \emptyset \in \mathcal{F}$

$\therefore [X_\tau \in B] \in \mathcal{F} \quad \forall B \in B(\mathbb{R})$

(ii) Sea $a \in \mathbb{R}$

y

$[X_\tau \leq a] \cap [\tau = n] = [X_n \leq a] \cap [\tau = n] \in \mathcal{F}_n \; \forall_n$

$\therefore X_\tau$ es $\mathcal{F}_\tau$-medible.

2.2. DEFINICION:

(a) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad fijo y $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una filtración en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de v.a. definidas en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ adaptada a $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ entonces decimos que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es MARTINGALA con respecto a $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ (Por brevedad escribimos $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=1}$ es martingala) si y sólo si:

(1) $X_n \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P) \; \forall n \in \mathbb{N}$

(2) $\forall \, n, m \in \mathbb{N} \;\; n < m$ se cumple $E[X_m / \mathcal{F}_n] = X_n$ P-c.d.

(b) $(X_n,\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ se llama supermatingala ó submartingala si y sólo si en a.2 se tiene: $E[X_m/\mathcal{F}_n]\leq X_n$ ó $E[X_m/\mathcal{F}_n]\geq X_n$ P.c.d. (respectivamente)

2.2.1 PROPIEDADES:

(a) $(X_n,\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ es MARTINGALA $\Leftrightarrow$ $\forall$ n,m $\in\mathbb{N}$ con n<m se cumple:

$$\int_A X_n dP=\int_A XmdP \quad \forall A\in\mathcal{F}_n$$

$$\left(\text{Supermartingala} \Leftrightarrow \int_A X_n dP\geq\int_A X_m dP \quad \forall A\in\mathcal{F}_n\right)$$

$$\left(\text{Submartingala} \Leftrightarrow \int_A X_n dP\leq\int_A X_m dP \quad \forall A\in\mathcal{F}_n\right)$$

(b) $(X_n,\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ es MARTINGALA $\Leftrightarrow$ $(X_n,\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ es submartingala y Supermartingala.

(c) $(X_n,\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ es supermartingala $\Leftrightarrow$ $(-X_n,\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es submartingala

(d) Si $(X_n,\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(Y_n,\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ son martingalas y a,b $\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $(aX_n+bY_n,\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ es martingala

(e) $(X_n,\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ es martingala $\Leftrightarrow$ $E[X_{n+1}/\mathcal{F}_n]=X_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$
(Análogo para submartingalas y supermartingalas)

DEMOSTRACION:

(a) Se tiene que

$\forall n,m\in\mathbb{N}$ con n<m $E[X_m/\mathcal{F}_n]=X_n$ P.c.d.

$\Leftrightarrow \quad \forall A \in \mathcal{F}_n \quad \int_A E(X_m/\mathcal{F}_n)dP = \int_A XndP$

Pero por definición de esperanza condicional (1.4)

$\forall A \in \mathcal{F}_n \quad \int_A E(X_m/\mathcal{F}_n)dP = \int_A X_m dP$

$\therefore \quad \forall A \in \mathcal{F}_n \quad \int_A X_m dP = \int_A X_n dP$

(b) es claro y para (c) se usa 1.4.1.d

(d) Como $X_n \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $Y_n \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ (1) $aX_n + bY_n \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ $\forall n$ (ya que L^1 es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$).
Además $aX_n + bY_n$ es $\mathcal{F}_n$-medible $\forall_n$.

(2) Sean $n,m \in \mathbb{N}$ tales que $n<m$ entonces por 1.4.1.d $E(aX_m + bY_m/\mathcal{F}_n) = aE[X_m/\mathcal{F}_n] + bE[Y_m/\mathcal{F}_n] = aX_n + bY_n$ P-c.d. ya que $(X_n)_{n\geq 1}$ y $(Y_n)_{n\geq 1}$ son martingalas $\therefore$ $(aX_n + bY_n, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ es MGLA.

(e) ($\Rightarrow$) inmediato

($\Leftarrow$) Sean $n,m \in \mathbb{N}$ tales que $n<m$ entonces

$E[X_m/\mathcal{F}_n] = E[E[X_m/\mathcal{F}_{m-1}]/\mathcal{F}_n] = E[X_{m-1}/\mathcal{F}_n]$ usando 1.4.1.h y la hipótesis.

si aplicamos el anterior proceso inductivamente

$E[X_{n+1}/\mathcal{F}_n] = E[E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n)/\mathcal{F}_n] = E[X_n/\mathcal{F}_n] = X_n$

$\therefore \quad E[X_m/\mathcal{F}_n] = X_n \quad$ P-c.d.

2.2.2. EJEMPLOS:

(a) Sean $\xi_1, \xi_2, \ldots,$ v.a. indeps. integrables tales que $E(\xi_i)=0 \;\; \forall_i$. Sea

$\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$. Entonces $\{X_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es MARTINGALA.

(i) $E(X_n) = E\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E(\xi_n) = 0 \;\therefore\; X_n \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P) \;\; \forall_n$; ademas por el resultado

I.3 del Apéndice X_n es $\mathcal{F}_n$-medible $\forall_n$.

(ii) Dados $n, m \in \mathbb{N}$ con $n < m$

$$E[X_m / \mathcal{F}_n] = E\left[\sum_{k=1}^{m} \xi_k / \mathcal{F}_n\right] = E\left[\sum_{k=1}^{n} \xi_k + \sum_{k=n+1}^{m} \xi_k / \mathcal{F}_n\right]$$

$$= E\left[\sum_{k=1}^{n} \xi_k / \mathcal{F}_n\right] + E\left[\sum_{k=n+1}^{m} \xi_k / \mathcal{F}_n\right] = \sum_{k=1}^{n} \xi_k + E\left(\sum_{k=n+1}^{m} \xi_k\right)$$

ya que $\sum_{k=1}^{n} \xi_k$ es $\mathcal{F}_n$-medible y usando 1..4.1.(k)

$$\therefore\; E[X_m / \mathcal{F}_n] = \sum_{k=1}^{n} \xi_k + \sum_{k=n+1}^{m} E\,\xi_k = X_n + 0 = X_n$$

Se observa entonces que la suma de v.a. independientes e integrables forman una martingala c.r.a $\mathcal{F}_n = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$.

(b)

Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, V una medida finita en $\mathcal{F}$ y $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ una filtración en $(\Omega, \mathcal{F})$.

Si además $V \ll P$ (V es absolutamente continua c.r.a P) en $\mathcal{F}_n$ $\forall_n$, y tomamos $X_n = \frac{dV}{dP}$ (la derivada de Radón-Nikodym de V c.r.a. P en $\mathcal{F}_n$; n=1,2,....), entonces:

(i) X_n es $\mathcal{F}_n$-medible y satisface

$$V(A)=\int_A X_n dP \quad \forall A \in \mathcal{F}_n$$

de la construcción que se hace de X_n en el teorema de Radón-Nikodym se sabe que es P-integrable

$$\therefore \; X_n \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P) \;\; \forall_n .$$

(ii) como $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ $(A \in \mathcal{F}_n \Rightarrow A \in \mathcal{F}_{n+1})$

$$\Rightarrow \; \forall A \in \mathcal{F}_n \quad \int_A X_{n+1} dP = V(A)$$

Pero $\forall A \in \mathcal{F}_n \quad \int_A X_n dP = V(A)$

i.e. $\int_A X_n dP = \int_A X_{n+1} dP \;\; \forall A \in \mathcal{F}_n$

usando 2.2.1.a y 2.2.1.e se concluye que $(X_n,\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ es MARTINGALA.

(c) Sean $\Omega=(0,1)$ $\mathcal{F}=B(0,1)$ P=medida de Lebesgue y $W(x)= {}^1/_{x^{1/2}}$ $(W \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ pero $W \notin L^2(\Omega,\mathcal{F},P))$.

Tomamos $\mathcal{F}_n = \sigma\{B[(0,d_n)], [d_n,1)\}$ con $d_n = \frac{2^n-1}{2^n}$ $\forall n \geq 1$ y $X_n = E[W/\mathcal{F}_n]$ entonces $(X_n,\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ es martingala.

DEMOSTRACION:

(i) Como $E[W/\mathcal{F}_n]$ es $\mathcal{F}_n$-medible $\Rightarrow$ X_n es $\mathcal{F}_n$-medible $\forall n\geq 1$.

además

$E[X_n]=E[E[W/\mathcal{F}_n]]=E[W]<+\infty$ ya que $W\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$

(ii) $E[X_{n+1}/\mathcal{F}_n]=E[E[W/\mathcal{F}_{n+1}]/\mathcal{F}_n]=E[W/\mathcal{F}_n]=X_n$ usando 1.4.1.h de hecho éste es un ejemplo de una martingala cuyos elementos X_n están en L^1 pero no en L^2.

AFIRMACION:

$\mathcal{F}_n=\{A/A=B\in B[(0,d_n)]$ ó $A=B\cup[d_n,1)$ con $B\in B[(0,d_n)]=\mathcal{G}_n$;

$X_n=W\cdot 1_{(0,d_n)}(x)+\{\frac{1}{p([d_n,1))}\cdot\int_{[d_n,1)}W\ dp\}\cdot 1_{[d_n,1)}(x)$ P c.d.

DEMOSTRACION: Para cada n

(1) La contención $\mathcal{F}_n\supset\mathcal{G}_n$ es clara.

(2) Hay que probar $\mathcal{F}_n\subset\mathcal{G}_n$, comenzamos por probar que $\mathcal{G}_n$ es σ-álgebra:

(a) $(0,1)\in\mathcal{G}_n$ vale

(b) $A\in\mathcal{G}_n\Rightarrow A^c\in\mathcal{G}_n$

Si $A=B\in B[(0,d_n)]\Rightarrow A^c\in B[(0,d_n)]\therefore A^c\in\mathcal{G}_n$

Si $A=B\cup[d_n,1)\Rightarrow A^c=B^c\cap(0,d_n)\in B[(0,d_n)]\therefore A^c\in\mathcal{G}_n$

(c) Sean $A_1, A_2, \ldots, \in \mathcal{G}_n$

Si $\exists$ k tal que $A_k = B \cup [d_n, 1) \Rightarrow \bigcup_{\mathbb{N}} A_k = B \cup [d_n, 1) \therefore \bigcup_{\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{G}_n$

Si $\forall_k \quad A_k = B \in B[(0, d_n)] \Rightarrow \bigcup_{\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{G}_n$

$\therefore \mathcal{G}_n$ es σ-álgebra y contiene tanto a $B[(0,d_n)]$ como a $[d_n,1)$

$\therefore \mathcal{F}_n \subset \mathcal{G}_n$

Suponiendo que jugamos un juego de azar (por ejemplo tirar una moneda, pagando un peso si sale sol y ganando un peso si sale águila), sea X_n nuestra ganancia total después de n juegos, si $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una filtración para la cual $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es adaptado y $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una martingala, entonces la información a cerca del juego al tiempo n está contenida en $\mathcal{F}_n$, la condición de martingala 2.2.a.2 nos dice que nuestra ganancia esperada después del siguiente juego (si condicionamos a la información que ya conocemos hasta el momento n) equivale a la ganancia que ya teníamos en el momento n. En otras palabras el juego es justo. De la misma forma una submartingala corresponde a un juego favorable y una supermartingala a un juego desfavorable.

Lo anterior también se podría decir así:

Supongamos que queremos parar el juego en un momento oportuno y llevarnos nuestra ganancia. observamos los primeros n juegos y queremos decidir si ya paramos o esperamos hasta el m-ésimo juego (para un m>n). Si lo que tenemos es una martingala, entonces cada una de las dos decisiones es igualmente buena (en promedio). (Ver Bibliografía [15]).

2.2.3. PROPOSICION:

Sea T un conjunto de indices ($T=\mathbb{N}$ ó $T=\{K,K+1,\dots,K+n\}$)

(a) Si $(X_n,\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ es una martingala y $f;\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ es convexa tal que $f(X_n)\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ $\forall n\in T$, entonces $\{f(X_n),\mathcal{F}_n\}_{n\in T}$ es submartingala

(b) Si $(X_n,\mathcal{F}_n)_{n\in T}$ es submartingala y $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ es convexa creciente y si $f(X_n)\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ $\forall n\in T$, entonces $\{f(X_n),\mathcal{F}_n\}_{n\in T}$ es submartingala.

DEMOSTRACION:

(a) Se cumplen las hipótesis de 1.4.1(g)

$\therefore\ E(f(X_{n+1})/\mathcal{F}_n)\geq f(E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n))$

pero

$E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n)=X_n$ (por ser $\{X_n\}_{n\in T}$ martingala)

$\therefore\ E(f(X_{n+1})/\mathcal{F}_n)\geq f(X_n)$ $\forall n\in T$

(b) Nuevamente por 1.4.1.(g)

$E(f(X_{n+1})/\mathcal{F}_n)\geq f(E[X_{n+1}/\mathcal{F}_n])$

$E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n)\geq X_n$ ($\{X_n\}_{n\in T}$ submartingala)

y como f es creciente $f(E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n))\geq f(X_n)$

$\therefore\ E(f(X_{n+1})/\mathcal{F}_n)\geq f(X_n)$

2.2.4. COROLARIO:

Si $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in T}$ es martingala entonces:

(a) Si $X_n \in L^p(\Omega,\mathcal{F},P)$ para $p \geq 1$ $\forall n\in T$ entonces $(|X_n|^p, \mathcal{F}_n)_{n\in T}$ es submartingala

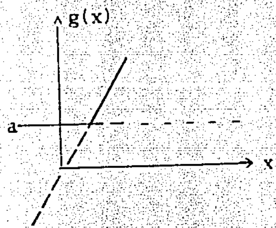
(b) $\forall a\in \mathbb{R}$ $(X_n \vee a, \mathcal{F}_n)_{n\in T}$ es submartingala (En particular $(X_n^-, \mathcal{F}_n)_{n\in T}$ y $(X_n^+, \mathcal{F}_n)_{n\in T}$ son submartingalas).

DEMOSTRACION:

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x)=|x|^p$ es convexa $p>1$

y

$g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $g(x)=\text{Sup}(x,a)$ es convexa y creciente



además $X_n \vee a \leq X_n + a$ c.d.

$\therefore$ $X_n \vee a \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ $\forall n\in T$

2.2.5. PROPOSICION:

Si $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in T}$ es una martingala y $Y_1 = X_1, Y_2 = X_2 - X_1, \ldots, Y_k = X_k - X_{k-1}$ entonces $E[Y_i \cdot Y_j]=0$ $\forall i\neq j$.

DEMOSTRACION:

$$Y_iY_j=(X_i-X_{i-1})(X_j-X_{j-1})=X_iX_j-X_iX_{j-1}-X_{i-1}X_j+X_{i-1}X_{j-1}$$

$$\Rightarrow E(Y_iY_j)=E[X_iX_j]-E[X_iX_{j-1}]-E[X_{i-1}X_j]+E[X_{i-1}X_{j-1}] \qquad (1)$$

Sean $k,n\in T$ con $k\neq n$, suponiendo sin pérdida de generalidad que $k>n$ entonces:

$$E[X_kX_n/\mathcal{F}_n]=X_nE[X_k/\mathcal{F}_n]=X_nX_n=X_n^2$$

$$\Rightarrow E(E[X_kX_n/\mathcal{F}_n])=EX_n^2 \Rightarrow E[X_kX_n]=EX_n^2$$

Ahora si en (1) $i<j$

$$E(Y_iY_j)=EX_i^2-EX_i^2-EX_{i-1}^2+EX_{i-1}^2=0$$

Análogamente si $i>j$

Este resultado también podría verse como un corolario de 1.4.3 ya que si $X_n\in L^2(\Omega,\mathcal{F},P)\forall n$, para $j,k\in T$ $k\neq j$ (Suponemos s.p.d.g. $j<k$) entonces $E[X_k/\mathcal{F}_j]=X_j$ c.d.

Pero por 1.4.3. $E[X_k/\mathcal{F}_{k-1}]$ es la proyección ortogonal de X_k en $L^2(\Omega,\mathcal{F}_{k-1},P)$ $\Rightarrow$ $\langle X_k-X_{k-1},Z\rangle=E((X_k-X_{k-1})Z)=0$ $\forall Z\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_{k-1},P)$.

Como $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in T}$ es una filtración y $j<k$

$\Rightarrow$ X_{j-1} y X_j son $\mathcal{F}_{k-1}$-medibles

$\Rightarrow$ X_j, X_{j-1} $\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_{k-1},P)$

$\Rightarrow X_j - X_{j-1} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{k-1}, P)$

$\Rightarrow \langle X_k - X_{k-1}, X_j - X_{j-1} \rangle = E\, Y_k Y_j = 0$

2.2.5.1. PROPOSICION:

(a) si $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ es martingala entonces

$EX_1 = EX_2 = \ldots\ldots$

(b) Si $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ es submartingala entonces

$EX_1 \leq EX_2 \leq \ldots\ldots$

(c) Si $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ es sobremartingala entonces

$EX_1 \geq EX_2 \geq \ldots\ldots$

DEMOSTRACION

(a) $E[X_{n+1}/\mathcal{F}_n] = X_n$ P c.d. $\forall n$ tomando esperanza de ambos lados y usando 1.4.1.j. se tiene

$E\,X_{n+1} = EX_n \;\forall n$

(b) y (c) son análogos.

2.2.6. DEFINICION: Sea $\Gamma = \{X / X$ es una sucesión de v.a.$\}$. $(X = (X_1, X_2, \ldots))$. Entonces definiendo $+: \Gamma \times \Gamma \longrightarrow \Gamma$ y $\cdot\ \Gamma \times \Gamma \longrightarrow \Gamma$ como:

$X^1 + X^2 = (X_1^1 + X_1^2,\ X_2^1 + X_2^2, X_3^1 + X_3^2, \ldots)$ y $\alpha \cdot X = (\alpha X_1, \alpha X_2, \ldots)$ se tiene que Γ es un espacio vectorial ($k = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$).

Si ahora definimos $(p\geq 1)$ $\|\ \|_p:\Gamma\longrightarrow\mathbb{R}$ como $\|X\|_p=\{\operatorname{Sup}_n E|X_n|^p\}^{1/p}$ entonces:

(i) Si $\|X\|_p=0 \Rightarrow 0=\{\operatorname{Sup}_n E|X_n|^p\}^{1/p} \Rightarrow E|X_n|^p=0\ \forall n \Rightarrow |X_n|^p=0$ c.d. $\forall n \Rightarrow X_n=0$ c.d $\forall n$ $\therefore$ $X=\bar{0}=(0,0,\ldots,)$ c.d $\therefore$ $\|X\|=0 \Leftrightarrow X=0$ c.d.

(ii) $\|\alpha\cdot X\|_p=\{\operatorname{Sup}_n E|\alpha\cdot X_n|^p\}^{1/p}=\{\operatorname{Sup}_n |\alpha|^p E|X_n|^p\}^{1/p}=\{|\alpha|^p \operatorname{Sup}_n E|X_n|^p\}^{1/p}$

$=|\alpha|\cdot\{\operatorname{Sup}_n E|X_n|^p\}^{1/p}=|\alpha|\ \|X\|_p$

(iii) $\|X+Y\|_p=\{\operatorname{Sup}_n E|X_n+Y_n|^p\}^{1/p}=\operatorname{Sup}_n\{E|X_n+Y_n|^p\}^{1/p}\leq \operatorname{Sup}_n\{\{E|X_n|^p\}^{1/p}$

$+\{E|Y_n|^p\}^{1/p}\}\leq \operatorname{Sup}_n\{E|X_n|^p\}^{1/p}+\operatorname{Sup}_n\{E|Y_n|^p\}^{1/p}=\{\operatorname{Sup}_n E|X_n|^p\}^{1/p}$

$+\{\operatorname{Sup}_n E|Y_n|^p\}^{1/p}=\|X\|_p+\|Y\|_p$

usando la desigualdad de Minkowski entonces $\|\ \|_p$ es una seminorma en Γ.

Decimos que una sucesión de v.a. X es L^p-acotada si $\|X\|_p^p<\infty$.

2.2.6.1. OBSERVACION: Sean

$$1\leq q\leq p;\ E|X_n|^q=\int_\Omega |X_n|^q dP=\int_{|X_n|>1}|X_n|^q dP+\int_{|X_n|\leq 1}|X_n|^q\, dP$$

$$\leq\int_{|X_n|>1}|X_n|^p\, dP+1\leq 1+E|X_n|^p\ \ \forall n$$

lo anterior nos dice que Si X es L^p-acotado$\Rightarrow$X es L^q-acotado.

2.2.6.2. OBSERVACION: Si $(X_n,\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sobremartingala entonces:

$\sup_n E[X_n^-]<\infty \iff (X_n)_{n=1}^{\infty}$ es L^1-acotado

DEMOSTRACION:

$\Leftarrow$) $X_n^+ + X_n^- = |X_n|$ y $X_n^+ \geq 0$ c.d. $\forall n$

$\therefore\ X_n^- \leq |X_n|$ c.d. $\forall n\ \therefore\ \sup_n E[X_n^-] \leq \sup_n E[|X_n|]$

$\Rightarrow$) $X_n + X_n^- = X_n^+$ c.d. $\forall n$

entonces $X_n + 2X_n^- = X_n^+ + X_n^- = |X_n|$ c.d. $\forall n$

entonces $E|X_n| = E[X_n + 2X_n^-] = EX_n + 2E[X_n^-]$

como $(X_n,\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ es sobremartingala $\{EX_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente (2.2.5.1) por lo que $EX_n + 2E[X_n^-] \leq E[X_1] + 2E[X_n^-]$.

Así

$\sup_n E|X_n| \leq E[X_1] + \sup_n \{2E[X_n^-]\} < \infty$

2.2.7. LA DESCOMPOSICION DE KRICKEBERG

Sea $(X_n,\mathcal{F}_n)_{n=0}$ una submartingala en $(\Omega,\mathcal{F},P)$ si definimos $\Phi_n(A) = \int_A X_n dP$ $\forall A \in \mathcal{F}_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ entonces Φ_n es una medida con signo, finita t.q. $\Phi_n \ll P$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $(\Phi_n : \mathcal{F}_n \longrightarrow \mathbb{R})$.

