2

2 ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

ELABORACION DE UNA PROPUESTA METODOLOGICA PARA LA ENSEÑANZA DE DOS PROCESOS FUNDAMENTALES DE LA GEOMETRIA ANALITICA

TESIS PROFESIONAL

CARRERA: ACTUARIO

ASELA CARLON MONROY

México, D.F. 1990

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

PREFACIO

La *educación* es un medio -tal vez el más eficaz- del cual se vale, y se ha valido, una sociedad para preservar, trasmitir e incrementar sus bienes culturales. Por ella se intenta que sus miembros hagan suyos un conjunto de *valores*, *habilidades* y *conocimientos* que los capacite para pensar, actuar, sentir y creer en forma tal que la propia sociedad considera la más adecuada para la preservación y desarrollo de sus instituciones.

La *educación* de un individuo se logra en el momento en que elabora un complejo de estructuras mentales y/o motrices que le permiten reaccionar de formas características ante motivaciones, impulsos, acciones o estímulos del medio ambiente social o natural que le rodea.

En la actualidad la *educación* de una persona puede darse en ámbitos muy diversos de la vida social: la familia, la iglesia, el sindicato, el partido político, la asociación deportiva, Etc. Sin embargo, la institución que la sociedad ha creado para educar al hombre de acuerdo a lo que considera su ideal es la *escuela*. A esta educación se le da el nombre de *formal* o *institucionalizada*.

De principio, a la *educación institucionalizada* se le asigna la misión de preparar a los individuos para que sean socialmente útiles y alcancen su realización personal en el trabajo que efectúen.

Tarde o temprano, el estudiante se integrará a la vida productiva en la cual, mediante el trabajo que realice contribuirá a resolver alguna necesidad de la sociedad en que se encuentre. Como técnico o científico, en el área de la producción o de servicios, un individuo se enfrenta a la necesidad de tomar decisiones y de actuar; decisiones y acciones encaminadas, en esencia, a resolver alguna problemática. Por esto, se puede afirmar sin equivocación que una de las finalidades últimas de la educación es preparar al individuo a *resolver problemas*. Para hacerlo deberá accionar sus capacidades o habilidades naturales "perfeccionadas" por la educación que recibió. Estas capacidades se agrupan en dos áreas: *psicomotrices* e *intelectuales*. Por las características de este trabajo el primer aspecto no se considera.

La formación *intelectual* de un individuo comprende dos aspectos: desarrollar las *capacidades humanas* naturales como son el razonar, generalizar, inferir, establecer relaciones, analizar, sintetizar; y proporcionar los *contenidos* sobre los cuales estas capacidades actuan. Estos contenidos no son otra cosa que *conceptos*, en el sentido más general de la palabra. Cada una de las actividades anteriores se hace o practica sobre conceptos.

Lo anterior explica el porque, cuando las instituciones educativas fijan los aprendizajes que quieren alcancen sus alumnos, establecen, en principio, dos grandes apartados: *desarrollar capacidades mentales naturales (habilidades) y proporcionar contenidos (conocimientos)* sobre los cuales se practicarán las mencionadas capacidades. Sin embargo, por el hecho de que un individuo contribuirá a la solución de problemas en un entorno social, se desea que, en general, sus *actitudes* hacia la sociedad y sus productos sean de tal índole que atiendan a preservar los valores culturales que se juzge dignos de ello y a modificar los que requieran transformación. Es decir, es deseable que un alumno desarrolle *actitudes* que sean las convenientes al modelo de sociedad que se piensa tener. Por es to, las instituciones educativas aunan, a los aprendizajes antes mencionados aquellas *actitudes* que se piensa son adecuadas a la acción social de sus mienbros.

En la *educación institucionalizada*, y en cualquier otro ámbito en que se dé la educación, el que aprende, deberá someterse a un proceso -*proceso enseñanza-aprendizaje*- cuyo resultado final es la elaboración del conjunto de *conceptos, relaciones entre ellos, valores y habilidades* que constituyen la estructura de pensamiento, resultado de la educación.

En el proceso *enseñanza-aprendizaje* intervienen por un lado, los *alumnos* a quienes se quiere enseñar y que poseen determinados conocimientos, habilidades y actitudes; por otro, los *aprendizajes* que se desean alcanzar tanto en materia de conocimientos como habilidades y actitudes; y por último el *profesor*, que se encarga de planear y coordinar la realización del proceso en su conjunto.

Profesor y alumnos deberán realizar un conjunto de acciones cuyo fín último es la apropiación, por los segundos, de los aprendizajes deseados. Este conjunto de acciones constituye la *metodología* que es, ni más ni menos, el "camino" que el profesor escoje para lograr en sus alumnos los aprendizajes establecidos.

Los resultados del proceso enseñanza-aprendizaje descansan, en mucho, en la *metodología* que se escoja. Por tal razón el profesor deberá cuidar detenidamente su elección, elección que realiza al *planear el proceso enseñanza-aprendizaje*. Para ello debe considerar fundamentalmente dos factores: los *alumnos* que van a aprender y los *aprendizajes* que se desean alcanzar. Los *alumnos* , porque son ellos, personas concretas, quienes tienen que apropiarse de los aprendizajes y dependiendo de cómo suponga el profesor que aprenden, así como de los distintos aprendizajes que posean, se facilitará, dificultará o imposibilitará su logro; los *aprendizajes* que se quieren alcanzar porque, dependiendo de su naturaleza (conocimientos, actitudes o habilidades) y de su complejidad, así serán, por un lado, los conocimientos, habilillidades y actitudes que los alumnos deberán tener para alcanzarlos y por otro, las *experiencias de aprendizaje* necesarias para mejor lograrlos.

El resultado de *planear el proceso enseñanza-aprendizaje* se resume o sintetiza en lo que se denomina *propuesta metodológica* y que consiste en una descripción detallada de los *aprendizajes* por alcanzar y de las *interacciones* entre *alumno, profesor* y *aprendizajes* que se dan en el proceso enseñanza-aprendizaje y que tiene como finalidad-última guiar este proceso con la idea central de que los alumnos adquieran determinados aprendizajes.

El *objetivo de este trabajo es fundamentar y construir una propuesta metodológica* para el proceso enseñanza aprendizaje, que facilite la apropiación, por estudiantes del bachillerato, de algunos *contenidos matemáticos* de la Geometría Analítica, al tiempo que se propicie el ejercicio de *habilidades intelectuales* específicas y *actitudes positivas* hacia distintos aspectos.

El presente trabajo tuvo su orígen en la reflexión y fundamentación de la experiencia docente que la autora ha tenido al impartir el curso de Geometría Analítica durante dieciséis años en el Plantel Sur del Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM.

Los *aprendizajes*, en sus tres aspectos que se pretenden alcanzar o fomentar, son, brevemente:

C O N T E N I D O S   M A T E M A T I C O S . Teniendo como "fondo" la idea de que la Geometría Analítica es una teoría unificadora, del Algebra con la Geometría Euclídea, se intenta que los estudiantes adquieran conceptos, algoritmos y relaciones, que les permitan:

i. Conceptualizar a la Geometría Analítica como una teoría unificadora.

ii. Dadas ecuaciones algebraicas con dos variables de las formas $y = ax + b$, $y = ax^2 + b$, $y = ax^3 + b$, proponer gráficas en un Plano Cartesiano que sean factibles de asociarles.

iii. Dadas gráficas de rectas, parábolas y parábolas cúbicas cuyos ejes -para las dos últimas- coincidan con el eje de las ordenadas, proponer ecuaciones de la forma $y = ax + b$, $y = ax^2 + b$, $y = ax^3 + b$, que sea factible asociar a tales gráficas.

H A B I L I D A D E S   I N T E L E C T U A L E S . Aceptando que un individuo adquiere *conceptos* cuando los construye, *relaciones* entre ellos cuando las descubre y *algoritmos* cuando los practica, se ha intentado ofrecerle al estudiante experiencias de aprendizaje que favorezcan el ejercicio de habilidades intelectuales convenientes, útiles, pertinente, adecuadas y a veces necesarias para que él construya (conceptos), descubra (relaciones) y practique (algoritmos). Entre estas habilidades podemos mencionar: fijar la atención, memorizar, encontrar diferencias y similitudes entre los miembros de un conjunto o entre varios de ellos, descubrir "patrones" que muestren determinadas cosas, establecer correlaciones entre los elementos de dos o más conjuntos de cosas, efectuar inferencias inductivas y deductivas, generalizar hechos o propiedades que se observen en una colección finita de objetos, reconocer en una generalidad casos particulares, estructurar (síntesis) de acuerdo a algún criterio hechos u objetos aislados, aislar de una estructura elementos particulares (análisis), ...Etc.

A C T I T U D E S Y V A L O R E S . Al tiempo que se construyen, descubren o practican contenidos matemáticos y se ponen en práctica habilidades intelectuales, es posible también fomentar en los estudiantes *actitudes* y *valores* útiles, necesarios, adecuados, imprescindibles, para la adecuada interrelación de un individuo con los otros miembros de la sociedad y con las instituciones por ella creadas. Sin valores como la responsabilidad, solidaridad, respeto, tolerancia, autocrítica, crítica constructiva, curiosidad, ... Etc., es muy difícil la sana convivencia con nuestros semejantes. Por otro lado, la carencia de actitudes positivas hacia el trabajo y el conocimiento en general, dificultaría, retrasaría, detendría, limitaría el cumplimiento de las obligaciones de un individuo primero como estudiante y en un futuro como profesionista.

Las partes de que consta este trabajo son:

Introducción.

CAPITULO I Marco Teórico.

CAPITULO II Programa del Curso de Geometría Analítica.

CAPITULO III Propuesta Metodológica.

Conclusiones.

Los contenidos de cada parte son, a grandes rasgos, los siguientes.

INTRODUCCION. Es, como su nombre lo indica, una introducción a diversos aspectos de la *planeación del proceso enseñanza-aprendizaje*. Entre los tópicos que de la *planeación* se abordan estan: en qué consiste, elementos teóricos en que se basa, etapas que se siguen, los recursos que se utilizan e importancia. Como último punto de la introducción, se describe la metodología que se siguió en la elaboración del presente trabajo.

MARCO TEORICO. En esta parte se abordan los siguientes aspectos:

+ Se describe el *modelo de individuo* que se desea formar durante el ciclo de bachillerato del C.C.H..
+ Se enuncian y justifican, con brevedad, los *contenidos culturales* que se requieren para formar a un individuo con las características del *modelo* escogido.
+ Se explicita la concepción que de las Matemáticas en general y de la Geometría Analítica en particular, sirvieron de sustento para la realización de este trabajo.
+ Se describen, con brevedad, las bases psicológicas, que fundamentan la *teoría del aprendizaje*, de la cual se deriva la que se considera "mejor" estrategia -didáctica- para "ayudar" a que los alumnos del cuarto semestre del C.C.H.-Sur se apropien de los aprendizajes propuestos para el curso de Geometría Analítica.

PROGRAMA DEL CURSO DE GEOMETRIA ANALITICA. Este Programa es una interpretación del que normalmente se utiliza para el curso de Matemáticas IV en el C.C.H.-SUR. En él se presentan organizados una serie de conocimientos que se consideran adecuados para la formación de un estudiante del C.C.H. y algunas sugerencias de carácter metodológico que pudiesen ayudar al mejor logro de los aprendizajes deseados. Todo esto, considerando lo expuesto en el CAPITULO I.

PROPUESTA METODOLOGICA. Una vez establecida en el MARCO TEORICO la posición personal de la autora en relación a los aprendizajes y a la forma en la cual un individuo los hace suyos, en esta parte del trabajo se enumeran los *aprendizajes* a lograr y se detallan las *interacciones* entre profesor, alumno y aprendizajes con el objeto de alcanzar, de manera óptima, los objetivos propuestos. Cabe aclarar que como una parte de las interacciones antes mencionadas, se presentan los métodos de evaluar el logro de los aprendizajes propropuestos.

CONCLUSIONES. En esta parte se tratan los alcances y limitaciones de la *propuesta metodológica* que se hace y se describen los resultados que ha tenido su puesta en práctica.

INTRODUCCION

EN TODO PROCESO enseñanza-aprendizaje *tres* son los elementos que intervienen: el *alumno*, sujeto que se desea "transformar" por la educación. los *aprendizajes* u objetos de enseñanza que se desea adquiera el alumno, y el *profesor* que se encarga de coordinar dicho proceso.

En la *educación institucionalizada* los aprendizajes se han seleccionado (del acervo cultural de la humanidad) y estructurado. Los criterios de selección y estructuración que se siguen al organizar los aprendizajes, tienen origen distinto. Entre estos podemos mencionar:

1. Las concepciones, opiniones, puntos de vista o creencias que se tengan en relación a la naturaleza y características de los aprendizajes u objetos que se desean enseñar (teoría del conocimiento). En general, en este apartado se incluyen los aspectos generales y específicos tanto del conocimiento en general como de areas particulares de él. En otras palabras, las conceptualizaciones en torno a la naturaleza de los conocimientos, proporcionan criterios para seleccionar y estructurar los objetos de enseñanza.
2. Otra fuente de criterios para seleccionar y estructurar los aprendizajes tiene su origen en la concepción que se

tenga acerca de los fines de la educación institucionaliza da (filosofía de la educación). Esta concepción determinará, entre otras cosas, el tipo de aprendizajes que se pretenda enseñar a determinados alumnos en función, de los fines que su educación persiga. En particular, las necesidades sociales, políticas y económicas que imperen en una sociedad, en un momento dado, son condiciones que delimitan los aprendizajes que se juzga conveniente y necesario enseñar.

3. Otro aspecto que también influye en la selección y estructuración de los aprendizajes es la forma en la cual se considere que un individuo en particular se apropia de los distintos aprendizajes que se le desean enseñar (teoría del aprendizaje). Resultado de esto es por ejemplo la creencia de que no todos los individuos pueden aprender "cualquier cosa" en cualquier momento.

Con estos criterios en mente o con algunos semejantes, de manera conciente o inconciente la o las personas encargadas de la selección y estructuración de los aprendizajes, elaboran los Curricula y los Planes y Programas de estudio de las instituciones educativas. Estos son el instrumento oficial donde se establece tanto el *que enseñar* (conceptos y relaciones entre ellos y/o habilidades y/o actitudes), como los fines, metas o objetivos de la educación durante el ciclo, el curso o el tema.

Es "claro" para todos los maestros, la importancia que tienen los Curricula, los Planes de estudio y, más aún, los Programas. Importancia que radica en el hecho de que si un profesor no tiene el Programa del Curso, simple y sencillamente no se puede presentar al salón de clases porque no sabe *que debe enseñar*. Sin embargo, no es tan claro, que si bien tener el Programa es una condición necesaria para enseñar, *no es suficiente*. No basta saber cuales son los objetivos educativos del Curso y sus contenidos para presentarnos ante un grupo de alumnos. Antes de esto, el profesor tiene que ***planear*** su Curso. Es decir, debe seleccionar y ordenar las actividades de enseñanza y el contenido instrumental (todo tipo de recursos que se utilizarán en las actividades a realizar) para cada uno de los temas y subtemas que conforman el Programa del Curso, con vistas a alcanzar los objetivos previamente fijados. Todo ello, con el fin de que su enseñanza sea óptima para que el aprendizaje sea eficaz.

Cuando un profesor dice, o piensa "... en esta clase voy a ver tal cosa, en tal momento, de tal forma y después hago examen...", está, en la práctica, planeando se enseñanza. Muchas veces esto lo realiza camino al salón. En otras ocasiones piensa con detalle los objetivos del Curso, las dificultades que puede entrañar para el alumno cierto concepto y los conocimientos previos que requiere para aprenderlo; el ejemplo, contraejemplo o ejercicio que sea "más adecuado" en un momento dado; la lectura, la proyección, las diapositivas o el diaporama que motivarán, presentarán, reafirmarán o profundizará un tema; la interacción "más adecuada" para lograr un objetivo determinado; el medio "más adecuado" que le permita contrastar o comparar lo que se ha logrado con lo que se deseaba conseguir, etc..

No se debe improvisar algo tan importante como es la enseñanza, porque la formación del alumno en mucho depende de ella. El maestro debe estar conciente de la responsabilidad que pende de su práctica docente.

Cuando el proceso enseñanza-aprendizaje se deja a la "improvisación", la "ocurrencia", el "estado de ánimo", la "inspiración" o a la "lírica", lo más seguro es que se tengan consecuencias negativas para la educación del estudiante. Una planeación deficiente se puede manifestar en:

- falta de claridad de los aprendizajes que se quieren alcanzar,
- la realización de experiencias de aprendizaje que sean poco útiles, innecesarias, inadecuadas o francamente perniciosas para los objetivos propuestos,
- la elaboración de exámenes sin tomar en cuenta los objetivos de aprendizaje,

y esto puede dar lugar, primero, a una desorientación en cuanto a los aprendizajes que se quieran alcanzar y por lo tanto, convertir al proceso enseñanza-aprendizaje en algo caótico, anárquico, confuso, sin sentido, y en consecuencia, en mucho, inútil; segundo, no alcanzar, o sólo alcanzar parcialmente, los objetivos propuestos.

El profesor, como uno de los actores centrales del proceso enseñanza-aprendizaje, es el principal responsable de efectuar la planeación de las actividades de enseñanza-aprendizaje. Los centros educativos pueden proporcionar los grandes lineamientos, las metas u objetivos más generales, pero es el profesor, a través de la planeación quien tendrá que hacer explícito, de manera detallada los diferentes aspectos que se requieren para realizar el proceso enseñanza-aprendizaje, de la forma más adecuada posible. Sin embargo, planear la enseñanza tiene sus dificultades. Una de ellas es que se requiere tener, si no respuestas a interrogantes, al menos "clara" conciencia de su existencia. *En la planeación* cobra forma, se materializa la *concepción* que el profesor tenga sobre *educación*, sobre los *objetos suceptibles de enseñarse*, sobre que es *conocer* y de cómo suponga que un individuo *aprende* determinados objetos de enseñanza. Y, para plasmar todas esas concepciones que se tienen el profesor cuenta con diversos modelos para la planeación de su enseñanza.

De entre los distintos modelos que se han propuesto para la planeación de la enseñanza se encuentran, por ejemplo, los de Gagné, R. (1977); Johnson, M. (1967); Nova, J. (1983) y Rotger, B. (1984). Estos modelos, en general, coinciden en considerar como partes costituyentes o fases de la planeación de la enseñanza la determinación de los objetivos, la selección de las actividades de enseñanza-aprendizaje, el contenido instrumental y la evaluación (bien con estos o con otros nombres). La diferencia fundamental entre ellos, se puede decir, que radica, por un lado, en la forma en que abordan dicha planeación (mientras unos, por ejemplo Johnson, la subsume en el estudio del Curriculo, otros, por ejemplo Rotger, no explícita esa dependencia) y por otro, el número de fases que estipulan. Esto, en algunas ocaciones, producto del grado de " generalidad ".

Con esos modelos a nuestro alcance, un primer problema, cuando se pretende planear la enseñanza, consiste en determinar cuál es el que se va a utilizar en la tarea que nos proponemos desempeñar. Puede ser que éste sea completamente igual a alguno de aquéllos o bien, que presente alguna(s) modificación(es).

El modelo que se utiliza en el CAPITULO III de este trabajo (planeación del TEMA 6 del PROGRAMA de Matemáticas IV), es una adaptación al modelo propuesto por Rotger y consta de las siguientes fases:

1° Contextualizar el *TEMA* dentro del Programa o el Programa de un curso dentro de la Curricula del ciclo, dependiendo de lo que se esté planeando. Esta contextualización *ubicará*, la posición, gerarquía y relaciones, que los aprendizajes por lograr guardan con respecto a todos los aprendizajes que se manifiestan en un Programa o en la Currícula, según sea el caso.

2° Cada institución educativa pretende contribuir, durante todo el ciclo, a la formación de un individuo en una forma determinada (*lineamientos generales del ciclo*). Un curso o tema son el "medio" para lograr tal fin. Por tal razón, es necesario explicitar qué de aquéllos se fomentará o desarrollará con el curso o tema. De aquí que, *planear* un curso o un tema *implica*, entre otras cosas, *establecer* los *lineamientos generales del curso o tema*. Además, para el caso en que los aprendizajes por alcanzar (*objetivos generales, intermedios y específicos*) no estuvieran suficientemente detallados, cabe la necesidad de explicitarlos, estructurarlos y gerarquizarlos. Esta situación se presenta, por lo general, cuando los aprendizajes por alcanzar son de carácter tan general que no hacen viable la instrumentación que guíe el proceso enseñanza-aprendizaje. En terminos generales se puede decir que para realizar esto, se atenderá a los criterios establecidos con anterioridad para determinar los aprendizajes por alcanzar.

3° Establecimiento de los *prerrequisitos* en cuestión de aprendizaje, que los alumnos deberán poseer antes de iniciar el proceso que lleve al logro de los aprendizajes deseados. Los prerrequisitos son los aprendizajes "directamente" relacionados con aquellos que se pretenden alcanzar y que se supone están en posesión de los estudiantes. La carencia de alguno de ellos puede dificultar o impedir el logro de los objetivos. Por lo tanto, el profesor *antes* de iniciar el proceso enseñanza-aprendizaje, se abocará a investigar en que medida se cumple lo anterior con el objeto de tomar la decisión que considere pertinente.

4° *Selección y estructuración de las actividades de enseñanza-aprendizaje y del contenido instrumental.* En este punto se entiende por *actividades de enseñanza-aprendizaje* al conjunto de interacciones o actividades que realizarán los alumnos y el profesor, con el objeto de que aquéllos hagan suyos los aprendizajes deseados. Entre las interacciones disponibles con las que se cuenta, se pueden mencionar: la cátedra magistral, el trabajo en equipo, trabajo individual (por parte del alumno), trabajo grupal, "diálogo socrático", experimentación, trabajo de campo, etc.

El *contenido instrumental* es todo tipo de recursos que se utilizarán al llevarse a cabo las interacciones arriba mencionadas. Incluyen entre ellos, desde aquellos de carácter material (lecturas en general, audiovisuales, materiales concretos, computadora, etc.) como aquellos que son puramente conceptuales (ejemplo, contraejemplo, ejercicio, etc.).

Los criterios para la selección y organización tanto de las actividades de enseñanza-aprendizaje como del contenido instrumental, están determinados de manera fundamental por la teoría del conocimiento y/o la teoría del aprendizaje que sostenga la persona que realice la planeación.

Dependiendo de *cómo* se crea que un individuo aprende los aprendizajes deseados, así serán las actividades de enseñanza-aprendizaje y el contenido cultural que se escoga. Por ejemplo:

- Para una persona que sostenga que un individuo aprende conceptos y relaciones entre ellos a través de escuchar la palabra del profesor y leer el libro de texto, lo más probable es que eliga como actividad de enseñanza-aprendizaje la cátedra magistral y como contenido instrumental el libro de texto.
- Para quien conceptualice que el aprender se realiza a partir de una totalidad integrada y no por la simple reunión de aspectos parciales previamente aprendidos, eligirá como contenido instrumental una serie de problemas a resolver.
- Para alguien que considere que las *habilidades* se aprenden ante el ejercicio de situaciones concretas, es claro que *no* eligirá como único medio para que los estudiantes las logren, la pura explicación que se logra en la cátedra magistral.
- El que crea que los alumnos adquieren *valores* positivos por la simple virtud de la palabra, es probable que utilice el "consejo" como medio de lograrlos.
- Cuando el profesor acepta que sólo se aprende en el acto de descubrir el conocimiento, eligirá las actividades de enseñanza- aprendizaje y el contenido instrumental de tal suerte que el estudiante se enfrente con esta situación.

En función de la conceptualización que del conocimiento se tenga, así serán las actividades de enseñanza-aprendizaje y/o el contenido instrumental que se escoga. Por ejemplo:

- Para un docente que acepte que conocer conceptos y relaciones entre ellos, requiere de poseer necesariamente justificaciones adecuadas para ellos, encontrará en la discusión en equipo y en el trabajo grupal actividades de enseñanza-aprendizaje más adecuadas para lograr tal fin que el sólo trabajo individual.
- Cuando un profesor entienda el conocimiento como una totalidad coherentemente estructurada y no como la simple reunión de partes dispersas, escogerá un contenido instrumental que exhiba tales características y las actividades de aprendizaje atenderán a resaltar las relaciones que guardan entre sí los distintos objetos de enseñanza.

Esta fase de la planeación es particularmente importante porque de la selección de las actividades de enseñanza-aprendizaje es decir, de la selección del *método de trabajo* y del contenido instrumental dependerá, en *mucho*, el logro de los objetivos propuestos.

5° Establecidas todas y cada una de las diferentes actividades de enseñanza-aprendizaje, así como los contenidos instrumentales que el profesor considera pertinentes o adecuadas para que su puesta en práctica conduzca a que los estudiantes se apropien de los aprendizajes deseados, procederá a sistematizar en el "tiempo" este entramado de actividades y contenidos distribuyéndolos en sesiones de clase que durarán el tiempo establecido y que se prolongarán (el número de sesiones) durante todo el período de tiempo de que disponga el profesor para cubrir el tema o programa que sea su cometido. En otras palabras, en esta fase se *describen* todas y cada una de las *sesiones*.

Esa síntesis de actividades de enseñanza-aprendizaje y contenidos instrumentales convenientemente organizados es lo que para el profesor va a constituir, desde su punto de vista, "la mejor estrategia", para el logro de los objetivos propuestos. Es en última instancia, "su" metodología escogida para lograr los aprendizajes fijados, con determinados alumnos.

6° Una vez alcanzada la situación en la que el profesor tiene a su disposición el conjunto de actividades de enseñanza—aprendizaje y el contenido instrumental organizados en sesiones de trabajo, está en posibilidades de iniciar el proceso de enseñanza-aprendizaje cuya finalidad última es la "transformación" de los estudiantes por la adquisición de los aprendizajes establecidos.

Puesta en práctica la estrategia metodológica elegida por el profesor, durante el proceso enseñanza-aprendizaje, él espera, que la "mayoría" de los estudiantes, se apropien de un número "considerable" de los aprendizajes propuestos. Por lo tanto, él necesita contar con un "procedimiento" que le indique en qué medida los alumnos han hecho suyos los aprendizajes propuestos. Esta función la cumple el proceso conocido como *evaluación*.

En virtud, de que son múltiples los factores que intervienen en el proceso enseñanza-aprendizaje, ya sea de manera directa o indirecta, el logro, por parte de los estudiantes, de los aprendizajes propuestos, puede verse afectado, en cierta medida por estos factores.

Se está conciente, de la importancia que tienen los distintos factores del proceso enseñanza-aprendizaje en el logro, por los estudiantes, de los objetivos propuestos. Pero, también se está conciente de lo difícil que es poder determinar de manera clara el grado de ingerencia que tienen algunos de ellos, como podrían ser los socio-económicos por parte de los alumnos, en el logro de los aprendizajes deseados.

Reconociendo la limitación anterior, hay sin embargo un elemento del proceso enseñanza-aprendizaje, responsable en cierta medida de el logro que de los objetivos establecidos, haya tenido un estudiante, sobre el cual sí podemos incidir; y es el que se refiere a la metodología elegida. Al estar formada ésta por un conjunto de actividades de enseñanza-aprendizaje y de contenidos instrumentales "convenientemente" organizados, es posible, que por alguna razón su elección u ordenación no haya sido adecuada en algunos aspectos y que en consecuencia, pudo dificultar o bloquear el logro de los aprendizajes. Tener una medida del logro de los aprendizajes alcanzados por los estudiantes, nos permite, de manera indirecta, valorar la pertinencia de la metodología escogida. Esta es una de las funciones centrales de la evaluación.

La evaluación de los aprendizajes alcanzados por el alumno es algo que también requiere de planeación. Con sus modalidades distintas y sus diversas finalidades, se puede decir que la elaboración de los instrumentos por medio de los cuales se realiza, descanza en la concepción que se tenga de *qué es conocer* determinado objeto de enseñanza. Por ejemplo:

- Para quien "saber" resolver una ecuación de segundo grado sea tanto el procedimiento que se siguió como el resultado a que se llegó, lo más probable es que no elija preguntas cuya respuesta sea verdadero o falso.
- Para quien "conocer" una habilidad sea el poder realizarla en situaciones concretas no eligirá como forma de evaluarla la elaboración de un ensayo, a menos que la habilidad por evaluar sea precisamente ésa.
- Para quien "conocer" los criterios de congruencia de triángulos sea enunciar dichos criterios con términos propios propios de los estudiantes, evaluará este conocimiento por la respuesta que a la petición: "*enuncie* los criterios de congruencia para triángulos", dén sus alumnos.
- Para quien "conocer" los criterios de congruencia para triángulos sea poder identificar de una colección de triángulos aquellos que sean congruentes, evaluará el logro de este aprendizaje por la respuesta que a la instrucción: "de la siguiente colección de triángulos marque con una cruz aquellos que sean congruentes", den sus alumnos.

En resumen: la concepción que un profesor tenga sobre la *educación* fijará los fines supremos que a ésta le asigna; cómo conceptualice los *diferentes objetos de enseñanza* le permitirá seleccionar aquellos aspectos que considere dignos de enseñarse; qué entienda por *conocer "algo"*, le proporcionará criterios para decidir si un individuo ha logrado o no, aprender lo que se había propuesto y finalmente, la forma en que conciba la *manera de aprender "algo"*, determinará o definirá al conjunto de acciones en que se verá involucrado el alumno en su propósito por alcanzar los aprendizajes establecidos. Se está conciente del terreno dificultoso, espinoso y movedizo en que se sitúan estas cuestiones. En él hay teorías, posiciones e ideologías. Será en última instancia, cuestión de decisión personal el escoger o quedarse con algún punto de vista, pero una vez escogido, debe haber congruencia entre él y la planeación de la enseñanza.

BIBLIOGRAFIA

AMENGUAL, B.R. *Ciencias de la educación*. Edit. Escuela Española, Madrid, 1984.

AVOLIO, S. *Planeamiento del Proceso enseñanza-aprendizaje*. Edit. Marymar, Buenos Aires, 1976.

DIAZ-BARRIGA, A. 'Un enfoque metodológico para la elaboración de programas escolares', en *Perfiles educativos*, Núm. 10, UNAM-CISE, 1980.

JOHNSON, M. 'Teoría del Currículo (definiciones y modelos)', en *Perfiles educativos*, Núm. 2, UNAM-CISE, 1978.

NOVAK, J.D. *Teoría y práctica de la educación*. Edit. Alianza Editorial, Madrid, 1983.

PANSZA, M. 'Notas sobre planes de estudio y relaciones disciplinarias en el currículo', en *Perfiles educativos* Núm. 36, UNAM-CISE, 1987.

ZULOAGA, O.E. 'La instrumentación didáctica del trabajo en el aula', en *Perfiles educativos*, Núm. 19, UNAM-CISE, 1983.

CAPITULO I

MARCO TEORICO

NECESIDAD DE LA EDUCACION.

UNA SOCIEDAD, PARA satisfacer la necesidad de sus miembros y de ella misma, requiere que no todos sus individuos, piensen, sientan y actúen de la misma forma. Por otro lado, un individuo en particular, o bien puede pensar, sentir y actuar de diversas formas, o bien, si se le abandona completamente, no es posible que piense, sienta o actúe de manera diversa a la que obedezca a su propia naturaleza animal. Las dos razones anteriores hacen que para la sociedad, constituya un problema la forma en la cual sus individuos piensen, sientan o actúen.

Para encarar este problema, la sociedad ha creado la institución conocida como *educación institucionalizada*, que si bien no es la única, si es la que pretende tener los mayores alcances en la educación de sus miembros.

CONCEPTO DE EDUCACION.

Educar a un individuo es *formarlo*. La formación implica a toda la persona; su conducta, sus valores, sus creencias, sus hábitos, etc.. En general, sus valores, habilidades y conocimientos.

SUPUESTOS FUNDAMENTALES DE LA EDUCACION.

Para lograr su fin, la *educación* parte de varios supuestos fundamentales:

1. Un individuo en particular, en condiciones normales, posee capacidades naturales, que al interaccionar socialmente con sus semejantes, le permiten pensar, sentir y actuar de determinada forma.

2. Cada sociedad, en un momento determinado, está caracterizada por un conjunto de cosas, ideas, conocimientos, modos de hacer las cosas, costumbres, valores y actitudes que, en algunos aspectos, ha heredado de las sociedades que le precedieron, y en otros, ella misma ha desarrollado. Es decir, cada sociedad está caracterizada por una *cultura*.
3. La forma particular de pensar, sentir y actuar de un individuo en especial, está caracterizada por las cosas, ideas, conocimientos, modo de hacer las cosas, costumbres, valores y actitudes que posea. Es decir, por su *cultura*.
4. Un individuo en particuar, en condiciones normales, es capaz de hacer suyos, de "apropiarse" o de *aprender* un conjunto de ideas, conocimientos, modos de hacer las cosas, costumbres, valores y actitudes. Es decir, un individuo se puede apropiar de una *cultura*.
5. Es posible, no sólo comunicar, sino *enseñar* a un individuo en particular, en un cierto lapso de tiempo, un conjunto de ideas, conocimientos, modos de hacer las cosas, costumbres, valores y actitudes.
6. Es posible modificar, por medio de la *educación*, la forma particular en que un individuo piense, sienta y actúe.

Etapas fundamentales de la Educación.

Teniendo como supuestos fundamentales los seis puntos anteriores, la *educación institucionalizada* pretende alcanzar sus fines a través de tres etapas principales:

Primero, determina el "*modelo* de individuo" que desea formar. Es decir, fija las características que en cuanto a forma de pensar, sentir y actuar desea que tengan sus individuos.

Segundo, selecciona y estructura, de acuerdo a varios criterios, las ideas, conocimientos, modos de hacer las cosas, costumbres, valores y actitudes, de entre la totalidad de que disponga, y que juzga necesarios para que los individuos piensen, sientan y actúen de la forma antes determinada. La estructuración a que se hace referencia atiende tanto a la organización de los contenidos en sí, como a su distribución en el tiempo de que disponga para su apropiación, por parte de los individuos.

Tercero, determina la "mejor" estrategia que haga posible la apropiación, por parte de ciertos individuos, de las ideas, conocimientos, modos de hacer las cosas, costumbres, valores y actitudes, en el tiempo previamente establecido, y que fueron seleccionados en el punto anterior.

CONTENIDOS DE ESTE CAPITULO. Este trabajo se enmarca dentro del proceso educativo. Por tal razón, utilizando como hilo conductor los tres puntos anteriores, en este CAPITULO se tratan los siguientes aspectos:

A. El *modelo de individuo* que se desea formar durante el ciclo de bachillerato del C.C.H..

B.a. Se enuncian y justifican, con brevedad, los *contenidos culturales* que se requieren para formar a un individuo con las características del *modelo* escogido.

B.b. Entre los contenidos culturales que se consideran importantes para la formación de un individuo están las matemáticas. Por otra parte, uno de los criterios fundamentales que determinan la selección y estructuración de los conocimientos a enseñar es la concepción que de ellos se tenga. De lo anterior, y por el objetivo de este trabajo, en este punto se explicita la concepción que de las matemáticas en general y de la Geometría Analítica en particular, sirvieron de sustento para su realización.

C. Se describen, con brevedad, las bases psicológicas, que fundamentan la *teoría del aprendizaje*, de la cual se deriva la que se considera "mejor" estrategia -didáctica- para "ayudar" a que los alumnos del cuarto semestre del C.C.H.-Sur se apropien de los aprendizajes propuestos para el CURSO de Geometría Analítica.

Resumiendo, en este CAPITULO se pretende fundamentar:

- La *interpretación* -CAPITULO II- que se hizo del Programa que se utiliza para el curso de Matemáticas IV (Geometría Analítica) en el C.C.H.-Sur.
- La *didáctica* que se estima más adecuada para la enseñanza de la Geometría Analítica y que es uno de los elementos que se consideran al efectuar la *planeación de la enseñanza* -CAPITULO III-, de un TEMA del programa reinterpretado.

FILOSOFIA DE LA EDUCACION

Cuando se repara en la complejidad de las sociedades modernas y en consecuencia en la riqueza y variedad de las necesidades por satisfacer, no puede uno dejar de quedar impresionado ante la magnitud del problema. Estas necesidades se resuelven, o al menos se intenta hacerlo, con el trabajo humano socialmente útil.

Por ello, para afrontar los problemas que plantea el desarrollo, la sustentación y el mejoramiento de su vida en común, los hombres han creado, en todas partes, actividades especializadas. El principio esencial de la vida social es la *división del trabajo*, es decir, la ejecución de acciones diferenciadas tendientes a satisfacer las exigencias de la vida diaria en condiciones sociales.

Lo anterior explica el porque, hasta el presente, no es posible hablar de un "modelo" de individuo, sino más bien de una amplia gama de ellos, que subsistiendo simultáneamente, pretenden abordar la solución de una necesidad en particular o de un cierto número de ellas.

La U.N.A.M. tiene la función de contribuir a la formación de técnicos, científicos, trabajadores del arte y humanistas, que mediante un trabajo socialmente útil contribuyan a la solución de necesidades y a su realización como individuos.

Actualmente la U.N.A.M. acepta que la formación de un individuo egresado de sus facultades, se alcanza a través del tránsito obligatorio por cuatro ciclos o niveles en total. Los tres niveles previos al profesional se consideran, en términos generales, de carácter *propedéutico* para él.

El *bachillerato*, por ser de carácter propedéutico, tenderá a que sus educandos incrementen sus conceptos y relaciones entre ellos, así como a propiciar el desarrollo de habilidades y actitudes que les permitan alcanzar, con cierto éxito, los aprendizajes que se desea adquieran en la licenciatura y la realización de actividades propias de su vida profesional.

Aceptado lo anterior, en este trabajo se está de acuerdo en que las características que un individuo egresado del C.C.H. debe tener, para asumir plenamente sus responsabilidades sociales, son aquellas que formuló un grupo de profesores del Area de Matemáticas del C.C.H.-Sur en una investigación realizada durante los años de 1985-1986 y que actualmente se acepta como una directriz para el Area de Matemáticas del Plantel Sur. De acuerdo a esta caracterización, se desea un individuo que:

- Sea conciente y crítico de su realidad, de la sociedad a la que pertenece y de la realidad del país;

- valore el trabajo productivo como el instrumento que dá a la persona la categoría de ser humano, esto es, que le permite la autoafirmación de su personalidad;
- aporte su trabajo y esfuerzo a la sociedad, la cual se lo retribuye;
- ponga en juego todos los conocimientos que posee para resolver las diferentes problemáticas a las que se enfrenta o ha de enfrentar y que en caso de no poseerlos, sea capaz de buscarlos y encontrarlos;
- enfrente su realidad con criterios concientes y claros, de tipo social, científico, técnico, artístico, filosófico u otros;
- sea autocrítico, es decir, que tenga la capacidad de reconocer si está actuando en esa realidad, de acuerdo a sus criterios de la mejor forma posible;
- sea congruente en su práctica con los criterios que sostiene.

Estudiar los distintos modos en que se han realizado los fines de la educación a lo largo del tiempo, es objeto de la *Filosofía de la Educación*, y cada posición en ella de origen a un modelo distinto de individuo.

TEORIA DEL CONOCIMIENTO

Se ha supuesto que se llega a pensar, sentir y actuar de cierta manera, cuando se está en posesión de elementos culturales específicos, adquiridos en determinado tiempo. Por ello, decidido el "modelo" de individuo que se desea tener surgen las cuestiones:

i. ¿Qué de la Cultura disponible es necesario aprender?.

ii. ¿De cuánto tiempo se dispone para lograr tal aprendizaje?.

iii. ¿Cómo "distribuir", en el tiempo determinado para el aprendizaje, los contenidos culturales escogidos?.

Adelantemos que la *educación institucionalizada* responde a las tres preguntas anteriores en la *Currícula*, y en los *Planes y Programas de estudio*.

EL TRABAJO HUMANO: elementos que intervienen en su realización.

Las necesidades de la sociedad en su conjunto y del individuo en particular se han satisfecho con el trabajo humano realizado en condiciones sociales. En otras palabras, ha sido el humano, organizado socialmente, el que ha trabajado para resolver sus necesidades.

Cualquier trabajo humano se ha realizado en *determinadas condiciones sociales, motivado por algo y valiéndose de recursos disponibles.* Así pues, *motivo, recursos* y *condiciones sociales* son elementos que siempre están presentes en cualquier trabajo humano.

Los *motivos* y los *recursos* pueden tener un origen tanto individual como colectivo: un hombre puede tener *motivos* para algo, un grupo social puede estar *motivado* hacia algo. Por otro lado, las *condiciones sociales*, se dán en cierto momento, y no son otra cosa que el estado particular que muestren la totalidad de relaciones sociales que se dán en un cierto grupo social.

Por *recursos* se entienden los medios de los cuales nos servimos para hacer algo. Para el caso que nos ocupa, son los medios para hacer un trabajo, y los hay de índole diversa. Se habla de recursos humanos, materiales, económicos,...,etc.. En particular a la *Educación* le interesa un tipo de recurso: el *intelectual*. La historia de la humanidad ha mostrado el papel que este recurso ha jugado en la solución de sus necesidades.

Los conocimientos como un recurso para resolver necesidades.

Los recursos i n t e l e c t u a l e s están formados por la totalidad de resultados, producto de la reflexión humana acerca de lo que la rodea, sobre sí misma y sobre sus creaciones. Incluye lo que comunmente se denominan ideas, conocimientos, técnicas; más comunmente denominados *conocimientos*. Los conocimientos son, por lo que se ha dicho, uno de los recursos que el hombre ha tenido a su disposición para trabajar y de esta forma resolver sus necesidades.

Conocimientos son los distintos mitos y teorías que se han presentado para explicar los fenómenos naturales (en su forma animada e inanimada) y sociales; conocimientos son los distintos modos de efectuar las cosas (en sentido general); conocimientos son las distintas razones o justificaciones que el hombre dá a las actitudes que asume. De alguna manera el hombre ha recurrido a ellos para resolver sus necesidades.

El hombre ha hecho muchas cosas con los conocimientos: los ha guardado, los ha trasmitido, los ha estudiado, los ha utilizado, los ha producido. En particular, el hombre ha reflexionado sobre los conocimientos: ha pensado qué son, como justificarlos, cuántos tipos hay, cuál es el más importante, cómo aparece, cómo se produce, cómo se desarrolla, cómo enseñarlo, cómo utilizarlo. Todo ello, pareciera ser, porque ha reconocido en él su utilidad: sirve para ayudarlo a resolver sus necesidades.

Los conocimientos son algo real, están ahí, *en* los libros, en las bibliotecas, en la enciclopedia británica, etc.. Pero también están *en* las personas: en su menor o mayor habilidad para hacer cosas (parece ser que al morir Antonio Stradivarius se llevó con él la forma en la que construía sus violines), en sus actitudes ("... No soy partidario de las diversiones en que se pone en peligro la vida del hombre; y no puedo, por lo mismo, consentir en que se hagan esos ejercicios con la mira de obsequiarme." . Así escribía Benito Juárez a M. Villalobos y E. Asiain en su carta del 20 de marzo de 1868). Con esa objetividad manifestada en libros, en habilidades o en actitudes, el conocimiento ha sido medio, y fin (al mismo tiempo) del quehacer humano.

Impresiona la cantidad de conocimientos que la humanidad ha acumulado a lo largo de su historia. Pensemos en lo que sería un listado de afirmaciones, cada una de las cuales expresara *un* conocimiento. Y esto no se detiene. Sigue aumentando día a día. Científicos, humanistas, técnicos, entre otros, continúan acrecentando el número de afirmaciones. Al mismo tiempo las necesidades sociales e individuales se ven satisfechas, en parte, gracias a este avance.

El *conocimiento* no sólo se ha *utilizado* para resolver *necesidades* humanas. También ha tenido otros usos: arma de beligerancia, instrumento de dominación, elemento de destrucción. Al tiempo que se utiliza para resolver las necesidades de salud, habitación, alimento, casa, diversión, creencia, seguridad, sirve para construir toda esa maquinaria de guerra cuya existencia se justifica para mantener la paz, pero sobre todo, es una mercancía. Se vende y se compra. A veces muy caro.

