03071
1
2 y

UNIVERSIDAD NACIONAL

AUTONOMA DE MEXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA

MAESTRIA EN EDUCACION EN MATEMATICAS

UNIDAD DE LOS CICLOS PROFESIONAL Y POSGRADO DEL
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES.

ALGUNOS PROBLEMAS EN TORNO AL NUMERO RACIONAL

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRÍA PRESENTA
ALICIA BONFIL CASTRO .

MÉXICO D.F. , DICIEMBRE DE 1990 .

I N T R O D U C C I O N

A Presentación del Trabajo.

En el presente trabajo se intenta contribuir a latipificación de los problemas de aprendizaje que, en torno seis interpretaciones del concepto de número racional,tienen los alumnos de primer ingreso al bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades, para propiciar tratamientos didácticos más adecuados para el tema o detectar los trabajos previos, de investigación o de otra índole, necesarios para poder llegar a formularlas.

El trabajo consta de cuatro capítulos.

En el primer capítulo, se atienden algunos de los aspectos cognitivos, matemáticos e instruccionales referentes al número racional, a partir del análisis de Kieren(1976), mediante el análisis crítico del texto.

Teniendo a la base este análisis, que también permite ubicar el problema de aprendizaje que nos ocupa en su contexto, es decir en el ámbito de la educación matemática, se desarrolló el resto del trabajo,así en este capítulo se atienden los referentes teóricos del trabajo.

Las precisiones que, respecto a los problemas de aprendizaje del concepto de número racional tiene los alumnos de primer ingreso al bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades, se obtuvieron mediante un estudio exploratorio que se presenta en el segundo capítulo.

El cuestionario a partir del cual se desarrolló el estudio exploratorio, indaga acerca de seis de las siete interpretaciones que plantea Kieren(1976), atendiendo el concepto de número racional como fracción o relación parte-todo, cociente de enteros, decimal periódico, aspectos del racional como clase de equivalencia al indagar acerca de fracciones equivalente, elemento de un campo de cocientes ordenado infinito, y operador múltiplicativo o mapeo.

El análisis de las respuestas de los estudiantes fué un análisis cualitativo.

Dado que el concepto matemático es, en sí mismo, una de las variables fundamentales en los aprendizajes matemáticos; que las mediaciones necesarias para tales aprendizajes en una institución escolarizada entre el concepto matemático y el estudiante podrían ser más adecuadas a partir del reconocimiento explícito de las dificultades matemáticas del concepto,se incluyó un tercer capítulo para atender estos aspéctos.

En él se presentan algunas de las definiciones matemáticas de número racional y se muestra que son equivalentes .Además se exhiben las dificultades para hacer explícita la definición correspondiente al número racional como decimal finito o periódico.

Por último se presentan las reflexiones a las que el trabajo desarrollado dió pie , tanto en relación con el problema de aprendizaje como a sus posibles causas y los trabajos que se estima serían de útilidad para generar alternativas viables al problema planteado .
El trabajo tambien llevó a reflexiones de índole más general, por ejemplo en cuanto a problemas curriculares y de formación de los docentes .

De manera especial destaca la necesidad de desarrollar investigación educativa para un desempeño docente eficaz.

¿Porqué se eligió este problema para el presente trabajo?

¿En qué sentido el desempeño de los estudiantes respecto al número racional es un problema , y de que manera está involucrado en esta situación el docente?

¿Desde que óptica se está enfocando el problema ,el trabajo que en torno a él se ha desarrollado y sus resultados?

Las preguntas anteriores son seguramente parte de las preguntas que ante un trabajo de tesis se plantea un lector.
A continuación se trata de darles respuesta, y hacer explícitas algunas concepciones que sustentan este trabajo.

B. La comunicación .

La primera concepción que se asume explicitamente por su importancia, ya que está presente en todo intento de comunicación entre los seres humanosy por lo tanto en el presente trabajo, es el de que la comunicación no es perfecta; que existe siempre una interpretación por parte del receptor, de lo que se le pretende comunicar; de una manera muy esquemática diríamos que consiste en :

> A emite un mensaje, oral, escrito, corporal, etc., que *quiere significar* X, B recibe el mensaje y pese al traslape en el dominio que de tal lenguaje posean ambos,dadas las características individuales, que incluyen las concepciones filosóficas e ideológicas de los sujetos,lo interpreta como X'[1]

Asumir explícitamente esta *necesidad* de *interpretar*, tiene especial importancia en el capítulo relativo al estudio exploratorio donde, evidentemente, el análisis cualitativo de las respuestas escritas de los estudiantes tuvo como filtro la

---

[1] El esquema presentado tiene amplia fundamentación en Goldmann Lucien. Importancia del concepto de conciencia posible para la comunicación; el concepto de información en la ciencia contemporánea; siglo XXI Ed.: Mex,1970.

interpretación de la que esto escribe.

C Un problema detectado en la práctica docente .

C.1 Algunos de los errores de los estudiantes respecto al número racional.

A través de mi práctica docente en el bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades, he reconocido errores de los estudiantes, referidos a número racional, como los siguientes:

Al ordenar los números : -2, 1/2, 0, 8/(-4), -1, 1/4, 4/12;
responden : -18/9, -2, -1, 0, 1/2, 1/4, 8/-4, 4/12 .

Al efectuar operaciones se encuentran respuestas como :

$$1/2 - 1/4 = \frac{1-1}{2-4} = \frac{-1}{-2}$$

$$2/3 \times 9/4 = \frac{2\times 4}{3\times 9} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

$$1/7 + 2/3 + 3/12 = 6/22$$

$$14/7 \div 9/3 = 7\times 3 / 14\times 9 = 21 / 126$$

$$3/2 \times 1/4 = 12 / 2$$

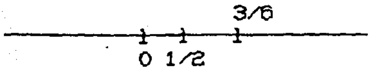
$$3/2 \times 9/4 = 27 / 8 = 9/4$$

$$3/2 \div 1/4 = 3/8$$

$$3/17 + 5/2 = .6 / 35$$

$$5/6 \times 3/9 = (5\times 9)(6\times 3) / (6\times 9)$$

En localización en la recta numérica , surgen respuestas como :



Por el momento no interesa discutir aquí los errores presentados ni sus posibles causas, sino simplemente, llamar la atención acerca de su existencia, probablemente familiar para cualquier docente de nivel medio superior.

C.2
Los antecedentes de los estudiantes respecto a número racional

El número racional es un contenido presente en la currícula previa al bachillerato, como se verá en seguida a grandes rasgos para la primaria.

En una breve revisión en la que se trató de detectar la presencia del número racional bajo cualquiera de las siete interpretaciones de Kieren(1975), en los programas y libros gratuitos de texto vigentes para la escuela primaria se encontró que :

El concepto está presente en los seis grados del ciclo, bajo algunas de las interpretaciones de Kieren (1975).

Lo encontramos preformandose a través de ejercicios que implican la relación parte-todo,antecedentes algebraicos y notación posicional base diez, en primero , segundo y tercer años.[2]

El concepto mismo se presenta en los tres años restantes de este ciclo, como veremos a continuación.

Cuarto grado, en las unidades :

[2] Posteriormente a esta parte del trabajo se pudo disponer de un análisis detallado del tratamiento de la relación parte-todo en Figueras(1988)

2, algoritmia, adición por casos;
3, introducción del orden a través de la longitud de segmentos, fundamentos para la densidad;
4, adición y sustracción;
5, orden entre fracciones, conversión de fracciones a fracciones equivalentes, adición y sustracción de fracciones con denominadores múltiplo uno de otro;
6, conversión a decimales, adición y sustracción de fracciones con denominadores cualesquiera , adición y sustracción de racionales en su expresión decimal;
7, problemas aritméticos que se resuelven con adición o sustracción de fracciones;
8, aplicación de fracciones a todos continuos físicos.

Quinto grado, en las unidades:
1, equivalencia y orden entre fracciones;
2, adición y sustracción de fracciones comunes y decimales;
5, antecedentes para racionales como cocientes de enteros;
6, propiedades de la multiplicación con racionales;
7, división entre fracciones vía inverso multiplicativo ;

8, resolución de problemas con fracciones .

Sexto grado, en las unidades:
1, número racional como longitud en la recta numérica;
2, adición y sustracción de racionales vía equivalencia, algoritmo general;
4, equivalencia entre fracciones para resolver problemas de porcentaje;
6, problemas de porcentaje;
8, problemas prácticos de porcentaje.

Así se detectan en ocho unidades trabajos para algoritmia.
En ellos la adición y la sustracción se desarrollan de manera tradicional en función de las relaciones existentes entre los denominadores,es decir'por casos', también se incluyen trabajos de algoritmia para la expresión decimal de los racionales y se

incluyen algoritmos para convertir fraccionesa fracciones equivalentes o a decimales.

Sólo en una unidad se encuentran propiedades de las operaciones y se usan inmediatamente para introducir la división.

En dos unidades se trabaja el orden y en cuatro se resuelven problemas con racionales.

Por lo tanto podemos reconocerlaclara preponderancia del trabajo algorítmico, la ausencia de un trabajo sistemático del racional como operador multiplicativo o mapeo y, presente sobre todo en sexto grado, la secuencia :

'conocimiento - ejercicio - problemas de " aplicación" '

Se sabe además que en el ciclo siguiente el contenido número racional vuelve a estar presente en los tres grados que lo forman, ya sea como un tema en sí mismo, ya sea por el uso que de él se hace para otros contenidos.

Por lo tanto , el estudiante de primer ingreso a bachillerato ha tenido, al menos como planteamiento curricular en los nueve años de escolaridad previa al mismo, el aprendizaje de número racional como uno de los aprendizajes a lograr.

Así, los errores a los que nos hemos referimos se tipifican como un problema, el problema de no haber logrado un aprendizaje propuesto a través de nueve años de escolaridad.

C.3 El número racional y los programas de bachillerato

En los programas de bachilleratoel concepto de número racional reaparece' directamente como contenido en algunos cursos, o indirectamente por la utilización que de él se hace para trabajar otros contenidos tanto matemáticos como de otras áreas de conocimiento.

Algunos de esos contenidos, en el caso específico de los programas de matemáticas del plantel Sur del Colegio de Ciencias y Humanidades son:

En los cursos de Matemáticas I y II , sistemas numéricos , ecuaciones e inecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales, ecuaciones cuadráticas, sistemas de ecuaciones cuadráticas, y razones, proporciones y porcentajes .

En los cursos de Matemáticas III y IV, o, los diversos curso correspondientes a los semestres quinto y sexto se requiere para contenidos como razón, proporción, semejanza, congruencia, razón y razón de cambio, derivada y probabilidad.

Por lo hasta aquí planteado se tiene, que la curricula previa al bachillerato indica que en varios aspectos el concepto de número racional debería ser uno de los aprendizajes logrados antes de ese ciclo escolar; los errores detectados en el desempeño de los estudiantes respecto al número racional permiten poner en duda que tal aprendizaje se haya logrado realmente y la curricula del bachillerato requiere de un conocimiento básico del número racional para lograr otros aprendizajes.

D. Los aprendizajes de los estudiantes , razón de ser de las instituciones educativas.

La escuela, es decir, las diversas instituciones educativas de que se dota una sociedad , tiene como tarea fundamental educar a los estudiantes que a ella acuden; es decir , basicamente contribuir a la formación de valores y criterios, a la obtención de conocimientos, al desarrollo de habilidades y a la socialización del educando; es decir al logro de diferentes aprendizajes.

El surgimiento de la escuela como institución claramente diferenciada del aparato productivo de la sociedad, responde esencialmente a la complejidad creciente de esta última, y plantea serios problemas.

Problemas en el orden de la formación de valores en el educando, que podemos sintetizar en la disyuntiva escuela reproductora del statu quo vs. escuela promotora del cambio social.
Problemas en función de la relación aprendizajes- vida productiva y cotidiana, ya que la escuela como institución especializada en la educación y claramente diferenciada de los otros ámbitos de la sociedad, requiere de una serie de mediaciones como el curriculum, los textos, y demas materiales de apoyo para promover los aprendizajes útiles en esos ámbitos, por mencionar algunos de los que, siendo importantes son tambien relativamente accesibles, a diferencia de otros , igual o más importantes,como el curriculum oculto y el vivido o real.

Pese a estos problemas, el logro de los aprendizajes por parte de los estudiantes que plantea el curriculum de cada institución educativa, es la razón social de su existencia, y en la consecución de tales logros el docente tiene un papel específico y de alta responsabilidad .

D.1 El papel del docente en el logro de los aprendizajes

Concebido el docente , en una primera aproximación, como el encargado de promover los aprendizajes de los estudiantes, la situación problemática en torno al aprendizaje de nómero racional anteriormente planteada demanda su atención y trabajo para resolverla .

Se tiene así una situación en torno a un aprendizaje específico, que plantea al docente del bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades un problema, el que los estudiantes que atiende logren el aprendizaje de número racional que no lograron en los nueve años de escolaridad previa, eliminando así obstáculos para otros aprendizajes que plantea el curriculum del mismo bachillerato.

Concebidas así las cosas trabajé, en distintos momentos, intentando resolver los problemas que respecto al concepto de número racional manifestaban los alumnos de primer ingreso al bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades, y que detecté, empiricamente, a través de la práctica docente.

E. Los intentos previos .

Intentando contribuir a resolver la problemática que en torno al aprendizaje del número racional se ha descrito, se desarrollaron en tres momentos diferentes instrumentaciones didácticas para el trabajo con números racionales en el primer semestre del bachillerato del Colegio.

El grado de fundamentación teorica y sistematización de las propuestas se incrementó de una a otra buscando mejorar los resultados alcanzados en cada una de ellas.

Así en la primera se manejarón, como resultado de mi formación profesional y experiencia docente, las siguientesconcepciones :

* el problema de aprendizaje detectado, como esencialmente algorítmico
* el concepto de número racional como: cociente de enteros, algunos aspectos del racional como clase de equivalencia, y el racional como elemento de un campo de cocientes
* el aprendizaje como aprendizaje significativo, al trabajar los distintos aspectos del número racional antes mencionados en el momento que se requerian, y no como un tema especial
* el estudiante como un sujeto ubicado en el tránsito de la etapa de las operaciones concretas a la de las operaciones formales, con preponderancia de esta última etapa, y con dominio lingüístico suficiente, tanto oral como escrito; al utilizar basicamente lecturas, exposiciones, solución de problemas y elaboración de cuadros sinópticos para la instrumentación didáctica.

La instrumentación didáctica se planteo globalmente, se determinaron los materiales básicos para el trabajo y se elaboraron los exámenes, pero no hubo una planeación detallada de las sesiones ni un diagnóstico inicial que permitiera valorar los resultados de la instrumentación.

La mejoría algorítmica *inmediata* que se detectó, junto con la perdida de la misma en menosde dos semestrespermitió reconocer que *al menos olvidaban* los algoritmos, pero que ese olvido era sólo un síntoma.

Surge así la idea de que el problema consiste en la *carencia de significado* para los estudiantes, de los algoritmos en cuestión.

En el segundo intento se reconoció que el problema no era la falta de retención de algoritmos, que esto era sólo un síntoma, y ahora se tipificó el problema como *incomprensión de las operaciones entre racionales* .Las dificultades que manifestaron los estudiantes para manejar el orden entre racionales, indicó que había mas de un problema.

Se reconoció tambien , que la noción que del estudiante se había manejado era incorrecta, no había tal dominio lingüístico, y se apreció empiricamente mediante la observación del grupo, que era heterogeneo en cuanto al nivel de desarrollo.

El aprendizaje se interpretó en un sentido próximo al constructivista al trabajar primero con material concreto manipulable, resolver problemas de razonamiento aritmético que involucran racionales, discutir e interrelacionar los trabajos así hechos en relación al número racional y, posteriormente, manejarlo mediante notación simbólica e introducir una cierta formalización.

Se mantuvo el concepto de racional centrado en los mismos tres aspectos de la primera experiencia, cociente de enteros, aspectos de clase de equivalencia y elemento de un campo de cocientes infinito ordenado .

El material concreto manipulable lo elaboraron los mismos alumnos.

Consistía en un juego de tarjetas de diversos tamaños, donde la mayor jugaba el papel de la unidad y las restantes eran medios, cuartos, octavos, tercios sextos o doceavos de la misma.

Mediante el análisis de las diversas formas de 'cubrir' una cierta tarjeta con otras, incluso mayores que ella, se busco propiciar la formación de las nociones que permitieran la comprensición de las operaciones de adición y sustracción, así como el orden.

Suponía que con estas bases el estudiante podría comprender al menos los algoritmos de adición y sustracción, y que postoriormente 'tomando partes de partes', podría aprehender la multiplicación y su inversa.
Ambos supuestos fallaron, las carencias algorítmicas de la mayoría se mantuvieron,cierta claridad conceptual se logró en aquellos que inicialmente no tenían esas carencias, el material fué rechazado 'por ser para niños', y por referirse a algo que 'ya sabían' , porque 'ya se los habían enseñado'.

Claramente se manifestó la falta de atención que se había tenido al diseñar el material,descuidando tanto la etapa de desarrollo en que se encontraban los estudiantes, como su escolaridad previa.

El tercero de estos intentos tenía un contexto diferente, fué untrabajo desarrollado colectivamente en un curso de la Maestría.
En el se tomó en cuenta , entre otras cosas, que el concepto de número racional permite diversas interpretaciones ,se trató de atender la escolaridad previa de los estudiantes y el que 'ya no son niños', es decir, el que la población más frecuente en los dos primeros turnos del plantel es de adolecentes de entre 15 y 16 años, y que , hipoteticamente, se encuentra en la etapa de las operaciones formales.

Se trabajaron los siguientes aspectos del número racional:

En este aspecto el trabajo tomo en cuenta los aspectos o interpretaciones de número racional, planteados en Kieren (1976).

fracciones, cocientes de enteros, fracciones de equivalencia, razones, operador multiplicativo y elemento de un campo de cocientes.

Se mantuvo un enfoque constructivista , con manejo de materiales concretos manipulables , solución y planteo de problemas que involucraran números racionales , y detección de regularidades que permitieran reconocer las propiedades de los racionales.

Los resultados no mejoraron notablemente y las sesiones planeadas para desarrollar el contenido en el curso ocuparon un tiempo mucho mayor al previsto, desbalanceándolo,lo quehizo notar la necesidad de atender más cuidadosamente el curriculum del bachillerato para un diseño de ese tipo.

Estas experiencias condujeron a la necesidad de *precisar el problema* , como paso previo para poder intentar resolverlo con posibilidades de éxito .

F. Algunos Parámetros para un Problema de Aprendizaje Matemático.

Los aprendizajes logrados por los alumnos de una institución educativa dependen de múltiples factores.

Algunos autores, **como** Campos M. A., Furlán A., **et al. (1979)** plantean que la estructura didática contempla el maestro,el alumno, su aprendizaje , y la institución educativa en que se desarrolla , y se puede esquematizar como:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, dash] & \\ S \arrow[r, dash] & OA \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & OI \\ & ED & \end{tikzcd}$$

Donde M es el maestro; S el sujeto que va a aprender (o estudiante); OA el objeto de aprendizaje o aquello que va a aprender; OB los objetivos curriculares, como aspecto representativo de la institución educativa, y ED la estratégia didáctica diseñada por el maestro en función del contenido específico(en nuestro caso matemático),los objetivos curriculares y los estudiantes,para propiciar su apropiación del objeto de aprendizaje .

> De esta manera el sujeto se apropia del objeto de aprendizaje con la mediación del maestro y en el marco de la institución educativa específica.

El maestro al atender ese marco, y el curriculum mismo de la institución,plantean un objeto de aprendizaje que no es idéntico al contenido específico de la ciencia en cuestión ; esto puede ser, por ejemplo porque se restrinja alguno de sus conceptos a sólo alguno de sus subconstructos[*]; o sólo establezca algunas de las relaciones existentes entre los conceptos que le son propios,o entre los subconstructos, si es el caso.

Es, sin embargo, necesario que este objeto de aprendizaje se apegue en todas las partes que de él se manejen al manejado en la ciencia, si se quiere lograr un aprendizaje que acerque al conocimiento científico y no que alejede él .

De esta manera los aprendizajes dependen de un contenido científico específico, la aprehensión que de dicho contenido tiene el docente, las características del sujeto que va a aprender (al menos las que se refieren a sus aprendizajes previos,su nivel de desarrollo, etc), la institución educativa al menos en términos de

Los conceptos son entes construidos por los seres humanos. La construcción de un concepto tiene su génesis y, en el caso de los conceptos matemáticos,algunos de ellos alcanzan en determinada etapa de la historia de las matemáticas una definición. Algunos de los conceptos están constituidos por varios conceptos constituidos en diferentes etapas históricas y que guardan relaciones específicas entre sí. De acuerdo a Chomsky(1970) llamaremos a los conceptos constructos (por construidos), y a los conceptos constitutivos de otros concep t o, en el sentido antes explicado,subconstructos su curriculum (objetivos, contenidos, textos de uso universal, si es el caso), y la instrumentación específica del contenido en el curso en cuestión .

La instrumentación del contenido en el curso , depende a su vez no sólo de la aprehensión que de dicho contenido tenga el docente ,sino de su concepción de aprendizaje ,de enseñanza y de la ciencia a que pertenece el contenido, así como del sujeto que aprenderá, es decir el estudiante .

Lo hasta aquí planteado serían algunas delas variables fundamentales que, restringiendo el problema de los eprendizajes escolares al marco de la institución educativa y sus diversos componentes, habría que atender, dada la coincidencia que se tiene con dichas posiciones.

> En un trabajo individual a desarrollar en un tiempo relativamente corto , abordar todos estos aspectos es practicamente imposible

Por lo tanto, en este trabajo se restrigen aún más las variables atendidas, como veremos a continuación.

F.1 <u>Los parámetros para este trabajo.</u>

En cuanto a la *tipificación del nivel de desarrollo* del estudiante de primer ingreso al bachillerato, no se abordará en el presente trabajo, pues, por si sólo, demanda un trabajo al menos equivalente al presente.

Me limito a señalar que al respecto, se trabaja desde una posición acorde con la teoría psicogénetica y, en ese sentido, el desarrollo histórico del contenido, al menos por los obstáculos epistemológicos presentes en el mismo, es también un aspecto involucrado en el aprendizaje de los estudiantes, que por lo tanto habría que atender y que, nuevamente, podría ser tema de una tesis de maestría.

La importancia del concepto matemático a aprender, llevó a hacer explícita la concepción que se sustenta respecto al *concepto matemático* de número racional y la tipificación de los significados que al emplearlo se le da, al menos en algunos ámbitos.

Se indagó tambien acerca de los elementos que deberá poseer el estudiante para aprender el concepto y utilizarlo correctamente de acuerdo a esos significados.

Dado que los alumnos de primer ingreso al bachillerato del Colegio tienen una escolaridad previa de al menos nueve años se trato de tener un panorama curricular de lo que los egresados de secundaria *deberían* saber al respecto, y en su caso,detectar algunas de las posibles causas del problema, al menos por omisión de aspectos fundamentales para tal aprendizaje en los programas,los resultados alcanzados se encuentran en el apéndice 1.

En este marco las expresiones concretas del problema en el desempeño escolar del estudiante, fueron indagadas.

A la base del trabajo y la atención a los cuatro parámetros antes mencionados, está esencialmente,Kieren(1975).

El trabajo y la atención en él a los parámetros antes mencionados, se realizó mediante análisis bibligráfico, se desarrolló tambienun estudio exploratorio y, en alguna medida, los trabajos en torno al concepto matemático de número racional atienden aspectos que si bien no son desconocidos no son usualesen la bibliografía .

I REFERENTES TEORICOS.

I.1 La aproximación a los referentes teóricos.

Los elementos teóricos que fundamentan este trabajo se definieron escencialmente a partir del análisis crítico de Kieren(1975).

En este capítulo se presentan tanto el análisis del texto como la posición que ante él se asume, planteada a través de algunos cuestionamientos que desde otras posiciones teóricas se hicieron y algunas precisiones acerca de los conceptos centrales del mismo.

Las coincidencias y las diferencias con los planteamientos de Kieren(1975), que se presentan aquí, constituyen los elementos teóricos básicos para el resto de este trabajo.
Dado que el significado que un sujeto construye al leer un texto está en función del texto completo, com plantea Casseti(1980): "La coherencia, la integridad y la comunicatividad del texto (sobre laque insisten en parte Van Digk 1972 b, Dressler 1972 y Schimdt 1973; respectivamente y que alejan decididamente el texto de un conglomerado cualquiera de signos para hacer de él una unidad que lo aleja de ser una forma molecular para determinarlo como un todo) son verificables a diferentes niveles.
El primero es indudablemente el de una cierta organización internaque se realiza ante todo como cohesión entre los varios constructos." y por lo tanto influido por su estructura, el análisis que se hace de Kieren(1975) incluye la estructura y el contenido del texto, centrándose en los conceptos principales del mismo.

I.2 La estructura del Texto de Kieren(1975).

El artículo está estructurado en doce secciones:

* Perspectivas en números racionales.
* Números racionales como fracciones
* Números racionales como clases de equivalencia de fracciones.
* Números racionales como razones numéricas

* Números racionales como operadores o mapeos
*Números racionales como elementos de un campo de cocientes.
* Números racionales como medidas
* Números racionales como fracciones decimales.
* Números racionales-Un conglomerado.
* Investigaciones necesarias acerca del aprendizaje de números racionales.
* Un modelo de investigación curricular y sus implicaciones.
* Instrumentación de un modelo general para investigación de números racionales

En la primera, perspectivas en números racionales, Kieren muestra en que contexto se da el problema que quiere atender y el problema mismo. Aclarando que lo enfrentará mediante un análisis lógico, al que justifica y del que plantea que se deberán derivar investigaciones y sugerencias de secuencias de experiencias de aprendizaje para lograr la adquisición del concepto; planteando su propuesta para resolverlo.

Esta consiste en conformar el concepto de número racional como un conglomerado de las diversas *interpretaciones* que de él se hacen.

Kieren señala que se referirá sólo a algunas de estas, y que no intenta ser exhaustivo.

Las siete *interpretaciones* de los números racionales con las que trabaja son:

1. Números racionales son *fracciones* las cuales pueden ser comparadas, sumadas, restadas, etc.(se desarrolla en la segunda sección del artículo).

2. Números racionales son *fracciones decimales, las cuales forman una extensión natural* (vía nuestro sistema de numeración) de los números enteros. (Se desarrolla en la octava sección del artículo).

3. Números racionales son *clases de equivalencia de fracciones*. Así {1/2, 2/4, 3/6,...} y {2/3, 4/6, 6/9,...} son números racionales (La desarrolla en la tercera sección).

4. Números racionales son números de la forma P/Q, donde P,Q son enteros y Q ≠ 0. En esta forma los números racionales son "*razones*" de números. Esta *interpretación* la desarrolla en la cuarta sección.

5. Números racionales son *operadores multiplicativos* (P.E. reductores, amplificadores, etc.). (Desarrollán en la quinta sección).

6. Números racionales son elementos de un campo de cocientes infinito ordenado. Son números de la forma X = P/Q donde X satisface la ecuación QX = P. (esta la desarrolla en la sección sexta del artículo).

7. Números racionales son *medidas o puntos en la recta númerica*. (es desarrollada en la séptima sección).

Kieren no dá un significado específico al orden en que presenta las *interpretaciones*, sólo es una forma de introducirlas; sin embargo, ese orden no corresponde al orden en que las desarrolla en las distintas secciones del artículo.
Concretamente la segunda *interpretación* : números racionales son fracciones decimales... es relegada hasta la octava sección para su desarrollo, quedando así en último lugar respecto a las restantes *interpretaciones*.

La diferencia de extensión en cada uno de estos desarrollos es notable, así para "elemento de un campo" y "operador multiplicativo" dedica más de siete y más de cinco páginas, a "cociente de enteros" dos y finalmente a "decimales" sólo un poco más de una.

Esta diferencia parece deberse a la extensión de las *estructuras instruccionales* que contiene cada uno de ellos, aunque también tienen diferente extensión las *estructuras cognitivas conexas* correspondientes, lo cual puede interpretarse como un indicio del grado de conocimiento existente acerca de estos aspectos.

En esta misma sección hace explícita su estrategia para abordar esta temática y elaborar el texto, la cual expresa el siguiente diagrama :

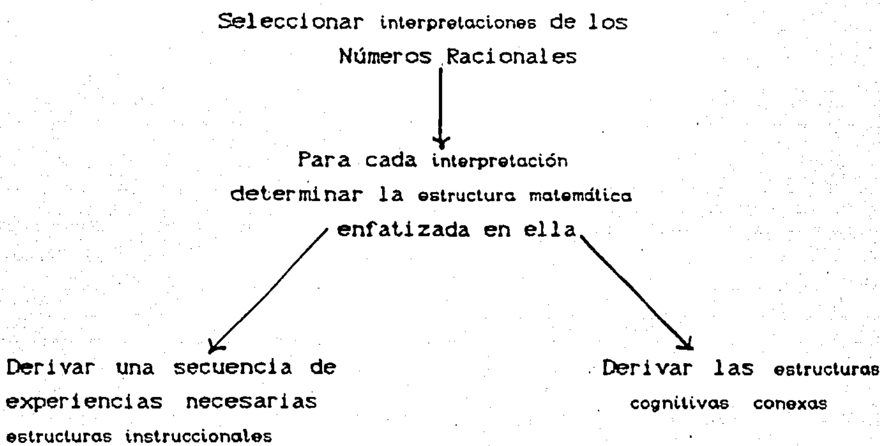


FIGURA 1 (Kieren 1975;p 104)

Las siete secciones siguientes están dedicadas a desarrollar el tema siguiendo dicha estrategia.

La novena sección la dedica a realzar el efecto que la preponderancia de una sola de estas *interpretaciones* en el curriculum, provoca en la formación del concepto de número racional en los niños, así como su propuesta de solución : conformar el concepto de número racional como un *conglomerado* de estas *interpretaciones*. Esbóza el tipo de tratamiento curricular para lograrlo.

Sintetiza los análisis de cada *interpretación* en cuanto a : *estructuras matemáticas* y *direcciones predominantes* en la *interpretación*; *estructuras cognitivas* que deberán desarrollar o poseer los estudiantes para aprehenderla y, por último, las *estructuras instruccionales* que propone para lograr tal aprehensión.

En ella incluye también dos diagramas, el primero para jerarquizar las tareas para la *interpretación* de número racional como *fracción*.

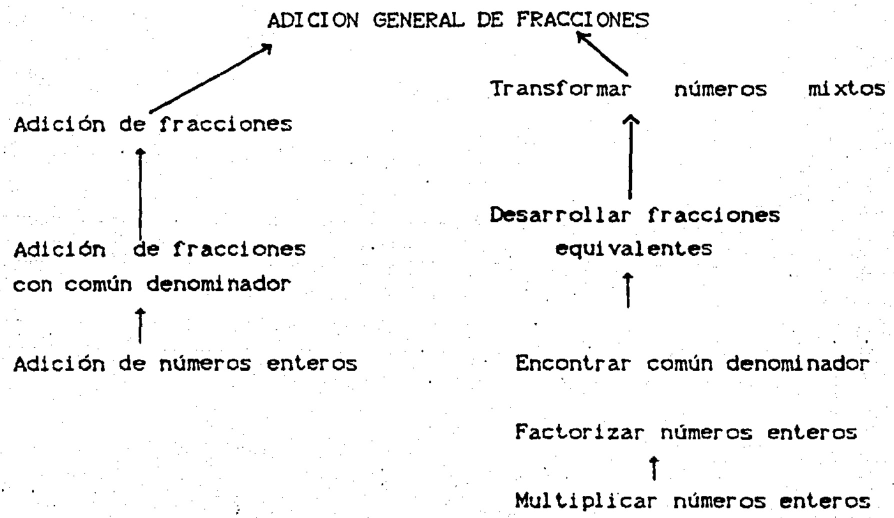


Fig. 10 Una jerarquía de tareas para la interpretación como fracción del número racional .

(Kieren 1975;p 132)

El segundo es una red, puesto que el trabajo realizado respecto a la *interpretación* del número racional como elemento de un campo de cocientes, plantea el autor, sólo permite hablar de jerarquía en un sentido muy amplio o relajado.