Además por la definición de submartingala $\forall n,m \in \mathbb{N}$ con $n \leq m$

$$\Phi_n(A) = \int_A X_n dP \leq \int_A X_m dP = \Phi_m(A) \quad \forall A \in \mathcal{F}_n \tag{I}$$

2.2.7.1. OBSERVACION: Si $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ fuera martingala entonces tendríamos (con la notación anterior)

$$\Phi_n(A) = \Phi_m(A) \quad \forall A \in \mathcal{F}_n$$

2.2.7.2. DEFINICION: Sea $(Y_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ una submartingala L^1-acotada (i.e. $\operatorname{Sup}_{\mathbb{N}} E|Y_n| < \infty$) y con $Y_n \geq 0$ $\forall n$. Definamos

$$\tilde{\Phi}_n(A) = \lim_{k \geq n} \Phi_k(A) = \operatorname{Sup}_{k \geq n} \Phi_k(A) \quad \text{para } A \in \mathcal{F}_n$$

entonces:

(i) $\tilde{\Phi}_n$ es el límite de una sucesión no decreciente de medidas $(\Phi_k(A) = \int_A Y_k \, dP \quad A \in \mathcal{F}_n)$ finitas en $\mathcal{F}_n$ tales que $\Phi_k \ll P$ $\forall_{k \geq n}$.

Además

$$\Phi_k(A) = \int_A Y_k \, dP \leq \int_\Omega Y_k \, dP \leq \operatorname{Sup}_{\mathbb{N}} E|Y_k| < \infty \quad \forall_{k \geq n}$$

i.e. para cada $A \in \mathcal{F}_n$ la sucesión de números $\{\Phi_k(A)\}_{k \geq n}$ es monótona no decreciente y acotada

$\therefore$ tiene sentido definir $\lim_{k \geq n} \Phi_k(A)$ $A \in \mathcal{F}_n$

veremos para concluir dos resultados:

(a) TEOREMA: (Vitali, Hahn, Saks. 1933)

Sea (X, S, μ) un espacio de medida y $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de medidas finitas en (X, S), t.q. $V_n \ll \mu$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Si $\lim_{n\to\infty} V_n(E)$ existe $\forall E\in S$ entonces:

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0 \text{ t.q. } \sup_{n\in\mathbb{N}} \{V_n(B)\}<\varepsilon, \ \forall B\in S \text{ con } \mu(B)<\delta.$$

(b) Si en las hipótesis de (a) se agrega $\mu(X)<+\infty$ entonces la función $V(E)=\lim_{n\to\infty} V_n(E)$ es una medida absolutamente continua c.r. a μ.

$\therefore$ $\tilde{\Phi}_n$ es una medida en $(\Omega,\mathcal{F}_n)$ t.q. $\tilde{\Phi}_n \ll P$ $\forall n\in\mathbb{N}$

(ii) Si $n\leq m$ $n,m\in\mathbb{N}$ y $A\in\mathcal{F}_n$ entonces

$$\tilde{\Phi}_n(A)=\sup_{k\geq n} \Phi_k(A)=\sup_{k\geq m} \Phi_k(A)=\tilde{\Phi}_m(A) \quad \text{(Usando I)}$$

i.e. $\tilde{\Phi}_m$ es una medida en $(\Omega,\mathcal{F}_m)$ tal que su restricción a $(\Omega,\mathcal{F}_n)$ es $\tilde{\Phi}_n$.

2.2.7.3. OBSERVACION: Como $\tilde{\Phi}_n$ es medida en $(\Omega,\mathcal{F}_n)$ $\forall n$ entonces $\forall A\in\mathcal{F}_n$ se tiene

$$0\leq\tilde{\Phi}_n(A)\leq\tilde{\Phi}_n(\Omega)=\sup_{k\geq n}\int_\Omega Y_k\,dP\leq\sup_{\mathbb{N}} EY_k<\infty \quad \therefore \quad \tilde{\Phi}_n \text{ es una medida finita } \forall n$$

2.2.7.4. OBSERVACION: Si tuvieramos $(Y_n,\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ MGLA no necesariamente acotada ni mayor o igual que cero. Entonces por

2.2.7.1

$$\tilde{\Phi}_n(A)=\sup_{k\geq n} \Phi_k(A)=\Phi_n(A)$$

i.e. recupero la sucesión de medidas con signo, finitas y absolutamente continuas c.r.a P.

2.2.7.5 OBSERVACION: Volviendo a las hipótesis como en 2.2.7.2. Como $\tilde{\Phi}_n$ es una medida finita en $(\Omega,\mathcal{F}_n)$ y $\tilde{\Phi}_n \ll P$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces aplicando el teorema de RADON-NIKODYM; $\forall n\ \exists\ X_n \in L^1(\Omega,\mathcal{F}_n,P)$ $X_n \geq 0$ c.d., t.q.

$$\tilde{\Phi}_n(A)=\int_A X_n dP \quad \forall A \in \mathcal{F}_n$$

es decir vía el teorema de Radon-Nikodym construimos un proceso $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que cumple:

(a) $X_n \in L^1(\Omega,\mathcal{F}_n,P)$

(b) X_n es $\mathcal{F}_n$-medible

(c) $X_n \geq 0$ $\forall n$ c.d.

(d) y debido a lo visto en 2.2.7.2 (ii). Si $n,m \in \mathbb{N}$ $n \leq m$ y $A \in \mathcal{F}_n$

$$\int_A X_n dP=\tilde{\Phi}_n(A)=\tilde{\Phi}_m(A)=\int_A X_m dP$$

(a), (b), (c) y (d) nos dicen que $(X_n,\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ es martingala

Además como $X_n \geq 0$ y $X_n \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ $\forall n$ entonces $E|X_n|=EX_n=EX_0$ $\forall n$

$\therefore \sup_{\mathbb{N}} E|X_n|=EX_0<\infty$ (i.e. $(X_n)_n$ es L^1-acotado)

2.2.7.6. TEOREMA (KRICKEBERG): Sea $(X_n,\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ una martingala L^1-acotada entonces existen dos martingalas $(X_n^{I},\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$, $(X_n^{II},\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ no negativas tales que $X_n=X_n^{I}-X_n^{II}$ $\forall n$.

DEMOSTRACION:

Para cada $n\in\mathbb{N}$ y cada $A\in\mathcal{F}_n$ defino $\Phi_n(A)=\int_A X_n dP$ entonces $\Phi_n(A)=\Phi_m(A)$ si $n\leq m$ $n,m\in\mathbb{N}$.

Como $(X_n,\mathcal{F}_n)_{n=o}^{\infty}$ es martingala entonces si $X_n^+=\text{Sup}(X_n,0)$ $X_n^-=\text{Sup}(-X_n,0)$ se tiene que $(X_n^+,\mathcal{F}_n)_{n=o}^{\infty}$ y $(X_n^-,\mathcal{F}_n)_{n=o}^{\infty}$ son submartingalas (ver 2.2.4.b) no negativas y tales que como

$EX_n^+\leq E(X_n^++X_n^-)=E|X_n|$ $\forall n$ y $EX_n^-\leq E(X_n^++X_n^-)=E|X_n|$ $\forall n$, son L^1-acotadas

entonces definiendo $\Phi_n^+(A)=\int_A X_n^+ dP$ para cada n y $A\in\mathcal{F}_n$

$$\Phi_n^-(A)=\int_A X_n^- dP \text{ para cada n y } A\in\mathcal{F}_n$$

$\tilde{\Phi}_n^+(A)=\lim\limits_{k\geq n}\Phi_k^+(A)$ y $\tilde{\Phi}_n^-=\lim\limits_{k\geq n}\Phi_k^-(A)$

son dos sucesiones de medidas finitas y abs. continuas c.r.a P para las cuales existen $(X_n^{|},\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ y $(X_n^{||},\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ (respectivamente) martingalas no negativas y L^1-acotadas t.q.

$$\tilde{\Phi}_n^+(A)=\int_A X_n^{|}dP \quad A\in\mathcal{F}_n$$

$$\tilde{\Phi}_n^-=\int_A X_n^{||}dP \quad A\in\mathcal{F}_n$$

entonces

$\forall n\in\mathbb{N}$ Si $k\geq n$ y $A\in\mathcal{F}_n$

tenemos

$$\Phi_n(A)=\Phi_k(A)=\Phi_k^+(A)-\Phi_k^-(A)$$

Asi pues

$$\Phi_n(A)=\lim_{k>n}\Phi_k(A)=\lim_{k>n}\Phi_k^+(A)-\lim_{k>n}\Phi_k^-(A)=\tilde{\Phi}_n^+(A)-\tilde{\Phi}_n^-(A)$$

i.e. para cada $n\in\mathbb{N}$ y $A\in\mathcal{F}_n$

$$\int_A X_n\,dP=\int_A X_n^{|}\,dP-\int_A X_n^{||}\,dP=\int_A X_n^{|}-X_n^{||}\,dP$$

y como X_n y $X_n^{|}-X_n^{||}$ son ambas $\mathcal{F}_n$-medibles

$$\Rightarrow X_n=X_n^{|}-X_n^{||} \text{ c.d. } \forall n\in\mathbb{N}$$

2.2.8. DEFINICIONES:

(i) Un proceso $(A_0,A_1,A_2,\dots)$ se llama PREDECIBLE si A_0 es $\mathcal{F}_0$-medible y $\forall n>0$ A_n es $\mathcal{F}_{n-1}$-medible.

$\left(\{\mathcal{F}_k\}_{k=0}^{\infty}\right.$ filtración en $\left.(\Omega,\mathcal{F})\right)$

(ii) Un proceso $(A_n:n\in\mathbb{N})$ se puede ver como una función $A_n(\omega)=A(n,\omega):\mathbb{N}\times\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$, llamamos TRAYECTORIAS de $(A_n:n\in\mathbb{N})$ a las funciones que se obtienen al fijar ω y hacer variar n.

(iii) Decimos que un proceso $(A_n)_{n\geq 0}$ adaptado a $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ es CRECIENTE si

(a) A_n es integrable $\forall_n$; $A_0=0$.

(b) Las trayectorias de $(A_n)_{n\geq 0}$ son funciones crecientes de n.

(c) $(A_n)_{n\geq 0}$ es predecible

2.2.8.1. LA DESCOMPOSICION DE DOOB

Sea $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una filtración en $\mathcal{F}$ y sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sobremartingala relativa a la familia $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Definimos las sucesiones de v.a. $\{Y_n\}_n$ y $\{A_n\}_n$ de la siguiente manera.

$$
\begin{array}{ll}
Y_0=X_0 & A_0=0 \\
Y_1=Y_0+(X_1-E(X_1/\mathcal{F}_0)) & A_1=X_0-E[X_1/\mathcal{F}_0] \\
\vdots & \vdots \\
Y_n=Y_{n-1}+(X_n-E[X_n/\mathcal{F}_{n-1}]) & A_n=A_{n-1}+(X_{n-1}-E[X_n/\mathcal{F}_{n-1}])
\end{array}
$$

Se tiene entonces que:

(a) $X_n=Y_n-A_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

(b) $(Y_n,\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ es una martingala.

(c) A_n se obtiene de A_{n-1} sumándole una cantidad positiva, i.e. las trayectorias del proceso $(A_n)_{n\geq 0}$ son funciones no decrecientes de n.

(d) $A_0=0$; A_n es $\mathcal{F}_{n-1}$-medible e integrable $\forall n$.

DEMOSTRACION:

(a) (Por inducción)

$$X_1=Y_0+(X_1-E[X_1/\mathcal{F}_0])-(X_0-E(X_1/\mathcal{F}_0)]=Y_1-A_1$$

Hipótesis de inducción (vale para k=n)

$$X_n=Y_n-A_n=Y_{n-1}+(X_n-E(X_n/\mathcal{F}_{n-1})]-(A_{n-1}+X_{n-1}-E(X_n/\mathcal{F}_{n-1})]$$

P.d. vale para k=n+1

$$Y_{n+1}-A_{n+1}=Y_n+(X_{n+1}-E[X_{n+1}/\mathcal{F}_n])-(A_n+(X_n-E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n)))$$

$$=X_{n+1}+Y_n-A_n-X_n-E[X_{n+1}/\mathcal{F}_n]+E[X_{n+1}/\mathcal{F}_n]=X_{n+1}$$

(b) Claramente Y_n es la suma de v.a. $\mathcal{F}_n$-medibles (Por ser $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una filtración) $\therefore$ Y_n es $\mathcal{F}_n$-medible $\forall_n$

$$E(Y_{n+1}/\mathcal{F}_n)=E[Y_n+(X_{n+1}-E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n))/\mathcal{F}_n]$$

$$=Y_n+E[X_{n+1}/\mathcal{F}_n]-(X_{n+1}-E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n))/\mathcal{F}_n]$$

(c) Como $(X_n,\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ es sobremartingala $\Rightarrow$

$$E[X_n/\mathcal{F}_{n-1}]\leq X_{n-1}\Rightarrow X_{n-1}-E[X_n/\mathcal{F}_{n-1}]\geq 0 \text{ c.d.}$$

y

$$A_n=A_{n-1}+(X_{n-1}-E[X_n/\mathcal{F}_{n-1}])$$

Entonces podemos ver al proceso $(A_1,A_2,.....)$ como una función $A_n(\omega)=A(n,\omega):\mathbb{N}\times\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$, y tomando $\omega_0\in\Omega$ fijo

$$A_{(n,\omega_0)}=A(n-1,\omega_0)+(X_{n-1}-E[X_n/\mathcal{F}_{n-1}])(\omega_0)\geq A(n-1,\omega_0)$$

i.e. las trayectorias de $(A_n)_{n\geq 0}$ son funciones crecientes de n.

(d) Es claro

La construcción 2.2.8.1 prueba que toda sobremartingala discreta $\{X_n\}_{n\geq 0}$ equivale a la diferencia de una martingala y de un proceso creciente.

Si ahora consideramos la unicidad de tales descomposiciones, podemos empezar con un proceso creciente $\{B_n\}_{n\geq 0}$ y una martingala $\{Z_n\}_{n\geq 0}$, si consideramos $X_n=Z_n-B_n$ $\forall_{n\geq 1}$ y $X_0=Z_0$ n=0, entonces:

(i) X_n es integrable $\forall_n$.

(ii) X_n es $\mathcal{F}_n$-medible $\forall_n$.

(iii) $E[X_n/\mathcal{F}_{n-1}]=E[Z_n-B_n/\mathcal{F}_{n-1}]=E[Z_n/\mathcal{F}_{n-1}]-E[B_n/\mathcal{F}_{n-1}]$

$=Z_{n-1}-E[B_n/\mathcal{F}_{n-1}]\leq Z_{n-1}-E[B_{n-1}/\mathcal{F}_{n-1}]=Z_{n-1}-B_{n-1}=X_{n-1}$

ya que $\{B_n\}_{n\geq 0}$ es $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ adaptado y como $B_{n-1}\leq B_n$ c.d.

$\Rightarrow E[B_{n-1}/\mathcal{F}_{n-1}]\leq E[B_n/\mathcal{F}_{n-1}]$

$\therefore (X_n,\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ es sobremartingala

Si ahora tomo $(Y_n)_{n\geq 0}$ y $\{A_n\}_{n\geq 0}$ construidas como en 2.2.8.1 para $(X_n)_{n\geq 0}$ entonces:

$X_0=Y_0=Z_0 \qquad A_0=B_0=0$

y

$Y_n-A_n=X_n=Z_n-B_n \quad \forall n\geq 1$ c.d.

$\Leftrightarrow Y_n-Z_n=A_n-B_n \quad \forall n\geq 1$ c.d.

$\Rightarrow E[Y_n-Z_n/\mathcal{F}_{n-1}]=E[A_n-B_n/\mathcal{F}_{n-1}]=A_n-B_n$ c.d.

$\Rightarrow Y_{n-1}-Z_{n-1}=A_n-B_n$ c.d. $\forall n\geq 1$

$\Rightarrow Y_{n-1}-Z_{n-1}=Y_n-Z_n$ c.d. $\forall n\geq 1$

$\Rightarrow Y_n - Y_{n-1} = Z_n - Z_{n-1}$ c.d. $\forall n \geq 1$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} Y_k - Y_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} Z_k - Z_{k-1}$ c.d. $\forall n \geq 1$

$\Rightarrow Y_n = \sum_{k=1}^{n} (Y_k - Y_{k-1}) + Y_0 = \sum_{k=1}^{n} (Z_k - Z_{k-1}) - Z_0 = Z_n$ c.d. $\forall n \geq 1$

$\Rightarrow A_n = B_n$ c.d. $\forall n \geq 1$

$\therefore$ la descomposición de Doob de una sobremartingala $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ es única.

2.2.8.2. OBSERVACION:

Si $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ es submartingala de 2.2.1.C se sigue que $(-X_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ es sobremartingala.

Por 2.2.8.1 existen $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ t.q. $\{Y_n, \mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$ es martingala y $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ es un proceso creciente con

$-X_n = Y_n - A_n$ c.d. $\forall n$

$\Rightarrow X_n = A_n - Y_n$ c.d. $\forall n$

pero si $\{Y_n, \mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$ es martingala $\Rightarrow \{-Y_n, \mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$ es martingala, sea $Z_n = -Y_n$ $\forall n \geq 0$

$\therefore X_n = Z_n + A_n$ c.d. $\forall n$

(i.e. $X = (X_1, X_2, \ldots.)$ es la suma de una martingala Z y un proceso creciente A).

3

TEOREMAS DE CONVERGENCIA, INTEGRABILIDAD UNIFORME

§3. TEOREMAS DE CONVERGENCIA, INTEGRABILIDAD UNIFORME

En ésta sección se verán algunos resultados referentes a la convergencia (en diferentes modos) de martingalas y submartingalas, así como el concepto de integrabilidad uniforme.

El siguiente resultado es de interés debido a que asegura que las condiciónes 2.2.a.2 y 2.2.b (ver observaciones después de los ejemplos 2.2.2) se preservan si los tiempos deterministas se reemplazan por tiempos aleatorios.

3.1. TEOREMA DE MUESTREO OPCIONAL (Doob).

Sea $(X_n,\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una supermartingala y τ_1,τ_2 dos tiempos de paro c.r.a $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $\tau_1\leq\tau_2$

(1) Si τ_2 es acotado entonces:

$$E[X_{\tau_2}/\mathcal{F}_{\tau_1}]\leq X_{\tau_1}$$

(2) Si $(X_n,\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es martingala y τ_2 es acotado entonces:

$$E[X_{\tau_2}/\mathcal{F}_{\tau_1}]=X_{\tau_1}$$

DEMOSTRACION

Como τ_2 es acotado podemos suponer que $\tau_2\leq n$ c.d. y entonces

$$|X_{\tau_i}(\omega)|\leq \mathrm{Max}\{|X_0|,|X_1|,\dots,|X_n|\}(\omega) \quad i=1,2 \qquad \omega\in\Omega$$

$$\therefore \int_\Omega |X_{\tau_i}|dP\leq\int_\Omega \mathrm{Max}\{|X_0|,|X_1|,\dots,|X_n|\}dP\leq\sum_{k=0}^{n}\int_\Omega|X_k|dP<\infty \quad i=1,2$$

$\therefore\ X_{\tau_i} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $i=1,2$ y además de 2.1.5.2

X_{τ_i} es $\mathcal{F}_{\tau_i}$-medible $i=1,2$

(1) P.d. $\forall A \in \mathcal{F}_{\tau_1}\ \int_A X_{\tau_1}\,dP \geq \int_A X_{\tau_2}\,dP$

(Si esto sucede entonces $\int_A E[X_{\tau_1} - X_{\tau_2} / \mathcal{F}_{\tau_1}]\,dP \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$

$\Leftrightarrow E[X_{\tau_1} - X_{\tau_2} / \mathcal{F}_{\tau_1}] \geq 0$ P-c.d $(\Omega, \mathcal{F}_{\tau_1}, P)$

$\Leftrightarrow X_{\tau_1} \geq E[X_{\tau_2} / \mathcal{F}_{\tau_1}]$ P-c.d $(\Omega, \mathcal{F}_{\tau_1}, P)$

Caso 1: Supongamos que $\tau_2 - \tau_1 \leq 1$ c.d. y $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$ entonces $P[\tau_2 < \tau_1] = 0$ (ya que $\tau_1 \leq \tau_2 \leq n$) y si $\omega \in [\tau_2 = \tau_1]$ se tiene $(X_{\tau_1} - X_{\tau_2})(\omega) = 0$

$$\therefore\ \int_A X_{\tau_1} - X_{\tau_2}\,dP = \int_{A \cap [\tau_2 > \tau_1]} X_{\tau_1} - X_{\tau_2}\,dP = \sum_{k=0}^{n} \int_{[\tau_1 = k] \cap A \cap [\tau_2 > \tau_1]} X_{\tau_1} - X_{\tau_2}\,dP$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \int_{[\tau_1 = k] \cap A \cap [\tau_2 = k+1]} X_k - X_{k+1}\,dP$$ la última igualdad debido

a que $\tau_2 - \tau_1 \leq 1$ y entonces $[\tau_2 > k] = [\tau_2 \geq k+1] = [\tau_2 = k+1]$.

Ahora como $A \in \mathcal{F}_{\tau_1} \Rightarrow A \cap [\tau_1 = k] \in \mathcal{F}_k$ y $[\tau_2 > k] = [\tau_2 \leq k]^c \in \mathcal{F}_k$ y usado que $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es submartingala se obtiene que:

$$\int_{[\tau_1 = k] \cap A \cap [\tau_2 = k+1]} X_k - X_{k+1}\,dP \geq 0 \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n$$

$\therefore \int_A X_{\tau_1} - X_{\tau_2}\, dP \geq 0$

Caso 2: Si $\tau_2 \geq \tau_1$

Definimos una sucesión finita de tiempos de paro

$\tau_1 = \tau^{(0)} \leq \tau^{(1)} \leq \ldots \leq \tau^{(n)} = \tau_2$

como

$\tau^{(k)} = \tau_1 \vee (\tau_2 \wedge k)$ (Por 2.1.4 $\tau^{(k)}$ es t.d.p. c.r.a $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$)

además

$\tau^{(k+1)} - \tau^{(k)} \leq 1$ entonces se puede aplicar el caso 1 n-veces.

(2) Se puede probar de manera análoga a (1) usando ahora la hipótesis de que $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es martingala.

En seguida probaremos una desigualdad importante que es básica para probar un resultado que usaremos con frecuencia en el siguiente capítulo y el cual podríamos escribir de la siguiente manera:

Si $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ es una martingala entonces $\{X_n\}$ tiene límite, finito ó infinito si y sólo si el número de sus oscilaciones entre cualesquiera dos numeros racionales a,b (con a<b) es finito (dependiendo a,b y $\omega\in\Omega$).

Primero veremos que se puede obtener una estimación del número esperado de tales oscilaciones para una sub ó sobre martingala $(X_n)_n$.

3.2. Lema: Sea $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ una filtración en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de v.a. adaptada a $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Si τ es t.d.p. c.r.a $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $B\in B(\mathbb{R})$ entonces $\tau^1(\omega) = \inf\{n : n > \tau(\omega)$ y $\xi n(\omega) \in B\}$ es también t.d.p. c.r.a $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$.