TEORIA DEL CONOCIMIENTO *o reflexión sobre el propio conocimiento.*

El conocimiento se crea, se enseña, se utiliza, se estudia, . . .,etc. Veamos esto último. El conocimiento, ese ente real, concreto es al mismo tiempo objeto de conocimiento, de reflexión. Se piensa *en* el conocimiento. Se discute *el* conocimiento. Se cuestiona el conocimiento, como tal, no por sus fines utilitarios. En una palabra, el conocimiento **en** sí se hace objeto de conocimiento. Es decir, entra a la Filosofía, o sea, a la ciencia que estudia a los objetos en sí, por ser ellos y no otra cosa o para otra cosa. En resumen, se problematiza el conocimiento. En otras palabras, se buscan o se encuentran o se plantean problemas en el conocimiento:

¿qué es el conocimiento?,

¿qué conocimiento es el más fidedigno o importante?,

¿cómo surge el conocimiento?,

¿cómo debe conducirse la busqueda del conocimiento?;

son las preguntas principales que se formulan.

La curiosidad o interés de indagar acerca del conocimiento en sí es antigua. Un ejemplo. Russell se enfada con algunos de los primeros filósofos griegos porque al plantear preguntas como las anteriores condujeron —a una edad muy temprana del conocimiento— a actitudes negativas hacia el conocimiento de carácter empírico, práctico, sensitivo. Claro, quien se enfada es un inglés, y el *EMPIRISMO* es inglés.

Cuando se repara en los conocimientos de que disponemos se observa que:

- se dirigen hacia aspectos distintos de la "realidad",
- se utilizaron diferente métodos para obtenerlos,
- los criterios para aceptarlos o rechazarlos no son los mismos, etc..

Interpretaciones del conocimiento.

Pareciera ser que es esta variedad de presentaciones en que se manifiesta el conocimiento lo que dió origen a las preguntas antes citadas y que al responderse han tenido como consecuencia que *un mismo conocimiento* —La suma de los ángulos interiores de un triángulo euclideo es igual a 180°— *sea interpretado de manera diferente*. Algunos dirán que la afirmación anterior establece una relación valida para el espacio físico, otros la negarán y en su lugar pregonarán que sólo establece una relación necesaria y suficiente entre objetos ideales. Pongámos otros ejemplos:

- Algunos dicen que la expresión $3 + 4$ expresa, o es una forma de describir el resultado del proceso de "unir" dos colecciones de objetos, en tanto que otros dirán que es simplemente una expresión que resulta de combinar dos símbolos numéricos mediante un signo de operación.
- Algunos dirán que aceptan que *el conjunto de los números primos es infinito* porque si suponemos lo contrario llegamos a una contradicción, en cambio otros dirán: yo también lo acepto pero no por lo que tú dices, sino porque yo soy constructivista.
- Algunos dicen que *el todo es mayor que cualquiera de sus*

partes es *verdadera* porque si fuera falsa se llegaría a una contradicción, en tanto que otros dicen que es *falsa* porque hay ejemplos de procesos en donde las partes que resultan no son igual al todo.

- Algunos dicen *percibimos el mundo por estos sentidos que tenemos*, si tuviéramos otros lo percibiríamos de otra forma, y si tuviéramos otros, de otra, ..., y así sucesivamente, por lo tanto la *percepción* que tenemos del mundo no nos revela la esencia de él. Pero otros replican: como *posibilidad lógica* estoy de acuerdo, pero así como no hay necesidad de que "yo" perciba rayos gamma para poder mostrar que existen, así, no hay necesidad de que perciba algo para saber que existe y que forma parte de la esencia de la realidad.

Para mostrar que la reflexión sobre el conocimiento en sí lleva a *interpretar de manera diferente los mismos conocimientos*, basta con estos ejemplos. Es algo así como la misma melodía interpretada en tonalidades diferentes o como el mismo objeto *visto a través de cristales distintos*. Y puestas así las cosas es difícil llegar a un acuerdo, es más, parece que no es posible.

Resumiendo: el conocimiento está ahí, es real, concreto, no es una quimera o sueño, pero también la interpretación de él está ahí, es real, concreta, no es una quimera o sueño. Aceptémoslo así, porque es así, en forma dual (conocimiento e interpretación de él), como el hombre lo ha utilizado para ayudarse a resolver sus necesidades, aún siendo las que respondan a conductas mezquinas o cínicas.

La Teoría de conocimiento y la educación.

Observamos con anterioridad que los conocimientos se nos revelan *diferentes* en algunos aspectos. Por ejemplo, los conocimientos contenidos en las siguientes afirmaciones:

el sucesor de todo número es un número,
al nivel del mar el agua hierve a 100°C.,
ayer terminé una mesa para la cocina,
el metro es igual a 100 centímetros,
no existe la "mente" humana,
el hierro se oxida en contacto con el agua,
la prefiero compartida antes de vaciar mi vida,
Pedro sabe sumar quebrados,
la Gioconda tiene una mirada "divina",
sin libertad económica no hay ningún otro tipo de libertad,

raíz cuadrada de dos es un número irracional,

la democracia es un concepto pequeñoburgés,

las leyes de la naturaleza hacen que todo suceda como sucede,

mi hijo ya sabe manejar,

son diferentes desde varios puntos de vista. No hay necesidad de ser un experto en *epistemología* —esta es la palabra que usan algunos cuando no quieren decir que se están refiriendo al conocimiento en sí— para darse cuenta de ello. Es claro que este trabajo no va a tratar del *conocimiento en sí*. No es ése su objetivo. No es un trabajo sobre *epistemología*. Es un trabajo sobre educación y si se ha estado hablando de él es simple y llanamente porque *el desarrollo y la transmisión del conocimiento son las tareas fundamentales de la educación*.

DISTINTAS FORMAS DEL CONOCIMIENTO: ***habilidades, conceptos y actitudes.***

Podemos pensar a los *conocimientos en sí* como algo ajeno a un individuo, algo "separado" de él. El *conocimiento en sí* es todo ese conjunto, resultado de las reflexiones del ser humano acerca de lo que lo rodea, sobre sí mismo y sobre sus creaciones. Pero preguntémonos: en la vida diaria de un individuo, en su trabajo, en su hacer cotidiano, ¿bajo cuántas formas se manifiestan los conocimientos?. La experiencia nos ha mostrado que se pueden manifestar en:

- lo que se es capaz de hacer,
- las actitudes que se asumen ante determinadas circunstancias,
- las creencias que se sostienen y la forma que se justifican.

Veamos algunos ejemplos:

X puede ser capaz de hacer ladrillos, razonamientos, gelatinas, transferencias, inducciones, figuras geométricas, composturas de radios,...,etc., y entonces decimos: X *conoce cómo* hacer ladrillos, razonamientos, gelatinas, transferencias, inducciones, figuras geométricas, composturas de radio, etc..

Y es capaz de explicar, ejemplificar, aplicar, "operar", etc. lo que es un triángulo, el teorema de Pitágoras, lo que es la justicia, etc., y entonces decimos: X *conoce lo que* es un triángulo, el teorema de Pitágoras, la justicia, etc..

Z es un ejemplo de profesor puntual, responsable, respetuoso, solidario, etc., y entonces decimos: la *actitud* de Z es responsable, respetuosa, puntual, solidaria, etc..

De esta forma, cuando W llegue puntualmente a la fábrica de cerámicas EL ANFORA y seleccione, mezcle, y trate con minerales arcillosos las "tierras" para fabricar tazas, en las que tomará café después de asistir a misa estará, en la práctica, en lo concreto, de manera objetiva poniendo en juego sus habilidades y mostrando sus creencias; en una palabra, exhibiendo sus *conocimientos*.

Así pues, cuando los conocimientos se consideran desde el punto de la acción que efectúa un individuo que los posee, los hay de tres clases:

- Conocimientos de *formas de hacer las cosas*, denominadas también ***habilidades***.
  Se reconoce que de manera natural el hombre posee, en condiciones normales, capacidades de realizar acciones motoras en virtud de que la estructura anatómica de nuestro cuerpo permite la realización de movimientos de algunos de nuestros miembros, por ejemplo levantar un brazo, doblar un brazo o una pierna, extender la mano, flexionar una pierna, abrir y cerrar la mano, etc.. Por otro lado, nuestra estructura biológica, en condiciones normales, nos capacita para realizar "movimientos" cuyo origen radica en la estructura y organización de nuestro sistema nervioso. Por ejemplo, reaccionar ante estímulos provenientes del medio que nos rodea, captar y registrar simbólicamente distintos tipos de estímulos, son muestras de tales capacidades.
  Nuestras actividades de la vida diaria, en mucho, no son otra cosa que estructuraciones complejas de capacidades de carácter motríz y nervioso. Por ejemplo, caminar, escribir, hablar, cantar, anudarse los zapatos, ponerse los calcetines, son muestras de conductas de carácter denominado psico-motriz, en ellas hay movimientos de carácter motriz de nuestro cuerpo, guiados, coordinados o controlados por acciones de carácter nervioso.
  Hay otro tipo de acciones o actividades que parece que son en su totalidad de carácter nervioso, o más comunmente mentales. Por ejemplo, tomar una desición, imaginarse el final de un cuento, recordar una demostración matemática, reconocer alguna regularidad en una coleccion de objetos, etc..
  De lo anterior, por ***habilidades*** se entenderá todo conocimiento que se refiera a modos de hacer cosas y que en un individuo se manifestará en acciones psico-motrices o en acciones intelectuales.

- Conocimientos de *qué son las cosas*, denominados en general, conocimientos de tipo ***conceptual***. Son podríamos decir, todo aquello que la gente acepta o de lo cual puede decir que es verdadero o falso. En este caso para convencerse de que alguien posee conocimientos de este tipo, basta que los "justifique convenientemente". Se incluyen en este rubro la *totalidad* de las reflexiones humanas, incluso los conocimientos de *cómo hacer cosas*, en tanto estén formulados como simples descripciones de una serie de acciones. En síntesis, están los resultados de la ciencia y los "vulgares", los técnicos como los humanísticos, los concretos como los formales, los que traten del hombre así como los que se refieran a la naturaleza, etc..

- Conocimientos en forma de *actitudes* humanas hacia lo que nos rodea. Estas actitudes o conductas las manifiesta o muestra un individuo ante cierto estado de cosas: la naturaleza, el conocimiento, el trabajo, las personas, las relaciones sociales, etc.. Si los dos tipos de conocimientos anteriores plantean dificultades para comprobar si alguien los posee o no, las actitudes son aún más complicadas.

Criterio para seleccionar los conocimientos a enseñar.

Es incuestionable el papel que desempeñan estos tipos de conocimientos, en las actividades que realizamos con el fin de satisfacer necesidades. Ningún trabajo se puede llevar a cabo bien, regular o mal, sin que entren en juego *habilidades, actitudes y conocimientos conceptuales*. Se puede decir que son condiciones necesarias para su realización. Por tal razón, un *primer criterio* que norma la selección de conocimientos que se deberán transmitir a un estudiante, sea del nivel que sea, es que deberá determinar cuál o cuáles de los tres tipos: *conceptos, habilidades y actitudes*, se escogerán.

Para el caso que nos ocupa: la formación propedeútica de un bachiller del C.C.H., se escogen conocimientos de los tres tipos. Cabe hacer acá dos señalamientos. Primero: dependiendo del "modelo de hombre" que se desea formar, a veces se privilegia más alguno de estos tipos de conocimiento. Segundo: el grado de desarrollo intelectual, físico y psicológico que se supone tiene el alumno que se desea formar, influye en los conceptos, habilidades y actitudes que se seleccionan para enseñarle. Por ejemplo, el nivel de licenciatura es pobre en actitudes, a diferencia del nivel primario.

*Las **habilidades**, los conceptos y las actitudes en el bachillerato.*

En este trabajo se supone que la formación de un bachiller del C.C.H., de acuerdo al "modelo" establecido, requiere de los tres tipos de conocimientos.

El bachillerato es de carácter propedeútico para el nivel de licenciatura. (De cualquier licenciatura), para el caso del C.C.H., y en ellas el papel de las habilidades, los conceptos y actitudes — no se concibe un abogado deshonesto — es definitivo. Pero, ¿qué habilidades, actitudes y conceptos enseñar en el bachillerato?.

Las actitudes en el bachillerato.

En el bachillerato, como en cualquier otro nivel, hay que intentar trasmitir *actitudes* "positivas" hacia lo que nos rodea. No se ignora el papel que la ideología desempeña en esto. Es más, éso es la ideología. ¿Qué *actitudes* se enseñan por lo general?. Las que provienen de la ideología dominante. En parte en esto radica el papel inmovilizante y transformador, (al mismo tiempo), de la educación. Cuando un movimiento de transformación se trueca en *instituciones*, establece *su educación*, y en ella las actitudes "adecuadas", "respetebles", "reconocidas", que se deben trasmitir a las futuras generaciones.

Las habilidades en el bachillerato.

En el bachillerato hay que enseñar *habilidades*. Y se enseñan. No tantas como las que se deberían: las posibilidades de hacerlo son reducidas en algunos aspectos. En este nivel se privilegian aquellas de carácter mental, a veces bajo el supuesto, cuestionable, de que para las "otras" ya no hay necesidad. Pero, nada más hay que ver con cuanta "habilidad" un estudiante traza una circunferencia con un compás, usa su regla y traza paralelas con escuadras para darse cuenta que tal vez haya necesidad de enseñar de las "otras". Entre más oportunidades tenga el estudiante de ejercitarse en habilidades —que no sean hábitos— es mejor. Es conveniente que se ejercite en la generalización, inducción, deducción, identificación de patrones, establecimiento de relaciones causales, etc.

Los conceptos en el bachillerato.

Renglones arriba se dijo que en la educación de un bachiller del C.C.H. no pueden faltar conocimientos de naturaleza conceptual. Por otro lado, más o menos por ahí mismo se reconoció lo vasto que son este tipo de conocimientos: incluyen, ni más ni menos que la totalidad de la reflexión humana.

¿Qué conceptos se enseñan? y ¿qué conceptos no se enseñan?

Es claro que no se puede, ni se debe enseñar todo. No se deben enseñar —al menos en una universidad— aquellos resultados ahora etiquetados como "vulgares", por su poco o nulo fundamento racional. La reflexión sobre el conocimiento en sí ha elaborado criterios que otorgan o niegan status de conocimientos fundados o firmemente establecidos sólo a ciertos resultados de la reflexión humana. En la actualidad no se enseña en una universidad la técnica de elaboración de Horóscopos pero, debe recordarse que esto fué uno de los móviles que llevó a Kepler a tratar de encontrar la "armonía" oculta en el movimiento de los planetas. Esto lo único que pone de manifiesto es lo relativo que son los conocimientos que una sociedad acepta como tales: en una universidad medieval el estudio de los Horóscopos se enseñaba, en una de nuestros tiempos no ocurre tal cosa.

Suprimimos de la enseñanza, al lado de las falsas creencias o supersticiones, todo resultado, que si bien proviene en parte de la observación empírica, no ha establecido de manera firme la relación con la supuesta causa que la origina. Ejemplos: "el cordonazo de San Francisco", "...vamos a que te "truenen" el empacho...", etc..

Dejando de lado este tipo de creencias, ¿con cuáles nos quedamos?. Nos quedamos con aquellos cuya aceptación o rechazo se funda en criterios que el mismo conocimiento ha elaborado y que actualmente se aceptan como válidos.

Una vez suprimido lo que actualmente no se considera como *conocimiento* lo que queda es enorme en cantidad. De éso que queda se escogen algunos para transmitirse en el bachillerato.

LOS CONOCIMIENTOS CONCEPTUALES: *una clasificación según su objeto y método de estudio.*

Lo que ahora consideramos como conocimientos difieren unos de otros en algunos aspectos. Un aspecto es su *objeto de estudio*, hacia qué parte de la realidad enfocan su atención. Este es un criterio que se utiliza para hacer una *clasificación* de los conocimientos. Esta clasificación se basa en el supuesto de que en la realidad — lo que existe — se pueden identificar aspectos "distintos" entre sí o en otras palabras, descansa en la suposición de que la realidad está formada de un cierto número de partes hasta cierto punto ajenas unas de otras. En relación a este punto hay la opinión contraria: la realidad es única, en consecuencia el conocimiento es conocimiento de esta realidad y por lo tanto es único. Recordemos algo que se dijo con anterioridad: no sólo hay conocimientos objetivos — el teorema de Pitágoras, por ejemplo — también hay *interpretaciones del conocimiento* y cuando escojamos los conocimientos conceptuales que se consideran necesarios a la formación de un bachiller, no pueden escogerse al margen de "*una*" interpretación de tales conocimientos.

Otro aspecto en el cual también difieren los conocimientos conceptuales es el *método por el cual obtienen y convalidan sus resultados*. Por ejemplo, se dice que el método de las Matemáticas es *deductivo*; de la Física, *experimental* y el de la Historia no lo tiene muy claro todavía. *El método* sirve también como criterio para hacer una clasificación de la totalidad de estos conocimientos: hablamos de ciencias deductivas y de ciencias experimentales, por ejemplo.

En este trabajo se acepta que los conocimientos actuales difiren tanto en *objeto de estudio* como en los *métodos* que utilizan para encontrarlos y justificarlos. Ahora bien, son distintos en objeto y método de estudio, pero, entonces, ¿cuántos objetos y métodos de estudio se aceptan?, porque en esto también hay distintas posiciones. Sin entrar en muchos detalles, en cuanto a objeto de estudio se está de acuerdo en que hay los siguientes: la "naturaleza" física, tanto en su aspecto animado como inanimado, incluyendo a los productos materiales hechos por el hombre; las relaciones entre los seres humanos con todas sus instituciones por ellos creadas; los medios de comunicación social utilizados y el aspecto *cuantitativo* que se ha revelado en todo lo que nos rodea, incluído el mundo creado por el hombre. Es decir, se acepta que la *realidad* presenta, al menos, estos cuatro aspectos claramente diferenciados. En cuanto al *método* de estudio se refiere, se está de acuerdo que cada uno de estos niveles de la realidad reclama métodos un tanto diferenciados para acercarse a ellos, aunque si bien, algunos de ellos no están, a la fecha, plenamente logrados, es el caso de las llamadas Ciencias Sociales y de la Linguística. En la solución de nuestras necesidades concurren los cuatro tipos, si bien puede ocurrir que alguno tenga primacía — sólo porque se usa en más cantidad — sobre los otros.

Los conocimientos conceptuales y su interpretación.

Por su importancia, volvamos a retomar a los *resultados concretos*, llamados conocimientos, y a *sus* diferentes interpretaciones que aparecen como resultado de la reflexión sobre ellos. Este punto es importante para todos los niveles que tienen relación con el conocimiento: producción, trasmisión, aplicación, etc.. Esta reflexión la hacen, de profesión, los filósofos y dan lugar a lo que se denomina *teoría del conocimiento o epistemología*. Sin embargo, es importante también para los otros sectores. Para el que los *produce* porque le sirven de guía, de orientación y en especial porque le permite reconocer los alcances y limitaciones de lo que hace; en este sentido son ilustrativos los ejemplos de Poincaré, y entre nosotros, el maestro Tomás Brody. Para el que *enseña* porque le hace conciente de la imposibilidad real de enseñar algo al margen de una cierta interpretación de ese algo y por último, para el que lo utiliza, porque en ese mismo hecho va implícita la suposición de que *el resultado abstracto de la ciencia* de alguna manera está relacionado con aquella situación a la que la quiere aplicar, que ya es una interpretación.

Una *interpretación* no sólo se hace del conocimiento en general, en su totalidad, sino de aquellas que se consideran como distintas modalidades de él. Así, hay *interpretaciones* para las matemáticas, para las cincias experimentales, etc.. Sin embargo, ya se refiera al conocimiento en general o a alguno en especial, *una interpretación* no es más que *una* respuesta a las preguntas:

¿qué es el conocimiento?,

¿qué conocimiento es el más fidedigno o importante?,

¿cómo surge el conocimiento?,

¿cómo debe conducirse la búsqueda del conocimiento?.

Cuando se trate del *conocimiento* en general, las preguntas quedan tal cuales y cuando se trate de un conocimiento en particular, basta que a la palabra conocimiento se le califique con el tipo de conocimiento de que se trate. Así por ejemplo, se dirá: *¿qué es el conocimiento matemático?*. En síntesis, distintas respuestas a las preguntas anteriores significan diferentes interpretaciones al conocimiento de que se trate.

Los *conocimientos conceptuales* que se enseñan en los niveles *elemental y medio* en nuestro país, incluyen, aunque en proporciones diferentes, contenidos que se refieren a las distintas áreas de reflexión que se han señalado. Como simple observación, es notorio, a veces, el lugar privilegiado que se le asignan a las Matemáticas y a la Lengua Española, en detrimento de las restantes.

En los niveles *elemental y medio*, una manifestación de la disparidad de concepciones hacia el conocimiento se materializa en la forma como se les agrupa para su enseñanza: algunas veces por áreas y otras por asignaturas.

Interpretación del conocimiento conceptual en el CCH.

En la U.N.A.M., el nivel *medio superior* no escapa de esa dualidad de conceptualizaciones: la Escuela Nacional Preparatoria asume la presentación por asignaturas y el C.C.H., por áreas. De cualquier forma, ya sea por asignaturas o por áreas se intenta garantizar que el bachiller fortalezca y enriquezca su formación recibida en la educación elemental y media.

Criterios para seleccionar los conocimientos conceptuales a enseñar en el bachillerato.

¿Qué conceptos de las diversas áreas del conocimiento se deben enseñar en el bachillerato?. La selección está determinada fundamentalmente por dos criterios: la función que se le asigna al bachillerato y la concepción que del conocimiento se tenga.

La tarea del bachillerato, en cuanto a enseñanza conceptual, se podría decir, en forma ideal, es incrementar los conocimientos conceptuales que ya posee el estudiante al ingresar al bachillerato. El bachillerato incrementaría los conocimientos conceptuales introduciendo nuevos conceptos y estableciendo relaciones cada vez más complejas entre ellos. La tarea así establecida no es fácil. No es fácil porque el estudiante trae, entre su bagaje cultural, información concreta resultante de determinada conceptualización. En el bachillerato un estudiante recibirá información específica derivada también de *una* interpretación. ¿Cómo empatar ambas situaciones sin generar graves conflictos?.

Una conceptualización particular del conocimiento trae consigo *una* selección de conceptos que considera fundamentales y *una* cierta estructuración lógica de ellos. Esto ocurre en todas las áreas del conocimiento. Pongámos un ejemplo de las Matemáticas. Bajo el supuesto de que los procesos fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral sean los de diferenciación e integración y que estos últimos no son más que casos particulares de uno más general, que es el proceso de *límite*, se concluye que el concepto fundamental del Cálculo Diferencial e Integral es el de *límite*. Pero para abordar este proceso, hay la necesidad de abocarse antes a los conceptos de *valor absoluto, función, relación, dominio, contradominio, ...,* y demás, relacionados de acuerdo a una determinada estructura lógica.

8.b. CONCEPTUALIZACION DE LAS MATEMATICAS.

Se ve pues, que *una conceptualización del conocimiento* trae consigo una determinada selección de contenidos conceptuales que se deben enseñar, y por lo tanto, ya que en este trabajo se desarrolla la enseñanza de un *tema matemático*, justo es que siquiera se mencione la conceptualización que de ella se tiene.

Es difícil señalar sin ambiguedad, sin imprecisiones y de manera cabal y completa el objeto de estudio de las Matemáticas. Definida a veces como la ciencia del número y de la forma, nunca se ha dejado de reconocer su carácter autónomo e independiente de las otras ramas del saber.

Con la idea de poder llegar a medio establecer una cierta conceptualización de ella, mencionemos algo de lo que se ha dicho o creído de ella y de su enseñanza:

- En algún momento se llegó a creer : Puesto que *el* concepto fundamental, elemental de las Matemáticas es *el concepto de conjunto*, toda su enseñanza debería hacer énfasis en este hecho.
- Otra idea que existe en relación a lo que se debe enseñar en Matemáticas descansa en el carácter axiomático de ésta: si la Matemática es un cuerpo de conocimientos estructurados de acuerdo a una teoría axiomática, ¿qué otra cosa habría que enseñar que no fuera ésta?. No hacerlo así, significaría falsear la "naturaleza" de las Matemáticas.

- Las Matemáticas se pueden considerar como un *modelo formal* de la realidad, en su aspecto cuantificable. Por lo tanto, los conceptos que de ésta se enseñen harán énfasis en este aspecto.
- Las Matemáticas son un *lenguaje*, en el sentido que la linguística asigna a esta palabra. En consecuencia, los conceptos que de ella se enseñen atenderán a sus aspectos sintácticos, semánticos y pragmáticos.
- Las Matemáticas le deben a la realidad física la motivación para sus primeros principios. Pero una vez formulados éstos, se independizan de ella y se erigen en una estructura con lógica propia. De lo anterior, los conceptos que de ella se enseñen atenderán a esta estructura.
- El *razonamiento lógico* es el medio por el cual se obtienen resultados matemáticos, la enseñanza de esta ciencia, por lo tanto, hará énfasis en este aspecto.
- La historia de las Matemáticas muestra que el desarrollo de sus conceptos ha sido lento y difícil. Algo que la humanidad tardó siglos en obtener no puede, por lo tanto, lograrse en diez o doce años. En consecuencia, los conceptos que de ella se enseñen no podrán elegirse sin considerar este hecho.
- Hay conceptos en la ciencia y en particular en las Matemáticas, cuya génesis no se puede explicar en términos de la cultura existe en el momento en que aparecen. Su surgimiento se explica en términos de una nueva forma de concebir, no sólo las Matemáticas,sino todo el pensamiento de la época. Por lo anterior, los conceptos que se enseñen serán especialmente aquellos que significarón un "rompimiento" en las formas de pensamiento.

Esta lista no pretende agotar las posiciones existentes. Vistas de conjunto parecen "verdades a medias", posiciones que registran "caras" o aspectos diferentes de la misma cosa. Absolutizar una de ellas,implicaría tener que explicar, los restantes aspectos en términos del aceptado. En este trabajo, mas bien se opta por la solución de concebir las Matemáticas como algo caracterizado por todos los aspectos anteriores. Como algo múltiple, que tiene su fuerza, precisamente en su multiplicidad: es modelo, pero también lenguaje; usa el razonamiento deductivo, pero también el inductivo; se nutre de la realidad, pero también es algo separado de ella,... Esta es la posición que se acepta en este trabajo y que se puede resumir en los siguientes puntos:

1. Las matemáticas son un modelo y un lenguaje que deben

aprenderse, y debemos aprender sus técnicas si queremos usarlas.

2. Las matemáticas son, a la vez, inductivas y deductivas, pero la imaginación es totalmente indispensable para su desarrollo.
3. Las matemáticas crecen por acumulación, las nuevas formas se crean a veces por la intuición, y a veces por el formalismo lógico.
4. Las demostraciones y justificaciones dependen de la lógica habitual, pero el matemático es libre de modificar esta lógica si lo necesita.
5. Las fuentes de la invención matemática residen a veces en las propias matemáticas y otras veces en las realidades del mundo que nos rodea.
6. El proceso de abstracción y de axiomatización ha servido simultáneamente para profundizar en los problemas de fundamentos y para elevar una soberbia superestructura.
7. Los resultados obtenidos por las matemáticas puras en el pasado y en el presente han proporcionado a los científicos la base conceptual para la comprensión y la descripción del mundo físico.

B.c. *Conceptualización de la Geometría Analítica.*

Estas son las características que en este trabajo se aceptan para conceptualizar a *todas las matemáticas*. Sin embargo, si le creemos a la Gramática, el término "las matemáticas" es el plural de "la matemática". Esto querría decir que *hay más de una matemática*. Realmente así sucede. A veces por razones de estudio, otras por cuestiones ideológicas, el hecho es que se han introducido en esta rama del conocimiento distintas clasificaciones que han dado lugar a "distintas" matemáticas: aritmética y geometría; puras y aplicadas; del número y de la forma; de lo contínuo y de lo discreto; elementales(?), intermedias(?) y superiores(?),...,Etc..

Una de las clasificaciones que existe para las matemáticas es la que las divide en Aritmética, Geometría Euclideana, Algebra, Geometría Analítica, Cálculo Diferencial e Integral, Etc.. Estas ramas de las matemáticas, como tales, comparten o tienen en común la caracterización que establecen las siete afirmaciones anteriores. Pero entonces, ¿en qué se diferencían?. Se diferencían en los conceptos fundamentales sobre los cuales se construyen y/o la forma en que abordan "sus" problemas; muchos, comunes a ellas. La última afirmación debiera justificarse. Sin embargo, no es el objeto de este trabajo detallar los aspectos que las hacen diferentes. Lo que sí precisa es describir los rasgos que se consideran esenciales para la Geometría Analítica, en virtud de que este trabajo está dedicado a la enseñanza de uno de sus temas. Por lo tanto, las características que se considera definen a la Geometría Analítica se resumen en los siguientes puntos:

1. *La Geometría Analítica es una teoría unificadora*: unifica el Algebra con la Geometría Euclideana. A este respecto D. J. Struik escribe: "Descartes publicó su *Géométrie* como una aplicación de su método general de unificación, en este caso la unificación del álgebra y la geometría".
2. El concepto fundamental que sintetiza la unificación del Algebra con la Geometría de Euclides es el de *sistema de coordenadas*.
3. El método de la *Geometría Analítica* para abordar sus problemas está caracterizado por los siguientes procesos:
   i. Asociar a un *punto* un *número*.
   ii. Asociar a un *número* un *punto*.
   iii. Asociar a una *ecuación* una *gráfica*.
   iv. Asociar a una *gráfica* una *ecuación*.

Hagámos un recuento de lo hecho hasta acá. Los resultados que se se han establecido, en términos generales son:

- Las necesidades de una sociedad se resuelven con el trabajo socialmente útil de sus individuos.
- La institución encargada de formar un individuo que tenga las características adecuadas para abocarse a la solución de las necesidades que la sociedad plantea es la denominada *educación institucionalizada*.
- Se estableció el *modelo de individuo* a que tenderá la educación impartida en el C.C.H.
- Se identifican como *habilidades*, *actitudes* y *conceptos* los distintos tipos de conocimientos que participan en la realización de un trabajo socialmente útil.
- Se acepta que la educación que imparta el C.C.H. contenga de los tres tipos de conocimientos antes mencionados.
- Se mencionaron algunos aspectos del conocimiento conceptual.
- Se explicitó la clasificación que en el C.C.H se acepta del conocimiento conceptual.
- Se establece que *la tarea del bachillerato* es un criterio para la selección de los conceptos que se deberán enseñar.

- Se establece que *la conceptualización* que se tenga de una área del conocimiento en particular, es otro criterio para la selección de los conceptos que se deberán enseñar.
- Se explicita la concepción que sobre las matemáticas se acepta en este trabajo.
- Se explicita la concepción que sobre la Geometría Analítica se acepta en este trabajo.

En síntesis, con todo lo hasta acá tratado se pretende justificar la selección y estructuración de los conceptos, habilidades y actitudes que integran el programa de estudio para el curso de Geometría Analítica -CAPITULO II- en que se funda la propuesta didáctica que se detalla en el CAPITULO III.

TEORIA DEL APRENDIZAJE

Lo más probable es que un niño de ciudad, que tenga cinco años de edad, sabe a qué nos referimos cuando hablamos de una *pelota*. Puede formarse una "imagen" mental de su forma, de su tamaño, de sus colores, de los movimientos que puede realizar, de la textura de su superficie, del material de que está hecha y posiblemente hasta de su costo. Decimos que el niño *conoce* el concepto *pelota*.

Es claro que el niño, que es el que sabe todas estas cosas, no tiene en él a la pelota, como objeto físico. El objeto físico llamado pelota está fuera de él. Lo que se encuentra en él es una representación de la pelota. Decimos que *posee el concepto "pelota"* . Tampoco la forma, tamaño, color, movimientos, textura, material, se encuentran en el niño con su carácter de objetos físicos. En él se están "representaciones" de estas propiedades.

A la pregunta: ¿Qué es una pelota?, nuestro niño de seguro, intenta formular una respuesta. Lo que no ocurre si le preguntamos ¿qué es una galaxia?. Pero, si esta misma pregunta se la planteamos a un astrónomo, sin duda se explayará en explicaciones, datos, informes, Etc., cuya concordancia con las características de los objetos denominados galaxias, indica que *conoce* lo que estos son.

Por otro lado, la mejor forma de saber si alguien tiene idea de *cómo se toca* una flauta dulce, o de *cómo se hace* un pastel, o *cómo* se construye un "eliminador" de baterías, Etc., es proporcionarle los elementos y que lo haga. En estos casos decimos: fulano *conoce cómo* tocar una flauta, hacer un pastel o construir un eliminador. Estos ejemplos muestran que es posible *conocer* formas o maneras de hacer ciertas cosas.

En la actualidad se dice que la humanidad *conoce* muchas cosas, pero que al mismo tiempo son más las que ignora. Por ejemplo, parece ser que hasta la fecha "nadie" conoce cómo curar el SIDA. Hay en el mundo personas que están trabajando en la búsqueda de cura a esta enfermedad. Tal vez en un futuro se llegue a *conocer* algún remedio.

Los ejemplos anteriores son suficientes para poner de manifiesto que en el **fenómeno del conocimiento** concurre, de inicio, dos elementos: el **sujeto** que conoce y un **objeto** susceptible de ser conocido. El sujeto que conoce no es otro que el hombre; el objeto susceptible de conocerse lo hemos ejemplificado en un caso, con un objeto físico, una pelota, y en otro, con formas de hacer cosas.

De igual manera se ha mostrado que cuando una persona conoce un objeto cognoscible, ese objeto se encuentra en ella en forma de una representación y nunca en la forma en el objeto es. Por esta razón, en un diccionario de Filosofía se dice que: ***conocer es el acto por el cual un sujeto aprehende***, es decir, representa un objeto.

En conclusión, se puede decir que en el fenómeno del conocimiento hay tres elementos: el sujeto cognoscente (el hombre), el objeto cognoscible y la representación que de éste último se hace el hombre cuando ya lo conoce.

Hasta acá parecen muy simples las cosas. Sin embargo, puede vislumbrarse su extrema complejidad cuando nos formulamos preguntas sobre estos tres elementos. En seguida se enuncian algunas de ellas:

Con respecto al objeto cognoscible.

¿Qué objetos son objetos cognoscibles?.
¿Qué es lo que hace a un objeto ser objeto cognoscible?.
¿Cuántos tipos de objetos cognoscibles hay?.

Con respecto al sujeto cognoscente.

¿Qué parte del hombre -sentidos o razón- son los medios para conocer?.
¿Un hombre puede conocer todos los objetos cognoscibles?.
¿Por qué mecanismo llega un hombre a conocer, lo que conoce?.
¿Qué "actitud" asume el sujeto durante el proceso del conocimiento?.

Con respecto a la **representación**.

¿Cuál es la naturaleza de la representación?.
¿La representación se encuentra en el sujeto o fuera de él?.
¿Cómo se sabe que la representación realmente representa al objeto?.
¿Cuántos tipos de representaciones hay?.
Las representaciones de los objetos cognoscibles, ¿son todas de la misma naturaleza?.
¿Es posible conocer la naturaleza de la representación?.
¿Es posible conocer el proceso por el cual un hombre llega a obtener la representación, sea ésta lo que sea?.

Algunas de estas preguntas las han contestado las Ciencias distintas de la Psicología y de las Ciencias Sociales, y en este caso casi no ha habido problemas. La razón: de un tiempo para acá entre los que practican las Matemáticas, la Física y la Biología sólo se presentan discrepancias cuando se meten a filósofos. Otras preguntas las ha contestado la Psicología, y ahí aparecen algunas posiciones francamente irreconciliables. Por ejemplo, el conductismo al negar la posibilidad de conocer los procesos mentales por los cuales un hombre aprehende, se contradice con aquellos que afirman lo contrario, la psicogenética, por ejemplo. Finalmente, algunas otras de las preguntas anteriores las contesta la Filosofía, y ahí todo es un *no* ponerse de acuerdo. Aparecen todos **los ismos** y hay para todos los gustos: sólo se conoce por los sentidos; no, sólo se conoce con la razón; no, se conece con los sentidos y con la razón; la certidumbre de *todo* conocimiento se determina al hacer una comparación con el universo de los sentidos; no, existen conocimientos cuya certidumbre se determina independientemente de los sentidos; "*el conocimiento es una reminiscencia*, es decir, el conocedor *tiene* la verdad, No la aprende; simplemente la recuerda con la ayuda de la enseñanza"; el conocimiento no consiste en impresiones de los sentidos, sino en razonamientos sobre ellas; el conocimiento es un conocimiento de los principios permanentes del mundo, no de las apariencias cambiantes, Etc.

Así es la Filosofía; es más, éso es la Filosofía. No debe ni asustarnos ni llevarnos a un escepticismo inmovilizante. Russell señala el papel negativo que jugó, para el desarrollo del conocimiento (esto último en el sentido de acumular resultados), el que se hayan impuesto opiniones que, si no cancelaban, sí limitaban los alcances que tenía el conocimiento obtenido por vía empírica. Sin embargo, a lo largo de los tiempos se han llegado a producir una gran cantidad de conocimientos que no todos los tenemos. Son conocimientos ya establecidos, algunos tal vez cuestionables por su propia naturaleza -lo valores, por ejemplo- pero conocimientos en fin. Por las razones antes señaladas, estos conocimientos ya establecidos, debemos enseñarlos a los que no los tienen. Es decir, ahora los conocimientos ya logrados, se convierten en objetos de enseñanza.

Resumamos lo que hasta acá se ha dicho:

- se desea educar a un alumno con el objeto de que por este medio se llegue a conducir lo más cercanamente a como supuestamente lo haría un "hombre ideal", previamente establecido,
- el medio por el cual se va a pretender alcanzar tal educación es la *enseñanza* de un cierto número de conocimientos previamente establecidos como tales,
- la finalidad de la enseñanza es que el alumno aprehenda ciertos objetos de conocimiento, es decir, que se los represente y que con esto llegue a *conocer el objeto de conocimiento*.

En la educación institucionalizada son tres los elementos que participan durante el proceso enseñanza-aprendizaje: los alumnos, los aprendizajes que se desea alcancen los alumnos y el profesor. Estos tres elementos inmersos, claro está, en un contexto social, en todos sus aspectos.

Con el objeto de que los alumnos se apropien de los aprendizajes deseados, se hace necesario que entre alumnos, profesor y aprendizajes se realicen todo un conjunto de interacciones que favorezcan el aprendizaje de los alumnos. Es función del profesor conducir al alumno para que adquiera los aprendizajes deseados, y para ello tenderá a provocar, de manera conciente y sistemática, los procesos que juzgue convenientes para la formación del alumno.

De lo anterior es pertinente que el profesor planee, de alguna manera, su enseñanza. La planeación consistirá en la selección y estructuración de los procesos que ayudarán al estudiante a su formación.

Dos criterios tendrán relevancia al efectuar la planeación. Ambos de carácter psicológico. Uno, definir lo que significa decir, "..fulano de tal *conoce* tal cosa"; dos, precisar la naturaleza de los procesos de adquisición por los cuales un alumno se apropia de determinados objetos de enseñanza. Dependiendo de las respuestas que se dén a estas preguntas, así serán los procesos que se eligan para la conducción del alumno en su formación.

En la historia de la Psicología ha habido al menos dos formas diferentes de responder a las preguntas anteriores; una, la psicogenética desarrollada por J. PIAGET y otra, que por comodidad y de forma muy esquemática denominaremos "tradicional". De paso diremos que este trabajo, es un primer intento de la autora por realizar la planeación de la enseñanza de algunos conocimientos en base a las respuestas que propone PIAGET a ambas preguntas.

De alguna manera la "psicología tradicional" contesta a las dos preguntas anteriores y con sus respuestas pretende orientar y justificar la didáctica, es decir, el conjunto de prácticas, procesos o actividades de que se vale la "enseñanza tradicional". PIAGET puso de manifiesto que tales respuestas no explican el por qué la enseñanza tradicional recurre a ciertas actividades que de ninguna manera se infieren de las respuestas dadas a las mencionadas preguntas.

Pero vamos por partes. Por ejemplo, ¿qué es para la psicología tradicional que X conozca Y?, siendo Y un concepto. La respuesta que dá es, naturalmente (de acuerdo a lo que se dijo anteriormente), que, X conoce Y, cuando X se ha representado mentalmente a Y. Hasta acá no hay problema. El primero aparece cuando se aclara la *naturaleza de tal representación*:una representación, se dice, es una imagen. Tratemos de explicar este punto. El significado más usual que se le dá al término imagen es de carácter visual, en este sentido se tiene una imagen de carácter plástico, algo así como un dibujo o una fotografía. Los artistas plásticos tienen muy desarrollada su capacidad de imaginar representaciones de esta naturaleza. Pero también hay imágenes de carácter auditivo, de carácter tactíl, Etc.. Los músicos pueden, digamos, "ver" no solamente sonidos aislados sino formando toda una estructura armónica. Uno puede mentalmente tener una imagen de los sonidos que forman el habla de las personas muy cercanas a nosotros, amén de su aspecto físico. De acuerdo a la psicología tradicional la respuesta a la primera pregunta es; X conoce Y, cuando X tiene una imagen de Y.

Vamos ahora a la segunda pregunta: ¿cuál es el proceso psicológico que sigue X cuando llega a conocer el concepto Y?. Antes de intentar contestar esta pregunta anotemos que para la psicología tradicional, tanto como para aquella que no lo es, un *concepto* es de naturaleza general. Es decir, un concepto o noción no es algo singular, particular. El concepto *libro*, por ejemplo, es algo que se dice para toda una colección de objetos. El *concepto* es de naturaleza genérica. Esto lo tiene presente la psicología tradicional.

Desde los primeros filósofos griegos se estuvo de acuerdo en que mediante los sentidos sólo se puede captar lo individual, lo particular, nunca lo general. Por tal razón, la psicología tradicional que se vale de los sentidos para explicar la construcción de nociones, recurre al proceso de *abstracción*, para zanjar tal dificultad. Gracias a este proceso, la formación de conceptos se lleva a cabo de la siguiente manera -según la psicología tradicional- :

- los sentidos recogen estímulos que provienen de objetos del mundo exterior, los cuales de alguna forma se "trasmiten" al cerebro y se imprimen en él. Al acto físico de recibir impresiones sensoriales, es decir, de registrar la reflexión de la luz o, para ser más exactos, las ondas luminosas; de registrar las ondas sonoras; de responder con una sensación cuando se tocan las llaves que marcan "frío", "calor" o "dolor" se le llama *percepción*.
- una vez que se han percibido "gran cantidad" de objetos individuales de la misma clase, entra en juego el proceso de *abstracción* por el cual, se elimina de las percepciones todo aquello que es *accidental, no común a todas y cada una de las percepciones individuales*, dejando sólo aquellas características genéricas. De esta manera, bastaría que se ofreciera a mi vista gran cantidad de objetos amarillos para que yo llegara a tener el concepto *amarillo*.

Las dos respuestas anteriores fundamentan algunos de los procesos didácticos utilizados por la "didáctica tradicional": se explica el empeño del profesor en presentarle a la experiencia visual del alumno ejemplos particulares que exhiben la noción por conocer; la poca actividad del alumno y su actitud fundamentalmente receptiva. Para nuestros fines no es muy importante lo que sí explica, sino lo que no puede hacer. Se trata de señalar sus limitaciones. Lo que no explica es por qué la didáctica tradicional precisa de cierta "actividad" de parte del alumno para lograr la adquisición de una noción. Ejemplos de acciones que se utilizan son sobreponer, girar, contar, separar, Etc. realizadas en pocos casos de manera objetiva pero con frecuencia mentalmente. Los dos supuestos básicos de esta psicología no haría necesaria esta actividad. En otras palabras, de acuerdo a la psicología tradicional no cabe la interacción activa entre el sujeto cognoscente y el objeto cognoscible cuando aquel intenta llegar a conocer a este último. La psicología de PIAGET, entre otras cosas, dá cuenta y razón de este hecho.

Repasemos brevemente algunos aspectos de la psicología de PIAGET con miras a formular directrices que guíen el proceso enseñanza-aprendizaje. Sería absurdo siquiera pretender discutir con amplitud algún detalle de esta teoría. No es el objetivo de este trabajo.

De acuerdo a PIAGET, para la formación de un concepto no basta con la sóla imagen estática; se precisa de realizar alguna actividad ya sea de manera objetiva o mental. Lo anterior, le permite afirmar que : *los elementos fundamentales del pensamiento no son imágenes estáticas, sino esquemas de actividad en cuya elaboración el sujeto toma parte activa e importante.* Algunos ejemplos de actividades o acciones son: sustitución, reunión, separación, reproducir algo, situar cercanamente, envolver, congregar, espaciar, cortar, reducir, plegar o desplegar, aumentar, disminuir, alterar un punto de vista, conectar, Etc..