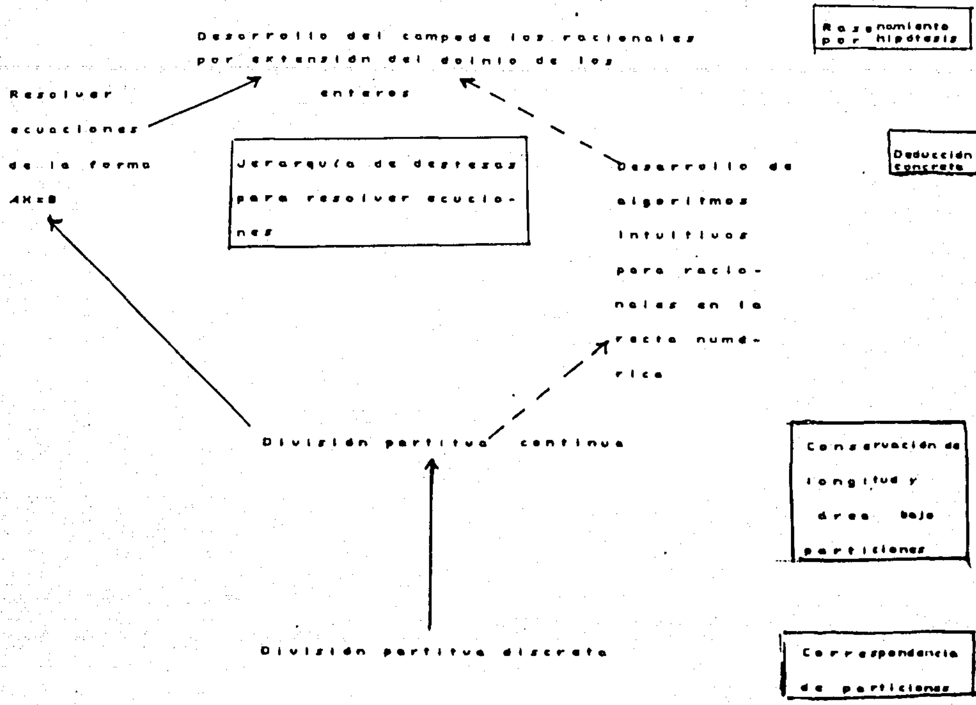


Figura 11 . Una red general par la *interpretación* de campo de cocientes del número racional . (Kieren 1975;p 132)

Estos diagramas ilustran el nivel de desarrollo de los trabajosreferentes a cada *interpretación* del número racional y la índole de las tareas que para lograr precisiones suficientes para planear y desarrollar experiencias de aprendizaje eficaces hay que desarrollar.

En la décima sección atiende las necesidades de investigación acerca del aprendizaje de números racionales, señalando los problemas centrales a investigar y el grado de dificultad de dichas investigaciones .

La undécima sección se aboca a plantear y analizar las consecuencias de un modelo de investigación curricular, se pronuncia por la importancia de tal tipo de investigación, hace explícito el concepto que de ella sostiene e incluye el modelo de Romberg y De Vault con el siguiente diagrama del mismo y señala su utilidad y sus limitaciones.

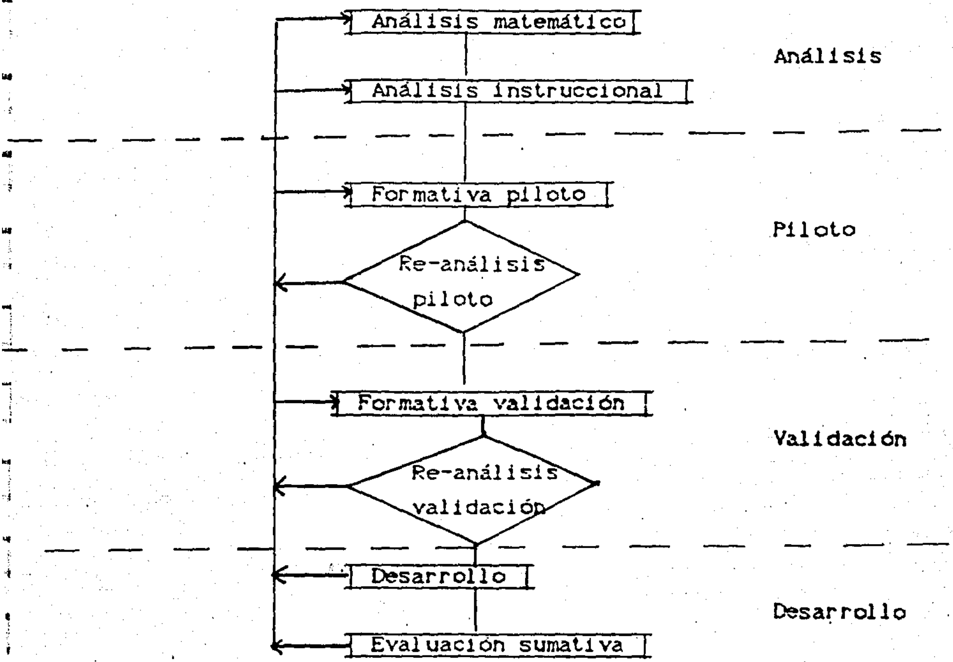


Figura 12 . Romberg y De Vault: pasos para el desarrollo de un sistema instruccional . (Kieren 1975;p 136)

Concluye esta sección sugiriendo investigaciones específicas .

En la última sección señala las limitaciones del modelo de Romberg y De Vault e introduce un modelo más general, el de Swada y Cathcart, ilustrado en el siguiente diagrama :

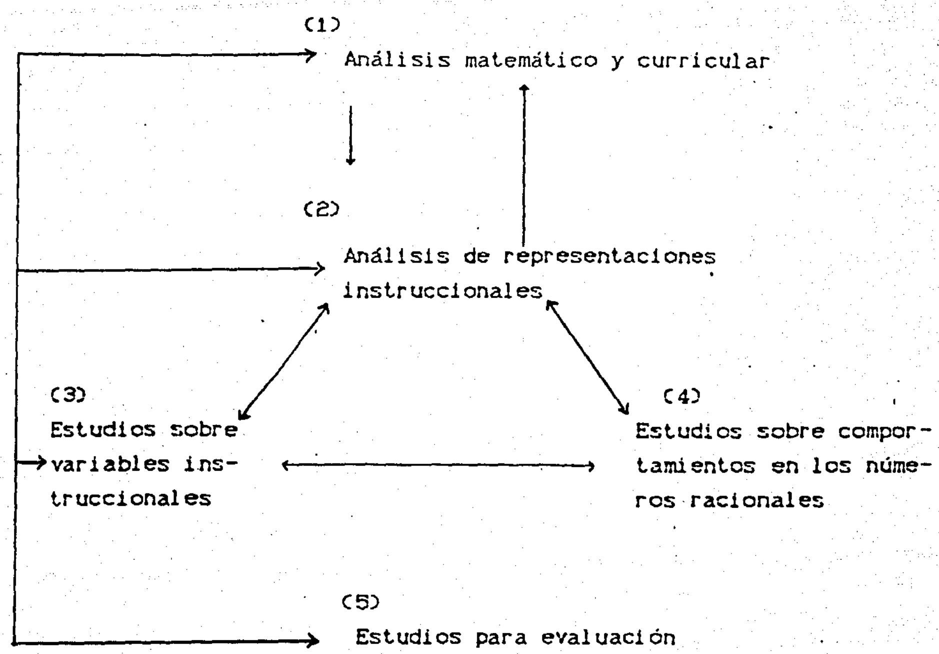


Figura 13 . El modelo de desarrollo curricular de Swada y Cathcart.
(Kieren 1975;p 138)

Advierte que no debe interpretarse como una secuencia ordenada, sino como un flujo de información en la investigación de varios problemas.

Ejemplifica investigaciones de las diversas áreas o categorías del modelo.

Describe un estudio similar al de Inhelder y Piaget (1958) para el desarrollo del pensamiento lógico, pero en este caso, para el desarrollo del pensamiento en números racionalesy señala que secare del mismo, marcando la importancia de desarrollarlo.

También señala que son escasos los datos disponibles acerca de comportamientos relevantes, respecto al desarrollo del pensamiento acerca del número racional, como son los de efectuar particiones discretas y continuas .

Ademas plantea investigar acerca de los protocolos instruccionales para desarrollar ese tipo de comportamientos específicos .

A partir de ese modelo desprende la necesidad de investigar acerca de los procesos que parecen necesarios para el aprendizaje de una *interpretación* particular , la existencia de relaciones entre comportamientos acerca de los números racionales y el aprendizaje de facetas particulares de su conocimiento .

Incluye propuestas de procedimiento para desarrollar estas investigaciones .

Para la última categoría de estudio del modelo de Swada y Cathcart señala que los abundantes estudios del último medio siglo atienden en general al cálculo numérico, señala la necesidad de atender aspectos más complejos en poblaciones específicas (sujetos sobresalientes o con mal desmpeño, niños, estudiantes de secundaria, preadolescentes y adolescentes).

Finalmente reconoce la importancia del concepto de racional que posea el profesor y señala la especial importancia de investigar esto entre profesores en ejercicio .

Para concluir el apartado presenta un resumen del mismo en el que plantea la necesidad de investigaciones curriculares, de estudios clínicos y experimentales acerca de las conductas desarrolladas y las habilidades relacionadas con el aprendizaje de los números racionales, los procesos psicológicos y las fases específicas de tal aprendizaje .

Señala también la necesidad de que estas investigaciones se coordinen .

Evidentemente los dos propósitos de Kieren están planteados claramente a través de esta estructura y son:

1) Hacer notar la problemática actualmente existente en el aprendizaje del número racional, mostrando algunas de las variables esenciales en el proceso de aprendizaje; a saber, la *interpretación* de la que se trate, las*estructuras matemática* y *cognitiva* correspondientes y las secuencias de experiencias de aprendizaje que de ellas se derivan .

2) Mostrar como causa fundamental de tal problemática el que la curricula atienda sólo una de las *interpretaciones* de número racional, y no lo atienda como *conglomerado* de *interpretaciones*.

Esos propósitos se hacen explícitos en la primera sección , se desarrollan recurrentemente en las siete siguientes , se complementan en las dos subsecuentes, se retomanen torno a la investigación curricular de la decimoprimera en adelante, hasta dejar planteada una propuesta de trabajo global para atender tal problemática .

La lista de *interpretaciones* de que se va a ocupar es un elemento esencial .

Al hacer explicita la estructura de las secciones dos a ocho en las que las desarrolla, facilita la comprensión de su función y contenido .

Los diagramas incluidos son claros y cumplen su función de sintetizadores esquemáticos .

La presencia de las *estructuras matemáticas* enfatizadas para cada una de las *interpretasiones*, habla de la importancia fundamental del aspecto matemático, dado que es un APRENDIZAJE MATEMATICO el que se quiere lograr .

I.3 El contenido .

Considero que los conceptos o constructos centrales en el artículo son:

1) *Interpretación* .

2) *Conglomerado* .

3) *Estructura matemática* .

4) *Estructura cognitiva* .

5) *Estructura instruccional* .

A continuación se hará explícito el significado que a cada uno se le atribuyó a partir del análisis del texto y otras fuentes.

1. *Interpretación* .

Cuando Kieren se refiere a las *interpretaciones* del número racional maneja siete .

De ellas cinco, número racional como fracción,como clase de equivalencia de fracciones, como cociente de enteros, como operador multiplicativo o mapeo, como elemento de un campo de cocientes , y como medida; corresponden a definiciones de número racional surgidas en distintas etapas históricas, que alcanzaron su definición matemática tambien en diferentes momentos. Una sexta, decimal periódico, no suele tener una definición explícita completa; pues al trabajar esta *interpretación* no suelen definirse explicitamente las operaciones entre decimales periódicos.

Hasta aquí las *interpretaciones* de Kieren coinciden con las interpretaciones matemáticas(Tarski,1986)

Sólo para la *interpretación* como fracción no existe definición matemática, a menos que se le identifique con la *interpretación* como cociente de enteros con denominador no nulo, por lo que tendríamos dos maneras de designar la misma definición .redundante

La presencia de la *interpretación* de número racional como fracción tiene su explicación muy probablemente , en la génesis del concepto de racional en los niñosPiaget(1975), ya que la fracción o quebrado , como parte propia de un todo finito es un concepto accesible al niño en su experiencia cotidiana , y parece jugar un papel importante en la abstracción de la relación parte-todo; además, parece estar presente para todos continuos tambien en momentos de la génesis histórica del concepto, como en el que los griegos abordaron los problemas que los llevaron a descubrir los segmentos conmensurables y los inconmensurables.[5]

De esta manera la *interpretación* de número racional como fracción

[5] Bourbaki N: *Elementos de Historia de las Matemáticas*.Alianza Editorial,Madrid 1972: p203 .« Un punto de vista «pragmático» de este tipo vuelve a aparecer en todas las escuelas matemáticas en que la habilidad del cálculo prevalece sobre el deseo del rigor y las preocupaciones teoricas.
En la matemática griega, por el contrario, son estas últimas las que predominan, a ella debemos la primera teoría rigurosa y coherente de las razones de magnitud, es decir, esencialmente, de los números reales; dicha teoría es la coronación de una serie de descubrimientos sobre las proporciones, y en particular sobre las razones inconmensurables, cuya importancia en la historia del pensamiento griego nunca se subrayará bastante, . . . En sus comienzos la matemática griega está indisolublemente ligada a una serie de especulaciones, en parte científicas, en parte filosóficas y místicas; sobre las proporciones, las semejanzas y las razones, en particular las «razones simples» ; una de las tendencias características de la escuela pitagórica fue la de pretender explicarlo todo por medio del número entero y de las razones de enteros. Pero fue justamente la misma escuela pitagórica la que descubrió la inconmensurabilidad del lado del cuadrado respecto a su diagonal (la irracionalidad de 2)

tiene importancia en función del aprehendizaje del concepto de número racional, realzando la diferencia entre un trabajo en matemáticas y uno en educación matemática, que es el caso .

Cabe aclarar también que la definición matemática de número racional como cociente de enteros *reinterpretada* como razón , puede conducir a errores.

El mismo Kieren señala la diferencia esencial entre razón y número racional con base en sus operaciones , pese a que dá una alternativa instruccional para esta *interpretación*, que él mismo critica por poco "natural" para los niños .

En este sentido también abundan Wayne(1987), Borasi y Michalse s/f y Streefland(1984), entre otros .

Por si esto fuera poco , habría que tomar en cuenta que las razones , en general, son cantidades adjetivales producto de una composición que transforma el referente .

Por ejemplo , la velocidad $\frac{280 \text{ Kms.}}{3 \text{ hr}}$ es una razón que se obtiene de las cantidades adjetivales 280 Km. cuyo referente es una longitud, y 3 hrs., cuyo referente es un lapso, por lo que es una cantidad adjetival cuyo referente es una velocidadSchwarts(1988). Sin embargo LOS NUMEROS Alexandrov,Kolmogorov, et al.(1974) noson cantidades adjetivales.

La mención en la *interpretación* cociente de enteros de " razón" , probablemente atienda la necesidad de aclarar las relaciones entre razones y números racionales .

De esta manera las *interpretaciones* de Kieren no son interpretaciones matemáticas, puesel autor requiere atender aspectos no matemáticos en el problema del que se ocupa el artículo, por lo que introduce un "preconcepto" de número racional (fracción) y alude al concepto de razón numérica como sinónimo de racional, pese a la diferencia de sus operaciones.

2 . *Conglomerado*

El término conglomerado[6],parece estar en el texto con el último significado que le asigna el diccionario de la academia de la lengua española, utilizándolo en forma figurada y permite no entrar en el análisis matemático del concepto de número racional,que se presupone domina el lector, para no distraerlo de los objetivos principales del artículo .

La propuesta de manejar el número racional como un *conglomerado* de las siete *interporetaciones* citadas se puede entender entonces, en términos matemáticos, como la de concebirlo como un constructo constituido por siete subconstructos, que son o definiciones equivalentes del concepto o atienden un preconcepto, como en el caso de la fracción comprendida como relación parte-todo.

De los conciderados como conceptos centrales en Kieren(1975),los tres conceptos restantes se refieren a estructuras.

En el lenguaje común una estructura es la " distribución y orden con que está compuesta una obra de ingenio", existen también los conceptos de estructura en matemáticas Tarski(1968), y en psicología[7],pero como se verá en este caso las *estructuras* de

[6] Conglomerado, da(del lat. conglomeratus) p.p. conglomerar //2. adj. Bot. V. Flores. Conglomeradas//3. Efecto. de conglomerar o conglomerarse.
Conglomerar. (del lat. conglomerare)tr. aglomerar//unir o agrupar fragmentos o corpúsculos de una misma o diversas substancias con tal coherencia que resulte una masa compacta U. t. c. prnl.

Kieren no coinciden con ellos , pues se refieren a las relaciones

Tomado de Guajardo, Eliseo; "Paquete del autor Jean Piaget" Licenciatura_en_Educación_Básica,_Optativa; U.P.N.; México, 1985.

«... las estructuras lógicas constituyen, no formas a priori, ni productos de la experiencia de los objetos, ni convenciones sociales, sino las formas de equilibrio hacia las cuales tienden las coordinaciones intelectuales de los sujetos.» EEII 127 (nota 1)

«Se debe concebir cada estructura como una forma particular de equilibrio, más o menos estable en su campo restringido, y que se vuelve inestable en los límites de este.» PI 12

«Decir que una estructura es «acabada», aunque no sea «final», significa que ha llegado a un estado de equilibrio tal, que puede ser integrada, sin ser modificada en sí misma, en las estructuras posteriores, ya construidas o no.» EEXIV 12

«Es una forma de organización de la experiencia» (8) 148

«Es una adquisición de conciencia o una «reflexión» cada vez más aproximativa de la función misma» (8) 152

«La estructura no es más que una cristalización momentánea, siempre superada en los hechos por el espíritu de su funcionamiento».

(8) 160.

Las estructuras «no existen como nociones distintas de la conciencia del sujeto, sino que constituyen sólo instrumentos de su comportamiento». EEXIV 185.

(EEGII) (Lógica y Equilibrio) (Lógica y Equilibrio en el comportamiento del sujeto)) p. 27-117 (1957)

(PI) La Psicología de la inteligencia; París, 1947(1a. ed.) A. Colin p. 212

(EEXIV) Estudios de Epistemología Genética; (Publicado bajo la dirección de Jean Piaget); París, aparece irregularmente después de 1957 Edición Universitaria de Francia (26 vol. en 1971).

(EEG XIV) (Epistemología, Matemáticas y Psicología)(1a. parte) p. 143-324; «Conclusiones Generales»; (con E.W. Beth) p. 325-338 (1961) que guardan entre sí los entes matemáticos y cognitivos o instruccionales de los que se trata, sin que estas coincidan con las que caracterizan a las tres estructuras anteriores .

3. *Estructura matemática* .

Es claro, practicamente desde el inicio del artículo, que la *estructura matemática* a la que se refiere Kieren no es una de las usualmente llamadas estructuras matemáticas o algebraicas.

Cada una de las siete *estructuras matemáticas* que propone se refiere a contenidos , procedimientos y habilidades matemáticas que son partes constitutivas no explícitas del concepto de número racional bajo una *interpretación* específica, aunque algunos de ellos sean comunes a varias

Las relaciones que guardan entre sí estos contenidos , procedimientos y habilidades son diversas.

En ocasiones, algunos de esos contenidos son a su vez partes constitutivas de otras partes, por ejemplo en la *interpretación* como clases de equivalencia se tiene: "par ordenado", que forma parte a su vez de " comprensión de los racionales como clases de equivalencia de <u>pares ordenados</u>"

En otros casos, unos son elementos del conjunto de una estructura algebraica , que es a su vez uno de los entes de la *estructura matemática* en cuestión.

Así, en la *interpretación* como operadores o mapeos se tiene:
" las dilataciones continuas como transformaciones geométricas o geometría algebraica " que son los elementos del conjunto que forma parte de la estructura algebraica a la que se refiere a continuación en " caracterización de estas transformaciones como grupos"

Un último ejemplo es el de las relaciones que guardan los elementos de la *estructura matemática* asociada a la *interpretación* como fracción decimal, que son de utilización o aplicación dentro o fuera de las matemáticas .

Con base en lo anterior nos planteamos que las *estructuras matemáticas* que maneja Kieren tienen en común :

* Un conjunto de entes matemáticos, los conocimientos , procedimientos y habilidades antes mencionados .

* Relaciones entre los elementos de ese conjunto, que no tienen que ser las mismas de un conjunto a otro .

* La propiedad de que el conjunto con sus relaciones son parte constitutiva implícita de una *interpretación* .

Por lo tanto, ese es el significado que atribuiremos a la *estructura matemática* que plantea Kieren.

4 . *Estructura cognitiva* .

Para cada una de las siete *interpretaciones* Kieren plantea en la *estructura cognitiva* las nociones, conceptos y habilidades, no todas estrictamente matemáticas , que el estudiante deberá poseer o adquirir para lograr la aprehensión de esa *interpretación* .

Las partes de esta *estructura* son pues conocimientos y habilidades Las relaciones entre estas partes son complejas.Por ejemplo para la *interpretación* como clases de equivalencia se tienen desde el manejo de la relación de inclusión entre clases y las particiones, hasta la habilidad de efectuar deducciones informales .

Si como hemos dicho nos apoyamos en la psicogenética de Piaget, esta *estructura cognitiva* involucra estadios de desarrollo del estudiante que van desde la infancia hasta la adolescencia , y las relaciones que guardan entre sí[8].

Sin embargo, no poseen algunas de las características básicas de la estructura piagetiana, como el '...*formas* de *equilibrio finales*, en sentido relativo',Piaget(1980), pues las deducciones informales corresponden más bien a la preparación de la estructura siguiente,la de las operaciones formales.

Por lo tanto se considera que la *estructura cognitiva* de Kieren alude a una estructura psicológica de corte piagetiano, sin coincidir plenamente con ellas.

Estas *estructuras cognitivas* tienen otro significado , se refieren al conjunto de conocimientos y habilidades que el estudiante necesita poseer para lograr aprehender una *interpretación* y los elementos de cada uno de esos conjuntos guardan entre sí, relaciones que no son del todo conocidas[9], pero comparten la característica de ser necesarias para ese aprehendizaje.

La situación actual del conocimiento respecto al desarrollo del concepto de número racional en el niño no permite plantear si los elementos propuestos en estas *estructuras* son los únicos que

[8] Piaget,J. ;Problemas de Psicología genética, Ariel; España, 1980, pp. 59-74.

Piaget, J.: Introducción a la epistemología genética 1.- El pensamiento matemático; Paidos; Argentina, 1975. pp. 127-137.

[9] Por eso plantea Kieren la necesidad de un estudio acerca del desarrollo del concepto de racional como ya se dijo

intervienen en tales aprendizajes, por lo que se deben considerar como aproximaciones útiles y fundamentadas para el trabajo actual, en tanto se desarrollan las investigaciones pertinentes a las que alude el mismo Kieren .

5) *Estructura instruccional* .

Bajo el término de *estructura instruccional* Kieren propone una serie de actividades o experiencias de aprendizaje, frecuentemente secuenciadas, para promover la aprehensión de cada *interpretación* de número racional, basada en las *estructuras matemática* y *cognitiva* respectivas .

Sin embargo, en algunos casos propone las acciones del docente (p.e. para la *interpretación* de fracción), en tanto que en otros enuncia entes matemáticos (p.e. para la *interpretación* como fracción decimal "generalización simbólica, partición decimal, comparación , ordenación ")

En el manejo que a través de las distintas *interpretaciones* hace Kieren de la *estructura instruccional* , nos hace concebirla como la serie de actividades de análisis , planeación, elaboración y puesta en práctica que deberá desarrollar el docente , y en su momento los estudiantes, para la promoción del aprendizaje de esa *interpretación* .

Los elementos de esta estructura se encuentran con frecuencia relacionados secuencialmente en el tiempo, pero no es este el único tipo de relación que guardan entre sí, ni en el plano teórico ni en la praxis .

A partir de los conceptos básicos de Kieren (1975), así comprendidos, se enfocan las dos grandes áreas que aborda el artículo : el aprendizaje del número racional , y las investigaciones necesarias en torno a este aprendizaje .

En cuanto al aprendizaje .

Con base en las propuestas de Kieren (1976), está la idea de que los aprendizajes en matemáticas dependen del contenido matemático específico, el sujeto que aprenderá y los mediadores entre uno y otro : docente ,curriculum, instrumentación didáctica, etc.

Como ya se señaló en la Introducción, se coincide con esta posición respecto al proceso de aprendizaje, por lo que no se discutirá aquí.

Kieren presenta siete *interpretaciones* de número racional en lenguaje llano, acompañadas de las *estructuras matemáticas* y *cognitivas* que les corresponden mediante un análisis lógico .

Cada una de las *interpretaciones* se aborda de una manera diferente, así para la *interpretación* como fracción el concepto no se hace explícito sino a través de su tratamiento en textos de uso generalizado en diferentes épocas, es decir, se apoya en aspectos documentados de la praxis de esa épocay a partir de ella plantea la *estructura matemática* correspondiente.

La *estructura instruccional* es tipificada muy brevemente, aunque el análisis crítico de las *estructuras instruccionales* usuales para esta *interpretación* es extenso y se ve resumido en esa tipificación .

En el caso de razón, la situación es similar en cuanto a la aproximación a ella a través de la solución de un ejercicio, lo que permite evitar la <definición matemática>, la cual además, no es forzosamente coincidente con la de racional , como el mismo Kieren señala[10] .

[10] Kieren, T. E.; "On the Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations", Number and Mesurement, Papers from a research vorkshop; EEUU., p. 112.

Para las *interpretaciones* de racional como clases de equivalencia, operadores o mapeos, medidas y fracciones decimales, se tienen alusiones inmediatas al concepto matemático respectivo; el único caso en que se plantea una definición matemática explícita es el de racional como elemento de un campo de cocientes .

Por lo tanto, pasar de la *interpretación* a la *estructura matemática* presenta dificultades, ya que la forma de enunciar la primera no precisa muchos elementos matemáticos y, por otro lado, el análisis lógico completo de los requisitos para lograr su aprendizaje podría resultar demasiado amplio si no se suspendiera en cierto punto[10] .

En cuanto a las *estructuras cognitivas*, éstas presentan elementos que corresponden a diferentes momentos del desarrollo del individuo, como la inclusión, ya presente en el subperiodo de las operaciones concretas; y el razonamiento a partir de hipótesis involucrando las implicaciones en forma simbólica, que es propio del periodo de las operaciones formales en su segundo estadio.

Kieren mismo señala la disparidad de los avances logrados en cuanto a las investigaciones que permiten precisar las relaciones entre cada *interpretación* y los requisitos matemáticos y el nivel

[10] P.e. para la fracción se requiere de habilidad para realizar operaciones con fracciones, lo que requiere habilidad para operar con enteros, lo que a su vez requiere habilidad para operar con naturales, etc.

de desarrollo del estudiante, como ya se dijo antes . Particularmente señala la necesidad de investigaciones que aclaren el proceso de aprendizaje de número racional .

La diferencia en la extensión de los tratamientos de cada *interpretación* nos habla también de estas dificultades y aunada a la diferencia de la forma de abordar las *interpretaciones*, se toma como indicio de dificultades matemáticas intrínsecas a la *interpretación* respectiva .

Tal apreciación será rectificada o ratificada tras abordar el concepto matemático de número racional .

Pese a estas dificultades Kieren presenta la riqueza del concepto de número racional no sólo en el aspecto matemático, sino para la educación matemática misma, por los conocimientos,habilidades y utilización de operaciones y habilidades intelectuales propias de diferentes periodos de desarrollo del individuo que propicia .

De esta manera, la propuesta de promover el aprendizaje del número racional como el *conglomerado* de las *interpretaciones* queda ampliamente fundamentada .

En cuanto a las investigaciones .

Por todo lo antes dicho, la necesidad de investigar en torno al concepto matemático de número racional y las formas en que los individuos aprenden tal concepto, queda justificada.

Kieren ha mostrado la riqueza del aprendizaje de tal concepto como *conglomerado*, justifica también la necesidad de investigar cuáles son las *estrategias instruccionales* adecuadas para lograrlo, lo que significa no sólo investigar acerca de las estrategias para cada *interpretación*, sino tambien diseñar una "*estrategia maestra*" que permita relacionar y coordinar las anteriores para lograr el aprendizaje del *conglomerado* y no sólo de sus partes .

Las relaciones entre las investigaciones acerca de los tres aspectos antes mencionados son claras, una *estrategia instruccional* difícilmente será exitosa si no se conocen suficientemente el ente matemático cuyoaprendizajedeberápromover,y los procesos psico-intelectuales que lo permiten .

Del mismo modo,las investigaciones en torno al aprendizaje de un cierto ente matemático requieren del conocimiento, mientras más amplio mejor, de dicho ente y del marco en que se promueve el aprendizaje.

Por último, es evidente que el conocimiento matemático es incapaz, por sí sólo,de dar alternativas adecuadas a los problemas de la educación matemática, por lo que requiere al menos de los otros dos tipos de investigaciones mencionadas.

Actualmente la educación escolarizada es un fenómeno generalizado.

Uno de los recursos más utilizados para intentar dirigir tal educación escolarizada es el diseño del curriculum de las instituciones educativas. De allí que Kieren plantee la investigación en torno a diseño curricular como eje de las investigaciones en torno a este problema .

Comentarios .

Las siete *interpretaciones* de Kieren (1976), permiten exhibir la necesidad de trabajar en función del aprendizaje de número racional desde la infancia hasta la adolescencia, ya que las *estructuras cognitivas* correspondientes incluyen elementos desde el periodo de las operaciones concretas hasta el periodo de las operaciones formales.

Habrá que considerar también la necesidad de trabajar en función de ese aprendizaje en los momentos en que se gestan los elementos de los periodos antes mencionados .

Intentar recategorizar las siete categorías propuestas por Kieren (1976), carece de sentido si sólo se aborda matematicamente.

El conocimiento psicológico al respecto aún es muy escaso para sustentar tal discusión, sin embargo se destacan dos líneas matemáticas en ellas :

la línea aritmética-algebraica y
la línea geométrica

ambas se conjugan , y en las *interpretaciónes* como decimal periodico, y, operador o mapeo, se involucran elementos del análisis matemático y el funcional.

En la línea aritmética-algebráica consideramos las *interpretaciones* de número racional como:

fracción
clases de equivalencia
cociente de enteros
decimal periodico
elemento de un campo de cocientes .

En la línea geométrica :

medida o punto en la recta numérica
operador o mapeo .

Trataremos de esquematizar las relaciones matemáticas de cada bloque en los siguientes diagramas, en ellos las notas de la izquierda se refieren al desarrollo intelectual necesario para tales aprendizajes desde el conocimiento actual de los mismos.

fracción
relación parte-todo

Operaciones
concretas

cociente de enteros

clases de
equivalencia

decimales
periódicos

Operaciones
formales

elemento de un campo

Para el segundo bloque un intento de esquematización hace explícita su imbricación con el primero :

partición deducción concreta noción de unidad y subdivisión arbitraria	medidas o puntos en la recta numérica	$\supset$	relación parte-todo clases de equivalencia orden decimal periodico
preproporcionalidad composición reversibilidad generalizada	operadores multiplicativos o mapeos	$\supset$	clases de equivalencia función

Las dos observaciones anteriores plantean la necesidad de atender los aprendizajes requeridos para el de número racional desde el nivel pre-escolar hasta el bachillerato, abordando los aspectos aritmético-algebraico y geométrico mediante una curricula adecuada y una " *estrategia maestra* ".

Esta necesidad surge del nivel de desarrollo intelectual que demandan del estudiante o *estructuras cognitivas*, las edades de los estudiantes en cada ciclo escolar y los tiempos disponibles en cada curso .