DEMOSTRACION.

$$[\tau^1=k]=\bigcup_{n=0}^{\infty}[\tau^1=k]\cap[\tau=n]=\bigcup_{n=0}^{k-1}[\tau^1=k]\cap[\tau=n]$$

pero si

$$\omega\in\bigcup_{n=0}^{k-1}[\tau^1=k]\cap[\tau=n]\Rightarrow\exists\, n_0\in\{0,1,\ldots,k-1\}$$

t.q $\quad \tau^1(\omega)=k=\inf\{n:n>\tau(\omega);\xi_n(\omega)\in B\}$ y $\tau(\omega)=n_0<k$

$\Rightarrow \quad \tau^1(\omega)=k=\inf\{n:n>n_0;\xi_n(\omega)\in B\}$ y $\tau(\omega)=n_0$

$\Rightarrow \quad \forall n$ con $n_0<n<k \quad \xi_n(\omega)\notin B,\ \xi_k(\omega)\in B$ y $\tau(\omega)=n_0$

$\Rightarrow \quad \omega\in[\tau=n_0]\cap[\xi_k\in B;\ \xi_{n_0+j}\notin B;\ j=1,2,\ldots,k-(1+n_0)]$

$\Rightarrow \quad \omega\in\bigcup_{n=0}^{k-1}[\tau=n]\cap[\xi_k\in B;\ \xi_{n+j}\notin B;\ j=1,2,\ldots,k-(1+n)]$

inversamente puede verse que

$$\bigcup_{n=0}^{k-1}[\tau=n]\cap[\xi_k\in B;\xi_{n+j}\notin B;\ j=1,2,\ldots,k-(1+n)]\subset\bigcup_{n=0}^{k-1}[\tau^1=k]\cap[\tau=n]$$

$$\therefore\ [\tau^1=k]=\bigcup_{n=0}^{k-1}[\tau=n]\cap[\xi_k\in B;\xi_{n+j}\notin B;\ j=1,2,\ldots,k-(1+n)]$$

Pero

$$[\tau=n]\in\mathcal{F}_n\subset\mathcal{F}_k \quad n=0,1,2,\ldots,(k-1)$$

además $[\xi_k\in B]\in\mathcal{F}_k$ y $[\xi_{n+j}\notin B;\ j=1,2,\ldots,k-(1+n)]\in\mathcal{F}_k$

$\therefore \quad [\xi_k\in B]\cap[\xi_{n+j}\notin B;\ j=1,2,\ldots,k-(1+n)]\in\mathcal{F}_k$

$\therefore \quad [\tau^1=k]\in\mathcal{F}_k$

3.2.1. DEFINICION:

Sea $\{X_n\}_{n=1}$ una sucesión de v.a. definida en $(\Omega,\mathcal{F},P)$ y adaptada a una filtración $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $\mathcal{F}$. Sean $a,b\in\mathbb{R}$ con $a<b$ entonces para cada $\omega\in\Omega$ definimos

$$\tau_0(\omega)=\inf\{n: X_n(\omega)<a\}$$

$$\tau_1(\omega)=\inf\{n: n>\tau_0(\omega);\ X_n(\omega)>b\}$$

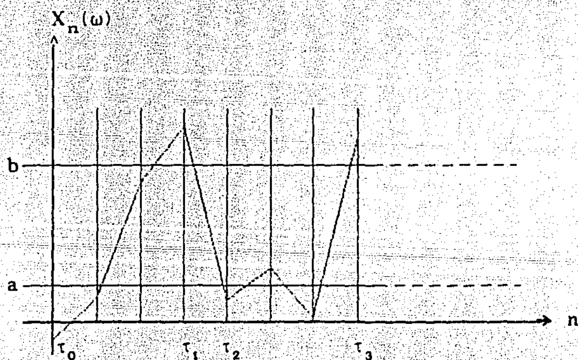
$$\vdots$$

$$\tau_{2k}(\omega)=\inf\{n: n>\tau_{2k-1}(\omega);\ X_n(\omega)<a\}$$

$$\tau_{2k+1}(\omega)=\inf\{n: n>\tau_{2k}(\omega);\ X_n(\omega)>b\}$$

$$\vdots$$

tomando la convención de que si alguno de los conjuntos a la derecha de las igualdades es vacío entonces el correspondiente $\tau_s(\omega)=+\infty$ por el lema 3.2. τ_{2k} y τ_{2k+1} son t.d.p. además $\tau_0<\tau_1<\ldots$ c.d. y $\tau_s\geq S$ c.d.



τ_{2k-1} es el tiempo del k-ésimo cruce hacia arriba de $[a,b]$ por la sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.2.2. DEFINICION: Sea $(X_n, \mathcal{F})_{n=1}^{\infty}$ una sobremartingala y $a,b \in \mathbb{R}$ $(a<b)$, para cada $\omega \in \Omega$ tomamos:

$$U_n(\omega) = \begin{cases} \operatorname{Max}\{k: \tau_{2k-1}(\omega) \leq n\} & \text{si } \tau_1(\omega) \leq n \\ 0 & \text{si } \tau_1(\omega) > n \end{cases}$$

Con τ_{2k-1} como en 3.2.1

$U_n(\omega)$ es el número de cruces hacia arriba de $[a,b]$ por $X_1, X_2, \ldots, X_n$

Además:

(i) $U_n(\omega) \leq \left[\frac{n}{2}\right]$ en donde $[x]$ es el mayor entero $\leq x$

(ii) $U_n(\omega) = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} k \cdot 1_{[\tau_{2k-1} \leq n;\, \tau_{2k+1} > n]}(\omega)$

DEMOSTRACION

(i) Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\omega \in \Omega$, el número de cruces hacia arriba de $[a,b]$ para cuaquier trayectoria de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ debe ser menor o igual al número de cruces en el caso en que $\tau_0=1$, $\tau_1=2$, $\tau_2=3, \ldots, \tau_{2k-2}=2k-1$, $\tau_{2k-1}=2k, \ldots$ es decir $X_1(\omega)<a$, $X_2(\omega)>b$, $X_3<a, \ldots$ y en este caso particular hay tantos cruces hacia arriba de $[a,b]$ como números pares hay en $(0,n]$ entonces:

(a) Si n es par hay $\frac{n}{2}$ saltos hacia arriba en éste caso particular

$\therefore$ el número de cruces hacia arriba en cualquier otro caso es $\leq \frac{n}{2} = \left[\frac{n}{2}\right]$

(b) si n es impar hay $\frac{n-1}{2}$ cruces hacia arriba en éste caso particular

$\therefore$ el número de cruces hacia arriba en cualquier otro caso es $\leq \frac{n-1}{2} = \left[\frac{n}{2}\right]$

(ii) Si $\omega\in[\tau_{2k_0-1}\leq n;\tau_{2k_0+1}>n]$ $\Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} k\cdot 1_{[\tau_{2k-1}\leq n;\tau_{2k+1}>n]}(\omega)=K_0\cdot 1_{[\tau_{2k_0-1}\leq n;\tau_{2k_0+1}>n]}(\omega)$$

$$=K_0=\mathrm{Max}\{k:\tau_{2k-1}\leq n\}=\bigcup_n(\omega)$$

y como $\forall_k$ $1\leq k\leq\left[\frac{n}{2}\right]$ se tiene que

$[\tau_{2k-1}\leq n;\tau_{2k+1}>n]\in\mathcal{F}_n$

$\Rightarrow \bigcup_n(\omega)$ es una combinación lineal de funciones indicadoras de conjuntos en $\mathcal{F}_n$ $\therefore$ $\bigcup_n(\omega)$ es una función $\mathcal{F}_n$-medible ($\mathcal{F}_n$-simple, no negativa y acotada) $\forall_n$

$$\therefore \bigcup_n\in L^1(\Omega,\mathcal{F}_n,P)\subset L^1(\Omega,\mathcal{F},P)\ \forall_n$$

por último notamos que $\{\bigcup_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una suc. de v.a. adaptada a $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ y t.q.

$$0\leq\bigcup_n\leq\bigcup_{n+1}\ P\text{ c.d}$$

3.2.3. DEFINICION:

Con las notaciones de 3.2.2 sea

$$\bigcup_a^b(\omega)=\begin{cases}\mathrm{Sup}\{k:\tau_{2k-1}(\omega)<\infty\} & \text{si } \tau_1(\omega)<+\infty\\ 0 & \text{si } \tau_1(\omega)=\infty\end{cases}$$

entonces U_a^b es una v.a. (Por ser limite creciente de v.a., $\lim_{n\to\infty} U_n = U_a^b$ con U_n $\mathcal{F}$-simple) que representa el número de cruces hacia arriba de [a,b] por la sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$

3.3. TEOREMA (Doob "Cruces hacia Arriba").

Sea $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{m}$ una sobremartingala entonces $\forall a,b, \in \mathbb{R}$ $a<b$

$$E\left[U_a^b\right] \leq \frac{E[(X_m-a)^-]}{(b-a)}$$

DEMOSTRACION:

En este caso $U_a^b = U_m$ ya q ue la sucesión de las X_i es finita. Tomando $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{2k}, \tau_{2k+1}, \ldots,$ como en 3.2.1 para la submartingala $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{m}$ entonces τ_i puede tomar el valor $+\infty$ ó los valores $\{1,2,\ldots,m\}$.

Para tener tiempos de paro acotados definimos

$\tilde{\tau}_j = \tau_j \wedge m$ (o sea truncar en m si $\tau_j(\omega) = +\infty$)

Sean $\Delta_k = \left(X_{\tilde{\tau}_{2k+1}} - X_{\tilde{\tau}_{2k}}\right)$ $k=0,1,\ldots,m$ y $\omega \in \Omega$

Consideramos 3 casos*:

(1) $U_a^b(\omega) > k$ entonces

$U_a^b(\omega) \geq k+1 \Rightarrow U_a^b(\omega) - 1 \geq k$ y $k+1 \in \{j : \tau_{2j-1}(\omega) < \infty\}$

(Por definición de U_a^b)

por tanto $\tau_{2(k+1)-1}=\tau_{2k+1}<\infty \Rightarrow \tau_{2k+1}\leqslant m$

$(\tau_{2k}<\tau_{2k+1}\leqslant m)$

$\therefore\ \tilde{\tau}_{2k+1}=\tau_{2k+1}$ y $\tilde{\tau}_{2k}=\tau_{2k}$

$\therefore\ \triangle_k(\omega)\geqslant(b-a)$ (Por definición de τ_{2k} y τ_{2k+1})

(2) $\bigcup_a^b(\omega)=k \Rightarrow k+1\notin\{j:\tau_{2j-1}<\infty\}$

$\Rightarrow \tau_{2k+1}=\infty \Rightarrow \tilde{\tau}_{2k+1}=m$

como $k\in\{j:\tau_{2j-1}(\omega)<\infty\} \Rightarrow \tau_{2k-1}\leqslant m$ entonces hay dos casos

(a) Si $\tau_{2k-1}=m \Rightarrow \tau_{2k}>\tau_{2k-1}=m \Rightarrow \tilde{\tau}_{2k}=m$

$\therefore\ \triangle_k=0$

(b) Si $\tau_{2k}<m \Rightarrow$

(b.1) Si $\tau_{2k}\geqslant m$ se concluye igual que en (a)

(b.2) Si $\tau_{2k}<m \Rightarrow \tilde{\tau}_{2k}=\tau_{2k}$

$\Rightarrow X_{\tilde{\tau}_{2k}}(\omega)=X_{\tau_{2k}}<a$

$\Rightarrow -X_{\tilde{\tau}_{2k}}(\omega)>-a$

$\Rightarrow \triangle_k=X_{\tilde{\tau}_{2k+1}}-X_{\tilde{\tau}_{2k}}=Xm-X_{\tau_{2k}}>Xm-a\geqslant-(Xm-a)^-$

(3) $\bigcup_a^b(\omega)<k \Rightarrow k\notin\{j:\tau_{2j-1}(\omega)<\infty\}$

$\Rightarrow \tau_{2k-1}=+\infty \Rightarrow \tau_{2k}=+\infty$ y $\tau_{2k+1}=+\infty \Rightarrow \triangle_k = Xm - Xm = 0$

(*) k es un indice para $\triangle_k$, que corre desde 0 hasta m entonces lo que se está haciendo es ver que sucede con $\triangle_k$ para k antes de $\bigcup_a^b$, k igual a $\bigcup_a^b$ y k después de $\bigcup_a^b$ (para cada $\omega\in\Omega$).

Así: Para cada $\omega\in\Omega$

$$\sum_{k=0}^{m} \triangle_k = \sum_{k\leq \bigcup_a^b-1} \triangle_k + \triangle_{\bigcup_a^b} + \sum_{k>\bigcup_a^b} \triangle_k \geq \sum_{k\leq \bigcup_a^b-1} (b-a) - (Xm-a)^-$$

$= (b-a)\bigcup_a^b - (Xm-a)^-$ (El tercer sumando antes de la desigualdad vale cero).

$$\therefore \sum_{k=0}^{m} \triangle_k \geq (b-a)\bigcup_a^b - (Xm-a)^- \quad \text{c.d.}$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{m} \left[EX_{\tilde{\tau}_{2k+1}} - EX_{\tilde{\tau}_{2k}} \right] \geq (b-a)E\left[\bigcup_a^b\right] - E\left[(Xm-a)^-\right]$$

Pero

$$E\left[X_{\tilde{\tau}_{2k+1}} - X_{\tilde{\tau}_{2k}}\right] = E\left[E\left[X_{\tilde{\tau}_{2k+1}} - X_{\tilde{\tau}_{2k}} / \mathcal{F}_{\tilde{\tau}_{2k}}\right]\right] \leq 0$$

ya que $E\left[X_{\tilde{\tau}_{2k+1}} - X_{\tilde{\tau}_{2k}} / \mathcal{F}_{\tilde{\tau}_{2k}}\right] \leq 0$ c.d. debido a 3.1

$$\therefore 0 \geq (b-a)E\left[\bigcup_a^b\right] + E\left[-(Xm-a)^-\right]$$

$$\therefore E\left[\bigcup_a^b\right] \leq \frac{E\left[(Xm-a)^-\right]}{b-a}$$

la anterior desigualdad lleva al siguiente y muy importante resultado.

3.4. TEOREMA (Convergencia c.d. Doob)

Sea $(X_n,\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ una supermatingala t.q.

$$\sup_n E\left[X_n^-\right]<\infty$$

entonces la sucesión $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ converge c.s. a una v.a. $X\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$.

DEMOSTRACION.

Sean $a,b\in\mathbb{R}$ $a<b$, $\omega\in\Omega$, $\bigcup_m(\omega)$ y $\bigcup_a^b(\omega)$ como en 3.2.2. y 3.2.3. se tiene entonces que:

(I) $\lim\limits_{m\longrightarrow\infty} \bigcup_m(\omega)=\bigcup_a^b(\omega)$ y $0\leq\bigcup_m(\omega)\leq\bigcup_{m+1}(\omega)$ $\forall m$

(II) por 3.3.

$$E[\bigcup_m]\leq\frac{1}{b-a}E[(Xm-a)^-]\leq\frac{1}{b-a}E[|Xm|+|a|]$$

(usando también $(Xm-a)^-\leq|Xm-a|\leq|Xm|+|a|$).

Ahora como $\frac{1}{b-a}\{E|Xm|+|a|\}\leq\frac{1}{b-a}\left\{\sup_n(E|X_n|)+|a|\right\}$

se tiene $E[\bigcup_m]\leq\frac{1}{b-a}\left\{\sup_n E|X_n|+|a|\right\}$

pero por 2.2.6.2 $\sup_n E|X_n|<\infty$

$\therefore$ $E[\bigcup_m]<\infty$ $\forall m$

entonces usando el teorema de convergencia monótona, (I) y (II)

$$E[U_a^b] = \lim_{m\longrightarrow\infty} E[U_m] \leq \frac{\sup_n E|X_n|+|a|}{b-a} < \infty$$

$\therefore \quad \forall a,b\in\mathbb{R} \quad a<b \quad U_a^b<\infty \quad$ c.d.

$\Rightarrow \quad \forall a,b\in Q \quad a<b \quad U_a^b<\infty \quad$ c.d.

$\Rightarrow \quad \forall a,b\in Q \quad a<b \quad P\{[\omega: U_a^b(\omega)<\infty]\}=1$

$\Rightarrow \quad 1=P\{[\omega: U_a^b(\omega)<\infty]\} \leq P\left\{\bigcup_{(a,b)\in A}[\omega: U_a^b(\omega)<\infty]\right\} \leq 1$

$(A=\{(a,b)\in Q_x Q / a<b\})$

$\therefore \quad \bigcup_{(a,b)\in A}[\omega: U_a^b(\omega)<\infty]$ tiene probabilidad 1

entonces para $(a,b)\in A$ sea

$$D_{(a,b)}=\{\omega: \lim_n \inf X_n(\omega)<a<b<\lim_n \sup X_n(\omega)\}$$

y

$$D=\bigcup_{(a,b)\in A} D_{(a,b)}$$

entonces D es el conjunto de divergencia de $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ y nuestro objetivo es probar que $P(D)=0$.

Como en la definición de D la unión corre sobre un cojunto numerable podemos probar $P(D_{(a,b)})=0$ para cada $(a,b)\in A$.

Observamos que si $\omega \in D_{(a,b)}$ para algún $(a,b) \in A$ entonces $\omega \in \{\omega : U_a^b(\omega) = +\infty\}$

(i.e. $D_{(a,b)} \subset [U_a^b = +\infty] \quad \forall (a,b) \in A$)

$\Rightarrow P(D_{(a,b)}) = 0 \qquad \forall (a,b) \in A$

$\therefore \; P(D) = 0$

$\therefore \; \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge c.s. a una v.a. X

(Se puede ver que X es igual c.s. a una v.a. $\mathcal{F}_\infty = \sigma\{\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n\}$-medible y si $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ es completo entonces X es $\mathcal{F}_\infty$-medible, ver apéndice I.2.1). por último:

$$E|X| = E|\lim_n X| = E[\lim |X_n|] \leq \lim_n \inf E|X_n| \leq \sup_n E|X_n| < \infty$$

usando el lema de Fatou.

$\therefore \; X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Introducimos ahora el concepto de Integrabilidad Uniforme que juega un papel importante en la teoría de martingalas.

3.5. DEFINICION:

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Sea $\mathcal{H} = \{X_t : t \in T\}$ una familia de v.a. definidas en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (T conjunto numerable ó finito de indices). t.q. $\mathcal{H} \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Decimos que $\mathcal{H}$ es UNIFORMEMENTE INTEGRABLE (c.r.a P) si

$$\sup_{t\in T}\int_{[|X_t|\geq M]}|X_t|dP \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } M\longrightarrow\infty$$

(esta condición es equivalente a pedir que

$$\int_{[|X_t|\geq M]}|X_t|dP \xrightarrow[M\to\infty]{} 0 \quad \text{Uniformemente en } t)$$

en adelante usaremos u.i. para denotar uniformente integrable.

3.5.1. OBSERVACIONES:

(i) En la definición de integrabilidad uniforme se puede dejar de suponer $\mathcal{H}\subset L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ ya que si por hipótesis

$$\sup_{t\in T}\int_{[|X_t|\geq M]}|X_t|dP \xrightarrow[M\to\infty]{} 0$$

entonces dada $\varepsilon>0$ $\exists$ M_ε t.q.

$$\int_{[|X_t|\geq M_\varepsilon]}|X_t|dP \leq \sup_{t\in T}\int_{[|X_t|\geq M_\varepsilon]}|X_t|dP<\varepsilon \quad \forall t\in T$$

i.e. $\forall\, t\in T$

$$\int_\Omega |X_t|dP = \int_{[|X_t|\geq M_\varepsilon]}|X_t|dP + \int_{[|X_t|<M_\varepsilon]}|X_t|dP < \varepsilon + M_\varepsilon P[|X_t|<M_\varepsilon]$$

i.e. $\mathcal{H}\subset L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$

(ii) Si existe $Y\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ t.q. $|X_t|\leq Y\,\forall t\in T$ c.d. entonces $\mathcal{H}=\{X_t:t\in T\}$ es uniformemente integrable (U.I.)

DEMOSTRACION:

Como $[|X_t|\geq M]\subset[Y\geq M]\quad\forall t\in T$

$$\int_{[|X_t|\geq M]}|X_t|dP\leq\int_{[|X_t|\geq M]}Y\,dP\leq\int_{[Y\geq M]}Y\,dP\qquad\forall t\in T$$

y como $Y\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ $\displaystyle\int_{[Y\geq M]}Y\,dP\xrightarrow[M\to\infty]{}0$

(iii) Si T es finito y $\mathcal{H}=[X_t:t\in T]\subset L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ entonces $\mathcal{H}$ es U.I.

DEMOSTRACION:

Sea $T=\{i_1,i_2,\ldots,i_n\}$

entonces como $X_t\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)\,\forall t\Rightarrow|X_t|\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)\,\forall t\Rightarrow Y=\sum_{t\in T}|X_t|\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ y $|X_t|\leq Y$ c.d., por (ii) $\mathcal{H}$ es U.I.

3.5.2. TEOREMA.

Sea $\mathcal{H}=\{X_t:t\in T\}\subset L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ entonces $\mathcal{H}$ es U.I si y sólo si

(1) $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta_\varepsilon>0$ tal que si $A\in\mathcal{F}$ y $P(A)<\delta_\varepsilon\Rightarrow\displaystyle\sup_{t\in T}\int_A|X_t|dP<\varepsilon$

y

(2) $\displaystyle\sup_{t\in T}\int_\Omega|X_t|dP<\infty$

DEMOSTRACION:

($\Rightarrow$

Sea $A\in\mathcal{F}$

$$\int_A |X_t|dP = \int_{A\cap[|X_t|\geq M]} |X_t|dP + \int_{A\cap[|X_t|<M]} |X_t|dP < M\,P(A) + \int_{[|X_t|\geq M]} |X_t|dP \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (I)$$

por hipótesis dado $\varepsilon>0$ $\exists\, M_o>0$ tal que $\forall\, M\geq M_o$

$$\sup_{t\in T} \int_{[|X_t|\geq M]} |X_t|dP \leq \varepsilon/_2 \,,$$

Para M_o fija sea $A\in\mathcal{F}$ t.q. $P(A)<\frac{\varepsilon}{2M_o} = \delta_\varepsilon$ . . . . (II)

entonces

$$\sup_{t\in T} \int_A |X_t|dP \leq \sup_{t\in T} \int_{[|X_t|\geq M_o]} |X_t|dP + M_o P(A) < \varepsilon$$

(usando (I) y (II)) ,

además

$$\int_\Omega |X_t|dP \leq \int_{[|X_t|\geq M_o]} |X_t|dP + \int_{[|X_t|<M_o]} |X_t|dP \leq \varepsilon/_2 + M_o \quad \forall\, t\in T$$

($\Leftarrow$

Sea $\varepsilon>0$ t.q. si $A\in\mathcal{F}$ con $P(A)<\delta_\varepsilon$

entonces $\sup\limits_{t\in T}\int_A |X_t|dP<\varepsilon$ (uso (1))

$$P[|X_t|\geq M]=\int_{[|X_t|\geq M]} dP \leq \frac{1}{M}\int_{[|X_t|\geq M]} |X_t|dP \leq \frac{k}{M} \quad \text{(uso (2))}$$

entonces para $\delta_\varepsilon>0$ $\exists M_0$ t.q. si $M\geq M_0$

$$P[|X_t|\geq M]<\delta_\varepsilon$$

$$\Rightarrow \sup_{t\in T}\int_{[|X_t|\geq M]} |X_t|dP \;<\varepsilon \qquad \forall M\geq M_0$$

$\therefore$ $\mathcal{H}$ es U.I.