Estas acciones o actividades se realizan practicamente sobre objetos materiales. Pero, en otro momento, es posible poderlas "efectuar mentalmente"; imaginar acciones sólo con el pensamiento. En este momento ya no sólo se es capaz de "comparar" parejas de objetos, por ejemplo, en cuanto a su tamaño, sino que ya se tiene una representación mental del acto de "comparar" y se es capaz de realizarla en la imaginación.

De acuerdo a PIAGET, el pensamiento en todas sus manifestaciones se muestra como esencialmente operativo. Gran parte de la obra de este pensador está dedicada a estudiar el desarrollo de este tipo de pensamiento desde sus niveles más simples y rudimentarios hasta los más complejos y elaborados. Se puede decir, que según PIAGET, el desarrollo del pensamiento es el desarrollo de los esquemas, moldes, modelos o formas (como se le quiera llamar) de actividades.

Lo anterior no quiere decir que para PIAGET ya no existan imágenes. Siguen existiendo, pero ya no como los elementos fundamentales del pensamiento. Pero, si ya no son eso entonces, ¿qué son para PIAGET? Para PIAGET son ***símbolos***. Tratemos de explicarnos. Los símbolos, para quien sabe su significado, al verlos y prestarles atención le recuerdan su significado. Cuando un automovilista, al llegar a una boca-calle ve una luz roja en el semáforo, sabe que hacer; cuando una persona ve el símbolo representado en la FIG. 1 y sabe su significado, le recuerda cosas. Así, para PIAGET las imágenes son símbolos que nos recuerdan operaciones que se pueden realizar con el objeto simbolizado. Claro está, como ocurre para cualquier símbolo, previamente hay que estar en posesión de su significado. Tradúzcase esto a : previamente hay que estar en posesión de las operaciones.

FIG. 1

Acciones es todo aquello que objetivamente se realiza. La acción de "cortar" se presenta cuando se corta madera, papel, un pastel, una naranja, Etc.; la acción de "girar" -alrededor de algo- se realiza cuando una puerta "gira" alrededor de sus visagras, cuando un niño "gira" alrededor de un árbol, cuando una moneda se hace "girar" sobre uno de sus puntos en contacto de la mesa, cuando, manteniendo fijo uno de los brazos de un compás, el otro brazo se hace "girar" en torno al tornillo que los une, Etc.. PIAGET le llama ***interiorización*** *al proceso por el cual un individuo llega a poder realizar acciones sólo mentalmente*. Por ejemplo, cuando alguien es capaz de imaginarse la rotación de la tierra alrededor del sol, la rotación del sistema solar alrededor del centro de la Vía Láctea, la rotación de la Vía Láctea alrededor de ..., se dice que ha interiorizado la acción de giro. *A una* ***acción interiorizada****, PIAGET le llama operación*. Se dice que por el proceso de interiorización, el acto efectivo, real, se transforma en representación del acto.

Pero PIAGET no sólo asigna a la imagen de la psicología tradicional una función distinta, también explica su origen, es decir, su "naturaleza" de manera distinta. Para PIAGET una **imagen** es el resultado de la interiorización de una acción; acción que no es cortar, unir, prolongar, Etc., sino de la que él denomina ***acción perceptiva***. Es decir, para PIAGET la percepción misma -que constituye un capítulo de todo libro de psicología- la interpreta de otra forma. En esencia, para él la percepción, de lo que sea, no es algo pasivo, sino al contrario, toda una actividad. Usando una figura del lenguaje: una **imagen** para la psicología clásica es una fotografía, para PIAGET es un dibujo. Así, tanto la *imagen* como la *operación*, si bien diferentes en cuanto a función, tienen, de acuerdo siempre a PIAGET, un mismo origen: las acciones.

La operación es lo fundamental para el pensamiento, según PIAGET. Sus investigaciones le llevan a darle a las operaciones una estructura semejante a la que presentan las matemáticas. Les atribuye características como por ejemplo el que se pueden "*componer*", es decir, obtener una operación diferente como resultado de la realización de dos o más de ellas en forma subsecuente; que en conjuntos especiales de operaciones hay alguna que aplicada a ciertos objetos los deja invariables -es decir, que existe una operación idéntica- ; que tres operaciones del mismo grupo son asociativas y por último, para cada operación hay otra que aplicada a continuación de la primera, deja al objeto en su estado inicial en el que se encontraba (es decir, **las operaciones son reversibles**).

Estas propiedades que identifica en las operaciones le permiten explicar la conducta inteligente ya que para él, la inteligencia no es más que la colección de operaciones de que dispone un individuo.

Por sus propiedades que tiene, a la *operación* PIAGET opone el *hábito*. Sobre este último LOCKE dice: "...cuando ese poder o habilidad en el hombre de hacer cualquier cosa ha sido adquirido mediante frecuente ejecución de la misma cosa, es la idea que llamamos *hábito*...". El hábito nos permite hacer algo siempre de la misma manera. Muchas de nuestras conductas son "habituales". Basta que se dén ciertos estímulos para desencadenar una acción o acciones siempre en la misma forma, en la misma "dirección". PIAGET explica que cuando las operaciones incluidas en un proceso no son interiorizadas o lo son sólo parcialmente, este proceso, de convertirse en una conducta inteligente, degenera en un hábito. Por otro lado, PIAGET asemeja la ejecución de una conducta habitual como aquella que resulta de un *reflejo condicionado*. De igual forma, dá cuenta de la repetición de memoria y de la realización "automática" de algoritmos (sin comprenderlos) como resultados de hábitos sensorio-motores adquiridos como sustitución de una comprensión cabal de las operaciones involucradas. En resumen, un hábito es una conducta esteriotipada. Al contrario de los hábitos, las operaciones por su propiedad de reversibilidad aseguran una movilidad de la cual carecen aquellos y por sus otras propiedades permiten organizarce formando sistemas integrados, algo de lo cual carecen los hábitos, los cuales son, en general, conductas aisladas.

Un resultado a que llega PIAGET, y que es importante para la didáctica es el que asegura que el pensamiento organizado de manera operacional es un efecto, en parte, del trabajo realizado en forma cooperativa entre varios individuos.

¿Cómo se produce el progreso del pensamiento y cómo se construyen las operaciones?. Las investigaciones de PIAGET sugieren que las operaciones, al igual que otras conductas de carácter psicológico, no aparecen súbitamente por, digamos, generación espontánea, sino que son un resultado de la evolución, por diferenciación de conductas anteriores de carácter más elemental y primitivo. Lo mismo sucede con los *conceptos*. Estos se construyen en forma progresiva y contínua a partir de otros que le preceden. De acuerdo a PIAGET la construcción, tanto de operaciones como de conceptos se produce en el curso de una investigación, es decir, en la búsqueda de respuestas a preguntas planteadas.

Toda investigación es guiada por una pregunta. PIAGET estudia la relación que existe entre la pregunta, el problema y la operación y concluye, entre otras cosas, que cada operación está en función de una pregunta. Es decir, cada pregunta es un llamado a realizar alguna operación. De esta forma, una pregunta o problema es un *proyecto de acción o de operación* que alguna persona intenta aplicar a un nuevo objeto, con el fin de llegar a la respuesta buscada. Es decir, de alguna forma, la pregunta *anticipa* las operaciones o acciones que se aplicarán a determinados datos. Por esto se dice que una pregunta o problema es un *proyecto anticipador*, no siendo la investigación, otra cosa que la realización del proyecto de acción.

Con lo dicho hasta este momento se intentará aclarar el significado de la expresión " X **conoce** Y" para PIAGET. Con el objeto de hacer más claro el significado de la expresión "X conoce Y" , antes se contestan las siguientes preguntas: ¿qué es lo que hace a un *objeto* ser "*objeto cognoscible*"?, ¿qué es lo que hace a un *sujeto* ser *sujeto cognoscente*? y por último, ¿cuál es la esencia de un objeto, en cuanto es objeto cognoscible? o de otra forma, ¿qué distingue a un "objeto cognoscible" en particular de otro "objeto cognoscible" cualquiera?. En términos de lo dicho hasta este momento es posible poder afirmar :

a. Lo que hace a Y ser "objeto cognoscible" es la posibilidad de que sobre él se puedan o no realizar ciertas acciones.

b. Lo que hace a X ser "sujeto cognoscente" es la posibilidad de que X puede realizar acciones sobre objetos, los cuales pueden ser objetivos o puramente mentales.

c. La esencia de un "objeto cognoscible" (su "ser", como "ser cognoscible", no su "ser" en sentido metafísico) es el conjunto de operaciones que se pueden realizar sobre él.

d. Como resultado de su *desarrollo*, X, en cierto momento está en posesión de un conjunto de operaciones, las cuales, como se ha visto son de carácter puramente formal, es decir, son una especie de "moldes" o "estructuras".

Por lo tanto, para PIAGET, X *conoce* Y *si y sólo si* Y (como objeto cognoscible) *se encuentra en alguna o algunas de las operaciones de que dispone X.*

Cuando PIAGET habla de que X conoce Y, lo hace en el sentido anterior. Sus investigaciones y las de sus discípulos se han enfocado a desarrollar, en varios aspectos, el conocer en el sentido antes apuntado.

En el caso de que a X se le presente un objeto de conocimiento "nuevo", Y, ¿cuál es el mecanismo por el cual X llega a conocer Y? La respuesta, resumida, de PIAGET es : modificando -por efecto de la acción- alguna operación que ya posea X, con el fin de construir una nueva operación en donde sea posible asimilar a Y.

Tales son las respuestas que dá PIAGET a las preguntas de ¿qué es conocer algo? y ¿cuál es el mecanismo por el cual alguien llega a conocer ése algo? y que son las que se aceptan en este trabajo. En otras palabras tal es la teoría del aprendizaje con la que se está de acuerdo.

Por último, se reconoce que la teoría de PIAGET como tal ha recibido cuestionamientos serios, en relación al método que utiliza para obtener sus resultados:

> " El método clínico es excesivamente liberal y carece de buen control experimenta. Por ejemplo, Rosenthal y Jacobson (1968) han mostrado que el experimentador puede influir a los sujetos de manera sutil como, por ejemplo, mediante la expresión facial, sin estar conciente de ello. Además, el método de Piaget depende considerablemente de conceptos del lenguaje que los niños pequeños pueden no utilizar en la misma forma que los adultos.
>
> Las teorías son demasiado generales y vagas. Como muchas de las teorías de Freud, a veces no son ni siquiera comprobables en un experimento riguroso, y las que son comprobables a menudo han mostrado carecer de consistencia (Gelmamn,1969)" [1].

Aún con lo anterior es incuestionable la influencia que las ideas de PIAGET han tenido en el campo de la epistemología y en consecuencia en la educación.

UNA DIDACTICA FUNDADA EN LA PSICOLOGIA DE PIAGET.

El punto anterior concluye con la formulación explícita de las respuestas a las preguntas ¿qué es que X conozca Y?, ¿cuál es el proceso psicológico por el cual X llega a conocer Y?. Las respuestas dadas a estas preguntas así como las consideraciones generales que condujeron a ellas, permite identificar las características que tendría una didáctica consecuente con tales respuestas. Esta didáctica, entendida como las técnicas metodológicas más aptas para producir la adquisición de conocimientos, puede caracterizarse en los siguientes términos:

1. Se plantea una **situación problemática** y mediante discución

de carácter colectivo se intenta que los alumnos hagan suya y obtengan la mayor claridad posible de ella.

2. Planteado el problema, se discute nuevamente las alternativas o vías de solución hasta poder llegar a establecer o formular un **proyecto de investigación** cuya puesta en práctica nos dé o acerque a la solución del problema.

3. Se organiza la investigación mediante trabajos de carácter individual y/o por equipos y/o grupal.

4. Se lleva a cabo la investigación,y en cada etapa o momento de la ejecución se presentan y discuten los resultados a que se llegan.

5. Si los resultados obtenidos no son favorables a la solución del problema, el proceso se reinicia.

Durante todo este proceso la actividad del profesor "se limita" sólo a cuestionar, "cuidar" que las discusiones por equipo se realicen en un clima cordial y participativo por todos y cada uno de sus integrantes, fungir como moderador de las discusiones que se dén en el seno del grupo en su conjunto y sólo esporádicamente intervendrá con el fín de ratificar y/o rectificar y/o aclarar y/o abundar sobre algún aspecto en particular.

DIDACTICA QUE SE UTILIZA EN EN ESTE TRABAJO.

En sentido estricto, una didáctica basada en la teoría de PIAGET tiene las características antes mencionadas. Sin embargo, su puesta en práctica, en algunos casos, enfrenta severas limitaciones. Piénsese, sobre todo, en un programa con gran cantidad de aprendizajes por lograr en un "corto" espacio de tiempo. En estas circunstancias *no es posible* dejar al estudiante librado a sus propias fuerzas, a que plantee, organice y ejecute todo un proyecto de investigación que le permita acercarse a la respuesta deseada.

Una forma de resolver la limitación anterior es aceptar una especie de ayuda o guía al estudiante hacia la respuesta deseada. A esta didáctica se le conoce con el nombre de **aprendizaje por descubrimiento guiado**, que también se funda en la teoría psicológica de PIAGET.

La crítica más severa que se le puede hacer al "aprendizaje por descubrimiento guiado" es: en virtud de que el alumno no elabora por sí sólo el proyecto de investigación, cabe la posibilidad de que para él no tenga sentido (para la solución del problema) o signifique poca cosa las acciones o actividades en que consiste la guía.

Se entiende por "no tener sentido para el estudiante" el que éste no pueda ver la forma en la cual la sugerencia o guía que se le dá se enmarca en una estrategia para la solución del problema y que en consecuencia, su puesta en práctica derive, en el peor de los casos, en un automatismo.

Aún reconociendo la limitación anterior que "el aprendizaje por descubrimiento guiado" tiene, considero que presenta más bondades que la didáctica tradicional materializada en la *cátedra magistral* y que por tal motivo es la que se adopta en este trabajo. En este caso la guía que se utiliza consiste en la formulación de una serie de preguntas, cuyas respuestas requieren de un conjunto de actividades que los alumnos realizan.

REFERENCIAS.

[1] Mayer, R.E. MECANISMOS DEL PENSAMIENTO. *Introducción al Conocimiento y al Aprendizaje*. México: Edit. Concepto, 1984. Pág.193.

BIBLIOGRAFIA

ABBAGNANO, N. y VISALBERGHI. *Historia de la Pedagogía*. México: Fondo de Cultura Económica, 1982. La Introducción aclara los fines de la Educación y la rama de la Filosofía que la estudia.

AEBLI, H. *Una didáctica fundada en la psicología de Piaget*. Argentina: Kapelusz, 1973. Este bello libro, según opinión de Piaget, sirvió de base en la formulación de la propuesta metodológica que se realizó. En especial los capítulos I-VIII.

ARNAU, H. *et al*. ANTOLOGIA Y COMENTARIO DE TEXTOS FILOSOFICOS. *Curso de Orientación Universitaria*. Madrid: Alhambra, 1980. Util en la presentación que hace de la teoría del conocimiento desde los filósofos griegos hasta nuestros días.

FERRATER, M.J. *Diccionario de Filosofía Abreviado*. España: EDHASA-SUDAMERICANA, 1978. Se utilizó para explicitar el significado de términos filosóficos, como el de "conocimiento".

JOSPERS, J. *Introducción al análisis filosófico*. España: Alianza Universidad, 1982. Cap. 2,3 y 4. Describe con claridad los distintos tipos de conocimientos, útil sobre todo el Cap. 2.

KLAUSMEIER, H.J. y GOODWIN, W. PSICOLOGIA EDUCATIVA. *Habilidades Humanas y Aprendizaje*. México: HARLA, 1979. Libro de orientación fundamentalmente conductista. Util en el sentido de que aborda el aprendizaje de los distintos tipos de conocimientos, pero que puede dispersar si no se tiene claridad en cuanto a las distintas posiciones que se manejan.

MAYER, R.E. MECANISMOS DEL PENSAMIENTO. *Introducción al Conocimiento y al Aprendizaje*. México: Concepto, 1984. Visión de conjunto de los distintos procesos de pensamiento y de las distintas corrientes psicológicas que los han tratado.

MORENTE, M.G. *Lecciones Preliminares de Filosofía*. México: Diana, 1964. Excelente libro introductorio a los problemas de la Filosofía. Lecciones XI-XIII.

PIAGET, J. et. al. *La enseñanza de las Matemáticas Modernas*. Selección y prólogo de Jesús Hernández. España: Alianza Universidad, 1980. Del artículo "SOBRE LA MODERNIDAD DE LAS MATEMATICAS MODERNAS" se obtuvo, con ligeras modificaciones, la conceptualización que la autora presenta sobre las matemáticas en el Cap. I de este trabajo.

PULASKI, M.A.S. *Para comprender a Piaget*. España: Península. Una introducción al pensamiento de Piaget que es útil porque aclara el significado que Piaget asigna a muchos de sus términos técticos que utiliza.

RUSSELL, BERTRAND. *La Sabiduría de Occidente*. España: Aguilar, 1975. Proporciona un resumen del pensamiento científico y filosófico de la cultura occidental. De utilidad para este trabajo en el aspecto de tratar continuamente con el papel de la teoría del conocimiento y de las matemáticas en la cultura de occidente.

ROBINSON, D.N. *Historia crítica de la psicología*. España: Salvat, 1982. Una presentación histórica del papel que los problemas psicológicos desempeñan en la filosofía. Muy útil porque aborda los problemas de la teoría del conocimiento y de la teoría del aprendizaje en una perspectiva tanto filosófica como psicológica.

SCHEFFLER, I. LAS CONDICIONES DEL CONOCIMIENTO. *Una introducción a la Epistemología y a la Educación*. México: UNAM, 1974. Presenta a la Epistemología en su relación con la educación. Libro de difícil lectura que sirvió de base a la conceptualización del conocimiento y a la clasificación que de él se hace en este trabajo.

STRUIK, D.J. *Historia Concisa de las Matemáticas*. México: IPN, 1980. Clásico de la historia de las matemáticas que sirvió para fundamentar la concepción que de la Geometría Analítica tiene la Autora.

WOLFF, W. *Introducción a la Psicología*. México: Fondo de Cultura Económica, 1966. Libro antiguo de psicología, que sin embargo es útil para comprender las bases psicológicas de la didáctica tradicional.

CAPITULO II

PROGRAMA DE MATEMATICAS IV

UN PROGRAMA DE *estudios* no es otra cosa que la presentación ordenada y estructurada de los distintos aprendizajes que se desea alcancen los alumnos y su función es normar el proceso enseñanza-aprendizaje en cuanto a los aprendizajes por alcanzar.

En el programa de estudios se plasma o cobra forma el ideal de hombre en que se piensa, los conocimientos que se consideran necesarios para formar a un individuo de acuerdo al modelo establecido y la particular conceptualización que se tenga de los conocimientos en sí. En otras palabras, el programa de estudios, será resultado o consecuencia de las conceptualizaciones que de los tres aspectos antes mencionados se tenga.

En tal sentido, la que suscribe estas páginas considera que, fundamentalmente, el orden y la estructura que presentan los contenidos matemáticos en el Programa de estudios que se utiliza para el curso de M a t e m á t i c a s IV en el C.C.H.-Sur no es adecuado para servir de guía a un curso de Geometría Analítica de acuerdo a las conceptualizaciones expuestas en el CAPITULO anterior. Por lo tanto, pretender instrumentar un curso —planear todos y cada uno de los temas que lo constituyen— que presente los contenidos del Programa del Area de Matemáticas para el curso de Geometría Analítica de acuerdo a concepciones particulares de los tres aspectos mencionados, precisa de reelaborar el Programa. Tal es el objetivo de este CAPITULO: desarrollar el Programa de Matemáticas IV de acuerdo a las concepciones que se presentaron en el CAPITULO I de este trabajo.

Cabe señalar que uno de los aspectos discutibles cuando los programas de estudio son objeto de análisis, lo constituye el definir las partes de que está formado. Actualmente, hay toda una rama de estudios que ha convertido a la Currícula, a los Planes y Programas de estudio en su objeto de investigación. No es el objetivo de este trabajo entrar en detalles de ello. Aquí se acepta que un Programa de Estudios esté formado de las siguientes partes:

. Lineamientos Generales del Ciclo.

. Lineamientos Generales del Area.

. Lineamientos Generales del Curso.

. Objetivos Generales del Curso.

. Descripción de los temas del Curso.

Así, basados en este esquema, se elabora el Programa para el Curso de Geometría Analítica que se presenta en este CAPITULO y que constituye una interpretación del Programa vigente del Area de Matemáticas del C.C.H.-Sur.

En relación al Programa que se elaboró cabe señalar:

- Se aceptan los Lineamientos Generales del Ciclo y los Lineamientos Generales del Area de Matemáticas formulados por el grupo de profesores que se menciona en el CAPITULO I y que ha hecho suyos la Academia de Matemáticas pero que no aparecen explícitos en su Programa de Matemáticas IV, como lo podrá observar el lector en la página siguiente donde se anota el multicitado Programa.
- La descripción de los TEMAS se realiza, presentando a cada uno de ellos con una "breve" introducción, posteriormente

se enuncian sus objetivos y finalmente se hacen observaciones sobre éstos y se explicitan algunas sugerencias metodológicas.

- En el Marco Teórico se estuvo de acuerdo en que la formación de un individuo con las características del modelo escogido, precisa de que se le enseñen conocimientos conceptuales, habilidades y actitudes o valores. Por ser las actitudes de carácter general, en el sentido de que su enseñanza y manifestación se realiza en todo momento del Curso, y aún del Ciclo, se considera que no hay necesidad de hacer referencia a ellos en la descripción de los TEMAS que integran el Curso. En este momento basta recordar que el tipo de valores y actitudes que se intenta fomentar son más o menos los que se mencionan en el PREFACIO a este trabajo y que se retoman en la descripción de las sesiones de que trata el CAPITULO III.

Aclarado lo anterior, se procede a transcribir el programa de Matemáticas IV del Area de Matemáticas del CC -SUR y posteriormente se desarrolla la interpretación que de este se hace.

UNIDAD ACADEMICA DEL BACHILLERATO
Colegio de Ciencias y Humanidades
Plantel Sur
ACADEMIA DE MATEMATICAS
PROGRAMA DE MATEMATICAS IV

Al alumno:
En el presente programa se incluyen los objetivos y contenidos que deberás cubrir en el curso de matemáticas IV así como la bibliografía correspondiente.

OBJETIVOS GENERALES DEL CURSO

Conocerás que la Geometría Analítica es una teoría matemática basada en el método teórico deductivo.

Construirás gráficas de expresiones algebraicas.

Encontrarás la expresión algebraica de una gráfica dada.

I. Localización de puntos.

- Localizarás puntos en el eje numérico.
- Encontrarás el número real correspondiente a un punto del eje numérico.
- Localizarás puntos en el Plano Cartesiano.
- Encontrarás la pareja ordenada de números reales correspondiente a un punto sobre el Plano Cartesiano.

2. Distancia.

- Calcularás la distancia entre dos puntos sobre el eje numérico.
- Calcularás la distancia entre dos puntos sobre el Plano Cartesiano.
- Identificarás el valor absoluto de la diferencia de dos números reales como la distancia entre dos puntos sobre el eje numérico.

3. Representación de gráficas.

- Construirás la gráfica de las siguientes funciones polinomiales:

$y = a$	recta
$y = ax + b$	recta
$y = ax^2 + bx + c$	parábola.
$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$	

- Determinarás si un punto pertenece o no a la gráfica de una función polinomial.

4. Método de Diferencias Finitas.

- Usarás el método de diferencias finitas para obtener la expresión algebraica de una gráfica dada.

5. Pendiente.

- Calcularás la pendiente de una recta dadas las coordenadas de dos de sus puntos.
- Compararás las pendientes de rectas paralelas y concurrentes.
- Compararás la pendiente de una recta con su ángulo de inclinación.
- Dados dos puntos, o dado un punto y la pendiente encontrarás la ecuación de la recta $y = ax + b$.

6. Circunferencia.

Obtendrás la ecuación de la circunferencia.

a. Con centro en el origen.

b. Con centro en cualquier punto del plano.

- Determinarás el centro y el radio de la circunferencia dada una ecuación de segundo grado, cuya representación gráfica sea una circunferencia.

BIBLIOGRAFIA.

GELFAND, y otros. El método de coordenadas. Edit. Mir-Moscú.

WADE y TAYLOR. Geometría Analítica bidimensional. Edit. Limusa.

LEHMAN, CH. H. Geometría Analítica. Edit. UTEHA.

N.C.T.M. Gráficas, relaciones y funciones. Edit. Trillas.

EFIMOV. Curso breve de Geometría Analítica. Edit. Progreso, Moscú.

PROPUESTA DE PROGRAMA PARA EL CURSO DE MATEMATICAS IV

LINEAMIENTOS GENERALES DEL COLEGIO

Queremos un hombre que:

- sea conciente y crítico de su realidad, de la sociedad a la que pertenece y de la realidad del país;
- valore el trabajo productivo como el instrumento que dá a la persona la categoría de ser humano, esto es, que le permite la autoafirmación de su personalidad;
- aporte su trabajo y esfuerzo a la sociedad, la cual se lo retribuye;
- ponga en juego todos los conocimientos que posee para resolver las diferentes problemáticas a las que se enfrenta o ha de enfrentar y que en caso de no poseerlos, sea capaz de buscarlos y encontrarlos;
- enfrente su realidad con criterios concientes y claros, de tipo social, científico, técnico, artístico, filosófico u otros;
- sea autocrítico, es decir, que tenga la capacidad de reconocer si está actuando en esa realidad, de acuerdo a sus criterior de la mejor forma posible;
- sea congruente en su práctica con los criterios que sostiene.

LINEAMIENTOS GENERALES DEL AREA

1. Propiciar en los alumnos el reconocimiento del papel que juega la Matemática dentro de la cultura general del individuo, mediante ciertas ramas de ella que muestren su relación con otras ramas del conocimiento.
   - Fomentar la lectura acerca de tópicos científicos matemáticos que sirvan de apoyo a los cursos para desarrollar su cultura matemática.
2. Lograr por parte del educando la representación de fenómenos y situaciones del mundo físico, construyendo modelos que resuelvan los problemas donde se originaron.

- Entendiendo por modelos, la matematización de tales fenómenos y situaciones del mundo físico que dan la posibilidad de que al analizar matemáticamente un problema, reconozca regularidades, patrones en los objetos y sus relaciones, los exprese en lenguaje preciso y trabaje sus propiedades en él, para poder constatar después, si esto es válido en el entorno en que se originó el problema.

- A través de la resolución de problemas, se tenderá a desarrollar:

  * reflexión crítica;
  * procesos de simbolización y abstracción;
  * procesos de generalización;
  * flexibilidad de pensamiento;
  * generación y perfeccionamiento de algoritmos;
  * creatividad a través del enfrentamiento a problemas que correspondan a otras ramas del conocimiento que se presenten en su alrededor;
  * bases para lograr aprender por sí solos, es decir, para el autoaprendizaje o el aprender a aprender, lo que implica promover el desarrollo de la habilidad para reconocer situaciones de aprendizaje, de manera conciente y manifiesta y la actitud para buscarlas y/o crearlas;
  * interés, aceptación y gusto por la Matemática, además de valorarla en su aspecto formativo y de aplicación.

3. Desarrollar en los alumnos capacidades intelectuales que involucren la generalización de resultados particulare; la inferencia de resultados particulares a partir de principios generales, la analogía entre situaciones, casos, patrones o resultados así como la obtención de soluciones a partir de aproximaciones sucesi entre otros métodos.

LINEAMIENTOS GENERALES DEL CURSO

La enseñanza de la Geometría Analítica hará énfasis en:

1. El carácter integrador de sus conceptos al resultar de la síntesis de conceptos del Algebra y de la Geometría Euclideana.

2. En el hecho de que la "solución" de un problema matemático se alcanza gradualmente, es decir, por etapas que se utilizan o se valen de las anteriores.

3. La utilización de métodos inductivos y deductivos en la solución de problemas matemáticos.

OBJETIVOS GENERALES DE LA GEOMETRIA ANALITICA

. El alumno CONOCERA que:

i. asociar a un punto en el Plano Cartesiano una pareja de números reales,

ii. asociar a una pareja de números reales un punto en el Plano Cartesiano,

iii. asociar a una ecuación con dos variables reales una gráfica en el Plano Cartesiano,

iv. asociar a una gráfica en el Plano Cartesiano —que cumpla ciertas condiciones— una ecuación con dos variables reales,

son los procesos fundamentales de la Geometría Analítica.

. El alumno CONOCERA que los conceptos analíticos y las relaciones entre ellos —en su sentido más amplio—, son consecuencia de alguno o algunos de los cuatro procesos anteriores.

DESCRIPCION DE LOS TEMAS DEL CURSO

TEMA 1

CARACTERISTICAS GENERALES DE LA GEOMETRIA ANALITICA

I. introducción.

EN ESTE TEMA del Programa se hace una presentación resumida de la naturaleza de la Geometría Analítica y de sus procesos fundamentales. El resumen deberá servir como "hilo conductor" para el resto del curso y al cual el profesor volverá con relativa frecuencia con el objeto de ubicar al estudiante en su aprendizaje de la Analítica. Es claro que habrá aspectos que de momento queden fuera de la comprensión del estudiante y que se irán aclarando al avanzar el curso.

II. objetivos del tema.

En esta parte del Programa se pretende que el alumno :

. CONOZCA que la Geometría Analítica es la síntesis del Algebra de los Números Reales con la Geometría Euclideana.

. CONOZCA que los *conceptos de la Geometría Analítica* se construyen utilizando conceptos del Algebra de los Números Reales y conceptos de la Geometría Euclideana.

. CONOZCA que el *concepto fundamental* de la Geometría Analítica es el de *Plano Cartesiano*.

. CONOZCA que la Geometría Analítica, al ser síntesis del Algebra de los Números Reales y de la Geometría Euclideana, *acepta todos los principios fundamentales de estas dos ramas de las Matemáticas*.

. CONOZCA que los *procesos fundamentales* que aborda la Geometría Analítica son :

- aquel mediante el cual a un *Número Real asocia un punto*;
- aquel mediante el cual a un *punto asocia un Número Real*;
- aquel mediante el cual a una *ecuación con dos Variables Reales asocia una Gráfica en un Plano Cartesiano*;
- aquel mediante el cual a una *Gráfica en un Plano Cartesiano asocia una Ecuación con dos Variables Reales*.

. CONOZCA la importancia que la Geometría Analítica tiene en las Matemáticas y en la Ciencia en general.

. CONOZCA algunos aspectos del entorno *matemático* en el cual aparece la Geometría Analítica.

. Se EJERCITE en el *hábito de la Lectura*.

. Se EJERCITE en la *preparación y exposición* (ante sus compañeros) de algún Tema matemático o que tenga relación con él.

. Se EJERCITE en la *habilidad de resumir* un Texto.

III. observaciones a los **objetivos** y algunas sugerencias metodológicas.

El Tema presentará generalidades, más que aspectos muy específicos. El tiempo que se le dedique no excederá a cuatro horas. Se podrá cubrir asignándole al alumno lecturas extraclase que se discutirán y resumirán en a lo más dos sesiones de clase. El profesor, en una especie de Conferencia remarcará, al final del Tema, los aspectos señalados en los objetivos anteriores con excepción de los tres últimos.

1. CONTEXTO HISTORICO-MATEMATICO EN QUE APARECE LA GEOMETRIA ANALITICA.

Existe en muchos de nuestros estudiantes un desconocimiento completo del camino recorrido por la Matemática Elemental, hasta alcanzar el estado en el cual ha llegado a conocerla. Se hará énfasis en el hecho de que el desarrollo de la Matemática, como un producto humano, ha estado condicionado al complejo de relaciones que se presentan en la sociedad en un tiempo determinado. Para el caso específico de la Analítica se considerará, con brevedad, el contexto Histórico-Matemático en que aparece.

2. POSTULADOS BASICOS DE LA GEOMETRIA ANALITICA.

Por tener su origen en la Geometría Euclideana y en el Algebra de los Números Reales, aceptará todos y cada uno de los principios en que se sustentan ambas ramas de las Matemáticas.

3. CONCEPTO FUNDAMENTAL DE LA ANALITICA.

Para abordar sus procesos fundamentales la Geometría Analítica requiere de un concepto que no aparece en ninguna de las dos ciencias que sintetiza : *el Sistema de Coordenadas*, cuya creación significó un replanteamiento de los métodos algebraícos y euclídeos.

4. PROCESOS FUNDAMENTALES DE LA GEOMETRIA ANALITICA.

El objetivo central de la Analítica, en lo fundamental, radica en la identificación de *relaciones entre variables* con *lugares geométricos*, que sin embargo, descansa en la identificación entre *números y puntos*. Esta identificación se percibe claramente cuando se establece la forma de "traducir" puntos a números y viceversa.

Podemos resumir a cuatro los procesos fundamentales de la Analítica:

I. Asociar a un *número* un *punto*.

II. Asociar a un *punto* un *número*.

iii. Asociar a una ecuación con dos variables reales una curva en el Plano Cartesiano.

iv. Asociar a una curva en el Plano Cartesiano una ecuación con dos variables reales.

En conjunto, estos cuatro procesos conducen a la unificación del Algebra con la Geometría Euclideana.

5. IMPORTANCIA DE LA GEOMETRIA ANALITICA.

Enfatizar el significado que la Geometría Analítica tuvo para la Matemática, para la Ciencia en general y para la Tecnología.

Contrastando Simbolización, Algoritmos, Problemas que aborda y forma de tratarlos, entre el Algebra y la Euclideana, se enfatizarán los avances, tanto en notación como en métodos que se alcanzan con la Geometría Analítica, al ser posible deducir las propiedades de las curvas mediante procesos algebraicos aplicados a las ecuaciones.

Excepto el punto III-1 y el III-2, que se consideran agotados con lo que en este tema se diga, los restantes puntos (III-3, III-4 y III-5) serán retomados a lo largo del curso.

TEMA 2

RESUMEN DE ALGEBRA Y GEOMETRIA EUCLIDEANA

I. introducción.

ALGO QUE SE ha mencionado en páginas precedentes, y que aún a costa de ser reiterativa habría que mencionar de nuevo, es el hecho de que la Geometría Analítica es una teoría unificadora: unifica el Algebra con la Geometría Euclideana. Por otro lado, con anterioridad se aclaró que la enseñanza del Algebra y la Geometría precede, en el CCH-Sur, al estudio de la Analítica. Sin embargo, el material que se ha cubierto en estos cursos es tan basto y variado que hay necesidad de realizar una selección de aquellos conceptos y/o algoritmos de ambas ciencias, que son capitales para abordar los procesos centrales de la Analítica.

II. objetivos del tema.

EN ESTE TEMA, el alumno:

RESUMIRA algunos conceptos del Algebra de los números Reales y de la Geometría Euclideana, para ello:

- . RECORDARA los conceptos algebraicos de Constante Numérica, Variable, Expresión, Relación y Forma Algebraica.
- . CALCULARA valores numéricos para Expresiones Algebraicas.
- . RECORDARA el concepto de Ecuación Algebraica de una o más Variables Reales.
- . RECORDARA el concepto de Solución de una Ecuación.
- . RECORDARA los conceptos de Punto, Curva, Superficie, Plano, Lugar geométrico y Forma geométrica.
- . SE EJERCITARA en algunos procesos mentales de abstracción y generalización.

III. observaciones a los **objetivos** y algunas sugerencias metodológicas.

1. *CONCEPTOS Y METODOS ALGORITMICOS DEL ALGEBRA NECESARIOS PARA ESTABLECER LOS OBJETIVOS DE LA GEOMETRIA ANALITICA.*

Consultando el índice alfabético de un "buen" libro de texto de Algebra tradicional, se da uno cuenta de la gran cantidad de conceptos, leyes, reglas y métodos algorítmicos que aparecen en un curso normal de esta materia (el libro ELEMENTOS DE ALGEBRA de Wentworth y Smith enlista alrededor de 100). No se trata de recordarle al estudiante todos y cada uno de tales contenidos, basta con aquellos que se consideran necesarios para establecer los objetivos del curso de Analítica que se propone. En el desarrollo del curso el alumno tendrá la oportunidad -y necesidad- de repasar y utilizar muchos de los conocimientos algebraicos y geométricos que ha aprendido. De momento, el estudiante recordará:

- conceptos de Constante, Variable y su simbolización usual;
- las operaciones (suma, resta, multiplicación, división, elevación a potencias, extracción de raíces) que se pueden efectuar entre constantes y/o variables;
- la función de una operación en la "construcción" de otros números a partir de constantes y/o variables;
- el concepto de Igualdad como una relación entre dos números cualesquiera;
- los conceptos de Coeficiente y grado de una expresión algebraica;
- el concepto de Ecuación de cualquier grado y número de incógnitas así como sus diferentes presentaciones en que se puede encontrar una cualesquiera de ellas;
- la formación o construcción de expresiones algebraicas a partir de constantes, variables y operaciones que se efectúan en cierto orden;
- la "descomposición" de Expresiones Algebraicas indicando las Constantes, Variables y Operaciones (y su orden de realización) que se utilizaron en su construcción.

Explicitemos un poco más estos objetivos.

Ideas centrales de un curso de Algebra son : Constantes Numéricas, Variables Numéricas, Operaciones entre Constantes y/o Variables, relación de Igualdad entre Constantes y/o Variables. Es necesario que el alumno recuerde la diferencia que hay entre *variable numérica* (que no tiene valor fijo y que por lo tanto es susceptible de aceptar valores específicos que se le quieran asignar) de aquellas *constantes numéricas*, específicas, determinadas, que tienen un valor fijo y que no es posible modificarlo, así como la simbolización que ha utilizado para tales constantes. Podría tal vez ser necesario, aclarar la diferencia que hay entre lo que podríamos llamar "números que siempre son constantes" - como 1/3, π , -4, por ejemplo- de aquellos que son constantes sólo durante un proceso, pudiendo modificar su valor para otro (es el caso de la "r" en la expresión $x^2 + y^2 = r^2$).

Una vez que el estudiante ha recordado los conceptos de *variable*, constante y sus respectivas simbolizaciones, se continuará con las de operaciones algebraicas de suma, resta, multiplicación, división, elevación a potencias y extracción de raíces. Recordará el estudiante que estas operaciones algebraicas al ligar o unir constantes y/o variables, permite la "construcción" de otros números. Por consiguiente, dadas constantes y variables, así como distintas operaciones algebraicas -en un determinado orden- el alumno construirá la expresión correspondiente. Las instrucciones que se le pueden dar al estudiante serán más o menos como las siguientes:

a. La expresión estará formada por los números E, R, ω, L.
b. Las operaciones que se realizarán para obtener la expresión serán, en ese orden, las siguientes:
   1° Elevar al cuadrado el número R.
   2° Elevar al cuadrado el número ω.
   3° Elevar al cuadrado el número L.
   4° El número que se obtuvo en segundo lugar, multiplicarlo con el que se obtuvo en tercero.
   5° Sumar al número que se obtuvo en primer lugar el que se obtuvo en cuarto.
   6° Al número que se obtuvo en quinto lugar, extraerle la raíz cuadrada.
   7° El número E, dividirlo entre el número que se obtuvo en sexto lugar.

La respuesta del alumno será escribir simbólicamente cada una de las siete instrucciones, en ese orden, hasta llegar a obtener la expresión deseada. Recíprocamente, dada una expresión algebraica, por ejemplo $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, el alumno enumerará las variables y constantes que intervienen en ella y describirá y desarrollará, paso a paso, en un orden adecuado, las distintas operaciones que se siguieron en su construcción. Ejemplo: en la expresión $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ aparecen dos constantes (1 y c), una variable (v) y se construyó utilizando cinco operaciones algebraicas (dos multiplicaciones, una división, una resta y una raíz cuadrada) que se pueden efectuar en el siguiente orden :

1. Elevar al cuadrado " v " : v^2
2. Elevar al cuadrado " c " : c^2
3. Dividir v^2 entre c^2 : $\frac{v^2}{c^2}$
4. Al " 1 " restarle $\frac{v^2}{c^2}$: $1 - \frac{v^2}{c^2}$
5. Extraerle la raíz cuadrada a $1 - \frac{v^2}{c^2}$: $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

Hasta este momento, el estudiante ha vuelto a familiarizarse, a tener vivencias con *variables*, *constantes* y *expresiones algebraicas* en donde variables y/o constantes aparecen ligadas por operaciones. Llegado este momento, el alumno recordará, que independientemente de la expresión algebraica que tenga, compleja o simple, ésta representa un número. Número que tal vez es desconocido, por las incógnitas o variables que aparecen, pero número al fin. Para que termine de recordar y de convencerse de que, por ejemplo, la expresión $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ representa un número, basta con asignarle valores " adecuados " a la variable " v " (ya que c = 300 000 Km/Seg) y efectuar las operaciones indicadas para llegar a encontrar un número específico.

A continuación se le recuerda al estudiante uno de los conceptos centrales que interesan del algebra : el concepto de *relación entre variables y/o constantes*. La palabra " relación" se está usando en el sentido de " relación matemática " entre dos números. En consecuencia se está hablando de la " ley de Tricotomía " : o dos números son iguales o uno es mayor que el otro. Sin embargo, como este curso de Analítica no va a tratar con " desigualdades", se estará haciendo referencia a " igualdades ". Este concepto es de capital importancia para la Geometría Analítica.

El estudiante ha " recordado " que una expresión algebraica - construída sólo con números y operaciones algebraicas - como $x^2 + y^2$, representa un número. Por otro lado, también recordará que si se tiene otro -por ejemplo r^2- estos se podrían igualar para tener la expresión $x^2 + y^2 = r^2$, la cual establece una *relación de igualdad* entre los números $x^2 + y^2$ y r^2. Un concepto que el estudiante ya conoce y que es conveniente recordarle es el de *ecuación algebraica*, de una o mas variables, así como el concepto de *solución* de una ecuación y las distintas formas en que esta puede aparecer. Es conveniente que el estudiante se familiarice, de nuevo, con las ecuaciones, para ello se sugiere que el alumno construya ecuaciones, en distintas formas, de grados diferentes y con diverso número de variables.

Recapitulemos lo dicho hasta este momento: primero *constantes*, *variables* y su *simbolización*, en seguida *operaciones algebraicas*, a continuación *expresiones algebraicas* que representan números y que se construyen con constantes y/o variables " unidas " con operaciones algebraicas y por último *ecuaciones*, es decir, relaciones de igualdad entre variables y constantes.

Otro contenido algebraíco que deberá aparecer en este " repaso " es el concepto de " *forma algebraica* ". Aunado a lo anterior, el alumno :

. dada una expresión algebraíca, determinará su forma; y

. dada una *forma algebraica*, encontrará expresiones algebraícas específicas que tengan dicha forma.

Expliquemos con más detalle estos objetivos. FORMA ALGEBRAICA es un concepto central para la Analítica. De entrada se reconoce su nivel de abstracción. El concepto de *forma* es importante para las Matemáticas en su conjunto, de donde, intentar clarificarlo no es ocioso. Recuérdese que la Matemática, junto con la Lógica, son las dos únicas ciencias de carácter formal : tratan con formas. En particular el Algebra, con formas algebraícas.

Una *forma* es una especie de " molde ", de estructura, de esquema. Se habla de " formas " geométricas, de " formas " de documentos, de ceremonias formales, de muchacho " formal ", y lo que se quiere decir es : para el caso de documentos, telegramas, por ejemplo, que todos ellos conservan la misma estructura y se diferencian por los datos específicos con que el usuario los llena. Porque una *forma* es para " llenarse ", llenarse con un " contenido " y esa unión o síntesis de " forma " más " contenido " es lo que le dá existencia, le dá el ser -según Aristóteles- a lo individual, a lo concreto, lo particular. Una " forma " de cheque se convierte en cheque cuando la forma se llena correctamente. En tanto la " forma " esté vacía, sin contenido, en este caso los " datos ", no es cheque, es simplemente una " forma " . Es este carácter " formal " de las Matemáticas y de la Lógica, uno de los aspectos que dificulta su comprensión. Otra ciencia cualesquiera, que no sean estas, trabajan con entes concretos. La Biología, la Física, las Ciencias Sociales, etc., trabajan con conceptos, que si bien son abstractos por ser conceptos, éstos son abstracciones de cosas concretas, tangibles, algo que no ocurre en Matemáticas o Lógica. Por tal razón, buscando analogías con otras " formas ", que tal vez sean más fáciles de visualizar, por ejemplo, con las " ceremonias formales ", hay que intentar que el estudiante comprenda el concepto de *forma algebraica*.