Hay que señalar que el planteamiento anterior es válido sólo en la medida en que el aprendizaje del número racional, en el sentido aquí discutido,sea socialmente necesario:La escuela tiene ciertas interrelaciones con el resto de la sociedad que la instituya y refleja, de alguna manera, los intereses de la misma en su curriculum. Por el momento se considerará la presencia de los contenidos en el curriculum como constancia de que son socialmente necesarios, aunque sobre estepunto hay mucho que debatir.

Ademas, que ese planteamiento es posible sólo si se garantiza la escolaridad del estudiante a través de cuatro ciclos escolares: pre-escolar, básico, medio básico y medio superior ; aspectos fundamentales en países como el nuestro.

La necesidad de investigaciones coordinadas en torno al aprendizaje del número racional es tambíen clara, e inclusive sus resultados contribuirían a esclarecer aspectos relacionados con la necesidad social de los mismos.

La validez de un intento así y la factibilidad del mismo dependen de aspectos más propios de la sociología educativa .

Sin embargo se percibe la utilidad de los trabajos en este sentido y la necesidad de enmarcarlos en el contexto específico del país en que se desarrollen .

Algunos aspectos particulares de las propuestas de Kieren (1976) implican ciertos riesgos en cuanto a los aprendizajes que se puedan lograr .

a) La fracción, con la *estructura instruccional* que la acompaña atiende básicamente al dominio algorítmico en racionales .

Por lo tanto la posibilidad de retomar la relación parte-todo es pobre y por razones prácticas se restringe en general a partes propias, lo que tal vez conforme un concepto erróneo de racional como fracción propia.

También es pobre su contribución a la formación del concepto de operación, como ya señala Kieren .

Es posible que necesitemos promover el dominio algorítmico en los racionales sin recurrir a esta *interpretación*, y ligándola más al concepto de operación para hacerlo eficaz .

Sobre este punto regresaremos a partir de los resultados encontrados en el estudio exploratorio .

b) El cociente de enteros como " razón " restringe el concepto de razón, creando confusión en cuanto a los conceptos matemáticos y a los aspectos esenciales en la aplicación de los mismos .

c) La *interpretación* como operador multiplicativo o mapeo conlleva también el riesgo de restringir conceptos.

Por ejemplo en el mapeo se preservan ángulos, elemento implícito en las propuestas de Kieren al respecto y difícil de exhibircomo parte constitutiva del concepto de número racional , como veremos al tratarlo matemáticamente.

II ESTUDIO EXPLORATORIO

II.1 El cuestionario en que se basó este estudio.

Como ya se dijo en la introducción, este estudio exploratorio se desarrolló en base a las *interpretaciones* del número racional y los requisitos matemáticos y de desarrollo para su aprendizaje propuestos en Kieren(1976) ya analizado en el Capítulo I, y los elementos que en la curricula previa al bachillerato los atienden

El propósito del estudio era indagar cuales de los subconstructos de número racional mencionados en dicho artículo manifestaban poseer los estudiantes de primer ingreso al bachillerato del C.C.H. y cuales eran las dificultades.

Interesaba también apreciar en que contextos podían manejar dichos subconstructos.

Los resultados encontrados permitirían aproximarnos más a la ubicación de la problemática que respecto a dichos subconstructos manifiestan los alumnos al ingresar al bachillerato y, probablemente, indicar las posibles causas de dicha problemática en términos de la curricula previa y el concepto matemático de número racional.

Para realizar el estudio se diseñó un cuestionario para utilizarlo como examen diagnóstico.

El cuestionario se elaboró en dos etapas.

En la primera se elaboró una versión que fué discutida por profesores y alumnos en el Seminario de Tesis.

Tomando en cuenta las discusiones en dicho seminario se elaboró una segunda versión, llamada "*Examen Diagnóstico acerca de los Números Racionales (1.1)*" que se presenta en el apéndice 2.

En ella se incluyen 60 reactivos que atienden seis de los siete subconstructos del número racional y que se describen a continuación, agrupados en función del subconstructo que miden.

1. Fracción o relación parte-todo

Con 20 reactivos, 1/3 del total, se indaga acerca de este subconstructo.

Se incluyen 16 reactivos que lo miden directamente a nivel de identificación, y simbolización de la fracción, representación diagramática de la fracción en un todo dado y representación diagramática del todo y la fracción.
En estos reactivos se manejan todos continuos usuales e inusuales en el sistema escolarizado, así como todos discretos. Se incluyen particiones regulares, es decir, con todas sus partes congruentes entre si para facilitar su identificación visual, e irregulares.

En el cuestionario aparecen cuatro reactivos que involucran la relación parte-todo en la solución de problemas verbales, se pide una parte de un todo dado, la habilidad para manejar el todo como relativo y la habilidad para obtener la parte complementaria a una dada conociendo el todo.

Hay pues tres parámetros para cada reactivo: el nivel del reactivo,es decir, la categoría a la que pertenece de aquellas que se consideraron en orden creciente de complejidad y con apoyo en algunas taxonomias existentes, el tipo de todo y el tipo de partición , en las siguientes listas se presentan cada uno de ellos.

Nivel de Reactivo

1. Identificación

2. Identificación y simbolización

3. Representación diagramática con todo dado

4. Representación diagramática total

5. Solución de problema verbal: obtener parte

6. Solución de problema verbal: obtener parte complementaria.

Tipo de Todo

1. Todo continuo usual

2. Todo continuo inusual

3. Todo continuo relativo

4. Todo discreto

5. Todo discreto relativo

Tipo de Partición

1. Partición regular

2. Partición irregular

Para tipificar sintéticamente cada uno de los reactivos de este bloqueutilizaremostriadasordenadasconeldígito correspon-diente al nivel en primer término, el correspondiente al tipo de todo en el segundo y, finalmente, el correspondiente al tipo de partición en el tercero, si es el caso o un guión si no lo es.

Así el reactivo 1a es de identificcién (1), con todo continuo usual (1) y partición regular (1); por lo que le asociamos la triada (1,1,1).

Los 20 reactivos que se refieren a la fracción o relación parte todo, quedan entonces tipificados como:

1a (1,1,1)	1a'(1,1,1)	1d'(1,2,1)
1b (1,2,1)	1b'(1,1,1)	2a (2,1,1)
1c (1,1,1)	1c'(1,1,2)	2b (2,1,1)
2c (2,2,2)	4b(3,4,-)	16b(5,3,2)
3a (2,4,-)	5a(4,1,1)	16c(6,3,2)
3b(2,4,-)	5b(4,1,1)	17b(6,4,2)
4a(3,4,-)	16a(5,1,2)	

Los reactivos de identificación, del 1a al 1d', pretendían recoger información acerca de la posesión más elemental de la relación parte-todo, discriminar si en un diagrama se presenta o no una partición dada verbalmente, eliminando al máximo problemas de notación.

Se manejaron en ellos sólo todos continuos, por considerarse estos los más accesibles; se incluyeron en ellos los usuales en el sistema escolarizado, así como los inusuales para indagar si esta diferencia influía o no en la habilidad para identificar la relación parte-todo.

Sólo uno de estos siete reactivos incluye una partición irregular, para indagar si los alumnos comprenden la fracción $\frac{1}{n}$ como <u>una de las n partes iguales en que se divide el todo.</u>

Los reactivos del 2a. al 3b requieren identificar la parte sombreada de un todo y simbolizarla como fracción.

Su presencia en el cuestionario se considera importante pues, si los alumnos no pueden siquiera simbolizar la relación parte todo identificada visualmente, posiblemente tendrán dificultades para desenvolverse en el bachillerato que demanda ampliamente habilidades para simbolizar situaciones más complejas, más abstractas y generalmente carentes de un apoyo diagramático.

Se incluyen todos continuos usuales e inusuales y particiones regulares e irregulares, para detectar si la identificación y su simbolización dependen o no de esterotipos escolares del todo y las particiones:

Así mismo se presentan todos discretos con un número entero de elementos sombreados. Estos últimos reactivos responden a la necesidad de indagar si el tipo de todo, continuo o discreto, afecta la posibilidad de identificar y simbolizar del alumno.

Una acción del alumno que permite clarificar más su aprehensión de la relación parte-todo es que construya una representación diagramática de una relación parte-todo simbolizada mediante una fracción.

Si le es posible realizarla, y posee la habilidad para identificar en diagramas sombreados la relación parte-todo involucrada, tendrá, al menos en este aspecto, los elementos mínimos necesarios para aplicar el concepto de racional a la solución de problemas.

Es decir, podrá simbolizar una relación parte-todo dada e interpretar una fracción como la parte correspondiente de un todo.

La representación puede apoyarse en un diagrama dado que hay que concluir o realizarse sin apoyo alguno.

El todo puede ser discreto y la partición involucrada incluir un número entero de sus elementos o no, o puede ser continuo.

A estos aspectos se abocan los reactivos del 4a al 5b e incluyen, por primera vez en el cuestionario fracciones impropias.

Las fracciones impropias están incluidas para intentar averiguar si la relación parte-todo se concibe sólo como la de una parte propia de un todo finito o no, dicho en otros términos, si el alumno identifica la fracción sólo como la fracción propia o no.

En los reactivos 16a, 16b , 16c y 17b se pretende detectar la habilidad de los alumnos para resolver problemas verbales que involucran la relación parte-todo.

El que lo logren depende de diversas habilidades, tales como las de lecto-escritura; reconocimiento de datos, incógnitas y relaciones entre ellos; simbolización y algoritmia, en general.

En el problema específico al que se refieren los reactivos 16a, 16b y 16c deberán ser capaces de calcular la parte pedida de un todo dado, concebir el todo como relativo para poder calcular la parte pedida del nuevo todo que constituye el resultado anterior y por último calcular la parte complementaria a la última calculada.

En el 17b también se pide obtener una parte complementaria, pero el todo no está cuantificado y las dos partes que hay que considerar para obtener una tercera, complementaria respecto a ellas, son equivalentes.

Se consideran que estos cuatro reactivos son más abstractos y complejos que todos los anteriores, y su presencia responde a la necesidad de averiguar que uso pueden hacer los alumnos de la relación parte-todo.
Así tenemos, como se planteó al iniciodeesteapartado, que un totalde 20 delos 60 reactivos del cuestionarioseproponenpara obtener:información de las habilidades que para identificar, simbolizar, representar con diagramas o utilizar en solución de problemas verbales la relación parte-todo manifiestan poseer alumnos de primer ingreso al bachillerato.

Estos reactivos son la tercera parte del cuestionario.

2. Clases de equivalencia de cocientes de enteros, fracciones equivalentes.

Dieciseis de los sesenta reactivos del cuestionario, es decir, 8/30 de los mismos, pretende indagar acerca de la concepción y uso en diferentes contextos, que acerca de este subconstructo pueden mostrar los alumnos de primer ingreso.

Se incluyen por primera vez en ellos reactivos de justificación, es decir, reactivos cuya respuesta consiste en justificar una o varias respuestas anteriores.

Este tipo de reactivos son considerados los más complejos, pues requieren que el alumno se encuentre en un nivel de desarrollo que le permita reflexionar sobre la manipulación que realiza para percatarse de que *requiere* una justificación, diferenciar esta de una descripción, y ser capaz de elaborarla a partir de sus conocimientos.

En este bloque los reactivos de justificación son cinco, el 6J, 7J, 14aJ, 14bJ y 14cJ.

Los dos primeros pertenecen a un primer nivel de justificación: nombrar la propiedad que se utilizó para obtener las respuestas anteriores.

En los tres últimos deberán justificar los algoritmos de adición y sustracción de racionales, entre otras cosas.

Es decir, en parte de la respuesta deberá exhibir la comprensión de la necesidad de convertir a fracciones equivalentes, para definir la adición y la sustracción en los racionales.

Esto requiere una concepción bastante completa del número racional, no como número aislado, sino, en el contexto de *sus* operaciones.

Estos cinco reactivos responden, a la necesidad de averiguar en que medida las acciones desarrolladas por los alumnos para obtener las respuestas anteriores les son claras y están fundamentadas.

Por lo tanto arrojarán una cierta información indirecta acerca del adiestramiento algorítmico mecánico, y su nivel de madurez.

Todos los otros reactivos miden la posesión del subconstructo de clases de equivalencias básicamente a través del uso de las fracciones equivalentes en contextos que demandan acciones de diferente nivel.

Esos niveles y los reactivos correspondientes son:

Discriminación entre fracciones equivalentes y no equivalentes (6,7a); algoritmia para obtener fracciones equivalentes a una dada(7a, 7b. 7c, 7d) discriminar fracciones equivalentes y no equivalentes al ordenar una serie de fracciones dadas (8); discriminar fracciones equivalentes, y no equivalentes al localizarlas en la recta numérica (8c); obtener fracciones equivalentes a las dadas para compararlas entre si, es decir poseer el criterio comparativo y la algoritmia para aplicarlo (9a, 9b); e identificar fracciones equivalentes al resolver problemas verbales (17a).

<u>3. Fracción decimal finita o periódica infinita</u>

Diez reactivos del examen, 1/6 del mismo pretenden indagar cual es el manejo que entre fracciones comunes y decimales, y fracciones decimales y clases de equivalencia de cocientes de enteros hacen los alumnos.

Los reactivos son de tres niveles, algoritmicos 12a a 12d, 13a a 13c,de descripción 12D y 13D, y de justificación 12J .

Así permiten percibir cual es el uso y comprensión que del número racional como cociente indicado de enteros poseen; su algoritmia para dividir enteros, y el papel que en ella juega la notación posicional base 10 ;lo que facilitará u obstruirá su algoritmia y comprensión de la relación entre decimales finitos o periódicos infinitos, y clases de equivalencia.

Sólo se incluyen en ellos una fracción común y una decimal impropia (en 12d, 7/5 y en 13c. 1,5).

No se utilizaron fracciones decimales periódicas infinitas para evitar problemas por desconocimiento de la notación.

4. Elemento de un campo de cocientes infinito ordenado.

Que un alumno de primer ingreso a bachillerato sea capaz de utilizar el número racional con sus cuatro operaciones básicas y las propiedades de estas, así como las de densidad y orden; sería algo ideal en ciertos sentidos.

Si además es capaz de describir los procedimientos que utiliza y justificar sus respuestas, tendremos la formación previa idonea en torno al número racional, de acuerdo a lo discutido en el capítulo anterior, para su trabajo en el bachillerato,y no se requerirá abordar nuevamente en él el concepto de racional, al menos en el contexto algebraico.

Para averiguar si esa es la situación, se incluyen 19 reactivos en el examen diagnóstico.

Si las respuestas a estos 19/60de los reactivos muestran que la situación inicialmente descrita no se ha logrado, seguramente también indicarán cuales son losaspectosa retomar para hacerlo.

Entre los 19 reactivos tenemos diez que indagan acerca de la posesión de algoritmos para: operar con los racionales utilizando las propiedades de sus operaciones: 14a, 14b, 14c, 14d, 14e, ademas se incluyen tres reactivos en que deberán ordenar racionales: 8, 9a, 9b. El primero incluye racionales negativos y positivos, y un par de fracciones equivalentes. Se indaga ademas la existencia de nociones o preconceptos de densidad de los racionales en los reactivos 10 y 11.

Hay también dos reactivos que se resuelven mostrando el neutro multiplicativo y el inverso multiplicativo de un racional dado, 15a, 15b respectivamente.

Por último se incluyen un reactivo de descripción, 11D, acerca del procedimiento con que utilizaron o exhibieron su noción de densidad; y seis reactivo de justificación, los 10J, 14aJ, 14bJ, 14cJ, 14dJ y 14eJ.

El primero se refiere nuevamente a densidad; los cinco restantes a los algoritmos de las cuatro operaciones básicas y las propiedades de las mismas involucradas en las operaciones concretas que efectuaron en los reactivos de algoritmia correspondientes.

5. Operador multiplicativo

Alumnos que se percaten claramente de que un número racional aumenta o disminuye a otro mediante la multiplicación, no solo en función de los signos de ambos, y que además puedan justificar esta situación, muestran elementos que permiten diferenciar los números racionales de los enteros y conformar el concepto de las operaciones entre racionales diferenciandolas de las operaciones entre enteros.
Posiblemente esto facilite su desmpeño en el bachillerato donde los conceptos algebraicos, como el de operación binaria, tienen un papel importante.

Por eso cinco de los sesenta reactivos del examen, que son 1/12 de los mismos, se dedican a este aspecto.

Los reactivos 9aJ y 9bJ van directamente a la justificación de un producto menor que sus dos factores y otro mayor, cuando los factores son racionales positivos. El reactivo 14d indaga la posesión del algoritmo para utilizarlos como operadores multiplicativos, y los otros dos reactivos, que son el 16a y 16b, utilizan el racional como operador multiplicativo en la solución de un problema verbal.

<u>6. Medida o punto en la recta numérica.</u>

Sólo un reactivo, el 8c que constituye 1/60 del total de reactivos del examen atiende este aspecto del número racional.

En el se pide que indiquen en un segmento de recta con una escala marcada diez fracciones comunes, entre las que se encuentran dos equivalentes entre sí.

Dichas fracciones las deben ordenar primero en el reactivo inmediato anterior, el 8.

El séptimo aspecto del número racional manejado por Kieren en el artículo citado: número racional como razón de enteros, no se incluyó en el examen diagnóstico.

La razón fundamental para que este aspecto quedara excluido fué la no coincidencia de la razón con el número racional, como se verá en el capítulo: El concepto matemático del número racional.

En una tabla de dos entradas: nivel del reactivo vs. aspecto, se presentan los 60 reactivos del examen. (Tabla 1).

Los que requieren de otros dos parámetros irán acompañados del par ordenado que los identifican en la sección correspondiente.

La tabla exhibe claramente el desbalance en cuanto a número de reactivos por aspecto tratado, y en cuanto a los niveles tocados para cada aspecto.

La atención se centra, en este examen diagnóstico en la relación parte-todo,el campo de cocientes ordenado infinito, las clases de equivalencia, se averigua en orden decreciente sobre el decimal finito o periódico infinito, el operador multiplicativo y la medida o punto en la recta numérica.

Es decir hay un claro predominio algebraico que en cierta medida responde a la percepción de la currícula previa y al conocimiento empírico de lo aprendido por los alumnos en su escolaridad anterior al bachillerato.

II.2 Prueba del cuestionario.

La versión que acabamos de describir, y que como ya se dijo, fué la segunda versión del examen diagnóstico, se probó con una muestra de 6 alumnos recien egresados de tercer año de secundaria.

La secundaria a la que asistieron estos sujetos está en la zona geográfica cuya población puede pertenecer al Plantel Sur del C.C.H., donde se hizo el estudio exploratorio.

Interesaba detectar lo adecuado del cuestionario en cuatro aspectos:

Formato, vocabulario, comprensibilidad de las instrucciones para los estudiantes y medición de los diferentes aspectos del número racional.

Se pretendía también tener una apreciación del tiempo necesario para su aplicación.

La muestra estaba formada por tres mujeres y tres varones.

Las edades oscilaban entre 14 años 11 meses y 15 años 7 meses. Todos los sujetos habían aprobado matemáticas,dos de ellos reprobaron una o dos materias en tercer año de secundaria, y uno aprobó con 10 de promedio los tres años de secundaria.

Todos provenían de la misma secundaria diurna, de dos grupos escolares diferentes atendidos por el mismo profesor de matemáticas.

II.2.1 La aplicación del cuestionario para la prueba.

La aplicación del examen duró entre 1 hora 5 minutos y 1 hora 17 minutos, lo que resulta razonable para la aplicación en las condiciones reales a la población de interés para este estudio.

Los comentarios y preguntas durante la aplicación permitieron detectar: errores de formato, la escala fué inadecuada en el reactivo 8c; dificultades con el vocabulario por parte de un sujeto; instrucciones imprecisas en los reactivos 7a a 7d ; sorpresa ante la petición de argumentos, justificaciones o explicaciones para un procedimiento o resultado; inquietud ante sus limitaciones acerca de un tema conocido.

II.2.2 Los resultados de la prueba del cuestionario.

Los resultados de esta aplicación se encuentran en la Tabla 2 y muestran que, si consideramos dificil un reactivo que resuelve correctamente a lo más un tercio de la muestra; de dificultad media el que logran resolver entre uno y dos tercios de la muestra, y fácil aquel reactivo que resuelven más de dos tercios de la misma tenemos:

Hay 10 reactivos dificiles, que son 1c, 8, 9a, 9b, 9aJ, 9bJ, 11, 11D, 12J y 14c, es decir 1/6 de los reactivos.

Otros 21 resultaron de dificultad media 1b, 1c, 1d', 5b, 6, 6J, 7c, 7d, 7J, 8c, 10, 10J, 12a, 12b, 12c, 12d, 12D, 13c, 14a, 14b y

14e, 21/60, más de un tercio del total.

Los 29 reactivos restantes 1a, 1a', 1b', 2a, 2b, 2c, 3a, 3b, 4a, 4b, 5a, 7a, 7b, 13a, 13b, 13D, 14d, 14aJ, 14bJ, 14cJ, 14dJ, 14eJ, 15a, 15b, 16a, 16b, 16c, 17a y 17b, resultaron fáciles.

Por lo tanto el cuestionario se puede considerar accesible para los alumnos de primer ingreso a bachillerato.

Además las dificultadesprincipales se refieren a :

- concebir $\frac{1}{n}$ como una de las n partes *iguales* que cubren el todo (1c').

- justificar la conversión de fracciones comunes a decimales, cuya algoritmia dominan y sin que muestren dificultad para el resto de las justificaciones (12j) concebir el número racional como elemento de un campo cociente ordenado, en tanto que no manejan la no asociatividad de la resta (14c), la densidad (11) y el orden (18, 9a, 9b) en los racionales.

Respecto a las deficiencias detectadas en el cuestionario se resolvió:

Mantener la ambigüedad de la instrucción para los reactivos del 7a al 7d, pues permite que los alumnos exhiban la preponderancia del aspecto clases de equivalencia, o, decimal finito o periódico infinito en su aprendizaje específico.

Utilizar una escala más amplia en el reactivo 8c para no crear dificultades innecesarias.

II.3 Población del estudio exploratorio .

La aplicación del cuestionario para el estudio exploratorio se hizo en la tercera semana de clases del semestre impar del ciclo escolar 88-89.

El cuestionario que se aplicó fué el mismo de la segunda etapa, pues no se pudo modificar el reactivo 8c por falta de tiempo para reeditar el cuestionario.

La muestra la conformaron 50 alumnos de un grupo escolar de primer semestre, perteneciente al turno 01 del Plantel Sur del C.C.H.

La población de interés son los 25000 alumnos de primer ingreso al bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades distribuidos en los cuatro turnos de cada uno de los cinco planteles.

Evidentemente la muestra tomada no es representativa de la población de interés, por lo que los resultados que se logren *no serán concluyentes*, por esto es que caracterizamos este trabajo como *estudio exploratorio*.

Dicho grupo estaba a mi cargo.

En la muestra había 22 mujeres y 28 varones.

Las edades oscilaban entre 14 años 8 meses y 28 años 6 meses.

La media de edad fue de 15 años 21 días, en tanto que la moda fué de 15 años 6 meses.

El 62% de la muestra tenía cuando más 16 años. El 38% tenía entre 16 años 1 mes y 17 años 11 meses. Sólo el 8% tenía más de 18 años.

II.4 Aplicación del cuestionario para el estudio exploratorio.

La aplicación se realizó al término de la tercera semana de clases para favorecer el que los alumnos tuvieran alguna familiaridad con el sistema C.C.H., los espacios físicos de su plantel y la profesora del curso, que fué quién lo aplicó.

No se dejo transcurrir más tiempo pues el contenido números racionales es de los primeros en el programa de Matemáticas I.

Con anterioridad a la fecha de la aplicación se planteo al grupo la necesidad de averiguar que habían aprehendido acerca del número racional en su escolaridad anterior, para reconocer cuales aspectos del mismo había que atender, cuales podían ser las dificultades de aprendizaje y, tal vez, cuales eran las causas de ellas.

También se les explicó que era importante que lo resolvieran lo mejor posible y en forma *individual* y que plantearan claramente cuando *no sabían* la respuesta.

Por último se aclaró que los resultados que lograran en este examen *no* influirían en *su calificación*, y que formarían parte de esta tésis.

La aplicación se realizó en el salón y el horario normal del curso.

Se reiteraron brevemente las explicaciones antes mencionadas, se pidió que toda duda o necesidad la plantearan a la profesora y se les dió una hora para resolver el cuestionario.
Los resultados que alcanzaron están en el apéndice 3.

II.5 Los resultados del estudio en cuanto a dificultad del cuestionario .

Es importante señalar que, a diferencia de lo ocurrido con la primera muestra en este estudio resultaron:

Dificiles 22 reactivos, que fueron los siguientes:

4b, 6J, 7J, 8, 8c, 9a, 9b, 9aJ, 9bJ, 10J, 11, 11D, 12J, 13c, 13D, 14b, 14aJ, 14bJ, 14cJ, 14dJ, 14eJ y 17b.

Es decir todos los de justificación, los de descripción salvo uno y los de orden, entre algunos de particiones, conversión a fracciones comunes, algoritmia y obtención de partes complementarias.

De dificultad media fueron 28 reactivos:
1b, 1c, 1d', 5a, 5b, 6, 7a, 7b, 7c, 7d, 10, 12a, 12b, 12c, 12d, 13a, 13b, 14a, 14c, 14d, 14e, 15b, 16a, 16b, 16c y 17a. Que son mayoritariamente de algoritmia.

Fueron fáciles ahora solamente diez reactivos:

1a, 1c, 1a', 1b', 2a, 2b, 2c, 3b, 4a y 15a .

Los primeros nueve se refieren a la relación parte todo y el último al uso del neutro ó idéntico multiplicativo.

Para la población de interés resultó un cuestionario difícil.

Las dificultades centrales se refieren a la posibilidad de justificar procedimientos o resultados, e incluso a describirlos, así como al orden en los racionales.

Parece también, que su mejor aprehensión se tiene en la relación parte-todo con todos y particiones usuales.

El análisis cualitativodelasrespuestas,alosbloquesde reactivos que miden cada uno de los subconstructos , se presentan en detalle a continuación.

II.6 Análisis de respuestas .

II.6.1 <u>El número racional como *fracción* o relación parte-todo.</u>

Los datos de las respuestas a los reactivos que miden este aspecto del concepto de número racional, se encuentran en la tabla (a).

TABLA (A).

RELACIÓN PARTE-TODO .

	1A	1B	1C	1A'	1B'	1C'	1D'	2A	2B	2C	3A	3B	4A	4B	5A	5B
E/ N.C.	1/0	24/0	2/0	4/0	4/0	16/0	15/0	0/0	0/0	19/4	8/1	7/1	1/1	15/2	15/2	9/2
% E	2	48	4	8	8	32	30	0	0	38	16	14	2	30	30	18
% N.C.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	2	2	2	4	4	4
% C.	98	52	96	92	92	68	70	100	100	54	82	84	96	66	66	78

RELACIÓN PARTE-TODO EN SOLUCIÓN DE PROBLEMAS .

	16A	16B	16C	17B
E/ N.C.	15/12	16/12	13/15	20/14
% E	30	32	26	40
% N.C.	24	24	30	28
% C.	46	44	44	32

E. :RESPUESTAS ERRONEAS N.C.: PREGUNTAS NO CONTESTADAS C. : RESPUESTAS CORRECTAS

En el examen 16 de los 60 reactivos, el 26.6% de los mismos, miden directamente el manejo del concepto de racional como fracción o relación parte-todo: 1a, 1b, 1c, 1a', 1b', 1c', 1d', 2a, 2b, 2c, 3a, 3b, 4a, 4b, 5a y 5b.

En ellos al menos el 52% de la muestra logró resultados correctos, reactivo 1b, y en los reactivos 1a, 1c, 1a', 1b', 2a, 2b y 4a, referidos a todos continuos usuales y que son el 43.75% de los 16 antes mencionados, se tuvo entre el 92% y el 100% de respuestas correctas.

Solo permite establecer que más de la mitad de la muestra maneja el concepto de racional como relación parte-todo y que, para todos continuos usuales, lo domina más del 90% de la misma.

Llama la atención el que el 56.25% de estos reactivos: 1b, 1c', 1d', 2c, 3a, 3b, 4b, 5a y 5b, tuvieron más del 10% de errores, entre 14 y 48 por ciento.

No contestaron los reactivos entre el 2% y el 8% de los sujetos, el 56.25% de los mismos los contestaron todos.

Parece que más del 90% de la muestra cree que domina este subconstructo del concepto de racional aunque no es así, pues sólo al 56.25% de los reactivos respondieron todos y hay hasta un 48% de errores en las respuestas.

Existen también cuatro reactivos: 16a, 16b, 16c y 17b, que son el 6.6% del total, que involucran la relación parte-todo en la solución de un problema.

En estos reactivos, además de la relación parte-todo está en juego la habilidad del sujeto para establecer relaciones a partir del enunciado del problema y por lo tanto su vocabulario y comprensión de lectura.

En ellos el mayor porcentaje de respuestas correctas fué 46, inferior al más bajo de los reactivos del bloque anterior, que fué 52.

El porcentaje más bajo de respuestas correctas fue 32, es decir, *ni la tercera parte de la muestra puede aplicar en la solución de problemas la relación parte-todo.*

El porcentaje de errores osciló entre 28 y 40, pero creció el porcentaje de reactivos sin contestar, entre el 24 y el 30.

Podemos plantearnos que, si bien *más del 90% de los sujetos creen dominar la relación parte-todo y al menos el 52% lo logra, sólo el 70% de los mismos creen que lo pueden aplicar a solución de problemas, lográndolo sólo el 32% Parecería que los conceptos han sido manejados en la escuela al margen de su aplicación en la solución de problemas* .

De los 16 reactivos mencionados al inicio de este apartado, los diez siguientes: 1a, 1b, 1c, 1a', 1b', 1c', 1d', 2a, 2b y 2c, son de identificación de la relación parte-todo en todos continuos.

Las *dificultades detectadas* en torno a estos reactivos al analizar las respuestas *parece que se deben* la presencia de:

- todos *continuos inusuales*, reactivo 1b con 48% de respuestas erróneas, 1c con 4%, 1d' con 30% y 2c con 38% de respuestas erróneas.

- *particiones irregulares*, n partes, no todas iguales, que cubren el todo, reactivo 1c' con 32% de respuestas erróneas y 2c con 38%.

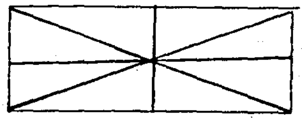
Otras dificultades se manifestaron en algunas de las respuestas erróneas.

Una de ellas de índole *no matemática*, el sujeto 14 respondió una serie de reactivos en función de la instrucción para los reactivos precedentes y *no atendió la instrucción correspondiente.*

Las de índole matemática se refieren, por una parte, a la *dificultad para identificar las partes que cubren un todo.*

Así tenemos que en el reactivo 1c' el 4% de los sujetos consideran que se tienen quintos, cuando la partición es claramente irregular. *Parecería que* $\frac{1}{n}$ *no es una de las n partes iguales que cubren el todo.*

En el reactivo 2b, partido en octavos que por pares se pueden visualizar como rectángulos



un sujeto consideró cada cuarto como un todo, 2% de la muestra.

Para el reactivo 2c, donde la partición no cubre el todo y este es inusual, se tienen diversas interpretaciones:

Ocho sujetos, 16% de la muestra,consideran las cinco partes sin marcar, que no son iguales entre sí, y las cuatro marcadas y contestan en novenos. Otra vez parecería que $\frac{1}{n}$ *no es una de las n partes iguales que cuben el todo.*

Dos sujetos más, 4% de la muestra, simplemente cuentan el total de partes que harían un todo, ya sea en décimos o en quintos y como un quinto está sin marcar responden:

numerador = denominador - 1 (ó n = d - 1).

Parecería que el *entrenamiento escolar les perjudica, al manejar la regla: denominador, o "todo", igual al total de partes omitiendo la igualdad entre ellas.*

Aquí nos referimos a que en m/n, el denominador indica el número n departesigualesenquesedividióeltotal.Enestos casos el total

coincide con la unidad, elque, obviamente, es cubierto por n de esas partes.
El numerador, m, indica solamente cuantas de las n partes iguales en que se dividió el total se están considerando, y en estos casos $m < n$.