3.5.3. TEOREMA.

Sea $\mathcal{H}_1=\{X_\alpha:\alpha\in I\}$ y $\mathcal{H}_2=\{Y_\beta:\beta\in J\}$ dos familias u.i. y sea $\mathcal{H}=\{X_\alpha\pm Y_\beta\}_{(\alpha,\beta)\in I\times J}$ entonces $\mathcal{H}$ es

U.I.

DEMOSTRACION

(i) Se sabe que $\exists$ $\delta_X=\delta(\mathcal{H}_1,\varepsilon)>0$ t.q. si $P(A)<\delta_X \Rightarrow \sup\limits_{\alpha\in I}\int_A |X_\alpha|dP<\varepsilon/4$

análogamente para $\mathcal{H}_2$ $\exists$ $\delta_Y>0$ t.q. $\sup\limits_{\beta\in J}\int_A |Y_\beta|dP<\varepsilon/4$

siempre que $P(A)<\delta_Y$

Sea $\delta_0 = MIN\{\delta_X, \delta_Y\}$

(ii) Como $\mathcal{H}$ es U.I.

$$\sup_{\alpha\in I} \{P[|X_\alpha| \geq M]\} = \sup_{\alpha\in I} \left\{ \int_{|X_\alpha| \geq M} 1 \; dP \right\} \leq \sup_{\alpha\in I} \left\{ \int_{[|X_\alpha| \geq M]} |X_\alpha| \; dP \right\} \xrightarrow[M\to\infty]{} 0$$

(la última desigualdad si $M \geq 1$)

Análogamente para $\mathcal{H}_2$

Se tiene entonces que: Para δ_0 en (i)

$$\exists\, M_1 > 0 \text{ t.q. } \sup_{\alpha\in I} \{P[|X_\alpha| \geq M]\} < \delta_0 \quad M \geq M_1$$

$$\exists\, M_2 > 0 \text{ t.q. } \sup_{\beta\in J} \{P[|Y_\beta| \geq M]\} < \delta_0 \quad M \geq M_2$$

Sea $\quad M_0 = 2\, Max\{M_1, M_2\}$

(iii) Por último como $\{|X_\alpha - Y_\beta| \geq M\} \subset \{|X_\alpha| + |Y_\beta| > M\}$

$\subset \{|X_\alpha| \geq M/2\} \cup \{|Y_\beta| \geq M/2\}$

Sean $A_{(\alpha,\beta)} = \{|X_\alpha - Y_\beta| \geq M\}$

$B_{(\alpha,\beta)} = \{|X_\alpha| + |Y_\beta| \geq M\}$

$C_\alpha = \{|X_\alpha| \geq M/2\}$

$D_\beta = \{|Y_\beta| \geq M/2\}$

entonces para $X_\alpha \in \mathcal{H}_1$ $Y_\beta \in \mathcal{H}_2$ y $M \geq M_0$

$$\int_{A(\alpha,\beta)} |X_\alpha - Y_\beta| dP \leq \int_{B(\alpha,\beta)} |X_\alpha| dP + \int_{B(\alpha,\beta)} |Y_\beta| dP \leq \int_{C_\alpha \cup D_\beta} |X_\alpha| dP + \int_{C_\alpha \cup D_\beta} |Y_\beta| dP$$

$$\leq \int_{C_\alpha} |X_\alpha| dP + \int_{D_\beta} |X_\alpha| dP + \int_{C_\alpha} |Y_\beta| dP + \int_{D_\beta} |Y_\beta| dP < 4\,\varepsilon/_4 = \varepsilon$$

$\therefore \{X_\alpha - Y_\beta\}_{(\alpha,\beta)\in I\times J}$ es U.I.

Análogamente para $\{X_\alpha + Y_\beta\}_{(\alpha,\beta)\in I\times J}$

3.6. TEOREMA.

Sean $p \geq 1$ y $X_n \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $n=1,2,\ldots$ $X_n \xrightarrow{P} X$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $\{|X_n|^p\}_{n\in\mathbb{N}}$ es U.I

(2) $X_n \xrightarrow{L^p} X$

(3) $\int_\Omega |X_n|^p \, dP \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_\Omega |X|^p \, dP$

DEMOSTRACION:

Caso 1 (P=1)

(1) $\Rightarrow$ (2)

Como $X_n \xrightarrow{P} X$ del teorema 1.3.1 $\exists \{X_{nk}\}_{k\geq 1}$ t.q. $X_{nk} \xrightarrow[c.u.]{} X$

Pero $X_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{c.u.} X \Rightarrow X_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{c.d.} X$

(Convergencia casi uniforme implica convergencia casi dondequiera)

$\therefore \quad \exists \{X_{n_k}\}_{k\geq 1}$ t.q. $X_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{c.d.} X$

Por el lema de Fatou $\int_\Omega |X|\,dP \leq \underline{lim} \int_\Omega |X_{n_k}|\,dP$

pero $\underline{lim} \int_\Omega |X_{n_k}|\,dP < \infty$ ya que por hipótesis $\{|X_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ es U.I. y de 3.5.2

$$\operatorname{Sup}_n \int_\Omega |X_n|\,dP < \infty$$

$$\therefore \quad \operatorname{Sup}_{k\in\mathbb{N}} \int_\Omega |X_{n_k}|\,dP < \infty \quad \therefore \quad \underline{lim} \int_\Omega |X_{n_k}|\,dP < \infty$$

$(\underline{lim}\ a_n \leq \operatorname{Sup}_{k\in\mathbb{N}} a_k \quad \forall \ \{a_k\}_{k\geq 1}$ sucesión en $\overline{\mathbb{R}})$

$\therefore \quad X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Usando de nuevo que $\{|X_n|\}_{n\geq 1}$ es U.I. se tiene que por 3.5.3 $\{|X_n - X|\}_{n\in\mathbb{N}}$ es U.I.

$$\Rightarrow \int_\Omega |X_n - X|\,dP = \int_{|X_n-X|\leq \varepsilon/2} |X_n - X|\,dP + \int_{|X_n-X|>\varepsilon/2} |X_n - X|\,dP \leq \varepsilon/2 + \int_{|X_n-X|>\varepsilon/2} |X_n - X|\,dP \quad . \ . \ . \ . \ . \ (I)$$

pero como $X_n \xrightarrow{P} X$, se tiene que dada $\varepsilon>0$ $\exists\, N_0 \in \mathbb{N}$ t.q. si $n \geq N_0$ $P[|X_n - X| > \varepsilon/2] < \varepsilon/2$ y como $\{|X_n - X|\}_{n\in\mathbb{N}}$ es U.I. $\Rightarrow$ $\{|X_n - X|\}_{n \geq N_0}$ es U.I., usando 3.5.2 se concluye que: $\int_{|X_n - X| \geq \varepsilon/2} |X_n - X|\, dP < \varepsilon/2$ si $n \geq N_0$ con esto y la relación I concluimos que

$$\int_\Omega |X_n - X|\, dP \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ i.e. } X_n \xrightarrow{L^1} X$$

(2) $\Rightarrow$ (3) (VALE INCLUSIVE PARA $p>1$)

De la desigualdad de Minkowski

$$\|X_n\|_p = \|X_n - X + X\|_p \leq \|X_n - X\|_p + \|X\|_p$$

$$\therefore\ \big|\|X_n\|_p - \|X\|_p\big| \leq \|X_n - X\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} \|X_n\|_p = \|X\|_p \qquad \forall\ p \geq 1$$

(3) $\Rightarrow$ (1)

Sean $X_n^M = (X_n \vee (-M)) \wedge M$ y $X^M = (X \vee (-M)) \wedge M$, como las funciones $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas como $f_1(x) = (x \vee (-M)) \wedge M$ y $f_2(x) = |x|$ son continuas, entonces usando el teorema 1.3.8 concluimos que si

$$X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n^M \xrightarrow{P} X^M \Rightarrow |X_n^M| \xrightarrow{P} |X^M|$$

Pero la convergencia en probabilidad y el hecho de que $|X_n^M| \leq M$ c.d. $\forall n$ $(M \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P))$ implican que

$$|X_n^M| \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} |X^M| \; . \; . \; . \; . \; (II)$$

y

$$|X^M| \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

Necesitamos ahora hacer uso de dos resultados cuya prueba se puede ver en el Apéndice III

(i) Si $Y \geq 0$ $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ entonces

$$\int_{[Y\geq M]} Y\, dP = \int_\Omega Y\, dP + M \cdot P[Y \geq M] - \int_\Omega [Y \wedge M] dP$$

(ii) $P[|X_n| \geq M] \xrightarrow[n\to\infty]{} P[|X| \geq M]$

$\forall M \in \mathbb{R}^+ \setminus S$ con $S \subset \mathbb{R}^+$ numerable

Se tiene entonces:

(a) $\int_\Omega |X_n| dP \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_\Omega |X| dP$ hipótesis (3)

(b) $\int_\Omega |X_n^M| dP \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_\Omega |X^M| dP$ de (II)

(c) $P[|X_n| \geq M] \xrightarrow[n\to\infty]{} P[|X| \geq M]$ $\forall M \in \mathbb{R}^+ \setminus S$ con S a lo más numerable (ii)

Aplicando (i) para $Y = |X_n|$

$$\int_{[|X_n|\geq M]} |X_n|\,dP = \int_\Omega |X_n|\,dP + M\cdot P[|X_n|\geq M] - \int_\Omega |X_n|\wedge M\,dP \quad . \; . \; . \; III$$

usando (a), (b), (c) y el hecho de que $|X_n|\wedge M = |X_n^M|$ se concluye que el lado derecho de III converge (cuado $n\to\infty$) a:

$$\int_\Omega |X|\,dP + M\cdot P[|X|\geq M] - \int_\Omega |X|\wedge M\,dP$$

$$\therefore \int_{[|X_n|\geq M]} |X_n|\,dP \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{[|X|\geq M]} |X|\,dP \qquad \forall M\in\mathbb{R}^+\setminus S \quad \text{S a lo más numerable}$$

i.e. $\forall \varepsilon>0 \;\; \exists N_0$ t.q. $\forall n\geq N_0$

$$\left| \int_{|X_n|\geq M} |X_n|\,dP - \int_{|X|\geq M} |X|\,dP \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall M\in\mathbb{R}^+\setminus S$$

Dada $\varepsilon>0 \; \exists N_0$ t.q. $\forall n\geq N_0$

$$\int_{|X_n|\geq M} |X_n|\,dP < \varepsilon/2 + \int_{|X|\geq M} |X|\,dP \qquad \forall M\in\mathbb{R}^+\setminus S$$

además para la misma $\varepsilon>0 \; \exists M_0$ tal que $\forall M\geq M_0$

$$\int_{[|X|\geq M]} |X|\,dP < \varepsilon/2$$

y como cuaquier conjunto finito de v.a. integrables (3.5.1.iii) es U.I.

$\exists M_1$ t.q. $\forall M \geq M_1$ $\displaystyle\sup_{k\in J}\int_{|X_k|\geq M}|X_k|\,dP < \varepsilon$ $\quad J=\{1,2,\ldots,N_0-1\}$

si tomo $M^*\in\mathbb{R}^+\setminus S$ t.q. $M^*\geq \mathrm{Max}\{M_0,M_1\}$ se tiene

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\int_{|X_n|\geq M}|X_n|\,dP\right\} < \varepsilon \qquad \forall M\geq M^* \quad M\in\mathbb{R}^+\setminus S$$

pero como para $M_1\leq M_2 \Rightarrow \displaystyle\int_{|X_n|\geq M_1}|X_n|\,dP \geq \int_{|X_n|\geq M_2}|X_n|\,dP \qquad \forall n\in\mathbb{N}$

$$\Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{|X_n|\geq M}|X_n|\,dP < \varepsilon \qquad \forall M\geq M^*$$

$\therefore$ $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es U.I

Caso 2 $(p>1)$

(1) $\Rightarrow$ (2) La demostración es igual a la del caso 1 ahora con $|X_n-X|^p$ en lugar de $|X_n-X|$ a partir de (1).

Se tiene que $\{|X_n-X|^p\}_{n=1}^{\infty}$ es U.I ya que:

(a) Debido a la hipótesis (1) $\{|X_n|^p\}_{n=1}^{\infty}$ es U.I

(b) Como $X_n \xrightarrow{P} X$ del teorema 1.3.8

$|X_n|^p \xrightarrow{P} |X|^p$ y de 1.3.1

$\exists \{|X_{n_k}|^p\}_{k=1}^{\infty}$ subsucesión de $\{|X_n|^p\}_{n=1}^{\infty}$ t.q.

$|X_{n_k}|^p \xrightarrow{c.d} |X|^p$

Por el lema de Fatou $\int_{\Omega} |X|^p dP \leq \underline{lim} \int_{\Omega} |X_{n_k}|^p dP$

usando (a) y $\underline{3.5.2}$ $\operatorname{Sup}_n \int_{\Omega} |X_n|^p dP < \infty$

$\Rightarrow \underline{lim}_k \int_{\Omega} |X_{n_k}|^p dP < \infty \quad \therefore \quad |X|^p \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$\therefore \quad \mathcal{H} = \{|X|^p\}$ es U.I.

Por 3.5.3 $\{|X_n|^p + |X|^p\}_{n \in \mathbb{N}}$ es U.I.

(c) Como $|X+Y|^p \leq \{|X|+|Y|\}^p \leq \{2 \operatorname{Max}\{|X|,|Y|\}\}^p$

$\leq 2^p \operatorname{Max}\{|X|^p, |Y|^p\} \leq 2^p\{|X|^p + |Y|^p\}$

$\therefore \quad |X_n - X|^p \leq 2^p\{|X_n|^p + |X|^p\} \quad \forall n$ c.d.

$\therefore \quad \{|X_n - X|^p\}_n$ es U.I

(2) $\Rightarrow$ (3) ya se probó $\forall$ $p \geq 1$

(3) $\Rightarrow$ (1)

Se sigue del caso 1 ya que $X \in L^p \Leftrightarrow |X|^p \in L^1$ y tomando $Y_n = |X_n|^p$ $Y = |X|^p$ de 1.3.8 $Y_n \xrightarrow{P} Y$ y por hipótesis $\|Y_n\|_1 \xrightarrow[n \to \infty]{} \|Y_n\|_1$ entonces del caso 1 $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es U.I.

$\therefore \quad \{|X_n|^p\}_n$ es U.I.

a continuación daremos un ejemplo que trae consigo una pregunta interesante

3.7. Sean $Z_1, Z_2, \ldots$ v.a. independientes e i.distribuidas con

$P[Z_n=0]=P[Z_n=2]=\frac{1}{2}$

Sean $X_n=\prod_{i=1}^{n} Z_i$; $\mathcal{F}_n=\sigma\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}$ $n=1,2,\ldots$ entonces $(X_n,\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ es martingala

(i) $EZ_n=1 \quad \forall_n$

$\therefore EX_n=E|X_n|=E\left|\prod_{i=1}^{n} Z_i\right|=\prod_{i=1}^{n} E|Z_i|=1 \qquad \forall_n \ldots (1)$

(ii) $E[X_{n+1}/\mathcal{F}_n]=E[Z_{n+1}X_n/\mathcal{F}_n]=X_n E[Z_{n+1}/\mathcal{F}_n]=X_n\cdot E[Z_{n+1}]=X_n$ por la independencia de las Zi y usando 1.4.1. k.

De (1) $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ es una martingala L^1-acotada y por 3.4 $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.d.} X$ con $X\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ (De hecho $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.d.} 0$ i.e. $X=0$ c.d.) entonces:

(a) como $P[X_n=2^n]=1/2^n$ y $P[X_n=0]=1-1/2^n$

$$\int_{[|X_n|\geq a]} |X_n|\,dP=\begin{cases}0 & a>2^n\\ 1 & a<2^n\end{cases}$$

$$\therefore \int_{[|X_n|\geq a]} |X_n|\,dP \;\xrightarrow[a\to\infty]{\;\not\;}\; 0 \text{ uniformemente en } n$$

$\therefore \{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es U.I.

(b) $E|X_n - X| = EX_n = 1 \quad \therefore \quad E|X_n - X| \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$

i.e. X_n no converge en L^1 a X.

(c) $(X_1, X_2, \ldots, X)$ no forman una martingala ya que $E[X/\mathcal{F}_n] = E[0/\mathcal{F}_n] = 0$ c.d. $\forall n$ ¿Cómo se relacionan a, b y c?, veremos más adelante un resultado que relaciona (a),(b) y (c).

3.7.1. DEFINICIONES:

(i) Si $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}}$ es una (sub ó super) martingala, en donde $\mathcal{F}_\infty$ es una σ-álgebra que contenga a todos los $\mathcal{F}_n$, se dice que X_∞ es el "último elemento".

(ii) Decimos que una martingala (sobremartingala) $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in T}$ es cerrada por la derecha si $\exists$ una σ-álgebra $\mathcal{F}_\infty$ tal que $\forall\, t\in T$ $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{F}$ y una v.a. X_∞, $\mathcal{F}_\infty$-medible tal que $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in T\cup\{+\infty\}}$ es martingala (sobremartingala).

3.8. TEOREMA:

Sea $\xi \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y $\mathbb{A} = \{\mathcal{F}_i : \mathcal{F}_i$ es sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}\}$ entonces la familia $\{X_i = E[\xi/\mathcal{F}_i] : \mathcal{F}_i \in \mathbb{A}\}$ es U.I.

DEMOSTRACION

Sea $M > 0$

$$\int_{[|X_i| \geq M]} |X_i|\, dP = \int_{[|X_i| \geq M]} |E(\xi/\mathcal{F}_i)|\, dP \leq \int_{[|X_i| \geq M]} E(|\xi|/\mathcal{F}_i)\, dP$$

usando la desigualdad de Jensen 1.4.1(g).

Pero por definición de esperanza condicional 1.4.

$$\int_{[|X_i|\geq M]} E[|\xi|/\mathcal{F}_i]\,dP = \int_{[|X_i|\geq M]} |\xi|\,dP$$

Además

$$P\{|X_i|\geq M\} \leq \frac{1}{M} E\{|X_i|\} = \frac{1}{M} E\{|E(\xi/\mathcal{F}_i)|\} \leq \frac{1}{M} E\{E(|\xi|/\mathcal{F}_i)\}$$

$= \frac{1}{M} E|\xi|$ nuevamente usando 1.4.1(g) además de 1.4.1(j)

Como $V(A)=\int_A |\xi|\,dP$ es una medida absolutamente continua c.r.a. $P \Rightarrow \forall \varepsilon>0$ $\exists \delta_\varepsilon>0$ tal que Si $A\in\mathcal{F}$ y $P(A)<\delta_\varepsilon \Rightarrow V(A)<\varepsilon$ entonces como $P[|X_i|\geq M] \leq \frac{E|\xi|}{M}$ $\exists M_o$ t.q.

$$P[|X_i|\geq M] \leq \frac{E|\xi|}{M} < \delta_\varepsilon \quad \forall_i \quad \forall\, M\geq M_o$$

$$\therefore \int_{[|X_i|\geq M]} |X_i|\,dP \leq \int_{[|X_i|\geq M]} |\xi|\,dP < \varepsilon \quad \forall_i \quad \forall\, M\geq M_o$$

i.e. dado $\varepsilon>0$ $\exists M_o$ t.q.

$$\sup_i \int_{[|X_i|\geq M]} |X_i|\,dP < \varepsilon \quad \forall\, M\geq M_o$$

3.9. TEOREMA:

Sea $(X_n,\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ una martingala entonces son equivalentes:

(a) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es U.I.

(b) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en L^1

(c) Existe $\xi \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ t.q $X_n = E[\xi/\mathcal{F}_n]$ $\forall n$

DEMOSTRACION:

(a) $\Rightarrow$ (b)

Sabemos que si $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es U.I. por 3.5.2

$$\sup_n E\{|X_n|\} < \infty$$

Por 3.4. $X_n \xrightarrow{c.s.} X_\infty$ y $X_\infty \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ pero como $P(\Omega)<\infty$ por 1.3.2. $X_n \xrightarrow{P} X_\infty$ entonces por 3.6 para p=1 y $X_n \xrightarrow{L^1} X_\infty$

(b) $\Rightarrow$ (c)

Del resultado 1.4.4

$\Phi(X) = E[X/U]$ $\quad \Phi : L^1(\Omega,\mathcal{F},P) \longrightarrow L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ (U sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$)

es un operador lineal y continuo con norma 1 entonces por (b)

$$E[X_m/\mathcal{F}_n] \xrightarrow[m\to\infty]{L^1} E[X_\infty/\mathcal{F}_n]$$

pero como $X_n = E[X_m/\mathcal{F}_n]$ $\forall m \geq n$ se obtiene $X_n = E[X_\infty/\mathcal{F}_n]$ $\forall n$ c.d.

(Del apéndice I.2.iii X_∞ es $\mathcal{F}_\infty = \sigma\{\bigcup_{\mathbb{N}} \mathcal{F}_n\}$-medible, se tiene entonces una martingala cerrada).

(c) $\Rightarrow$ (a) consecuencia de 3.8.

4

TRANSFORMACIONES DE MARTINGALAS

§4. TRANSFORMACIONES DE MARTINGALAS

En ése capítulo se define la transformación de una martingala y se estudia bajo que condiciones ésta vuelve a ser una martingala, así como las condiciones bajo las cuales la transformación converge casi dondequiera.

En particular veremos tres resultados referentes a lo anterior.

Pueden tenerse dos casos de transformación:

(i) La transformación es de nueva cuenta una martingala.

(ii) No sucede como en (i).