Estábamos en el punto en que el estudiante ha vuelto a familiarizarse en la construcción de ecuaciones. ¿ Cómo determinar la "forma" de esta ecuación ?. Muy simple : se sustituye todo el "contenido" que aparezca en la ecuación por "espacios en blanco", por llenar -como vienen las formas de telegramas- y se tendrá la "forma". Pero, ¿cuáles son los contenidos en una ecua ción?. No son otra cosa que *todas las constantes* que aparezcan su mando, restando, multiplicando o dividiendo en la ecuación (Nota: la ecuación de entrada, ya es una forma algebraica cuando se consideran a las variables "x" e "*y*" como si fuesen los espacios en blanco). Así, por ejemplo, la "forma" de la ecuación

$$-\frac{1}{3}x + 2y = 5 \text{ , es}$$

$$\_\_\_x + \_\_\_y = \_\_\_$$

Las formas deben tener "algo" que se deberá llenar. En el ejemplo anterior se han usado guiones, pero podemos usar, como en la primaria, cuadritos, triangulitos o círculos. Así, el ejemplo anterior quedaría :

$$\bigcirc x + \triangle y = \square \text{ .}$$

Esto no es una ecuación, es una "forma" de ecuación. Se obtiene una ecuación cuando en lugar del círculo, triángulo y cuadrado se coloquen tres constantes numéricas arbitrarias. La manera usual de escribir en Algebra la forma anterior es :

$$ax + by = c \text{ ,}$$

en donde, círculo, triángulo y cuadrado se han sustituido por "a", "b" y "c" respectivamente. Esta última sustitución hace un tanto confusa la noción de forma algebraica ya que al usar "a", "b" y "c" para representar "constantes arbitrarias", parecería ya una ecuación más que una forma algebraica, a menos que se entiendan a "a", "b" y "c" como espacios por llenar con números específicos, lo cual lleva a identificar a la "a", "b" y "c" como variables y no como constantes. Este es el problema que se crea al decir que las primeras letras del alfabeto simbolizan constantes. Más bien, tanto la "a", "b" y "c" como la "x" e "y" en

$$ax + by = c$$

son variables, pero que se encuentran a distintos niveles, dado que la "a", "b" y "c" pueden ser tres números cualesquiera que *ya no se modifican* en un mismo proceso, en tanto que a la "x" e "y" se les están asignando valores numéricos arbitrarios.

En fin, es necesario que el estudiante recuerde el concepto de forma algebraica y que: primero, al darle una ecuación específica pueda determinar su forma. Este proceso tiene sus complicaciones porque la "forma" de la ecuación $3x^2 + 5y^2 = 8$ es $ax^2 + by^2 = c$ ó $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey = f$; habría que aclarar el aspecto de que hay "forma" que estan contenidas en otras "formas" o lo que es lo mismo, que el grado de generalidad de las formas no es el mismo. Segundo, que al darle al estudiante una forma algebraica pueda obtener ecuaciones particulares haciendo las sustituciones correctas en la "forma" que se le dé.

Hasta acá el resumen de Algebra. Hasta acá porque, en lo fundamental, la esencia de la Geometría Analítica es hacer corresponder a *formas algebraicas*, *formas geométricas* y recíprocamente, a *formas geométricas*, *formas algebraicas*. A continuación trataremos de las formas geométricas.

2. CONCEPTOS Y METODOS ALGORITMICOS DE LA GEOMETRIA EUCLIDEANA NECESARIOS PARA ESTABLECER LOS OBJETIVOS DE LA GEOMETRIA ANALITICA.

El recuento sobre Geometría Euclideana, al igual que el de Algebra, se hará sobre aquellos conceptos o aspectos que son necesarios para realizar los procesos fundamentales de la Analítica.

Los objetos materiales tienen la cualidad de poseer cierta "*figura*"; ésta se percibe con la vista y puede representarse en una superficie bidimensional. Las artes y técnicas figurativas, con sus diversas finalidades, tienen su origen en tal característica de los objetos.

La "*figura*" de un objeto tridimensional se representa sobre un plano utilizando *puntos y líneas*. Por medio de estos elementos podemos llegar a tener una idea "adecuada" del objeto representado.

Gracias, fundamentalmente, al sentido de la vista, las personas hemos aprendido a ver y a reconocer, por su imagen, una gran diversidad de formas naturales y de creaciones humanas. En algunos casos han desarrollado su habilidad en la representación de formas de tres dimensiones. Al hacer lo anterior, se presenta un proceso de abstracción al pasar del objeto a su representación.

Un caso especial de representación gráfica son las figuras geométricas. Nacidas con fines decorativos y/o por necesidades de "medir la tierra", no "tardan" en convertirse en objetos de estudio por sí mismos. Podemos decir que la Geometría Elemental bidimensional es la ciencia que estudia las propiedades de las *figuras geométricas* construídas a partir de *puntos y líneas*. Esta noción de Geometría carece del necesario rigor matemático pero es suficiente para iniciar a una persona en su estudio.

En la enseñanza de la Geometría Elemental, es usual "ayudarse" de dibujos. A veces el maestro se preocupa demasiado en convencer al estudiante de que los objetos que estudia la Geometría no son las "figuras" que dibuja sino aquello que ellas representan. Lo anterior es correcto. Sin embargo, considero que hay razones que hacen ver que no es del todo vano en que las figuras representadas en el cuaderno se conviertan en el propio objeto de estudio. Entre otras podríamos apuntar:

- Las representaciones usuales de los objetos geométricos son una "buena" aproximación a los objetos representados.
- La utilidad que tienen las representaciones geométricas cuando se consideran como modelos de cierto nivel de la realidad. En otras palabras, un esquema, plano, diagrama o croquis, realizado en una hoja de papel, puede tener una finalidad práctica.

Generalmente la enseñanza de la Geometría Elemental de dos dimensiones hace referencia a figuras geométricas como son los polígonos, la circunferencia, etc., pero deja de lado a estructuras más "simples" como podrían ser unos cuantos puntos y/o rectas, entre las cuales existan relaciones "sencillas". Esta falta de referencia a figuras de este tipo, limita la construcción del concepto general de *figura geométrica*.

Poco es lo que de inicio requiere la Analítica de la Geometría Euclídea de dos dimensiones. El resumen de esta última deberá hacer que el estudiante recuerde:

- La gran variedad de formas naturales y de formas creadas por el hombre.
- Que los "objetos" de tres dimensiones tienen cierta "figura" que se puede representar en una superficie de dos dimensiones; es decir, obtener su *modelo geométrico*.
- La gran variedad de "figuras" que se tienen a partir de objetos naturales y de creaciones humanas.
- Distintos tipos de representaciones que se utilizan como modelos geométricos. Entre ellos, se pueden mencionar: mapas, planos, cartas de navegación, ..., etc.
- Distintos oficios o profesiones que recurren de alguna forma a diagramas, como son : carpintería, albañilería, plomería, corte y confección, ingeniería, diseño gráfico.
- Que hay un proceso de abstracción al hacer un dibujo de un objeto.
- Los elementos geométricos fundamentales de la Euclídea: *punto, línea y plano*.
- Que la disposición relativa de una recta con respecto a otra, ambas en un plano euclideano, puede o no formar un ángulo.

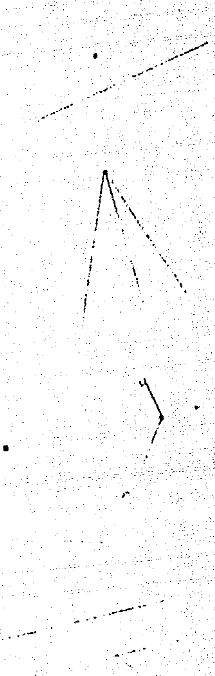


FIG. I.

- El concepto de *ángulo*.
- Los conceptos "métricos" fundamentales de la Euclídea: *magnitud de un segmento de recta y magnitud de un ángulo.*
- El concepto de *figura geométrica* como *estructura formada de puntos y/o líneas representada en un plano euclídeo.*
- El concepto de *líneas paralelas.*
- Que una *figura geométrica* en particular está caracterizada por las posiciones relativas de sus puntos y/o líneas en un *plano Euclideano.*
- Distintas "*figuras geométricas*", haciendo énfasis en aquellas que "poco" se mencionan. Refiérese esto a aquellas que no son los polígonos o circunferencias, sino a cualesquier estructura formada de puntos y/o líneas. Algo así como las que se muestran en la Figura 1.
- Que "una" figura geométrica en particular está caracterizada por la longitud de sus segmentos y/o por la magnitud de sus ángulos.
- Que en una *figura geométrica* pueden existir *relaciones cuantitativas* entre *elementos cuantitativos* que aparezcan en ella.
- El concepto de *lugar geométrico.*
- El concepto de *forma geométrica*, de una *figura geométrica*, entendida como las *relaciones invariables* entre las *líneas y/o puntos* que *forman la figura*. Entre estas relaciones se encuentran : *colinealidad, intersección, incidencia, "estar dentro", "estar fuera"* . Así mismo se reejercitará en la *identificación* de *formas geométricas* en figuras geométricas particulares y en *construir* figuras geométricas de alguna *forma específica.*
- El objetivo fundamental de la Euclideana que es *establecer relaciones cuantitativas y/o cualitativas entre elementos geométricos que pertenecen a determinadas formas geométricas.*

Aclaremos un poco más algunos de los objetivos anteriores:

A. Un primer curso de Euclideana está dedicado al estudio de algunas propiedades de polígonos, rectas, circunferencias y puntos. Se habla de puntos específicos, como pueden ser los extremos de un segmento, los vértices de un polígono, el centro de una circunferencia, el pie de una altura, etc., pero casi nunca se habla del *punto*, en general. Salvo en los axiomas. Para el caso de la *recta* se hace referencia a ella, como tal, cuando se estudia paralelismo o perpendicularidad, tangentes a una circunferencia, lados de un ángulo y no más. A lo que se hace contínua referencia es a segmentos de línea recta. La situación del *plano* es peor. Como no es usual estudiar Euclideana del Espacio, este concepto casi no se menciona. El uso que se le dá es el de "base" en la cual se representan figuras de a lo más dos dimensiones que se estén estudiando. Se dibujan triángulos, cuadrados, círculos, rectas, puntos "sobre" el plano, pero no se estudia nada del plano. Hay hasta mucha dificultad para visualizarlos.

Para empezar a hablar de Analítica necesitamos de la Euclideana las ideas de *punto, curva, superficie, plano, lugar geométrico* y *forma geométrica*, así que hay necesidad de recordarle al estudiante estos conceptos. Con el de *punto* no hay dificultad, pero con el de *curva* y *superficie* sí la hay. Con respecto a *superficie* habría que recordarle al estudiante lo rica que es nuestra realidad : montañas, valles, profundidades, el exterior del cuerpo humano, la famosa "silla de montar", etc., son ejemplos de superficies que el estudiante puede facilmente visualizar. Algo análogo habría que hacer en relación a las *curvas*. Las vivencias de nuestros estudiantes, en esto, son algo pobres. Hay que enriquecerlas. Seguramente no tienen dificultades con la recta y la circunferencia . Pero en general no llegan a más. Es que no es fácil. Nuestro entorno natural no es muy pródigo en *curvas* que no sean "caprichosas", con regularidad en la disposición de sus puntos. Habría que recordarle al estudiante el uso de medios mecánicos que hay para trazar curvas, como son los curvígrafos y tal vez habría necesidad de hacer un recordatorio de los métodos geométricos de trazar elipses y parábolas. Con esto volverían los estudiantes a retomar sus experiencias en *curvas* .

B. Cuando los alumnos han vuelto a familiarizarse con *curvas* como son la recta, circunferencia, parábola y elipse, se pasará a recordarles otro concepto Euclideano cardinal para la Analítica : el concepto de *lugar geométrico*. La importancia de este concepto radica en que es, ni más ni menos, el concepto Euclídeo de *curva*. Es muy conveniente y necesario que el estudiante no sólo comprenda el concepto de *lugar geométrico*, sino que esté familiarizado con la mayor cantidad posible de lugares geométricos, en sus dos aspectos: *conociendo su figura y la propiedad que cumple uno cualquiera de sus puntos*.

C-a. El concepto de *forma geométrica* es central en la Euclídea. Como rama de las Matemáticas que es, su objeto de estudio está centrado en *formas*, en este caso geométricas. En sentido restringido, la palabra "*forma*" se usa en la Euclideana en relación a las "figuras semejantes". En este resumen, sin embargo, se utilizará en un sentido más general.

C-b. El alumno deberá recordar que la *forma* de una *figura geométrica* está determinada por las relaciones que guardan entre sí los elementos -puntos, líneas y/o ángulos particulares- que intervienen en su estructura. Estas relaciones, para todas las figuras geométricas que tengan la *misma forma* son invariables y entre ellas podemos tener : *colinealidad, incidencia, intersección, estar "dentro" o estar "fuera", estar o no estar "entre"* . Estas relaciones, junto con el número de puntos particulares y el tipo y número de líneas que constituyen la figura, determinan la *forma* de la *figura geométrica*.

C-c. Definir de manera rigurosa la *forma* de una *figura geométrica* no es fácil. En general podemos clasificar un conjunto de figuras en triangulares y no triangulares, pero lo que ya no podemos hacer tan fácilmente es *explicar* que es lo que hace que una figura tenga o no forma triangular. Sin necesidad de conocer explícitamente los elementos geométricos y sus relaciones, hemos sido capaces de construir en nuestra mente un basto conjunto de imágenes visuales que retienen elementos geométricos que nos permiten reconocer formas geométricas determinadas en objetos particulares. Generalmente para reconocer la *forma* de un objeto nos servimos de usa especie de "silueta" con que se nos presentan nuestras imágenes visuales. Esa como "sombra", sin dimensiones particulares, es lo que utilizamos cuando hablamos de la *forma* de un carro, de un árbol o de una pelota. Parece ser que la construcción de la imágen visual de un objeto se lleva a cabo reparando en la totalidad del objeto y no en sus partes, razón que explicaría el porque hablamos en nuestra vida cotidiana de *objetos de la misma forma* cuando se nos presentan a nuestra razón como teniendo una "silueta" muy parecida. Por la misma razón un estudiante habla con bastante propiedad de *formas triangulares, cuadradas y redondas*, pero se muestra limitado cuando se le pide que justifique o describa las características que debe tener una *forma* para ser *triangular, cuadrada o redonda*. Este concepto de *forma*, poco riguroso, desde el punto de vista matemático, es útil a la solución de problemas cotidianos e indispensable a la construcción del concepto geométrico de *forma*.

C-d. El alumno recordará que para poder determinar la *forma geométrica* de una figura en particular deberá reconocer o identificar en la figura dada :

- El número de puntos particulares, específicos.
- El número y tipo de líneas.
- El número de *segmentos de recta* y ángulos que aparecen.
- Las posiciones relativas entre:
  - Puntos particulares con puntos particulares.
  - Puntos particulares con líneas específicas.
  - Puntos con ángulos.
  - Líneas con líneas.
  - Líneas con ángulos.
  - Angulos con ángulos.

con el objeto de *identificar las relaciones entre parejas de elementos geométricos fundamentales* de que esté formada la figura. Como ejemplo la Fig. 2 muestra una serie de figuras, de las cuales, las que aparecen en un mismo cuadro tienen la misma *forma* en virtud de que tanto el número y tipo de sus elementos fundamentales, así como las relaciones que hay entre todas las parejas de ellos es la misma.

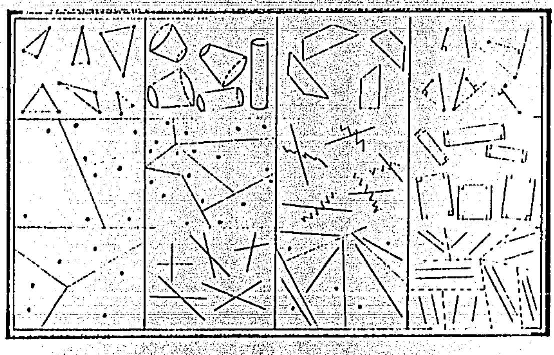


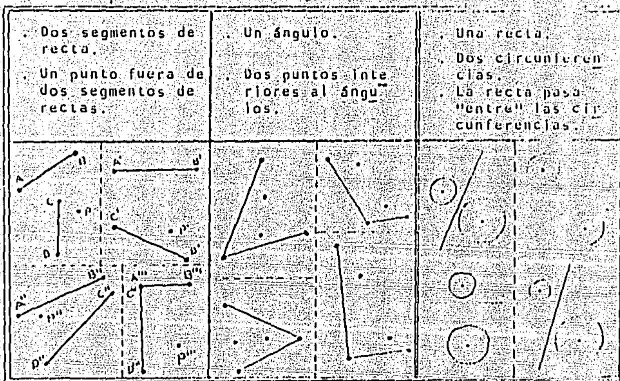
FIG. 2.

C-e. Con el objeto de poder proporcionar figuras particulares, específicas, que muestren una forma determinada, el alumno deberá :

- Identificar los elementos cuantitativos que aparecen en la *forma*.
- Asignar valores particulares "adecuados" a las magnitudes

mensurables determinadas en el punto anterior. "Adecuadas" porque puede ocurrir que entre las magnitudes geométricas (segmentos y/o ángulos) exista alguna relación fija que imposibilite una arbitraria selección de valores. Por ejemplo, la Fig. 3 muestra en cada uno de los cuadros figuras que tienen todas ellas la *misma forma*, la cual se explicita en la parte superior del cuadro.

FIG. 3.



C-f. Cuando el alumno ha recordado suficientemente lo relacionado con *forma geométrica* se pasa al objetivo fundamental de la Euclideana: *establecer relaciones entre elementos geométricos que correspondan a una forma geométrica determinada*. Por ejemplo, el estudiante deberá recordar que cuando en la Geometría Euclideana se demuestra que:

" Los ángulos opuestos por
el vértice son iguales" ;

se está estableciendo una proposición matemática que formula una relación matemática (en este caso la igualdad en la medida de dos ángulos) entre elementos de una *forma geométrica* (en este caso la formada por dos rectas que se intersecan en un punto).

RESUMIENDO : En cuanto a Geometría Euclideana será necesario que el estudiante recuerde, este familiarizado y tenga experiencia en el manejo de conceptos de *punto, curva, superficie, plano, lugar geométrico - y la mayor cantidad posible de ellos, tanto en figuras como estableciendo la propiedad geométrica que satisfacen sus puntos - y por último, ideas lo más clara posibles, acerca del concepto de forma geométrica.*

TEMA 3

CONCEPTO FUNDAMENTAL DE LA GEOMETRIA ANALITICA:

Sistema de Coordenadas. Su construcción.

I. introducción.

PONGAMOS, LADO A LADO, *relaciones entre variables* (o sea Ecuaciones) y *lugares geométricos*. A simple vista, por más que se observen, es imposible ver, vislumbrar o reconocer su *equivalencia*, que son lo mismo, que son dos formas distintas de expresar la misma idea. Hay que conocer los rudimentos de la Analítica para reconocer su equivalencia.

Se puede conocer muy bien, con mucho detalle, con profundidad y de manera exhaustiva conceptos, reglas, leyes, métodos, algoritmos del Algebra elemental y no habrá nada en ella que permita llegar, entrar o iniciar los conceptos más elementales de la Geometría Analítica. En otras palabras, se puede ser todo un especialista en el manejo de conceptos algebraícos, y con todo ello no encontrar uno sólo que nos pueda llevar de manera natural a los primeros conceptos analíticos. Exactamente lo mismo se podría decir de los conceptos de la Geometría Euclideana. Es más, aún conociendo de manera profunda, no sólo la obra de Euclides sino también la de sus sucesores, como Apolonio, en quien se ha querido ver un predecesor de la Analítica, no se hallará en toda ella un sólo concepto que de manera directa conduzca a conceptos analíticos.

Pasar del Algebra y de la Euclideana a la Analítica no es fácil. No fué fácil en la historia : requirió todo un cambio de mentalidad, un ver de manera diferente a las Matemáticas. Muy llanamente se podría decir que a principios del Siglo XVII había ciertos individuos con una mentalidad euclideana y otros con mentalidad algebraica y esto los hacía actuar -en Matemáticas- de una manera particular, específica, porque en Matemáticas, como en cualquier otro trabajo, la forma de hacerlo, los instrumentos con que se hace, el mundo conceptual en que actúan nuestras capacidades y habilidades mentales conforman y "deforman" nuestra estructura mental, de tal suerte, que al rato, nuestras creencias, nuestras conceptualizaciones o en síntesis, nuestra forma de ver el mundo está determinada por esta estructura mental.

A primera vista parecería que Algebra y Euclideana son mundos conceptuales completamente distintos, máxime cuando uno acepta, sin más análisis, afirmaciones como que *el Algebra es la Ciencia del Número y la Geometría es la Ciencia del Espacio*. Frases perniciosas, si las tomamos literalmente, en virtud de que erigen una "cerca" que divide en partes ajenas, sin contacto, sin puntos en común, al Algebra con la Geometría. No es necesario ser un especialista en Historia de las Matemáticas para reconocer que los Griegos estudian la Geometría impulsados, en parte, por la necesidad de resolver problemas difíciles a los que su Aritmética los había llevado. Con su Geometría inician y desarrollan, de manera completísima, toda una forma de tratar el Número, sólo recuérdese, a manera de ejemplo, dos apartados de la obra de Euclides : la llamada "Algebra Geométrica" y toda la "Teoría de las Proporciones". El Algebra, con sus "garabatos", tampoco es ajena a las cuestiones puramente geométricas. Desde su forma más rudimentaria, con los Egipcios, aparecen reglas que permiten calcular longitudes, áreas y volúmenes. En lo que sí debemos estar de acuerdo es en que la Geometría Euclideana y Algebra son, en su aspecto de lenguaje, formas completamente diferentes de expresar conceptos numéricos.

En todo tiempo y lugar (donde se ha desarrollado), la cantidad,

ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA

lo cuantificable, ha sido el objetivo de las Matemáticas. Se puede decir que hasta inicios del Siglo XVII, el desarrollo del Algebra y la Geometría (o sea de LAS Matemáticas) ocurrió en dos cauces tranquilos y bien definidos pero ajenos uno a otro en cuanto a la forma de abordar los mismos problemas. Acercar y unir ambos cauces requirió de un concepto nuevo, unificador, que no sólo tendiera un "puente" entre ambos cauces y permitiera, con lenguaje más rico, y con un método más poderoso, abordar problemas matemáticos, sino crear toda una nueva concepción de la Matemática. Esta unificación significó toda una ruptura, una transformación en la forma de pensar los problemas matemáticos ; en una palabra, toda una revolución en el campo intelectual. Alejados de los problemas y de los métodos que a principios del Siglo XVII ocupaban a los matemáticos, sólo muy parcialmente podemos valorar la gran transformación de pensamiento que significó la Geometría Analítica.

El que no haya una continuidad natural de los conceptos algebraicos y euclideanos a los de la Geometría Analítica dificulta una enseñanza que se base en el "redescubrimiento" del conocimiento. Pues, así como hubo mentalidades que nunca pudieron pasar de una Matemática empírica a una axiomática, así los hubo, y nada nos garantiza que en la actualidad no los haya, que no pudieron pasar, por sus propios medios, de una mentalidad euclídea a una analítica. Lo anterior nos lleva a una situación en la que si se desea desarrollar, o abordar la Geometría Analítica hay necesidad, mientras no se tenga una propuesta didáctica que ayude a la transición, de presentar "como caído del cielo" el concepto fundamental que lo permita : *el Sistema de Coordenadas*. Este es el concepto que hizo posible la síntesis del Algebra con la Geometría Euclideana, a que se hizo mención en el punto III-3 del primer Tema (en el que se dá una presentación resumida de las características y objetivos de la Geometría Analítica) del Programa del curso, y que ahora se abordará con detalle.

II. objetivos del tema.

En este Tema se pretende que el alumno :

. ESTABLEZCA el concepto de *Eje Numérico*.

. ESTABLEZCA el concepto de *Sistema de Coordenadas rectangular*.

. CONSTRUYA ejes numéricos y Sistemas de Coordenadas rectangulares.

. RECONOZCA la importancia del concepto *Plano Cartesiano* para la Geometría Analítica y los aspectos arbitrarios en su construcción.

. CONOZCA algunos usos (fuera de las Matemáticas) que se dan a los Sistemas de Coordenadas.

. Se EJERCITE en la *sistematización de información que ya conoce.*

III. observaciones a los **objetivos** y algunas sugerencias metodológicas.

El papel del Sistema de Coordenadas en la Geometría Analítica lo constituye el ser el medio que permite realizar los procesos fundamentales que tienen lugar en ella. Uno de tales procesos es el de *asociar a un punto un número*. Por otro lado, dado que un *punto* se puede encontrar en una línea, sobre una superficie o en el espacio, antes de proceder a la construcción del Sistema de Coordenadas de dos dimensiones, que será el único que se utilice a lo largo del curso, es menester que el estudiante sea conciente de la necesidad del uso de Sistemas de Coordenadas de una, dos y tres dimensiones, de acuerdo al lugar donde se encuentren los puntos de que se trate.

1. *NECESIDAD Y UTILIDAD DE Sistemas de Coordenadas DE DISTINTAS DIMENSIONES.*

En este momento se puede pedir a los estudiantes que recuerden situaciones conocidas por ellos en donde se trate de *asignarle números a puntos*. Hay que ayudarlos aclarándoles que en estos casos lo que interesa es "fijar" la posición de un determinado punto. Por su experiencia, en general mencionan situaciones como los mapas, las carreteras con sus señales de kilometraje, el juego de Ajedrez, un juego de mesa llamado Submarino, la determinación de posiciones de barcos y aviones, etc. Hay que "llevarlos" a que describan con claridad y precisión cómo se efectúa en cada caso la localización de puntos pero, lo que interesa, por el momento, es que el estudiante se dé cuenta dónde se encuentran los puntos que está localizando ; sobre una línea en el caso de la carretera, sobre un plano en el caso del mapa, del Ajedrez, del juego de mesa, de la posición del barco, y en el espacio para el caso del avión. Lo anterior, como se dijo, tiene por objetivo hacer conciente al estudiante de que los *puntos* se encuentran sobre una línea, una superficie o en el espacio y que en consecuencia, si una de las funciones del *Sistema de Coordenadas* es asignarle a *puntos, números*, dependiendo de dónde se encuentre el punto, así habrá necesidad de un Sistema de Coordenadas para ello. No hay que escatimar recursos para esto, recordemos que lo que aparentemente es más simple, ha sido lo más difícil de aclararse y que se está en los meros inicios de la *Geometría Analítica*. Pongámos un ejemplo : La Ciencia Ficción puede ayudar al logro de este objetivo. Si imaginamos que hay seres que están condenados a vivir sólo sobre una recta, sobre un plano o en el espacio, uno se puede preguntar cómo podrían ser sus movimientos. No es difícil que los alumnos lleguen a la conclusión que sobre una línea los individuos pueden avanzar o retroceder y nada más; en un plano, a lo anterior se añade el poder desplazarse sobre toda la superficie, lo que permite "pasar" de una línea a otra, algo que no se puede hacer en una dimensión; en el espacio, por último, se está en posibilidades de realizar los movimientos de una y dos dimensiones aunados al poder desplazarse por todo él, lo que permite "pasar" de una superficie a otra, lo cual no se podía hacer cuando se estaba confinado a dos dimensiones. Si por alguna razón, sobre una superficie existiera un individuo que puede "saltar" y reliza un salto para caer en otro punto de la superficie, este hecho sería visto por los seres bidimensionales como algo "milagroso" e inexplicable. Este ha sido uno de los recursos de la Ciencia Ficción para dar cuenta de las "desapariciones" de barcos y aviones que supuestamente ocurren en el Triángulo de las Bermudas. En fin, esto es sólo un ejemplo.

El estudiar situaciones concretas que conlleven la necesidad de asociarle números a puntos, para la "localización" de estos últimos, propicia a que en la clase de Matemáticas el estudiante perciba la relación de éstas con otros conocimientos. Se pueden asignar pequeñas investigaciones, de carácter informativo, para con posterioridad ser expuestas a sus compañeros en breves intervenciones de a lo más diez minutos. Este trabajo ayudará a fomentar en el estudiante el hábito de la lectura, el saber utilizar los servicios de la Biblioteca, ampliar sus conocimientos científicos y humanísticos, desarrollar y corregir sus técnicas en la elaboración y presentación de trabajos académicos, así como proporcionar elementos que le permitan definir o aclarar sus intereses vocacionales. Como temas de investigación se sugieren, entre otros, los siguientes : Historia de los Mapas, Problemas de Navegación en la Epoca de Cristóbal Colón, Formas de situar la posición de barcos, aviones y submarinos en la actualidad, El Espacio en la Ciencia Ficción y el Ajedrez. Para la realización de estos trabajos se recurrirá a dos fuentes : bibliografía adecuada, pero sobre todo, entrevista a personas que realizen o estén estrechamente relacionadas con la temática propuesta.

Cuando se considera que el alumno ha cobrado conciencia de la *necesidad e importancia de los Sistemas de Coordenadas* de una, dos o tres dimensiones, se pasará a tratar sobre la construcción de los de una y dos, lo que constituye el objetivo principal de este Tema, en virtud de que, en realidad, este curso se tratará solamente con la Geometría Analítica Plana. En seguida se hacen consideraciones de carácter general que pudieran tomarse en cuenta en la presentación de este Tema, que por lo común no sólo es por donde normalmente se inician los cursos, sino que aún los mismos libros de Geometría Analítica.

2. *El Sistema de Coordenadas Cartesiano. SU CONSTRUCCION.*

Los *Sistemas de Coordenadas*, o mejor, *el Sistema de Coordenadas Cartesiano*, de dos dimensiones, es algo que el estudiante conoce cuando llega al bachillerato. Su presentación a este nivel tratará de hacer conciencia en el alumno de lo "arbitrario", y por lo tanto, *convencional*, que es el Sistema de Coordenadas que acostumbra usar.

¿ Qué justifica que entre las rectas que forman el sistema de coordenadas, de dos dimensiones, haya un ángulo de 90° ?. ¿ Qué justifica la Unidad de medida que se usa para efectuar la partición de los Ejes ?. ¿ Qué justifica el que a los puntos de los Ejes que están a la "derecha" o hacia "arriba" del punto de intersección de los mismos se les asocien números positivos y a los que se encuentran a la "izquierda" o hacia "abajo", negativos ?. La respuesta a la que debe llegar el estudiante es que *no hay ninguna razón* -que no sea la costumbre, lo convencional-, y que por lo tanto, podrían ser de otras maneras : que el ángulo entre las rectas no sea de 90°, que los números positivos o nagativos se podrían colocar en posiciones contrarias, Etc..Sin embargo, si cada uno lo hiciera como mejor gustara, sin un mínimo de convenciones, habría el terrible inconveniente de la anarquía en los Sistemas de Coordenadas que se usaran, lo que dificultaría la comunicación y socialización de resultados entre distintos individuos, y por lo tanto, el desarrollo de la Ciencia, como proceso colectivo, se vería obstaculizado. La necesidad, de socializar el conocimiento, nos lleva a la resolución de "ponernos de acuerdo" en un mínimo de características que reunan los Sistemas de Coordenadas que usaremos, y en el mejor de los casos, servirse de una sóla presentación.

Se intenta hacer conciente al estudiante de lo necesario que son las *convenciones*, para uniformar usos en conceptos y lenguaje. Hay que dejar claro que un *acuerdo*, o una *convención*, no debe tener como conclusión el erigir en "absolutos" a conceptos o procedimientos, que su uso generalizado propicia. Se usa un Sistema de Coordenadas Rectangular, pero muy bien se podría usar otro.

En virtud de que en cursos anteriores el estudiante ya ha trabajado con el Sistema de Coordenadas Cartesiano, el procedimiento de su construcción será una conclusión a la que se llegue por aportaciones personales -y sus respectivas rectificaciones, si hay necesidad- de los miembros del grupo. A la pregunta : ¿ cómo se construye el Plano Cartesiano ?, por lo general el alumno contesta de manera ambigua o imprecisa. Señala algunos aspectos y omite otros, confunde conceptos como línea, por línea recta. *Hay que tener paciencia para no desesperarse, y en consecuencia decirles, lo uno quisiera que digan.* Habrá que conducirlos a que por sí mismos logren reunir una serie de ideas que mantienen dispersas, y que en tanto se mantengan en dicho estado de incoherencia, no podrán visualizar al *Sistema de Coordenadas* como la síntesis de una serie de *conceptos* y *convenciones*.

Los *conceptos* que se utilizaran al construir el Sistema de Coordenadas, de una o dos dimensiones son : punto arbitrario (origen de coordenadas), línea recta, superficie plana, unidad de medida, número entero, punto, rectas perpendiculares. Entre las *convenciones* que se siguen en la construcción del Sistema de Coordenadas están : "la unidad de medida es arbitraria", al igual que la posición de la o de las líneas rectas en el plano euclideano y del origen de las líneas rectas"; "a los puntos marcados a la *derecha* del origen, sobre la *línea horizontal*, se les asocia números positivos y a los que se encuentran a la *izquierda*, números negativos"; "a los puntos marcados *hacia arriba* del origen, sobre la *línea vertical*, se les asocian números positivos y a los que se encuentran *hacia abajo*, números negativos"; "el sentido positivo en los ejes se denota con una punta de flecha"; "al origen de coordenadas se le asocia el número cero";

"las líneas rectas que forman el Sistema de Coordenadas de dos dimensiones se cortan en el origen"; "el ángulo que forman entre sí las dos rectas es de 90°".

RESUMIENDO : El estudiante deberá, al final de este Tema, haber llegado a reconocer y a enunciar, por sí mismo y de manera ordenada, los distintos pasos que se siguen en la construcción de un Sistema de Coordenadas de una y dos dimensiones; adquirir los conceptos de *Sistema de Coordenadas* de una dimensión y el de *Sistema de Coordenadas* Rectangular; reconocer que las *convenciones* o *acuerdos* tienen lugar en las Matemáticas.

TEMA 4

LOS DOS PRIMEROS PROCESOS FUNDAMENTALES DE LA GEOMETRIA ANALITICA:

I. Asociar números a puntos
II. Asociar puntos a números

I. introducción.

UNA VEZ QUE el estudiante conoce y puede construir un *sistema de coordenadas*, tanto de una como de dos dimensiones - rectangular para el segundo caso - está en condiciones de abordar los dos primeros procesos de la Geometría Analítica: *asociar a un número real un punto* y *a un punto un número real*.

II. objetivos del tema.

En este TEMA, el alumno:

. CONOCERA el procedimiento que se sigue para asignar a un *número real*, un *punto* en el " eje numérico ".

. ENCONTRARA en el "eje númerico" el *punto* que corresponde a un *número real* dado.

. CONOCERA el procedimiento que se sigue para asignar a una *pareja ordenada de números reales* un *punto* en el *plano cartesiano*.

. ENCONTRARA en el " plano cartesiano " el *punto* que le corresponde a una *pareja ordenada* de *números reales*.

. CONOCERA el procedimiento que se sigue para asignar a un *punto* en el " eje numérico" , un *número real*.

. ENCONTRARA el *número real* que corresponde a un *punto* dado en el " eje numérico".

. CONOCERA el procedimiento que se sigue para asignar a un *punto* dado en un *plano cartesiano* , una *pareja ordenada* de *números reales*.

. ENCONTRARA la *pareja ordenada* de *números reales* que le corresponde a un *punto* dado en un *plano cartesiano*.

. CONOCERA las limitaciones prácticas que se tienen al realizar estos dos procesos fundamentales.

. VALORARA el papel que el *sistema de coordenadas* desempeña en los dos procesos fundamentales desarrollados en este TEMA.

III. observaciones a los **objetivos** y algunas sugerencias metodológicas.

1\. *PRIMER PROCESO FUNDAMENTAL DE LA GEOMETRIA ANALITICA: asociar a un número, un punto.*

Tratemos el proceso que hace corresponder a un número, un punto. En este caso, y para este curso, hay que distinguir dos situaciones:

a. Cuando se tiene un número real.

b. Cuando se tiene una pareja de números reales.

1.a. *Asociar a un número real dado, un punto sobre un eje coordenado conocido.*

Cuando se dá un número real, se supone que el punto que se le asignará se encontrará sobre el *eje cartesiano*, que también se supone dado. En otras palabras, el punto que se asocie al número dado, no se va a encontrar en cualquier lugar, sino sobre el eje coordenado que de antemano se ha especificado. Así, lo más correcto sería decir: " asignar a un número real dado, un punto sobre un eje coordenado conocido ".

Asignar a un número real un punto, presenta sus dificultades. Será más o menos fácil de " encontrar " el punto, dependiendo del número que se tarte. El estudiante deberá ser capaz de " encontrar " el punto asociado a números *enteros*, *racionales* e *irracionales*, que sean de la forma $\sqrt{n}$ / m , donde " n " es número natural y " m " es un número entero diferente de cero. Con los números enteros no hay problema, pero con los racionales, habrá que mostrar o recordar el procedimiento euclídeo de dividir un segmento en un número arbitrario de partes iguales con regla y compás. Para los irracionales de la forma $\sqrt{n}/m$, con las características antes mencionadas, primero, hay que familiarizar al estudiante en la construcción de irracionales del tipo $\sqrt{n}$ como la hipotenusa de ciertos triángulos rectángulos, y después repetir el proceso anterior. Lo último plantea la necesidad de que el estudiante también recuerde: el concepto de triángulo rectángulo, el Teorema de Pitágoras, el concepto de raíz cuadrada de un número positivo y la propiedad de que " el cuadrado de la raíz cuadrada de un número, es el mismo número "; conceptos, todos ellos, vistos en sus cursos anteriores.

1.b. Asociar a una pareja de números reales un punto en el Plano Cartesiano.

En Algebra, el estudiante ha trabajado con "números aislados". Un concepto nuevo, fundamental, diferente a todos los manejados en el curso de Algebra y que ahora se presenta, es el de *pareja ordenada* de números reales.

En su momento, los *números negativos* fueron "nuevos", con respecto a los naturales. De igual forma, las "parejas de números" son "nuevos" y diferentes a todos los tipos de números conocidos. Se deberá insistir en que si bien están formados de dos números reales, la pareja se deberá ver como un *todo* , al margen de sus componentes. Para tratar de evitar que estas parejas de números se vean como que obedecen a un puro capricho, se presentarán situaciones que lleven a encontrar parejas de números. Por ejemplo, la base y el área de triángulos, que tengan la misma altura, dan lugar a parejas ordenadas de números, en donde la primera componente de la pareja representa la base y la segunda, su área; la velocidad que lleva un automóvil y el tiempo de recorrido dan origen a parejas ordenadas de números, y así por el estilo: habrá que proporcionar al estudiante una colección grande de circunstancias que den lugar a parejas ordenadas de números. Bien escogidas estas situaciones, permitirán que el alumno infiera algunas propiedades que presentan las parejas, como por ejemplo, el que si se invierte el orden de las componentes, se obtiene una pareja que ya no es igual a la anterior, así como realizar generalizaciones, una de las cuales podría ser el encontrar situaciones que den origen a ternas ordenadas de números. Por otro lado, es conveniente que el estudiante construya parejas ordenadas, ya sea en forma arbitraria, un tanto al "azar", y también estableciendo "requisitos" que deban cumplir sus componentes, esto con el objeto de "ir llevando" al estudiante hacia los otros procesos fundamentales de la Analítica: asociar a una ecuación una gráfica y recíprocamente. Otro aspecto en el que hay que reparar es en la *notación* que se deberá seguir al escribir las parejas ordenadas. Se concluye este punto del TEMA cuando el estudiante aprende el procedimiento técnico que se sigue para asociar a una pareja ordenada de números reales un punto en el Plano Cartesiano. Para este proceso hay que remarcar el hecho de que el punto que se le asocia a la pareja no es un punto cualquiera, que esté en cualquier lugar, sino que será un punto de un Plano Cartesiano que ha sido escogido de antemano. Posiblemente haya necesidad de recordarle al estudiante algún procedimiento geométrico, de los que hay, para trazar paralelas a una recta por un punto fuera de ella.

2. *Segundo proceso fundamental de la Geometría Analítica:* ASOCIAR A UN PUNTO DADO, UN NUMERO.	Para este proceso también hay que distinguir dos situaciones: a. El punto está sobre el eje real. b. El punto está en el Plano Cartesiano. Al igual que en el caso anterior, se dá por hecho que el sistema de coordenadas está " dado " sobre la recta o sobre el plano, y no está a voluntad de escogerlo.
2.a. *Asociar a un punto dado, sobre el eje real, un número real.*	Dado un punto y un sistema de coordenadas, ambos sobre la misma línea recta, habrá que distinguir dos casos en cuanto a la posición del punto dado: primero, el punto coincide con un punto de la partición del sistema coordenado unidimensional; segundo, el punto dado no coincide con un punto de la partición del sistema coordenado unidimensional. Para el primer caso, el alumno conocerá que el número que se le asocia a dicho punto no es otro que aquel que aparezca asociado para tal punto en el sistema de coordenadas. En el segundo caso se plantea la dificultad entre el número que teóricamente le corresponde y aquel que es resultado del proceso empírico que se sigue para encontrarlo. Este último, conlleva todas las dificultades de la medición. De acuerdo a este procedimiento a estos puntos, a lo más, se les pueden asociar números racionales. El estudiante debe llegar a tener claro este aspecto.
2.b. *Asociar a un punto en el Plano Cartesiano, una pareja de números reales.*	Pasar del caso unidimensional al bidimensional, no plantea mayores dificultades. Lo realmente nuevo consiste en la forma de reducir este caso al anterior, lo cual se logra encontrando los puntos donde las paralelas a los ejes, trazadas desde el punto dado, intersecan a dichos ejes. Un concepto difícil para el estudiante, y que tiene que ver con ambos procesos fundamentales de la Analítica aquí tratados, es acerca de la *unicidad* de resultados a que ambos conducen. Al estudiante se le puede justificar lo anterior recurriendo a la unicidad del punto de intersección de dos rectas, y a la unicidad de paralelas a una recta dada, por un punto exterior cualquiera; ambos principios fundamentales para la Geometría Euclideana y que siguen siendo válidos para la Analítica. Para finalizar, y una vez que el estudiante se ha familiarizado con los sistemas de coordenadas de una y dos dimensiones -rectangulares- y con los dos procesos anteriores, sería conveniente que el profesor le presente, como simple breviario cultural, y sin que necesariamente forme parte de este programa, otros sistemas de coordenadas que son usuales en matemáticas, haciendo notar las ventajas que se tienen al contar con una gran variedad de ellos.

TEMA 5

PRIMER ACERCAMIENTO AL TERCER Y CUARTO PROCESOS FUNDAMENTALES DE LA GEOMETRIA ANALITICA

III. Asociar a una ecuación una gráfica, por el método de tabulación y graficación.

IV. Asociar a una gráfica una ecuación, mediante un proceso inductivo.

I. introducción.

ANTES DE SISTEMATIZAR y formalizar el mundo se tiene que experimentar, vivir. Las abstracciones son abstracciones de algo concreto; su familiaridad y vivencia son prerrequisitos para una formalización con sentido. Las grandes generalizaciones, los grandes esquemas formales son -y deberían ser en la enseñanza- resultados posteriores a un gran trabajo previo de carácter experimental, empírico, inductivo, observacional, de prueba y error. La historia del conocimiento y algunos resultados de la Sicología moderna así lo muestran. La finalidad de todo este trabajo empírico será proporcionar el material, el contenido, la sustancia, el sostén de los esquemas formales, de las ideas abstractas, de los modelos, de las deducciones, etc., que la Matemática, y en general la Ciencia, en un aspecto, desarrolla. Es un error pensar que la vía empírica, como método para resolver problemas, es exclusiva de las técnicas. Los matemáticos también han recurrido a ello. Como tal, no sólo dá ideas para resolver problemas, sino que es fuente de gran variedad de "patrones". Lo anterior es importante ya que la habilidad matemática para resolver un problema depende en gran medida de la sensibilidad hacia los patrones. En mucho, la actividad matemática consiste en encontrar un patrón o regularidad relevante, estudiarlo e intentar descubrir algún significado, alguna regla, alguna fórmula que lo explique o describa. Se cree que el gusto hacia los patrones o regularidades es una característica del pensar matemático. Al identificar un patrón o regularidad se está en posibilidades de realizar una de las funciones básicas de la Ciencia: la predicción.