Será siempre en este sentido en que nos referiremos al denominador como el todo.

Otros dos sujetos tienen tal dificultad para simbolizar lo que visualizan y para identificar las partes del todo que responden incorrectamente "1 4/2", tal vez refiriéndose a una (1) de las cinco partes del todo sin marcar y 4 de las partes del todo con la mitad (1/2) marcada, lo que simbolizan como 4/2.

Existe además, una respuesta atribuible a distracción o incomprensión de la simbolización $\frac{m}{n}$. Un sujeto, 2% de la muestra, responde $\frac{9}{4}$ por $\frac{4}{9}$.

La otra *dificultad matemática* manifestada en las respuestas erróneas *se refiere a la identificación del todo.*

Para dos sujetos, 4% de la muestra, las 4 partes marcadas son el denominador, es decir, el todo; independientemente de que el numerador sean las partes no iguales sin marcar (5) o no .

Otros ocho sujetos, 16% de la muestra, simplente cuentan las partes marcadas y las correspondientes sin marcar contestando en octavos. El quinto sin marcar no es considerado como parte del todo.

Un solo sujeto no distingue que 4/4 es igual a 1 o el total y responde "4/4". Parecería que hay cuatro rectángulos marcados parcialmente y este es el todo o denominador. Como hay 4 partes marcadas, ese es el numerador, y nuevamente el quinto sin marcar no es parte del todo.

Las respuestas correctas significativas fueron:

Dividir la parte que no lo estaba *para 'ver'* los décimos, lo que nos habla del nivel de desarrollo del sujeto que lo hizo en términos de *su capacidad de abstracción.*

Dar simplificada la respuesta o simplificar después de '*contarpartes*' (4/10 = 2/5), que señala en los ocho sujetos que lo hicieron *mayor capacidad de abstracción y conocimiento de las fracciones equivalentes.*

Los únicos reactivos de identificación con todos discretos son el 3a y 3b.

En ellos más del 80% de los sujetos respondieron correctamente y sólo un 2% no contestó.

Parecería que *prácticamente el total de la muestra cree que domina la relación parte-todo con todo discreto, y al menos las cuatro quintas partes logran identificarla.*

Las respuestas erróneas parecen indicar preponderantemente *dificultad para identificar el todo e incomprensión de la relación parte-todo.*

Diez sujetos, 20% de la muestra, consideran que los elementos marcados son el total de partes a considerar, ó numerador, pero que el todo, ó denominador son las partes sin marcar, que *no* incluyen, naturalmente a las primeras o bien lo hacen inversamente.

Los errores restantes son atribuibles a *dificultad para mantener la atención*, cuentan mal el total 3 sujetos, 6% de la muestra, o el número de partes marcadas, 6 sujetos es decir, el 12%.

Las respuestas correctas significativas hablan de *mayor capacidad de abstracción.*

Seis sujetos, 12% de la muestra, dan la respuesta simplificada o simplifican la fracción que obtienen contando.

Cuatro reactivos demandan representarfraccionesdadasentodos discretos (4a y 4b) o continuos (5a y 5b).

Al menos el 86% de los sujetos los resolvieron bien y cuando más el 8% no los contestó. Es decir *el 92% de la muestra cree poder representar la relación parte-todo y lo logran sólo las dos terceras partes de la misma.*

Las dificultades presentes en los dos primeros reactivos parecen deberse a la falta de atención y en 4b, además, a que la fracción pedida requería *partir uno de los elementos del todo.*

Las respuestas erróneas significativas indican:

Imposibilidad de dividir los elementos. *Un todo continuo se puede dividir en n partes iguales cualesquiera, pero un todo discreto sólo se puede dividir en divisores del total de sus elementos.*

El sujeto 13 lo dice explícitamente: "no se puede".

Cinco sujetos, 10% de la muestra, *aproximan* la respuesta sombreando 7 u 8 en vez de $7\frac{1}{2}$ elementos.

Nueve sujetos, 18% de la muestra, marcan sólo el número de elementos correspondientes al numerador, ya sea que den 3/10 ó 3/5.

Cinco sujetos, 10% de la muestra, cambian de todo. El rectángulo que contiene a los elementos discretos es parte y límite de su todo; lo dividen en cuartos y allí sombrean 3 elementos (2 sujetos) o los elementos que quedan incluidos en 3/4 (1 sujeto).

Los otros dos sujetos consideran el rectángulo como un todo continuo y sombrean en él 3/4.

Dos sujetos más, 4% de la muestra, no respondieron.

Las respuestas correctas, 33 sujetos o 66% de la muestra, fueron homogéneas, sombrearon 7½ elementos de los 10 del total. Para los otros dos reactivos, cuya dificultad era mayor en tanto que deberían construir el todo y las partes para representar fracciones impropias, las dificultades detectadas fueron:

La influencia del ejercicio anterior y la omisión de la instrucción correspondiente.

Cinco sujetos, 10% de la muestra, construyen todos discretos, pese a que la instrucción es "Considera el rectángulo como unidad y dibuja los que te sean necesarios para poder sombrear en ellos"

La dificultad de considerar más de un 'ejemplar' de la unidad al dibujar sólo un rectángulo, 9 sujetos ó 18% de la muestra.

El *rechazo a fracciones mayores que la unidad* marcando 8/15 en vez de 15/8 ó 4/5 en vez de 5/4. Nueve sujetos o el 18% de la muestra.

Las respuestas correctas fueron *homogéneas, rectángulos con el largo en posición horizontal o cuadrados con un lado horizontal.*

Para los reactivos 16a, 16b, 16c y 17b que involucran la relación parte-todo con todos continuos en la solución de un problema, y son el 6.6% de los reactivos, se tiene:

Al menos el 32% de la muestra los resolvió correctamente y hasta el 28% de la misma no los contesto. Es decir *el 72% de la muestra cree poder aplicar la relación parte-todo en la solución de problemas y ni la tercera parte lo logra.*

Las respuestas erróneas indican que:

Ignoran la primera relación que establece el enunciado:

"A Juan le heredaron 2/8 partes de un terreno de $4000m^2$"

Y a la pregunta "¿Qué superficie heredó?"responden "$4000m^2$", tres sujetos o el 6% de la muestra.

No conciben como operador multiplicativo la fracción; 2/8 son sólo 2/8 de la unidad y no esa parte de un todo con un valor específico, en este caso $4000m^2$; 7 sujetos o el 14% de la muestra que contestan '2/8'.

Algunos otros cometen *errores de cálculo, posiblemente debido al intento de simplificar 2/8 y calculan* 1/8 ó 1/16, 2 sujetos, o el 4% de la muestra.

El problema continúa: "El vendió 3/4 de su terreno", y ante la pregunta "¿Qué superficie vendió?" 6 sujetos, que son el 12% de la muestra, responden "$3000m^2$", que son 3/4 del terreno original. Evidentemente al menos para 3 de ellos *el cambiar el 'todo' no es factible*, pues solo tres consideraron que heredó $4000m^2$.

Seis sujetos más (12%) *siguen sin manejar la fracción como un operador multiplicativo que actúa sobre un todo diferente a la unidad* y responden "3/4" así *tampoco cambian de 'todo'*.

Persisten los errores de cálculo y un sujeto calcula 3/8 en vez de 3/4.

La última pregunta de este problema es: "¿Con qué superficie se quedó?".

Su respuesta depende de las dos anteriores y de la capacidad para, dada una parte de un todo, encontrar la complementaria.Para el reactivo 17b la situación es similar, la respuesta depende de la anterior y deben dar la fracción complentaria a dos fracciones equivalentes dadas.

Todas las respuestas erróneas (40% de la muestra) *indican la imposibilidad de obtener la parte complementaria, pues calculan fracciones que no complementan el total que manejan, independientemente de que corresponda o no al del enunciado.*

Los casos extremos son tres. El sujeto 21, que responde "12/12" sin percatarse de que eso es el total, y el sujeto 20, quien responde "20/14", resultando así que la parte complementaria es mayor que el total.

Para estos dos sujetos *la idea de partes complentarias de un todo falla, pues no conciben el todo como la unidad o no relacionan las fracciones equivalentes ni perciben su orden.*

El sujeto 8, tercero en situación extrema, responde *nada.* Nuevamente la noción de todo como unidad queda cuestionada; a menos que por dificultades algorítmicas, imposibles de precisar pues no incluye operaciones, las cantidades que sumó le dieron el total.

Así nos percatamos de que: para algunos sujetos (8%), el todo se asocia sólo con la unidad, por lo que 2/8 son 2/8, pero también se carece de la posibilidad de reconocer las fracciones equivalentes a esta y compararlas con otras en el 40% de las casos, y la parte complementaria puede ser igual o mayor que la unidad, por ejemplo.

II.6.1.1 Resumen de lo observado en las respuestas.

Resumiendo, las dificultades detectadas respecto al concepto de número racional como fracción o relación parte-todo son, en cuanto a todos continuos:

La identificación de todos inusuales, particiones que no cubren el todo, las partes, el todo y/o su simbolización.

En cuanto a representación diagramática:
la de representar más de un ejemplar del todo, que parece indicar que se concibe el todo como único; la de fracciones impropias, que apunta a la concepción de fracción sólo como fracción propia ; la representación estandarizada de los todos, que indica la existencia de un prototipo del todo ; la de n *fracciones* desiguales, que habla de un concepto incorrecto de 1/n, reducido a una de las n partes que cubren el todo, omitiendo la igualdad entre ellos.

En cuanto a la utilización de la relación parte-todo en la solución de problemas se encontró que: no se le concibe como operador multiplicativo y el todo es sólo la unidad, no un total con un valor específico diferente a uno; no es posible cambiar el todo, es decir, no hay todos relativos; no es posible dar la parte complementaria a una parte dada y en algunas ocasiones, se confunde con el todo por la forma de expresarlo.

Por otro lado, el omitir instrucciones o sustituirlas por otras, parece reflejar parte de las dificultades de comprensión de lectura.

II.6.1.2 Observaciones acerca de los logros escolares.

Por todo lo anterior consideramos que *podemos plantearnos el que la escuela:*

● promueve prototipos del todo y las partes que limitan las posibilidades de reconocimiento y construcción de los estudiantes.

* no logra la identificación de partes y todo.

● disocia los diferentes subconstructos del concepto de número racional.

● no logra el dominio de la relación parte-todo por parte de los estudiantes, para que puedan utilizarlo en la solución de problemas.

● no logra que el todo se comprenda como relativo

● no logra, como consecuencia de todo lo anterior, la comprensión y manejo adecuado de la simbolización.

● no garantiza la comprensión de lectura del enunciado de un problema simple, lo que impide que sea resuelto.

● no garantiza la identificación y comprensión de instrucciones leidas, lo que lo que obstruye el desempeño de los sujetos.

II.6.2 El número racional como clase de equivalencia. Fracciones equivalentes

Los datos de las respuestas a estos reactivos se encuentran en la tabla (b).

Cuatro reactivos, el 6, 6J, 8 y 8c, que son el 6.6% del total de reactivos, miden directamente este subconstructo del concepto de racional.

TABLA (B) .

CLASE DE EQUIVALENCIA .

	6	6J	8	8c
E/ N.C.	22/6	24/10	37/8	27/11
% E	44	48	74	54
% N.C.	12	20	16	22
% C.	44	32	10	24

OPTARON POR EL SUBCONSTRUCTO CLASE DEEQUIVALENCIA .

	7A	7B	7c	7D	7J	9A	9B	9AJ	9BJ
T.O.	14	14	14	14	14	3	3	3	3
E/N.C.	2/0	1/0	1/2	1/1	0/26	2/1	2/2	0/28	0/28
% E	14.2	7.1	7.1	7.1	66.6	66.6	0	0	0
%N.C.	0	0	14.2	7.1	*	*	*	*	*
% C.	85.7	92.8	78.5	85.7	33.3	33.3	100	100	100

E.: RESPUESTAS ERRONEAS   N.C.: PREGUNTAS NO CONTESTADAS   C.: RESPUESTAS CORRECTAS   T.O.: TOTAL DE LOS QUE OPTARON POR ESTE SUBCONSTRUCTO

* NO SE CALCULA PUES NO SE PUEDE DETERMINAR SI OPTO O NO POR ESTE SUBCONSTRUCTO .

Otros siete, 11.6% total, que son el 7a, 7b, 7c, 7d, 7J, 9a, 9b, posibilitan medirlo dependiendo del procedimiento que el estudiante elija para resolverlos.

Cuatro reactivos más: 14a, 14b, 14c y 17a o 6.6% del total, involucran este aspecto del concepto en su solución, ya sea en el algorítmo que deben aplicar, como en los tres primeros, o en la solución de un problema, como en el último.

En los cuatro primeros reactivos mencionados lograron la respuesta correcta entre el 10%, reactivo 8, y el 44%, reactivo 6, de la muestra.

No contestaron estos reactivos entre el 12 y el 22 por ciento de la muestra.

Parece que menos de las cuatro quintas partes de la muestra creen dominar este subconstructo, aunque sólo sea así para la décima parte de la misma.

De los 14 sujetos que, para el segundo bloque trabajaron este aspecto del concepto, la situación es más extrema. Lo resuelven bien entre el 33.3%, reactivo 7b, y el 92.86%, reactivo 7d, es decir, *al menos la tercera parte de los que eligen este enfoque lo manejan suficientemente bien para poderla aplicar.*

El 100% de respuestas correctas para los reactivos 9aJ, 9bJ y 7J, no es significativo, pues sólo indica que el total de esos sujetos eligió el subconstructo clases de equivalencia para resolver los otros reactivos de este bloque.

Los reactivos no contestados van del 7.14% para el reactivo 7d, al 14.28% para el 7 c .
Solo parece indicar que 1 o 2 de los 14 sujetos que eligen el subconstructo clase de equivalencia, no poseén ni la algorítmia que les permita aplicarlo.

El enunciado para los reactivos 7a a 7d es:

" ?De que otro modo puedes expresar cada una de las siguientes fracciones? ?Por qué?

a) 18/3
b) 15/25
c) 67/18
d) 680/30

la pregunta "¿por qué"? es el reactivo 7J o la justificación de las cuatro respuestas anteriores.

Entre los 14 sujetos que en su respuesta a este último reactivo asumieron el subconstructo clase de equivalencia, *parece haber diferencias sustanciales en cuanto a su nivel de desarrollo.*

Justifican sus respuestas 3 de las 14 sujetos, con argumentos que exhiben su comprensión del racional como clase de equivalencia y dos algoritmos para obtener las respuesta 7a a 7d. Así el sujeto 23 que dice: "¿porqué las fracciones tienen equivalentes?" y responde 7a y 7b utilizando dos algoritmos diferentes, aunque no contesta los reactivos 7c, con numerador primo, y 7d, con numerador y denominador 'grandes'.

Cuatro sujetos de los 14, sólo argumentan que "son equivalentes". El más desarrollado de ellos, sujeto 23, muestra un concepto de racional que estructura tres de sus subconstructo:

cociente de enteros, a/b

clase de equivalencia, $a/b = na/nb$ ó $a/b = fa'/fb' = a',b'$, cociente indicado de enteros, que lleva a la expresión decimal finita o periódica infinita. $a/b = c$ ó

$a/b = c_{1...}c_{m}, r_{1..} r_{n} \overline{p_1 \; p_5}$.

De los restantes, dos exhiben dos algorítmos para encontrar fracciones equivalentes y el otro sólo maneja uno, $a/b = na/nb$ con $n \neq 0$.

Sin embargo hay dos sujetos más, de los 14, que, aunque exhiben dos algoritmos para obtener fracciones equivalentes, no se refieren a la equivalencia en su justificación. Probablemente aun no formalizan a ese nivel el concepto que, parece evidente, ya tienen formado.

El sujeto 27 declara no poder justificar su respuesta, pero exhibe dos algoritmos para obtener fracciones equivalentes, *problablemente comprende ya lo que es justificar, aunque no lo logre.*

El sujeto 13 sólo dice "porque simplificamos" que es lo último que hizo, aunque exhibe dos algoritmos. Aquí parece que se posee también el concepto y sólo se ha formalizado como para nombrar un algoritmo, no la propiedad de la que depende su existencia.

Es decir, se nombran procedimientos, no propiedades, por lo que en este caso no se justifica.

Un sujeto más, el 50, obtiene fracciones propias y enteros, diciendo que "unos se pueden convertir a enteros y otros tienen fracciones equivalentes". No posee pues ni el concepto de racional como clase de equivalencia, ni el de los enteros como subconjunto de los racionales.

Por último el sujeto 40 simplifica en los reactivos 7a a 7d, y para cada uno describe como simplificó, pretendiendo qué esta es la justificación. Este sujeto *sólo muestra capacidad para aplicar* *algoritmos específicos adecuadamente; no muestra capacidad para justificar, pues sólo describe y ni siquiera exhibe una descripción general,* lo que habla de *poca capacidad de abstracción lo que le impide generalizar.*

Resumiendo, *manifiestan poseer y deominar el conceptode número racional como clase de equivalencia* 10 *de los* 14 *sujetos, es decir el* 71.42% *de los mismos,* aunque sólo sepan nombrar la propiedad de

equivalencia utilizada 6 de entre ellos, su 42.85%

De ellos *sólo* la mitad, 3 , *son capaces de justificar y sólo uno ó el* .14% *es consciente de que no puede hacerlo, lo que parece indicar que ya comprende lo que es una justificación y su diferencia con una descripción.*

Las *dificultades detectadas se refieren a:*

- *Inexistencia del concepto de fracciones equivalentes.*

- *Formación incompleta del concepto de fracciones equivalentes.*

* *Dificultades algorítmicas*

- ***Heterogeneidad en el nivel de desarrollo de los sujetos,***

concretada en: diferenciar o no una justificación de una descripción; diferenciar o no una propiedad de un algoritmo, ser o no capaz de dar una descripción generalizada de n casos de un mismo proceso, manifestar o no la integración de varios subconstructos del concepto de racional .

En cuanto a los primeros cuatro reactivos de los que se habló en esta sección, tenemos que, al 6 "¿Es cierto que 3/9, 9/27, 6/18, 7/15 y 4/42 son el mismo número?" respondieron si 22 sujetos, el 44% de la muestra.

Además otros seis sujetos, 12% de la muestra, no respondieron el reactivo 6, sin que se puedan precisar las dificultades que les impidieron hacerlo.

A partir de estos resultados podemos *considerar que ni la mitad de la muestra posee un dominio del concepto de fracciones equivalentes suficientes para discriminar cuando son equivalentes y cuando no, un conjunto de fracciones dadas.*

Para el reactivo 6J en cambio, las respuestas erróneas, 16 , *indican dificultades en torno al concepto de equivalencia de fracciones.*

Las respuestas incorrectas indican también heterogeneidad en la posesión del concepto de racional como clase de equivalencia. Desde los que especifican que las tres primeras fracciones son equivalentes entre sí, mientras las dos últimas no lo son y 'lo hacen ver';hasta los que aluden vagamente a la no equivalencia diciendo'no son múltiplos'

Un caso especial es el sujeto 35, su respuesta parece indicar que el concepto de equivalencia está en plena formación, simplemente dice: "va sucesivamente la operación", aunque aclara "no más hasta el 6/18". Probablemente a la operación que alude es a la multiplicación del numerador y el denominador por el mismo entero.

Otro caso especial es el sujeto 49, que plantea que las fracciones dadas *no* son el mismo número, pero lo justifica diciendo: "4 no se puede dividir con 42". Otra vez el concepto de equivalencia no es completo ni correcto, las restantes fracciones son también fracciones propias pero su denominador es múltiplo del numerador, probablemente esta es la forma en que el sujeto cree expresar la percepción de esta característica.

Las respuestas correctas indican también dificultades en torno a :

1° El concepto de equivalencia de fracciones al percatarse de que las cinco fracciones dadas son equivalentes entre sí, 19 sujetos ó 38% de la muestra, llegando a plantear. "1/3 = 3/9 = 9/27 = 6/18 = 7/15 = 4/42" el sujeto 2.

Entre ellos prevalecen las diferencias acerca de lo que es una justificación y, por lo tanto, en este caso, la equivalencia de fracciones.

Hay quienes utilizan la equivalencia explícitamente como justificación, quienes aluden a uno de los algoritmos que permiten mostrar la equivalencia; los que aluden al algoritmo con el cual pueden obtenerse la segunda y la tercera fracciones a partir de la primera, de manera más o menos precisa; quienes sólo dicen "al multiplicar por 3 forman enteros" cosa que no siempre ocurre y que en todo caso omite el que los enteros sean iguales,y aún quien dice: "porque son iguales entre sí"

Una última dificultad consiste en hacer afirmaciones que pretenden ser argumentos justificativos, sin efectuar operación alguna de cualquier tipo para sustentar lo afirmado. El sujeto 31 lo hace al escribir "porque si los clasificamos en una recta numérica tienen un mismo tramo o (cantidad)" sin incluir su representación en la recta numérica. Es también notable porque exhibe el concepto de racional como punto o segmento en la recta numérica e involucra en cierta medida la conmensurabilidad.

Posiblemente una de las causas de esta dificultad sea el principio de autoridad; alguien dice que es así, probablemente el profesor, por lo tanto <u>es así</u>; aunada al fomento de la actitud pasiva en los alumnos, que sólo tienen que repetir lo que se les dijo.

II.6.3 <u>El número racional como decimal finito o periódico infinito</u>

Los datos de las respuestas a los reactivos que miden este subconstructo del número racional aparecen en la tabla (c),

TABLA (C) .

DECIMAL FINITO O PERIODICO INFINITO .

	12A	12B	12C	12D	12D	12J	13A	13B	13C	13D
E/N.C.	18/5	15/7	9/6	21/7	8/8	23/22	5/16	7/21	13/17	15/26
% E	36	30	18	42	16	46	10	14	26	30
% N.C.	10	14	12	14	16	44	32	42	34	52
% C.	54	56	70	44	68	10	58	44	40	18

OPTARON POR EL SUBCONSTRUCTO DECIMAL FINITO O PERIODICO INFINITO .

	7A	7B	7C	7D	7J
T.O.	6	12	12	11	6
E/N.C.	2/1	3/1	6/2	5/2	5/0
% N.C.	16.6	8.3	16.3	18.8	0
% E	33.3	25	50	45.45	83.3
% C.	50.1	66.7	33.7	36.36	16.7

E.: RESPUESTAS ERRONEAS N.C.: PREGUNTAS NO CONTESTADAS C.: RESPUESTAS CORRECTAS T.O.: TOTAL DE LOS QUE OPTARON POR ESTE SUBCONSTRUCTO

Para averiguar el manejo que de este subconstructo del número racional hacen los alumnos existen 10 reactivos, el 16.6% del total, que son los reactivos: 12a, 12b, 12c, 12d, 12D, 12J, 13a, 13b, 13c y 13D.

Los cuatro primeros permiten detectar si existe o no el concepto de racional como decimal finito o periódico infinito en tanto que se domina el algoritmo para llevarlos a esa forma.

Los reactivos 12J y 12D indagan acerca de la existencia del concepto de racional como decimal en forma directa, y del nivel de comprensión y formalización del algoritmo. Permiten también detectar si discriminan entre descripción (12D) y justificación (12J). La contigüidad de estos dos reactivos puede contribuir a que el estudiante perciba que describir y justificar no son lo mismo.

Los reactivos 13a, 13b y 13c averiguan el dominio del algoritmo que permite la transformación inversa, de la expresión decimal a la fracción.

Dos de ellos, 13a y 13c, se pueden resolver recurriendo a un hecho conocido, el reactivo 13b corresponde al reactivo 12a.

En esta ocasión sólo se pide que describan como obtuvieron las fracciones, reactivo 13D, para poder discriminar si poseen o no el algoritmo para la transformación, además posibilita percibir si conocen o no <u>las propiedades</u> que permiten su existencia.

De alguna manera este bloque completo de reactivos contribuye a percibir si para los sujetos existe o no la relación biunívoca entre expresiones decimales finitas o periódicas infinitas y clases de equivalencia de fracciones.

Otros 5 reactivos: 7a, 7b, 7c, 7d y 7j, que son el 8.3% del total, dan la posibilidad de averiguar si se posee este subconstructo del racional y si se conocen las causas de la equivalencia entre fracciones y expresiones decimales finitas o periódicas.

De los 10 primeros reactivos al menos el 40% de la muestra resolvió correctamente los que no son de descripción o justificación, dejándolos sin contestar cuando más el 42%. *Por esto consideramos que cerca de las tres quintas partes de la muestra creen dominar este aspecto, aunque solo lo logren dos quintas partes de la misma.*

En cuanto a los reactivos del segundo bloque, al menos el 33.7% de los sujetos que optaron por este enfoque resolvió bien los que no son de justificación y cuando más el 18.18% de los mismos no los contesto.

Parece que la opción: racional como decimal finito o periódico infinito no puede intentarse por casi la quinta parte de quienes la hacen, y sólo la tercera parte logra realizarla correctamente.

Al analizar las respuestas a los diez primeros reactivos encontramos que, la mitad de ellos: 12a, 12b, 12c, 12D y 13a, son resueltos correctamente por más de la mitad de la muestra, entre 54% y 70% de la misma.

Los tres primeros se refieren al algoritmo de conversión a decimal de fracciones propias; el cuarto a la descripción de dicho algoritmo, y el quinto a la transformación inversa para 0.25.

Llama la atención el que el reactivo 12d, en cambio, sólo logre 44% de respuestas correctas. La única diferencia con los reactivos 12a a 12c es que en este se trata de una fracción impropia, 7/5.

A partir de estos resultados podemos considerar que al menos la mitad de la muestra concibe al número racional como cociente de enteros y, al efectuar la división, lo obtiene como decimal.

Cuán claro sea para ellos el que un número racional es un decimal <u>finito</u> <u>o</u> <u>periódico</u> <u>infinito</u> es difícil de percibir, pues sólo uno utiliza la notación para el periodo ($1/3 = 0.\bar{3}$) y los demas calculan de una a tres cifras decimales $1/3 = 0.3$ ó $1/3 = 0.333$), lo que puede reflejar simplemente un problema de notación

Este manejo del racional como decimal finito o periódico infinito tal vez lo asocian con "una forma de representación", pues pese a la simplicidad de los reactivos 13a, 13b y 13c que piden la conversión de decimales a fracciones sólo el 13a tiene más del 50% de las respuestas correctas,como ya hemos dicho.

El que solamente el 18% de la muestra logre describir en el reactivo 13D como resolvió los tres reactivos anteriores, sugiere la respuesta memorística o de un hecho conocido y aislado: *0.25 = 1/4 y 1.5 = 3/2.*

De este bloque los reactivos que no fueron contestados por mayor número de sujetos son: el 12J, por el 44% de la muestra, y el 13D, por el 52% de la misma. Otra vez la dificultad para justificar un procedimiento está presente en 12J, y la idea de que no poseen el procedimieto para convertir decimales a fracciones se ve reforzada por la falta de respuestas a 13D.

Todo lo anterior puede interpretarse como la posesión de un algoritmo para cambiar de expresión los racionales, sin que se posea el algoritmo para la transoormación inversa, ni haya muestras de que se conciba la relación biunívoca entre decimales finitos o periódicos infinitos, y clases de equivalencia de cocientes de enteros. Así la posesión de los sujetos del subconstructo del concepto de número racional como decimal finito o periódico infinito resulta muy dudosa.

Las respuestas erróneas a los reactivos 12a a 12d indican cuatro clases de dificultades diferentes.

- ***Inexistencia del concepto de número racional como cociente de*** *enteros,* en tanto que se da una expresión decimal que no se relaciona con la fracción mediante la ejecución de la división indicada en ella. Dos sujetos de la muestra, el 27 y el 42, manejan sistemáticamente para $\frac{m}{n}$ la expresión decimal 'm.n'.

- *Manejo de la notación posicional base diez, para asociar a cada fracción un decimal, sin concebir las fracciones como cocientes de enteros.* Unsujeto delamuestra,el6,plantea sistemáticamente para cada fracción $\frac{m}{n}$ la expresión decimal con n ceros después del punto decimal, seguidos del dígito m.

- *Mal manejo de la notación posicional base* 10, al no colocar adecuadamente el punto decimal al calcular el cociente de los enteros,que va del 4% al 12% de los sujetos de la muestra.

- *Errores de cálculo al dividir o falta de dominio de esta operación básica,* que va del 8% en el reactivo 12b al 30% en el reactivo 12d, sin que se presente en el 12c.

En cuanto a los reactivos 7a a 7d y 7J, encontramos que:

Once sujetos expresan las fracciones dadas en los reactivos 7a a 7d como decimales. Cinco de ellos lo hacen siempre y seis de dos a tres ocasiones.

Un sujeto, el 45, no obtiene expresión equivalente alguna para dichas fracciones, pero en 7J dice "En decimales peor no recuerdo".

Cinco sujetos más tratan de justificar sus respuestas a los reactivos 7a a 7d. Sólo uno, el 17, lo logra. Dos asumen los decimales que obtienen como una forma de expresar las fracciones y dos más sólo dicen: "decimal", sin responder al reactivo 7J: "¿Por qué?"

Así, tenemos que 12 sujetos conocen el concepto de número racional como *cociente indicado* de enteros, la mitad de ellos se aproxima al menos al concepto de número racional como decimal finito o periódico infinito, y solo uno tiene el desarrollo suficiente para dar una justificación de los cálculos que realizó.

En los reactivos 7a a 7d los errores al convertir la fracción a su expresión decimal fueron de la cuarta parte a la mitad Los cálculos se hicieron sobre el total de sujetos que eligieron este procedimiento en cada reactivo, como muestra la tabla (c), pues, como ya se dijo, algunos sujetos mezclaron fracciones equivalentes y expresiones decimales en sus respuestas.

No resolvieron estos reactivos entre el 8.3% de los sujetos en el reactivo 12b y el 18.18%, en el 12d.

Estos resultados parecen indicar que el número racional o como decimal finito o periódico infinito es una noción muy vaga que no pueden aplicar la mitad de los sujetos que eligieron este enfoque. Parece que, en general, la elección se debió a la carencia total del concepto de racional como clase de equivalencia de cocientes de enteros.

Las dificultades reconocidas hasta aquí en el manejo del número racional como decimal finito o periódico infinito ***permiten pensar que la escuela no logra:***

- conformar plenamente en los estudiantes el concepto de número racional como cociente de enteros.

- que los estudiantes dominen el algoritmo de la división, ni la notación posicional base diez.

- iniciar la conformación de la equivalencia entre número racional como decimal finito o periódicio infinito, y clases de equivalencia de cocientes deenteros, al no lograr el dominio del algoritmo que permite pasar de la expresión decimal a la fracción ni siquiera en los sujetos que logran la transofrmación inversa, lo que habla de confusión conceptual y manejo algorítmico disociado de la conceptualización.

II.6.4 <u>El concepto de número racional como elemento de un campo infinito ordenado.</u>

Los datos relativos a los 19 reactivos 31.6% del total de reactivos del examen que miden este subconstructo del concepto de racional, se encuentran en la tabla (d).

Los 19 reactivos 8, 9a, 9b, 10, 10j, 11, 11D, 14a, 14b, 14c, 14d, 14e, 14aJ, 14bJ, 14cJ, 14dJ, 14eJ, 15a y 15b , miden este subconstructo atendiendo respectivamente: los 3 primeros la habilidad para ordenar los racionales, lo que incluye la identificación de un par de fracciones equivalentes; el conocimiento de la propiedad de densidad de los racionales; la comprensión de dicha propiedad, lo que les permite intentar justificarla; la habilidad para aplicar la propiedad de densidad; la capacidad para describir el procedimiento utilizado en el reactivo anterior y, de algún modo su comprensión de dicho procedimiento; el dominio del algoritmo para la adición y el manejo de la propiedad asociativa de la misma; el dominio del algoritmo para la sustracción y de la gerarquía mediante paréntesis; nuevamente el dominio del algoritmo para sustracciones y la gerarquía mediante paréntesis, estos dos últimos ráctivos: "1/2-(1/4-2/8)=" y "(1/2-1/4)-2/8=", pretenden contribuir a que el sujeto elimine la posibilidad de error al aplicar una asociatividad inexistente en la sustracción; el dominio del algoritmo de la multiplicación; el dominio del algoritmo de la división, la contigüidad de estos dos reactivos pretenden contribuir a eliminar el error de intercambiar los algoritmos antes mencionados.