Para estudiar el primer caso se puede emplear la herramienta conocida para martingalas con tiempo discreto (cuyo principal autor es J. L. Doob) de la cual hemos visto parte en los capítulos 2. y 3.

El estudio del segundo caso fué iniciado por D. L. Burkholder (Bibliografía [6] y es importante entre otras razones porque la transformación de una martingala es el análogo en tiempo discreto de la integral estocástica.

4.1. DEFINICION: Sea $X=(X_1,X_2,\ldots)$ una martingala[+] en un espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Sean $Y_1=X_1$, $Y_2=X_2-X_1,\ldots$ de manera que $X_n=\sum_{k=1}^{n} Y_k$; $n\geq 1$

+ $(X_n,\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ con $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ adaptado a la filtración $\mathcal{F}_0\subset\mathcal{F}_1\subset\ldots\subset\mathcal{F}$.
i.e. X_n es $\mathcal{F}_n$-medible $n\geq 1$.

Decimos que $Z=(Z_1,Z_2,\ldots)$ es una transformación de X si $Z_n=\sum_{k=1}^{n} V_k Y_k$, en donde V_n es una función real $\mathcal{F}_{n-1}$-medible, $n\geq 1$ (i.e. $V=(V_1,V_2,\ldots)$ es un proceso predecible).

OBSERVACION: (i) Z no es necesariamente una martingala.

Un ejemplo es tomar la transformación Z de la martingala $(X_n,\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ dada en 2.2.2.C bajo la sucesión predecible $V=(W\cdot 1_{(0,\frac{1}{2})},1,1,\ldots)$ y ver que $E|Z_n|$ no nec. es finita.

(ii) De hecho se tendrá que Z es martingala $\Leftrightarrow$ $E|Z\ |$ es finita $\forall n$.

DEMOSTRACION:

$\Rightarrow$) Por ser Z martingala $E|Z_n|<\infty$ $\forall n$

$\Leftarrow$) P.d.

(i) para cada $n\in\mathbb{N}$ Z_n es $\mathcal{F}_n$-medible

V_1Y_1 es $\mathcal{F}_1$-medible (V_1 es $\mathcal{F}_0$ medible $\Rightarrow$ es $\mathcal{F}_1$-medible)

$\Rightarrow$ es $\mathcal{F}_n$-medible

V_2Y_2 es $\mathcal{F}_2$-medible (Y_2 es función continua de v.a. $\mathcal{F}_2$-medible)

$\Rightarrow$ es $\mathcal{F}_n$-medible

$\vdots$

$\therefore$ $\sum_{k=1}^{n} V_k Y_k$ es $\mathcal{F}_n$-medible (función continua de v.a. $\mathcal{F}_n$-medibles)

(ii) Como $E|Z_n|<\infty$ $\forall n$ entonces $E(Z_n/\mathcal{F}_k)$ está bien definida $\forall n$, $\forall k$

P.d. $E[Z_{n+1}/\mathcal{F}_n]=Z_n$ c.s. (usaremos 2.2.1.e)

$$E[Z_{n+1}/\mathcal{F}_n]=E\left[\sum_{k=1}^{n+1} V_k Y_k/\mathcal{F}_n\right]=E\left[\sum_{k=1}^{n} V_k Y_k+V_{n+1}Y_{n+1}/\mathcal{F}_n\right]$$

$$=E\left[\sum_{k=1}^{n} V_k Y_k/\mathcal{F}_n\right]+E[V_{n+1}Y_{n+1}/\mathcal{F}_n] \quad \text{(por 1.4.1.d)}$$

$$=E[Z_n/\mathcal{F}_n]+E[V_{n+1}Y_{n+1}/\mathcal{F}_n]$$

$$=Z_n+V_{n+1}E[Y_{n+1}/\mathcal{F}_n] \quad \text{(por 1.4.1.a y usando que } V_{n+1} \text{ es } \mathcal{F}_n\text{-medible)}$$

$$=Z_n+V_{n+1}E[X_{n+1}-X_n/\mathcal{F}_n]=Z_n+V_{n+1}\{E[X_{n+1}/\mathcal{F}_n]-E[X_n/\mathcal{F}_n]\}$$

$$=Z_n+V_{n+1}\{X_n-X_n\}=Z_n \quad \text{ya que } (X_n)_{n=1}^{\infty} \text{ es martingala}$$

4.1.1. OBSERVACION:

La condición dada en la equivalencia se satisface, por ejemplo, si cada V_n esta acotada c.d. (ya que si $V_n\in L^{\infty}(\Omega,\mathcal{F},P)$ $\forall n$ y como $Y_n=X_n-X_{n-1}$ con $X_k\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ $\forall k$; $E|X_n-X_{n-1}|\leq E|X_n|+E|X_{n-1}|<\infty$ $\forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow Y_n\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ y por la desigualdad de Hölder para $p=1$ $q=\infty$ se tiene que $V_nY_n\in L^1$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $Z_n=\sum_{k=1}^{n} V_k Y_k\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ $\forall n\in\mathbb{N}$).

Tales transformaciones, particularmente en el caso en que las funciones V_n tengan como valores posibles 0 y 1, tienen una larga historia y una interpretación interesante en juegos y apuestas (Doob: "Stochastic Processes". Wiley [16]), se hace énfasis no tanto en la transformación Z sino en las sucesiones $\{Z_{\tau_n}\}_{n\geq 1}$ en donde los τ_n son t.d.p.

El teorema de los cruces hacia arriba (Skipping 3.3.) y el de muestreo opcional 3.1, los cuales dan condiciones que aseguran que $\{Z_{\tau_n}\}_{n\geq 1}$ es una martingala (ó una submartingala) son ejemplos de lo anterior (la transformación Z puede ser igual c.d. a la martingala original X).

Probaremos ahora algunos resultados que serán útiles posteriormente:

4.1.2. Lema: Sea $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión t.q. $\sum_{\mathbb{N}} a_n < \infty$ $(a_n \geq 0\ \forall n)$ entonces:

Si $\{b_n\}_{n\geq 1}$ es t.q. $|b_n| < k\ \forall n \Rightarrow \sum_{\mathbb{N}} a_n b_n$ converge

DEMOSTRACION:

Como $\sum_{\mathbb{N}} |a_n b_n| = \sum_{\mathbb{N}} a_n |b_n| < \sum_{\mathbb{N}} a_n k = k \sum_{\mathbb{N}} a_n < \infty$

$\Rightarrow \sum_{\mathbb{N}} a_n b_n$ converge absolutamente $\Rightarrow \sum_{\mathbb{N}} a_n b_n$ converge

4.1.3. Lema: Sea $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de v.a. en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, t.q. $Y_n \geq 0$ c.d $\forall n$ y $\sum_{k=1}^{n} Y_k \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi$ c.d. $(\xi \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P))$, sea $\{V_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de v.a. t.q. $V^* = \sup_n |V_n| \leq 1$ c.d. entonces:

$$G_n = \sum_{k=1}^{n} V_k Y_k \text{ converge c.d.}$$

DEMOSTRACION:

Sabemos que $\exists A \in \mathcal{F}$ t.q. $P(A)=0$ y si $\omega \notin A$ $H_n(\omega) = \left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi(\omega)$

también $\exists B \in \mathcal{F}$ t.q. $P(B)=0$ y si $\omega \notin B$

$$|V_n(\omega)| \leq V^*(\omega) = \sup_n |V_n(\omega)| \leq 1 \qquad \forall n$$

Sea $\omega \notin A \cup B$ ($P(A\cup B) \leq P(A)+P(B)=0 \therefore P(A\cup B)=0$) y del lema 4.1.2.

$G_n(\omega) = \left(\sum_{k=1}^{n} V_k Y_k\right)(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} \eta(\omega)$ (De hecho como $|G_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} V_k Y_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} Y_k \leq \xi$ y $\xi \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P) \Rightarrow \eta \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$).

4.1.4. Lema: Sea $(X_n,\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ una martingala L^1-acotada, entonces si $X^*=\sup_n |X_n|$ se tiene que $P[X^*<\infty]=1$ (i.e. X^* es finita c.d.)

DEMOSTRACION:

Como $\sup_n E|X_n|<\infty \Rightarrow \sup_n E(X_n^-)<\infty$ y por el teorema 3.4

$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X_\infty$ c.d. ($X_\infty \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$)

Además $\forall n\geq 1$ $E|X_n| \leq \sup_n E|X_n| < \infty \Rightarrow \forall n\geq 1$ $|X_n|$ es finita c.d. (i.e. $P(\{\omega: |X_n|=+\infty\})=0$).

esto es $\forall n\in \mathbb{N}$ $\exists A_n \in \mathcal{F}$, $P(A_n)=0$ t.q. si $\omega \in A_n^c \Rightarrow |X_n(\omega)|<\infty$.

Sea $A_0=\{\omega\in\Omega / |X_\infty(\omega)|=+\infty\}$ entonces $P(A_0)=0$ y si tomamos $A=\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n^c = \left\{\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right\}^c$ entonces $0\leq P(A^c)=P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n)=0$.

Por otra parte sabemos que $\exists B\in\mathcal{F}$ con $P(B)=0$ t.q. si $\omega\in B^c \Rightarrow |X_n(\omega)-X_\infty(\omega)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

i.e. dado $\varepsilon>0$ $\exists \eta_0\in \mathbb{N}$ ($\eta_0=\eta_0(\varepsilon,\omega)$) t.q. $\forall n\geq\eta_0$ $|X_n(\omega)-X_\infty(\omega)|<\varepsilon$

$\Rightarrow \forall n\geq\eta_0$ $\big||X_n(\omega)|-|X_\infty(\omega)|\big| \leq |X_n(\omega)-X_\infty(\omega)|<\varepsilon$

$\Rightarrow \forall\, n\geq\eta_0 \quad -\varepsilon+|X_\infty(\omega)|<|X_n(\omega)|<\varepsilon+|X_\infty(\omega)|$

Ahora sea $C=A\cap B^c$ entonces $P(C^c)=P[\{A\cap B^c\}^c]=P[A^c\cup B]\leq P(A^c)+P(B)=0$ y para $\omega\in C$ y $\varepsilon>0$ $\exists\,\eta_0\in\mathbb{N}$ t.q. si $n\geq\eta_0$

$$-\varepsilon+|X_\infty(\omega)|<|X_n(\omega)|<\varepsilon+|X_\infty(\omega)|<\infty$$

i.e. $-\varepsilon+|X_\infty(\omega)|<\operatorname*{Sup}_{n\geq\eta_0}|X_n(\omega)|\leq\varepsilon+|X_\infty(\omega)|<\infty$

Pero al estar $\omega\in C$ $|X_n(\omega)|<\infty$ para $n=1,2,\ldots,\eta_0-1$

$$\therefore \quad \operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}}|X_n(\omega)|<\infty$$

si llamamos $D=\{\omega: \operatorname*{Sup}_n|X_n(\omega)|<\infty\}$ entonces acabamos de probar que $C\subset D$ y por tanto

$$1=P(C)\leq P(D)\leq 1 \qquad \therefore \qquad P\left[\operatorname*{Sup}_n|X_n|<\infty\right]=1$$

Probaremos que bajo ligeras condiciones, las transformaciones de martingalas convergen c.d. También probaremos dos teoremas de convergencia c.d. para martingalas, que están relacionados con lo anterior.

4.2. TEOREMA 1.

Si Z es una transformación de una martingala L^1-acotada X entonces Z converge c.d. en el conjunto en donde la función máxima V^* de la sucesión $(V_1,V_2,\ldots)$ es finita ($V^*(\omega)=\operatorname*{Sup}_n|V_n(\omega)|$ y X L^1-acotado significa que $\operatorname*{Sup}_n E|X_n|<\infty$, que Z converge c.d. significa que $\lim_{n\to\infty} Z_n(\omega)$ existe y es finito c.d.)

DEMOSTRACION: (Se probará en tres partes)

(i) Si Z es la transformación de una martingala L^2-acotada X y $V^* \leq 1$ c.d. $\Rightarrow EZ_n^2 \leq EX_n^2 \ \forall n \in \mathbb{N}$ y Z converge c.d.

Se tiene que como $V^* \leq 1$ c.d. $\Rightarrow$ (4.1.1) Z es martingala y

$$EX_n^2 = E\Big(\big(\sum_{k=1}^{n} Y_k\big)^2\Big) = E\Big\{\sum_{k=1}^{n} Y_k^2 + 2\sum_{i \neq j} Y_i Y_j\Big\} = E\sum_{k=1}^{n} Y_k^2 + E2\sum_{i \neq j} Y_i Y_j$$

$$= \sum_{k=1}^{n} EY_k^2 + 2\sum_{i \neq j} EY_i Y_j = \sum_{k=1}^{n} EY_k^2 \quad \text{usando 2.2.5}$$

como Z es martingala se tiene entonces por un argumento análogo al anterior, que:

$$EZ_n^2 = \sum_{k=1}^{n} EW_k^2 \quad \text{en donde}$$

$$W_1 = Z_1,\ W_2 = Z_2 - Z_1, \ldots, W_k = Z_k - Z_{k-1}, \ldots$$

Además $\sup_n |V_n(\omega)| = V^*(\omega) \leq 1$ c.d.

i.e. $|V_n(\omega)| \leq 1$ c.d. $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow V_n^2(\omega) \leq 1$ c.d. $\forall n \in \mathbb{N}$

Como $Y_n^2(\omega) \geq 0$ c.d.

$\Rightarrow (V_n^2 Y_n^2)(\omega) \leq Y_n^2(\omega)$ c.d.

pero $W_k(\omega) = (Z_k - Z_{k-1})(\omega) = (V_k Y_k)(\omega)$

$\Rightarrow W_n^2(\omega) \leq Y_n^2(\omega)$ c.d. $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} W_k^2(\omega) \leq \sum_{k=1}^{n} Y_k^2(\omega)$ c.d.

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} EW_k^2 \leq \sum_{k=1}^{n} EY_k^2.$

$\therefore \quad E(Z_n^2) \leq E(X_n^2) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \operatorname{Sup}_n EZ_n^2 \leq \operatorname{Sup}_n EX_n^2 < \infty$ porque X es L^2-acotada $\Rightarrow$ Z es L^2-acotado.

Ahora de la observación 2.2.6.1 se tiene que Z es L^1-acotado y por el teorema 3.4 Z converge c.d.

i.e. $\lim_n Z_n(\omega) = \xi(\omega)$ c.d.

con $\xi \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y como $E|\xi| < \infty$

$\Rightarrow P(\{\omega : |\xi(\omega)| = \infty\}) = 0$ i.e. ξ es finita c.d.

(ii) Si Z es la transformación de una submartingala uniformemente acotada X y $V^* \leq 1$ c.d. entonces Z converge c.d.

Como

$$X^* = \operatorname{Sup}_n |X_n| \leq C < \infty \Rightarrow X_k + C \geq X_k + X^* \geq X_k + |X_k|$$

$$= X_k^+ - X_k^- + X_k^+ + X_k^- = 2X_k^+ \geq 0 \quad \text{c.d.} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

y además

$$Y_k = X_k + C - (X_{k-1} + C) = X_k - X_{k-1} \quad \forall k \geq 2$$

entonces si definimos $X^1 = (X_1 + C, X_2 + C, \ldots,)$, X^1 es una submartingala con $X_k^1 = X_k + C \geq 0$ c.d. y tal que:

$$Y_1^1=X_1+C\,,\quad Y_2^1=X_2-X_1,\ldots\,;\; Y_k^1=Y_k \quad \forall k\geq 2$$

$$Z_n=\sum_{k=1}^{n} V_kY_k \quad Z_n^1=V_1Y_1^1+\sum_{k=2}^{n} V_kY_k=\sum_{k=1}^{n} V_kY_k+V_1C$$

entonces probar la convergencia c.s. de $\left(Z_n^1\right)_{n=1}^{\infty}$ equivale a probar la convergencia de $\left(Z_n\right)_{n=1}^{\infty}$.

De la argumentación anterior podemos suponer (a lo largo de la prueba de éste inciso) que $X=(X_1,X_2,\ldots)$ es t.q. $X_n\geq 0$ $\forall n$.

Ahora bien $E(X_{k-1}\cdot E[Y_k/\mathcal{F}_{k-1}])=E[E[X_{k-1}Y_k/\mathcal{F}_{k-1}]]=E(X_{k-1}Y_k) \quad \forall k\geq 2$

Pero como $(X_n,\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ es submartingala

$$E[Y_k/\mathcal{F}_{k-1}]=E[X_k-X_{k-1}/\mathcal{F}_{k-1}]=E[X_k/\mathcal{F}_{k-1}]-X_{k-1}\geq X_{k-1}-X_{k-1}=0 \quad \text{c.d.}$$

$$\therefore\; E[X_{k-1}\cdot Y_k]\geq 0$$

entonces

$$EX_k^2=E(X_{k-1}+Y_k)^2\geq EX_{k-1}^2+EY_k^2 \qquad \forall k\geq 2$$

si $k=1$

$EX_1^2=EY_1^2$ sumando EY_2^2

$EX_2^2\geq EX_1^2+EY_2^2=\sum_{k=1}^{2} EY_k^2$ sumando EY_3^2

$$EX_3^2\geq EX_2^2+EY_3^2\geq \sum_{k=1}^{3} EY_k^2$$

$$\vdots$$

$$\therefore\; EX_n^2\geq \sum_{k=1}^{n} EY_k^2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\text{(T.1.a)}$$

Definamos ahora $\hat{X}=(\hat{X}_1,\hat{X}_2,\ldots.)$ y $\hat{Z}=(\hat{Z}_1,\hat{Z}_2,\ldots.)$ como:

$$\hat{X}_n=\sum_{k=1}^{n}\hat{Y}_k,\ \hat{Z}_n=\sum_{k=1}^{n}V_k\hat{Y}_k \qquad \forall n\geq 1$$

en donde

$$\hat{Y}_1=Y_1 \text{ y } \hat{Y}_n=Y_n-E[Y_n/\mathcal{F}_{n-1}] \qquad \forall n\geq 2$$

entonces:

(a) $(\hat{X}_n,\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ es una martingala.

$\hat{X}_n=\sum_{k=1}^{n}\hat{Y}_k=Y_1+\sum_{k=2}^{n}Y_k-E[Y_k/\mathcal{F}_{k-1}]$ que por ser $(\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ un filtración; es una suma de v.a. $\mathcal{F}_n$-medibles.

$\therefore$ $\hat{X}_n$ es $\mathcal{F}_n$-medible $\forall n\geq 1$ Además $\hat{Y}_k=Y_k-E[Y_k/\mathcal{F}_{k-1}]$ $\forall k\geq 2$

$Y_k=X_k-X_{k-1}$ y $X_k\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ $\forall k\geq 2$ como L^1 es un espacio vectorial

$\Rightarrow Y_k\in L^1\ \forall k\geq 2$ y por 1.4.4. $E\{|E(Y_k/\mathcal{F}_{k-1})|\}\leq E|Y_k|<\infty$

$\therefore$ $E[Y_k/\mathcal{F}_{k-1}]\in L^1(\Omega,\mathcal{F}P)$ $\forall k\geq 2$

entonces $\hat{Y}_k\in L^1(\Omega,\mathcal{F}P)$ $\forall k\geq 2$, nuevamente porque L^1 espacio vectorial.

Para $\hat{Y}_1$, $\hat{Y}_1=Y_1=X_1\in L^1(\Omega,\mathcal{F}P)$ $\therefore$ $\hat{X}_n=\sum_{k=1}^{n}\hat{Y}_k\in L^1(\Omega,\mathcal{F}P)$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Por 2.2.1(e) resta probar que

$$E[\hat{X}_{n+1}/\mathcal{F}_n]=\hat{X}_n \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$E[\hat{X}_{n+1}/\mathcal{F}_n]=E\Big[\sum_{k=1}^{n+1}\hat{Y}_k/\mathcal{F}_n\Big]=E\Big[\sum_{k=1}^{n}\hat{Y}_k/\mathcal{F}_n\Big]+E[\widehat{Y_{n+1}}/\mathcal{F}_n]$$

$= E[\hat{X}_n/\mathcal{F}_n]-E[Y_{n+1}-E[Y_{n+1}/\mathcal{F}_n]/\mathcal{F}_n]=\hat{X}_n+E[Y_{n+1}/\mathcal{F}_n]$

$- E[Y_{n+1}/\mathcal{F}_n]=\hat{X}_n$ por ser $\hat{X}_n$ y $E[Y_{n+1}/\mathcal{F}_n]$ $\mathcal{F}_n$-medibles

y usando la linealidad de la esperanza condicional

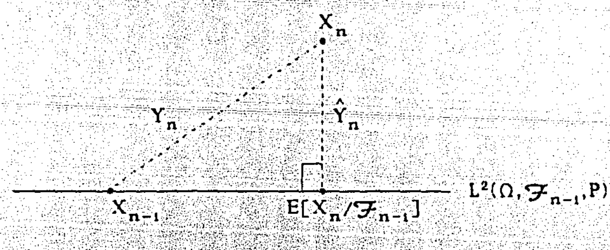
(b) Como $\hat{X}_n-\hat{X}_{n-1}=\sum_{k=1}^{n}\hat{Y}_k-\sum_{k=1}^{n-1}\hat{Y}_k=\hat{Y}_n$

y $\hat{Z}_n=\sum_{k=1}^{n}V_k\hat{Y}_k$ se tiene que $\hat{Z}$ es una transformación de $\hat{X}$.

Además como $\sup_n|X_n|=X^*\leq C<\infty$ y $0\leq|X_n|\leq X^*\leq C$ $\forall n$. . . . .(t.1.b)

$\Rightarrow$ $0\leq|X_n|^2\leq(X^*)^2\leq C^2$ c.d. $\forall n \Rightarrow E|X_n|^2\leq C^2<\infty$ $\forall n$ $\therefore$ $(X_n,\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ es una submartingala en $L^2(\Omega,\mathcal{F}P)$.....(T.1.C).

ahora usando 1.4.3 se tiene el siguiente esquema:



de donde se concluye que $\|Y_n\|_2^2=\|X_{n-1}-E[X_n/\mathcal{F}_{n-1}]\|_2^2+\|\hat{Y}_n\|_2^2$ por lo que $\|Y_n\|_2^2\geq\|\hat{Y}_n\|_2^2$ i.e. $EY_n^2\geq E\hat{Y}_n^2$ $\forall n\geq 2$.