El método empírico, experimental, de prueba y error, es una forma de obtener conclusiones generales después de considerar ejemplos específicos. En él, la medición, el cálculo, la representación diagramática, la construcción de un modelo material, la observación, la analogía, la generalización, la inducción, entre otros, son sus procesos fundamentales y cuando se usa es necesario repetir mediciones, cálculos, observaciones, tantas veces sea necesario, para ver si el patrón siempre se obtiene. Sin embargo, es claro que no podemos agotar todos los casos concretos, específicos, y en consecuencia, no podemos estar seguros de que nuestras conclusiones se aplicarán a todos los casos particulares de que se trate. Así, el método empírico, fundado en la inducción, nos dá una respuesta que sólo *probablemente es cierta*. Esta es su principal limitación. No obstante esto, si se acepta que primero se experimenta el mundo y luego se hacen modelos y se le ordena logicamente, el método empírico, que trabaja con material "concreto" es, por experiencia histórica, una forma de hacerlo. Es pertinente, en este momento, una aclaración. Algunos entienden "trabajar con material concreto" el construir triángulos o bisectrices con madera o alambre y materializar con triplay la proposición "los ángulos opuestos por el vértice son iguales". Es cuestionable el uso -en el bachillerato- de objetos físicos, cuando la utilidad que se les asigna es hacer réplicas materiales de teoremas matemáticos. Cosa distinta sería si se le usara en la construcción de modelos para resolver algún problema práctico. Pero no es en este sentido en que se está usando la palabra "concreto". De momento, el significado que se le asigna a "concreto", es en el sentido de "particular", "individual": hablar de *esta ecuación* y no de *LA ecuación*. Se habla de lo concreto como opuesto a lo abstracto, en sus aspectos de genérico, general, aplicable a muchos. Al decir que la empiria precede a lo abstracto, se significa que las *leyes generales* se reconocen o se infieren a través de casos particulares en que se manifiestan. Moise escribe: "una parte importante del aprendizaje de las Matemáticas consiste en reconocer *leyes generales* que sugieren propiedades válidas que se manifiestan en casos concretos, particulares. Por ejemplo, una ojeada a los enunciados 3 + 5 = 8, 9 + 5 = 14, 11 + 17 = 28, puede hacernos pensar que *la suma de dos números impares cualesquiera, es un número par*". Trabajar casos concretos proporciona ideas, sugiere propiedades, origina conjeturas, proporciona elementos que, o bien plantean un problema general o permiten vislumbrar una ley general. La demostración de la conjetura es posterior.

Uno de los objetivos fundamentales de este TEMA y de los tres siguientes es proporcionar, por vía empírica e inductiva, vivencias y experiencias en los procesos fundamentales de la Geometría Analítica; vivencias y experiencias que constituirían el sustrato empírico sobre el cual poder constuir, en el noveno TEMA del programa, una formalización de los procesos fundamentales de la Analítica.

Se puede decir que lo que resta del programa, son *acercamientos* distintos a los procesos analíticos que asocian a una *ecuación* una *gráfica* y a una *gráfica* una *ecuación*. El primer enfoque (TEMAS cinco y diez) es de naturaleza fundamentalmente empírica: cálculo, medición y representación gráfica son su fundamento. El segundo tratamiento (TEMAS seis, siete y ocho) es un enriquecimiento del anterior, y en él tienen lugar procesos más complejos que aparecen en el método inductivo, como son el de establecer propiedades de carácter general como consecuencia del análisis de casos concretos o específicos. El tercero (TEMA nueve), el último, una especie de pura deducción. En él, a partir de la propiedad geométrica que define un lugar geométrico, se "deduce" la ecuación que le corresponde.

II. objetivos del tema.

En este TEMA, el alumno:

. CONOCERA un método general de abordar el proceso analítico que asocia a una ecuación con dos variables reales una gráfica en un Plano Cartesiano.

. RECONOCERA que no existe un método general "simple" de abordar el proceso analítico que asocia a una gráfica una ecuación.

. CONOCERA el concepto de *gráfica asociada a una ecuación con dos variables reales.*

. CONOCERA distintas formas equivalentes de establecer la *gráfica* de una ecuación con dos variables reales.

. CONOCERA que el método de *tabulación y graficación* es un procedimiento general para abordar el proceso analítico que asocia a toda ecuación con dos variables reales una gráfica en un Plano Cartesiano.

. CONOCERA en que consiste el método de *tabulación y graficación.*

. APLICARA el método de *tabulación y graficación* a ecuaciones algebraicas con dos variables reales de las que son usuales a este nivel.

. RECONOCERA los problemas " prácticos " que aparecen cuando se desea trazar la gráfica que pasa por un número finito de puntos.

. CONSTRUIRA colecciones de parejas ordenadas de números reales cuyas ordenadas (para la misma colección) guarden la misma relación con sus correspondientes abscisas.

. INFERIRA, a partir de una colección de parejas ordenadas de números reales cuyas ordenadas estén relacionadas con sus abscisas por medio de una relación algebraica "simple", la *ecuación* asociada a dicha colección de parejas ordenadas.

. RECONOCERA el papel que la *unidad de medida* escogida desempeña en la construcción del sistema de coordenadas al obtenerse gráficas cuyas formas pueden verse modificadas por la elección de diferentes unidades de medida.

. Se EJERCITARA en el cálculo de operaciones algebraicas elementales.

. Se EJERCITARA en el trazado de gráficas cartesianas.

. OBTENDRA *vivencias y experiencias* empíricas e inductivas en los procesos analíticos que se estudian en este TEMA.

III. observaciones a los **objetivos** y algunas sugerencias metodológicas.

1. CONCEPTOS de SOLUCION y GRAFICA de una ECUACION CON DOS VARIABLES REALES.

Cuando en un curso de Algebra Elemental de habla de ecuaciones, por lo general se hace referencia a aquellas que reúnen los requisitos necesarios para resolverse utilizando un algoritmo. Por tal razón casi nunca se habla de *una* ecuación con dos variables. Más bien, de lo que se habla es de sistemas de dos ecuaciones con dos variables. Por lo anterior, antes de estudiar con detalle los procesos analíticos a que está dedicado este TEMA es conveniente que el estudiante se familiarice con *una ecuación que tenga dos o más variables y con lo que se va a entender por su solución*. Al estudiante le debe quedar claro que un método general de encontrar soluciones de una ecuación con varias variables es asignar valores arbitrarios a todas las variables, *excepto una*, y a continuación realizar las operaciones indicadas que produzcan el valor de la variable restante. Cuando al estudiante le quede claro el concepto de *solución para una ecuación con dos o más variables*, estará en posibilidades de comprender el concepto de *gráfica asociada a una ecuación*. Si bien por gráfica entendemos, generalmente, una curva contínua, el estudiante conocerá que hay otras formas lógicamente equivalentes a ella.

Por otro lado, es necesario que antes de empezar a desarrollar los procesos analíticos que aborda este tema es conveniente que el estudiante conozca lo que se entenderá por un método general de resolver cierto tipo de problemas.

2. METODO DE "TABULACION Y GRAFICACION" para ecuaciones con dos variables reales.

Dada una ecuación con dos varaibles, se entiende por: *método de tabulación y graficación* al siguiente conjunto de instrucciones:

1. Se decide cuál de las dos variables será la *variable independiente*.
2. En caso de que la *variable dependiente* no esté despejada, se despeja, porque esto facilitará los cálculos que se realizarán posteriormente.

3. Se decide qué valores se le asignarán a la variable independiente.
4. Cada valor de la variable independiente se sustituye en la relación despejada y se efectúan los cálculos para encontrar el valor que le corresponde a la variable dependiente.
5. Se forman las parejas ordenadas de números reales en donde la primera componente es el valor asignado a la variable independiente y la segunda componente es el valor de la variable dependiente que se ha calculado para el correspondiente valor de la variable independiente.
6. Se representa cada pareja de números en el Plano Cartesiano, respetando el uso y costumbre de representar la variable independiente en el eje de las abscisas y la variable dependiente en el eje de las ordenadas.
7. Los puntos que se obtuvieron al representar las parejas de números reales, se unen con una línea contínua.

En estos puntos hay aspectos que requieren aclaración, o ser acotados:

i. Cuando se habla de ecuaciones se está haciendo referencia sólo a las que usualmente se estudian a este nivel. Nada que tenga que ver con exponenciales o logarítmicas, por ejemplo.

ii. Algunos aspectos de este TEMA serán recordatorio de los cursos de Algebra. Conceptos como el de *variable independiente* y de *variable dependiente*, es algo que el estudiante ya conoce por tales cursos. Vale la pena mencionar que cuando acá se usan los términos *variable independiente* y *variable dependiente*, se están usando en el sentido que le dá la Matemática tradicional, al estilo de la presentación que hace Lehmann o Granville, por ejemplo.

iii. Es importante hacerle notar al estudiante lo "relativo" que son los conceptos de *variable independiente* y *variable dependiente* y de su carácter intercambiable desde el punto de vista matemático.

iv. En el "método de despeje" que siga el estudiante, será conveniente que utilice propiedades de la igualdad y de operaciones, en virtud de que este procedimiento proporciona un método adecuado y seguro para trabajar con expresiones algebraicas de cierta complejidad.

v. En la decisión de los valores que se le asignarán a la variable independiente hay una especie de "prejuicio" en los estudiantes. Normalmente los valores que se le asignan son números naturales. Se trata de que el estudiante llegue a aceptar, de manera conciente, que los valores que a la variable independiente se le pueden asignar son todos aquellos que ella admite de acuerdo a las operaciones en que participa, y haciéndole ver, al estudiante, lo conveniente que es asignar elementos que se encuentren en los diferentes conjuntos de números que la ecuación admite, en virtud de que esto permitirá observar el comportamiento de la gráfica de manera más completa.

vi. Se deberá concientizar al estudiante de que cada pareja de números ordenados, que ha encontrado para la ecuación dada, constituye *una solución* para tal ecuación. El estudiante comprenderá que al *tabular* lo único que ha hecho es encontrar soluciones a la ecuación dada. Si fuese posible, se llevará al estudiante a que sea capaz de encontrar soluciones, a una ecuación de más de dos incógnitas por el método de tabulación, y deberá inducir que en cada caso el número de variables independientes deberá ser menor en *uno*, al número de incógnitas que tenga la ecuación.

vii. Lo establecido en las instrucciones 6 y 7 plantea sus dificultades. La cuestión fundamental que el estudiante deberá comprender es que entre dos puntos consecutivos que ha trazado, hay una infinidad más. La "mejor" forma de convencerse de ello es que encuentre más puntos entre dos consecutivos que ya tenga, lo cual puede hacerse en virtud del número infinito de valores que se le pueden asignar a la variable independiente entre dos valores diferentes cualesquiera, previamente asignados. Haciéndolo con un número "suficiente" de puntos, es casi seguro que llegará a intuir lo que se quiere decir con l í n e a c o n t í n u a y a descartar "líneas caprichosas" como uniones de puntos consecutivos.

viii. Sería conveniente que las ecuaciones seleccionadas para graficarse sean de tal índole que le muestren al estudiante algunos tipos específicos de gráficas como podrían ser: infinitas, cerradas, contínuas, discontínuas.

ix. Hasta este punto del programa, nada se ha dicho acerca de la *unidad de medida* que se ha usado al construir el sistema de coordenadas rectangular. Se ha dado por hecho que tal unidad de medida ha sido la misma para los dos ejes de coordenadas. Sin embargo, sabemos que cuando se grafican magnitudes, sobre todo *físicas* no se escoge la misma unidad de medida. El estudiante deberá recordar que la unidad de medida que se usa al construir el Sistema de Coordenadas es convencional. Podemos convenir en usar la misma unidad para efectuar la partición en los dos ejes, o usar u n a para un eje y o t r a para el otro. Lo "único" que ocurrirá es que la gráfica asociada a una ecuación, presentará "*formas*" diferentes o la misma forma pero con "*características*" particulares diferentes, como la inclinación para el caso de la recta, por ejemplo. Por esta razón, el estudiante deberá representar, la misma ecuación con dos variables en Planos Cartesianos, que tengan las particiones en sus ejes construídas con unidades de medida iguales y distintas (una para un eje y otra para el otro eje) . Con esto el estudiante percibirá las "deformaciones" que sufre la gráfica de una ecuación al representarla en Planos Cartesianos diferentes, por el hecho de tener unidades de medida distintas en sus ejes coordenados.

3. DADA UNA GRAFICA EN EL Plano Cartesiano ASOCIARLE UNA ecuación CON DOS VARIABLES REALES.

En torno al segundo objetivo fundamental de este TEMA: dada una gráfica, el estudiante "inferirá" la ecuación que le corresponde, es conveniente hacer algunos señalamientos.

Se entiende por " dar una gráfica " , cualesquiera de las situaciones siguientes:

a. Dar una colección de parejas ordenadas de números.

b. Dar la gráfica en el Plano Cartesiano, con las coordenadas de algunos de sus puntos.

c. Proporcionar únicamente la gráfica representada en el Plano Cartesiano.

En virtud de que las gráficas que se estudiarán, son relativamente " sencillas " , para inferir la ecuación que le corresponde será necesario contar, aproximadamente, con 10 ó 15 pares ordenados de números. Para el tercer caso, cuando sólo se dá la gráfica, el alumno deberá realizar las "mediciones" sobre tales gráficas, con el objeto de obtener las coordenadas de los puntos escogidos. Para esto último recurrirá al proceso fundamental de la Analítica que consiste en : dado un punto en el Plano Cartesiano, asociarle una pareja de números reales.

Es, a partir de la simple inspección de la colección de las parejas ordenadas de números -sin ningún otro recurso matemático- de donde el alumno inferirá la relación matemática que "liga" a las coordenadas. Este problema es terriblemente complicado. No es fácil, aún para alguien con experiencia y conocimientos sobre esto, poder, sin ayuda técnica, encontrar la relación matemática que cumplen *todas la parejas de números*. Generalmente los únicos casos que pueden resolver los alumnos tienen que ver con rectas en "posiciones secillas", no más. Sin embargo, aunque el estudiante no pueda inferir la relación algebraica que "liga" a las variables, es conveniente plantearle distintos tipos de gráficas para que a partir de ellas construya parejas de números, correspondientes a puntos que se encuentren sobre la gráfica. Para aquellos casos en donde el alumno ha encontrado la relación matemática entre abscisa y ordenada, deberá "decidir" cuál será la variable independiente, y cuál la dependiente, así como simbolizar la condición matemática que cumplen los puntos que pertenecen a la gráfica en cuestión, es decir, establecer la ecuación que se le asocia a la gráfica.

Finalmente, se enfatizará, y en este momento los alumnos ya lo han vivido, en la dificultad que entraña el encontrar la ecuación asociada a una gráfica dada. Este problema sería "menos difícil" si tuviésemos una especie de "catálogo" de gráficas y sus ecuaciones correspondientes, ya que en tal caso, al presentársenos una gráfica de la misma forma de alguna de nuestro catálogo, conoceríamos las características generales que tendría la ecuación asociada a ella, y "sólo" nos restaría conocer los elementos particulares de la ecuación que correspondan a las características individuales de la gráfica de que se trate. Esto es, en parte, el objetivo de lo que resta del curso.

Cubiertos los dos aspectos de este TEMA, y a manera de conclusión, se enfatizará en el hecho de la *equivalencia* entre ecuación, tabla de parejas ordenadas de números y gráfica, tres aspectos o representaciones del mismo hecho matemático y se tratará el papel que en la Ciencia han tenido estas tres representaciones.

TEMA 6

SEGUNDO ACERCAMIENTO AL TERCER Y CUARTO PROCESOS FUNDAMENTALES DE LA GEOMETRIA ANALITICA:

III. Asociar a una ecuación una gráfica, analizando las caracteristicas de la ecuación.

IV. Asociar a una gráfica una ecuación, analizando las caracteristicas de la gráfica.

I. introducción.

EL METODO DE "tabulación y graficación" trabajado en el TEMA anterior, permite encontrar la gráfica (entendiendo por *gráfica* el conjunto de puntos cuyas coordenadas cumplen la condición expresada en la ecuación) asociada a *cualquier* ecuación con dos variables reales. No se puede decir lo mismo para el proceso que asocia una ecuación a una gráfica dada. No existe, un método general, fácil, que permita encontrar la ecuación para *cualquier* gráfica que se dé.

El método de "tabulación y graficación" es tan general, que no requiere, para aplicarse, considerar las características individuales de las ecuaciones; basta reparar únicamente en las operaciones algebraicas que aparecen en la ecuación y así, para cuanta ecuación se presente habría que realizar todo el procedimiento y cada una de las ecuaciones se trata como si fuera única y no tuviese nada en común con otras.

Lo más probable es que después de practicar el método de tabulación, el estudiante esté ya "convencido" que a toda ecuación con dos variables reales le corresponde una gráfica en el Plano Cartesiano y sólo una, en virtud de que los dos primeros procesos fundamentales de la Analítica (asociar a un punto un número y el recíproco) dan origen a una relación biunívoca. En este momento la pregunta es : ¿ Habrá forma que sin tabular se puedan conocer las características, y en consecuencia trazar, la gráfica que le corresponde a una ecuación? La respuesta es sí, si la hay. Claro, con sus respectivas limitaciones. En un primer curso de Geometría Analítica, hay grupos de ecuaciones para los cuales esto es posible.

El *método de tabulación y graficación* es fundamentalmente un método empírico. Pero si este método lo enriquecemos con otro de carácter *i n d u c t i v o* que se base en el estudio de "patrones" algebraicos y geométricos; estableciendo correlaciones entre ambos, a través de las "diferencias" y "similitudes" que exhiban, e induciendo resultados generales -que tendrán todas las limitaciones de los resultados inductivos- que se aprecian en comportamientos individuales, es posible llegar a establecer criterios generales, que aplicados a ecuaciones nos permitirán asociarles gráficas, en el Plano Cartesiano, cuyas carcterísticas son tales que se aproximarán "lo bastante" a *la* gráfica que le corresponde a dicha ecuación. Vemos cómo, más o menos, sería esto.

FIG. 1

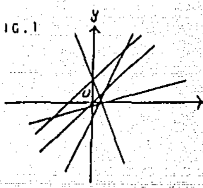
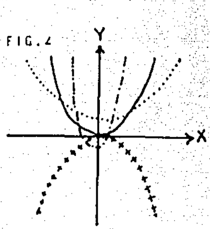


FIG. 2



Al tabular y graficar las ecuaciones $y = x$, $y = x + 5$, $y = 3x - 2$, $y = -4x + 5$, $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}$, se encuentra que las gráficas asociadas a cada una de ellas *son rectas*, FIG. 1, aunque en posiciones diferentes sobre el Plano Cartesiano. Algo parecido ocurre cuando se tabulan y grafican las ecuaciones $y = x^2$, $y = -x^2$, $y = 3x^2 - 5$, $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$. Las gráficas asociadas a cada una de ellas, si bien difieren unos de otras en algunos aspectos, tienen en común el ser de la misma *f o r m a* -FIG. 2-. Por otro lado, si se grafican las ecuaciones $y = x^3$, $y = 3x^3$, $y = 4x^3 + 5$, $y = -3x^3 - 2$, las gráficas asociadas a cada una de

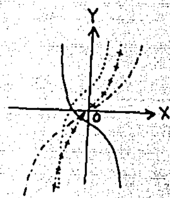


FIG. 3

ellas, sí muestran diferencias entre sí, pero también presentan algo similar, todas ellas tienen la misma *forma*, FIG. 3. Si se compara un elemneto cualquiera, de las tres familias de gráficas, con las de las otras, se las encontrarán completamente diferentes en *forma*, aunque muestren al mismo tiempo alguna similitud, como por ejemplo, el ser contínuas. En resumen, se observan "similitudes" y "diferencias" entre las gráficas que se asocian a las ecuaciones.

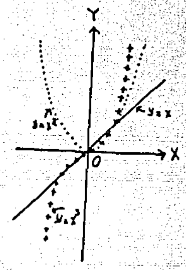


FIG. 4

Por el carácter visual de las gráficas, es más fácil observar "diferencias" y "similitudes" en las gráficas que en las ecuaciones. Sin embargo, al obtenerse las gráficas, a partir de ecuaciones, parecería "lógico" que las "diferencias" y "similitudes" que exhiben las gráficas, debieran tener su contraparte en las ecuaciones. Para corroborar esta apreciación, tomemos al elemento "más simple" de cada grupo de ecuaciones ($y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$). Tabulémoslas, con los mismos valores para las variables independientes, y grafiquémoslas en el mismo Plano Cartesino, FIG. 4. Lo que se observa son gráficas completamente diferentes en *forma*. Ahora bien, esta diferencia en las gráficas, o se debe a las ecuaciones, o al método de tabular y graficar, o al sistema de coordenadas en que se han graficado. No puede deberse al método de tabulación y graficación, ni al sistema de coordenadas, porque estos han sido los mismos para las tres ecuaciones. Por lo tanto, parece que la sóla razón de la *forma diferente* que exhiben las gráficas, se debe a las ecuaciones.

Observando las ecuaciones $y = x$, $y = x^2$ e $y = x^3$ se las notará similares en "todo", excepto en el exponente de la variable independiente. Esto querría decir que la diferencia en forma que muestran sus gráficas, se debe a la diferencia en el exponente de la variable independiente que tienen sus ecuaciones.

En forma parecida a ésta, combinando tabulación y graficación, inferencias inductivas y generalizaciones es posible establecer correlaciones entre los diferentes elementos algebraicos: *variables, exponentes, coeficientes* y *término independiente*, que aparecen en una ecuación con dos variables, con los elementos de carácter geométrico, que exhiben las gráficas. Establecer estas correlaciones de carácter general, permitirán, poder asociar, sin necesidad de tabular, una gráfica que es "factible" que le corresponda a una ecuación de tipo específico.

En lo que va de este TEMA sólo hemos hablado del proceso que asocia a una ecuación una gráfica. Se dijo que el método de tabulación y graficación permite asociar a *cualquier* ecuación con dos variables reales -de las que se estudian en este nivel- la gráfica que le corresponde. Realmente así es. Lo peor que puede pasar es que el trabajo de cálculo y graficación sea excesivo, pero se puede hacer y al final tener la gráfica. Detengámonos un momento en el proceso inverso : *a una gráfica asociarle una ecuación*. Por desgracia no se cuenta con un procedimiento, así de "fácil", como el de tabulación y graficación, para realizar lo anterior.

Sería deseable que dado un conjunto de puntos sobre el Plano Cartesiano y que muestren alguna "regularidad", existiera un método general, y simple, como el de tabulación y graficación, que al aplicarlo se encontrase la ecuación asociada a tal gráfica o conjunto de puntos. Por desgracia un método, con tales características, no existe en la Geometría Analítica, y en consecuencia se puede decir que esto constituye una de sus "limitaciones". Para zanjar esta limitación hay un método, objeto del último TEMA de este programa, pero ya fuera del campo de la Geometría Analítica, que no tiene nada de simple, pero que permite encontrar la ecuación "asociada" a gráficas que cumplen algunas suposiciones. Pero algo general y secillo, no hay.

Aún con todo esto, establecer correlaciones entre los elementos algebraicos de una ecuación y los geométricos de las gráficas asociadas a ellas, permite abordar el problema inverso, aunque restringido sólo a ciertos tipos de gráficas. En otras palabras, se puede decir que el *objetivo fundamental de este TEMA* es establecer, por métodos de razonamiento inductivo, condiciones necesarias y suficientes que permitan asociar a ciertos tipos de ecuaciones, gráficas factibles de corresponderles, y a determinados tipos de gráficas, ecuaciones que es posible asociarles, todo ello sin necesidad de tabular.

Hay que aclarar, desde ahora, que las condiciones a que hace referencia el párrafo anterior, se establecerán sólo para un grupo, muy reducido, de ecuaciones y gráficas, pero que en sí mismas son valiosas, tanto para la Matemática, como para las aplicaciones de ésta. Para las Matemáticas, porque ecuaciones más complejas pueden descomponerse, analizarse y estudiarse en términos de éstas que son más simples, y para las aplicaciones de la Matemática, porque muchas situaciones concretas pueden modelarse, desde el punto de vista matemático, con ecuaciones del tipo que estudiaremos.

II. objetivos del tema.

En este TEMA, se pretende que el alumno :

. Dada una ecuación de la forma $y = ax + b$, $y = ax^2 + b$, $y = ax^3 + b$, con a, $b \in R$, después de establecer equivalentes geométricos a los diferentes elementos que la forman, DESCRIBIRA las características generales que tendrá la gráfica cartesiana asociada a ella, y HARA UN "BOSQUEJO" de tal gráfica en un Plano Cartesiano.

. Dada la gráfica de una recta, parábola (con vértice en el eje de las ordenadas y que se abra hacia arriba o hacia abajo), o parábola cúbica (con punto de inflexión en el eje de las ordenadas y que se "abra" en la m i s m a dirección de dicho eje) en un Plano Cartesiano, después de establecer equivalentes algebraicos a los diferentes elementos que la forman, DESCRIBIRA las características generales que tendrá su ecuación, y PROPONDRA una que sea susceptible de asociarle a la gráfica, en la forma $y = ax + b$, $y = ax^2 + b$, $y = ax^3 + b$, con a, $b \in R$.

. Dadas dos ecuaciones que correspondan a dos rectas, a dos parábolas o a dos parábolas cúbicas, en los últimos dos casos, restringidas a los tipos que se han estudiado, DETERMINARA si las gráficas "asociadas" se intersecan o no.

. PROPONDRA dos ecuaciones que correspondan a dos rectas, dos parábolas o dos parábolas cúbicas que se intersecan.

. PROPONDRA dos ecuaciones que correspondan a dos rectas, dos parábolas o dos parábolas cúbicas que no se intersecan.

. SE EJERCITARA en encontrar *diferencias* y *similitudes* entre los elementos de un conjunto o entre varios de ellos.

. SE EJERCITARA en descubrir "patrones" que muestren determinadas cosas.

. SE EJERCITARA en establecer correlaciones entre los elementos de dos o más conjuntos de cosas.

. SE EJERCITARA en efectuar inferencias inductivas.

. SE EJERCITARA en generalizar hechos o propiedades que se observen en una colección finita de objetos.

. SE EJERCITARA en reconocer en una generalidad casos particulares.

. SE EJERCITARA en estructurar (síntesis) de acuerdo a algún criterio hechos u objetos aislados.

. SE EJERCITARA en aislar de una estructura elementos particulares (análisis).

III. observaciones a los **objetivos** y algunas sugerencias metodológicas.

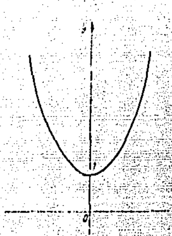


FIG.5

Expliquemos un poco más los dos primeros OBJETIVOS. No se pretende que el estudiante pueda decir: "la gráfica que le corresponde a la ecuación $y = -3x^2 + 5$ es ℓ ó ℓ α"; sino más bien, que sea capaz de decir : " la gráfica para la ecuación $y = -3x^2 + 5$, no puede ser como la que se muestra en la FIG. 5, pero si como la que aparece en la FIG. 6 " . En forma análoga, no se espera que el estudiante diga : " la ecuación que le corresponde a la gráfica que se muestra en la FIG. 7, es ℓ ó ℓ α "; sino que sea capaz de decir : " la ecuación para la gráfica que se representa en la FIG. 7 no puede ser $y = -7x^3 + 3$, pero si puede ser $y = 5x^3 - 4$ " .

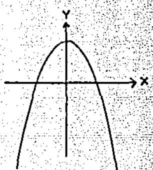


FIG. 6

Una cosa que no debemos perder de vista es que lo dessarrollado en este TEMA, de manera esencial, es un paso más hacia la plena unificación del Algebra con la Geometría Euclídeana. Se puede iniciar el TEMA con un recordatorio, por parte del alumno, de aspectos que él conoce sobre las ecuaciones. Recordatorio que no sólo comprenderá conceptos y terminología, sino también el manejo de ellos. Es indispensable que el estudiante esté, lo más familiarizado posible, con los elementos de una ecuación, que pueda identificarlos, que sea capaz de reconocer la forma de ecuaciones particulares, obtener ecuaciones particulares a partir de una forma dada, expresar ecuaciones en distintas formas que sean equivalentes, pero al mismo tiempo que esté en posibilidades de proponer ejemplos, tantos cuantos se le pidan, de ecuaciones con características particulares en cuanto a sus elementos. Estos son momentos adecuados de dar a conocer al estudiante las ecuaciones que se estudiarán en este TEMA. Ecuaciones de la forma $y = ax^n + b$, con $n = 1,2,3$ y $a, b \in R$. De nueva cuenta y con brevedad, se aplicará lo recordado anteriormente a esta forma específica de ecuaciones.

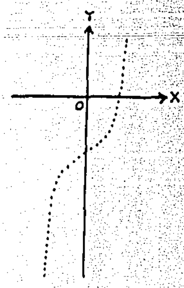


FIG. 7

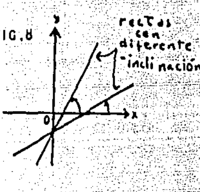
Utilizando ecuaciones de la forma : $y = ax + b$, $y = ax^2 + b$ e $y = ax^3 + b$ con $a, b \in R$, el estudiante recordará el método de tabulación y graficación, que ya conoce, para encontrar la gráfica asociada a una ecuación con dos variables reales. Sirviéndose de las gráficas que el estudiante ha dibujado, el profesor hará de su conocimiento los nombres con que usualmente se conocen estas gráficas. Debe quedar claro que de ninguna manera se trata de definir con *p r e c i s i ó n* , en esto que es el inicio, conceptos como *línea recta, parábola, parábola cúbica, vértice de la parábola* y *punto de inflexión* de una *parábola cúbica*, sino dar un *n o m b r e* a los tres tipos de gráficas que a simple vista se observan muy diferentes y a dos de sus puntos muy particulares. En un principio bastan descripciones simples, producto de lo que uno vé, y no más. Se trata de dar *n o m b r e s* a tres comportamientos que a simple vista son bastante diferentes. Basta con decir "a esta gráfica que tiene forma de *u* la llamaremos parábola" y de minguna manera intentar conceptualizar *parábola* como un lugar geométrico. Los nombres "recta, parábola y parábola cúbica" serán descripciones de formas particulares de gráficas y no conceptos de lugares geométricos específicos.

De suma importancia para lo que nos proponemos en este TEMA es la experiencia empírica que el estudiante obtenga sobre la relación entre ecuaciones de la forma $y = ax^n + b$, con $n=1,2,3$ y $a,b \in R$, y las gráficas asociadas que se obtiene de su tabulación y graficación. Experiencia empírica que interesa, sobre todo, en el aspecto de la observación detallada de los distintos comportamientos individuales de las gráficas que se obtienen. Observar y describir diferencias y similitudes entre gráficas o entre grupos de ellas y entre ecuaciones o grupos de ellas es lo que permitirá que el alumno alcance a convencerse de la relación que existe entre los *elementos* de una *ecuación* con el *aspecto* o *comportamiento particular* de una gráfica. Es primordial para lo que se pretende en este TEMA el reconocimiento, por parte del estudiante, de la *relación* que necesariamente existe entre los *elementos* de la *ecuación* y los *comportamientos particulares* de la gráfica asociada a ella. Sin esta clara conciencia, lo que se hará carecerá de sentido. La experiencia empírica que el estudiante adquiera en torno a la relación entre elementos algebraícos de una ecuación y características geométricas de las gráficas le permitirá tener ya una cierta comprensión de lo que como objetivo se plantean para este TEMA y en consecuencia aproximarse al significado del objetivo central de la Analítica : *la unificación del Algebra con la Geometría de Euclides*. El profesor guiará al estudiante a que este se vaya aproximando a comprender de qué manera con el puro análisis de los elementos de la ecuación es posible llegar a tener cierto conocimiento de la gráfica que se le puede asociar, y a la inversa.

Con lo que hasta acá se ha descrito, el estudiante puede *caracterizar* una ecuación por sus elementos : variables, exponentes, coeficientes y término independiente. Sin embargo, no puede *caracterizar* o *individualizar* completamente (sólo reconoce formas) a una gráfica de los tres tipos que ha graficado. Por caracterizar una gráfica en particular se está entendiendo el dar rasgos o cualidades que permitan distinguirla de otra. Identificar las cualidades o características que se pueden utilizar para individualizar una gráfica debe ser una conclusión a la que lleguen los alumnos por vía empírica. A través de la observación y reflexión sobre grupos de rectas, parábolas y parábolas cúbicas, los alumnos llegarán a identificar características o cualidades visibles que permitan llegar a construir una primera caracterización. Es claro que estas cualidades que se identifiquen serán de naturaleza fundamentalmente descriptivas,como en mucho, fueron y siguen siendo, algunas caracterizaciones en Biología. Será algo así como una Geometría "cualitativa", no cuantitativa. Estas cualidades son las que se harán, un poco después, corresponder a elementos de la ecuación. Debe quedar claro que se llegan a ubicar estas cualidades sólo *comparando* gráficas entre sí, tanto del mismo tipo, como de tipos distintos.

RESUMIENDO, habrá dos tipos de cualidades a las que finalmente deberá llegar el estudiante: aquellas que sean generales a toda gráfica, de las que se están estudiando, y aquellas otras que son propias del tipo específico de gráfica de que se trate. Entre las primeras sólo se encuentran dos: el estar representadas en un Plano Cartesiano y la otra, el " desplazamiento vertical " que presente la gráfica. Para el caso de la *Línea recta* el alumno identificará como rasgos definitorios lo "parada o acostada" que se encuentre la recta y los cuadrantes por donde pasarán los extremos de la gráfica, es decir, los cuadrantes por donde necesariamente pasará la gráfica al prolongarla infinitamente en ambas "direcciones". En relación a lo "parada o acostada" que esté la grafica, se hará notar, por su importancia, lo relativo de esta idea y en consecuencia la forma de cuantificarla. En otras palabras, el alumno conocerá el concepto de *ángulo de inclinación de una recta* . En resumen, el estudiante llegará a inferir como elementos geométricos que caracterizan a una línea recta los siguientes: el "nombre" del Plano Cartesiano en que se encuentra, indicado por dos variables, siendo la primera la que representa a la variable independiente, y la segunda a la variable dependiente; así, por ejemplo, se dirá: Plano w-k, para el caso en que la gráfica esté representada en un plano cuyo eje de las abscisas se designa por la variable "w" (variable independiente), y el eje de las ordenadas por la variable "k" (variable dependiente); la forma (línea recta); los

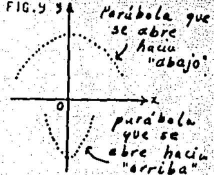
FIG.8



cuadrantes por donde pasan los extremos de la recta, la "inclinación" de la recta con respecto al eje de las abscisas y lo desplazada que esté la recta a lo largo del eje de las ordenadas.

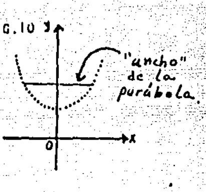
De igual forma, el estudiante concluirá que las *parábolas* se pueden caracterizar si se dan : el "nombre" del Plano Cartesiano en que están representadas, su forma (parábola), la dirección en que se "abre" (hacia "arriba" o hacia "abajo"), la "anchura" que presentan ("normal", "cerrada", "abierta") y su desplazamiento vertical (posición del vértice).

FIG.9



Para el caso de la *parábola cúbica*, los alumnos concluirán que para caracterizarla habrá que conocer: el "nombre" del Plano Cartesiano en que está representada, su forma (parábola cúbica), los cuadrantes por donde pasan sus "extremos" (en el sentido en que anteriormente se explicó para la línea recta), su "anchura" ("normal", "cerrada", "abierta") y lo desplazada que se encuentre en el eje vertical (posición del punto de inflexión).

FIG.10



Como se vé, para caracterizar a la r e c t a, p a r á b o l a o p a r á b o l a c ú b i c a se ha recurrido a una serie de ideas de carácter relativo: la inclinación de la recta con respecto al eje de las abscisas, la dirección en que se abre una parábola y su anchura, así como la anchura de una parábola cúbica. Son ideas un tanto "*vagas*", descriptivas, pero, como veremos más adelante, útiles para establecer una relación un poco más estrecha entre Algebra y Geometría Euclídea que aquella que aparece del método de "tabulación" y "graficación". Con los otros elementos para caracterizar estas gráficas no hay dificultad. Con dibujos podemos ilustrar mejor lo que estamos entendiendo por: inclinación de una línea recta con respecto al eje de las abscisas, dirección en que se abre y "anchura" de una parábola y "anchura" de una parábola cúbica. Las FIGURAS 8, 9, 10, 11, 12, 13, pretenden aclarar estas ideaas.

FIG.11

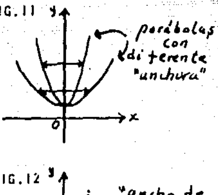
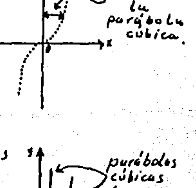
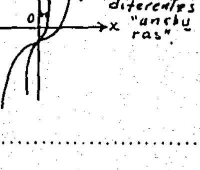


FIG.12



El alumno será consciente que debido a que las "características", arriba señaladas, que exhiben las gráficas, se pueden ver "modificadas" por usar unidades de medida diferentes para realizar las particiones en los ejes coordenados, se adoptará durante todo el desarrollo de este TEMA la convención de usar la misma unidad de medida para ambos ejes de coordenadas en todo Plano Cartesiano que se use y al cual denominaremos "Plano Cartesiano Normal".

FIG.13



Por lo que el primer OBJETIVO, antes apuntado, se propone, y que es "*bosquejar*" gráficas, o sea dibujar gráficas que se aproximen o se "parezcan", en lo general, a la "verdadera" gráfica asociada a la ecuación, es por lo que, las anteriores características cualitativas son útiles. Así por ejemplo, de momento no nos interesa saber con precisión el "ángulo de inclinación" de una cierta recta, sino más bien poder decir "entre" que valores se va a encontrar. En otras palabras, es tiempo de explicar que se entenderá por "*bosquejar*" una *recta*, una *parábola* y una *parábola cúbica*.

Un "bosquejo" -en dibujo- es un primer trazo de algo, que retiene sólo características generales pero, que permiten ya diferenciarlo -es decir individualizarlo- de algunas otras cosas. En tal sentido, entenderemos por "*bosquejar*" *una línea recta*: dar el "nombre" del Plano Cartesiano en que se encontrará, en qué cuadrantes se encontrarán sus "extremos", en qué rango de valores se encuentra su "ángulo de inclinación" y hacia dónde -si lo está- y cuánto es su "desplazamiento vertical". Hay que hacer notar que así como los valores para el ángulo de inclinación puede ser infinito así será el número de rangos posibles que se podrían elegir para la inclinación. Por tal razón y sólo por convención y comodidad se escogerán cuatro rangos y tres valores exactos para el ángulo de inclinación: aquellos determinados por las bisectrices de los cuadrantes I y II del Plano Cartesiano y aquellos valores exactos que corresponden a estas bisectrices y a rectas paralelas al eje de las abscisas.

De manera análoga, "*bosquejar*" *una padbola* es indicar el "nombre" del Plano Cartesiano en que se encuentra, en qué dirección -con respecto a la parte positiva del eje de las ordenadas- se abre: hacia "arriba" si es hacia la parte positiva del eje de las ordenadas y hacia "abajo" si es hacia la parte negativa del eje de las ordenadas; hacia dónde -si lo está- y cuánto se desplaza sobre el eje de las ordenadas (posición del vértice) y finalmente su "anchura". En relación a esto último, y puesto que el estudiante ya ha observado que las parábolas tienen diferente "anchura", y por ser éste un concepto relativo, se establecerá, también de manera arbitraria y sólo por comodidad, dar el "ancho" de una parábola comparándola con aquel que presenta la gráfica asociada a la ecuación $y = x^2$ o a la que exhibe la gráfica de $y = - x^2$. Así, si una parábola se encuentra "*dentro*" de la gráfica asociada a la ecuación $y = x^2$ o $y = - x^2$, se le denominará "*cerrada*"; si se encuentra "*fuera*", "*abierta*"; y si es alguna de ellas, "*normal*".

Para finalizar, se entenderá por "*bosquejar*" *una parábola cúbica* el indicar el "nombre" del Plano Cartesiano en que se encuentre;

en qué cuadrantes se encuentran sus "extremos"; hacia dónde -si lo está- y cuánto está desplazada sobre el eje de las ordenadas (posición del punto de inflexión), y la "anchura" que tendrá. También en este caso, como en el de la parábola y por las mismas razones, la "anchura" que se dará será aquella que presente comparada con la de las gráficas asociadas a las ecuaciones $y = \pm x^3$. "*Cerrada*" si se encuentra "*dentro*" de éstas, "*abierta*" si está "*fuera*" de ellas y "*normal*" si es alguna de ellas.

Hagamos un alto momentáneo para resumir lo que se ha tratado hasta este momento. Se ha hablado de:

1. En relación con ecuaciones de la forma $y = ax^n + b$, con $n=1,2,3$ y $a,b \in \mathbb{R}$, se han recordado e identificado sus elementos: dos variables (x e y), exponentes, coeficientes y término independiente.
2. Sirviéndose de ecuaciones de la forma $y = ax^n + b$, con $n=1,2,3$ y $a,b \in \mathbb{R}$, se ha recordado el método de tabulación y graficación que se utuliza para encontrar la gráfica asociada a una ecuación. Recordatorio que ha servido para dar nombres a los tres tipos de gráficas que serán objeto de estudio de este TEMA.
3. Realizando un trabajo empírico con ecuaciones de la forma $y = ax^n + b$, con $n=1,2,3$ y $a,b \in \mathbb{R}$ y las gráficas asociadas a ellas, se ha inferido la conclusión de que hay una estrecha relación entre los elementos de la ecuación con las "características" que presenta una gráfica.
4. Por métodos empíricos se establecieron los aspectos cualitativos que caracterizarán a una *línea recta*, a una *parábola* y a una *parábola cúbica*.
5. Se definieron y precisaron los elementos que constituirán el "*bosquejar*" una *línea recta*, una *parábola* y una *parábola cúbica*.

Recordemos, brevemente, los dos primeros OBJETIVOS que se establecieron para este TEMA. En primer lugar, dada una ecuación de la forma $y = ax^n + b$, con $n=1,2,3$ y $a,b \in \mathbb{R}$, sin necesidad de tabular, sino por la sola consideración de sus elementos (variables, exponentes, coeficientes y término independiente) se "bosqueje" la gráfica asociada a ella. En segundo lugar, el proceso inverso: dada una gráfica, en un Plano Cartesiano, que corresponda a una línea recta, parábola o parábola cúbica -en los dos últimos casos a las que se han estado haciendo referencia-, considerando sólo sus elementos: "nombre" del plano en que está representada, forma, cuadrantes en donde se encuentran los "extremos" de la gráfica o dirección en que se abren éstas, inclinación o abertura que presentan y desplazamiento vertical sobre el eje de las ordenadas; se propondrá una ecuación en particular que sea factible de asociarle.

De lo hasta acá tratado, dos aspectos habrá que resaltar de momento : *uno*, el conocimiento "detallado" de los *elementos algebraicos* que caracterizan una ecuación en particular; *dos*, los *elementos geométricos*, que caracterizan una gráfica individual. Una vez alcanzado lo anterior, para que el estudiante pueda lograr lo establecido en los dos primeros OBJETIVOS, habrá que establecer, la correlación que existe entre los elementos algebraícos que caracterizan una ecuación, con los elementos geométricos que caracterizan a una gráfica. En esta *correlación*, elementos algebraícos de la ecuación se hacen corresponder a elementos geométricos de la gráfica, y de manera recíproca, elementos geométricos de la gráfica se asocian a elementos algebraícos de la ecuación. En esta correlación cada elemento de la ecuación estará asociado a uno y sólo uno de los elementos geométricos de la gráfica. El resultado final de esta correlación, al cual el estudiante llegará inductivamente, asociará:

1. a las *variables* de la ecuación, el "*nombre*" del Plano Cartesiano en el cual se encuentre representada la gráfica y recíprocamente;
2. el *exponente* de la variable independiente (cuando la dependiente está despejada) con la *forma* que presente la gráfica y recíprocamente;
3. I. el *signo del coeficiente* de la variable independiente con los *cuadrantes* en que se encuentran los "extremos" de la recta o parábola cúbica o la dirección en que se *abre* la parábola, y recíprocamente;

   II. el *valor del coeficiente* con la *inclinación* de la recta, o la "*anchura*" en el caso de la parábola y de la parábola cúbica y recíprocamente;
4. el *término independiente* de la ecuación con el *punto de intersección* de la gráfica con el eje de las ordenadas y recíprocamente.

Es pertinente hacer algunas aclaraciones a las asociaciones establecidas anteriormente.

1. Por la forma que tienen las ecuaciones estudiadas: $y = ax^n + b$, con $n=1,2,3$ y $a,b \in R$, se dá por hecho que

el coeficiente "a" puede ser:

I. para $n=1$, cualquier número real;
II. para $n=2$, cualquier número real excepto cero;
III. para $n=3$, cualquier número real excepto cero.