En los cinco reactivos siguientes se indaga si el sujeto puede fundamentar los algoritmos que emplea, lo que reflejaría la diferenciación entre las operaciones básicas en enteros y en racionales, fortalecedora de los conceptos de estos números, los tres primeros de entre ellos manejan también la medición de adición y sustracción como operaciones binarias.

TABLA (D) .

ELEMENTO DE UN CAMPO DE COCIENTES INFINITO ORDENADO .

	8	9A	9B	10	10J	11	11D	14A	14AJ	14B	14BJ	14C	14CJ
E/N.C.	37/8	37/1	33/2	11/12	15/15	26/13	15/25	8/4	15/34	25/5	12/38	17/6	10/40
% E.	74	74	66	22	30	52	30	16	30	50	24	34	20
% N.C.	16	2	4	24	30	26	50	8	68	10	76	12	80
% C.	10	24	30	54	40	22	20	76	2	40	0	54	0

	14D	14DJ	14E	14EJ	15A	15B	17B
E/N.C.	9/5	12/38	9/10	13/37	3/7	5/24	20/14
% E.	18	24	18	26	6	10	40
% N.C.	10	76	20	74	14	48	28
% C.	72	0	62	0	80	42	32

E.:RESPUESTAS ERRONEAS N.C.: PREGUNTAS NO CONTESTADAS C.: RESPUESTAS CORRECTAS "b) 1/2 - (1/4 - 2/8) =" y "(1/2 - 1/4) - 2/8 =", propiciando eliminar el error de aplicar una asociatividad inexistente.

Se indaga tambien el manejo del neutro multiplicativo y, por último, el manejo del inverso multiplicativo.

Los reactivos de descripción y justificación 10J, 11D, y de 14J a 14eJ, los trataremos por separado, todos los restantes pudieron ser resueltos al menos por la décima parte de la muestra, ya que el reactivo 8, que pide ordenar, tuvo el menor número de respuestas correctas y fueron cinco.

El reactivo 15a, que se refiere a neutro multiplicativo, alcanzó el mayor número de respuestas correctas, llegando a 4/5 de la muestra.

El porcentaje mayor sin contestar fué para el reactivo 15b, que pedía el inverso multiplicativo de una fracción y alcanzó el 48% .

Los reactivos 14a a 14e, todos de tipo algorítmico tuvieron entre 8% y 20% de sujetos que no contestaron.

A partir de estos resultados consideramos que más de la mitad de los sujetos de la muestra creen dominar los diferentes aspectos del subconstructo número racional, elemento de un campo decocientes infinito ordenado, que lo logra cuando mucho la décima parte, y que la heterogeneidad en el porcentaje de aciertos, de 10 para el reactivo 8 a 80 para el 15a, es un indicador de las prioridades con que la escuela atiende dichos subconstructos.

En cuanto a los seis reactivos de justificación encontramos que, los cinco que se refieren a substracción, multiplicación y división en números racinales tuvieron CERO respuestas correctas, el que se refiere a adición una y el 10J, referido a densidad, 20.

Estos reactivos no fueron resueltos por, al menos, 15 sujetos en el caso del 10J y hasta por 40 sujetos para el 14cJ.

Las respuestas erróneas oscilan entre 10 para el 14cJ y 14dJ, 15 para el 10J, 11D y 14aJ.

Podemos, a partir, de estos resultados plantearnos que: *al menos la quinta parte de la muestra cree poder justificar algoritmia ypropiedades de los racionales, sin lograrlo.*

Parece que el dominio algorítmico, si bien pobre, al que han llegado estos sujetos, se reduce a la aplicación mecánica de recetas y carecen por completo de una interpretación conceptual o justificación para las mismas.

En cuanto al concepto de densidad, al menos la quinta parte de la muestra puede describir procedimientos para aplicarlo y las dos quintas partes poseen el concepto, si bien creen estar en esta situación tres quintos de la muestra.

Al analizar las respuestas encontramos en cuanto a las operaciones y sus propiedades, que se miden en los reactivos 9a, 9aJ, 9b, 9bJ, 14a, 14aJ, 14b, 14bJ, 14c, 14cJ, 14d, 14dJ, 14e y 14eJ que:

Para la adición las respuestas correctas, 76% de la muestra, van desde aquellas en que el sujeto no incluye los pasos intermedios de la operación, probablemente por no necesitarlos dada su simplicidad "1/2 + 1/4 + 1/8 = 7/8", hasta las que quedan inconclusas ("1/2 + 1/4 + 1/8 = (4+2+1)/8", probablemente porque lo que consideró importante sea este paso, característico de la suma de racionales, y el resto es *sólo sumar enteros*.

Las respuestas erróneas 16%, son de dos tipos:

Errores de cálculo pese a la posesión del algoritmo: obtienen común denominador y fallan al dividirlo entre alguno de los denominadores iniciales, calculan mal algún numerador al convertir afraccionescomunes,eincluso,sumanmalenteros "(4+2+1)/8=9/8"

No poseen el algoritmo y en sus errores se muestra incomprensión de su significado: al calcular el común denominador y mantener los numeradores invariables, o exhibir una mala memorización al *convertir las fracciones* con un numerador igual a la suma del producto del común denominador y el denominador respectivo, con el numerador de la misma fracción $(n'_i = (c.\ d.)\ (d_i) + n_i)$.

En cuanto a la justificación pedida, sólo un sujeto justifica el algoritmo de la adición, pero omite el señalar la utilización de la propiedad asociativa, lo que parece indicar que no la concibe como binaria.

Algunas respuestas erróneas muestran elementos adecuados para construir la justificación. Unas atienden sólo el carácter binario de la operación, al justificar argumentando el uso de la asociatividad; otras apuntan a la explicación del porque del algoritmo parcialmente como en: "porque el común denominador es múltiplo de tres denominadores"

Una parte importante de las respuestas son erróneas porque describen en vez de justificar, ya sean descripciones precisas y correctas, o vagas, o erróneas.

Dos sujetos eluden la respuesta al decir: "porque es un resultado diferente a los demas" y "es la forma más simple de hacer la suma".

Otro grupo de respuestas pretende justificarse a partir de alusiones a propiedades que no se requieren para la operación,o no las posee. Así, un sujeto tras efectuar correctamente la adición, utilizando la asociatividad, dice "si pongo paréntesis se altera el resultado".

Un sujeto más hace explícita la situación que tiene, posiblemente muy generalizada entre los estudiantes, respecto al significado o justificación del algoritmo, y dice "por ser la fórmula que estudiamos".

Resumiendo, los resultados encontrados parecen indicar que, si bien *más de las tres cuartas partes de la muestra poseen el algoritmo de la adición de racionales, existen quienes no lo poseen y quienes no lo pueden aplicar por no dominar los algoritmos en enteros involucrados o por falta de atención*

Hay indicios de incomprensión del significado del algoritmo en los intentos de realizar la operación, y al tratar de justificarla se exhibe que, en general, no se le concibe como binaria. Los intentos de justificación, además de mostrar heterogeneidad en el nivel de desarrollo de los sujetos, muestran desde elementos sólidos para llegar a justificarla, que parecen hablar de la gestación del concepto de adición en racionales, hasta una gama de intentos de satisfacer al maestro, que culmina con la referencia explícita al principio de autoridad.

Al realizar las substracciones pedidas, las respuestas correctas que son entre el 40% y el 54% de la muestra, hacen ver: dominio del algoritmo, manejo de la jerarquía por paréntesis, respeto a la no conmutatividad de la substracción y, en algunos casos, manejo de equivalencias al simplificar la respuesta, incluido " 0/8=0 " que reviste interés especial por los errores exhibidos por otros sujetos en el manejo del cero.

Las respuestas erróneas muestran que:

Algunos poseen el algoritmo insuficientemente, pues o bien cometen errores en el cálculo del mismo que van desde la omisión de un signo hasta la no identificación de equivalencias " 1/4 * 2/8=1/4" o las dificultades con el cero: " 2 - 2 = 2 ", "(2-2)/8=8", "0/8-1/2=0" "1/2-0/8=-1/16" y (2-2)/8=. . ." bien sólo logran aplicarlo a la primera substracción indicada en cada reactivo, deteniendo allí su trabajo en unos casos o intentando continuarlo con la aplicación de su versión del algoritmo de substracción.

Otros no poseen el algoritmo y manejan sistematicamente uno propio, que parece indicar la incomprensión de la substracción en racionales (n' = (cd)(di) + ni) por ejemplo.

Frecuentemente aplican una conmutatividad inexistente al calcular "1/2 - (1/4 - 1/8) = " ejecutando primero la substracción entre paréntesis y restando a su resultado 1/2., independientemente de la presencia o no de los errores antes mencionados.

Otros sujetos aplican una asociatividad inexistente "1/2 - (1/4 - 1/8) = 1/2 - 1/4 - 1/8" y operan de izquierda a derecha.

La justificación de estas operaciones no fué lograda por sujeto alguno de la muestra. La intentaron en un caso 12, reactivo 14bJ, y en otro 10, reactivo 14cJ.

Sus respuestas erróneas indican:

Heterogeneidad en su desarrollo al no distinguir entre describir y justificar. Las respuestas descriptivas más elaboradas incluyen la descripción del algoritmo y de la jerarquización mediante paréntesis, pero las hay que sólo atienden uno de los dos aspectos.

Los intentos de justificación son de tres tipos, los que aluden a propiedades que no están involucradas en la operación, como la distributividad tal vez evocada por la presencia de los paréntesis; los que evaden la pregunta con respuestas del tipo "porque tienen diferente forma de hacerse", y los que simplemente dicen "porque esa es la regla", detras de la cual no parece existir razón alguna.

Ahora sólo dos quintos de la muestra poseen el algoritmo, y los errores indican: errores de calculo; no concepción de la substracción como operación binaria y no conmutativa; incomprensión del significado del algoritmo; heterogeneidad en el *nivel de desarrollo de los sujetos, intento de satisfacer al profesor respondiendo; alusiones al principio de autoridad ó incapacidad para plantearse la necesidad de razones para una "regla". La contigüidad de los reactivos* 14b"1/2 - (1/4 - 2/8) = " *y* 14cu (1/2 - 1/4) - 2/8 =" *que pretendía evocar la no asociatividad no se manifestó eficaz.*

En lo que se refiere a la multiplicación de racionales tenemos que el 72% de la muestra la ejecutó correctamente, el 10% no la intentó y el 18% lo hizo incorrectamente.

Las respuestas erróneas indican errores de cálculo y, preponderantemente, la no posesión del algoritmo de la multiplicación que ejecutan 'como el de la adición':

$$\frac{5}{6} \times \frac{3}{9} = \frac{(5\times 9)(6\times 3)}{6\times 3}$$

una mezcla del algoritmo de la multiplicación y el de la división $:\frac{(5/6 \times 9)(5 \times 9)(6 \times 3)}{6 \times 9}$

ó directamente, el de la división $5/6 \times 3/9 = \frac{5 \times 9.}{6 \times 3}$

Nuevamente nadie justifica la multiplicación,lo intentan 12 sujetos y lo que hacen son descripciones más o menos completas y precisas; intento de justificación con base en propiedades no involucradas, evaden la pregunta o aluden a que esa es la "regla" para multiplicar.

En cuanto a la división de racionales, el 62% de la muestra posee el algoritmo de la división, pero la quinta parte de la muestra no lo intenta. Las respuestas erróneas incluyen: errores de cálculo al aplicar el algoritmo (7 x 5 = 20 ó 7 x 5 = 15), ó introducción errónea del punto decimal al resultado del mismo ($3/17 \div 5/2 = \frac{.6}{35}$) y la no posesión del algoritmo, al que suplen por uno '*propio*', o por el de la multiplicación.

Nadie logra justificar la operación, aunque 13 sujetos lo intentan.
Una vez más describen en lugar de justificar, "*satisfacen' al profesor'*, y aluden a la "regla".

De estos resultados podemos desprender que: *la multiplicación y la división en los racionales son dominadas algoritmicamente cuando más por el 62% dela muestra, que no sólo hay quienes no poseen estos algoritmos y al intentarlos exhiben incomprensión de su significado y elementos memorísticos en relación conotros algoritmos, sino que también incurren en el intercambio entre ellos (multiplican como deberían dividir e inversamente). No sólo nadie logra justificar estas operaciones, sino que nadie muestra al intentarlo los elementos indicadores de la conceptualización de las mismas. Hay que resaltar que estos reactivos son los más simples de este subgrupo, pues no involucran propiedad alguna.*

Otro par de reactivos indagan acerca de las propiedades de la multiplicación en los racionales, el 15a "7/3 x = 7/3" y el 15b "3/8 x 1 = . . ".

El primero fue resuelto correctamente por tres sujetos, que utilizaron diferentes fracciones equivalentes para el neutro multiplicativo "1 = 1/1" "1/1" ó "2/2".

El segundo lo respondieron correctamente 5 sujetos, la décima parte de la muestra, de manera homogénea: "8/3", el 50% de la muestra no contestó.

Las respuestas erróneas indican: confusión en el concepto de neutro multiplicativo y/o la multiplicación, al responder e 15a "1/3"; posesión del concepto y falta de habilidades para obtenerlo, un sujeto lo intenta por tanteo y al no lograrlo dice "no hay"; confusión en el concepto de inverso multiplicativo, al darlo con signo contrario, posiblemente a consecuencia de la falta de comprensión de los *despejes*, donde *pasa con signo contrario*, no posesión del concepto de inverso multiplicativo al responder "333/8" ó con el inverso aditivo "-3/8".

Con base en estos resultados podemos considerar que: *propiedades esenciales de la multiplicación en los racionales no se conocen o no se tiene la posibilidad de aplicarlas, aun para la existencia del inverso multiplicativo para los racionales no nulos, característica que permite discriminarla de la multiplicación en los naturales o en los enteros, y la primera que pertenece sólo a campo.*

La densidad de los números racionales, otra característica que los diferencia de los naturales y los enteros, así como también de los reales, se atiende en cuatro reactivos: 10, 10J, 11 y 11D.

Al menos el 22% de la muestra logró aplicar esta propiedad, en el reactivo "11". "Encuentra tres números entre 1/4 y 1/2", lo que significa poseer también un procedimiento para obtener racionales entre dos dados. Para el reactivo 10. "Se puede encontrar algún número entre o y 1/3" que no requiere la obtención del racional '*entre*' los dados, se llegó hasta 54% de respuestas correctas.
Los porcentajes de la muestra que no contestaron estos dos reactivos son similares, 26% y 24% respectivamente.

Curiosamente, justificar la respuesta al reactivo 10, es decir, exhibir la posesión del concepto de desidad, lo logran dos quintas partes de la muestra en tanto que describir en 11D como obtuvieron tres racionales *entre* dos dados, sólo lo logra una quinta parte; además no contestaron el primero tres décimos de la muestra mientras el segundo lo dejó sin contestar la mitad. Las respuestas correctas a los reactivos 10 y 11 son homogéneas, salvo por una con notación incorrecta, que mezcla fracciones propias y notación posicional base 10: "1/2.5, 1/3.5". Parecería que la fracción es un cociente, pero no sólo de enteros. De hecho los racionales, como 2.5 y 3.5, existen y los usa para expresar *fracciones*.

Las respuestas erróneas muestran:

Dificultad para obtener los racionales *entre* los dos dados debido a tres causas:

Mal manejo del orden en los racionales, al dar fracciones menores que el mínimo o mayores que el máximo de los racionales dados.

Imposibilidad de aplicar el concepto de fracciones equivalentes al dar dos o tres fracciones equivalentes, ya sea menores que el mínimo , mayores que el máximo, equivalentes a alguno de los extremos y, en el peor de los casos, efectivamente *entre*; un sujeto responde "$\frac{2}{4}$" es decir $\frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

Parecería que la dificultad la genera el lenguaje no formal utilizado que en este caso asocia al término *entre* al menos dos significados; el que se refiere al orden: *entre*; es decir, mayor que el mínimo y menor que el máximo de los racionales dados; el que utilizó el sujeto, usual en aritmética: *entre* aludiendo a la división.

Hay que hacer notar que la instrucción. "Encuentra tres números <u>entre</u> 1/4 y 1/2" hace imposible esta última interpretación para quien tiene una buena comprensión de lectura, por lo que la respuesta parece deberse a la carencia de esta habilidad o a la del concepto de orden.

Otro sujeto exhibe en su respuesta errónea, la posesión del concepto y la carencia de habilidades para aplicarlo. Intenta obtener las tres fracciones pedidas *entre* las dadas, y al solo lograr obtener tres equivalentes a una de ellas concluye que "no hay".

Cuando se pide justificar la respuesta al reactivo 10 en el 10J, las respuestas correctas aluden a dos aproximaciones diferentes al concepto de densidad. Una tiene su expresión más simple en: "hay fracciones más chicas que 1/3".

En esta aproximación al concepto de densidad el orden, ligado a la idea de dividir o fraccionar un todo continuo es lo esencial.

Así un sujeto dice "porque se puede dividir en otras partes y puedo dar un número más pequeño" y exhibe "1/16".

La otra aproximación al concepto de densidad esta más ligada al de continuidad de los reales, y dicen "(porque) la numeración es infinita" y más claramente "la unidad se puede dividir en parte más pequeña"..

Un tercer grupo de respuestas correctas se refieren directamente a la densidad, sin exhibir la aprehensión y reelaboración de los sujetos: "hay fracciones entre 0 y 1/3" o "porque no son sucesivos". En contraste con algunas de las respuestas erróneas este grupo parece exhibir el conocimiento de un hecho aislado, o una conducta memorística.

Un sujeto utiliza en su justificación una aproximación a la demostración de existencia diciendo "si, 1/5, porque 1/5 < 1/3".

Las respuestas erróneas indican:

Retención memorística errónea o mal aplicada, así dicen "por ser consecutivos" "porque entre 0 y, 1, hay uno" e inclusive "entre cada fracción o entero existe otro número" con lo que la densidad deja de ser atributo exclusivo de los racionales.

Mal manejo del orden, tanto para respuestas correctas como incorrectas al reactivo 10; "¿Se puede encontrar algún número entre 0 y 1/3"?, y dicen (no porque:) "el más chico entre 0 y 1/3 es 1/3" ó, "por ser consecutivos" e inclusive (si, porque:) "hay fracciones menos chicas" ó "1/3 no es el mayor, aun le continuan otros" que podrían aunar dificultades de lecto-escritura o indicar que *entre*, es decir el orden; es un concepto mal conformado.

Dificultad en el manejo del cero. Otra vez la presencia del cero en un reactivo es fuente de errores, parecería que el concepto de cero no esta plena y correctamente conformado en estos sujetos pues, si bien algunos muestran no manejar el significado de orden con "*entre*" otros no lo hacen así. Las respuestas van desde "0 no tiene valor" "entre (÷) 0 no se puede encontrar otro número" "todo número multiplicado o <u>dividido</u> por 0 da 0" "todo número multiplicado, dividido, <u>sumado</u> <u>o</u> <u>restado</u> por <u>cero</u>, da 0".

Un sujeto responde (no) "porque 1/3 no llega a la unidad". Esta respuesta errónea podría deberse a la mala retención de un hecho, al estilo de "entre 0 y 1 hay un número", o a la idea de que sólo se puede dividir para obtener partes menores o fracciones, el todo y este se identifica con la unidad. Esta última interpretación se plantea porque el sujeto, el 45 de la muestra, no pudo dividir un elemento del todo discreto para responder al reactivo 4b, duplicar el ejemplar del todo para los reactivos 5a y 5b, considerar un

todo diferente a la unidad para resolver el 16a y *cambiar de todo* para resolver el 16b. Todo lo anterior parece indicar que para él *el todo* es la unidad, que es único y el único divisible cuando es continuo.

Para describir como obtuvieron las fracciones pedidas en el reactivo 11, se tiene el 11D, así se puede apreciar si recurrieron al conocimiento de un hecho, si poseen un procedimiento para obtenerlas, y, de algún modo, la conceptualización que han elaborado respecto a densidad y orden.

Las respuestas correctas apuntan a tres aproximaciones hasta aqui diferentes al concepto de densidad, dos de las cuales parecen indicar elaboración de dicho concepto por distintas vías.

Una involucra el subconstructo punto o segmento de la recta numérica, del concepto de número racional. Las respuestas van desde la simple mención, "dividí la recta numérica en partes iguales" hasta la exhibición de la división efectuada entre 1/4 y 1/2 ubicados e la recta numérica.

Así la densidad parece ser, de algún modo para ellos, consecuencia de la continuidad de los reales.

La segunda se mueve sobre la idea de que los racionales son densos y aparenta no requerir apoyo visual alguno: "Pensando en todas las fracciones que pueden caber" y "dividiéndolo en fracciones más pequeñas". Tal vez estos sujetos manejan el conocimiento de un hecho.

La última consiste en describir el algoritmo para encontrar el valor intermedio entre los dos racionales dados y "luego le rebaja" para obtener las otras dos fracciones pedidas. Esta respuesta parece indicar una aproximación más abstracta al concepto de densidad apoyada en la algoritmia, que *muestra* la existencia de las fracciones buscadas, y el manejo del orden en los racionales

- Las respuestas erróneas muestran:

Mal manejo de la relación de orden y no diferenciación entre el concepto de fracciones ordenadas y fracciones equivalentes, al responder describiendo el algoritmo con que encontraron tres fracciones equivalentes a cualquiera de las dos dadas, o mayores que el máximo o menores que el mínimo de ellos dos.

Imposibilidad de describir el procedimiento seguido, probablemente porque solo evocaron un hecho conocido, al responder "los encontre siguiendo la continuidad de los números en orden" y dar tres fracciones equivalentes a 1/4; ó "por medio de la recta numérica" sin incluirla cuando si lo hizo en otros reactivos en que la involucró.

Mal manejo del orden y uso del subconstructo punto o segmento de la recta numérica, sólo para ilustrar, al dar fracciones que no están *entre* las dadas y representarlas en la recta como si lo estuvieran. Entre este tipo de respuestas estan también las que eluden cualquier descripción "son intermedias" o "están en la recta entre 1/4 y 1/2"; por ejemplo.

Un sujeto, que sólo logra obtener fracciones equivalentes a una de las dadas, afirma que no existen las pedidas. Si bien su respuesta es errónea, exhibe claridad en los conceptos de orden y equivalencia, y escapaz de sacar conclusiones por si mismo que fallan por la inadecuada generalización de las mismas.

Otro describe correctamente lo que hizo "saque equivalentes a uno entre esas fracciones" lo que parece indicar que al elaborar su respuesta olvido la instrucción o, en el peor de los casos, que aun poseyendo algoritmos para encontrar fracciones equivalentes y manejando la nomenclatura, cada expresión distinta de una fracción la considera un número diferente, es decir, no posee el concepto de equivalencia.

Por lo antes dicho consideramos que: *si bien más de la mitad de la muestra sabe que los racionales son densos, sólo un poco más de la quinta parte de la misma puede aplicar reiteradamente tal, propiedad y sólo la quinta parte es capaz de hacer explícito el procedimiento que utilizó para lograrlo; sin embargo dos quintas partes de la muestra justifican su aseveración de que son densos.*

Las dificultades manifestadas en las respuestas erróneas parecen deberse a:

I. Que se posee el concepto de densidad pero se tiene:

1) *Uso del racional como segmento o punto de la recta numérica 'sólo para ilustrar'.*

2) *Imposibilidad de dividir una parte del todo, al que se identifica con la unidad.*

3) No discriminación entre los conceptos de fracciones equivalentes y fracciones ordenadas.

4) Carencia de habilidades para aplicar el concepto de densidad pese a que si se posee.

5) Imposibilidad de aplicar el concepto de fracciones equivalentes

6) Mal manejo de orden en los racionales.

II. Que no se posee el concepto de densidad; manifestado por:

a) La homonimia del término 'entre' interpretado como dividir sin ser esto lo pertinente.

b) Dificultad en el manejo del cero, al que conciben basicamente como 'anulador' (0 x n = 0), *asociado en general al problema de homonimia de 'entre'.*

c) No elaboración y aprehensión del concepto de densidad, por lo que evocan un 'hecho conocido' incorrecto.

En las respuestas correctas se muestran elementos de la elaboración conceptual de los sujetos en dos direcciones. Una que lleva al concepto de densidad a través del orden (se pueden obtener fracciones menores) y el uso de algoritmos aritméticos. La otra que junto con el orden utiliza particiones del todo continuo.

El papel de los 'hechos conocidos', en su versión más mecánica y pobre, es importante en las respuestas erróneas, llevando hasta atribuir la propiedad de densidad a lo enteros.

Los reactivos 8, 9a, 9b y 17b se refieren al orden en las racionales. Los tres primeros de manera directa, el último lo involucran en la solución de un problema para encontrar la parte complementaria a dos dadas y equivalentes entre si.

El mayor número de respuestas correctas fue para el reactivo 17b, dieciséis, y el menor para el reactivo 8, cinco, así que al menos la décima parte de la muestra maneja la relación de orden entre racionales.

Como el máximo número de sujetos que no respondieron estos reactivos fue 14, ahora para el reactivo 17, podemos decir que: *más de las cuatro quintas partes de la muestra creen manejar la relación de orden en los racionales lográndolo sólo la decima parte de la misma.*

Las respuestas correctas al reactivo 8, que pide ordenar una serie de fracciones que incluye un par de equivalentes, se caracterizan por no hacer explícita, en general, la equivalencia; que identifican este par lo exhiben en el reactivo 8c, donde localizan ordenadamente en la recta numérica las fracciones dadas.

Algunas otras respuestas correctas omiten varias de las fracciones dadas, inclusive el par de equivalentes.

Las respuestas correctas a los otros tres reactivos son homogéneas.

De las respuestas erroneas al reactivo 8 tenemos:

- No manejan la relación de orden en los racionales. Esto lo manifiestan al listar las fracciones desordenadamente oconvertirlas todas a positivas y listarlas sin orden.

- No manejan la relación de orden en los racionales negativos; es decir las fracciones negativas se listan sin orden y a continaución se listan ordenadamente las positivas; ó se listan todas con el orden de las positivas, aunque se respete el signo.

● El manejo del orden es insuficiente, por lo que incluyen algún racional fuera de su orden, por ejemplo ordenan los negativos y listan -1 como el mayor de todos, o bien ordenan los positivos pero intercambian el orden de un par. En algunos casos el problema es mayor y solo ordenan una parte de las fracciones dadas, listando el resto sin orden, como si se hubieran fatigado de ordenar.

● La no identificación de las dos fracciones equivalentes les impide ordenar correctamente "-1, -3/6, -2/5, -1/5, 0, 2/10, 1/4, 4/16, 1/2, 1" ó "-1, -3/6, -2/5, -1/5, 0, 2/10, 1/4, 1/2, 4/16, 1", por ejemplo.

Los reactivos 9a y 9b se resuelven ordenando tres fracciones en cada uno, pero están en un contexto complejo, el de operador multiplicativo, la instrucción dice :

9. Las siguientes multiplicaciones están correctamente realizadas:

a) 1/2 x 3/4 = 3/8

b) 3/2 x 7/5 = 21/10

para cada una de ellas ordena de menor a mayor los factores y el producto o resultado.

a) __________ __________ __________

b) __________ __________ __________

¿por qué resultó así?"

Las respuestas correctas fueron 12 y 15 respectivamente, y no contestaron un sujeto a 9a y dos a 9b.

Las respuestas erróneas son de cuatro tipos:

● No atienden la instrucción y ordenan de mayor a menor, manifestando manejar la relación de orden.

● Manifiestan un manejo insuficiente de la relación de orden dando dos fracciones ordenadas de menor a mayor o en orden inverso y la tercera fuera de orden.

- No manejan la relación de orden y reproducen el orden de presentación olaordenanenelordeninversoalde presentación, o las listan sin orden.

- Eluden la pregunta por dos procedimientos: exhibiendo el algoritmo de la multiplicación en vez de ordenar las fracciones,o cambiando de fracciones y ordenando estas últimas de mayor a menor.

El reactivo 17b pide la parte omplementaria de dos fracciones equivalentes dadas. Las respuestas correctas, que son homogéneas, involucran el manejo de las relaciones de equivalencia y orden en los racionales.

Las respuestas erróneas involucran entre otras cosas, un mal manejo de la relación de orden al responder con fracciones propias que, sumadas a las equivalentes dadas no dan uno; o la no posesión del concepto de orden, al responder con fracciones iguales o mayores que la unidad, « $\frac{12}{12}$» y «$\frac{20}{14}$».

A partir de los resultados anteriores *podemos considerar que hay dificultades en el manejo de la relación de orden entre racionales debido a que:*

- *No se atienden las instruccione y se ordena en el orden inverso al pedido, probablemente por la existencia de un prototipo escolar para ordenar.*

- *No se identifican las fracciones equivalentes y se les ordena como distintas.*

- *El dominio de la relación de orden es insuficiente y se lista alguna fracción fuera de su orden, o se abandona el orden en cierto momento.*

- *Sólo se domina el orden en los racionales positivos y los negativos scordenan o los listan en el orden que les correspondería si fueran positivos..*

- *Hay dos sujetos que carecen por completo del concepto de orden en los racionales aun a nivel de no distinguir cuando una fracción es mayor que la unidad.*

Para todos los resultados presentados en este apartado, podemos plantearnos que: *la escuela da prioridad a la algoritmia con racionales, dado que la ejecutan correctamente para la adición el 76% de la muestra; para la substracción al menos el 40% aunque este resultado puede estar disminuido por la necesidad de aplicar la jerarquía de paréntesis; para la multiplicación el 72% y para la división el 62% de la misma.*

Que parece seguir en orden de prioridad la relación de orden, aunque sólo logren aplicarla correctamente entre tres fracciones positivas de un 24% a un 30% de la muestra, y al involucrar mayor número de fracciones e incluir las negativas descienda hasta 10% .

Que las propiedades de las operaciones y del conjunto de los racionales son los aspectos menos atendidos dado que no logran aplicrlas, describir el uso que hacen de las mismas, ni justificarlas.

Es importante realizar que esto incluye propiedades tan esenciales del campo como la existencia del inverso multiplicativo y la densidad.

Que las dificultades para operar con el neutro aditivo indican la posesión de un concepto deformado de el mismo. Así nos percatamos que el subconstructo 'número racional, elemento de un campo infinito ordenado', difícilmente se está conformando en los estudiantes.

II.6.5 El número racional como operador multiplicativo

Los datos relativos a los reactivos 9aJ, 9bJ, 16a y 16b que miden este subconstructo del concepto de racional se encuentran en la tabla (e).

Los dos primeros reactivos de este bloque piden justificar el orden que guardan los factores y el producto en dos multiplicaciones dadas, siendo todos positivos.

En el primero el producto de los dos factores positivos resulta menor que cualquiera de ellos.

En el segundo, el producto es mayor que cualquiera de los dos factores positivos, como ocurre entre enteros.

Intentaron resolver estos reactivos el 44% de los sujetos de la muestra y lo lograron al menos el 2% es decir *un poco más de las dos quintas partes de la muestra creen poder justificar con base en este subconstructo del concepto de racional y sólo la cincuentava parte de la misma lo logra.*

En los reactivos 16a y 16b se requiere aplicar el racional como operador multiplicativo a un todo con valor específico diferente de la unidad. Lo intentaron el 76% de los sujetos de la muestra y lo lograron al menos el 44% ahora tenemos que *más de las tres cuartas partes de la muestra creen poder aplicar el número racional como operador multiplicativo en la solución de un problema, y lo logran más de dos quintas partes de la misma.*

Claramente aplicar el algoritmo de la multiplicación adecuadamente, les resulta mucho más fácil que justificar haciendo explícito el subconstructo operador multiplicativo, cosa que sólo logra un sujeto de la muestra.

La respuesta correcta a los reactivos 9aJ, 9bJ manifiesta clara comprensión del número racional como operador multiplicativo que, aun tratándose de factores positivos, puede *aumentar* o *disminuir* el producto.