Ahora bien

$$E\hat{X}_n^2 = E\{\sum_{k=1}^{n}\hat{Y}_k\}^2 = E\{\sum_{k=1}^{n}\hat{Y}_k^2 - 2\sum_{i\neq j}\hat{Y}_i\hat{Y}_j\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} E\hat{Y}_k^2 - 2\sum_{i\neq j} E(\hat{Y}_i\hat{Y}_j) = \sum_{k=1}^{n} E\hat{Y}_k^2$$

ya que en virtud de (2.2.5) $E[\hat{Y}_i\hat{Y}_j]=0 \quad \forall i\neq j$

$$\therefore \quad E\hat{X}_n^2 = \sum_{k=1}^{n} E\hat{Y}_k^2 \leq \sum_{k=1}^{n} EY_k^2 \leq EX_n^2 \quad . \; . \quad . \; . \; . \; . \; . \; (T.1.d)$$

usando t.1.a.

La relación T.1.b nos dice que $E|X_n|^2 \leq C^2 < \infty \quad \forall n$, i.e. $\sup_n E|X_n|^2 < \infty$ o bien $(X_n)_{n\in N}$ es L^2-acotado y por T.1.d $(\hat{X}_n)_{n=1}^{\infty}$ es L^2-acotado.

De (i) se tiene que $\hat{Z}$ converge c.d. i.e. $\lim_{n\to\infty}\hat{Z}_n = \xi \quad \xi\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$......(T.1.e)

Además de la observación (2.2.6.1) se concluye que $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(\hat{X}_n)_{n=1}^{\infty}$ son ambos L^1-acotados, aplicando el teorema (3.4) se obtiene que

$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi_1$ c.d. $\quad \xi_1\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$......(T.1.f) y

$\hat{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi_2$ c.d.

$\xi_2\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$......(T.1.g).

Ahora de la definición de $\hat{Y}_k$

$$\hat{Y}_k = Y_k - E[Y_k/\mathcal{F}_{k-1}] \qquad \forall\, k\geq 2$$

$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n}\hat{Y}_k = \sum_{k=2}^{n} Y_k - \sum_{k=2}^{n} E[Y_k/\mathcal{F}_{k-1}]$ sumando $\hat{Y}_1 = Y_1$ de ambos lados

$$\sum_{k=1}^{n} \hat{Y}_k = \sum_{k=1}^{n} Y_k - \sum_{k=2}^{n} E[Y_k/\mathcal{F}_{k-1}]$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n} E[Y_k/\mathcal{F}_{k-1}] = \sum_{k=1}^{n} Y_k - \sum_{k=1}^{n} \hat{Y}_k = X_n - \hat{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi_1 - \xi_2 \qquad \text{c.d.}$$

$\xi_1 - \xi_2 \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (por (T.1.f) y (T.1.g))

Nuestro objetivo es probar la convergencia c.d. de

$$G_n(\omega) = \Big(\sum_{k=2}^{n} V_k E[Y_k/\mathcal{F}_{k-1}]\Big)(\omega)$$

para lo cual usaremos el lema 4.1.3.

Se tiene que:

(1) $\sum_{k=2}^{n} E[Y_k/\mathcal{F}_{k-1}] \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi_1 - \xi_2$ c.d. (con $(\xi_1 - \xi_2) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$)

(2) Por la definición de SUB-MARTINGALA $E[Y_k/\mathcal{F}_{k-1}] \geq 0$ c.d. $\forall k \geq 2$

(3) Por hipótesis $V^* \leq 1$

entonces usando 4.1.3 se tiene que:

$$G_n(\omega) = \Big(\sum_{k=2}^{n} V_k E[Y_k/\mathcal{F}_{k-1}]\Big)(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} \eta(\omega)$$

Ahora sea

$$H_n(\omega) = \Big(\sum_{k=2}^{n} E[Y_k/\mathcal{F}_{k-1}]\Big)(\omega) \qquad \omega \in \Omega$$

Entonces:

$G_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \eta(\omega)$ ($\eta = \lim_{n\to\infty} G_n$ c.d. i.e η es igual c.d. a una función $\mathcal{F}$-medible si se supone completez en el espacio medible $(\Omega,\mathcal{F},P)$ $\Rightarrow$ η es $\mathcal{F}$-medible)

Como $P(\Omega)<\infty$ el teorema 1.3.2 nos dice que $G_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \eta$ en medida y como

$$|G_n| = \left|\sum_{k=2}^{n} V_k E[Y_k/\mathcal{F}_{k-1}]\right| \leq \sum_{k=2}^{n} |V_k E[Y_k/\mathcal{F}_{k-1}]| \leq \sum_{k=2}^{n} E[Y_k/\mathcal{F}_{k-1}]$$

$$= H_n \leq \lim_{n\to\infty} H_n = (\xi_1 - \xi_2) \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$$

aplicando el teorema 1.3.6 para p=1 se tiene que

$$G_n \longrightarrow \eta \text{ en } L^1 \quad y \quad \eta \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$$

Por último como $\hat{Y}_1 = Y_1$ y $\hat{Y}_k = Y_k - E[Y_k/\mathcal{F}_{k-1}]$ $k \geq 2$

$$\Rightarrow V_k \hat{Y}_k = V_k Y_k - V_k E[Y_k/\mathcal{F}_{k-1}] \quad k\geq 2 \quad \text{c.d.}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n} V_k \hat{Y}_k = \sum_{k=2}^{n} V_k Y_k - \sum_{k=2}^{n} V_k E[Y_k/\mathcal{F}_{k-1}] \qquad \text{c.d.}$$

Sumando $V_1 Y_1 = V_1 \hat{Y}_1$ a ambos lados

$$\sum_{k=1}^{n} V_k \hat{Y}_k = \sum_{k=1}^{n} V_k Y_k - \sum_{k=2}^{n} V_k E[Y_k/\mathcal{F}_{k-1}] \qquad \text{c.d.}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} V_k Y_k = \sum_{k=1}^{n} V_k \hat{Y}_k + \sum_{k=2}^{n} V_k E[Y_k/\mathcal{F}_{k-1}] \qquad \text{c.d.}$$

i.e. $\quad Z_n = \hat{Z}_n + G_n \quad$ c.d. $\forall n$

$\therefore \quad Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi + \eta \quad$ c.d. $\xi + \eta \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$

(iii) Si Z es la transformación de una martingala L^1-acotada X y si $V^* \leq 1$, entonces Z converge c.d.

DEMOSTRACION:

Por el resultado 2.2.7.6 si X es una martingala L^1-acotada existen dos martingalas no negativas

$$X' \text{ y } X'' \; ((X'_n, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}, (X''_n, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty})$$

tales que $X_n = X'_n - X''_n$. Se tendrá entonces que:

$$Y_n = X_n - X_{n-1} = X'_n - X'_{n-1} - (X''_n - X''_{n-1}) = Y'_n - Y''_n \quad n=2,3,4,\ldots$$

$$Y_1 = X_1 = X'_1 - X''_1 = Y'_1 - Y''_1$$

$$V_n Y_n = V_n Y'_n - V_n Y''_n \quad \forall n \geq 1 \text{ y } Z_n = \sum_{k=1}^{n} V_k Y_k = \sum_{k=1}^{n} V_k Y'_k - \sum_{k=1}^{n} V_k Y''_k$$

i.e $Z_n = Z'_n - Z''_n$ ($Z = Z' - Z''$ Z' y Z'' las transformaciones X' y X'' respectivamente, bajo la sucesión $(V_n)_{n \geq 1}$).

Además por ser X' y X'' martingalas <u>no negativas</u>

$\Rightarrow EX'_n = E|X'_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (Analogamente para X''_n)

y

$EX'_n = EX'_m \quad \forall n,m \in \mathbb{N}$ (Analogamente para X''_n, X''_m)

$$\therefore \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} E|X'_n| = \sup_{\mathbb{N}} EX'_n = EX'_n < \infty$$

i.e. X' y X'' son martingalas <u>L^1-acotadas.</u>

De los anteriores argumentos nos basta probar el enunciado de éste tercer paso sólo para martingalas no negativas.

Suponemos entonces $X_n \geqslant 0$ c.d. $\forall n \geqslant 1$

Sea $C>0$ y definamos $\hat{X}_n = -\min(X_n, C)$ $\forall n \geqslant 1$

Como X_n es $\mathcal{F}_n$-medible y C es $\mathcal{F}_n$-medible $\Rightarrow$ $\min(X_n, C)$ es $\mathcal{F}_n$-medible $\Rightarrow$ $\hat{X}_n = -\min(X_n, C)$ es $\mathcal{F}_n$-medible.

Como $(-X_n, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ es MGLA y $\hat{X}_n = -\min(X_n, C) = \mathrm{Sup}(-X_n, -C)$.

De la observación 2.2.1.d. y el corolario 2.2.4.b se tiene que $(\hat{X}_n, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ es submartingala

además

$C \geqslant \mathrm{Min}(X_n, C)$ c.d. $\forall n \geqslant 1 \Rightarrow -C \leqslant -\mathrm{Min}(X_n, C) = \hat{X}_n < C$

$\Rightarrow |\hat{X}_n| < C$ c.d. $\forall n \in \mathbb{N}$

i.e. $(\hat{X}_n, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ es una submartingala uniformemente acotada.

Sea $\hat{Z}$ la transformación de $\hat{X}$ bajo-V $\left(\text{i.e. bajo } \{-V_n\}_{n \geqslant 1}\right)$ y como $\sup_n |-V_n(\omega)| = \sup_n |V_n(\omega)| = V^*(\omega) \leqslant 1$ c.d. por (ii) se concluye que

$$\hat{Z}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P) \quad \text{c.d.}$$

TRES PUNTOS PARA CONCLUIR LA DEMOSTRACION DE (iii)

T.1.i. OBSERVACIONES:

(a) Si $X^*(\omega)=\operatorname{Sup}_n|X_n(\omega)|<C$ entonces $\hat{X}_n=-X_n$ c.d. $\forall n$ y $Z=\hat{Z}$ i.e. Z converge c.d.

entonces podemos concluir que Z converge c.d. en el conjunto $[X^*<C]$.

(b) Por hipótesis $(X_n,\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ es una martingala L^1-acotada por el lema 4.1.4 si $X^*=\operatorname{Sup}_n|X_n|$ (se tiene en este caso que $\operatorname{Sup}_n X_n=\operatorname{Sup}|X_n|$) entonces $P[X^*<\infty]=1$

(c) Por último

$$[X^*<\infty]=\bigcup_{C\in Q^+}[X^*<C]$$

entonces $[X^*<\infty]$ es un conjunto de medida 1 t.q. si $\omega\in[X^*<\infty]\Rightarrow X^*(\omega)<\infty$ $\Rightarrow \exists C\in\mathbb{R}^+$ t.q. $\omega\in[X^*<C]$ y por T.1.i.(a)

$$Z_n(\omega)\xrightarrow[n\to\infty]{}\xi(\omega)$$

$\therefore$ Z converge c.d. en $[V^*\leq 1]$

Hasta la parte (iii) se ha visto que la transformación Z de una martingla X L^1-acotada converge c.d. en el conjunto en el que $V^*\leq 1$, ahora para completar la prueba del teorema 1.

Sea X una martingala L^1-acotada y sea Z su transformación bajo $V=(V_1,V_2,\ldots.)$. Sea $C>0$ y definimos:

$$\hat{V}_n(\omega)=\begin{cases} V_n & \text{si } |V_n(\omega)|<C \\ 0 & \text{si } |V_n(\omega)|\geq C \end{cases} \qquad \hat{V}_n(\omega)=V_n(\omega)\,.\,1_{[|V_n|<C]}(\omega)$$

entonces:

(I) $\hat{V}_n$ es $\mathcal{F}_{n-1}$-medible por ser el producto de dos funciones $\mathcal{F}_{n-1}$-medibles $\forall n$.

(II) $|\hat{V}_n|\leq C \quad \forall n$ c.d. $\Rightarrow \operatorname{Sup}_n|\hat{V}_n|=\hat{V}^*\leq C$.

Sea $\hat{Z}$ la transformación de X bajo la sucesión (uniformemente acotada) $\hat{V}=(\hat{V}_1,\hat{V}_2,\ldots)$, entonces

$$\hat{Z}_n=\sum_{k=1}^{n}\hat{V}_k Y_k \Rightarrow {}^1\!/_C\ \hat{Z}_n=\sum_{k=1}^{n}\left({}^1\!/_C\hat{V}_k\right)Y_k$$

y como el producto de una constante por una función $\mathcal{F}_{n-1}$-medible es a su vez $\mathcal{F}_{n-1}$-medible $\Rightarrow {}^1\!/_C\hat{V}_k$ es $\mathcal{F}_{k-1}$-medible $\forall_k$.

Además

$$-C\leq\hat{V}_n\leq C \quad \forall n \Rightarrow -1\leq{}^1\!/_C\hat{V}_n\leq 1 \quad \forall n$$

$$\therefore\ \left|{}^1\!/_C\hat{V}_n\right|\leq 1 \quad \forall n.$$

Usando (iii) se concluye que

$${}^1\!/_C\ \hat{Z}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \eta\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P) \qquad \text{c.d.}$$

$$\therefore\quad \hat{Z}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} c\,\eta\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P) \qquad \text{c.d.}\ldots\ldots\text{(III)}$$

FINALMENTE:

Si $V^*(\omega)<C \Rightarrow |V_n(\omega)|<C$ y $\hat{V}_n(\omega)=V_n(\omega)$ c.d. $\Rightarrow \hat{Z}=Z$ c.d. entonces de III se concluye que Z converge c.d. en $[V^*<C]$.

Por último $[V^*<\infty]=\bigcup_{C\in Q^+}[V^*<C]$

$\therefore$ Z converge c.d. en $[V^*<\infty]$.

4.2.1. OBSERVACIONES:

(1) El resultado anterior implica el correspondiente resultado para submartingalas (L^1-acotadas) ó bien de manera general para sucesiones de la forma $X=X'+X''$.....(*). En donde X' es una martingala L^1-acotada y X" es un proceso creciente y convergente c.d.

$(X''_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ c.d.)

DEMOSTRACION:

(i) Caso general

Sea X una sucesión de v.a. con la forma (*) entonces si

$K=1 \quad X_1=X'_1+X''_1 \Rightarrow Y_1=X_1=Y'_1 \quad (X''_1\equiv 0)$

Si $K\geq 2 \quad Y_k=X_k-X_{k-1}=(X'_k-X'_{k-1})+(X''_k-X''_{k-1})$

$=Y'_k+(X''_k-X''_{k-1}) \Rightarrow Z_n=\sum_{k=1}^{n} V_kY'_k+V_1X''_1+\sum_{k=2}^{n} V_k(X''_k-X''_{k-1})$

i.e. $Z_n = Z'_n + V_1 X''_1 + \sum_{k=2}^{n} V_k (X''_k - X''_{k-1})$ $(V_1 X''_1 = 0)$

se tiene que:

(a) Suponiendo que $V^* \leq 1$

$$\sum_{k=2}^{n} (X''_k - X''_{k-1}) = X''_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P) \qquad \text{c.d.}$$

y cada sumando $X''_k - X''_{k-1}$ es mayor ó igual que cero c.d. por ser X" un proceso creciente.

Entonces usando el lema 4.1.3 podemos concluir que

$$G_n(\omega) = \Big(\sum_{k=2}^{n} V_k (X''_k - X''_{k-1})(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} \eta_1(\omega)$$

(Suponiendo que el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es completo se puede concluir que η_1 es $\mathcal{F}$-medible).

Como $P(\Omega) < \infty$ por el teorema 1.3.2. $G_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \eta_1$ en medida y

$$|G_n| = \left| \sum_{k=2}^{n} V_k (X''_k - X''_{k-1}) \right| \leq \sum_{k=2}^{n} |V_k| |X''_k - X''_{k-1}| \leq \sum_{k=2}^{n} (X''_k - X''_{k-1})$$

$$= X''_n \leq \lim_{n\to\infty} X''_n = \xi \quad (\xi \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

aplicando el teorema 1.3.6 para p=1 se tiene que

$$G_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \eta_1 \quad \text{en} \quad L^1 \quad \text{y} \quad \eta_1 \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

Por otra parte $\left(Z'_n\right)_{n=1}^{\infty}$ es la transformación de una martingala L^1-acotada y como $V^* \leq 1$ entonces por el teorema 1

$$Z'_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \eta_2 \quad \text{c.d.} \quad (\eta_2 \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P))$$

$$\therefore \quad Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \eta_1 + \eta_2 \quad \text{c.d.} \quad (\eta_1+\eta_2) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

(b) en la parte (a) vimos que la transformación Z de una sucesión X con la forma (*) converge c.d. en el conjunto en el que $V^* \leq 1$, para completar la prueba de (i).

Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de v.a. de la forma (*) y sea $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ su transformación bajo $V=(v_1, V_2, \ldots.)$.

Sea $C>0$ y definimos:

$$\hat{V}_n(\omega) = \begin{cases} V_n & \text{si } |V_n(\omega)| < C \\ 0 & \text{si } |V_n(\omega)| \geq C \end{cases} \qquad \hat{V}_n(\omega) = V_n(\omega) .\ 1_{[|V_n|<C]}(\omega)$$

entonces:

(I) $\hat{V}_n$ es $\mathcal{F}_{n-1}$-medible (por ser el producto de dos funciones $\mathcal{F}_{n-1}$-medibles) $\forall n$.

(II) $|\hat{V}_n| \leq C \quad \forall n \quad$ c.d. $\quad \Rightarrow \quad \sup_n |\hat{V}_n| = \hat{V}^* \leq C$

Sea $\hat{Z}$ la transformación de X bajo la sucesión (uniformemente acotada) $\hat{V}=(\hat{V}_1, \hat{V}_2, \ldots.)$, entonces

$$\hat{Z}_n = \sum_{k=1}^{n} \hat{V}_k Y_k \Rightarrow \frac{1}{C}\hat{Z}_n = \sum_{k=1}^{n} \{\frac{1}{C}\hat{V}_k\} Y_k$$

usando (a) y el hecho de que $\left|\frac{1}{C}\hat{V}_k\right| \leq 1 \ \forall n$ c.d. se tiene que:

$$\frac{1}{C}\hat{Z}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \eta \quad \text{c.d.} \quad (\eta \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P))$$

$$\therefore \quad \hat{Z}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} C\eta \quad \text{c.d. y } C\eta \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

Ahora, si suponemos $V^*(\omega) < C \Rightarrow |V_n(\omega)| < C$ y $\hat{V}_n(\omega) = V_n(\omega)$ c.d. $\Rightarrow \hat{Z} = Z$ c.d.

$$\therefore \quad Z_n = \hat{Z}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} C\eta \quad \text{c.d.}$$

i.e. Z converge c.d. en $[V^* < C]$

por último $[V^* < \infty] = \bigcup_{C \in Q^+} [V^* < C]$

$\therefore$ Z converge c.d. en $[V^* < \infty]$

Caso (ii) si $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ es una submartingala L^1-acotada entonces de 2.2.1.C $(-X_n, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sobremartingala (también L^1-acotada). usando el teorema 2.2.8.1 y la observación 2.2.8.2 se puede concluir que $X_n = W_n + A_n$ X es la suma de una martingala W y de un proceso creciente A.

Además como $X_n \leq |X_n| \ \forall n$ c.d.

$$\Rightarrow EW_n + EA_n = EX_n \leq E|X_n| \leq \sup_n E|X_n| < \infty$$

pero como $(W_n, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ es martingala $\Rightarrow EW_n$ es un valor constante y finito que no cambia con n. ($EW_n = C \ \forall n$)

$\Rightarrow\ E|A_n|=EA_n \leq \sup_n E|X_n|-C \quad \forall n$ y como $0 \leq A_n \leq A_{n+1}$ c.d. $\forall n$

$\Rightarrow\ E\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)=\lim_{n\to\infty} EA_n = \sup_n E(A_n) \leq \sup_n E|X_n|-C$

(usando el teorema de la convergencia monótona) entonces si $A_\infty(\omega)=\lim_{n\to\infty} A_n(\omega)$ se tiene que $A_\infty \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$.

Se tiene entonces que $(A_n)_{n=1}^\infty$ es un proceso creciente t.q. $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A_\infty$ c.d. con $A_\infty \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ por otra parte $|X_n|=|W_n+A_n| \geq |W_n|-A_n$ c.d. $\forall n$

$\Rightarrow\ |W_n| \leq |X_n|+A_n$ c.d. $\forall n$

$\Rightarrow\ E|W_n| \leq E|X_n|+EA_n$

$\therefore\ \sup_n E|W_n| \leq \sup_n \{E|X_n|+EA_n\}$

$\leq \sup_n E|X_n| + \sup_n EA_n < \infty$

ya que $\sup_n EA_n < \infty$ como ya vimos y por hipótesis $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ es L^1-acotado.

$\therefore\ (W_n,\mathcal{F}_n)_{n=1}^\infty$ es una martingala L^1-acotada.

entonces X es un proceso estocástico que se puede escribir en la forma (*) y por el caso (i) su transformación Z bajo $V=(V_1,V_2,\ldots)$ converge c.d. i.e.

$Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \eta$ c.d. $\eta \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$

sobre el conjunto $[V^* < \infty]$

4.2.1. OBSERVACIONES:

(2) Una consecuencia del teorema 1 es que si X es una martingala L^1-acotada entonces la sucesión $Z_n = \sum_{k=1}^{n} \pm Y_k$ converge c.d. (escogiento + ó - de manera arbitraria para cada k).

(3) Austin [2] prueba que si X es una martingala L^1-acotada entonces

$$S(X) = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} Y_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty \quad \text{c.d.}$$

Pero J. L. Doob Bibliografía [16] sugiere la siguiente prueba alternativa (que utiliza el teorema 1) de éste hecho.

DEMOSTRACION:

Sea $Z=(Z_1 Z_2, \dots)$ la transformación de una martingala L^1-acotada $X=(X_1, X_2, \dots)$ bajo la sucesión $V=(V_1 V_2, \dots)=(0, X_1, X_2, \dots)$ entonces

$$Y_1 = X_1$$

$$Y_k = (X_k - X_{k-1}) \quad k \geq 2$$

$$Z_n = 0 \cdot X_1 + X_1 \cdot Y_2 + \cdots + X_{n-1} \cdot Y_n$$

$$= X_1(X_2 - X_1) + X_2(X_3 - X_2) + \cdots + X_{n-1}(X_n - X_{n-1}) \quad \forall n$$

Pero

$$\sum_{k=1}^{n} Y_k^2 = X_1^2 + \sum_{k=2}^{n} (X_k - X_{k-1})^2 = X_1^2 + \sum_{k=2}^{n} (X_k^2 - 2 X_k X_{k-1} + X_{k-1}^2)$$

$$= X_1^2 + \sum_{k=2}^{n} X_k^2 - 2 \sum_{k=2}^{n} X_k X_{k-1} + \sum_{k=2}^{n} X_{k-1}^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n} X_k^2-2\sum_{k=1}^{n-1} X_{k+1}X_k+\sum_{k=1}^{n-1} X_k^2$$

$$=X_n^2+2\sum_{k=1}^{n-1} X_k^2-2\sum_{k=1}^{n-1} X_{k+1}X_k$$

$$=X_n^2-2\left\{\sum_{k=1}^{n-1} X_{k+1}X_k-\sum_{k=1}^{n-1} X_k^2\right\}=X_n^2-2\sum_{k=1}^{n-1} X_k(X_{k+1}-X_k)$$

$$=X_n^2-2Z_n$$

i.e. $S_n^2(X)=X_n^2-2Z_n$ c.d. $\forall n$

Ahora usando que X es L^1-acotado y en virtud del lema 4.1.4 si $X^*=\operatorname{Sup}|X_n|$ se tiene que $P[X^*<\infty]=1$ es decir X^* es finita c.d. y como Z es la transformación de X bajo $V=(0,X_1,X_2,....)$ el teorema 1 nos dice que $Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \eta_1$ c.d. con $\eta_1 \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$.