El coeficiente y el exponente de "y" siempre serán "1" y el término independiente podrá ser cualquier número real.

2. Puesto que se estudian ecuaciones de la forma $y = ax^n + b$, con $n=1,2,3$ y $a,b \in \mathbb{R}$, al investigar la relación que existe entre el exponente de la variable independiente con la gráfica asociada se estudiarán los tres casos.

3. Al investigar la relación entre el *signo* del coeficiente "a" de la ecuación $y = ax^n + b$, con la gráfica asociada a ella, se analizarán dos casos ($a>0$ y $a<0$) para $n=2,3$ y tres casos ($a=0$, $a>0$ y $a<0$) para $n=1$.

4. Lo que requiere una explicación más detallada es lo que tiene que ver con la relación que se dá entre el "valor" del coeficiente "a" y la gráfica respectiva. Para el caso de la *línea recta* este coeficiente determina la magnitud del *ángulo de inclinación*. Se puede decir que el responsable de lo "parada o acostada" que se presente la recta es este coeficiente. En el caso de la *parábola* y de la *parábola cúbica* el coeficiente "a" determina lo que hemos denominado "*anchura*" para estas gráficas. En relación a la *inclinación* y la *anchura*, tres cosas se han dicho: una, que son características relativas; dos, que su medida, en este TEMA, se dará estableciendo un "rango de valores" en el cual se encuentre; tres, los *rangos* de que se habla están determinados por las gráficas asociadas a las ecuaciones $y = \pm x$, $y = \pm x^2$ e $y = \pm x^3$.

Veamos, primero el caso de la línea recta. Las gráficas de $y = \pm x$ dividen al Plano Cartesiano en ocho regiones. Dos cosas se tienen que aclarar en este punto: que una recta cualquiera (excepto las paralelas a los ejes) se encuentra en alguna pareja de estas ocho regiones y que, para establecer la inclinación de toda recta, bastan los cuatro rangos que se encuentran en los cuadrantes I y II. Para establecer la relación entre el valor del *coeficiente* "a" y el *rango* en que se encontrará el ángulo de inclinación de la recta, se analizarán las gráficas que se obtienen de ecuaciones cuyo valor de "a" adquiere los valores: $0<a<1$, $1<a<\infty$, $-\infty<a<-1$, $-1<a<0$; para los cuales se encuentran las siguientes correlaciones:

i. Si $0<a<1$, el ángulo de inclinación se encontrará entre 0° y 45°.
ii. Si $1<a<\infty$, el ángulo de inclinación se encontrará entre 45° y 90°.
iii. Si $-\infty<a<-1$, el ángulo de inclinación se encontrará entre 90° y 135°.
iv. Si $-1<a<0$, el ángulo de inclinación se encontrará entre 135° y 180°.

Y las correspondientes recíprocas.

Tratemos ahora de la relación que existe entre el coeficiente "a" y la "*anchura*" de la parábola y de la parábola cúbica. Se ha dicho que la "anchura" de cualquier parábola o parábola cúbica se determinará comparándola con la que tienen las gráficas asociadas a las ecuaciones $y = \pm x^2$ e $y = \pm x^3$. A las gráficas, asociadas a $y = \pm x^2$ e $y = \pm x^3$, las denominaremos "*normales*" para diferenciarlas de aquellas que tienen un ancho diferente al de ellas. Algo que los estudiantes habrán de concluir, por vía empírica, es que dependiendo de cómo sea el valor de "a", comparado con ± 1, así, las gráficas asociadas a las ecuaciones $y = ax^2$ e $y = ax^3$ se encontrarán "*dentro*" o "*fuera*" de las gráficas asociadas a $y = \pm x^2$ e $y = \pm x^3$. A las que se encuentren "dentro" las denominaremos "más *cerradas*" que las "normales" y a las que se encuentren "fuera" las designaremos como "más *abiertas*" que las "normales". El estudiante, después de analizar, empíricamente, las gráficas asociadas a $y = ax^2$ e $y = ax^3$, para los diferentes valores de "a", comparados con ± 1, establecerá las siguientes correlaciones:

i. Si $0<a<1$, la parábola o parábola cúbica es más "abierta" que la "normal".
ii. Si $1<a<\infty$, la parábola o parábola cúbica es más "cerrada" que la "normal".
iii. Si $-1<a<0$, la parábola o parábola cúbica es más "abierta" que la "normal".
iv. Si $-\infty<a<-1$, la parábola o parábola cúbica es más "cerrada" que la "normal".

Y las correspondientes recíprocas.

5. Por el papel que en este análisis desempeñan las gráficas asociadas a las ecuaciones $y = \pm x$, $y = \pm x^2$ e $y = \pm x^3$, el estudiante, por razonamientos inductivos, establecerá, en forma detallada, las correlaciones respectivas entre los elementos algebraícos de las ecuaciones y los geométricos de las gráficas.

6. Sobre el método que se sugiere para llegar a las conclusiones anteriores cabe señalar:

a. Para el tercer proceso fundamental de la Analítica -dada una ecuación asociarle una gráfica- :

i. Por el método de tabulación y graficación se encuentran las gráficas asociadas a familias de ecuaciones.

ii. Se observan y enlistan las "diferencias" y "similitudes" que exhiben, tanto las ecuaciones de cada familia como las gráficas que se obtuvieron, así como las "diferencias" y "similitudes" que exhiben las familias tanto en ecuaciones como en gráficas.

iii. Se establece una correlación entre las "diferencias" y "similitudes" que exhiben las ecuaciones, con las "diferencias" y "similitudes" que muestran sus gráficas respectivas.

iv. La correlación establecida, a partir de un número limitado de ecuaciones y gráficas, se generaliza para toda ecuación y gráfica que presenta la misma forma, es decir, por un *proceso de generalización* se aceptan, como verdaderas, para cualquier ecuación de la forma estudiada, lo que se concluyó para una colección finita de ellos.

b. Para el cuarto proceso fundamental de la Geometría Analítica -dada una gráfica asociarle una ecuación-, lo deseable sería partir de un conjunto, tal vez grande, pero finito de gráficas, encontrar las ecuaciones asociadas a ellas y observar las diferencias y similitudes entre las gráficas y sus ecuaciones asociadas y luego, aceptando que "*el responsable de las particularidades de las ecuaciones es el conjunto de características específicas de las gráficas de que se partió*" y a continuación por un proceso de *g e n e r a l i z a c i ó n* aceptar como verdaderas, para cualquier gráfica de la forma estudiada, lo que se concluyó para una colección finita de ellas. Sin embargo, esto no se puede hacer por carecer de un método sencillo que permita encontrar la ecuación asociada a una gráfica en particular. Por esta razón lo que se hace es una especie de "*inversión*" de lo que sí se puede hacer. Expliquémonos mejor con un ejemplo. Dadas las ecuaciones $y = 5x - 1$, $y = \frac{1}{2}x - 1$, $y = -4x - 1$, el estudiante, por tabulación y graficación, sí puede encontrar las gráficas asociadas a ellas. Después que lo hace, observa las diferencias y similitudes que presentan, tanto las ecuaciones, como las gráficas, y concluye, por ejemplo, que el término independiente de las ecuaciones determina el punto donde la gráfica asociada corta al eje de las ordenadas. En este momento es cuando realiza la "inversión" al concluir, en general, que si tuviera un conjunto de *rectas* que se corten todas en el mismo punto sobre el eje de las ordenadas, las ecuaciones asociadas a ellas, tendrían, todas, la misma forma $y = ax + b$, diferente valor para el coeficiente "a" *pero* el mismo valor para el término independiente, conclusión ésta que ya pertenece al proceso inverso: asociar a una gráfica dada una ecuación.

En el fondo, el método que se ha seguido permite establecer la condicional :

> si las ecuaciones tienen "éstas" características, las gráficas mostrarán "éstas" otras;

pero no su recíproca; recíproca que se podría establecer si se contara con un método sencillo de encontrar la ecuación a una gráfica dada. Esta carencia es la que obliga a proceder con poco rigor lógico e *invertir la condicional sin más justificación*. Si bien, dada una ecuación, se ha encontrado su gráfica asociada, nada garantiza, en el proceso inverso, y lógicamente hablando, que esa gráfica tenga asociada exactamente la misma ecuación. Bien pudiése ocurrir que no. A pesar de lo anterior, el rigor lógico no debiera ser una limitante. Recordemos que el conocimiento sólo muy al final alcanza una presentación fundamentalmente lógica. Hay que tener presente las fuertes críticas de que fué víctima el Cálculo en sus inicios, por el poco rigor y gran liberalidad de la que hacía uso en el manejo de sus conceptos.

Hasta acá las notas aclaratorias.

Con el objeto de poder alcanzar los OBJETIVOS tercero, cuarto y quinto; además de lo anterior, el alumno, observando el comportamiento de parejas de rectas, parábolas o parábolas cúbicas, *inducirá* las características que tendrán los coeficientes y los términos independientes de las ecuaciones factibles de asociar a dos rectas, dos parábolas y dos parábolas cúbicas cuando éstas se corten y cuando no se corten.

TEMA 7

GENERALIZACIONES DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS EN EL TEMA 6

I. introducción.

¡ DE "ESAS" NO *vimos, maestro* !, es la crítica, no tan infre cuente, que hacen los alumnos cuando en un examen se les pregunta algo que en el "exterior", en apariencia, es diferente a lo que el profesor enseñó. Por ejemplo, ejemplificar la solución de e cuaciones de 2° grado, siempre con ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a, b, c \in Z$, y preguntar en el examen la so lución de la ecuación $x - 1 = \frac{4}{x+2}$, puede ser causa de que algunos alumnos exclamen " ¡ *de ésas no vimos, maestro* ! " . Y realmente tienen razón. De *ésas* ¡no vieron! . El maestro supone que, por el simple hecho de que el alumno pueda resolver $3x^2 - 2x - 5 = 0$, será capaz, sin más, de resolver la ecuación $x - 1 = \frac{4}{x+2}$. En este caso hipotético el profesor ha *supuesto, equivocadamente*, que el alumno es capaz de "*transferir*" todo aquello que le permitió resolver la ecuación $3x^2 - 2x - 5 = 0$ al caso de la ecuación $x - 1 = \frac{4}{x+2}$. Cree que el alumno está en posibilidades de "modificar", "adaptar", "transformar" lo aprendido para resolver un problema, a la solución de otro.

Una forma de evitar el que un alumno se encuentre con un tipo de problema no resuelto en clase y por añadidura la crítica " ¡ de ésas no vimos, maestro ! " es, ver "ésas" y "otras" y "otras" y "otras" más, y de esta manera presentar a la Matemática como un marasmo de fórmulas, reglas y procedimientos, aplicables *uno* para cada caso.

Otra forma, que se encuentra en el polo opuesto al anterior, de evitar la crítica " ¡ de ésas no vimos, maestro ! " , es enseñarle al estudiante *el caso general*, al cual se "reducen" todos los "demás" casos.

Cuando aprendemos a resolver necesidades individuales que son comunes a todo grupo social, culturalmente "homogéneo", aprendemos a "transferir" un conocimiento surgido en una situación específica a otra, que se parece a la anterior, pero que también muestra diferencias. Si nos hubiesen tenido que enseñar a hacer "nudos", para todas las situaciones posibles, es casi seguro que ante la necesidad de atar una caja o amarrar una bolsa, hubiésemos dicho: " ¡ de ésos no vimos, pues sólo me enseñaste a amarrarme los zapatos ! " . Pero nó. Bastó con el conocimiento adquirido al amarrarse los zapatos para poder anudar en otras situaciones parecidas a ella. Sin embargo, enfrentados a situaciones que presentan rasgos comunes y diferencias sustanciales -como sería el caso de anudarse la corbata- con la situación de aprendizaje original, hay la necesidad de ejercitarse en la habilidad de poder adaptar el conocimiento -o parte de él- logrado con anterioridad, para el estudio de la *nueva* situación. A la habilidad de seleccionar y adaptar, lo aprendido en una situación, para el estudio de otra es a lo que denominamos "*habilidad de transferir*" .

II. objetivos del tema.

En este TEMA se pretende que el alumno :

. Se EJERCITE en la habilidad de transferir, lo aprendido en una situación, para el estudio de otra.

. Dadas ecuaciones de la forma $y = ax^n + b$, con $n \in N$, "BOSQUEJE" las gráficas factibles de asociarles.

. Dada una gráfica que corresponda a una ecuación de la forma $y = ax^n + b$, con $n > 3$, RECONOCERA LAS DIFICULTADES que se presentan al intentar "proponer" ecuaciones factibles de asociar a la gráfica dada.

. Dada una "familia" de ecuaciones definida (la familia) en términos de las características de sus miembros en cuanto a forma, coeficiente de la variable independiente y término independiente, DESCRIBIRA las características de las gráficas que sean factibles de asociar a tal familia de ecuaciones.

. Dada una "familia" de gráficas cartesianas (representadas en en un plano cartesiano que utilice un sistema de coordenadas "normal") cuyos elementos sean todos rectas, parábolas o parábolas cúbicas, que muestren de manera ostensible analogías en las "características" definitorias de los miembros de la "familia", DESCRIBIRA las propiedades de las ecuaciones que sean susceptibles de asociar a los miembros de la "familia" de gráficas.

III. observaciones a los **objetivos** y algunas sugerencias metodológicas.

"T R A N S F E R I R" , con sus modificaciones pertinentes, lo aprendido en una situación a otra, es una habilidad intelectual que nos permite reducir un problema a otro, percibir unidad donde antes sólo había diversidad, Etc.. Por tal razón este TEMA, como uno de sus primeros objetivos se propone que el alumno se ejercite en transferir, modificando, parte de lo aprendido en el TEMA anterior.

Dada una gráfica que corresponda a una ecuación de la forma $y = ax^n + b$, con $n > 3$, es difícil por inspección visual, decidir tanto el exponente de la variable independiente como el "valor" del coeficiente de la variable independiente. Por tal razón, para estos casos, lo que el estudiante propondrá será : forma de la ecuación, tipo de exponente -par o impar- de la variable independiente, signo del coeficiente de la variable independiente y término independiente. Cabe señalar, que si bien, conocer las gráficas de ecuaciones de la forma $y = ax^n$, para $n > 3$, es algo que directamente poco tiene que ver con lo que se trate en este curso, es de importancia para cursos posteriores de Matemáticas, en donde se aborde la cuestión de graficar ecuaciones de la forma $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$.

Mostremos, con un ejemplo, lo que se pretende en el cuarto OBJETIVO de este TEMA. Dada la "familia" de ecuaciones cuyos miembros están definidos por :

forma : $y = ax + b$
coeficiente : $1 < a < \infty$
término independiente : 3

el alumno explicará que las gráficas factibles de asociar a la familia de ecuaciones son rectas que cortan al eje de las ordenadas en el punto $(0,3)$, tienen un ángulo de inclinación comprendido entre 45° y 90° y pasan por los cuadrantes I, II y III.

Con el objeto de poder alcanzar los OBJETIVOS 4 y 5, el alumno inducirá las características que tendrá el coeficiente y el término independiente de las ecuaciones factibles de asociar a familias de rectas paralelas; rectas que se corten en el mismo punto sobre el eje de las ordenadas y tengan distintas inclinaciones; parábolas que se abran en la misma dirección, tengan la misma abertura y difieran en la posición de sus vértices; parábolas que tengan un mismo vértice, se abran en la misma dirección y difieran en la magnitud de su abertura; parábolas cúbicas que sólo difieran en la posición de su punto de inflexión; parábolas cúbicas que tengan el mismo punto de inflexión, pasen por los mismos cuadrantes y difieran en abertura.

TEMA 8

TERCER ACERCAMIENTO AL TERCER Y CUARTO PROCESOS FUNDAMENTALES DE LA GEOMETRIA ANALITICA:

III. Asociar a una ecuación una gráfica, calculando los puntos de intersección de la gráfica con los ejes coordenados.

IV. Asociar a una gráfica una ecuación, conociendo los puntos de intersección de la gráfica con los ejes coordenados.

I. introducción.

SE HA DICHO que cuatro son los *procesos fundamentales* de la Geometría Analítica:

I. A un *número* asociarle un *punto*.
II. A un *punto* asociarle un *número*.
III. A una *ecuación* asociarle una *gráfica*.
IV. A una *gráfica* asociarle una *ecuación*.

De estos cuatro procesos, para los dos primeros, hasta lo que va descrito del programa, se les ha dedicado sólo un método de abordarse. En este TEMA se describirá un segundo método de tratar el segundo proceso. Método que permitirá asociarle una pareja de números reales al punto de intersección de dos o más curvas.

En relación al tercer proceso, un primer enfoque que de él se hizo, fué el *método de tabulación y graficación*, que permite asociar una *gráfica*, en un Plano Cartesiano, a una *ecuación* con dos variables reales, de las que usualmente se estudian en este curso. Un segundo enfoque que se presentó para este tercer proceso, el *método de bosquejo*, fué para un grupo muy reducido, pero no por eso menos importante, de ecuaciones: aquellas que tienen la forma $y = ax + b$, $y = ax^2 + b$ e $y = ax^3 + b$. Por este método, dada una ecuación particular de alguna de las tres formas anteriores, es posible *proponer* o *bosquejar* una gráfica factible de ser asociada a la ecuación. Así, para la ecuación $y = -\frac{2}{3}x + 1$, no se puede decir *ésta es la gráfica*, pero sí se puede decir: la gráfica es una línea recta en el Plano Cartesiano x-y, su ángulo de inclinación se encuentra entre 135° y 180°, corta al eje de las ordenadas en el punto (0,1), pasa por los cuadrantes I, II, III y su gráfica es "*aproximadamente*" como la que se muestra en la FIGURA 1.

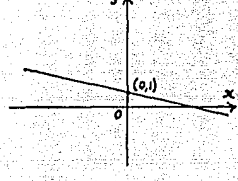


FIG. 1

Como claramente se ve de esto, lo que realmente se está dando es *toda una familia de rectas*: aquellas que pasan por el punto (0,1) y tienen un ángulo de inclinación mayor que 135° pero menor que 180°. En otras palabras, a la ecuación $y = -\frac{2}{3}x + 1$ no se le está asociando *una gráfica*, sino una familia infinita de gráficas. Por esta razón, más que hablar de "asociar" una recta se ha hablado de "proponer" o "bosquejar" una gráfica factible de ser asociada a la ecuación.

Con respecto al cuarto proceso, se vió, que no hay, en general, un método que permita encontrar la ecuación asociada a una gráfica dada, que tenga la generalidad y facilidad de aplicabilidad que tiene por ejemplo, el *método de tabulación y graficación* para el proceso inverso. En un segundo momento, cuando se estudió el *método de "bosquejo"* de gráficas para ecuaciones de la forma $y = ax + b$, $y = ax^2 + b$ e $y = ax^3 + b$, fué posible, con poco rigor lógico, pero fundado en métodos empíricos, hacer una especie de "I n v e r s i ó n" de resultados, que permite desarrollar este cuarto proceso para gráficas muy particulares (rectas, parábolas y parábolas cúbicas), el cual, si bien no hacía corresponder *la* ecuación asociada a la gráfica dada, sí es suficiente para *proponer* una ecuación factible de asociarle.

En este TEMA se retoman, de nueva cuenta, el tercer y cuarto procesos fundamentales de la Aalítica, aplicados, por un lado, a ecuaciones de la forma $y = ax^n + b$, con $n = 1, 2, 3$ y $a, b \in R$, y por otro, a entidades geométricas como son rectas, parábolas con eje y vértice en el eje de las ordenadas y parábolas cúbicas con punto de inflexión en el eje de las ordenadas y que se abren en la dirección de dicho eje. Por otro lado, se formularán criterios que permiten, ahora sí, encontrar *la* gráfica asociada a casos especiales de ecuaciones de la forma $y = ax + b$, $y = ax^2 + b$ e $y = ax^3 + b$. Recíprocamente, tales criterios nos permitirán determinar *la ecuación* asociada a casos particulares de rectas, parábolas y parábolas cúbicas, con las características antes establecidas. Los criterios que harán posibles las asociaciones anteriores se obtendrán de aunar, a las correlaciones entre los elementos algebraícos de las ecuaciones con los geométricos de las gráficas, establecidos en el TEMA 6, otras correlaciones entre elementos algebraícos con geométricos que permitirán, al mismo tiempo, poner de relieve nuevos conceptos de la síntesis entre el Algebra y la Geometría Euclideana que se manifiestan en la Geometría Analítica.

De inicio, podemos decir, que el criterio que se establecerá en este TEMA permite eliminar, en algunos casos, la ambiguedad a que conduce el método de "borquejar" la gráfica y que, en consecuencia, hace factible, ahora sí, encontrar *la* gráfica asociada a una ecuación y recíprocamente, *la* ecuación asociada a una gráfica.

II. objetivos del tema.

En este T E M A :

. Dada una ecuación de la forma $y = ax + b$, $y = ax^2 + b$ e $y = ax^3 + b$, el alumno CALCULARA las coordenadas de los puntos en donde las gráficas asociadas a tales ecuaciones, intersecan a los ejes de coordenadas.

. Dada una ecuación de la forma $y = ax + b$, $y = ax^2 + b$ e $y = ax^3 + b$ y conociendo la forma de la gráfica asociada a tal ecuación, así como las coordenadas de los puntos en donde la gráfica corta a los ejes coordenados, el alumno DETERMINARA - en los casos que sea posible - la gráfica asociada a tal ecuación.

. Dada la gráfica de una recta, parábola o parábola cúbica -de los casos considerados- y las coordenadas de los puntos en donde tal gráfica corta a los ejes de coordenadas, el alumno ESTABLECERA *la ecuación* asociada a la gráfica mediante el cálculo de los parámetros a y b de la ecuación correspondiente.

. El alumno se EJERCITARA en métodos inductivos y deductivos de obtener conclusiones.

III. observaciones a los **objetivos** y algunas sugerencias metodológicas.

1. P R O C E S O *ecuación-gráfica*.

El análisis que de las ecuaciones $y = ax + b$, $y = ax^2 + b$ e $y = ax^3 + b$ se hizo en el TEMA 6 conduce a proponer o "bosquejar" una gráfica factible de asociarle a ellas, que si bien no es *la gráfica* que le corresponde, si exhibe, presenta o muestra, características que incuestionablemente le corresponderán. El estudiante deberá comprender claramente qué características de la gráfica se obtienen con el análisis del TEMA 6 de manera inequívoca y qué elemento o elementos no ha sido posible determinar sin ambiguedad y qué es, en última instancia, el elemento que impide, con este método, encontrar "*la* gráfica" que le corresponde a la ecuación. Así, el estudiante encontrará que para la ecuación $y = ax + b$, el método de "bosquejo" permite determinar, sin ambiguedad, para la gráfica asociada a ella, las siguientes características:

- la gráfica estará representada en el Plano Cartesiano x-y, "siendo x el eje horizontal" e "y el eje vertical";
- la gráfica será una línea recta;
- la recta pasará por el punto $(0,b)$;
- los cuadrantes por donde pasará la recta;

y que el elemento que no se puede determinar inequívocamente es el "*ángulo de inclinación*" de la recta, ya que para él, se asigna todo un intervalo que depende del valor de "a". Es esta ambigüedad, lo que no hace posible, de acuerdo al método de "bosquejo", encontrar *la* gráfica asociada a la ecuación dada. Una vez identificada la fuente de la ambiguedad, o de la dificultad para encontrar *la* recta asociada, el estudiante orientará su trabajo para encontrar formas o maneras de resolver o zanjar la dificultad. En última instancia, estará tratando de determinar *los mínimos elementos* que se deben conocer para poder determinar de manera precisa una línea recta en particular.

Dada una ecuación particular, de la forma $y = ax + b$, el estudiante sabe que la gráfica que se le asocia será *una línea recta*, graficada en el Plano Cartesiano x-y y que necesariamente tendrá que pasar por el punto $(0,b)$, con un ángulo de inclinación que puede tener un valor determinado dentro de un rango de valores posible. Pero rectas con estas características hay un número infinito. Sin embargo, no es difícil ir, de reconocer lo anterior a percatarse, en consecuencia, de que si de ese número infinito de posibles rectas, que estando en el Plano Cartesiano x-y y pasando por un mismo punto, se especificara *un ángulo de inclinación* en particular, en ese momento, se habría determinado *de manera incontrovertible una única recta*. En otras palabras, el alumno encontrará, que una forma de tener plenamente identificada una línea recta, es conocer, un punto por donde pase y el ángulo de inclinación que presente. Es sumamente importante esta conclusión. Se deberá "forzar" al estudiante en el trabajo empírico para lograrla, y una vez alcanzada se ejercitará en el trazado de rectas a partir de conocer un punto por donde pase y el valor de su ángulo de inclinación. Este trabajo, al dar vivencias al estudiante, será de utilidad cuando, en un TEMA posterior, se aborde la presentación usual de la ecuación de la línea recta.

Otra forma de establecer la identidad de una recta cualesquiera, que sea elemento de la familia que se asocia a una ecuación de la forma $y = ax + b$, y que ya se sabe que pasará necesariamente por el punto $(0,b)$, será explicitando *otro punto* cualesquiera de ella. A esta conclusión llegará el alumno por su trabajo empírico y se reforzará haciéndole recordar el primer postulado de Euclides que garantiza la existencia de *una* línea recta cuando se conocen *dos puntos* cualesquiera por donde pasa. Resumiendo: hasta este momento el estudiante, primero, ha identificado claramente la limitación del método de "bosquejo" para asociar *la* gráfica que le corresponde a una ecuación cualesquiera de la forma $y = ax + b$ y segundo, ha llegado ha formular dos maneras de resolver esta dificultad: una, dando un punto por donde pase la recta y el ángulo de inclinación que tenga y otra, especificar dos puntos cualesquiera de la recta. Dos maneras, que si bien a "primera vista" parecen distintas, el alumno mostrará (en este TEMA) su equivalencia de manera empírica. Aún con esto, para los fines propuestos en este TEMA sólo se hará uso de la segunda forma: conocer dos puntos cualesquiera.

Para el caso de la ecuación $y = ax^2 + b$ se seguirá un procedimiento parecido al que se siguió para la ecuación de la línea recta. Dada una ecuación particular, que sea de la forma $y = ax^2 + b$, el estudiante concluirá que con el método de "bosquejo" se llega a establecer de manera concluyente, que la gráfica asociada a dicha ecuación deberá tener necesariamente las características:

- está representada en el Plano Cartesiano X-y;
- la forma de la gráfica es parabólica;
- el vértice de la parábola tiene por coordenadas $(0,b)$ y su eje coincide con el eje de las ordenadas;
- la parábola se abrirá "hacia arriba" o "hacia abajo" dependiendo del signo del coeficiente "a".

Lo que con el método de "bosquejo" ya no es posible establecer, en forma inequívoca, es la "*anchura*" de la parábola, ya que al formularla, en relación a la que muestra la gráfica asociada a las ecuaciones $y = \pm x^2$ se especifica todo un rango de posibles valores para ella. Esta ambiguedad en el "ancho" de la parábola es la causa de que con el método de "bosquejo" sólo sea posible "proponer" o "bosquejar" una parábola susceptible de asociarle a una ecuación particular de la forma $y = ax^2 + b$ y no *la* parábola que le corresponde.

Identificada claramente la fuente de la ambiguedad, el estudiante la resolverá recurriendo a procedimientos empíricos. A estas alturas del curso hay un hecho que con seguridad podrá inferir el estudiante: la simetría, que con respecto al eje de las ordenadas exhibe la parábola. Se observa que muchos estudiantes llegan a esta conclusión, tan temprano como es la época en que por *tabulación y graficación* encuentran la gráfica asociada a una ecuación de la forma $y = ax^2 + b$: "hacen trampa" al tabular la ecuación, ya que sólo la realizan para valores positivos (o negativos) de la variable independiente y para los negativos (o positivos), ya sin realizar las operaciones, les asignan los valores que obtuvieron para el caso positivo (o negativo). Este hecho hace que los estudiantes, por lo general, al plantearles el problema de resolver la ambiguedad para el caso de la parábola, concluyen que ésta se podría resolver si se conociesen dos puntos cualesquiera (diferente del vértice), simétricos con respecto al eje de las ordenadas, por donde la parábola tiene que pasar. Habrá que "llevar" al estudiante a que alcance esta conclusión.

Finalmente, para el caso de la ecuación $y = ax^3 + b$, el alumno concluirá, que con el método de "bosquejo", las características que necesariamente deberá tener la gráfica asociada a la ecuación, serán:

- estará representada en el Plano Cartesino x-y;
- tendrá la forma de una parábola cúbica;
- el punto de inflexión de la parábola cúbica tendrá por coordenadas $(0,b)$ y su eje coincidirá con el eje de las ordenadas;
- los cuadrantes por donde pasa la parábola cúbica.

Estas cuatro serán las características que de manera concluyente se establecen con el método de "bosquejo". La que ya no es posible conocer, sin ambiguedad, es lo que se ha denominado "ancho" de la parábola cúbica, en virtud de que ésta se especifica en comparación con la que exhibe la gráfica asociada a las ecuaciones $y = \pm x^3$.

Una vez que el estudiante ha ubicado en que recide la ambiguedad, para el caso de la parábola cúbica, procederá a encontrar la forma de resolverla. En este intento se valdrá puramente de métodos empíricos. La conclusión a la que habrá de llegar es a que si de alguna manera conociese un punto cualesquiera de la gráfica, diferente del punto de inflexión, el problema estaría resuelto. Conocer un punto cualesquiera de la gráfica, distinto al punto de inflexión, sería suficiente para eliminar la ambiguedad en la determinación de *la* parábola cúbica asociada a una ecuación particular de la forma $y = ax^3 + b$.

Resumamos lo visto hasta el momento. Cada una de las ecuaciones de la forma $y = ax + b$, $y = ax^2 + b$ e $y = ax^3 + b$ está formada de variables (x e y), exponentes, coeficientes y término independiente. Por otro lado, toda *recta*, *parábola* o *parábola cúbica* se ha caracterizado por los siguientes elementos: el Plano Cartesiano donde se encuentra representada, su forma (recta, parábola, parábola cúbica), ángulo de inclinación (para el caso de la línea recta) o anchura (para la parábola o parábola cúbica) y el punto de intersección de la gráfica con el eje de las ordenadas. Estableciendo correlaciones entre los elementos algebraícos de las ecuaciones con los geométricos de las gráficas fué posible, del simple conocimiento de los elementos algebraícos de la ecuación *bosquejar* una gráfica (de toda una familia de ellas) susceptible de asociarle a la ecuación y recíprocamente, del puro conocimiento de los elementos geométricos que caracterizan a cada una de las formas geométricas anteriores, *proponer* una ecuación (de toda una familia) susceptible de asociarle a la gráfica dada. La limitación fundamental de este método está en que, para ambos procesos, no permite llevar a cabo una asociación única, pues a una ecuación se le asocia una familia de gráficas y a una gráfica se le asocia una familia de ecuaciones. La ambiguedad de resultados, a que conduce el método de "bosquejo", es su principal limitación. Esta ambiguedad se manifiesta, para el proceso "*ecuación-gráfica*", en la indeterminación del ángulo de inclinación para la línea recta y en la anchura de la parábola o de la parábola cúbica, y para el proceso "*gráfica-ecuación*" en la indeterminación en que queda el coeficiente de la variable independiente.

Para el proceso "*ecuación-gráfica*" se vió que la indeterminación en el ángulo de inclinación de la recta se resuelve al conocer, además del punto en donde la recta corta al eje de las ordenadas, otro punto cualquiera de la recta. La indeterminación en la anchura de ambos tipos de parábolas se elimina conociendo, además del vértice o punto de inflexión, algún otro punto cualquiera de la gráfica. Cómo eliminar la ambiguedad en el valor del coeficiente de la variable independiente, para el proceso "*gráfica-ecuación*", se verá posteriormente.

A una ecuación de la forma $y = ax + b$, $y = ax^2 + b$ e $y = ax^3+b$, el método de "bosquejo" permite asociarle toda una familia de gráficas. De ésta, se podría discriminar una en particular si se conociera un punto (diferente al que ya se conoce) por donde se supiera que pasa. El problema se reduce ahora a conocer un punto por donde la gráfica, al representarla en un Plano Cartesiano, deberá pasar. De momento, el estudiante recordará que hay dos formas de entender la expresión "conocer un punto": una es en el sentido de dar el punto geométrico y decir "la gráfica pasa por este punto" y otra es, dar las coordenadas que permitan su localización en el Plano Cartesiano. Diferencia, tal vez "sutil", pero importante, ya que en el proceso que estudiamos, la expresión "conocer un punto" no se entenderá en el primer sentido. El estudiante reconocerá que dada una ecuación, de las formas que se han estado estudiando, no hay necesidad de proporcionar, de manera adicional, un punto específico en el Plano Cartesiano, por donde la gráfica de la ecuación deberá pasar, ya que conociendo la ecuación de la gráfica, por el método de tabulación no sólo es posible conocer *un punto* sino tantos como se deseen. Así, si el problema que hay, para eliminar la ambiguedad en la gráfica asociada a una ecuación dada es conocer un punto por donde tiene que pasar, se puede decir que no existe, ya que éste se puede resolver con el método de tabulación. Cuando el alumno ha establecido lo anterior, es capaz de encontrar *la* gráfica asociada a una ecuación de la forma $y = ax + b$, $y = ax^2 + b$ e $y = ax^3 + b$.

Un caso particular, pero interesante, del anterior, es cuando el punto que se encuentra es el punto donde la gráfica corta al eje de las abscisa. Recuérdese que de momento el alumno es capaz de inferir las coordenadas del punto en donde la gráfica corta al eje de las ordenadas pero no se ha visto lo referente a su intersección con el eje de las abscisa. Estudiar este caso particular permite que el alumno establezca la relación que existe entre el *grado* de una variable en una ecuación algebraíca con dos variables y el *número de intersecciones* que la gráfica de esa ecuación tendría o podría tener al representarla en el Plano Cartesiano, con el eje correspondiente. La relación entre el grado de una variable en una ecuación y las intersecciones que su gráfica presenta con los ejes coordenados es importante porque cuando se está interesado en conocer las características, comportamiento o particulares de la gráfica de una ecuación o relación funcional, con respecto a un sistema coordenado en particular, un criterio, elemento o aspecto que se considera son las intersecciones que dicha gráfica va a tener con los ejes coordenados. Así, dada la ecuación $x^2 + y^2 = 16$ será posible afirmar que su gráfica se cortará con los ejes "x" e "y" en a lo más dos puntos con cada uno de ellos. Recíprocamente, si se sabe que una gráfica, que corresponde a una ecuación algebraíca, corta al eje "x" en dos puntos y al eje "y" en uno, se podría afirmar que en su ecuación, el grado de la variable "x" será mínimamente *dos* y el de la variable "y" será al menos *uno*. Bien puede ser que no conozcamos como sea la gráfica de la ecuación $y = 5 + (x + 1)^2$ pero la relación entre grado de las incógnitas y las intersecciones de una gráfica con los ejes nos dice que de seguro la gráfica no puede ser como la que se muestra en la FIGURA 2.

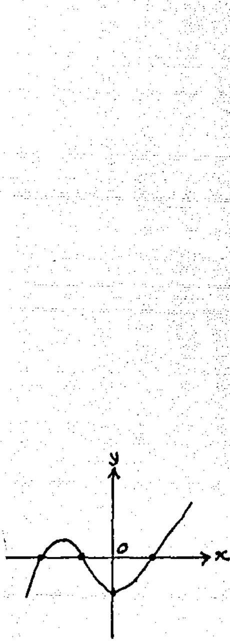


FIG. 2

No nos perdamos. Estudiaremos las intersecciones que una gráfica presenta con los ejes coordenados por dos razones : una, porque proporciona "el punto de más" que necesitamos conocer para eliminar la ambiguedad a que conduce el método de "bosquejo" y dos, porque es útil cuando, en cursos posteriores, se aborde el problema general de encontrar la gráfica asociada a una ecuación dada. Por "estudiar" las intersecciones de una gráfica con los Ejes Cartesianos lo que se está queriendo decir, en este apartado, es: dada una ecuación de la forma $y = ax + b$, $y = ax^2 + b$ o $y = ax^3 + b$, determinar con procedimientos algebraícos las coordenadas de los puntos donde estas gráficas corten a los Ejes Cartesianos.

De forma empírica, el estudiante encontrará el número de intersecciones que una recta, parábola o parábola cúbica (de las que hemos estado estudiando) pueden tener con los ejes cartesianos. Notará que el número de intersecciones que presenten dependerá de la posición en la que se encuentren con respecto al sistema de coordenadas, en que estén representadas. La conclusión a que el estudiante llegará es que con los ejes cartesianos la *recta* tendrá una o dos intersecciones, la *parábola* una o tres y la *parábola cúbica* una o dos. Una conclusión semejante se establecerá para cada uno de los ejes cartesianos. En este punto el profesor explicará que las intersecciones que una gráfica presente con los ejes cartesianos es un caso particular, específico, de otras intersecciones que ésa gráfica tendrá con otras curvas o gráficas como podrían ser rectas, parábolas, parábolas cúbicas o cualquier otra. Esto último no le es totalmente desconocido al estudiante. El ha trabajado, en el TEMA 6 y 7, con rectas, parábolas o parábolas cúbicas que se intersecan o bien que no se intersecan. Pero, siempre ha considerado elementos de la misma familia. Es conveniente que el profesor en este punto, retome lo visto en los dos temas anteriores y ejemplifique con diferentes situaciones, parejas de curvas, no necesariamente de la misma familia, que en unos casos se cortan y en otros no.

Hay una observación simple, pero importante, que el alumno volverá a ratificar en este TEMA : el punto de intersección de dos curvas pertenece, está o se encuentra en ambas curvas a la vez. Obsevación simple pero que es condición *necesaria y suficiente* para que dos o más curvas se corten.

Por otro lado, al recordar que en Geometría Analítica :

- Cada punto tiene asociada una pareja de números Reales.
- Cada curva "en el plano cartesiano" cuyas coordenadas de sus puntos presenten una relación matemática, tiene asociada una ecuación con dos variables reales.
- Las coordenadas de los puntos de una gráfica son soluciones de su ecuación.
- La gráfica de una ecuación está formada por puntos cuyas coordenadas son soluciones de la ecuación dada.

El estudiante concluirá que al cortarse dos curvas en uno o más puntos, la pareja de números asociada a cada una de las intersecciones será solución de las ecuaciones asociadas a las curvas.

Cuando se llega a este punto, el estudiante recordará algunos conceptos y algoritmos relacionados con la solución de parejas de ecuaciones con dos variables. Este es un tema que conoce de sus cursos de Algebra y será conveniente que se ejercite en la solución de parejas de ecuaciones de dos variables reales y en la comprobación de la solución encontrada. En este momento, el estudiante, recordando que a toda ecuación con dos variables reales le corresponde una gráfica en el Plano Cartesiano, y que a toda pareja de números reales le corresponde un punto en el Plano Cartesiano, relacionará la solución del sistema de ecuaciones con las coordenadas del punto en donde las curvas asociadas a las ecuaciones, se intersecan.

Encontrar intersecciones de curvas, por métodos puramente algebraicos, es un resultado propio de la Geometría Analítica, que por sus alcances, sería conveniente que el profesor lo contrastara con los euclídeos para alguna situación específica que requiera encontrar un punto particular como la intersección de dos curvas. Este contraste, si se hace, haría notar la diferencia, entre los métodos analíticos y los euclídeos.

Una vez que el estudiante sabe que para conocer los puntos en donde dos curvas se cortan, se puede lograr resolviendo el sistema de las ecuaciones asociadas a dichas curvas, se retomará el problema de encontrar los puntos en donde una recta, una parábola y una parábola cúbica cortan a los ejes cartesianos. Para ello lo primero que se tiene que lograr en los estudiantes es que sean capaces de concebir a los ejes coordenados como casos específicos de "curvas" y que en consecuencia deberán tener asociadas determinadas ecuaciones. Esto no es fácil. Hay a quienes les cuesta trabajo aceptar que los ejes cartesianos tienen ecuaciones. Con uno de ellos -el "x"- no hay tanto problema, porque con la forma que se ha dado para la ecuación de la línea recta - $y = ax + b$ -, cuando $a = b = 0$ se obtiene, o mejor dicho, se obtuvo en el TEMA 6 la ecuación $y = 0$, que no es otra que la ecuación del eje "x". Para el eje "y" hay dificultad. No es posible, a partir de la forma $y = ax + b$ llegar a la ecuación de este eje. Sin embargo, de nuevo, una buena forma que hay, por la experiencia matemática que deja en el alumno, para determinar la ecuación del eje "y", es la empiria. Es conveniente que por esta vía el estudiante infiera que la ecuación asociada al eje "y" es $x = 0$. Como una generalización de esto el alumno inferirá las ecuaciones de rectas paralelas al eje de las ordenadas. En este momento es recomendable aprovechar la coyuntura y hacer un paréntesis para que el alumno, valiéndose del concepto de *ecuaciones equivalentes*, infiera la ecuación general de la recta:
$Ax + By + C = 0$, donde $A, B, C \in R$, así como también otra

presentación de las ecuaciones de parábola y parábola cúbica con sus respectivas condiciones : $Ax^2 + By + C = 0$ y $Ax^3 + By + C = 0$, con $A,B,C \in R$ y $A,B \neq 0$.

Cuando el estudiante conoce las ecuaciones asociadas a cada eje cartesiano puede ya encontrar las intersecciones que las gráficas asociadas a las ecuaciones de la forma $y = ax + b$, $y = ax^2 + b$ e $y = ax^3 + b$, tendrán con tales ejes.

El estudiante deberá adquirir habilidad en encontrar interseccio nes con los ejes coordenados y la única forma de lograrlo es la práctica, el ejercicio. Este trabajo algorítmico lo resumirá el estudiante explicitando las formas de las ecuaciones simultáneas que ha resuelto para encontrar las intersecciones de la recta, pa rábola y parábola cúbica con los ejes cartesianos.

Como consecuencia de sistematizar y observar los resultados de es te trabajo algorítmico, el alumno concluirá :

- Que las coordenadas del punto de intersección de las gráfi cas con el eje de las ordenadas que el había obtenido de manera empírica se justifican matemáticamente al resolver los sistemas siguientes:

  $y = ax + b$; $y = ax^2 + b$, con $a \neq 0$; $y = ax^3 + b$, con $a \neq 0$
  $x = 0$ $\qquad$ $x = 0$ $\qquad$ $x = 0$

  cuyas soluciones son las coordenadas de los puntos en don de una recta, una parábola o una parábola cúbica corta al eje de las ordenadas.

- A qué sistemas de ecuaciones y/o condiciones del sistema corresponden los casos en que una recta, una parábola y una parábola cúbica presentan una sóla intersección con los ejes catesianos.
- A qué sistemas de ecuaciones y/o condiciones del sistema, corresponden los casos en que una recta, una parábola o una parábola cúbica presentan dos intersecciones con los ejes cartesianos.
- A qué sistemas de ecuaciones y/o condiciones del sistema corresponden los casos en que una recta, una parábola o una parábola cúbica presentan tres intersecciones con los ejes cartesianos.
- La relación que existe entre el exponente de las variables en las ecuaciones estudiadas y el número de intersecciones que la gráfica presenta con el eje respectivo.

- Cuáles son los sistemas de ecuaciones que resuelve cuando "tabula" una expresión de la forma $y = ax + b$, $y = ax^2 + b$ e $y = ax^3 + b$.

Establecidas estas conclusiones, se retoma la cuestión de la indeterminación a que conduce el método de "bosquejo" para el proceso *ecuación-gráfica*. Un poco antes, en este TEMA, se concluyó que esta indeterminación se podía eliminar si además del punto de intersección de la gráfica con el eje de las ordenadas se conociese "una" intersección (diferente a la anterior) de la gráfica con el eje de las abscisas. Por lo tanto, con lo tratado hasta ahora, el estudiante :

- Identificará en qué casos, dada una ecuación de la forma $y = ax + b$, $y = ax^2 + b$ e $y = ax^3 + b$, la indeterminación en la gráfica asociada a la ecuación, a que conduce el método de "bosquejo" se puede eliminar al considerar las intersecciones que dicha gráfica tiene con los ejes cartesianos.
- Dadas ecuaciones de la forma $y = ax + b$, $y = ax^2 + b$ e $y = ax^3 + b$, utilizando el método de "bosquejo" y las intersecciones de la gráfica con el eje de las abscisas, encontrará *la* gráfica asociada a la ecuación en los casos en que esto sea posible.