De las respuestas erróneas sólo hay dos tipos en que se intenta una justificación involucrando este subconstructo.

Las del primer tipo reflejan una concepción de la multiplicación como 'más grande' o del operador multiplicativo sólo como amplificador. Las más correctas expresan la diferenciación del sujeto entre los números naturales y otra clase de números. Así el sujeto 2 responde a ambos reactivos: "porque si son positivos el resultado iba a ser mayor", y en efecto a 9a y 9b respondió con el producto como mayor racional presente, aunque en el primer caso no es así.

Parecería que una regla memorizada mal aplicada fué la causa de su error.

Aun en este tipo de respuestas, existen las que no discriminan entre los naturales y el resto de los números y dicen: "la multiplicación siempre aumenta". Parecería que *los únicos números conocidos son los naturales y la multiplicación sólo se concibe como adición repetida.*

El otro tipo de error exhibe al racional como *operador multiplicativo que siempre disminuye o una concepción de racional sólo como fracción propia.*

Las restantes respuestas erróneas son de 5 tipos, unas pretenden aplicar el criterio y el procedimiento con que ordenaron factores y producto o, inclusive, simplemente describirlo. Así tenemos los que dicen "las compare por medio de dibujos" o "converti a decimales y compare" e inclusive "porque las ordené de mayor a menor".

Otras intentan justificar el orden dado en función de propiedades de la multiplicación. Parece que este grupo considera que laconmutatividad y la asociatividad de la multiplicación en los racionales son la causa del orden que guardan entre sí los factores y el producto de cada multiplicación o, *tal vez, que las propiedades de las operaciones son las que permiten justificar.*

En un tercer grupo se involucran, erróneamente, elementos del concepto de orden. Así hay quien dice "porque las fracciones mayores algunas veces valen menos" que, en el mejor de los casos, podría ser una aproximación a: mayor denominadorhace la fracción menor, pues es mayor el número de veces que se divide la unidad.

Existen los que reconocen no poder justificarlo y, por último los que no manifiestan elemento alguno para llegar a resolver los reactivos, pero contestan, probablemente '*para satisfacer al profesor*'. Estos dicen, por ejemplo "por el acomodo de la multiplicación" o describen el algoritmo.

Para los reactivos 16a y 16b, dijimos que sólo el 44% de la muestra los resolvió adecuadamente y así mostró no sólo el manejo del número racional como operador multiplicativo, sino también la posibilidad de manejar *todos* reactivos y dominio algorítmico.

Sin embargo la mayoría de las respuestas erróneas se deben a fallas en alguno de estos dos últimos aspectos, de modo que *sólo ocho sujetos manifiestan no comprensión del número racional como operador multiplicativo, ya sea respondiendo con la misma fracción ó con el total original. As3 tenemos que sólo el 16% de la muestra exhibe una incomprensión total del número racional como operador multiplicativo y que el otro 16% tiene noción del racional como operador multiplicativo pero, por dificultades de diversa índole, no lo puede aplicar.*

II.6.6 <u>El número racional como medida o punto en la recta numérica.</u>

Este subconstructo del concepto de número racional se mide conun solo reactivo, el 8c.

En el se pide localizar en un segmento de recta dado, con los enteros marcados y el cero, el -2 y el 2 etiquetados, 10 números racionales.
De ellos 4 son negativosy 6 positivos, el máximo valor absoluto de ellos es 1.

Como ya hemos señalado, la escala elegida no fué adecuada para la localización de los números dados, pues resultó pequeña.

Los resultados encontrados fueron:

26 respuestas erróneas, es decir el 52% de la muestra.

13 respuestas correctas o el 26% de la muestra y.

11 sujetos, que son el 22% de la muestra, no contestaron.

Los resultados anteriores pueden indicar que el 78% de la muestra, más de las tres cuartas partes de la misma, creen poder aplicar el subconstructo 'segmento o punto en la recta numérica', sin embargo sólo lo logra el 26% es decir, un poco mas de la cuarta parte.

Las respuestas correctas fueron homogéneas en tanto que eliminaron algunos números para hacer legible su ubicación en la escala dada.

En las respuestas erróneas, no mostraron dificultades en el manejo de las convenciones usuales para la ubicación de racionales positivos a la izquierda del cero y negativos a su derecha.

La asociación incorrecta de un punto o segmento de recta a cierto racional parece deberse basicamente a la dificultad en el manejo del orden en racionales negativos y la falta de identificación del par de fracciones equivalentes.

II.7 Problemas detectados

En el análisis anterior encontramos elementos indicadores de que hay tres tipos de problemas.

a) Los atribuibles la escuela

b) Los debidos al nivel de desarrollo de los sujetos.

c) Los relacionados con el concepto de número racional.

II.7.1 Los problemas que podemos atribuir a la escuela

- *no lograr habilidades de lecto-escritura adecuadas para el trabajo escolar en el nivel de bachillerato.*

- *no lograr aprendizajes adecuados para eliminar la dificultad para discriminar homónimos.*

- *promoción de prototipos que coartan la aprehensión de los alumnos.*

- *promoción de actitudes de aceptación del principio de autoridad.*

- *promoción de algoritmia mecánica sin comprensión de la fundamentación de la misma.*

- *no promover el conocimiento de las aprehensiones y fallas de cada alumno.*

Este último problema se manifiesta por la diferencia entre el número de sujetos que <u>intentan</u> resolver cada reactivo y el número que logra hacerlo correctamente. Considerando que este problema también está relacionado con el nivel de desarrollo del individuo, volverá a figurar en el próximo apartado.

- *disociación de los contenidos matemáticos y la solución de* *problemas.*

- *promoción de una simbolización no significativa.*

* *disociación de los* diferentes subconstructos del concepto de número racional.

* *utilización de representaciones diagramáticas* sin *comprensión conceptual de las mismas.*

II.7.2 Los problemas atribuibles al nivel de desarrollo de los sujetos

Heterogeneidad en el nivel de desarrollo, manifestada por :

- *Necesidad de apoyos diagramáticos.*

- *Dificultad para mantener la atención en el trabajo.*

- *Imposibilidad de discriminar si aprendieron algo o no*

- *Imposibilidad de describir un procedimiento*

- *Imposibilidad de describir, generalizándolo, un procedimiento repetido en varios casos específicos.*

- *Imposibilidad de discriminar entre una descripción y una justificación.*

- *Imposibilidad de dar una justificación completa.*

II.7.3 Los problemas directamente relacionados con el concepto de número racional

En cuanto a la relación parte-todo:

- *Dificultad para identificar partes de un todo*

- *Dificultad para identificar el todo*

- *Dificultad para identificar particiones irregulares y en consecuencia no exhibir la comprensión de $\frac{1}{n}$ como unadelas n partes iguales que cubren el todo.*

- *Dificultad para concebir y realizar la partición de un todo discreto en partes que contengan un número de elementos que no sea divisor del total.*

- *Dificultad para manejar todos inusuales en el sistema escolarizado.*

- *Dificultad para considerar más de un ejemplar del todo.*

- *Dificultad para considerar el todo como relativo.*

- *Dificultad para obtener la parte complementaria de una parte dada, respecto a un todo dado.*

En cuanto a fracciones equivalentes :

- *Dificultad para identificar fracciones equivalentes tanto en el contexto de orden como en el de solución de prolemas verbales.*

- *No aprehensión del concepto de fracciones equivalentes.*

- *Formación incompleta del concepto de fracciones equivalentes.*

- *Dificultad para utilizar fracciones equivalentes al aplicar los algoritmos de adición y sustracción.*

En cuanto a la *interpretación* como decimal periódico:

- *No comprensión, del número racional, como cociente indicado de* enteros.

- Dificultad algorítmica con la división de enteros, por lo tanto, dificultad para convertir fracciones comunes a decimales.

- Dificultad para identificar la utilización de la notación posicional base diez en el algoritmo de la división en enteros, y por tanto, imposibilidad de comprender el algoritmo de conversión de fracciones decimales a comunes.

- No percepción de las relaciones unívoca entre fracciones comunes y decimales, y biunívoca entre fracciones decimales y clases de equivalencia de cocientes de enteros.

Respecto a las referidas al racional como elemento de uncampose tiene en cuanto a operaciones:

- Pobre manejo algorítmico con fracciones

- Mezcla de algoritmos e intercambio del algoritmo de la multiplicación y el de la división.

- No concepción de las operaciones en racionales como operaciones binarias.

- Ignorancia de las propiedades de las operaciones en racionales.

- Desconocimiento del nombre de las propiedades que utilizan correctamente.

- Incomprensión de la algoritmia de los racionales como caracterizadora de estos números.

- Dificultad para obtener el inverso multiplicativo de una fracción dada.

- Confusión entre inverso multiplicativo e inverso aditivo.

• Concepción errónea del neutro aditivo, queschaceexplícito como anulador, no sólo cuando es factor, sino también cuando está presente en cualquiera de las cuatro operaciones básicas.

En cuanto al orden :

• Dificultad para manejar el orden en los racionales

• Dificultad para discriminar entre fracciones ordenadas y fracciones equivalentes.

En cuanto a la densidad :

• Desconocimiento de la propiedad de densidad en los racionales como característica de este sistema numérico.

• Carencias algorítmicas para exhibir la densidad de los racionales, aunque posean el concepto.

• Percepción de la densidad de los racionales a partir de la continuidad de los reales.

• Sólo se manifiesta comprensión de la multiplicación como suma reiterada, es decir, como multiplicación en números naturales.

• El racional como operador multiplicativo sólo se comprende como constrictor, lo que indica una concepción de racional como fracción propia.

III EL CONCEPTO MATEMATICO DE NUMERO RACIONAL

III.1 Introducción

Como ya se dijo en la Introducción, el concepto matemático de número acional tiene, para este trabajo, importancia central.

Reiteramos,si nos interesa promover aprendizajes apegados a los conocimientos científicos, hacer explícitos los conceptos cuyos aprendizajes deseamos promover es sustancial.

Partir de esos conceptos planteados en forma explícita, para los diseños curriculares, programáticos o didácticos es deseable.

Siendo el docente el que instrumenta en el aula tales propuestas, su aprehensión de los conceptos en cuestión es tambien esencial, como ya se señala en Kieren 1976.

Por todo lo antes dicho, se consideró necesario atenderen el presente trabajo el concepto matemático de número racional.

En los capítulos anteriores hemos manejado las *interpretaciones* para número racional de Kieren (1976) .

Cada una de ellas es promotora de *estructuras cognitivas* diferentes y por lo tanto, resulta importante aprehenderlas.

Las discusiones que de las definiciones matemáticas de ellas se hace a continuación, no pretende negar tal hecho, sino hacer explícito el concepto matemático de número racional buscando obtener así más elementos para ubicar el problema de aprendizaje que nos interesa.

Para ello en este capítulo se reconoce para seis de las *interpretaciónes* la existencia de una definición matemática.

Se presentan *cinco* de esas definiciones, y se *demuestra* que las estructuras allí definidas son isomórficas, y en ese sentido las definiciones son equivalentes .

Se señalan las dificultades existentes aun para enunciar una definición completa del número racional como decimal periódico y se argumenta por qué una de las *interpretaciones restantes*, las razones, no coinciden con los números racionales .

La *interpretación* de número racional como operador multiplicativo o mapeosedesarrollaaquí, pese a queexiste una discusión en torno a su estructura algebraica[12], y que se refiere como mapeo a un espacio funcional.

III.2 Definiciones matemáticas .

Las definiciones matemáticas de número racional con que trabaja son:

Definición 1 El número racional como clase de equivalencia de cociente de enteros con denominador no nulo :

Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los enteros. Se define :

[12] '...los que nosotros llamamos números racionales, que eran, para los matemáticos griegos de la época clásica, razones de números. Se trata de algo mucho más importante que una simple cuestión de terminología, al estar ligada para los griegos (y para los modernos hasta época reciente) la palabra número a la idea de sistema con dos leyes de composición (adición y multiplicación). Las razones de enteros son concebidas por los matemáticos griegos clásicos como operadores definidos sobre el conjunto de los enteros o sobre una parte de ese conjunto (la razón de p a q es el operador que hace corresponder a N, si N es múltiplo de q el entero p (N/q)) formando un grupo multiplicativo, pero no un sistema con dos leyes de composición'
Bourbaki N. ;Elementos de Historia de las Matemáticas; Alianza Universidad,Alianza Editorial S. A. ;Madrid, 1972 .

1. $Q = \mathbb{Z} \times \{\mathbb{Z} - \{0\}\}/\sim$.
2. $\sim$: $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a\,d = b\,c$
3. $[(a,b)] = \{(a', b') \mid (a,b) \sim (a', b')\}$
4. $[(a,b)] + [(c,d)] = [(ad + bc,\ bd)]$
5. $[(a,b)] \bullet [(c,d)] = [(ac,\ bd)]$
6. $[(a,b)] < [(c,d)] \Leftrightarrow ad < bc$

<u>Definición 2</u> El número racional como cociente de enteros con denominador no nulo :

1. $Q = \{\frac{a}{b} \mid a,\ b \in \mathbb{Z} \ \text{ y } \ b \neq 0\}$
2. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$.
3. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.
4. $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < b$.

<u>Definición 3</u> El número racional como medida o punto en la recta numérica :

Para esta definición se utilizaron las siguientes convenciones:

* una recta horizontal $\longleftrightarrow$

* un rayo con el punto A como origen $\underset{A}{\vdash}\!\!\longrightarrow$

* un rayo orientado, obtenido a partir de fijar un punto arbitrario 0 en la recta ℓ, asociar al rayo a su izquierda el sentido positivo y al rayo a su derecha el negativo, sin que 0 forme parte de ninguno de ellos $\longleftarrow\!\!\underset{-\quad 0 \quad +}{\vdash}\!\!\longrightarrow \ell$.

1o. $Q = \{\bar{s} \mid \bar{s}$ segmento de recta orientado, conmensurable con $\bar{u}\}$ siendo la longitud u de $\bar{u}$ la unidad de longitud fijada arbitrariamente.

2o. Dado un segmento $\bar{s}$ conmensurable con $\bar{u}$, podemos trazar sobre la recta ℓ a partir de O dos segmentos congruentes con él con sentidos opuestos; el que cae en el rayo positivo será el segmento positivo, el que caé en el rayo negativo será el segmento negativo.

A cada segmento $\bar{s}$, conmensurable con $\bar{u}$, le asociamos su longitud $|\bar{s}| = s \geq 0$ y así al punto terminal s del segmento orientado $\bar{s}$ le asociamos un único número no negativo s : $|\bar{s}| = s \geq 0$.

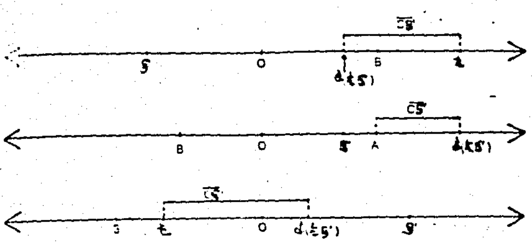
Como los segmentos son orientados se hace una nueva asociación : Si $\bar{s}$ es positivo, al punto s le asociamos $s \geq 0$, si $\bar{s}$ es negativo, al punto s le asociamos $-s$ .Al fijar la longitud de $\bar{u}$ como unidad, asociamos a su punto terminal en el rayo positivo el 1.

De este modo a cada segmento orientado $\bar{s}$ le corresponde un número, positivo o negativo de acuerdo a su orientación.

3o. Adición.

Dados $\bar{s}$ y $\bar{t}$, conmensurables con $\bar{u}$, $\bar{s} + \bar{t}$ se define como el segmento resultante de trazar: $\overline{OA_1}$ congruente con $\bar{s}$ y $\overline{A_1 A_2}$ congruente con $\bar{t}$, respetando en ambos casos el sentido de los segmentos. El segmento $\overline{OA_2}$ es la suma de $\bar{s}$ y $\bar{t}$:

$$\bar{s} + \bar{t} = \overline{OA_1} + \overline{A_1 A_2} = \overline{OA_2}$$



4o. Multiplicación.

En la recta ℓ, trazamos por O una recta auxiliar cualquiera m, en la cual el rayo positivo queda arriba de ℓ y el negativo abajo de ℓ. Sea $\bar{v}$ el segmento congruente con $\bar{u}$ a partir de O en el rayo positivo de m, su punto terminal será v Si $\bar{s}$ y $\bar{t}$ son conmensurables con $\bar{u}$, sean s y t los puntos asociados a ellos en ℓ y m respectivamentente.

Trazamos $\overline{vs}$ y por t una paralela a $\overline{vs}$. El punto en que esta recta intersecta a ℓ es $\bar{s} \bullet \bar{t} = \overline{s \bullet t}$

5o. Orden

Dados dos segmentos $\bar{s}$ y $\bar{t}$, conmensurables con $\bar{u}$, a los que asociamos de la manera descrita en 2o los números x, y respectivamente, definimos: $\bar{s} > \bar{t}$ sí y sólo si $x > y$

Tambien se usó la definición: dos rayos o segmentos $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son conmensurables si poseen una medida común, es decir, si $\bar{a} = \frac{m}{n}\bar{b}$ con, $n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$.

<u>Definición</u> 4 El número racional como elemento de un campo de cocientes infinito ordenado.

(Q, + , $\bullet$) es un campo de cocientes ordenado infinito, es decir:

1. Q es un conjunto infinito.

2. (Q, + , $\bullet$) es un campo de cocientes pues:

i) $\forall x \forall y \in Q: x + y \in Q$
e.d. Q es cerrado
bajo la adición

i') $\forall x \forall y \in Q: x \bullet y \in Q$
e.d. Q es cerrado
bajo la multiplicación.

ii) $\forall x \forall y \in Q: x + y = y + x$
e.d. + es conmutativa.

ii') $\forall x \forall y \in Q: x \bullet y = y \bullet x$
e.d. $\bullet$ es conmutativa..

iii) $\forall x \forall y \forall z \in Q:$
$(x + y) + z = x + (y + z) =$
$x + y + z$
e.d. + es asociativa

iii') $\forall x \forall y \forall z \in Q$
$(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$
$x \bullet y \bullet z$
e.d. $\bullet$ es asociativa

iv) $\exists\, 0 \in Q \;\; \forall x \in Q:$
$0 + x = x$
e.d. existe un
neutro aditivo.

iv') $\exists\, 1 \in Q \;\; \forall x \in Q:$
$1 \bullet x = x$
e.d. existe un neutro o
idéntico multiplicativo.

v) $\forall x \in Q \; \exists -x \in Q:$
$x + (-x) = 0$
e.d. existe el
inverso aditivo.

v') $\forall x \in Q \; \exists x^{-1} \in Q:$
$x \bullet x^{-1} = 1$
e.d. existe el inverso
multiplicativo.

vi) $\forall x \forall y \forall z \in Q: (x + y) \bullet z = (x \bullet z) + (y \bullet z)$,
e.d. la multiplicación se distribuye sobre la adición.

3. Q tiene un orden total, pues:

$$\exists R \subset Q \times Q \; : \forall x \forall y \forall z \in Q:$$

I) Si $x R y$ y $y R z$, entonces $x R z$, e.d. es transitiva.

II) Si $x R y$, entoncs $y R x$, e.d. es antisimétrica.

III) $\forall x \in Q \; \exists y \in Q: x R y$.

<u>Definición 5</u> El número racional como operador multiplicativo :

1 Sea $Q = \{ \Phi_{m/n} : \mathcal{R}^2 \Rightarrow \mathcal{R}^2 \mid \forall\, m,n \in \mathcal{Z},\ n \neq 0 \text{ y } \forall\, \bar{s} \in \mathcal{R}^2\ \Phi_{m/n}(\bar{s}) =$

$$(m/n)\bar{s} = \bar{t} \in \mathcal{R}^2 \}$$

Si $\Phi_{m/n}$, $\Psi_{p/q} \in Q$, definimos :

2 $(\Phi_{m/n} + \Psi_{p/q})(\bar{s}) = \Phi_{m/n}(\bar{s}) + \Psi_{p/q}(\bar{s}) = (m/n)\bar{s} + (p/q)\bar{s} =$

$(m/n + p/q)\bar{s} = \Theta_{(m/n + p/q)}(\bar{s})$

3 $(\Phi_{m/n} \bullet \Psi_{p/q})(\bar{s}) = \Phi_{m/n}(\Psi_{p/q}(\bar{s})) = \Phi_{m/n}(p/q\ \bar{s}) = (m/n)(p/q\ \bar{s}) =$

$(m/n \bullet p/q)\ \bar{s} = \Theta_{m/n \bullet p/q}(\bar{s})$

4 $\Phi_{m/n} < \Psi_{p/q} \Leftrightarrow m/n < p/q$.

Hay que hacer notar que en $\mathcal{R}^2$ está presente un sistema de referencia que nos permite asociar a cada punto $s \in \mathcal{R}^2$ sus coordenadas : $s(x,y)$ o a cada segmento $\bar{s}$ cuyo punto terminal es s un vector *orientado* $\bar{s}(x,y)$, que forma un *ángulo determinado* con el semieje positivo de las abscisas de dicho sistema de referencia.

El mapeo $\Phi_{m/n} : \mathcal{R}^2 \Rightarrow \mathcal{R}^2$ por su definición *modifica* la longitud del vector ; y si $m/n < 0$, modifica la orientación, además mantiene invariante el ángulo que forma con el sistema de referencia o lo modifica en 180^{o} según que $m/n > 0$ o $m/n < 0$.

La notación no hace explícitos estos hechos. Si como en la definición 4 deseamos asociar a cada segmento orientado $\bar{s}$ un único número positivo o negativo, ahora en $\mathcal{R}^2$ tendremos que asociarle tambien el ángulo que forma con el semieje positivo de las abscisas para lograr una correspondencia biunívoca entre segmentos y pares ordenados de números reales y ángulos: $\bar{s}(s, \hat{\alpha})$.

Así $\Phi_{m/n}(\bar{s}) = \Phi_{m/n}(s,\hat{\alpha}) = (m/n(s),\hat{\alpha})$ o $(m/n(s), \hat{\alpha+\pi})$

según que $m/n > 0$ o $m/n < 0$.

Pese a la importancia que tiene el hacer explícitos estos hechos y sus consecuencias, por el momento mantendremos por comodidad en la manipulación, la notación $\bar{s}$ para los vectores en $\mathcal{R}^2$. Retomaremos posteriormente estos aspectos.

III.3 El número racional como decimal periódico.

Una sexta definición sería la de número racional como decimal finito o periódico infinito.

Tal definición es evidentemente posible, pero involucra un largo trabajo para lograrla, debido a la necesidad de exhibir a partir de la definición de las operaciones de adición y multiplicación el que son cerradas; es decir que los resultados de dichas operaciones son a su vez decimales finitos o periódicos infinitos, y en este último caso, la relación entre los periodos de los resultados y los de los operandos.

Aquí presentamos solamente la definición del conjunto de decimales periódicos y de la adición entre ellos, señalando cual sería la linea de trabajo para llegar a definir la multiplicación.

En todos los casos se intenta atender la situación más general, donde las soluciones no son triviales.

Definición del conjunto :

$$Q = \{p_1 \ldots p_m . q_1 \ldots q_n \overline{r_1 \ldots r_s} \mid p_i, q_j, r_s \in \{0,1,\ldots,9\}; m,n,s \in \mathcal{N}\} \text{ y}$$

$\mathcal{N}$ es el conjunto de los números naturales.

Definición de la adición:

El presente algoritmo es la extensión del algoritmo de la adición entre enteros, a través de la notación posicional base diez.
El mínimo común múltiplo de las longitudes de los ciclos de los sumandos acota, al menos, el ciclo de la suma.

$$p_1 \ldots p_m . q_1 \ldots q_n \overline{r_1 \ldots r_s} + t_1 \ldots t_w . u_1 \ldots u_x \overline{v_1 \ldots v_y} =$$

$$\alpha_1 \ldots \alpha_\beta . \gamma_1 \ldots \gamma_\delta \overline{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{m.c.m.(s,y)}}$$

La definición de la multiplicación de decimales periódicos requiere,para hacer explícita en ella la cerradura de la multiplicación, de la exhibición de la periodicidad del producto, y de la relación entre las longitudes de los ciclos de los factores y el del producto.

Una manera de lograr esto, y exhibir una cota para el ciclo del producto, es utilizando la función de Euler, lo que nos permite apoyarnos para este trabajo solamente en el sistema de los números enteros.

Eso es lo que esbozaremos aquí.

Sea p/q con $p,q \in \mathcal{N}$ y $(p,q) = 1$, por lo que al efectuarse la división de p por q tendremos como posibles residuos $1,2,\ldots q-1$, es decir $q-1$ dígitos diferentes de cero.

$$
\begin{array}{r|l}
 & c.d_1 d_2 \ldots d_i e_1 e_2 \ldots e_{i+j} e_1 e_2 \ldots \\
\hline
q & p.00 \ldots 00 \ldots 00 \ldots
\end{array}
$$

$$\underline{cq}$$

$$\underline{r_1 0}$$

$$d_1 q$$

$$r_2 0$$

$$d_2 q$$

$$r_3 0$$

$$\vdots$$

$$r_i 0$$

$$d_i q$$

$$r_{i+1} 0$$

$$e_1 q$$

$$r_{i+2} 0$$

$$e_2 q$$

$$r_{i+3} 0$$

$$\vdots$$

$$(r_{i+j} = r_{i+1}) 0$$

$$e_1 q$$

$$r_{i+2}$$

con $i+j \leq q - 1$

Supongamos que p/q no es un decimal finito.

Como $(p,q) = 1$, los residuos $c, r_1, r_2, \ldots$ son todos primos relativos de q, ya que: $p = q0 + p$ y $(p,q) = 1$;

$r_1 = p - qc$ y $(p - qc, q) = 1$,

pues $p \mid (p - qc)$ porque $(p,q) = 1$, etc.

$\therefore \quad i + j \leq \phi(q)$ = total de números primos menores que q .

$\therefore \quad i + j - (i + 1) = j - 1$ = longitud del periodo $< \phi(q)$.

Es importante notar que el periodo depende sólo del denominador q.

Por el Teorema fundamental de la aritmética los enteros positivos p y q tienen una descomposición en factores primos única, excepto por el orden .

Como los factores primos se pueden repetir los expresamos como :

$p = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$ y $q = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \ldots q_m^{\beta_m}$.

Respecto a la función de Euler $\Phi(q)$, se sabe que :

$$\Phi(q) = \Phi\left(\Pi_{i=1}^{m} q^{\alpha} \right) = \Pi^{m}_{i=1}\left(q_i^{\beta_i} - q_i^{\beta_i - 1}\right) = q\ \Pi^{m}_{i=1} \left(1 - 1/q_i\right).$$

y que es una función multiplicativa $[\ \Phi(rs) = \Phi(r)\Phi(s)]$.

Por lo tanto para la definición de la multiplicación de dos decimales periódicos podría obtenerse una cota para el periódo de la misma a partir de los periódos de los denominadores de las fracciones comunes correspondientes.

Así $(p/q)(r/s)$ tendría un periodo menor a $\Phi(qs)$.

Aplicando las propiedades de la función de Euler antes mencionadas tenemos: $\Phi(qs) = q\ \Pi^{m}_{i=1}(1 - 1/q_i)p\ \Pi^{n}_{i=1}(1 - 1/p_i)$.

Es importante notar que aún en esta línea de trabajo para hacer explícita la definición de las operaciones entre decimales periódicos, se está recurriendo a otra definición, la de cociente

de enteros con denominador no nulo.

El paso del "cociente indicado" p/q, al decimal periódico correspondiente depende de la ejecución de la división y,a través de su algoritmo, depende por lo tanto de la notación posicional base diez.

En el capítulo I se señalaba que en Kieren(1976), se habla de este subconstructo del número racional como "una extensión natural (vía nuestro sistema de notación posicional base diez) de los números enteros".

El conocimiento de teoría de números que tal extensión natural demanda, como acabamos de intentar mostrar, parece poco usual a partir de su ausencia en los textos que abordan el subconstructo en los niveles de primaria a licenciatura, excepto, claro está, los textos de teoría de números, que no forzosamente están trabajando el subconstructo en cuestión.

Parece ser que esta es la razón por la que en general se elude trabajar con decimales periódicos, más allá de mostrar la correspondencia entre fracciones y decimales periódicos.

Como se ve, las sospechas surgidas en el capítulo I acerca de las posibles dificultades matemáticas intrínsecas a este subconstructo, quedan confirmadas.

III.4 Equivalencia de las definiciones.

Como las cinco definiciones enunciadas corresponden al mismo concepto matemático, haremos ver que son equivalentes mediante la exhibición de los isomorfismos existentes entre las estructuras correspondientes a cada una de ellas.

III.4.1 Primeró se demostrará que las clases de equivalencia de cocientes de enteros con denominador no nulo, forman un campo bajo sus dos operaciones.

Demostración 1:

u($\{\mathbb{Z} \times \{\mathbb{Z}-\{o\}/\sim$, $+, \bullet$) es un campo cociente ordenado infinitou.

Es decir, $(\{\mathbb{Z} \times \{\mathbb{Z} - \{0\}\}\} / \sim, +, \bullet)$ satisfacen los axiomas de la definición 4, como veremos en seguida.

1. $\{\mathbb{Z} \times \{\mathbb{Z}-\{0\}\}$ es infinito, pues $1 \in \{\mathbb{Z}-\{0\}\}$
   $\therefore \{\mathbb{Z} \times \{1\}\} \subset \{\mathbb{Z} \times \{\mathbb{Z} - \{0\}\}\}$, y $\mathbb{Z}$ es infinito.

2. $(\mathbb{Z} \times \{\mathbb{Z}-\{0\}\}/\sim, +, \bullet)$ es un campo , pues

i) Por la definición dada de adición $\mathbb{Z} \times \{\mathbb{Z} - \{0\}\}$ es cerrado bajo $+$ y si $(a,b), (a',b') \in [(a,b)]$ y $(c,d), (c',d') \in [(c,d)]$

$$\therefore [(a,b)]+[(c,d)] = [(ad + bc, bd)]$$

$$y \quad [(a',b')]+[(c',d')] = [(a'd'+b'c', b'd')]$$

por la definición de adición .

Como $(ad + bc)\, b'd' = ad\, b'd'+bcb'd'=ab'dd'+cd'bb'$

por la distributividad de la adición sobre la multiplicación y la conmutatividad de la multiplicación en $\mathbb{Z}$:

$ab'dd' + cd'bb' = a'bdd' + c'dbb'$ pues $(a,b) \sim (a',b')$

y $(c,d) \sim (c',d')$

$\therefore \quad a'bdd' + c'dbb' = a'd'bd + b'c'bd$

por conmutatividad de la multiplicación en $\mathbb{Z}$.

$a'd'bd + b'c'bd = (a'd'+b'c')bd$

por asociatividad de la multiplicación en $\mathbb{Z}$.

$\therefore \quad (ad + bc)\, b'd' = (a'd'+b'c')bd$

$\therefore\quad (ad + bc,\ bd) \sim (a'd' + b'c',\ b'd')$ por definición de ~ .

$\therefore$ el representante de la clase de equivalencia es irrelevante bajo la adición.

ii) $[(a,b)] + [(c,d)] = [(ad + bc,\ bd)]$

por la definición de adición en $\mathbb{Z} \times \{\mathbb{Z} - \{0\}\}/\sim$

$\therefore\quad \forall (a,b) \in [(a,b)]\ \forall (c,d) \in [(c,d)]$

$(a,b) + (c,d) = (ad + bc,\ bd).$

$(ad + bc,\ bd) = (bc + ad,\ db)$

por la conmutatividad de la adición y de la multiplicación en $\mathbb{Z}$..

$(bc + ad,\ db) = (cb + ad,\ db)$

por la conmutatividad de la multiplicación en $\mathbb{Z}$.

$(cb + ad,\ db) = (c,d) + (a,b) = [(c,d)] + [(a,b)]$

por la definición de adición y el que los representantes son irrelevantes.