Por otra parte por el teorema 3.4.

$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \eta_2$ c.d. $\eta_2 \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ $\therefore$ $X_n^2 \longrightarrow \eta_2^2$ c.d. y como η_2 es finita c.d.

$\Rightarrow$ η_2^2 es finita c.d.

$\therefore$ $S_n^2(X) \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi$ c.d. con ξ finita c.d.

(4) Debido a 2.2.6.2 en las hipótesis de 4.2 se puede cambiar $\operatorname{Sup}_n E[X_n^-]<+\infty$ por L^1-acotado.

4.3. TEOREMA 2:

Si X es una martingala tal que $ES(X)<\infty$ $\left(S(X)=\left\{\sum_{k=1}^{\infty} Y_k^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right)$ entonces X converge c.d.

DEMOSTRACION:

Sean $R_1, R_2, \ldots$ las funciones de Rademacher (Apéndice II) en el intervalo (0,1).

Sus propiedades relevantes son:

(i) Toman +1 y -1 como valores posibles.

(ii) $\int_0^1 R_n(x)R_m(x)dx=\begin{cases}0 & n\neq m\\ 1 & n=m\end{cases}$

(iii) $\int_0^1 R_n(x)dx=0 \quad \forall n\geq 1$

Para cada $t\in[0,1]$ fija se tiene que $\left\{\sum_{k=1}^{n} R_k(t)Y_k, \mathcal{F}_n\right\}_{n\geq 1}$ es martingala ya que para cada $t\in[0,1]$ fija $R_k(t)=\pm 1$ $\forall k\geq 1$ y se tiene la observación 4.1.1.

Se concluye entonces usando 2.2.4.a que

$\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} R_k(t)Y_k\right|, \mathcal{F}_n\right\}_{n\geq 1}$ es submartingala y por tanto (2.2.5.1)

$E\left|\sum_{k=1}^{n+1} R_k(t)Y_k\right|\geq E\left|\sum_{k=1}^{n} R_k(t)Y_k\right|$. . . . .T.2.a $\quad \forall n\in\mathbb{N}$

Ahora consideramos los espacios de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},P)$ y $((0,1), B(0,1), \lambda\text{-Lebesgue})$, P y λ son medidas de probabilidad ($\therefore$ son medidas σ-finitas).

Si $\Omega^1=\Omega_x(0.1)$ $\mathcal{F}^1=\mathcal{F}_x B(0,1)=\sigma\{A|A=B\times C: B\in\mathcal{F}, C\in B(0,1)\}$ entonces se cumplen las hipótesis de los teoremas de la <u>medida producto</u> y <u>Fubini</u> (ver bibliografía [0], páginas 97-103)

$\therefore$ $\exists\mu$ (medida de probabilidad) en $\mathcal{F}^1$ t.q.

$$\mu(B\times C)=\int_B \mu(\omega,c)\,dP(\omega) \quad \mu(\omega,c)=\lambda(c) \quad \forall\omega\in\Omega$$

tomando $f:\Omega^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(t,\omega)=\left|\sum_{k=1}^{n} R_k(t)Y_k(\omega)\right|$$

se tiene que

$$R_k(t):((0,1),B(0,1)) \longrightarrow (\mathbb{R},B(\mathbb{R}))$$

$$Y_k(\omega):(\Omega,\mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R},B(\mathbb{R}))$$

$$\therefore\ (R_k(t),Y_k(\omega)):(\Omega^1,\mathcal{F}^1) \longrightarrow (\mathbb{R}^2,B(\mathbb{R}^2))$$

Si ahora componemos con $g(x_1,x_2)=x_1x_2$

$(g:(\mathbb{R}^2,B(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow (\mathbb{R},B(\mathbb{R}))$ por ser continua)

$$g\circ(R_k,Y_k)(t,\omega)=R_k(t)Y_k(\omega):(\Omega^1,\mathcal{F}^1) \longrightarrow (\mathbb{R},B(\mathbb{R}))$$

$$\therefore\ f(t,\omega):(\Omega^1,\mathcal{F}^1) \longrightarrow (\mathbb{R},B(\mathbb{R}))$$

Se concluye por Fubini que para

$\omega\in\Omega$ $\displaystyle\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{n} R_k(t)Y_k(\omega)\right| dt$ existe y es t.q.

$$\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{n} R_k(t)\,Y_k(\omega)\right| dt:\ (\Omega,\mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R},B(\mathbb{R}))$$

Análogamente para $t\in(0,1)$

$$E\left|\sum_{k=1}^{n} R_k(t)\,Y_k(\omega)\right| = \int_\Omega \left|\sum_{k=1}^{n} R_k(t)\,Y_k(\omega)\right| dP: ((0,1),B(0,1)) \longrightarrow (\mathbb{R},B(\mathbb{R}))$$

y como

$$\int_{\Omega^1} f\,d\mu \leq \int_{\Omega^1} \sum_{k=1}^{n} |Y_k|\,d\mu = \int_\Omega \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} |Y_k|\,dt\,dP$$

$$= E\sum_{k=1}^{n} |Y_k| = \sum_{k=1}^{n} E|Y_k| < \infty \quad \text{ya que } Y_k \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)\ \forall k$$

$$\therefore \int_{\Omega^1} f\,d\mu = \int_0^1 \int_\Omega f(t,\omega)\,dP\,dt = \int_\Omega \int_0^1 f(t,\omega)\,dt\,dP. \ . \ . \ . \ . \ .T.2.b$$

Por otra parte

$$E\left\{\left\{\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{n} R_k(t)\,Y_k(\omega)\right|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}\right\} =$$

$$E\left\{\left\{\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} R^2_k(t)\,Y^2_k(\omega) + \sum_{i\neq j} R_i(t)R_j(t)\,Y_i(\omega)Y_j(\omega)\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}\right\} =$$

$$E\left\{\left\{\sum_{k=1}^{n} (Y^2_k(\omega)\int_0^1 R^2_k(t)\,dt) + \sum_{i\neq j} Y_i(\omega)Y_j(\omega)\int_0^1 R_i(t)\,R_j(t)\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}\right\} =$$

$$E\left\{\left\{\sum_{k=1}^{n} (Y^2_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\right\}$$

(usado las propiedades (i), (ii) y (iii))

$$\therefore\ E\left\{\left\{\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{n}R_k(t)\,Y_k(\omega)\right|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}\right\}=ES_n(X)\leqslant ES(X)<\infty\ .\ .\ .\ .\ t.2.c$$

$$\therefore\ \left(\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{n}R_k(t)\,Y_k(\omega)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}:(\Omega,\mathcal{F})\longrightarrow(\mathbb{R},B(\mathbb{R}))$$

es finita c.d.

(Se puede entonces decir que $\left|\sum_{k=1}^{n}R_k(t)\,Y_k(\omega)\right|\in L^2((0,1),B(0,1),\lambda)$ P-c.d.)

Entonces de la observación 1.4.2 podemos obtener

$$\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{n}R_k(t)\,Y_k(\omega)\right|dt\leqslant\left\{\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{n}R_k(t)\,Y_k(\omega)\right|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}\quad P\ c.d.$$

y por tanto

$$E\left\{\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{n}R_k(t)\,Y_k(\omega)\right|dt\right\}\leqslant E\left\{\left\{\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{n}R_k(t)\,Y_k(\omega)\right|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}\right\}$$

entonces usando T.2.b, T.2.c y la última desigualdad

$$\int_0^1 E\left|\sum_{k=1}^{n}R_k(t)\,Y_k\right|dt=E\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{n}R_k(t)\,Y_k(\omega)\right|dt\leqslant E\left\{\left\{\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{n}R_k(t)\,Y_k\right|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$=ES_n(X)\leqslant ES(X)$$

entonces aplicando el teorema de convergencia monótona a la sucesión no decreciente (T.2.a) de funciones $\left\{E\left|\sum_{k=1}^{n}R_k(t)\,Y_k\right|\right\}_n$ se obtiene

$$\int_0^1 \operatorname{Sup}_n E\left|\sum_{k=1}^{n} R_k(t)\, Y_k\right| dt \leq ES(X) < \infty$$

de donde debe existir $t \in (0,1)$ t.q.

$$\operatorname{Sup}_n E\left|\sum_{k=1}^{n} R_k(t)\, Y_k\right| \leq ES(X) < \infty$$

$\therefore$ para ésta t $\left\{\sum_{k=1}^{n} R_k(t) Y_k, \mathcal{F}_n\right\}_{n \geq 1}$ es una martingala L^1-acotada sea

$$g_n = \sum_{k=1}^{n} R_k(t)\, Y_k$$

Ahora si tomamos $V_k = R_k(t) \quad k=1,2,3,\ldots.$

$$g_n - g_{n-1} = R_n(t)\, Y_n$$

$$V_n(g_n - g_{n-1}) = R^2_n(t)\, Y_n = 1 \cdot Y_n = Y_n$$

$$\sum_{k=1}^{n} V_k(g_k - g_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} Y_k = X_n$$

i.e. X es la transformación de la martingala L^1-acotada g bajo la sucesión $V_1, V_2, \ldots.$ ($V_k = \pm 1\ \forall k$) $\therefore$ usando el teorema 1 X converge c.d.

4.4. TEOREMA 3:

Si $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(W_n, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ son martingalas y si $X=(X_1, X_2, \ldots)$ es L^1-acotada con $S_n(W) \leq S_n(X)\ \forall n$ entonces W converge c.d.

DEMOSTRACION:

Sea $c>0$ y $\tau(\omega)=\begin{cases}\inf\{n:|X_n(\omega)|\geq c \text{ ó } S_n(X(\omega))\geq c\} \\ \infty \quad \text{si } \{n:|X_n(\omega)|\geq c \text{ ó } S_n(X(\omega))\geq c\}=\emptyset\end{cases}$

entonces τ es t.d.p. c.r.a $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ ya que

$[\omega:\tau(\omega)=k]=[\omega:|X_k(\omega)|\geq C \text{ ó } S_k(X(\omega)\geq C]\bigcap\bigcup_{n=1}^{k-1}[|X_n|<C$ y $S_n(X)<C$ y para $n=1,2,\ldots.k-1$

$[|X_n|<c;\ S_n(X)<c]\in\mathcal{F}_n\subset\mathcal{F}_k$

y

$[|X_k|\geq c \text{ ó } S_k(X)\geq c]\in\mathcal{F}_k \quad \therefore \quad [\tau=k]\in\mathcal{F}_k \quad \forall k$

entonces:

(i) Si $\omega\in[\tau<\infty]$

$\Rightarrow A=\{n:|X_n(\omega)|\geq c \text{ ó } S_n(X(\omega))\geq c\}\neq\emptyset$

si $\tau(\omega)=\inf A$ entonces para $k=1,2,\ldots,\tau(\omega)-1$

$S_k(X(\omega))<c$ y $|X_k(\omega)|<c$

$(\omega\in[\tau<\infty]\Rightarrow k=1,2,\ldots.\tau(w)-1 \quad S_k(W(\omega))\leq S_k(X(\omega)<c))$

$$\Rightarrow S_{\tau(\omega)-1}(X(\omega))=\left\{\sum_{k=1}^{\tau(\omega)-1} Y_k^2(\omega)\right\}^{\frac{1}{2}}<c$$

entonces como $\tau_n(\omega)=\begin{cases} n & \text{si } \tau(\omega)>n \\ \tau(\omega) & \text{si } \tau(\omega)\leq n \end{cases}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \tau_n(\omega)=\tau(\omega)$ y $\tau_n\leq\tau_{n+1}$ c.d. $\forall n$

Por el lema de Fatou

$$\int_{[\tau<\infty]}|X_\tau|dp\leq \liminf_n \int_{[\tau<\infty]}|X_{\tau_n}|dp \quad . \; . \; . \; . \; (I)$$

Pero

$$\liminf_n \int_{[\tau<\infty]}|X_{\tau_n}|dp\leq \liminf_n E|X_{\tau_n}|\leq \operatorname{Sup} E|X_{\tau_n}| \; . \; . \; . \; . \; .(II)$$

además como $(X_n,\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ es martingala de 2.2.5.1(b) $(|X_n|,\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ es submartingala y por tanto

$$E|X_n|\leq E|X_m| \text{ si } m\geq n \quad (\tau_n=\tau\wedge n\leq n)$$

entonces $E|X_{\tau_n}|\leq E|X_n|$ y concluimos que

$$\operatorname{Sup}_n E|X_{\tau_n}|\leq \operatorname{Sup}_n E|X_n| \; . \; . \; . \; . \; .(III)$$

de I, II y III

$$\int_{[\tau<\infty]}|X_\tau|dp\leq \operatorname{Sup}_n E|X_n|<\infty \quad (\text{ya que } \{X_n\}_{n\geq 1} \text{ es } L^1\text{-acotado})$$

por último

$$\int_{[\tau=\infty]} |X_\tau| dp < \int_{[\tau=\infty]} c\ dP = c\ P[\tau=\infty]$$

$\therefore\ E|X_\tau| < \infty$

Usando (i), (ii) y (iii) podemos concluir que

$E\{S_\tau(X)\} < \infty$

$(\therefore\ E\{S_\tau(W)\} < \infty)$

Ahora sea $\hat{W}_n = W_{\tau_n}$ $\forall n$ entonces como

$\tau_{n_1} \leq \tau_{n_2} = \tau \wedge n_2 \leq n_2 \quad \forall\ n_1 \leq n_2$

por el teorema 3.1 $(\hat{W}_n, \mathcal{F}_{\tau_n})_{n=1}^{\infty}$ es una martingala.

Además

$$S(\hat{W}) = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \hat{W}_k - \hat{W}_{k-1} \right\}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ W_{\tau_k} - W_{\tau_{k-1}} \right\}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{ \sum_{k=1}^{\tau} \left\{ W_{\tau_k} - W_{\tau_{k-1}} \right\}^2 + \sum_{k>\tau} \left\{ W_{\tau_k} - W_{\tau_{k-1}} \right\}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{ \sum_{k=1}^{\tau} \left\{ W_{\tau_k} - W_{\tau_{k-1}} \right\}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

(ya que la segunda suma antes de la igualdad se anula debido a la definición de τ_k).

Pero

$$\left\{\sum_{k=1}^{\tau}\{W_{\tau_k}-W_{\tau_{k-1}}\}^2\right\}^{\frac{1}{2}}=\left\{\sum_{k=1}^{\tau}\{W_k-W_{k-1}\}^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

nuevamente de la definición de τ_k luego

$$S(\hat{W})=S_\tau(W)\leq S_\tau(X)$$

(usando la hipótesis $S_n(W)\leq S_n(X)\ \forall n\geq 1$).

Pero como $E\,S_\tau(X)<+\infty$

$\Rightarrow$ $E\,S(\hat{W})<+\infty$ y por el teorema 2 (4.3)

$\{\hat{W}_n\}_{n\geq 1}$ converge c.d. ($\lim_{n\to\infty}\hat{W}_n=\xi$; $\xi\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$)

Observamos ahora que sobre el conjunto $[\omega:X^*<c;\ S(X)<c]$ se tiene que $\tau(\omega)=+\infty$ y por tanto

$$\hat{W}_n(\omega)=W_{\tau n}(\omega)=W_n(\omega)$$

Por otra parte se tiene que como X es L^1-acotado de la observación 4.2.1.3 S(X) es finita c.d. y del lema 4.1.4 X^* es finita c.d. también.

i.e. $P[X^*<+\infty]=1$ y $P[S(X)<+\infty]=1$

$\therefore$ $P[X^*<+\infty\,;S(X)<+\infty]=1$

y si $\omega\in[X^*<+\infty\,;S(X)<+\infty]$

$\Rightarrow$ $\exists c\in Q^+$ t.q.

$X^*(\omega)<c$ y $S(X)<c$

i.e. $\hat{W}_n = W_n \quad \forall \omega \in [X^* < +\infty ; S(X) < +\infty]$

$\therefore \{W_n\}_{n \geq 1}$ converge c.d.

APENDICE

APENDICE

A.I. σ-álgebras:

I.1. DEFINICION: Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a. definidas en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se define $\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ = la σ-álgebra generada por

$$\mathcal{C} = \left\{ \{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \leq x_1 ; X_2(\omega) \leq x_2 ; \cdots ; X_n(\omega) \leq x_n\} \,\middle|\, x_i \in \mathbb{R} \quad i = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

($\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ = "la mínima σ-álgebra que hace medibles a las variable aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$")

I.1.1. OBSERVACIONES:

(i) $\sigma(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k}) \subset \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ $\forall (i_1, i_2, \ldots, i_k) \subset \{1, 2, \ldots, n\}$

DEMOSTRACION:

Hay que verificar que $Z_1(\omega) = (X_{i_1}(\omega), X_{i_2}(\omega), \ldots, X_{i_k}(\omega))$ es $\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ medible.

Sea $B \in \mathbb{B} = \left\{ (-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \cdots \times (-\infty, x_k] / (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k \right\}$

$$(\mathbb{B} \subset B(\mathbb{R}^k) \text{ y } \sigma(\mathbb{B}) = B(\mathbb{R}^k)).$$

Sean

$$\mathbb{K} = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$$

y

$$Z(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega))$$

entonces:

$$Z_1^{-1}(B)=\{\omega\in\Omega / X_{i_1}\in(-\infty,x_1];\dots;X_{i_k}\in(-\infty,x_k]\}$$

$$=\bigcap_{j=1}^{k} X_{i_j}^{-1}((-\infty,x_j])=\bigcap_{j=1}^{k} X_{i_j}^{-1}((-\infty,x_j])\bigcap\Omega$$

$$=\bigcap_{j=1}^{k} X_{i_j}^{-1}((-\infty,x_j])\bigcap\bigcap_{i\in|K} X_i^{-1}(\mathbb{R})=Z^{-1}(A) \quad \text{con}$$

$$A\in B(\mathbb{R}^n)\left(A=\prod_{i=1}^{n} C_i \ ; \ C_i=(-\infty,x_k] \ i\notin|K ; \ C_i=\mathbb{R} \ i\in|K\right)$$

y por definición de $\sigma(X_1,\dots,X_n)$

$$Z^{-1}(A)\in\sigma(X_1,X_2,\dots,X_n)$$

$$\therefore \quad Z_1^{-1}(B)\in\sigma(X_1,X_2,\dots,X_n) \quad \forall B\in|B$$

$$\therefore \quad \{Z_1^{-1}(B)/B\in|B\}\subset\sigma(X_1,\dots,X_n)$$

$\Rightarrow$ $Z_1(\omega)$ es $\sigma(X_1,\dots,X_n)$ - medible

$\Rightarrow$ $\sigma(X_{i_1},X_{i_2},\dots,X_{i_k})\subset\sigma(X_1,X_2,\dots,X_n)$

(ii) $\sigma(X_1,X_2,\dots,X_n)=\sigma\left(\bigcup_{k=1}^{n}\sigma(X_k)\right)$

DEMOSTRACION:

($\supset$) Como $\sigma(X_K)\subset\sigma(X_1,X_2,\dots,X_n)$ $\forall k$

$\Rightarrow$ $\bigcup_{k=1}^{n}\sigma(X_k)\subset\sigma(X_1,X_2,\dots,X_n)$

$$\Rightarrow \quad \sigma\left(\bigcup_{k=1}^{n} \sigma(X_k)\right) \subset \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

(ii) $(\subset)$

Sea

$$B \in \mathbb{B} = \left\{ \prod_{j=1}^{n} (-\infty, x_j] \,/\, x_j \in \mathbb{R} \quad j=\overline{1,n} \right\}$$

$$Z^{-1}(B) = \{\omega : X_1(\omega) \in (-\infty, x_1]; \ldots ; X_n(\omega) \in (-\infty, x_n]\}$$

$$= \bigcap_{j=1}^{n} X_j^{-1}((-\infty, x_j])$$

Pero

$$X_j^{-1}((-\infty, x_j]) \in \sigma(X_j) \subset \bigcup_{j=1}^{n} \sigma(X_j) \subset \sigma\left\{\bigcup_{j=1}^{n} \sigma(X_j)\right\} \quad \forall j \quad 1 \leq j \leq n$$

$$\therefore \quad \bigcap_{j=1}^{n} X_j^{-1}((-\infty, x_j]) \in \sigma\left\{\bigcup_{j=1}^{n} \sigma(X_j)\right\}$$

$$\therefore \quad (X_1, \ldots, X_n) \text{ es } \sigma\left\{\bigcup_{i=1}^{n} \sigma(X_i)\right\}\text{-medible}$$

$$\therefore \quad \sigma(X_1, \ldots, X_n) \subset \sigma\left\{\bigcup_{i=1}^{n} \sigma(X_i)\right\}$$

I.2. DEFINICION:

Sea $\{X_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de v.a. definidas en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Sea $n \geq 1$ y para la sucesión de σ-álgebras:

$$\sigma(X_n) \subset \sigma(X_n, X_{n+1}) \subset \sigma(X_n, X_{n+1}, X_{n+2}) \subset \ldots\ldots$$

tomamos

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+k})$$

y denotamos

$$\sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots) = \sigma\left\{\bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+k})\right\}$$

Ahora para la sucesión decreciente de σ-álgebras:

$$\sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots) \supset \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots) \supset \ldots\ldots$$

escribimos

$$T = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$$

T se conoce como la "σ-álgebra cola" de la sucesión $\{X_n\}_{n\geq 1}$. Un evento $A \in T$ se llama "evento cola" y cualquier función de Ω a $\mathbb{R}$ que se T-medible se llama "función cola".