2. P R O C E S O *gráfica-ecuación* .

Cuando se conoce la gráfica, en forma de dibujo, de una recta, parábola o parábola cúbica, el método de "bosquejo" permite llegar a proponer una posible ecuación para la gráfica. Decimos "posible" porque en la ecuación que se dá hay dos elementos de los cuales no estamos seguros : el valor del coeficiente de la variable independiente y el del término independiente cuando en la gráfica, para el segundo caso, no se dá el punto de intersección con el eje de las ordenadas. De otras, en cambio, no tenemos duda. Estamos seguros de las variables, de los exponentes de ellas y de los signos del coeficiente de la variable independiente y del término independiente. En relación a lo que hace que la ecuación propuesta de acuerdo al método de "bosquejo" sea indeterminada, el estudiante recordará, para el caso de la recta, parábola y parábola cúbica la razón de la indeterminación. Por otro lado, se ha visto -y lo debe recordar el estudiante- que si además del "dibujo" conocemos las coordenadas del punto de intersección de la gráfica con el eje de las ordenadas, una de las ambiguedades se elimina, ya que se puede inferir el valor del término independiente.

El objetivo central de esta segunda parte del TEMA recide, en que el estudiante conozca lo que podríamos llamar, la situación recíproca de lo tratado en la primera parte de este TEMA. En esencia, los objetivos son :

- Que el estudiante conozca que para eliminar las ambiguedades descritas en el párrafo anterior, basta con tener, además del "dibujo" de la gráfica, las coordenadas de los puntos en donde ésta corta a los ejes cartesianos.
- Que el estudiante, dada la gráfica y las coordenadas de los puntos de intersección donde corta a los ejes cartesianos, encuentre, para los casos posibles, *la* ecuación asociada a tal gráfica.

Para lograr lo anterior, hay necesidad de que :

- El estudiante sea capaz de dar la forma de la ecuación que corresponde a la gráfica de una recta, parábola o parábola cúbica (en los últimos dos casos nos referimos a las que se han estado estudiando) .
- El estudiante recuerde que conocer *la* ecuación de una gráfica en particular, que sea de forma recta, parabólica o parábola cúbica, es conocer, sin ambiguedad, el signo y el valor del término independiente y del coeficiente de la variable independiente en expresiones de la forma $y = ax + b$, $y = ax^2 + b$ e $y = ax^3 + b$.
- El estudiante recuerde lo que representa o significa, para la gráfica asociada a una ecuación de la forma $y = ax + b$, $y = ax^2 + b$ e $y = ax^3 + b$, una solución cualesquiera de la ecuación y recíprocamente, el significado, para las mismas ecuaciones, de las coordenadas de cualquier punto que se encuentre "sobre" la gráfica asociada a tal ecuación.
- El estudiante recuerde la condición necesaria y suficiente para resolver una ecuación con dos variables reales.
- El estudiante, utilizando la forma de la ecuación correspondiente y los valores de las coordenadas de los puntos en donde la gráfica corta a los ejes, establecerá y resolvera el sistema de ecuaciones que permita conocer los valores de "a" y "b" para encontrar *la* ecuación asociada a la gráfica dada.
- El estudiante formulará la ecuación asociada a la gráfica dada.
- El estudiante identificará en qué circunstancias no es posible, con este método, encontrar *la* ecuación asociada.

TEMA 9

CUARTO ACERCAMIENTO AL CUARTO PROCESO FUNDAMENTAL DE LA GEOMETRIA ANALITICA

Deducción de la ecuación asociada a una curva definida como un lugar geométrico

1. Circunferencia
2. Parábola
3. Elipse
4. Línea Recta

I. introducción.

EL PROGRAMA DEL Curso de Geometría Analítica que se está desarrollando se ha planteado -como hilo conductor- en cuanto a contenidos matemáticos se refiere, el carácter sintetizador de esta rama de las Matemáticas. Cabe aclarar, que este carácter se refiere a los *conceptos* analíticos y no al *método* de abordar problemas, el cual, podemos decir, es diferente e independiente de los del Algebra y de la Geometría Euclideana que son las ramas de las Matemáticas que sintetiza la Geometría Analítica.

Al inicio del Programa se enunciaron explícitamente los que se consideran los procesos fundamentales de la Analítica :

I. A un *punto* asociarle un *número*.

II. A un *número* asociarle un *punto*.

III. A una *ecuación* asociarle una *curva*.

IV. A una *curva* asociarle una *ecuación*.

Los diferentes TEMAS del Programa se han centrado en delimitar los OBJETIVOS que se pretenden alcanzar en cada uno de dichos procesos. Es en el marco de estos cuatro procesos en donde se ha intentado, y se seguirá persiguiendo, mostrar el carácter unificador de la Geometría Analítica.

Asociarle a un *punto* un *número*, y el proceso inverso, se logran con la creación de un *sistema de coordenadas*. Este es, quizá, el único concepto analítico que hasta el momento se ha establecido con alguna formalidad. El resto del Programa ha sido un constante retomar, con diferentes enfoques, los procesos *III* y *IV* .

Al proceso de asociar una *c u r v a* a una *e c u a c i ó n* nos hemos acercado en tres momentos. En el primero, por el método de *tabulación y graficación*, se llegan a dibujar un conjunto finito de puntos que después se unen por una línea continua. Este método es laborioso, y si bien, es general, en el sentido de que puede aplicarse a cualquier ecuación de variables reales, es limitado en virtud de que hay necesidad de efectuar todo el procedimiento para cada ecuación particular que se tenga. En el segundo momento, y entendiendo por *c u r v a* un conjunto de puntos unidos por una línea continua la cual es el resultado de graficar parejas de números que provienen de tabular ecuaciones, el estudiante llega, después de un trabajo fundamentalmente inductivo, a establecer correlaciones entre los elementos algebraicos que aparecen en una ecuación y los geométricos que "caracterizan" a las curvas. Esta correlación permite al estudiante *b o s q u e j a r* una gráfica factible de ser asociada a la *ecuación* dada, con sólo considerar los elementos de la ecuación. La limitación de este enfoque recide en que no se alcanza a determinar "*la* gráfica" que le corresponde a la ecuación sino sólo *proponer* una que sea factible. En el tercer acercamiento que se tuvo para este proceso se llegó a eliminar, para algunos casos, la limitación anterior, a través de conocer las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica con los ejes coordenados.

El cuarto proceso, *asociarle a una curva una ecuación*, se ha tratado en dos ocasiones. La primera en el TEMA 6 de este Programa y la segunda en el TEMA 8 . El resultado a que se llegó en la primera ocasión fué que, después de establecer correlaciones entre los elementos algebraícos de la ecuación y los geométricos de las curvas, a una *curva* dada, se *propone* una ecuación factible de serle asociada. La limitación de esta presentación se encuentra en que no se logra determinar "*la* ecuación" que le corresponde a la gráfica dada sino sólo *proponer* una que sea factible. En el segundo acercamiento a este proceso (TEMA 8) , se llega a eliminar, para algunos casos, la limitación anterior, a através de conocer las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica con los ejes coordenados.

En cuanto a contenidos matemáticos se refiere lo enumerado renglones arriba constituye un apretado resumen de lo desarrollado hasta el presente. Refiriéndonos a las habilidades, se puede decir que las que se han encontrado en primer plano son aquellas que tienen relación con los procedimientos inductivos de obtener conocimientos.

En este TEMA se retoma el proceso que asocia una *ecuación* a una *curva*, con un enfoque diferente a los descritos con anterioridad.

II. objetivos del tema.

En este TEMA se pretende que el alumno :

. Continúe CONSTRUYENDO la Geometría Analítica como síntesis del Algebra con la Geometría Euclideana.

. Se EJERCITE en la construcción inductiva de *conceptos analíticos*.

. Se EJERCITE en un tipo de deducción Lógica.

. RECONSTRUYA el método con el cual la Geometría Analítica aborda el proceso de asociar una *ecuación* a una *curva* cuando de ésta se conoce la propiedad geométrica que cumplen todos sus puntos.

. CONTRASTE las características generales de los métodos inductivos y deductivos de abordar el proceso analítico de asociar a una *curva* una *ecuación*.

Utilizando el concepto de *curva* como *lugar geométrico*; la construcción de *conceptos Analíticos* "adecuados", como síntesis de conceptos euclídeos y algebraicos y un tipo especial de deducción lógica :

. DEDUZCA la ecuación de la *Circunferencia* con centro en el punto "C" y radio "*r*".

. DEDUZCA la ecuación de la *Parábola* con foco en el punto "*F*" y directríz la recta "*ℓ*", que se encuentra a una distancia "*d*" del foco.

. DEDUZCA la ecuación de la *Elipse* con focos los puntos F_1 y F_2 y semi-eje igual a "*ℓ*", donde "*ℓ*" es mayor que la distancia entre los focos.

. DEDUZCA la ecuación de la *Línea recta* determinada por los puntos A y B .

III. observaciones a los **objetivos** y algunas sugerencias metodológicas.

El concepto de *lugar geométrico* es fundamental para el desarrollo de este TEMA. El estudiante, en general, está familiarizado con uno de ellos : *la Circunferencia*. En su educación elemental, a través del uso del compás euclídeano, se ha familiarizado con ella. Aparte de este caso, no hay otro lugar geométrico que sea familiar al estudiante. Uno podría pensar que la *línea recta* sería otro lugar geométrico también familiar a un alumno. Sin embargo, esto no es así. Es, bastante difícil que visualice a la *línea recta*, como un lugar geométrico. En la medida en que el alumno, comprenda y esté familiarizado con el concepto de *lugar geométrico*, así será el logro que de los objetivos de este TEMA pueda alcanzar. Es necesario que para este concepto el alumno identifique, comprenda, establezca, ilustre, enuncie, los elementos que participan en la definición de *lugar geométrico* : puntos y/o rectas fijas, parámetros constantes entre estos elementos y la propiedad geométrica que cumple un punto cualquiera del lugar geométrico. Por otro lado, el alumno deberá contar con amplia experiencia en el trazado con regla y/o compás, de circunferencias, parábolas y elipses, cuando de estas se conocen los *elementos constantes que las definen* y la propiedad geométrica que cumplen sus puntos.

Uno de los elementos fundamentales de toda teoría científica son sus *conceptos*, los cuales son intuídos, aprendidos o formulados por un individuo, pero pertenecen a una ciencia. En la Matemática como en cualquier otra ciencia, aparecen en forma de *definiciones* y muchas veces expresados o formulados en lenguaje técnico. La definición establece las condiciones necesarias y suficientes para que "algo" sea lo que es. Una vez que el estudiante ha intuído, construído o inferido un *concepto* (aspectos todos ellos relacionados con su aprendizaje), hay necesidad de establecerlos con el rigor y precisión que la ciencia reclama. Al tratar el concepto de *lugar geométrico* y en particular los de *circunferencia, parábola y elipse*, es una situación adecuada para introducir al estudiante en los aspectos lógicos de la *definición* : qué establece, cómo se formula, qué tipos hay; son aspectos que en este momento se pueden abordar. Esto no quiere decir que el profesor dedique un espacio de tiempo considerable al desarrollo de un tema que tradicionalmente se sitúa en el campo de la Lógica. La elaboración de un trabajo escrito con su respectiva exposición por algún grupo de alumnos sería más que suficiente. Se trata, en lo fundamental, de señalar la importancia de la *definición* en Matemáticas, más que desarrollar con detalle este tema.

Para que la Geometría Analítica aborde, con su método propio, los cuatro procesos que reiteradamente se han mencionado, tiene necesidad de construir conceptos y relaciones entre éstos. Expliquémonos un poco más. Para ello utilicemos lo que en parte se propone en este TEMA. Se dijo que en él se aborda el proceso de *asociar a una curva una ecuación*, cuando por aquella se entiende un *lugar geométrico* y en particular nos restringiremos a la *circunferencia, parábola, elipse* y *recta*, en ése orden. En esencia, de lo que se trata es de que a partir de la definición euclideana del lugar geométrico y utilizando conceptos y métodos analíticos y algebraícos se llegue a establecer la ecuación asociada a tal lugar geométrico. Es claro entonces, que para que la Geometría Analítica pueda abordar el mencionado proceso, para los susodichos lugares geométricos, tendrá necesidad de *construir* algunos conceptos anlíticos. Estos no son muchos. Por la naturaleza de los lugares geométricos que se abordan, los conceptos que hay necesidad de desarrollar son los siguientes : *distancia entre dos puntos* y *pendiente de un segmento de recta*. Sin embargo, para poder establecerlos algebraícamente habrá necesidad de que el estudiante:

- posea el concepto de *distancia dirigida* sobre un eje numérico;
- entienda a la *distancia dirigida* como el concepto que describe un desplazamiento en el eje numérico, en donde el signo indique la dirección en la que se efectuó el desplazamiento y el número, la magnitud de tal desplazamiento;
- infiera la fórmula para calcular una *distancia dirigida* en términos de las coordenadas de los puntos extremos;
- calcule distancias dirigidas para desplazamientos entre dos puntos cualesquiera sobre rectas paralelas a los ejes coordenados;
- recuerde el Teorema de Pitágoras así como la forma en que se aplica;
- interprete al Teorema de Pitágoras como un método de calcular, de manera indirecta, la distancia entre dos puntos cualesquiera;
- conozca la expresión algebraíca para calcular la distancia entre dos puntos cualesquiera del plano, en términos de las coordenadas de dichos puntos;
- aplique, al calculo de distancias, la expresión algebraíca del Teorema de Pitágoras.

Para que el estudiante sea capaz de abordar el estudio de la *línea recta* antes deberá :

- recordar el concepto de triángulos semejantes;
- recordar los criterios para que dos triángulos sean semejantes;
- dados tres puntos colineales (con sus respectivas coordenadas cartesianas, en diferentes cuadrantes) trazando paralelas a los ejes coordenados construir parejas de triángulos semejantes;
- transcribir las relaciones entre lados homólogos de los triángulos semejantes en términos de las coordenadas de los extremos de los segmentos; para ello :
    - dados dos puntos A y B cualesquiera, en el Plano Cartesiano, el alumno comprenderá en qué sentido se dice que el segmento dirigido AB es distino del BA;
    - el alumno comprenderá que la "*dirección*" de un "*segmento dirigido*" está determinado por el sentido en que se recorre;
    - el alumno comprenderá que el segmento AB se puede

recorrer en dos direcciones : de A hacia B o de B hacia A ;

- dados dos puntos cualesquiera A y B , en el Plano Cartesiano, el alumno trazará las dos posibles trayectorias, en ángulo recto, para ir de A hacia B o de B hacia A ;
- dada una pareja cualesquiera de puntos A y B en el Plano Cartesiano, el alumno "alcanzará" el punto B o el A a partir del A o del B por dos trayectorias perpendiculares de acuerdo a rectas paralelas a los ejes coordenados;
- el alumno inferirá que dada una pareja de puntos A y B cualesquiera en el Plano Cartesiano, al recorrer el segmento determinado por ellos de acuerdo a dos trayectorias perpendiculares, en cuanto a signo, los casos que pueden ocurrir son :

  a. que ambas sean positivas o negativas,
  b. que una sea positiva y la otra negativa;

- el alumno conocerá el concepto intuitivo de *pendiente de un segmento de recta;*
- el alumno conocerá la expresión algebraica para cuantificar la pendiente de un segmento de recta;
- el alumno conocerá el concepto de *ángulo de inclinación de un segmento de recta;*
- el alumno establecerá la correlación que existe entre los signos de las trayectorias perpendiculares para recorrer un segmento y el valor de su ángulo de inclinación;
- el estudiante comprenderá la necesidad que hay de establecer una *convención* en cuanto a la dirección en que se recorrerán los segmentos dirigidos con el objeto de no llegar a resultados contradictorios al establecer las relaciones entre lados homólogos de triángulos semejantes.

Para que el alumno pueda encontrar *la* ecuación que corresponda a un lugar geométrico en particular, deberá :

- identificar claramente los *elementos geométricos* (puntos y/o rectas) así como los *parámetros* (distancias entre *puntos y/o rectas*) que intervienen en la definición del lugar geométrico;
- seleccionar *un* sistema de coordenadas rectangular. En este punto el profesor deberá explicar los criterios que se aplican al seleccionar un sistema de coordenadas;
- encontrar, en relación al sistema de coordenadas que se ha seleccionado, los equivalentes algebraicos a los *elementos*

geométricos (puntos y/o rectas) que sirven para especificar al lugar geométrico;

- escoger un punto "P" *cualesquiera* que pertenezca al lugar geométrico;
- establecer simbólicamente la propiedad *geométrica* que debe cumplir un punto "P" que se encuentra en el lugar geométrico en particular;
- asociar las coordenadas (x, y) al punto "P" arbitrario;
- conocer que la ecuación algebraíca de un lugar geométrico en particular es la "*traducción algebraíca*" de la propiedad *geométrica* que cumple un punto "P" cualquiera que se encuentra en el *lugar geométrico* ;
- establecer algebraícamente la *propiedad geométrica* que cumplen los puntos que se encuentran en el lugar geométrico de que se trate.

Sobre la *d e d u c c i ó n l ó g i c a* . Encontrar resultados, más que demostrarlos con rigurosa lógica, ha sido la idea que ha privado hasta antes de este TEMA. Sin embargo, al lado del método inductivo se encuentra el deductivo. Este último permite afirmar una nueva proposición si conocemos otra u otras, y en el llamado Método Científico, formular predicciones a partir de una hipótesis.

El Método Deductivo se funda en las reglas de la Lógica Clásica, y cuando se aplica a una Ciencia específica se diferencia de las otras por el tipo de proposiciones con las que se trabaja. Una presentación rigurosa del método deductivo reclama del conocimiento y manejo de la Lógica Formal, algo que usualmente desconoce un estudiante de los primeros semestres del C.C.H.-Sur y en general, de casi todos los cursos de Matemáticas. Apuntada esta dificultad, uno se pregunta ¡ ¿ Cómo es posible intentar siquiera una presentación deductiva de las Matemáticas ? . La justificacción la encontramos en nuestra propia experiencia.

Hay personas que son capaces no sólo de seguir, sino de elaborar intrincados razonamientos, aunque nunca hayan tenido el más mínimo acercamiento a la Lógica Formal. La misma historia de la cultura corrobora este hecho : *antes de ARISTOTELES , sistematizador de los conocimientos lógicos, hubo, sobre todo, filósofos y matemáticos que practicaron de manera magistral el arte de la argumentación.*

Con frecuencia cuando se habla de una presentación deductiva de las Matemáticas se está de acuerdo, al menos implícitamente, en la habilidad, digamos "humana" de efectuar razonamientos, es más, razonamientos correctos, y algunos de ellos muy complejos, sin haber estudiado Lógica. Otra cuestión muy distinta, es que *todos los humanos, a cualquier edad, y en todas circunstancias*, lo hagan, y otra más sería afirmar que cuando lo hacen, lo hacen siguiendo las presentaciones que de esto han hecho los lógicos.

Las deducciones que se realizarán en este TEMA no serán ése portento de Lógica que se manifiesta cuando se prueba la irracionalidad de $\sqrt{2}$ o la infinitud de los números primos. Son demostraciones directas : a partir de definiciones y utilizando conceptos algebraícos, euclídeos o analíticos, obtener una conclusión.

Aunque por el tipo de demostraciones que se harán no se necesitan, se parte del supuesto que los alumnos del bachillerato poseen una estructura mental en la cual tienen lugar las reglas de inferencia lógica fundamentales como son : *La Ley de Identidad*, *de No-contradicción* y *de Tercero Excluído* . Dado que únicamente se desarrollarán demostraciones directas, de las reglas antes mencionadas, sólo se recurrirá a la *Ley de Identidad* y la *propiedad transitiva*, cuando se aplican a la *lógica de relaciones*, en particular a la *Lógica* de la *igualdad*, que es el tipo de Lógica en que se basan las demostraciones que se efectúan en este TEMA.

Con la idea de presentar una especie de contrastación entre los métodos inductivo y deductivo de abordar el proceso analítico de asociar a una *curva* una *ecuación*, es conveniente iniciar la presentación de este TEMA con el desarrollo de la *Circunferencia* y de la ecuación con ella asociada. Por las razones que se han aclarado en los TEMAS anteriores, los métodos *inductivos* son adecuados cuando se parte del conocimiento de la ecuación y los *deductivos* cuando se cuenta con la definición euclídea de la curva. Empecemos con un enfoque inductivo el estudio de la Circunferencia.

¿ Qué gráfica, en un Plano Cartesiano, le corresponde a la ecuación $x^2 + y^2 = 9$? . ¿ Será alguna o algunas de las gráficas que el estudiante ha estudiado ? . En el TEMA anterior, se encontró que el número máximo de intersecciones que una *recta*, *parábola* o *parábola cúbica* puede tener con los ejes coordenados proporciona condiciones *necesarias* que determinada gráfica debe cumplir para que pertenezca a uno de estos tipos. Esto es, si se sabe que una gráfica en el Plano Cartesiano tiene más de tres puntos de intersección con los ejes coordenados, dicha gráfica no podrá ser *recta*, *parábola* o *parábola cúbica*. El que "*algo*" no cumpla con alguna condición necesaria para "*ser algo*" de "cierto tipo", sirve para descartar la posibilidad de que "*ese algo*" sea de tal "tipo" . Así pués, utilicemos este criterio para dilucidar el tipo de gráfica que le corresponde a la ecuación $x^2 + y^2 = 9$. Para ello, el estudiante :

- recuerda la correlación que se estableció en el TEMA anterior entre *gráfica* y el *número máximo de intersecciones* que la gráfica puede presentar con los ejes coordenados;
- calcula las coordenadas de los puntos de intersección que la gráfica asociada a la ecuación $x^2 + y^2 = 9$ tendrá con los ejes cartesianos y encuentra que son cuatro puntos equidistantes del origen de coordenadas;
- descarta la posibilidad de que la gráfica asociada a la ecuación $x^2 + y^2 = 9$ sea una *recta*, *parábola* o *parábola cúbica*, en virtud de los dos resultados anteriores;
- considera la posibilidad de que sean, ya no *una*, sino *varias* (dos o más) de las gráficas que él conoce, las que pasen por los puntos de intersección encontrados. Por ejemplo, que sean cuatro rectas, dos rectas y dos parábolas,Etc.;
- descarta la posibilidad del punto anterior en virtud de que si tal fuese el caso, de inicio, el número de ecuaciones dada sebió ser diferente de *uno* ;
- propone curvas que sea factible que pasen por los cuatro puntos equidistantes del origen, que ha encontrado como intersecciones. Como el repertorio de curvas con que cuenta el estudiante no es muy amplio, y por la disposición de los cuatro puntos por donde deberá pasar la curva, en general no transcurre mucho tiempo para que alguien sugiera que la curva buscada es *una Circunferencia;*
- propone algún método que proporcione más evidencias a favor de la conjetura del punto anterior. El método que finalmente llegan a sugerir es el de *tabular y graficar* algunos puntos para la ecuación $x^2 + y^2 = 9$ y así poder "observar" la disposición de estos puntos en el Plano Cartesiano;
- tabula y grafica algunos puntos para la ecuación $x^2 + y^2 = 9$. Con esto el estudiante concluye que "parece ser" que la gráfica asociada a la ecuación es *una Circunferencia* con centro en (0,0) y radio igual a 3;

- dadas ecuaciones particulares de la forma $x^2 + y^2 = r^2$ (particulares en el sentido de que el coeficiente "1" de las variables "x" e "y" muestren signos positivos o negativos y la constante "r^2" presente valores con signos distintos), *identifica*, por medio del cálculo de intersecciones con los ejes cartesianos, aquellas ecuaciones susceptibles de ser asociadas con una *circunferencia*;
- identifica las variables, exponentes, coeficientes y término independiente, para aquellas ecuaciones que en el punto anterior son susceptibles de asociarse a circunferencias;
- identifica que la *forma* (circunferencia) de la gráfica asociada a una ecuación de la forma $x^2 + y^2 = r^2$ esta determinada *no sólo* por los exponentes de las variables (como ocurría con anterioridad para la recta, parábola o parábola cúbica) sino también por los signos de la "x^2", "y^2" y del término independiente, obteniéndose una circunferencia sólo para los casos en que las tres magnitudes anteriores son todas positivas o todas negativas;
- identifica los elementos geométricos (centro y radio) que caracterizan a una circunferencia cuando está representada en un Plano Cartesiano;
- identifica el término independiente (r^2) como relacionado con la magnitud del radio, elevado al cuadrado, de la circunferencia;
- abstrae la *forma* de la ecuación de una circunferencia con centro en (0,0) y radio "r".

Resumiendo : ante la ecuación $x^2 + y^2 = 9$, el estudiante ha " deducido " las intersecciones que la gráfica asociada a tal ecuación tendrá con los ejes cartesianos y ha utilizado estas intersecciones para eliminar como posibles gráficas que puedan asociarse a la ecuación a la recta, parábola o parábola cúbica. Por otro lado, ha excluído la posibilidad de que la gráfica asociada a la ecuación $x^2 + y^2 = 9$ sea una combinación de rectas y/o parábolas y/o parábolas cúbicas en virtud del número de ecuaciones con que se cuenta. Ante la imposibilidad de poder asociar a la ecuación $x^2 + y^2 = 9$ alguna o algunas de las gráficas que el estudiante conoce hay la necesidad de formular una *c o n j e t u r a* acerca de la forma que posiblemente tenga la gráfica asociada a $x^2 + y^2 = 9$ y que, entre paréntesis, sabemos que deberá pasar por cuatro puntos equidistantes del origen. El estudiante propone a una *circunferencia* como la gráfica asociada a la ecuación $x^2 + y^2 = 9$ y utiliza el método de tabulación y graficación como criterio para hacer más plausible tal asociación. Finalmente, con un método inductivo análogo al utilizado en el TEMA 6, el estudiante ha llegado a correlacionar los elementos de una ecuación de la forma $x^2 + y^2 = r^2$ con una circunferencia de radio "r" y centro en el origen de coordenadas. Este trabajo tendrá como conclusión final que:

a. Dada una ecuación de la forma $x^2 + y^2 = r^2$ el estudiante será capaz de indicar que la gráfica asociada a tal ecuación es una circunferencia con centro en (0,0) y radio "r" ;

b. Dada una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio "r" el estudiante establecerá la ecuación de la forma $x^2 + y^2 = r^2$ asociada a dicha circunferencia.

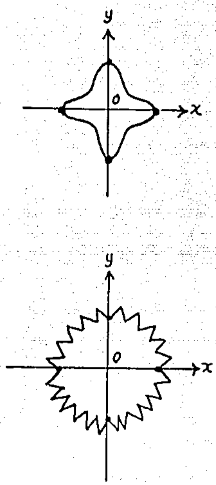


FIG.1

El alumno conocerá la limitación fundamental de la inducción empírica. Por métodos inductivos, no importa cuántas ecuaciones analicemos, siempre habrá o quedará la duda de si *realmente* la gráfica que le corresponde a una ecuación de la forma $x^2 + y^2 = r^2$ es una circunferencia de radio "r" y centro en (0,0). Tal vez pudiere ocurrir que lo que en realidad se tuviése sea una gráfica "muy parecida" a una circunferencia pero que definitivamente no lo sea. Ejemplos podrían ser las dos gráficas que se muestran en la FIG. 1 . La limitación fundamental de la inducción empírica es que habiéndose presentado un hecho durante un número cualesquiera de veces, nada garantiza uno próximo, y, en el caso de que lo haya, que sea idéntico al anterior.

Hasta este momento los estudiantes han :

1. conjeturado una posible solución al problema; ¿ qué gráfica es aquella que pasa por cuatro puntos equidistantes del origen de coordenadas ?;

2. han hecho "bastante" plausible la solución basándose en la evidencia que proporciona el método de tabulación y graficación;

pero, no han *d e m o s t r a d o* de manera *irrefutable* que a la ecuación $x^2 + y^2 = 9$ le corresponde la circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio 3 .

En el *Método Científico* una forma de descartar o retener conjeturas o hipótesis es deducir consecuencias de éstas y observar qué ocurre en "la práctica" con estas consecuencias :

a. si fueren falsas se descarta la conjetura;

b. si fueren verdaderas, la plausibilidad de la conjetura aumenta.

Si bien nuestro caso, por varias razones, no es exactamente uno en donde tenga que ver el *Método Científico*, en especial porque éste se aplica a las ciencias no formales, puede servirnos para introducir el *M E T O D O D E D U C T I V O* de abordar el proceso analítico que asocia *a una curva una ecuación*; claro está, que restringido a un caso particular. Para ello debemos aceptar la *conjetura* de que la gráfica que pasa por cuatro puntos equidistantes del origen de coordenadas es una circunferencia y *d e d u c i r* la relación algebraica que cumplen las coordenadas de cualquier punto que está sobre ella.

Una vez aceptada la conjetura y utilizando el concepto de circunferencia como un lugar geométrico, conceptos analíticos (anteriormente descritos) y reglas de la Lógica (mencionadas con anterioridad) se llega a establecer que :

> Si la gráfica que pasa por los puntos $(3,0)$, $(0,3)$, $(-3,0)$, $(0,-3)$ es una *circunferencia* con centro en $(0,0)$ y radio igual a 3 entonces, la *ecuación* que satisfacen las coordenadas de cualesquiera de sus puntos es $x^2 + y^2 = 9$.

Debe quedar perfectamente claro que la deducción realizada es la que corresponde al problema recíproco planteado originalmente : ¿ Cuál es la gráfica asociada a la ecuación $x^2 + y^2 = 9$?. Resolver este problema por deducción, está fuera de las pretenciones de este curso.

Para finalizar la descripción de lo que se pretende alcanzar en este TEMA, hagamos unas últimas consideraciones:

- antes de obtener la "ecuación general" para cada uno de los lugares geométricos que se estudian, es conveniente que el estudiante se familiarice en la deducción de ecuaciones asociadas a lugares geométricos específicos;
- para los casos de la *parábola* y *recta* es conveniente que, se elígan los lugares geométricos y el sistema de coordenadas de tal forma que la ecuación que se obtenga tenga la forma que se ha trabajado en los TEMAS anteriores, es decir, para la recta la ecuación deberá ser $y = ax + b$, y para la parábola la ecuación será $y = ax^2 + b$;

- para encontrar *una* ecuación asociada a un lugar geométrico en particular, se escogerá un sistema de coordenadas cuya posición con respecto a los elementos geométricos (puntos y/o rectas) que sirvan para definir el lugar geométrico sea la más simple posible;
- el profesor explicará lo que se debería hacer, de acuerdo a la definición formal de cualquier lugar geométrico, para abordar el problema inverso : dada una ecuación de dos variables reales, encontrar el lugar geométrico asociado a ella;
- debido a que la presentación del material cubierto en este TEMA es, en lo fundamental, análoga a la que aparece normalmente en cualquier libro de Geometría Analítica elemental, se considera innecesario abundar más en ella.

TEMA 10

QUINTO ACERCAMIENTO AL CUARTO PROCESO FUNDAMENTAL DE LA GEOMETRIA ANALITICA

Ajuste de Curvas

I. introducción.

La idea que ha privado en el desarrollo de este programa es presentar a la Geometría Analítica como síntesis del Algebra con la Geometría Euclideana. Esta síntesis se pone de manifiesto en los conceptos analíticos al compartir características algebraícas y euclídeas.

Por otro lado, la construcción de los conceptos analíticos se ha hecho en el marco de lo que hemos denominado procesos fundamentales en los cuales se establecen las asociaciones entre los conceptos fundamentales del Algebra -número y ecuación- con los conceptos fundamentales de la Geometría -punto y curva- . Los distintos temas del programa han sido presentaciones de aquellos procesos fundamentales.

El tema que ahora nos ocupa trata de una presentación particular del proceso que asocia, a una gráfica en un plano cartesiano, una ecuación con dos variables reales. El mismo proceso se ha tratado en otros lugares de este programa. Vale la pena hacer un breve recordatorio de lo dicho, en torno a lo anterior, con el objeto de contextualizar el presente tema:

1. En el Tema 5, por simple inspección, y sin herramienta matemática, el alumno formula la relación algebraíca que existe entre la ordenada con la abscisa, para una colección de parejas ordenadas de números reales, en las cuales se presenta una relación no "difícil" de encontrar (la Tabla I-1, es un ejemplo).

Tabla I-1

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-6	-4	-2	0	2	4	6

2. En el Tema 6 se desarrolló un método que permite asignar, a un número limitado de gráficas (recta, parábola, parábola cúbica), representadas en un plano cartesiano, una ecuación factible de asociarse a ellas. Por ejemplo, a la gráfica representada en la Fig. 1-1 es factible asociarle la ecuación $Y = -3x + 5$.
3. En el Tema 9, y entendiendo por gráfica un "lugar geométrico", se dedujo la ecuación asociada a un número limitado de "lugares geométricos": circunferencia, parábola, elipse y recta.

Lo hecho en el Tema 9 exhibe, al mismo tiempo, la fuerza y "limitación" de los métodos analíticos para encontrar la ecuación asociada a una curva dada:

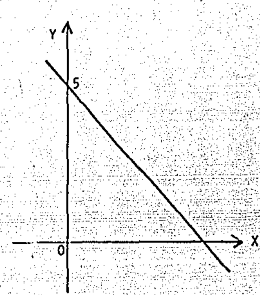


FIG. 1-1.

En Geometría Analítica se puede hallar la ecuación asociada a una curva, sólo en el caso en que ésta se defina como un lugar geométrico.

Cuando por curva en el plano cartesiano se entienda "un conjunto de parejas de números reales", o "un conjunto finito de puntos" o "una línea continua", la Geometría Analítica ya no posee un método general para encontrar la ecuación que le corresponde a tal curva. Esta es, podríamos decir, la limitación de los "métodos analíticos".

El aspecto central de este Tema 10 es mostrar, en forma elemental, cómo la Matemática ha resuelto la limitación de los métodos de la Analítica. Debe quedar claro, desde un principio que los métodos que se utilizan en la solución del problema antes mencionado, ya no corresponden a la Geometría Analítica sino a otros ámbitos de la Matemática: los " Métodos numéricos ". Aún con ello, hay razones por las cuales este material se presenta en un programa de Geometría Analítica. Entre ellas podemos apuntar:

. Mostrar la " limitación " que la Geometría Analítica tiene para estudiar el proceso que asocia a una gráfica una ecuación, así como presentar un "indicio" de la forma en la cual se zanja esta dificultad.

. Presentar el papel que desempeñan los conceptos analíticos desarrollados con anterioridad en la solución del problema.

. Enseñar la utilidad que tienen los conceptos analíticos cuando se utilizan como herramienta para establecer relaciones cuantitativas entre variables que describan alguna "situación concreta" en ámbitos del conocimiento distintos de los matemáticos.

. Presentar un ejemplo de situación, frecuente en matemáticas, en donde, un problema que aparece en determinado ámbito de ella, no es posible resolverlo ahí mismo, sin recurrir a otro tipo de conceptos matemáticos. En otras palabras, mostrar que algunos problemas analíticos han servido de "fuente" o "inspiración" para el desarrollo de otras áreas de la Matemática.

En este Tema trabajaremos con gráficas en el sentido de "conjunto de parejas ordenadas de números reales", o de "un número finito de puntos representados en un plano cartesiano" o de "una línea contínua trazada en dicho plano". Sin embargo, debido a que siempre es posible, mediante mediciones, transformar un conjunto finito de puntos o una línea contínua, representados ambos en un plano cartesiano, a una colección de "parejas ordenadas de números reales", podemos reducir los tres significados de curva dados anteriormente, a uno solo, y entenderla como una colección de parejas ordenadas de números reales.

Las colecciones de parejas ordenadas de números reales son de particular importancia ya que cuando se intentan encontrar relaciones cuantitativas entre variables que describan alguna "situación concreta" son, como resultado de mediciones, parejas de números lo que, en principio, se tienen. Después se tendrá su gráfica y, tal vez, finalmente, una ecuación.

Tabla 1-2.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-3/2	-1	-1/2	0	1/2	1	3/2

Para una pareja ordenada de números reales, por ejemplo, (5,8), hay un número infinito de posibles formas de escribir la ordenada, 8, en términos de la abscisa, 5. Lo mismo se puede decir para cada pareja que pertenezca a una misma colección: la ordenada de cada pareja se puede escribir de "mil maneras", en términos de su correspondiente abscisa. Sin embargo, cuando se habla de encontrar la ecuación asociada a una colección de parejas ordenadas de números reales, lo que se quiere decir es que cada ordenada, de cada pareja, se escriba, en términos de su abscisa, de la misma manera. Así, para las parejas ordenadas que se muestran en la Tabla 1-2, se puede decir que cada ordenada es igual a la mitad de su abscisa.

Cualesquier colección de parejas ordenadas de números reales se puede ubicar en alguna de las dos clases siguientes:

. Aquellas para las cuales existe una forma de escribir todas las ordenadas de cada pareja que pertenezcan a la colección. Ejemplo, las parejas mostradas en la Tabla I-2.

. Aquellas para las cuales no existe una forma de escribir todas las ordenadas de la colección en términos de su abscisa. Ejemplo, las parejas que se muestran en la Tabla I-3.

Tabla I-3.

x	9	5	2.4	2.1	1
y	5	10	30	40	100

Las colecciones de parejas de números reales para las cuales existe relación algebraíca única entre la segunda coordenada y la primera pueden, a su vez, subdividirse en dos grupos:

Tabla I-4.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	10	5	2	1	2	5	10

. Aquellas cuya relación algebraíca sea de carácter polinomial. Ejemplo, las parejas que aparecen en la Tabla I-4.

Tabla I-5.

x	0	1	2	3	4	5	6
y	1	2	4	8	16	32	64

. Aquellas cuya relación algebraíca no sea de carácter polinomial. Ejemplo, las parejas que aparecen en la Tabla I-5.

Tabla I-6.

x	100	120	140	160	180	200
y	0.45	.55	.60	.70	.80	.85

De igual forma, las colecciones de parejas de números reales para las cuales no existe relación algebraíca única entre sus ordenadas con sus respectivas abscisas, pueden subdividirse en dos clases:

Tabla I-7.

x	1	2	3	4	5	6
y	100	.1	-2	3	-9	500

. Aquellas para las cuales es posible encontrar una relación algebraíca a la cual se aproximen "bastante" las correspondientes parejas de la colección. Ejemplo, las parejas que aparecen en la Tabla I-6.

. Aquellas para las cuales no es posible encontrar una relación algebraíca a la cual se aproximen "bastante" las parejas ordenadas de la colección. Ejemplo, las parejas de la Tabla I-7.

La clasificación anterior pone de manifiesto la amplia variedad de colecciones de parejas ordenadas que se pueden tener. Esto nos lleva a precisar los tipos de colecciones con las que trabajaremos en este tema. En virtud de ser un curso introductorio y por tal razón, los elementos matemáticos con que cuenta un estudiante no son muy elaborados, en este tema solo trataremos con:

. Colecciones de parejas de números reales cuyas coordenadas estén relacionadas en forma polinomial. Ejemplo, la colección que aparece en la Tabla I-4.

. Colecciones de parejas de números reales que se aproximen a alguna relación algebraíca. Ejemplo, la que aparece en la Tabla I-6.

II. objetivos del tema.

Los O B J E T I V O S que un estudiante deberá alcanzar en este Tema 10 son:

. RECONOCER la "limitación" de la Geometría Analítica para resolver problema de encontrar la ecuación asociada a una curva.

. RECONOCER la dificultad matemática de resolver el problema general de encontrar la ecuación asociada a una gráfica representada en un plano cartesiano.

. APLICAR, a una colección de parejas de números reales que correspondan a una relación polinomial, el método de Diferencias Divididas para encontrar el polinomio de la forma

$$f(x) = f(a) + (x-a)\Delta f(a) + (x-a)(x-b)\Delta^2 f(a) + \ldots + \ldots$$

asociado a la colección de parejas de números reales.

. ENCONTRAR, para una colección de parejas de números reales a quienes se les pueda "ajustar" una línea recta, diferentes rectas que constituyan ajustes a tales parejas de números y DETERMINARA cuál es el "mejor ajuste".

. VALORAR la importancia de los Métodos Numéricos para ajustar a un conjunto de parejas de números reales, provenientes de la medición de alguna "situación concreta", una gráfica cartesiana.

. RECONOCER la importancia que tienen las ecuaciones de los lugares geométricos estudiados con anterioridad para el ajuste de curvas.

. RECONOCER al método de Diferencias Divididas como un Método Numérico.

III. observaciones a los **objetivos** y algunas sugerencias metodológicas.

Será necesario, para alcanzar los OBJETIVOS anteriores, - que el estudiante:

1. RECUERDE los Conceptos de:
   Gráfica Cartesiana.
   Ecuación con dos variables reales.
   Variable Independiente
   Variable dependiente.
   Ecuación de la recta en la forma $y = ax + b$.
   Ecuación de la parábola en la forma $y = ax^2 + b$.
   Ecuación de la parábola cúbica en la forma $y = ax^3 + b$.

2. Sea CAPAZ de :

   TRAZAR gráficas cartesianas.
   REALIZAR operaciones algebraícas elementales.

3. CONOZCA los CONCEPTOS de :

   Ajuste de Curvas.
   Mejor Ajuste.
   Polinomio de variable real.
   Método Numérico .

4. CONOZCA :

   La Fórmula de Newton
   $f(x) = f(a) + (x-a)\Delta f(a) + (x-a)(x-b)\Delta^2 f(a) + \ldots + \ldots$

5. CONOZCA y sea capaz de APLICAR :

   El Método de Diferencias Divididas.
   Un criterio "simple" para determinar el "mejor" ajuste a una colección de parejas ordenadas de números reales.

6. ESTABLEZCA las relaciones y resultados siguientes:

   Que un polinomio se puede interpretar como la suma algebraíca de las diversas ecuaciones estudiadas con anterioridad, excepto la de la Circunferencia y Elipse.

Que un polinomio en particular, de cierto grado, está determinado por sus coeficientes y término independiente.

INTERPRETE a $f(x)$ como otra forma de representar a 'y'.

7. Para encontrar el polinomio asociado a una colección de parejas ordenadas de números reales, que correspondan a una relación polinomial, por medio del Método de Diferencias Divididas, el estudiante debe ser capaz de:

   CONSTRUIR la tabla de primeras, segundas, terceras, Etc. Diferencias Divididas hasta obtener aquella de valor constante.

   IDENTIFICAR el grado del polinomio, tomando en cuenta la diferencia dividida que resultó constante.

   SELECCIONAR de entre los valores de las abscisas aquellas que harán el papel de a, b, c, ...

   IDENTIFICAR los valores de $f(a)$, $\Delta f(a)$, $\Delta^2 f(a)$, Etc.

   SUSTITUIR los valores de $f(a)$, a, b, c,... $f(a)$, $\Lambda f(a)$, $\Lambda f(a)$,.....Etc.

   EFECTUAR LAS OPERACIONES para encontrar el polinomio que corresponda a la colección de parejas ordenadas.

8. Dada una colección de parejas ordenadas de números reales, para la cual es posible encontrar una gráfica contínua, que se aproxime "bastante" a las parejas ordenadas de la colección, el estudiante debe ser capaz de:

   REPRESENTAR la colección de parejas ordenadas en un plano cartesiano.

   TRAZAR tres gráficas, entendidas como líneas contínuas, considerando los puntos antes representados, que constituyan ajustes a la colección de puntos dados.

   APLICAR el criterio de la MINIMA suma de las distancias, medidas sobre rectas paralelas al eje de las ordenadas, de los puntos dados a la gráfica propuesta, para decidir cuál de los 3 ajustes anteriores es el mejor.

   Sí a los puntos dados se les puede ajustar una línea recta, establecerá ésta en la forma $y = ax + b$, para lo cual determinará los valores de a y de b.

Cabe una aclaración a estos objetivos, de ninguna manera se intentará que el estudiante conozca la "justificación" formal de la fórmula

$$f(x) = f(a) + (x-a)\,\Delta f(a) + (x-a)(x-b)\,\Delta^2 f(a) + ... + ...$$

y del algoritmo inmerso en el Método de Diferencias Divididas. Ambas cosas serán presentadas por el profesor a la manera en que se dicta una "receta de cocina" : ¡ hágase y verá como si resulta ! . Naturalmente el profesor informará a los estudiantes el campo de las Matemáticas en donde esto tiene su justificación y en que momento de su formación ellos estarán en posibilidades de comprenderla.

En razón de que en este Tema 10 se pretende :

Alcanzar algunos aprendizajes de carácter algorítmico.

Fomentar actitudes de valoración positivas hacia los Métodos Numéricos, por su relación con el Método Científico.

Construir e interiorizar el concepto fundamental de este tema: el criterio de "mejor" ajuste.

en seguida se formulan sugerencias de carácter metodológico para el desarrollo del tema.