$\therefore\ [(a,b)] + [(c,d)] = [(c,d)] + [(a,b)]$

es decir + es conmutativa

iii) $\{[(a,b)] + [(c,d)]\} + [(e,f)] = [(ad + bc,\ bd)] + [(e,f)]$

por la definición de adición

$[(ad+bc, bd)] + [(e,f)] = [(ad+bc)f + e(bd), (bd)f)]$

por la definición de adición

$\therefore\ \forall (a,b)\in [(a,b)]\ \forall (c,d)\in [(c,d)],\ \forall (e,f)\in [(e,f)]$

$((a,b) + (c,d)) + (e,f) = ((ad + bc)f + e(bd), (bd)f)$

$((ad+bc)f + e(bd),(bd)f) = (adf+bcf+ebd, bdf)$

por la distributividad de la multiplicación sobre la adició y la asociatividad de la multiplicación en $\mathbb{Z}$.

$(adf + bcf + ebd, bdf) = (adf + bcf + bde. bdf)$

or conmutatividad de la multiplicación en $\mathbb{Z}$.

$(adf + bcf + bde, bdf) = (a\{df\} + b\{cf + de\}. b\{df\})$

por asociatividad de la multiplicación y distributividad de la multiplicación sobre la adición en $\mathbb{Z}$.

$(a\{df\} + b\{cf + de\}. b\{df\}) = (a,b) + (cf + de. df)$

$(a,b) + (cf + de. df) = (a,b) + \{(c,d) + (e,f)\} =$

$$[(a,b)] + \{[(c,d)] + [(e.f)]\}$$

por la definición de adición y el que los representantes son irrelevantes.

$\therefore\ \{[(a,b)] + [(c,d)]\} + [(e,f)] = [(a,b)] + \{[(c.d)] + [(e,f)]\}$.

es decir + es asociativa.

iv) $0 \in \mathbb{Z}$ $\therefore$ $[(0,n)] \in \{\mathbb{Z} \times \{\mathbb{Z} - \{0\}\}/\sim$, si $n \neq 0$.

$\forall [(a,b)] \in \{\mathbb{Z} \times \{\mathbb{Z} - \{0\}\}/\sim : [(a,b)] + [(0,n)] = [(an + b0, bn)]$

por definición de adición

$\therefore \forall (a,b) \in [(a,b)]\ \forall (0,n) \in [(o,n)] : (a,b) + (o,n) = (an+bo, bn)$

$(an + b0, bn) = (an, bn)$, pues $0c = 0$ para todo entero c.

$(an,bn) \sim (a,b)$ pues $(an)b = anb = abn = a(bn) = (bn)a$

por la asociatividad y la conmutatividad de la multiplicación en $\mathbb{Z}$ aplicadas sucesivamente dos veces.

$\therefore$ $[(an,bn)] = [(a,b)]$ y $[(0,n)]$

es el neutro aditivo en $\{\mathbb{Z} \times \{\mathbb{Z} - \{0\}\}/\sim$

v) p.d. "$\forall [(a,b)] \in \{\mathbb{Z} \times \{\mathbb{Z} - \{0\}\}\}/\sim$, $\exists [(-a,b)] \in \{\mathbb{Z} \times \{\mathbb{Z} - \{0\}\}\}/\sim$:

$[(a,b)] + [(-a,b)] = [(0,n)]$"

Sea $[(a,b)] \in \{\mathbb{Z} \times \{\mathbb{Z} - \{0\}\}\}/\sim$, con $a \neq 0$

$\forall (a,b) \in [(a,b)] \in \{\mathbb{Z} \times \{\mathbb{Z} - \{0\}\}\}/\sim$, $a \in \mathbb{Z}$, y por definición

de $\mathbb{Z}$ existe $-a \in \mathbb{Z}$ tal que : $a + (-a) = 0$

$\therefore$ $[(-a, b)] \in \{\mathbb{Z} \times \{\mathbb{Z} - \{0\}\}\}/\sim$ y

$[(a,b)] + [(-a,b)] = [(ab + (-a)b, b^2)]$,

por la definición de adición

$\therefore\ \forall (a,b) \in [(a,b)]\ \forall (-a,b) \in [(-a,b)$

$(a,b) + (-a,b) = (ab + (-a)b, b^2) = (ab - ab,\ b^2)$

por las propiedades de la multiplicación en $\mathbb{Z}$.

$(ab - ab,\ b^2) = (0, b^2)$

por la definición de inverso aditivo en $\mathbb{Z}$.

$\therefore\ [(a,b)] + [(-a,b)] = [(ab+(-a)b, b^2)] =$

$[(ab-ab, b^2)] = [(0, b^2)]$

por la irrelevancia del representante de clase

$\therefore\ [(-a,b)]$ es el inverso aditivo de $[(a,b)]$ en $\mathbb{Z} \times \{\mathbb{Z} - \{0\}\}/\sim$.

i') Por la definición de multiplicación en $\mathbb{Z} \times \{\mathbb{Z} - \{0\}\}/\sim$, es cerrado bajo ella, y si $(a,b), (a',b') \in [(a,b)] \in \mathbb{Z} \times \{\mathbb{Z} - \{0\}\}/\sim$ y $(c,d), (c',d') \in [(c,d)] \in \mathbb{Z} \times \{\mathbb{Z} - \{0\}\}/\sim$

$(a,b) \bullet (c,d) = (ac, bd)$, $(a',b',) \bullet (c',d') = (a'c,'b'd')$

por la definición de multiplicación.

Como $(ac)b'd' = acb'd' = ab'cd'$ por la asociatividad y la conmutatividad de la multiplicación en $\mathbb{Z}$.

$ab'cd' = a'bcd'$, pues $(a,b) \sim (a',b')$

$a'bcd' = a'bc'd$, pues $(c,d) \sim (c'd')$

$a'bc'd = a'c'bd = (a'c')bd$

por la conmutatividad y la asociatividad de la multiplicación en $\mathbb{Z}$.

$$\therefore \quad (ac)b'd' = (a'c')bd$$

$$\therefore \quad (ac,bd) \sim (a'c',b'd') \quad \text{por la definición de } \sim$$

e.d. el representante de la clase de equivalencia es irrelevante bajo la multiplicación.

ii') $[(a,b)]\bullet[(c,d)] = [(ac,bd)]$ por la definición de multiplicación.

$\therefore\ \forall\, (a,b)\in[(a,b)],\ \forall\, (c,d)\in[(c,d)] : (a,b)\bullet(c,d) = (ac,bd)$

$(ac,bd) = (ca,db)$

por la conmutatividad de la multiplicación en $\mathbb{Z}$.

$(ca,db) = (c,d)\bullet (a,b) = [(c,d)]\bullet[(a,b)]$

por la definición de multiplicación, y que los representantes son irrelevantes.

$$\therefore \quad [(a,b)]\bullet[(c,d)] = [(c,d)]\bullet [(a,b)]$$

es decir $\bullet$ es conmutativa.

iii') $\{[(a,b)]\bullet[(c,d)]\}\bullet[(e,f)] = [(ac,bd)]\bullet[(e,f)] =$

$$[(\{ac\}e,\{bd\}f)]$$

por la definición de multiplicación.

$\therefore \ \forall\, (a,b)\in [(a,b)],\ \forall\, (c,d)\in [(c,d)],\ \forall\, (e,f)\in [(e,f)]$

$\{(a,b)\bullet(c,d)\}.\bullet(e,f) = (\{ac\}e,\{bd\}f)$

$(\{ac\}e,\{bd\}f) = (ace,bdf) = (a\{ce\},b\{df\})$.

Por la definición de la multiplicación en $\mathbb{Z} \times \{\mathbb{Z} - \{0\}\}/\sim$,

y la asociatividad de la multiplicación en $\mathbb{Z}$.

$(a\{ce\},\ b\{df\}) = (ab)\bullet(ce,df)$ y

$(a,b)\bullet(ce,df) = (a,b)\bullet\{(c,d)\bullet(e,f)\} = [(a,b)]\bullet\{[(c,d)]\bullet[(e,f)]\}$

por la definición de la multiplicación y la irrelevancia del

representante de la clase

$\therefore \ \{[(a,b)]\bullet[(c,d)]\}\bullet[(e,f)] = [(a,b)]\bullet\{[(c,d)]\bullet[(e,f)]$

es decir $\bullet$ es asociativa.

iv') $\forall n \in \mathbb{Z}$, si $n \neq 0$, $[(n,n)] \in \mathbb{Z} \times \{\mathbb{Z} - \{0\}\}/\sim$

$\therefore \ \forall [(a,b)]\in \mathbb{Z} \times \{\mathbb{Z} - \{0\}\}/\sim \ : \ [(a,b)]=[(an,bn)]$

por la definición de multiplicación

$\therefore\ \forall\,(a,b)\in[(a,b)],\ \forall\,(n,n)\in[(n,n)]$:

$$(a,b)\bullet(n,n) = (an,bn)$$

$(an)b = a(nb) = (nb)a = (bn)a$

por la asociatividad y la conmutatividad de la multiplicación en $\mathbb{Z}$

$\therefore\ (an,bn)\sim(a,b)$ por la definición de $\sim$.

$\therefore\ [(a,b)]\bullet[(n,n)] = [(an,bn)] = [(a,b)]$

por la irrelevancia del representante de clase.

$\therefore\ [(n,n)]$ es el elemento identidad o neutro multiplicativo

en $\mathbb{Z}\times\{\mathbb{Z}-\{0\}\}/\sim$.

v') pd". $\forall\,[(a,b)]\in\mathbb{Z}\times\{\mathbb{Z}-\{0\}\}/\sim$ y $[(a,b)]\neq[(0,n)]$

$$\exists[(b,a)]\in\mathbb{Z}\times\{\mathbb{Z}-\{0\}\}/\sim : [(a,b)]\bullet[(b,a)] = [(n,n)]"$$

Sea $[(a,b)]\in\{\mathbb{Z}\times\{\mathbb{Z}-\{0\}\}\}/\sim$, $[(a,b)] = [(0,n)] \Leftrightarrow a = 0$

y $b = n \neq 0$

$\therefore\ a\in\mathbb{Z}-\{0\}$ y $[(b,a)]\in\{\mathbb{Z}\times\{\mathbb{Z}-\{0\}\}\}/\sim$

$[(a,b)]\bullet[(b,a)] = [(ab,ba)]$

por la definición de multiplicación

$\therefore\ \forall\,(a,b)\in[(a,b)],\ \forall\,(b,a)\in[(b,a)]$: $(a,b)\bullet(b,a) = (ab,ba)$

por la definición de la multiplicación

$$(ab, ba) = (ab,\ ab)$$

por la conmutatividad de la multiplicación en $\mathbb{Z}$.

Como $(ab)n = (ab)n$

$\therefore$ $(ab, ab) \sim (n, n)$, por la definición de $\sim$

$\therefore$ $[(a,b)] \bullet [(b,a)] = [(n,n)]$

por la irrelevancia del representante de clase.

Es decir, existe el inverso multiplicativo .

vi') $\forall\, [(a,b)],\ \forall\, [(c,d)]\ \forall\, [(e,f)] \in \{\mathbb{Z} \times \{\mathbb{Z} - \{0\}\}\}/\sim$

$$[(a,b)] \bullet \left([(c,d)] + [(e,f)]\right) = [(a,b)] \bullet [(cf + de,\ df)] =$$

$$[(a\{cf + de\},\ b\ \{df\})]$$

por las definiciones de adición y multiplicación

$\therefore$ $\forall\ (a,b) \in [(a,b)]$, $\forall (c,d) \in [(c,d)]$, $\forall (e,f) \in [(e,f)]$:

$$(a,b) \bullet \{(c,d) + (e,f)\} = (a\{cf+de\},\ b\{df\}) = (acf+ade, bdf)$$

por la irrelevancia del representante de clase bajo la adición y la multiplicación, y por la distributividad de la multiplicación sobre la adición y la asociatividad de la multiplicación en $\mathbb{Z}$.
Además:

$$\{(a,b) \bullet (c,d)\} + \{(a,b) \bullet (e,f)\} = (ac, bd) + (ae + bf) =$$

$$(\{ac\}bf + \{bd\}ae,\ (bd)bf) = (acbf + bdae,\ bdbf)$$

por las definiciones de multiplicación, adición y la irrelevancia de los representantes de clase, ademas de la distributividad de la multiplicación sobre la adición y la asociatividad de la multiplicación en $\mathbb{Z}$.

$$(acbf + bdae,\ bdbf) = (\{acf + ade\}\ b,\ \{bdf\}b)$$

por la conmutatividad de la multiplicación, la distributividad de la multiplicación sobre la adición, y la asociatividad de la multiplicación en $\mathbb{Z}$.

$$(\{acf + ade\}b,\ \{bdf\}b) = (acf + ade,\ bdf) \bullet (b,b) =$$

$$(acf + ade,\ bdf)$$

por definición de multiplicación, la existencia del elemento identidad y la irrelevancia del representantente

$$\therefore \quad [(a,b)] \bullet \{[(c,d)] + [(e,f)]\} = \{[(a,b)] \bullet [(c,d)]\} +$$

$$\{[(a,b)] \bullet [(e,f)\}$$

por la irrelevancia del representante de clase.

Por lo tanto, la multiplicación se distribuye sobre la adición.

3. $\mathbb{Z} \times \{\mathbb{Z} - \{0\}\}$ tiene un orden total.

Demostraremos primero un teorema auxiliar.

Teorema :

" $\forall\ [(a,b)] \in \{\mathbb{Z} \times \{\mathbb{Z} - \{0\}\}\}/\sim$ existe $(a',b') \in [(a,b)]$, tal que $\quad b \in \dot{\mathbb{Z}}$ "

Sea $[(a,b)] \in \{\mathbb{Z} \times \{\mathbb{Z} - \{0\}\}\}/\sim$

$\therefore$ a,b $\mathbb{Z}$ y $b \neq 0$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $a \neq 0$.

i) Si $a,b \in \mathbb{Z}^+$ $\therefore$ $a' = a$, $b' = b$ y $a'b = ab'$.

ii) Si $a,b \in \mathbb{Z}^-$ $\therefore$ $b' = -b$, $a' = -a$ y $a'b = (-a)b = -ab =$

$a(-b) = ab'$, por las propiedades de la multiplicación en $\mathbb{Z}$.

iii) Si $a \in \mathbb{Z}^-$, $b \in \mathbb{Z}^+$ $\therefore$ $a' = a$, $b' = b$ y $a'b = ab'$.

iv) Si $a \in \mathbb{Z}^+$, $b \in \mathbb{Z}^-$ $\therefore$ $b' = -b$, $a' = -a$ y $a'b = (-a)b = -ab =$

$a(-b) = ab'$, por las propiedades de la multiplicación entre enteros.

$\therefore$ Toda clase de equivalencia tiene un representante con denominador positivo.

I $\forall\ [)a,b)]\ \forall\ [(c,d)]\ \forall\ [(e,f)] \in Q$:

$[(a,b)] < [(c,d)] \Leftrightarrow ad < bc$

y $[(c,d)] < [(e,f)] \Leftrightarrow cf < de$

por la definición de orden en Q .

Por el Teorema auxiliar, tomamos $b,d,f > 0$

$\therefore\ ad < bc \quad , \quad cf < de$

$\therefore\ adf < bcf < bde \quad y \quad af < be$

por las propiedades de orden en $\mathbb{Z}$

$\therefore\ [(a,b)] < [(e,f)]$.

II Sean $[(a,b)]\ ,\ [(c,d)] \in Q$: $[(a,b)] < [(c,d)]$

$\therefore\ ad < bc \quad y \quad bc < ad$

por la tricotomía en $\mathbb{Z}$

$\therefore\ [(c,d)] < [(a,b)]$

por la definición de orden en Q .

III Sea $[(a,b)] \in Q \quad \therefore \quad a,b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$

De acuerdo al teorema auxiliar $\exists\ (a',b') \in [(a,b)] : b \in \mathbb{Z}^{\cdot}$.

Sea $c = a' + 1 \quad \therefore \quad a' < c$ por la definición de orden en $\mathbb{Z}$.

Sea $d = b' \quad \therefore \quad [(c,d)] \in Q$

como $a'd = a'b < (a' + 1) b' = cb'$

$\therefore$ $[(a,b)] < [(c,d)]$.

III.4.2 Veremos ahora que las estructuras correspondientes a los cocientes de enteros y a las clases de equivalencia de cocientes de enteros con denominador no nulo, son isomorfas entre sí .

Demostración 2.

Consideremos $f: \{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0 \} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \{\mathbb{Z} - \{0\}\} /\sim$

tal que $f(\frac{a}{b}) = [(a,b)]$

1° f es biyectiva :

i) f es suproyectiva, pues si $[(a,b)] \in \{Z \times \{Z - \{0\}\}/\sim$

$[(a,b)] \neq \emptyset$, pues $\mathbb{Z} \neq \emptyset$ y $\mathbb{Z} - \{0\} \neq \emptyset$

$\therefore$ $\exists\, a \in \mathbb{Z}$, $\exists\, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$ tales que $(a,b) \in [(a,b)]$

$\therefore$ $\frac{a}{b} \in \{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0\}$ y $f(\frac{a}{b}) = [(a,b)]$.

ii) f es biunívoca :

sean $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'} \in \{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0\}$ y $\frac{a}{b} \neq \frac{a'}{b'}$,

$\frac{a}{b} \neq \frac{a'}{b'}$ sí y solo sí $ab' \neq a'b$.

Supongamos que $f(a/b) = f(a'/b')$.

$\therefore$ $f(\frac{a}{b}) = [(a,b)] = \{(ai, bi) | (ai, bi) \sim (a,b)\}$ =

$f(\frac{a'}{b'}) = [(a', b')] = \{(ai, bi) | (ai, bi) \sim (a',b')\}$

$[(a,b)] = [(a',b')]$ sí y sólo sí $(a,b) \sim (a',b')$

$(a,b) \sim (a',b')$ sí y sólo sí $ab' = a'b$,

contradicción.

$\therefore$ $f(a/b)=f(a'/b')$ sí y sólo sí $a/b = a'/b'$

2^{o} f preserva la adición

$\forall\, a/b,\ \forall\, c/d \in \{a/b | a,b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0\}$

$f(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) = f(\frac{ad + bc}{bd})$, por la definición de adición.

$f(\frac{ad + bc}{bd}) = [(ad + bc, bd)]$, por la definición de f

$[(ad + bc, bd)] = [(a,b)] + [(c,d)]$

por la definición de adición en $\mathbb{Z} \times \{\mathbb{Z} - \{0\}\} / \sim$

Como $f(\frac{a}{b}) = [(a,b)]$ y $f(\frac{c}{d}) = [(c,d)]$ por la definición de f.

$\therefore$ $f(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) = f(\frac{a}{b}) + f(\frac{c}{d})$

3°. f preserva la multiplicación

$\forall \frac{a}{b} \forall \frac{c}{d} \in \{ \frac{a}{b} | a,b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0\}$

$f(\frac{a}{b} \bullet \frac{c}{d}) = f(\frac{ac}{bd}) = [(ac,bd)]$ por la definición de multiplicación y la definición de f.

$[(ac,bd)] = [(a,b)] \bullet [(c,d)]$

por la definición de multiplicación en $\mathbb{Z} \times \{\mathbb{Z} - \{0\}\}$

$f(\frac{a}{b}) = [(a,b)]$, $f(\frac{c}{d}) = [(c.d)]$ por la definición de f

$$\therefore \quad f(\frac{a}{b} \bullet \frac{c}{d}) = f(\frac{a}{b}) \bullet f(\frac{c}{d})$$

4°. f preserva la relación de orden

Si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $ad < bc$

por la definición de orden en $\{\frac{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0\}$

$$\therefore \quad f(\frac{a}{b}) = [(a,b)] < [(c,d)] = f(\frac{c}{d})$$

por la definición de orden en $\{\mathbb{Z} \times \{\mathbb{Z} - \{0\}\}\} /\sim$

III. 4.3 Ahora se exhibirá el isomorfismo entre las estructuras de los cocientes de enteros con denominador no nulo y las medidas, segmentos o puntos en la recta numérica.

Demostración 3 .

Las definiciones 3 y 2 son equivalentes en tanto que las estructuras que definen son isomórficas.

Definimos una función r que exhiba el isomorfismo planteado :

$r: \{\bar{s} \mid \bar{s}$ es un segmento de recta orientado, conmensurable con $\bar{u}$ $\}$

$$\longrightarrow \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \text{ y } n \neq 0\}$$

tal que : $r(\bar{s}) = s$, punto terminal de $\bar{s}$ a partir de 0.

$s > 0$, si $\bar{s}$ es positivo

$s < 0$, si $\bar{s}$ es negativo

$s = 0$, si $\bar{s} = 0$

Como $\bar{s}$ es conmensurable con $\bar{u}$, $s = \frac{m}{n}$ para ciertos m, $n \in \mathbb{Z}$

con $n \neq 0$

1° r es biyectiva .

i) r es suprayectiva :

Si $\frac{a}{b} \in \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0\}$, tomamos $\bar{u}$ en ℓ y lo partimos

en b partes iguales[13].

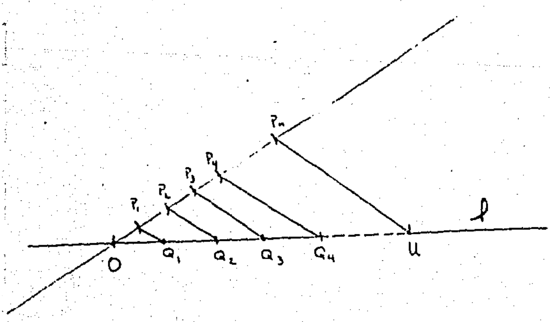
[13] Dividir un segmento en n paretes iguales .

Sea $\overline{OU}$ (fig 1) el segmento en cuestiónsobre la recta ℓ .

Se traza una semirrecta con extremo en O que no esté en la recta ℓ.

Con una abertura cualquiera del compas tracense sobre esa semirrecta n segmentos iguales, el primero con origen en O y cada uno de los demás con origen en el extremo final del anterior, obteniendo así los puntos $p_1, p_2, \ldots, p_n$ como extremos finales de dichos segmentos.

Tracese la recta Up_n y por $p_1, p_2, \cdots, p_n$ rectas paralelas a ella. Los puntos $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ en que estas rectas intersectan a ℓ dividen el segmento $\overline{OU}$ en n partes iguales y $Q_n = U$



- mostración.

$\overline{Q_i Q_{i+1}} = \overline{Q_{i+1} Q_{i+2}}$

trazamos por p_i y p_{i+1} paralelas ℓ_{i+1}, ℓ_{i+2} a ℓ.

Sean k_{i+1} y k_{i+2} los puntos en que estas paralelas cortan re s pec t ivamente a $\overline{p_{i+1} Q_{i+1}}$, $\overline{p_{i+2} Q_{i+2}}$.

En $P_i P_{i+1} R_{i+1}$ y

Con el compás abierto en $\frac{1}{b}$, trazamos a partir de O m veces $\frac{1}{b}$, si $\frac{m}{n} > 0$ hacia la izquierda de $\bar{O}$ para que caiga en el rayo positivo, si $\frac{m}{n} < 0$ hacia la derecha, para que caiga en el negativo.

Al punto terminal del segmento así trazado le corresponde, por la definición de r, el número $\frac{m}{n}$.

ii) r es biunívoca :

Supongamos que $\bar{s} \neq \bar{t}$ y $r(\bar{s}) = r(\bar{t})$

$\therefore\ \exists\, m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 :\ \frac{m}{n}\bar{u} = \bar{s}$ y $\frac{m}{n}\bar{u} = \bar{t}$

$\therefore\ \bar{s} = \bar{t}$, lo que contradice la hipótesis $\bar{s} \neq \bar{t}$

$\therefore\ r(\bar{s}) = r(\bar{t})$ si y sólo si $\bar{s} = \bar{t}$.

tenemos $P_{i+1}\ P_{i+2}\ R_{i+2}$ $\widehat{R_{i+1}P_iP_{i+1}} = \widehat{R_{i+2}P_{i+1}P_{i+2}}$ por ser ángulos correspondientes al cortar dos paralelas(ℓ_{i+1},ℓ_{i+2}) por una recta (OP_n). Similarmente tenemos $P_i\ P_{i+1}\ R_{i+1} = P_{i+1}\ P_{i+2}\ R_{i+2}$.

Ademas $\overline{P_i\ P_{i+1}} = \overline{P_{i+1}\ P_{i+2}}$ por construcción

$\therefore\ P_i\ P_{i+1}\ R_{i+1} = P_{i+1}\ P_{i+2}\ R_{i+2}$

$\therefore\ \overline{P_i\ R_{i+1}} = \overline{P_{i+1}\ R_{i+2}}$

Como $\overline{Q_iQ_{i+1}} = \overline{P_iR_{i+1}}$ y $\overline{Q_{i+1}Q_{i+2}} = \overline{P_{i+1}R_{i+2}}$

$\therefore\ Q_i\ Q_{i+1} = Q_{i+1}\ Q_{i+2}$

2^o r preserva la adición

Sean $\bar{s}$, $\bar{t}$ conmensurables con $\bar{u}$:

$$r(\bar{s} + \bar{t}) = r(\overline{OA_1} + \overline{A_1 A_2}) = r(\overline{OA_2})$$

i) Si $\bar{s}$ y $\bar{t}$ son ambos positivos o negativos,

por ser conmensurables con $\bar{u}$, existen $\frac{m}{n}, \frac{p}{q} > 0$ tales que

$$|\overline{Os}| = \frac{m}{n} \quad y \quad |O\bar{t}| = \frac{p}{q}$$

Al trasladar $\overline{Ot}$ al punto s abriendo el compas $|\bar{O}\bar{t}|$ y haciendo el trazo apoyándose en s , tenemos :

Abriendo el compas en la longitud

$\frac{1}{nq}$ trazaremos mq segmentos

de O a s, pues $\frac{mq}{nq} = \frac{m}{n}$ y con np

segmentos se alcanzará el punto s pues $\frac{np}{nq} = \frac{p}{q}$ y $|\overline{st'}| = |\overline{Ot'}|$ por

construcción.

ii) Si $\bar{s}$ y $\bar{t}$ son uno negativo y otro positivo, por ser

conmensurables con $\bar{u}$, sin pérdida de generalidad, existen $\frac{m}{n} > 0$,

y $\frac{p}{q} < 0$ tales que $|\bar{O}\bar{s}| = \frac{m}{n}$, $|\bar{O}\bar{t}| = |\frac{p}{q}| = -\frac{p}{q}$.

Trazamos $\bar{O}s$ y con apoyo en s y apertura $\overline{|Ot|}$ trazamos,

respetando el sentido de $\overline{OT}$ un nuevo segmento .

El punto t' donde termina será el punto terminal de

$$\bar{O}t' = \bar{O}s + \bar{O}t = \quad \bar{s} + \bar{t} .$$

Con el compas abierto $\frac{1}{nq}$ trazamos mq segmentos hasta llegar a s pues $\frac{m}{n} = \frac{mq}{nq}$ y a partir de allí trazamos en sentido contrario np segmentos para alcanzar t', pues $\frac{p}{q} = \frac{np}{nq}$ y $|\overline{st'}| = |\overline{Ot}| = -\frac{p}{q} > 0$

$\therefore \; |\overline{Ot'}| = \left|\frac{\overline{mq+np}}{nq}\right| = \frac{mq - np}{nq} = \frac{mq + (-np)}{nq} = \frac{mq}{nq} + \frac{-np}{nq} = \bar{s} + \bar{t}$.

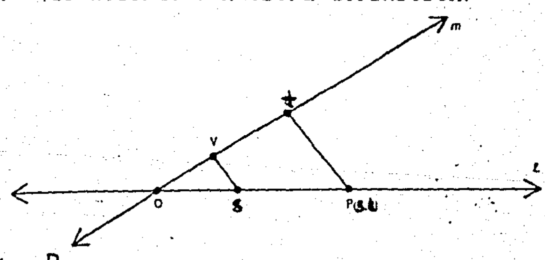
3° r preserva la multiplicación .

Si $\bar{s}$ y $\bar{t}$ tienen ambos el mismo sentido supongamos, sin pérdida de generalidad, que son positivos

$\therefore$ Trazamos $\overline{Os}$ sobre ℓ, la recta auxiliar m por O y el segmento $\overline{Ov}$ semejante a $\bar{u}$ en m, así como el $\overline{Ot'}$

Trazamos la recta sv y por t' la paralela a ella.

El punto M en que intersecta esta última recta a la recta ℓ nos da $\overline{OM} = \overline{Os} \bullet \overline{Ot'} = \bar{s} \bullet \bar{t}$ de acuerdo a nuestra definición.



Como $|\overline{Os}| = \frac{m}{n}$ y $|\overline{Ot'}| = \frac{p}{q}$ y

$\angle MOt' = \angle sOv$, $\angle vsO = \angle t'MO$ $\therefore$ $\angle Ovs = \angle Ot'M$

(por que la suma de los ángulos internos de un Δ es 350°) por el criterio AA

$\therefore \ \Delta O s v \sim \Delta O t' M$

$\therefore \ \frac{\overline{O}\,\overline{s}}{\overline{O}\overline{v}} = \frac{\overline{O}\overline{M}}{\overline{O}\overline{t}'}$, como $|\overline{O}\overline{v}| = 1$

$$\frac{\overline{O}\overline{s}}{\overline{O}\overline{v}} = \frac{m}{n} \quad \text{y como} \quad \overline{O}\overline{t}' = \frac{p}{q}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{\overline{O}\overline{M}}{p/q} \quad \therefore \quad \frac{m}{n} \bullet \frac{p}{q} = \overline{O}\overline{M}$$

Si $\bar{s}$ y $\bar{t}$ tuvieran sentidos diferentes, la demostración sería similar aunque el triángulo Ot' M tendrá su vertice t' en el rayo negativo de m.

4^{o} r preserva la relación de orden .

Sean $\bar{s}$, $\bar{t}$ conmensurables con $\bar{u}$ y $\bar{s} < \bar{t} \Leftrightarrow s < t$, de acuerdo a la definición de orden en el conjunto de los segmentos orientados conmensurables con $\bar{u}$.

Como $\bar{s}$, $\bar{t}$ son conmensurables con $\bar{u}$, $s = \frac{m}{n}$ y $t = \frac{p}{q}$ para ciertos $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$ con $n \neq 0$ y $q \neq 0$

$\therefore \ \frac{m}{n} = s < t = \frac{p}{q}$.

III.4.4 La estructura de los cocientes de enteros bajo sus dos operaciones y la de los mapeos y las suyas, son isomorfas.

Demostración 4 . Las estructuras correspondientes a las definiciones 2 y 5 son isomórficas.

Para demostrarlo exhibiremos el isomorfismo entre

$\{a/b \mid a,b \in \mathcal{Z} \quad y \quad b \neq 0\}$,

con las operaciones y relaciones definidas en él, y los mapeos sus operaciones y relaciones presentadas en la definición 5 .

Definimos la función α como :

$$\alpha : \{a/b \mid a,b \in \mathcal{Z} \;\; y \;\; b \neq 0\} \longrightarrow \{\Phi_{m/n} \mid \Phi_{m/n} : \mathcal{R}^2 \longrightarrow \mathcal{R}^2\}$$

tal que $\forall m, \forall n \in \mathcal{Z}$, $n \neq 0$ y $\forall \bar{s} \in \mathcal{R}^2$, $\Phi_{m/n}(\bar{s}) = (m/n)\bar{s} = \bar{t} \in \mathcal{R}^2$

1^{o} α es biyectiva :

i) α suprayectiva .

$\forall \Phi_{m/n} : \mathcal{R}^2 \longrightarrow \mathcal{R}^2 \; \exists \; m/n \; : \; m,n \in \mathcal{Z}$ y $n \neq 0$,

por la definición de mapeo .

ii) α es biunívoca

Sean a/b y a'/b' tales que $a,b,a',b' \in \mathcal{Z}$ y $b \neq 0$, $b' \neq 0$.

Supongamos que $a/b \neq a'/b'$ y $\alpha(a/b) = \alpha(a'/b')$.