I.2.1. OBSERVACIONES:

(i) P.d. $\lim_n \inf X_n \quad \lim_n \operatorname{Sup} X_n$ son funciones cola

DEMOSTRACION:

$$\lim_n \inf X_n(\omega) = \operatorname*{Sup}_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} X_k(\omega)$$

Sea

$$Y_n(\omega) = \inf_{k \geq n} X_k(\omega) \ \forall n,$$

entonces

$$[Y_n < x] = \{\omega : Y_n(\omega) \in (-\infty, x)\} = \bigcup_{k \geq n} [\omega : X_k < x]$$

pero

$$[\omega : X_k(\omega) < x] \in \sigma(X_k) \subset \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots) \quad \forall\, k \geq n$$

$$\therefore \quad Y_n \text{ es } \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)\text{-medible} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \ldots (1)$$

Se tiene además que:

$$Y_n(\omega) = \inf_{k \geq n} X_k(\omega) \leq Y_{n+1}(\omega) = \inf_{k \geq n+1} X_k(\omega) \quad \text{c.d.}$$

$$\therefore \quad \lim_n \inf X_n(\omega) = \operatorname{Sup}_{n \geq 1} Y_n(\omega) = \operatorname{Sup}_{n \geq i} Y_n(\omega) \qquad \forall\, i \geq 1$$

pero si

$$X^i(\omega) = \operatorname{Sup}_{n \geq i} Y_n(\omega) \quad \forall i$$

$$[X^i < x] = \{\omega : X^i(\omega) \in (-\infty, x)\} = \bigcap_{n \geq i} [Y_n < x]$$

y por (1)

$$\{\omega : Y_i(\omega) < x\} \in \sigma(X_i, X_{i+1}, \ldots)$$

Ahora como

$\sigma(X_k, X_{k+1}, \ldots) \supset \sigma(X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots) \quad \forall k$

$\{\omega: Y_{i+1} < x\} \in \sigma(X_i, X_{i+1}, \ldots)$

$\vdots$

$\{\omega: Y_n(\omega) < x\} \in \sigma(X_i, X_{i+1}, \ldots)$

$\vdots$

$\forall\ n \geq i$

$\therefore \bigcap_{n \geq i} [Y_n < x\} \in \sigma(X_i, X_{i+1}, \ldots)$

$\therefore \quad X^i(\omega) = \mathit{lim}_n \inf X_n(\omega)$ es $\sigma(X_i, X_{i+1}, \ldots)$-medible $\quad \forall\, i \geq 1$

$\therefore \quad \mathit{lim}_n \inf X_n$ es T-medible.

Análogamente se puede probar que $\mathit{lim}_n \operatorname{Sup} X_n$ es T-medible.

(ii) Como consecuencia de (i) en caso de existir $\mathit{lim}_n X_n$ también es función cola.

(iii) Sean $\{X_n\}_n$ una sucesión de v.a. y $\{\mathcal{F}_n\}_n$ una sucesión de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$, tales que:

(1) X_n es $\mathcal{F}_n$-medible $\forall n$ $\left(\{X_n\}_n \text{ es un proceso adaptado a } \{\mathcal{F}_n\}_n\right)$.

(2) $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1} \quad \forall n$

entonces

$$X_\infty = \lim_n X_n \quad \text{es } \mathcal{F}_\infty = \sigma\{\bigcup_{\mathbb{N}} \mathcal{F}_n\}\text{-medible.}$$

DEMOSTRACION:

Como X_∞ es T-medible

$\Rightarrow$ X_∞ es $\sigma(X_1, X_2, \ldots) = \sigma\{\bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma\{X_1, X_2, \ldots, X_{k+1}\}\}$-medible

además X_n es $\mathcal{F}_n$-medible $\Rightarrow$ es $\mathcal{F}_{n+1}$-medible

$\Rightarrow$ $\sigma(X_1, X_2) \subset \mathcal{F}_2$

$\sigma(X_1, X_2, X_3) \subset \mathcal{F}_3$

$\vdots$

$\therefore$ $\bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_{k+1}) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_k$

$\therefore$ $\sigma\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma\{X_1, X_2, \ldots, X_{k+1}\}\right) \subseteq \sigma\{\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_k\}$

$\therefore$ X_∞ es $\mathcal{F}_\infty$-medible.

I.3. Un resultado útil:

Sea $\xi_1, \xi_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias y para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo sea $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación $B(R^n)$-medible e invertible con inversa T^{-1} $B(\mathbb{R}^n)$-medible tal que $(X_1, \ldots, X_n)(\omega) = T(\xi_1, \ldots, \xi_n)(\omega)$ entonces $\sigma(X_1, \ldots, X_n) = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$

DEMOSTRACION:

$$(\Omega,\mathcal{F})\xrightarrow[(X_1,\dots,X_n)]{(\xi_1,\dots,\xi_n)}(\mathbb{R}^n,B(\mathbb{R}^n))\xrightarrow{T}(\mathbb{R}^n,B(\mathbb{R}^n))$$

$$\sigma(\xi_1,\dots,\xi_n)=\left\{\{\omega:(\xi_1(\omega),\dots,\xi_n(\omega))\in B\}/B\in B(\mathbb{R}^n)\right\}$$

$$\sigma(X_1,\dots,X_n)=\left\{\{\omega:(X_1,\dots,X_n)\in B\}/B\in B(\mathbb{R}^n)\right\}$$

$$\sigma(T)=\left\{\{(y_1,y_2,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n/T(y_1,y_2,\dots,Y_n)\in B\}/B\in B(\mathbb{R}^n)\right\}$$

Si $A\in\sigma(X_1,\dots,X_n)\Rightarrow\exists\, B\in B(\mathbb{R}^n)$ con $A=\{\omega:(X_1,\dots,X_n)(\omega)\in B\}$

$$A=\{\omega:T(\xi_1(\omega),\dots,\xi_n(\omega))\in B\}=(\xi_1,\dots,\xi_n)^{-1}(T^{-1}B))$$

$=\{\omega:(\xi_1,\dots,\xi_n)(\omega)\in T^{-1}(B)\}$ y como T es $B(\mathbb{R}^n)$-medible

$T^{-1}(B)\in B(\mathbb{R}^n)$ $\quad\therefore\quad A\in\sigma(\xi_1,\dots,\xi_n)$

Por otra parte usando que $(\xi_1,\dots,\xi_n)(\omega)=T^{-1}(X_1,\dots,X_n)$ con T^{-1} $B(\mathbb{R}^n)$-medible se puede probar que

$$\sigma(\xi_1,\dots,\xi_n)\subset\sigma(X_1,\dots,X_n).$$

Un caso particular del resultado anterior es el siguiente:

$\xi_1,\xi_2,\dots$ suc. de v.a. y sea $X_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$

entonces podemos definir $T:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ t.q. $T(\xi_1,\dots,\xi_n)=(X_1,\dots,X_n)$ si asociamos una matríz a T lo anterior podría escribirse:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \quad \text{para cada } \omega\in\Omega$$

como toda transformación lineal entre dos espacios vectoriales de dimensión finita es continua, se tiene que T es $B(\mathbb{R}^n)$-medible. Además $|T|=1$ por lo que T es no singular y entonces existe T^{-1} siendo ésta también $B(\mathbb{R}^n)$-medible.

A.II. Las funciones de Rademacher:

Sean $X_1, X_2, \ldots$ v.a. independientes e indénticamente distribuidas con $P[X_n = i] = 1/r$, $i = 0, 1, \ldots, r-1$, si definimos $X = \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} X_n$. Entonces X es el número en el intervalo $[0,1]$ con expansión r-ádica $0.X_1X_2\ldots$

$$X_1 : \Omega \longrightarrow \{0,1,\ldots,r-1\}$$
$$X_2 : \Omega \longrightarrow \{0,1,\ldots,r-1\}$$
$$\vdots$$

y se tiene que $0 \leq \sum_{k=1}^{n} r^{-k} X_k \leq (r-1) \sum_{k=1}^{n} r^{-k} = (r-1)\left\{\frac{1 - 1/r^n}{r-1}\right\}$

$= 1 - 1/r^n$ c.d. $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\therefore \quad X = \sum_{k=1}^{\infty} r^{-k} X_k : \Omega \longrightarrow [0,1]$$

Se tiene que $X_k \sim$ Uniforme $\{0,1,2,\ldots,r-1\}$ $k = 1,2,3\ldots$

$$\Rightarrow \quad P\left[\frac{1}{r^k} X_k = {}^{i}/_{r^k}\right] = 1/r \qquad i \in \{0,1,2,\ldots,r-1\} \quad k = 1,2,\ldots$$

$$\therefore \quad 1/r^k\, X_k \sim \text{Uniforme}\left\{0, 1/r^k, 2/r^k, \ldots \frac{r-1}{r^k}\right\}$$

Para hallar la distribución de $Y_2 = \sum_{k=1}^{2} r^{-k} X_k$ podemos ver que sucede con la función característica de Y_2

$$\Phi_{r^{-k} X_k}(t) = E(e^{itX}) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{r} e^{it\, k/r^k}$$

Así

$$\Phi_{y_2}(t) = \Phi_{\sum_{k=1}^{2} r^{-k} X_k}(t) = \left\{\Phi_{r^{-1}X_1}(t)\right\} \cdot \left\{\Phi_{r^{-2}X_2}(t)\right\}$$

$$= \left\{ \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{r} e^{it\,k/r} \right\} \cdot \left\{ \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{r} e^{it\,k/r^2} \right\} = \frac{1}{r^2} \sum_{k=0}^{r^2-1} e^{it\,k/r^2}$$

$$\therefore \quad Y_2 \sim \text{Uniforme } \left\{0, 1/r^2, 2/r^2, \ldots, \frac{r^2-1}{r^2}\right\}$$

De manera inductiva se puede ver que

$$Y_n \sim \text{Uniforme } \left\{0, 1/r^n, 2/r^n, \ldots \frac{r^n-1}{r^n}\right\}$$

entonces

$$F_{Y_n}\left(k/r^n\right) = P[Y_n \leq k/r^n] = \sum_{i=0}^{k} P[Y_n = i/r^n] = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{r^n} = \frac{k+1}{r^n}$$

y se tiene que:

$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/r^n & 0 \leq x < 1/r^n \\ 2/r^n & 1/r^n \leq x < 2/r^n \\ \vdots & \\ \frac{k+1}{r^n} & k/r^n \leq x < \frac{k+1}{r^n} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{r^n-1}{r^n} & \frac{r^n-2}{r^n} \leq x < \frac{r^n-1}{r^n} \\ 1 & \frac{r^n-1}{r^n} \leq x \end{cases}$$

ó equivalentemente

$$F_{Y_n}(x)=\left[\begin{array}{ll} 0 & x<0 \\ 0.00\ldots.01 & 0\leq x<0.00\ldots.01 \\ 0.00\ldots.02 & 0.00\ldots.01\leq x<0.00\ldots.02 \\ \vdots & \vdots \\ 0.i_0 i_1\ldots.i_n & 0.k_1 k_2\ldots.k_n\leq x<0.i_0 i_1\ldots.i_n \\ \vdots & \vdots \\ 0.r-1,r-1,\ldots.,r-1 & 0.r-1,r-1,\ldots.,r-2\leq x<0.r-1,r-1,\ldots.,r-1 \\ 1 & 0.r-1,r-1,\ldots.,r-1\leq x \end{array}\right.$$

en donde todas las expresiones tienen n cifras y están expresadas en base r, además $0.i_0 i_1\ldots.i_n - 0.k_1 k_2\ldots.k_n = 0.00\ldots.1$

Así por ejemplo si n=2 r=3

$$F_{Y_n}(x)=\left[\begin{array}{ll} 0 & x<0 \\ 0.01 & 0\leq x<0.01 \\ 0.02 & 0.01\leq x<0.02 \\ 0.10 & 0.02\leq x<0.10 \\ 0.11 & 0.10\leq x<0.11 \\ 0.12 & 0.11\leq x<0.12 \\ 0.20 & 0.12\leq x<0.20 \\ 0.21 & 0.20\leq x<0.21 \\ 0.22 & 0.21\leq x<0.022 \\ 1 & 0.22\leq x \end{array}\right.$$

Ahora sea $\varepsilon>0$ y sea $N\in\mathbb{N}$ t.q. $\frac{1}{r^N}<\varepsilon$ entonces para $x\in(0,1)$ $x=i_1 i_2 \ldots i_N\, i_{N+1}\ldots$

$\Rightarrow$ (i) Si $\exists\ i_k$ t.q. $i_k\neq r-1\quad k\geq N+1$

$\Rightarrow\quad 0.i_1 i_2\ldots i_N \leq x < 0.i_1 i_2 \ldots i_N + 1{,}00\ldots 0$

$\Rightarrow\quad |x-F_{Y_n}(x)|=|(0.i_1 i_2\ldots i_N\, i_{N+1}\ldots)-(0.i_1 i_2 \ldots i_N+1)|<{}^1/_{r^N}<\varepsilon$

$\therefore$ Si $Y\sim$Uniforme $(0,1)$ $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} Y$ (convergencia en distribución)

Además como $\sum_{k=1}^{\infty} r^{-k}X_k\leq 1$ c.d. $\Rightarrow \exists A\in\mathcal{F}$ $P(A)=0$ t.q. si $\omega\notin A$ $\left(\sum_{k=1}^{\infty} r^{-k}X_k\right)(\omega)\leq 1$

$\therefore$ Si $\omega\notin A\quad \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} r^{-k}X_k\right)(\omega)=0$

i.e. $\sum_{k=n+1}^{\infty} r^{-k}X_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ c.d.

y como $P(\Omega)<1$ usando el teorema 1.3.2 se concluye que

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} r^{-k}X_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

en medida i.e.

$$P\left[\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} r^{-k}X_k\right|\geq\varepsilon\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \forall\varepsilon>0$$

i.e.

$$P\left[\left|\sum_{k=1}^{n} r^{-k}X_k-\sum_{k=1}^{\infty} r^{-k}X_k\right|\geq\varepsilon\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \forall\varepsilon>0$$

$$\therefore\quad Y_n=\sum_{k=1}^{n} r^{-k}X_k \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=1}^{\infty} r^{-k}X_k$$

en medida usando el teorema 1.3.7 se tiene que

$$Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \sum_{k=1}^{\infty} r^{-k} X_k$$

$$\therefore \quad X = \sum_{k=1}^{\infty} r^{-k} X_k \sim \text{Uniforme } (0,1) \ldots (\text{II}.1).$$

Ahora sean $x \in [0,1]$ y $R_n(x) = 2x_n - 1$, en donde x_n es el n-ésimo dígito de la expansión binaria de x entonces

$$\int_0^1 R_n(x)\,dx = \int_0^1 R_n(x)\,dP_X(x) = \int_\Omega R_n(X)\,dP = E[R_n(X)] = E[2X_n - 1] = 2E[X_n] - 1 = 0$$

ya que $R_n(x) \sim \text{Uniforme } \{-1,1\}\ \forall n.$ $(X_n \sim \text{Uniforme } \{0,1\})$

II.2 AFIRMACION:

$$\int_0^1 R_n(x) R_m(x)\,dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

DEMOSTRACION:

Como $\forall n,m \in \mathbb{N}$ $(n \neq m)$ X_n y X_m son v.a. independientes e i.d.
$\Rightarrow R_n(X) = 2X_n - 1$ y $R_m(X) = 2X_m - 1$ son v.a. independientes e i.d.

$\Rightarrow$ Si $n \neq m$ $E[R_n(x) \cdot R_m(x)] = E[R_n(x)] \cdot E[R_m(x)] = 0$

Si $n = m$ $R_n(x) \cdot R_n(x) = \{R_n(x)\}^2 \equiv 1$

A la funciones $R_n(x)$ se les llama las funciones de Rademacher.

(Nota: De hecho se puede probar que $(R_1(x), R_2(x), \ldots.)$ forman un conjunto ortonormal en $L^2((0,1), B(0,1), \lambda))$.

A III Probamos aquí dos resultados útiles

III.1 Sean $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espacio de probabilidad y $Y \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ $Y \geq 0$ c.d. entonces

$$\int_{[Y\geq M]} YdP = \int_\Omega YdP + M\cdot P[Y\geq M] - \int_\Omega [Y\wedge M]dP$$

DEMOSTRACION:

$$\infty > \int_\Omega YdP = \int_{[Y<M]} YdP + \int_{[Y\geq M]} YdP$$

$$\Rightarrow \int_{[Y\geq M]} YdP = \int_\Omega YdP - \int_{[Y<M]} YdP \quad \cdots (1)$$

$$\int_\Omega [Y\wedge M]dP = \int_{[Y\wedge M\geq M]} [Y\wedge M]dP + \int_{[Y\wedge M<M]} Y\wedge M\, dP$$

Pero $\omega\in[Y\wedge M\geq M] \Leftrightarrow (Y\wedge M)(\omega)\geq M \Leftrightarrow (Y\wedge M)(\omega)=M \Leftrightarrow Y(\omega)\geq M \Leftrightarrow \omega\in[Y\geq M]$

$$\therefore \int_{[Y\wedge M\geq M]} Y\wedge M\, dP = \int_{[Y\geq M]} Y\wedge M\, dP = \int_{[Y\geq M]} M\, dP = M\cdot P[Y\geq M]$$

Además $\omega\in[Y\wedge M<M] \Leftrightarrow (Y\wedge M)(\omega)<M \Leftrightarrow (Y\wedge M)(\omega)=Y(\omega) \Leftrightarrow Y(\omega)<M \Leftrightarrow \omega\in[Y<M]$

$$\therefore \int_{[Y\wedge M<M]} Y\wedge M\, dP = \int_{[Y<M]} Y\wedge M\, dP = \int_{[Y<M]} YdP$$

$$\therefore \quad \int_{\Omega}[Y\wedge M]\,dP = M\cdot P[Y\geq M]+\int_{[Y<M]} Y\,dP$$

$$\Rightarrow \quad \int_{[Y<M]} Y\,dP = \int_{\Omega}[Y\wedge M]\,dP - M\cdot P[Y\geq M]$$

substitiyendo en (1)

$$\int_{[Y\geq M]} Y\,dP = \int_{\Omega} Y\,dP + MP[Y\geq M] - \int_{\Omega}(Y\wedge M)\,dP$$

III.2. Si $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de v.a. $X_n\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ $\forall n$ y $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} X$ entonces

$$P[|X_n|\geq M] \xrightarrow[n\to\infty]{} P[|X|\geq M] \qquad \forall M\in\mathbb{R}^+\setminus S \quad \text{con } S\subset\mathbb{R}^+ \text{ numerable.}$$

DEMOSTRACION:

Como $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} X$ de 1.3.8 $|X_n| \xrightarrow{p} |X| \Rightarrow |X_n| \xrightarrow[n\to\infty]{d} |X|$ (convergencia en probabilidad implica convergencia en distribución)

$$\therefore \quad F_{|X_n|}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_{|X|}(x) \quad \forall x\in C_{F_{|X|}} \subset \mathbb{R}^+$$

$$F_Y(x)=P[Y\leq x] \quad C_{F_Y}=\{x: F_Y \text{ es continua en } x\}$$

$$\therefore \quad \{1-F_{|X_n|}(x)\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \{1-F_{|X|}(x)\} \quad \forall x\in C_{F_{|X|}}$$

$$\therefore \quad P[|X_n|>M] \xrightarrow[n\to\infty]{} P[|X|>M] \qquad \forall M\in C_{F_{|X|}}$$

Usaremos ahora un teorma cuya prueba puede encontrarse en el libro de Billingsley (Bibliografía [4] pág.11).

Teorema (Portmanteau)

Si P_n y P son medidas de probabilidad en $(\Omega,\mathcal{F})$ entonces son equivalentes:

(i) $P_n \Rightarrow P$ (P_n converge débilmente a P)

(ii) $\lim_n P_n(A)=P(A)$ $\forall A$ t.q. $P(\partial A)=0$ (∂A=frontera de A).

entonces si $A=\{M\}\in B(\mathbb{R})$ y $P(\partial A)=P_{|X|}(\partial A)=0$ (siempre que $M\in C_{F_{|X|}}$ y por tanto $P[|X|=M]=0$).

Aplicando el teorema de Portmanteau

$$\lim_n P[|X_n|=M]=\lim_n P_{|X_n|}(\{M\})=P_{|X|}(\{M\})=P(|X|=M)=0$$

$$\therefore\ P[|X_n|\geq M]\xrightarrow[n\to\infty]{}P[|X|\geq M]\quad \forall M\in C_{F_{|X|}}$$

Pero $S=\mathbb{R}^+\setminus C_{F_{|X|}}$ es a lo más numerable debido a que $F_{|X|}$ es función de distribución i.e. $C_{F_{|X|}}=\mathbb{R}^+\setminus S$ con S a lo más numerable y $P[|X_n|\geq M]\xrightarrow[n\to\infty]{}P[|X|\geq M]$ $\forall M\in\mathbb{R}^+\setminus S$.

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

[0] Robert B. Ash: "Real Analysis & Probability". Academic Press 1972.

[1] M. E. Caballero y B. Fernández: "Teoría Avanzada de la Probabilidad". Notas de clase.

[2] D. G. Austin: "A Sample Function Property of Martingales". Ann. Math Statist. 37 (1396-1397) 1966.

[3] Patrick Billingsley: "Probability & Measure". Wiley 1986.

[4] Patrick Billingsley: "convergence of Probability Measures" . Wiley 1968.

[5] Leo Breiman: "Probability". Addison-Wesley 1968,

[6] D. L. Burkholder: "Martingale Transforms". Ann. Math. Statist. 37 (1494-1504) 1966.

[7] D. L. Burkholder: "Maximal Inequalities as Necessary Conditions for Almost Everywhere Convergence". Wahrscheinlichkeits Theorie Verw. Gebiete 3 (75-88) 1964.

[8] G. Grabinsky S.: "Análisis Matemático III (Teoría de la Medida)". Comunicaciones Internas (163) Departamento de Matemáticas Facultad de Ciencias, UNAM 1988.

[9] K. Krickeberg: "Probability Theory". Addison-Wesley 1965.

[10] K. Krickeberg: "Convergence of Martingales with a Directed Index Set". Trans. Amer. Math. Soc. 83 (313-337) 1956.

[11] Laha and Rohatgi: "Probability Theory". Wiley 1979.

[12] Paul A. Meyer: "Probability and Potentials". Blaisdell Publishing Company 1966.

[13] Paul A. Meyer: "Martingales & Stochastic Integrals I". Lecture Notes in Mathematics Springer Verlag (284) 1970.

[14] J. Neveu: "Discrete Parameter Martingales". North Holland 1975.

[15] T. Bojdecki: "¿Qué es y para qué sirve una Martingala?". Ciencia 36 (59-65) 1985.

[16] J. L. Doob: "Stochastic Processes". Wiley