$\alpha(a/b) = \alpha(a'/b') \longleftrightarrow \Phi_{a/b} = \Phi_{a/b} \longleftrightarrow$

$\forall \bar{s} \in \mathcal{R}^2 \; \Phi_{a/b}(\bar{s}) = \Phi_{a'/b'}(\bar{s}) \longleftrightarrow$

$\Phi_{a/b}(\bar{s}) = (a/b)\bar{s} = (a'/b')\bar{s} \longleftrightarrow$

$(b/a)(a/b)\bar{s} = (b/a)(a'/b')\bar{s} \longleftrightarrow \bar{s} = (a'b/ab')\bar{s} \longleftrightarrow$

$a'b/ab' = 1 \longleftrightarrow a'b = ab' \longleftrightarrow a/b = a'/b'$.

lo que contradice la hipótesis

$\therefore \quad \alpha(a/b) = \alpha(a'/b') \longleftrightarrow a/b = a'/b'$.

2^{o} α preserva la adición .

Sean $a/b,\ c/d \in \mathcal{Z}$ y $b \neq 0,\ d \neq 0$.

$\therefore \quad \alpha(a/b + c/d) = \alpha(\,(ad + bc)/bd)$, por la definición de $+$

$\alpha(\,(ad + bc)/bd) = \Phi_{(ad+bc)/bd}$, por la definición de α

$\forall\ \bar{s} \in \mathcal{R}^2 \quad \Phi_{(ad+bc)/bd}(\bar{s}) = (\,(ad + bc)/bd)\ \bar{s}$,

por la definición de mapeo .

$(\,(ad + bc)/bd)\ \bar{s} = (ad/bd + bc/bd)\bar{s}$, por la definición de $+$ en

$\{m/n \mid m,n \in \mathcal{Z}$ y $n \neq 0\}$

$(ad/bd + bc/bd)\bar{s} = (ad/bd)\bar{s} + (bc/bd)\bar{s}$, por la definición de $+$

entre mapeos

$(ad/bd)\bar{s} + (bc/bd)\bar{s} = (a/b)\bar{s} + (c/d)\bar{s}$, por las leyes de

cancelación en $\mathcal{Z}$.

$(a/b)\bar{s} + (c/d)\bar{s} = \Phi_{a/b}(\bar{s}) + \Phi_{c/d}(\bar{s})$, por la definición de mapeo

$\Phi_{a/b}(\bar{s}) + \Phi_{c/d}(\bar{s}) = \alpha(a/b) + \alpha(c/d)$, por la definición de α .

$\therefore \ \alpha(\,a/b + c/d) = \alpha(a/b) + \alpha(c/d)$.

3^{o} $\bar{\alpha}$ preserva la multiplicación .

$\forall (a/b) \forall (c/d) : a,b,c,d \in \mathcal{Z}$ y $b \neq 0,\ d \neq 0$ $\forall \bar{s} \in \mathcal{R}^{2}$

$\alpha(a/b \bullet c/d) = \alpha((ac)/(bd))$ por la definición de multiplicación en

$\{ m/n \mid m,n \in \mathcal{Z}$ y $n \neq 0 \}$

$\alpha(ac/bd) = \Phi_{ac/bd}$ por la definición de α

$\Phi_{ac/bd}(\bar{s}) = (ac/bd)\ \bar{s}$ por la definición de mapeo

$(ac/bd)\ \bar{s} = a/b(c/d\ \bar{s}) = \Phi_{a/b}(c/d\ \bar{s}) = \Phi_{a/b}[\Phi_{c/d}(\bar{s})] = (\Phi_{a/b} \bullet \Phi_{c/d})(\bar{s})$

por la definición de multiplicación entre mapeos .

$(\Phi_{a/b} \bullet \Phi_{c/d})(\bar{s}) = [\alpha(a/b) \bullet \alpha(c/d)](\bar{s})$ por la definición de α

$\therefore\ \alpha((a/b)(c/d)) = \alpha(a/b) \bullet \alpha(c/d)$.

5^{o} α preserva el orden

Sean $a/b, c/d \in \{m/n \mid m,n \in \mathcal{Z}$ y $n \neq 0 \}$, tales que $a/b < c/d$

$\therefore \alpha(a/b) = \Phi_{a/b} < \Phi_{c/d} = \alpha(c/d)$,

por la definición de orden entre mapeos .

III.5 **Conclusiones .**

De este modo hemos demostrado que :

Las clases de equivalencia de la definición1,son un campo .

Que las estructuras correspondientes a las definiciones 1 y 2 sonisomorfas, que las correspondientes a lasdefiniciones 2 y 3 también lo son , y por último que lo mismo ocurre entre las correspondientes a las definiciones 2 y 5 .

Como la composición de isomorfismos es un isomorfismo, todas ellas son isomorfas entre sí, y como la definición 1 es la de un campo de cocientes infinito ordenado, las otras cuatro tambien lo son .

Junto a estas definiciones equivalentes, existen al menos dos interpretaciones muy usuales del número racional como:

- razón
- fracción

Estas interpretaciones, aunque se apegan a alguna de las características del número racional, no coinciden plenamente con dicho concepto, como veremos a continuación.

Si consideramos la definición 2.

1. $Q = \{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0\}$

2. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

3. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

4. $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \longleftrightarrow ad < bc$

podemos facilmente asumir que los elementos $\frac{a}{b}$ de Q son razones de enteros.

Sin embargo (Q, + ,.) de la definición 2 no es isomorfo, con el conjunto de razones de enteros y las operaciones definidas en él.

Para hacerlo ver, consideremos las razones entre segmentos orientados. Para esto nos basaremos en el isomorfismo r definido anteriormente, como nos interesa asociar a cada cociente $\frac{m}{n}$ un segmento orientado $\bar{s}$, tomaremos r^{-1}.

Tenemos así para todo $\frac{m}{n}$: $\frac{m}{n} \longleftrightarrow \overline{s} = \frac{\overline{m}}{n}$ en nuestra interpretación de

razones de enteros o razones de segmentos orientados conmensurables con la unidad, y por lo tanto de longitudes racionales.

Sin embargo r^{-1} no preserva la adición, pues, si interesa un trabajo útil con segmentos y razones entre segmentos, deberemos

definir $\frac{\overline{a}}{b} + \frac{\overline{c}}{d} = \frac{\overline{a + c}}{b + d}$

$$y \quad r^{-1}\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = r^{-1}\left(\frac{ad+bc}{bd}\right) = \frac{\overline{ad + bc}}{bd} \neq \frac{\overline{a + c}}{b + d} =$$

$$\frac{\overline{a + c}}{b \quad d} = r^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) + r^{-1}\left(\frac{c}{d}\right)$$

Aún fuera de este contexto geométrico, las razones de enteros suelen operarse de manera diferente a los números racionales.

Por ejemplo, cuando un bateador tiene en su registro (score) de hits, se escribe éste como p/q , donde p es el número de hits que logró en las q veces que fue al bat.

Si en una ocasión más al bat anota un hit, tendrá que añadir un hit en una vez más al bat, es decir :

$$p/q + 1/1 = (p + 1)/(q + 1) .$$

Sin embargo la suma de los números racionales p/q y 1/1 es (p +1)/q

Los entes del conjunto Q en la definición 2, pueden identificarse con razones de enteros o de segmentos adecuados, según vimos en los ejemplos anteriores,pero, como númeroscuya definición involucra las operaciones posibles con ellos y las propiedades de las mismas, no se pueden identificar pues, como hemos mostrado, sus operaciones no coinciden .

La interpretación del número racional como fracción, está ligada también a la Definición 2.

Consideremos "el conjunto de las fracciones".

Decimos que $\frac{a}{b}$ es una fracción, y la calificamos de propia o impropia según que $\frac{a}{b} < 1$ ó $\frac{a}{b} > 1$.

Consideramos además $\frac{a}{a} = 1$ como "fracción".

¿Cuál es la diferencia entre esta interpretación del número racional y la Definición 3?

Implicitamente estamos identificando el "conjunto de las fracciones" con el de los cocientes de enteros con denominador no nulo.

Dado que las operaciones en ambos casos son idénticos, matemáticamente la "interpretación" no tiene caso, es un nombre más para el mismo ente matemático.

Sin embargo, las dos primeras acepciones de fracción en el diccionario, apuntan a una explicación de su existencia:

Fracción: División de una cosa en partes || cada una de las partes del todo, divididas o consideradas con separación del todo||....

La fracción es concebida en el lenguaje común como una parte o porción de un todo. A esto se le suele llamar *quebrado*....

Como en el mundo macroscópico los "todos" son finitos, las fracciones son partes propias de los todos .

Ya hemos señalado en el capítulo correspondiente al estudio exploratorio, que en m/n, el denominador n representa el todo o unidad, en tanto que expresa las n partes iguales que lo conforman.

Por otra parte el numerador m, indica cuantas de esas n partes iguales en que se ha dividido el todo unitario se consideran.

Así tendríamos que asociar a las fracciones cocientes de la forma $\frac{m}{n}$ con $m < n$ y $n > 0$.

El conjunto de fracciones concebido así como *quebrados*, no coincide con el conjunto Q de la Definición 2, sino que éste lo incluye como un subconjunto propio.

En el conjunto de *quebrados* la adición no es cerrada:

$\frac{4}{5}$ y $\frac{2}{3}$ son *quebrados*, pues $4 < 5$ y $2 < 3$,

pero $\frac{4}{5} + \frac{2}{3} = \frac{22}{15}$ y $\frac{22}{15}$ no es *quebrado* pues $22 > 15$

Por lo tanto las estructuras de las fracciones y de los números racionales no son isomorfas, y por ello no pueden identificarse como números .

IV. OBSERVACIONES FINALES

IV.1 El Contexto del Problema .

El presente trabajo se hizo necesario a consecuencia de la práctica docente, lo motivó un problema observado en el aula.

La docencia se ejerce en una institución educativa, enestecaso el bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades, cuyatarea fundamental es educar, y por lo tanto, promover aprendizajes.

Para que tales aprendizajes se logren, necesitamos losdocentes, claridad sobre los problemas que en torno a ellos se den y sus posibles causas, a fin de buscarles soluciones viables.

Así, la primera observación es que la docencia requiere de la investigación teórica y de campo para desarrollarse.

IV.2 Variables en el problema

Para precisar los problemas de aprendizaje respecto al número racional en alumnos de primer ingreso a bachillerato ya se dijo que se requiere al menos de:

- Claridad respecto al concepto matemático'.

- Una posición en cuanto a lo que significa aprenderlo.

' Por ello se entiende: manejar las diferentes definiciones matemáticas del mismo y su equivalencia; conocer la génesis histórica del concepto, detectar sus problemas epistemológicos y percibir sus relaciones con otros entes matemáticos; ser capaz de utilizarlo y aplicarlo en diferentes contextos, mientras más variados mejor.

- Conocimiento de los elementos matemáticos y cognitivos que se requiere posea el estudiante para lograr el aprendizaje así concebido.

- Conocimiento de la curricula previa al bachillerato, en función de los elementos antes citados y el número racional mismo.

- Asumir una posición fundamentada en cuanto al tipo de investigación a desarrollar[2].

- Conocer y poder utilizar los procedimientos, métodos, técnicas, etc.,necesarios para el trabajo, tanto en la enseñanza como en la investigación.

- Contar con los apoyos necesarios para desarrollarlas y llevarlas a cabo.

De lo anterior desprendemos la segunda observación: la formación que el docente requiere para desempeñar su labor debe incluir los aspectos antes señalados y se considera como una del as maneras de contribuir a dicha formación, el promover el desarrollo de trabajos en torno a problemas específicos de la educación matemática, ligados a su práctica docente.

Tambien observamos que al hacer explícito el concepto matemático de número racional se exhiben algunas de sus dificultades intrínsecas.

Los dos casos más claros sonlos delos subconstructosdecimal periódico y mapeo, que demandan cnocimientos de teoría de números y análisis matemático el primero, y de análisis funcional el

[2] Es decir, definir si se concidera adecuado hacer investigación de acuerdo a un diseño estadístico para logra validar los resultados, o si interesa una investigación cualitativa que aporte elementos para la comprensión del fenómeno, aunque no tenga validez estadística, por ejemplo.

segundo .

Atender esos aspectos tanto en la formación matemática del docente como en la instrumentación didáctica para llevarlos a los estudiantes , contribuiría a disminuir los problemas de aprendizaje de los mismos.

Una observación más es la del uso restringido de ciertos conceptos, tanto en la curricula como en los textos escolares y en Kieren (1976), en particular el de mapeo ,que sólo se asocia con racionales positivos, y se trabaja unicamente en el primer cuadrante de $\Re^2$.

Las razones didácticas para tales restricciones son claras, pero conocer cuales son las consecuencias de ellas, en los aprendizajes matemáticos de los estudiantes, sería útil para la revisión de estas estrategias didácticas.

- Por último se reconoce la necesidad del desarrollo coordinado de investigaciones en torno al aprendizaje del número racional, como lo plantea Kieren.

IV.3 Problemas en torno al aprendizaje del número racional.

La sexta observación que el presente trabajo permite es la de la existencia de problemas de aprendizaje en torno al concepto de número racional al menos en la muestra de alumnos de primer ingreso al bachillerato del Colegio con que se realizó el estudio exploratorio.

En esta muestra estuvieron presentes dificultades en torno a:

- La relación parte-todo.
  Desde dificultades para identificar el todo o las partes, hasta para partir un todo discreto de manera no usual en la escuela.

● La equivalencia de fracciones.
Desde la carencia del concepto de fracciones equivalentes, hasta la imposibilidadde utilizarlo, aun poseyendolo,por ejemplo en los algoritmos de adición y sustracción.

● La interpretación como decimal finito o periódico infinito.
Que van de la incomprensión del racional como cociente indicado de enteros o la carencia de la algoritmia para dividirlos, a la no percepción de la correspondencia biunívoca entre clases de equivalencias de fracciones, y decimales finitos o periódicos infinitos.
Se considera que las dificultades matemáticas intrínsecas a este subconstructo, la curricula, los textos escolares y la formación del docente al respecto, sean causas importantes de esta situación.

● La interpretación como elemento de un campo cociente.
En cuanto a concepción de las operaciones y algorítmia, llegando incluso a propiedades características del campo, como existencia del inverso multiplicativo y densidad.

Destaca, aunque sea minoritaria, la concepción del neutro aditivo como anulador en cualquier operación.

● La interpretación como operador multiplicativo.
Ya que lo conciben sólo como constrictor; con esto parece además que conciben la fracción sólo como fracción propia. Se manifestaron también concepciones de fracción sólo como fracción propia en distintos contextos y la posibilidad de manejar el número racional como punto en la recta numérica sólo con el orden de los números positivos.

IV.4 Otros aspectos del problema .

● La séptima observación se desprende también del estudio exploratorio, ya que arroja indicios de prácticas escolares que sólo mecanizan, aislan conceptos, y promueven la respuesta del estudiante "para satisfacer al maestro".

• En el mismo estudio la capacidad para descubrir, generalizar y justificar que manifestó la muestra, es muy heterógenea y, puede considerarse que manifiesta diferentes niveles de desarrollo intelectual.

Estas dos últimas circunstancias seguramente inciden en el aprendizaje del estudiante y, por lo tanto, son parte de las causas del problema.

Se observaron tambien problemas de lecto escritura, los que plantean dificultades de aprendizaje en cualquier area de conocimiento.

IV.5 **Algunas necesidades detectadas.**

La aprehensión por parte de los docentes del número racional como un concepto que permite relacionar diversas ramas de las matemáticas, como la aritmética, la teoría de números, el álgebra, el análisis matemático y el funcional; contribuiría a resolver el problema al reflejarse en las instrumentaciones didácticas . Así se plantea la necesidad de reforzar en este sentido la formación matemática del docente.

A partir de la heterogeneidad en el nivel de desarrollo detectada en la muestra, se reconoce la necesidad de dos tipos de trabajo.

Uno de ellos sería el que se refiere a una mejor tipificación en cuanto al nivel de desarrollo de la población de primer ingreso al bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades.

El otro debería apuntar a la necesidad inmediata de atender el aprendizaje de número racional de esos estudiantes.

Respecto a este último habrá que añadir que:

Con los elementos que aporta este trabajo se percibe que el uso del número racional estará ligado esencialmente a los subconstructos fracción, cociente de enteros, decimal periódico, elemento de un campo de cocientes y medida o punto en la recta numérica desde el primer semestre.

En los semestres restantes destacan el uso del subconstructo mapeo y el manejo de la razón como cantidad adjetival.

Las dificultades detectadas en el estudio exploratorio indican que el trabajo en torno a esos subconstructos debería promover basicamente la comprehensión de los siguientes aspectos:

* la fracción
* la equivalencia de fracciones
* las operaciones entre racionales
* la razón como cantidad adjetival

Así mismo se promover la construcción de significados para representaciones diagramáticas tan necesarias como la de la recta numérica o para la notación simbólica, sería tambien esencial .

La heterogeniedad detectada en el desarrollo de los estudiantes de la muestra señala la necesidad de trabajar con subgrupos diferenciados, práctica poco factible en las condiciones actuales del docente.

La posibilidad de promover con éxito las comprehensiones y las construcciones de significados mencionadas a través de trabajos que vayan desde la manipulación de materiales concretos hasta el manejo simbólico,se mantiene como alternativa a esa situación.

La realización de mediciones para la parte de manipulación de materiales concretos se percibe como adecuada para lograrlo, al no tratarse de 'juegos infantiles' y estar relacionada con contenidos de otras areas.

Naturalmente una necesidad más es :detectar que tan generalizado está este problema en la población de interés, y hacer estudios más refinados para cada subconstructo del número racional acerca de las dificultades aquí detectadas y sus causas.

La necesidad de trabajos que abarquen los ciclos de preescolar a bachillerato se hace también evidente.
Un buen inicio podría ser el incrementar el intercambio de resultados existentes al respecto en los distintos ciclos escolares, y divulgarlos lo más ampliamente posible entre los docentes de todos ellos.

Dichas investigaciones necesitan ubicarse claramente como investigaciones en educación en matemáticas, y en el contexto del país específico en que se desarrollen, para optimizar su utilidad.

A P E N D I C E 1

Presencia del concepto de número racional en el currículo de Primaria.

En una revisión que no pretendió ser exahustiva, en la que se trató de detectar la presencia del concepto de número racional, bajo cualquiera de las siete *interpretaciones* de Kieren(1976), en los programas y libros únicos de texto, vigentes para la escuela primaria, se encontró que:

El concepto está presente en los seis grados del ciclo escolar, bajo alguna de las interpretaciones antes mencionadas.

Lo encontramos formándose a través de ejercicios que implican la relación parte-todo, antecedentes algebráicos y notación posicional base diez, en los tres primeros años de este ciclo.

El concepto mismo aparece a partir del cuarto año, en cada una de las unidades del programa, que se mencionan a continuación:

Segunda,algoritmia y adición por casos.

Tercera,introducción del orden a través de la longitud de segmentos y fundamentos para conformar el concepto de densidad.

Cuarta,adición y sustracción.

Quinta,orden entre fraccioOnes,conversión de fracciones a fracciones equivalentes,adición y sustracción de fracciones cuyos denominadores no son múltiplo uno de otro.

Sexta, conversión a decimales,adición y sustracción de fracciones con denominadores cualesquiera, adición y sustracción de racionales en su expresión decimal.

Séptima, problemas aritméticos que se resuelven con adición y sustracción de fracciones.

Octava,aplicaciones de fracciones a todos continuos físico.

En el quinto año de este ciclo, está presente en las siguientes unidades:

Primer, con equivalencia y orden entre fracciones.

Segunda, con adición y sustracción de fracciones comunes y decimales.

Quinta, antecedentes para racionales como cocientes de enteros.

Sexta,propiedades de la multiplicación con fracciones.

Septima, división de fracciones vía inverso multiplicativo.

Octava, Resolución de problemas con fracciones.

En el sexto y último año de este ciclo, aparece en cada una de las cinco unidades que sepresentan a continuación, con los contenidos allí mencionados:

Primera,número racional como medida o punto en la recta numérica.

Segunda, adición y sustracción de racionales vía equivalencia, algoritmo general.

Cuarta, Equivalencia entre fracciones para resolver problemas de porcentaje.

Sexta, Problemas de porcentaje.

Octava, Problemas prácticos de porcentaje.

Como muestra el listado anterior, se detectan en 8 unidades de estos programas, trabajos para algoritmia.

En ellos la adición y la sustracción se desarrollan de manera tradicional, es decir, en función de la relación entre los denominadores o 'por casos', se incluyen ademas las operaciones para las expresiones decimales de los racionales.

Se incluyen algoritmos para convertir fracciones a fracciones equivalentes y a fracciones decimales, por supuesto tambien equivalentes.

Sólo en una unidad se detectaron propiedades de las operaciones, e inmediatamente se utilizan para introducir el algoritmo de la división.

En dos unidades se trabaja el orden y en cuatro se resuelven problemas con racionales.

En esta revisión, se reconoce la presencia de las siguientes interpretaciones, de entre las planteadas en Kieren(1976):

* fracción como relación parte-todo

* clase de equivalencia, en tanto que se trabajan fracciones equivalentes

* cociente de enteros

* decimal periódico

* medida o punto en la recta numérica

* elemento de un campo de cocientes

Observaciones.

Por lo hasta aquí dicho, se puede señalar que hay una gran preponderancia de los aspectos algorítmicos en estos programas.

Que no se incluye el subconstructo operador multiplicativo.

Que no parece factible conformar el concepto de número racional como conglomerado de sus interpretaciones a partir de un tratamiento de este tipo, y que la secuencia "conocimiento-ejercicioaplicación", tampoco contribuye a que se logre.

APENDICE 2

Escuela de procedencia ______________________

Nombre ______________________ Edad ______________________
años meses

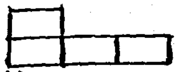
Fecha

Lee cuidadosamente antes de contestar. Si alguna parte se te dificulta , déjala por el momento y sigue adelante. Al terminar regresa e intenta contestarla. Si algo de lo que se te pregunta no lo sabes , escribe una notita diciendolo. GRACIAS POR TU COLABORACION .

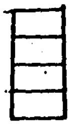
1. Pon una cruz bajo aquellas figuras que esten divididas en:

cuartos

a)______

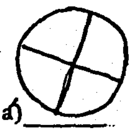


b)______



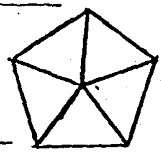
c)______

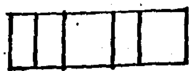
quintos



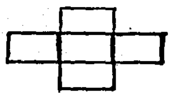
a)______

b)______





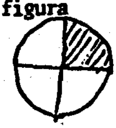
c)______



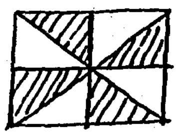
d)______

2. En la linea bajo cada figura expresa con una fracción que parte de la figura está sombreada :

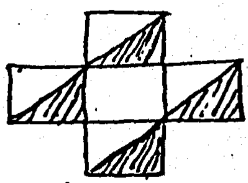
figura



a)______

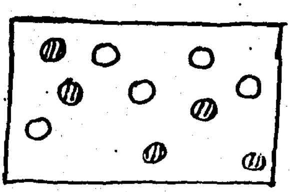


b)______

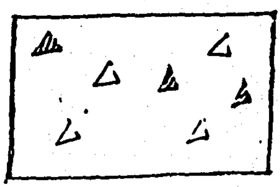


c)______

3. Expresa con una fracción , que parte del total de triángulos en el caso (b), y de círculos en el caso (a), está sombreada

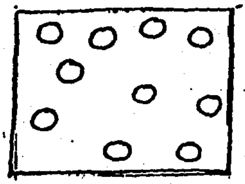


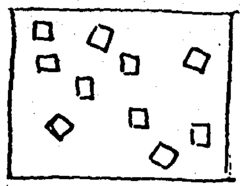
a)______



b______

4. Sombrea :
en a) 7/10 del total de círculos,
en b) 3/4 del total de cuadrados .

a) 

b] 

5. Concidera el rectángulo como unidad y dibuja los que te sean necesarios para poder sombrear en ellos :

a) 15/8

b) 13/4

6. ¿Es cierto que 3/9 , 9/27 , 6/18 , 5/15 , y 14/42 son el mismo número?

6J ¿Porqué?

7. ¿De que otro modo puedes expresar cada una de las siguientes fracciones? ¿Porqué?
7J

a) 18/3 =
b) 45/25 =
c) 37/18 =
d) 1680/30 =

8. Ordena de menor a mayor los siguientes números : -1/5 , 1 , 0 , 2/10 , -2/10 , -1 , 1/2 , 4/16 , -3/6 , 1/4 .

Localiza los números anteriores en la siguiente recta numérica, marcándolos sobre ella con un punto grueso y escribiendo arriba el número del que se trata .

-2 -1 0 1 2

9. Las siguientes multiplicaciones están correctamente realizadas :

a) 1/2 x 3/4 = 3/8

b) 3/2 x 7/5 = 21/10

Para cada una de ellas ordena de menor a mayor los factores y el producto o resultado

a) __________ __________ __________

b) __________ __________ __________

9J ¿Porqué resulto así?

10. ¿Se puede encontrar algún número entre 0 y 1/3 ? ¿Porqué?
10J

11. Encuentra tres números entre 1/4 y 1/2 . Explica como los encontraste .
11D

12. Escribe las siguientes fracciones como números decimales :

a) 1/8 =

b) 2/7 =

c) 1/3 =

d) 7/5 =

12D ¿Como las obtuviste?

12J ¿Porqué?

13. Escribe la fracción que corresponda a cada uno de los siguientes números:

a) 0.25 =

b) 0.125 =

c) 1.5 =

13D ¿Como los obtuviste?

14. Efectua las siguientes operaciones y explica para cada una porqué lo hiciste así : 14a] a 14e]

a) 1/2 + 1/4 + 1/8 =

b) 1/2 - (1/4 - 2/8) =

c) (1/2 - 1/4) - 2/8 =

d) 5/6 x 3/9 =

e) 3/7 ÷ 5/2 =

15 . En cada operación , escribe el factor que falta para que esté correctanmente realizada:

a) 7/3 x / = 7/3

b) 3/8 x / = 1

Lee los siguientes enunciados y contesta las preguntas en cada uno .

16. A juán le heredaron 2/8 partes de un terreno de 4000 m^2 . El vendio' las 3/4 partes de su terreno .

a) ¿Qué superficie heredó?

b) ¿Qué superficie vendió?

c) ¿Con qué superficie se quedó?

17. Pedro le regaló a su amigo Angel la tercera parte de sus revistas de cine . Regaló a su amiga Patricia cuatro doceavas partes de las revistas que tenía originalmente.

a) ¿Quién de sus amigos recibió mayor parte de las revistas?

b) ¿Con qué parte de las revistas originales se quedó Pedro?

BIBLIOGRAFIA

1. Avila, Alicia, Mancera Eduardo; Aprendizaje y conceptualización de las fracciones. Estudio en 293 niños que finalizan la educación primaria en el Distrito Federal; U.PN.; México, 1978.

2. Aleksandrov D.,Kolmogorov A.N,et al.; La matemática:su contenido y significado Vol. 1; Alianza Universidad; Madrid,1973.

3. Behr, M, Wachsmith I, Post T; "Construct a sum a measure of children's understanding of fraction size", Journal Research in Mathematical Education; Vol. 16, N°. 1, 1985.

4. Behr M, Lesh R, et al; "Rational number concept" Acquisition of Math concepts and processes; Academic Press Inc.,1983.

5. Bergueron J, Herscovics N; "Unit fractions of a continuous whole"; (S/R).

6. Berkoff G, Mac Lane S; A survey of modern algebra; the Macmillan Co; New York, 1960.

7. Borassi R, Michaelsen J; "$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ = Discovering the Difference Between Fractions and Ratios", Focus on Learning Problems in Math Vol. 7 Number 3 y 4, 1985.

8. Bourbaki N.; Elementos de historia de las matemáticas; Alianza Universidad; Madrid, 1972.

9. Brouseau G; Les obstacles Epistemologiques et les problemes en Mathematiques; CIEAEM; France, 1976.

10. Campos M.,Furlán A., et al.; Aportaciones a la Didáctica de la Educación Superior; E N E P I, U N A M; México, 1979.

11. Chomsky N.; Reglas y representaciones; Fondo de cultura

económica; México, 1983.

12. Chomsky N; Aspectos de la Teoría de la sintaxis; Aguilar; Madrid, 1976.

13. Casseti F.; Introducción a la semiótica; Fontanela; Barcelona, 1980.

14. Dienes Z.P.; Fracciones; Ed. Varasen S.A.; México, 1972.

15. Figueras O.; Dificultades de aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los números racionales; Tesis Doctoral, CINVESTAV; México D.F., 1988.

16. Glaeser G; "Epistemologie des nombres relatifs", Recherches en Didactique des Mathematiques. Vol. 2 France, 1981.

17. Goldman L.; "La importancia del concepto de conciencia posible para la comunicación", El concepto de información en la ciencia contemporanea; Siglo XXI Ed.; México, 1970.

18. Gonzalez Thompson A.; "La relación de las concepciones de los profesores sobre la matemática y la enseñanza de la matemática, con la práctica instruccional"; Educational Studies in Mathematics Vol. 1, 1984.

19. Guajardo Eliseo; "Paquete del autor Jean Piaget", Lic. en Educación Básica, sexto Curso, Optativo; UPN; México, 1985.

20. Hasemann K.; "On difficulties with fractions", Educational Studies in Mathematics Vol. 12, 1982.

21. Haltfield L; Prichard M; "Concepts of Fractions and Decimals: A prototipe of comprehensive instructional computing"; Ohio University, 1980.

22. Hiebert J, Behr M (Editors); Number Concepts and Operations in the Midle Grades; National Council of Teachers of Mathemmatics;

EEUU, 1988

23. Hunting R P; "Alan: a Case study of knowledge of units and performance with fractions", Journal for Research in Math Education; Vol. 14 No. 3; U.S.A, 1983 .

24. Hunting R.P.; "Rachel's schemes for constructing fraction knowledge", Educational Studies in Math; 17;U.S.A., 1986 .

25. Inhelder B, Piaget J.; de la lógica del niño a lalógica del adolescente; Paidos; Buenos Aires, 1972.

26. Jenks S.M.; Peck D.M; "Conceptual issues in the teaching and learning of fractions", Journal for Research in Mathematics Education; U.S.A, 1981.

27. Kieren T.E; "On the Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Number, Number and measurement Papers from a Research Workshop; EEUU, 1975.

28. Niven J.; Numbers: rational and irrational; Random House, The L.W. Singer Co.; EEUU, 1961.

29. Pettofrezzo A.J.,Byrkit D.R.;Introducción a la teoría de los números;Editorial Prentice/Hall Internacional;Madrid,1972.

30. Piaget, J.; Introducción a la psicología génetica 1.- El pensamiento matemático; Paidos; Argentina, 1975.

31. Piaget, J.; Problemas de psicología genética; Ariel, España, 1980.

32. Post, T., Wachsmuth J., et. al; "Order and Equivalence of rational numbers: a cognitive analysis", Journal for Research in Mathematical Education; Vol. 16, No. 1, 1985.

33. Programas de Primer a sexto año de Primaria;Secretaría de Educación

Pública;México ,1977.

34. Rademacher H., Toeplitz O.(compiladores) The Enjoyment of Mathematics; Princeton University Press; New Jersey, 1970.

35. (S/A) Vers une epistemologie des decimaux; Ecole Normale Superieur; Paris, 1978.

36. Streefland L.; "Search for the roots of ratio; some thoughts on the long term learning process (towards...a theory)", Educational Studies in Mathematics; 15; 1984.

37. Streefland L; "Some observational results concerning the mental constitution of the concept of fraction", Educational studies in Mathematics, 1978.

38. Tarski A.; Introducción a la lógica y a la metodología de las Ciencias deductivas; Espasa- Calpe; Madrid, 1968

39. Therien L.; La notion de groupements chez Piaget: prolongements formels et applications a la genese du concept de fraction"; Ponencia presentada en el X Congreso del P.M.E.

40. Trejo, C.; El concepto de número; Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico, Depto. de Asuntos Científicos, Sec. Gral. de la Organización de los Estados Americanos; Washington, D.C., 1973.

I N D I C E

FE DE ERRATAS

La numeración de las páginas pasa de la 26 a la 39

La numeración de las páginas pasa de la 144 a la 148