El alumno :

Tabla III-1

x	y
-3	20
-2	10
-1	4
0	2
1	4
2	10
3	20

Tabla III-2

x	y
-3	19.5
-2	10.3
-1	3.6
0	2.2
1	4
2	9
3	21

CONSTRUIRA conjuntos de pares ordenados de números reales en donde la ordenada se obtenga a partir de la abscisa y combinaciones de operaciones algebraícas de suma, resta, producto, división y potencias. Por ejemplo, los pares que aparecen en la Tabla III-1 se construyen a partir de los valores -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, y la operaciones de suma, producto y elevación al cuadrado en el orden inver- al que se han mencionado.

MODIFICARA los conjuntos de pares ordenados de números reales que obtuvo en el paso anterior. La modificación consiste en s u s t i t u i r los valores de algunas de las ordenadas por otros que sean "ligeramente" diferentes de los que inicialmente se tenían. La Tabla III-2 es una modificación a la Tabla III-1.

Dada una colección de gráficas en la forma de puntos representados en planos cartesianos, las CLASIFICARA en los siguientes grupos:

a. Por ella se puede trazar una gráfica "exacta".

b. La gráfica se puede "aproximar por otra".

c. No se le puede trazar una gráfica "exacta" ni se puede "aproximar por otra".

Las gráficas de las figuras III-1, III-2, III-3, son ejemplos que corresponden a cada grupo.

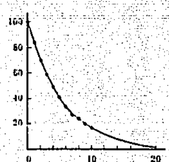


FIG. III-1

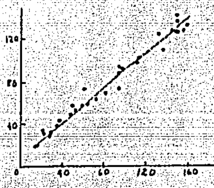
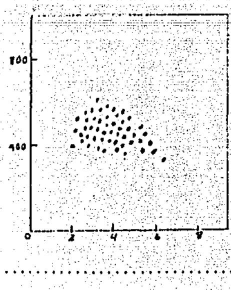


FIG. III-2

FIG. III-3



Dados algunos puntos, 5 ó 6, en un plano cartesiano, que no correspondan a una gráfica exacta, pero a los cuales sí se les pue a "aproximar" otra, TRAZARA entre los puntos gráficas que muestren diversos grados de ajuste a los puntos dados. Las figuras III-4, III-5, III-6 , muestran tres ajustes distintos para la misma colección de puntos.

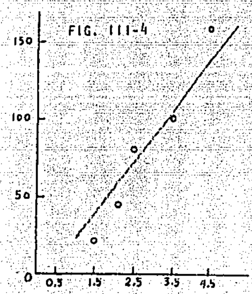


FIG. III-4

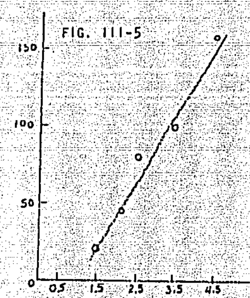


FIG. III-5

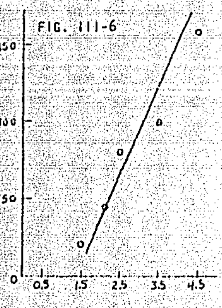


FIG. III-6

Dados algunos puntos en un plano cartesiano y una gráfica que sea un ajuste a ellos, TRAZARA, MEDIRA y SUMARA las distancias, sobre líneas verticales, que hay de los puntos dados a la gráfica de ajuste. La Fig. III-7 es un ejemplo de colección de puntos y gráfica de ajuste que se puede dar.

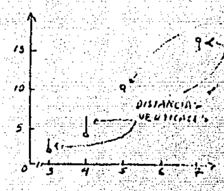


FIG. III-7

Dada la misma colección de puntos y gráficas que muestren ajustes diferentes a ellos, TRAZARA, MEDIRA y SUMARA las distancias, sobre líneas verticales, que hay de los puntos dados a las gráficas de ajuste con el objeto de decidir el "mejor de ellos".

Dada una colección de parejas ordenadas de números reales y distintas ECUACIONES cuyas gráficas sean ajustes para la colección de pares ordenados, DETERMINARA cual es el "mejor" ajuste. Un ejemplo es la gráfica que se muestra en la Fig. III-8 para la cual se proponen como ajustes las ecuaciones $y = 0.24x - 0.042$, $y = 0.4x - 0.06$, $y = 0.2x - 0.08$.

FIG. III-8

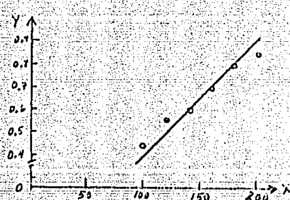


Tabla de valores de la cual se obtiene la gráfica de la Fig. III-8.

x	y
100	0.45
120	0.55
140	0.60
160	0.70
180	0.80
200	0.85

COLECCIONARA una serie de aproximadamente 10 gráficas pertenecientes a diferentes áreas del conocimiento como pueden ser Física, Química, Biología, Médicina, Ingeniería, Ciencias Sociales, Etc., que puede obtener de libros, revistas o periódicos. Para cada gráfica indicará:

Area del conocimiento de que se trate.

Variables que relaciona.

Unidades de medida utilizadas.

Número de puntos, si se trata de gráficas en esta forma.

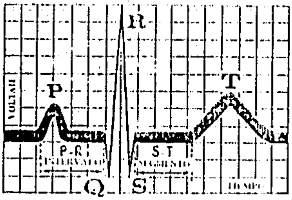


FIG. III-9

Clasificar la gráfica como: EXACTA, APROXIMADA, NI EXACTA NI APROXIMADA.

Clasificar la gráfica, en caso de que se pueda, o a su aproximación como RECTA, PARABOLA , PARABOLA CUBICA u OTRA. La Fig. III-9 muestra un ejemplo de tales gráficas.

COLECCIONARA una serie de aproximadamente 10 conjuntos de pares ordenados de números reales que sean resultados de mediciones realizadas en campos distintos del conocimiento. Para cada tabla de valores indicará :

Area del conocimiento a que pertenece.
Variables que relaciona.
Unidades de medida utilizadas.
Número de mediciones realizadas.

Como ejemplo, a continuación se muestra la siguiente Tabla que se obtuvo del libro:

LORENTE, JOSE-MARIA, meteorología, Edit. Labor, Barcelona-Buenos Aires, 1930, Pág. 15.

Composición de la atmósfera en volúmenes por ciento

Km	Presión	N	O	H	*	He	Ar
0	760	78.1	20.9	0.0033	0.00058	0.0005	0.937
20	41.7	85	15	0	0	0	-
40	1.92	88	10	1	0	0	-
60	0.106	77	6	12	4	1	-
80	0.0192	21	1	55	19	4	-
100	0.0128	1	-	67	29	4	-
120	0.0106	-	-	65	32	3	-
140	0.0090	-	-	62	36	2	-
200	0.00581	-	-	50	50	1	-
300	0.00329	-	-	29	71	-	-
400	0.00220	-	-	15	85	-	-
500	0.00162	-	-	7	93	-	-

(*) Geocoronio

REPORTARA algún experimento realizado para establecer la relación cuantitativa entre dos variables. El reporte deberá contener:

Introducción: establece los fines e importancia del experimento así como las variables que se relacionan.

Desarrollo del experimento: describe los materiales utilizados y un dispositivo experimental, así como una descripción de la forma en que se efectuaron y las mediciones.

Resultados obtenidos: en esta parte se reportarán las tablas de las mediciones realizadas así como las gráficas que corresponden a las tablas y la conclusión a que conducen los resultados.

CAPITULO III

PLANEACION DEL TEMA 6 DEL PROGRAMA DE MATEMATICAS IV

DE ACUERDO A PIAGET cuando un estudiante ha interiorizado las acciones de "separar","agrupar", "dividir", "repartir", "comparar" (ya sea unidades o colecciones de unidades), se dice que ha construído las operaciones matemáticas de suma, resta, producto y división.

En este sentido, *comprender una expresión algebraica* como $3x^2 + 5$ es poder imaginarse el conjunto de *operaciones* (en el sentido que la dá PIAGET a este término) y poder realizar de manera concreta sus correspondientes acciones en el orden correcto. En otras palabras, de manera muy esquemática podemos decir que el pensamiento algebraico está caracterizado por el conjunto de operaciones o acciones que se pueden realizar sobre los elementos algebraicos, es decir, sobre números.

Por otro lado intentémos caracterizar en un sentido parecido el pensamiento geométrico. Para ello, consideremos una línea recta, una parábola o una parábola cúbica. Es claro que estos entes geométricos pueden ser "prolongados", "trasladados", "rotados alrededor de un punto", "abrirse", "cerrarse", "invertirse", según sea el caso. Podemos utilizar estas "operaciones " y sus acciones correlativas como elementos característicos del pensamiento geométrico .

Vistos así, en forma separada, uno al lado del otro, el pensamiento algebraíco se percibe completamente diferente al pensamiento geométrico y viceversa. Parecieran dos mundos completamente distintos.

Unificar el pensamiento algebraíco con el pensamiento geométrico, es un *nuevo* tipo de pensamiento. Es, la esencia de la Geometría Analítica. En ésta el algebra se puede pensar geométricamente y al contrario, la geometría se puede pensar algebraícamente. En otras palabras, la Geometría Analítica precisa de un nuevo tipo de pensamiento matemático. Esto quiere decir que suponiendo que un individuo posea pensamiento algebraíco y geométrico no es garantía de que sea capaz de pensar un problema de acuerdo a la Geometría Analítica. Para ello habrá necesidad de que *construya* esa nueva forma de pensar. En términos de PIAGET diríamos que hay necesidad de construir los esquemas o las formas operacionales que posibiliten tal forma de pensamiento.

En las siguientes páginas se describe de manera ordenada un conjunto de actividades de aprendizaje que se considera puede contribuir a desarrollar en el alumno la forma de pensamiento propio de la Geometría Analítica.

Cuando el estudiante haya construído una operación lógica de implicación entre elementos geométricos y algebraícos y viceversa, entre elementos algebraícos y geométricos, estará en posibilidad de pensar de acuerdo a la Geometría Analítica. El cometido de estas páginas es presentar una serie de actividades que pueden "ayudar" al estudiante a que construya tal estructura de carácter lógico. Esta estructura es el equivalente a la que se necesitaría desarrollar en un individuo cuando se pretende que su pensamiento sea de carácter científico, es decir, desarrollar operaciones lógicas que conduzcan a establecer relaciones de tipo causal.

La Geometría Analítica como todas las otras ramas de las matemáticas son conglomerados, a veces bastante considerables, de conceptos, pero cada uno de ellas está caracterizada por una forma particular de pensamiento. La Geometría Analítica es un conjunto de conceptos, en donde conocer detalles, casos particulares, formas específicas de ecuaciones, es importante, pero lo es más conocer la forma de pensar que subyace en cada uno de tales detalles.

Los conceptos algebraícos y geométricos que son cardinales para la Geometría Analítica son los de número y ecuación; punto y curva, respectivamente. Por lo tanto, las relaciones fundamentales en que descansa la forma de pensamiento de la Geometría Analítica son aquellas que se dán entre estos cuatro elementos. Mas precisamente entre el número y el punto y entre la ecuación y la curva.

Con sus precisiones adecuadas, el Programa del Curso establece que: *asociar a una ecuación una gráfica* y *a una gráfica una ecuación*, son dos procesos centrales de la Analítica. Al tratamiento de ellos dedica seis de sus diez temas que lo forman. En cada uno de ellos se tratan los procesos anteriores con diferentes enfoques: son acercamientos diferentes a los mismos problemas.

Este CAPITULO de la tesis contiene *una propuesta metodológica* para los procesos anteriores en una de sus presentaciones. En ella se pretenden sintetizar las concepciones de educación, conocimiento, aprendizaje y planeación de la enseñanza, expuestas con anterioridad.

De acuerdo al modelo de planeación elegido -que aparece en la INTRODUCCION a este trabajo- constará de las siguientes partes:

I. Ubicación del TEMA dentro del programa del Curso.
II. Lineamientos Generales, Objetivos Generales, Intermedios y Específicos del Tema.
III. Prerrequisitos para el desarrollo del Tema.
IV. Método de trabajo y contenido instrumental.
V. Evaluación.
VI. Descripción de las sesiones.

PROPUESTA METODOLOGICA PARA LA ENSEÑANZA DE DOS PROCESOS FUNDAMENTALES DE LA GEOMETRIA ANALITICA

UBICACION DEL TEMA

Por *ubicación* del TEMA en el Programa del curso se entenderán tres cosas:

1. El papel que desempeña el TEMA dentro del Programa, determinado por los ***objetivos generales*** que persigue;
2. las relaciones que en cuanto a ***contenidos*** matemáticos tiene con los restantes temas del Programa;
3. el papel que desempeña el TEMA dentro del Programa, determinado por ***los métodos de establecer resultados matemáticos***.

1. *LOS OBJETIVOS del TEMA, en el CONTEXTO del PROGRAMA.*

Cuatro son las ideas centrales que orientan el Programa del Curso y que en términos resumidos son:

a. La Geometría Analítica es la *síntesis* del Algebra con la Geometría Euclidea.

b. Los *procesos fundamentales* de la Analítica son cuatro:
   - Asociar, a todo punto en el Plano Cartesiano una pareja de números reales.
   - Asociar, a toda pareja de números reales un punto en el Plano Cartesiano.
   - Asociar, a toda ecuación con dos variables reales, una gráfica en el Plano Cartesiano.
   - Asociar, a toda gráfica (con determinadas características) en el Plano Cartesiano, una ecuación con dos variables.

c. La solución de un problema matemático es "gradual".

d. En la solución de un problema matemático se utilizan tanto métodos inductivos como deductivos.

Excepto los dos primeros temas, de los diez que integran el Programa del Curso, los demás están dedicados, a través del estudio de ciertos contenidos matemáticos, a hacer resaltar las ideas anteriores.

Por esta razón, el TEMA 3 está dedicado a construir *el concepto fundamental*, el sistema de coordenadas, que hace posible la realización de los cuatro procesos fundamentales.

El TEMA 4 desarrolla, utilizando el concepto de *Sistema de Coordenadas*, los dos primeros procesos: asociar a un punto, en el Plano Cartesiano, una pareja de números reales y a una pareja de números reales, un punto en el Plano Cartesiano.

Los TEMAS 5, 6, 7, 8, 9 y 10 son "variaciones sobre un mismo "TEMA" ". El "TEMA": los procesos que asocian a una ecuación con dos variables reales una gráfica en el Plano Cartesiano y a una gráfica en el Plano Cartesiano una ecuación con dos variables reales. Las "variaciones" : acercamientos distintos en "profundidad", en rigor y en métodos matemáticos utilizados. Son distintos en "profundidad", en el sentido de la "cantidad" de conceptos matemáticos utilizados; en rigor, porque en algunos casos la única justificación que se dá para las afirmaciones matemáticas son lo que a "simple vista" se observa y en otras, descansa sobre deducción lógica; en métodos de obtención de los conocimientos, porque en algunos casos se hace más énfasis en los de carácter inductivo y en otros, a los deductivos, y en un caso se apela a la "fé" o a la creencia.

En este contexto, el TEMA 6 del Programa constituye un segundo enfoque a los procesos analíticos por los cuales a una ecuación con dos variables reales se le asocia una gráfica en el Plano Cartesiano y, a una gráfica en el Plano Cartesiano se le asocia una ecuación. Más precisamente, algunos de los OBJETIVOS GENERALES de este TEMA se pueden enunciar en los siguientes términos:

. Dadas ecuaciones de la forma $y = ax^n + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $n = 1, 2, 3$; el alumno, hará un "bosquejo" de las gráficas cartesianas asociadas a ellas (por "bosquejo" se entiende "dibujar" una gráfica que no es "exactamente" la gráfica que le corresponde a la ecuación dada, pero que por sus características, bien pudiera ser que sí fuese).

. Dadas las gráficas de *rectas*, *parábolas* (con vértice y eje sobre el Eje de las Ordenadas) y *parábolas cúbicas* (con punto de inflexión y eje sobre el Eje de las Ordenadas), el alumno "*propondrá*" ecuaciones susceptibles de asociárseles (como en el objetivo anterior, la ecuación que en este caso se proponga no será "*la*" ecuación de la gráfica sino sólo una que "puede" ser la que le corresponda).

. El alumno se ejercite en el método inductivo de establecer resultados matemáticos y en habilidades intelectuales como son observar, identificar diferencias y similitudes, identificar patrones, formular correlaciones, generalizar, analizar, sintetiza.

Como puede verse de lo anterior, el TEMA 6 se ubica completamente en el marco de las cuatro ideas centrales que orientan el Programa del Curso.

2. CONTENIDOS MATEMATICOS del TEMA 6 y sus RELACIONES con los TEMAS RESTANTES.

Se puede decir que en cuanto a CONTENIDOS MATEMATICOS se refiere, el TEMA 6 se puede calificar como "pobre". Se reduce a:

- Ecuaciones de la forma $y = ax^n + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $n = 1, 2, 3$.
- Líneas rectas.
- Parábolas con vértice y eje en el Eje de las Ordenadas.
- Parábolas cúbicas con punto de inflexión y eje en el Eje de las Ordenadas.
- Conceptos geométricos "intuitivos" de inclinación de una recta, ordenada al origen, "abertura" de una parábola y de una parábola cúbica, vértice de una parábola y punto de inflexión de una parábola cúbica.
- "Caracterización geométrica intuitiva" de recta, parábola y parábola cúbica.
- Una forma particular de la ecuación de recta, parábola y parábola cúbica.
- Concepto intuitivo de intersección y no intersección de curvas.

Con los TEMAS que de manera directa están relacionados estos contenidos son con el 5, 7 y 8 del Programa. Con el TEMA 5, ya que el 6 se sirve del Método de Tabulación y Graficación, para encontrar la gráfica asociada a una ecuación con dos variables reales, lo cual se trata en aquel TEMA; con el TEMA 7, ya que en éste extienden los resultados a que se llega en el 6, al caso de ecuaciones con exponente mayor que tres, pero entero; y con el TEMA 8, en virtud de que en este se aborda el mismo problema, para el mismo tipo de ecuaciones y gráficas, con un método diferente.

Con los TEMAS 3 y 4 su relación, podemos decir, es de "dependencia", ya que en el 3 se estudia el concepto fundamental de la Analítica (el concepto de Sistema de Coordenadas) y en el 4 los procesos que asocian a un punto una pareja de números reales y a una pareja de números reales un punto, sin los cuales los procesos que se desarrollan en el 6, simplemente no sería posible tratarlos.

Su relación con el TEMA 9 radica en que, temáticamente, tienen en común el estudio de la línea recta y la parábola; pero, sobre todo, en que, en el TEMA 6 se establecen conceptos intuitivos que se formalizarán en el 9.

Por último, al estar dedicado el TEMA 10 a determinar "la mejor" gráfica que se aproxime a un conjunto de puntos dados, el TEMA 6 proporciona tres elementos (recta parábola y parábola cúbica) del "catálogo" del cual se va a seleccionar la "mejor gráfica".

3. *El TEMA 6 y los METODOS PARA ESTABLECER RESULTADOS MATEMATICOS durante el CURSO.*

Otro aspecto o punto de vista desde el cual se puede ubicar el TEMA 6 dentro del Programa del Curso es con relación al Método utilizado para obtener resultados matemáticos.

El Programa está pensado de manera que los resultados matemáticos se establezcan recurriendo a métodos inductivos y deductivos. El primero, siempre con la finalidad de proporcionar al alumno vivencias y experiencias que le permitan construir, de manera intuitiva, resultados matemáticos que con posterioridad justifica de manera deductiva.

Consecuente con este espíritu, los distintos TEMAS del Programa utilizan alternativamente los métodos inductivo y deductivo, sucediendo, en general, que prive más uno sobre el otro.

A grandes rasgos, los TEMAS 3, 4, 5, 6, 7 y 10 resaltan el método inductivo, en especial en el 5, 6 y 7 que proporcionan material empírico que se fundamentará deductivamente en los TEMAS 8 y 9

LINEAMIENTOS GENERALES DEL TEMA

. Desarrollar en el alumno capacidades intelectuales que involucren la generalización de resultados particulares, la inferencia de resultados particulares a partir de principios generales, la analogía entre situaciones, casos, patrones o resultados.

. Que el alumno conciba la matemática como un conocimiento integral.

. Desarrollar en el alumno la forma de pensar propia de la Geometría Analítica con la cual un concepto algebraico se puede pensar geométricamente y al contrario, conceptos geométricos interpretarlos algebraicamente.

OBJETIVOS GENERALES DEL TEMA

En este TEMA, se pretende que el alumno :

. Dada una ecuación de la forma $y = ax + b$, $y = ax^2 + b$, $y = ax^3 + b$, con $a, b \in R$, después de establecer equivalentes geométricos a los diferentes elementos que la forman, DESCRIBIRA las características generales que tendrá la gráfica cartesiana asociada a ella, y HARA UN "BOSQUEJO" de tal gráfica en un Plano Cartesiano.

. Dada la gráfica de una recta, parábola (con vértice en el eje de las ordenadas y que se abra hacia arriba o hacia abajo), o parábola cúbica (con punto de inflexión en el eje de las ordenadas y que se "abra" en la *m i s m a* dirección de dicho eje) en un Plano Cartesiano, después de establecer equivalentes algebraicos a los diferentes elementos que la forman, DESCRIBIRA las características generales que tendrá su ecuación, y PROPONDRA una que sea susceptible de asociarle a la gráfica, en la forma $y = ax + b$, $y = ax^2 + b$, $y = ax^3 + b$, con $a, b \in R$.

. Dadas dos ecuaciones que correspondan a dos rectas, a dos parábolas o a dos parábolas cúbicas, en los últimos dos casos, restringidas a los tipos que se han estudiado, DETERMINARA si las gráficas "asociadas" se intersecan o no.

. PROPONDRA dos ecuaciones que correspondan a dos rectas, dos parábolas o dos parábolas cúbicas que se intersecan.

. PROPONDRA dos ecuaciones que correspondan a dos rectas, dos parábolas o dos parábolas cúbicas que no se intersecan.

. SE EJERCITARA en encontrar *diferencias* y *similitudes* entre los elementos de un conjunto o entre varios de ellos.

. SE EJERCITARA en descubrir "patrones" que muestren determinadas cosas.

. SE EJERCITARA en establecer correlaciones entre los elementos de dos o más conjuntos de cosas.

. SE EJERCITARA en efectuar inferencias inductivas.

. SE EJERCITARA en generalizar hechos o propiedades que se observen en una colección finita de objetos.

. SE EJERCITARA en reconocer en una generalidad casos particulares.

. SE EJERCITARA en estructurar (síntesis) de acuerdo a algún criterio hechos u objetos aislados.

. SE EJERCITARA en aislar de una estructura elementos particulares (análisis).

OBJETIVOS INTERMEDIOS Y ESPECIFICOS DE RECTA

OBJETIVOS INTERMEDIOS

. Dada la ecuación de una recta en la *forma* $y = ax + b$, con $a, b \in R$, el alumno DETERMINARA (sin tabular), para la gráfica asociada a la ecuación, los Cuadrantes por los que pasa, las coordenadas del punto de intersección con el Eje de las Ordenadas, si éste coincide o no con el punto de intersección con el Eje de las Abscisas y el intervalo en que se encuentra el ángulo que forma con la parte positiva del Eje de las Abscisas (o más brevemente con el Eje de las Abscisas).

. Dada la gráfica de una recta en el Plano Cartesiano, el alumno PROPONDRA una ecuación que sea susceptible de asociarle, en la *forma* $y = ax + b$, con $a, b \in R$.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

. Dada la ecuación de una recta en la *forma* $y = ax + b$, con $a, b \in R$, el alumno CONOCERA que el *coeficiente* de la variable independiente *determina*, tanto el *ángulo* que forma la gráfica asociada con el Eje de las Abscisas como los *Cuadrantes* por los que *necesariamente* pasa y, recíprocamente.

. El alumno CONOCERA que dos o más rectas en el Plano Cartesiano son *paralelas* si y solo si, sus ecuaciones asociadas en la *forma* $y = ax + b$, con $a, b \in R$, tienen el *mismo coeficiente* de la variable independiente.

. El alumno CONOCERA que dos o más rectas en el Plano Cartesiano se *intersecan* si y solo si, sus ecuaciones asociadas en la *forma* $y = ax + b$, con $a, b \in R$, tienen *diferente* el *coeficiente* de la variable independiente.

. Dada la ecuación de una recta en la *forma* $y = ax + b$, con $a, b \in R$, el alumno CONOCERA que el valor del *término independiente determina* el *desplazamiento vertical* (sobre el Eje de las Ordenadas) de su gráfica asociada y, recíprocamente.

. El alumno CONOCERA que para *bosquejar* la gráfica asociada a una ecuación de la *forma* $y = ax + b$, con $a, b \in R$, considerará las características del *coeficiente* de la variable independiente y del *término independiente*.

. Dada la gráfica de una recta en el Plano Cartesiano, el alumno CONOCERA que para proponer una ecuación que sea susceptible de asociarle, en la *forma* $y = ax + b$, con $a, b \in R$, atenderá al *ángulo* que forma la recta con el Eje de las Abscisas y al punto en donde *se interseca* con el Eje de las Ordenadas.

. Dada la gráfica de una recta en el Plano Cartesiano, el alumno DECIDIRA cuál es el *valor* posible del *término independiente* de una ecuación de la *forma* $y = ax + b$, con $a, b \in R$, para que dicha ecuación sea susceptible de asociársele a la gráfica dada.

. Dada la gráfica de una recta en el Plano Cartesiano, el alumno DECIDIRA cuáles son los *valores* posibles del *coeficiente* de la variable independiente de una ecuación de la *forma* $y = ax + b$, con $a, b \in R$, para que dicha ecuación sea susceptible de asociársele a la gráfica dada.

OBJETIVOS INTERMEDIOS Y ESPECIFICOS DE PARABOLA

OBJETIVOS INTERMEDIOS

. Dada la ecuación de una parábola en la *forma* $y = ax^2 + b$, con $a, b \in R$ y $a \neq 0$, el alumno DETERMINARA (sin tabular), para la gráfica asociada a la ecuación, hacia dónde se abre, cuáles son las coordenadas del vértice y cuál es su "anchura" en comparación con la parábola que tiene por ecuación $y = x^2$.

. Dada la gráfica de una parábola, en el Plano Cartesiano, con eje en el Eje de las Ordenadas, el alumno PROPONDRA una ecuación que sea susceptible de asosciarle, en la *forma* $y = ax^2 + b$, con $a, b \in R$ y $a \neq 0$.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

. Dada la ecuación de una parábola en la *forma* $y = ax^2 + b$, con $a, b \in R$ y $a \neq 0$, el alumno CONOCERA que el *coeficiente* de la variable independiente *determina hacia dónde se abre* y la "*anchura*" de la parábola asociada.

. El alumno CONOCERA que dos o más parábolas en el Plano Cartesiano *no se intersecan* si y solo si, en sus ecuaciones asociadas de la *forma* $y = ax^2 + b$, con $a, b \in R$ y $a \neq 0$, el *coeficiente* de la variable independiente es el *mismo*.

. El alumno CONOCERA que si dos o más ecuaciones de la *forma* $y = ax^2 + b$, con $a, b \in R$ y $a \neq 0$ tienen *diferente* el *coeficiente* de la variable independiente, las parábolas asociadas *no necesariamente* se *intersecan*.

. Dada la ecuación de una parábola en la *forma* $y = ax^2 + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, el alumno CONOCERA que el valor del *término independiente determina* la *posición* del *vértice* de su gráfica asociada y, recíprocamente.

. El alumno CONOCERA que para *bosquejar* la gráfica asociada a una ecuación de la *forma* $y = ax^2 + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, considerará las características del *coeficiente* de la variable independiente y del *término independiente*.

. Dada una parábola, en el Plano Cartesiano, con vértice en el Eje de las Ordenadas y que se abra hacia arriba o hacia abajo, el alumno CONOCERA que para proponer una ecuación que sea susceptible de asociarle, en la *forma* $y = ax^2 + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, atenderá, a la "*anchura*" que presenta, hacia dónde se *abre* y a la posición del *vértice*.

. Dada una parábola, en el Plano Cartesiano, con vértice en el Eje de las Ordenadas y que se abra hacia arriba o hacia abajo, el alumno DECIDIRA cuál es el *valor* posible del *término independiente* en una ecuación de la *forma* $y = ax^2 + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, para que dicha ecuación sea susceptible de asociársele a la gráfica dada.

. Dada una parábola, en el Plano Cartesiano, con vértice en el Eje de las Ordenadas y que se abra hacia arriba o hacia abajo, el alumno DECIDIRA cuál es un *valor* posible del *coeficiente* de la variable independiente de una ecuación de la *forma* $y = ax^2 + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, para que dicha ecuación sea susceptible de asociársele a la gráfica dada.

OBJETIVOS INTERMEDIOS Y ESPECIFICOS DE PARABOLA CUBICA

OBJETIVOS INTERMEDIOS

. Dada la ecuación de una parábola cúbica en la *forma* $y = ax^3 + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, el alumno DETERMINARA (sin tabular), para la gráfica asociada a la ecuación, los Cuadrantes por los que pasa, las coordenadas del punto de intersección con el Eje de las Ordenadas (coordenadas del punto de inflexión), si éste coincide o no con el punto de intersección con el Eje de las Abscisas y cuál es su "anchura" en comparación con la parábola cúbica que tiene por ecuación $y = x^3$.

. Dada la gráfica de una parábola cúbica, en el Plano Cartesiano, con punto de inflexión en el Eje de las Ordenadas y que se "abra" en dirección de dicho eje, el alumno PROPONDRA una ecuación que sea susceptible de asociarle, en la *forma* $y = ax^3 + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

. Dada la ecuación de una parábola cúbica en la *forma* $y = ax^3 + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, el alumno CONOCERA que el *coeficiente* de la variable independiente *determina* tanto los *Cuadrantes* por los que *necesariamente* pasa la parábola cúbica asociada, como la "*anchura*" que ésta tenga.

. El alumno CONOCERA que dos o más parábolas cúbicas en el Plano Cartesiano *no se intersecan* si y solo si, sus ecuaciones asociadas en la *forma* $y = ax^3 + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, tienen el *mismo coeficiente* de la variable independiente.

. El alumno CONOCERA que dos o más parábolas cúbicas en el Plano Cartesiano se *intersecan* si y solo si, sus ecuaciones asociadas en la *forma* $y = ax^3 + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, tienen *diferente* el *coeficiente* de la variable independiente.

. Dada la ecuación de una parábola cúbica en la *forma* $y = ax^3 + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, el alumno CONOCERA que el valor del *término independiente determina* el *desplazamiento vertical* (sobre el Eje de las Ordenadas) de su gráfica asociada y, recíprocamente.

. El alumno CONOCERA que para *bosquejar* la gráfica asociada a una ecuación de la *forma* $y = ax^3 + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, considerará las características del *coeficiente* de la variable independiente y del *término independiete*.

. Dada una parábola cúbica, en el Plano Cartesiano, con punto de inflexión en el Eje de las Ordenadas y que se "abra" en dirección de dicho eje, el alumno CONOCERA que para proponer una ecuación que sea susceptible de asociarle, en la *forma* $y = ax^3 + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, atenderá, a la "*anchura*" que presenta, los *Cuadrantes* por los que pasa y el punto donde se *interseca* con el Eje de las Ordenadas.

. Dada una parábola cúbica, en el Plano Cartesiano, con punto de inflexión en el Eje de las Ordenadas y que se "abra" en dirección de dicho eje, el alumno DECIDIRA cuál es el *valor* posible del *término independiente* en una ecuación de la *forma* $y = ax^3 + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, para que dicha ecuación sea susceptible de asociársele a la gráfica dada.

. Dada una parábola cúbica, en el Plano Cartesiano, con punto de inflexión en el Eje de las Ordenadas y que se "abra" en dirección de dicho eje, el alumno DECIDIRA cuál es un *valor* posible del *coeficiente* de la variable independiente de una ecuación de la *forma* $y = ax^3 + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, para que dicha ecuación sea susceptible de asociársele a la gráfica dada.

PRERREQUISITOS

Antes de iniciar el proceso enseñanza-aprendizaje cuyo fin último es que los alumnos alcancen los objetivos propuestos para este TEMA, se considera que los estudiantes deberán saber:

+ Las características principales de la Geometría Analítica.
+ Construir un sistema de coordenadas cartesiano.
+ Los conceptos de abscisa y ordenada de un punto, así como la notación que utiliza la Geometría Analítica para representar un punto y los diferentes nombres con los que se le conoce.
+ Asociarle una pareja de números reales a un punto en el plano cartesiano.
+ Asociarle un punto en el plano cartesiano a una pareja de números reales.
+ Conocer que a cada punto en el plano cartesiano se le asocia una y sólo una pareja de números reales y recíprocamente.
+ Las características que debe tener una pareja de números reales para que el punto que se le asocie en el plano cartesiano esté en el Cuadrante I, II, III o IV. Así como en los semiejes.
+ Los conceptos de variable independiente y variable dependiente.
+ Asociarle una gráfica en el plano cartesiano a una ecuación con dos variables reales por el método de tabulación y graficación.
+ Identificar y enlistar los distintos elementos que caracterizan a una ecuación.
+ Formular condicionales, recíprocas y bicondicionales a partir de dos proposiciones cualesquiera y conocer en qué casos son verdades o falsas.

Por otro lado, es necesario que los alumnos tengan desarrolladas las "operaciones" (en el sentido de PIAGET) de:

+ Rotación alrededor de un punto.
+ Desplazamiento de un lugar a otro.
+ Expander y comprimir.
+ Invertir.
+ Prolongar.
+ Agregar.
+ Quitar.
+ Repartir.
+ Comparar.

METODO DE TRABAJO

Casi al final del CAPITULO I de este trabajo se aclaró que la didáctica que se va a utilizar en la propuesta metodológica que se hace es la denominada "aprendizaje por descubrimiento guiado". Como allá se aclaró, y se repite en este momento, esta didáctica se funda en la psicología de PIAGET y se caracteriza en que durante las actividades de aprendizaje que realiza el alumno para llegar a la solución del problema planteado se permite, que el profesor le proporcione alguna guía que oriente al alumno en la búsqueda de la solución deseada.

La propuesta didáctica que se hace considera que de los dos protagonistas del proceso enseñanza-aprendizaje: el maestro y el alumno, es el segundo de ellos quien con sus reflexiones, su análisis y la discusión con sus compañeros debe reconstruir el conocimiento. Para ello, el profesor, basado en el material que los alumnos elaboran, les formula una serie de preguntas . Las actividades de aprendizaje que realizan los estudiantes tienen la finalidad de dar respuesta a tales preguntas . Estas respuestas integradas de cierta forma conducen a la solución del problema central planteado en el TEMA.

Las actividades de aprendizaje que realizan los alumnos se presentan en tres niveles:

a. Trabajo individual.

b. Discusión por equipos.

c. Discusión grupal para obtener conclusiones.

a. Trabajo individual. Pedirles a los alumnos que contesten las preguntas -planteadas por el profesor- individualmente antes de discutir con sus compañeros es una manera de garantizar el análisis individual. Además, permite fomentar o inculcar la actitud de discutir con un análisis previo y lograr la claridad en el alumno de que dar una respuesta correcta y "defenderla" en mucho depende de la profundidad con la que se haya analizado el punto a discusión.

b. Trabajo por equipos. Este método de trabajo es uno de los más apropiados si lo que pretendemos es "formar" hombres críticos, autocríticos, con flexibilidad de pensamiento, que aporten su trabajo y esfuerzo a la sociedad, no individualista, cooperativos, tolerantes. Además de que propicia y favorece las relaciones personales así como la moderación de la introversión de unos y la extroversión de otras.

Con las pretenciones anteriormente señaladas, se considera que los equipos deberán tener un mínimo de cuatro personas y un máximo de seis. Un número mayor o menor de integrantes por equipo, "empobrecerían" las discusiones que se den en el seno de éste, unos por reducidos y otros por extensos.

La formación de los equipos puede ser voluntaria en unos casos y predeterminada en otros. Aparentemente la primera de ellas es más conveniente que la segunda en virtud de que los alumnos al escoger las personas con las que van a trabajar (generalmente sus amigos), se crea un ambiente favorable para el trabajo, puesto que, el alumno las conoce, comparte gustos, intereses, inquietudes, en fin, existen lazos amistosos. Sin embargo, si deseamos que nuestros alumnos valoren a sus semejantes *no* por la raza, el color, el físico, el vestido o la posición económica sino por sus valores humanos, un primer obstáculo a vencer, es que ellos se den cuenta de que es posible trabajar "a gusto" con personas inclusive diametralmente opuestas a ellas en los aspectos anteriormente señalados. Por lo que no es nada recomendable que siempre se forman equipos de manera voluntaria, pues esto, no sólo impide la integración del grupo como tal sino que, agudiza el sectarismo tan marcado en la mayoría de los grupos. Formar equipos de una manera predeterminada por ejemplo, si son cuarenta alumnos "enumerarlos del uno al diez" tantas veces sea necesario hasta que todos tengan asignado un número, para que posteriormente trabajen los "unos con los unos", "los doses con los doses", Etc.; es un procedimiento que si bien no nos garantiza la integración total del grupo, al menos permite que todos trabajen con todos una vez por semestre. Logrando con esto, que mínimamente cuando un alumno se refiera a otro lo haga por su nombre y no por "señas" como es lo más común.

c. Discusión grupal para obtener conclusiones.

Una vez finalizada la discusión por equipo se procede a la discusión grupal. Para lo cual, cada equipo nombra un representante, éste deberá leer las conclusiones a las que llegó su equipo en el momento que se realice la discusión grupal, aclarando en su participación cuáles fueron los puntos tanto de acuerdo como de desacuerdo. Después de conocer las diferentes conclusiones a las que llegó cada equipo y plantear las discrepancias y coincidencias de estos, se procede a llevar a cabo una discusión grupal para aclarar sobre todo las cuestiones en las que no hubo acuerdo general, de tal manera que al finalizar la sesión se tengan las conclusiones generales sobre la(s) pregunta(s) formulada(s).

LLevar a cabo esta discusión, además de que enriquece la ya realizada en los equipos, es el mecanismo que se utiliza para "unificar" tanto las respuestas como los conocimientos que se van adquiriendo.

REAFIRMACION DE CONOCIMIENTOS. Si bien se piensa que reconstruir el conocimiento le permite al alumno interiorizar los conceptos, también se considera que esto no es suficiente para resolver problemas que involucren dichos conceptos. Es necesario, además, que el alumno se enfrente a una lista "considerable" de ejercicios, hasta que adquiera habilidad para resolverlos.

Queda a juicio del maestro determinar en que momento sus alumnos han alcanzado los objetivos establecidos, y en consecuencia, cuál es el momento apropiado para efectuar la evaluación sumativa. Para ello se basa fundamentalmente en las evaluaciones formativas que haya realizado durante las sesiones dedicadas a la resolución de problemas.

En la unidad didáctica que nos ocupa, las sesiones dedicadas exclusivamente a resolver ejercicios son las dos últimas. En éstas, el método de trabajo puede enmarcarse en seis etapas:

1a. etapa. Dada la ecuación, el alumno anotará en su cuaderno cuál es la gráfica que le corresponde (recta, parábola, parábola cúbica) y que características tiene. Ayudado de los "CUADROS" que se obtuvieron como conclusión de las discusiones. Se escuchan las respuestas de algunos alumnos, se ratifican o se rectifican (según sea el caso), el maestro bosqueja la gráfica en el pizarrón y les dá otra ecuación.

2a. etapa. Esta se diferencía de la anterior en que los alumnos ya no se ayudan de sus apuntes, aunque la respuesta sigue siendo escrita y ahora ellos bosquejan la gráfica antes que se revise el ejercicio.

3a. etapa. Dada la ecuación, el alumno realiza el análisis correspondiente y sólo dibuja la gráfica.

4a. etapa. Dada la ecuación, el alumno realiza el análisis mentalmente y elige de una lista de 54 gráficas la que se le puede asociar.

5a. etapa. De la hoja con 54 gráficas que el maestro le proporciona para trabajar en el salón de clases, se le dá un número y el alumno anotará en su cuaderno al menos una ecuación que le corresponda.

6a. etapa. Por último, los ejercicios son orales y alternados es decir, en algunas ocaciones se les dá a los alumnos la ecuación y en otras el número de gráfica.

CONTENIDO INSTRUMENTAL. En esencia, el contenido instrumental que se utiliza en este TEMA son 54 ecuaciones y sus gráficas asociadas. Las características que tienen dichas ecuaciones se describen en la primera sesión de esta planeación.

EVALUACION

El medio que se utilizará en esta parte del CURSO para comparar lo que el alumno va logrando o ha logrado con lo que se espera alcance es :

- la evaluación *formativa*, durante el desarrollo del TEMA,
- la *sumativa*, al finalizarlo.

Bajo el supuesto de que un profesor *no* llevaría a la práctica *una* metodología que sabe de antemano que con ella los estudiantes no alcanzarán los objetivos de un tema, se considera que cuando un profesor elabora la planeación de un tema, está "convencido" que la metodología inmersa en ella es la *"más adecuada"*, de las que él conoce, para que los alumnos alcancen la meta deseada. Sin embargo, él está conciente que por muy "homogéneo" que sea un grupo, existen grandes *diferencias*, intelectualmente hablando, entre unos alumnos y otros y que *nunca* un grupo es exactamente igual a otro. Por esto, el *problema* de la enseñanza-aprendizaje *no* se puede *resolver* en forma *absoluta y definitiva para cualquier alumno, de cualquier grupo, en cualquir tiempo*. En consecuencia, al llevar a la práctica todo lo planeado pueden existir *dificultades*.

De lo anteriormente expuesto, no resulta improbable que el aprendizaje de algún(os) alumno(s) se vea obstaculizado, en un cierto momento, por alguna razón en particular. Si el problema no es superado "a tiempo", muy posiblemente el estudiante se irá retrasando, retrasando, hasta que sea prácticamente imposible que en el tiempo dedicado al tema alcance los objetivos establecidos. Esto, naturalmente, se debe tratar de evitar. Para ello, es de vital importancia detectar las dificultades con las que el alumno se está enfrentando, los errores que está cometiendo y el nivel de aprovechamiento que en el tema está teniendo. Esta es la finalidad principal de la *evaluación formativa*. Para realizarla, el maestro considera, entre otras cosas, las respuestas orales o escritas que el estudiante dá a sus preguntas, las preguntas que formula y los argumentos que utiliza para fundamentar una posición.

Detectar los problemas que surgen en el proceso enseñanza-aprendizaje es de sumo interés cuando se pretende mejorarlo en un momento en que todavía es factible. Pero, para esto, no basta ubicar las dificultades sino además es necesario buscar la causa, en la medida de lo posible, e instrumentar los mecanismos "adecuados" a fin de superarlas.

Uno de los beneficios que ofrece la evaluación formativa al profesor,es que al utilizarla sistemáticamente, detectando las dificultades que están existiendo en el proceso enseñanza-aprendizaje (cuando éstas afloran), tratando de identificar las causas y procurando superarlas, él cuenta con una "cierta garantía" de que la gran mayoría de los alumnos alcanzarán los objetivos específicos, intermedios y generales. Al utilizarla, clase tras clase, el profesor obtiene en cada una de ellas, una estimación del aprendizaje de los alumnos, tanto a nivel grupal como individual, en "la parte" del tema que en una sesión específica se haya estudiado, de tal suerte, que al final del tema, mediante un proceso que podríamos llamar "acumulativo", él tiene una apreciación global de la medida en que los objetivos del tema fueron alcanzados por los estudiantes.

Sin embargo, por las características propias de la Educación Institucionalizada hay necesidad de asignarle una *calificación* a los alumnos a efectos de promoción o no promoción. Dicha calificación pretende reflejar el logro que de los objetivos del tema han tenido. Para ello, esa "apreciación global" que le proporciona al profesor la evaluación formativa no basta, sobre todo, cuando se pretende que la calificación sea "*lo más objetiva posible*".

Cuando la evaluación que se realiza pretende calificar al alumno a efectos de promoción o no promoción y se realiza al final de un período de aprendizaje, dicha evaluación recibe el nombre de *sumativa*

Considerando que en el TEMA que nos ocupa, todas las actividades que realizan tanto el profesor como los alumnos, fundamentalmente en el salón de clases, están encaminadas a que estos últimos alcancen los *objetivos generales*, se decide que la calificación esté en función del logro que de *estos* objetivos hayan tenido los estudiantes. Por esta razón, la evaluación que se realice para tal fin, se efectuará al finalizar el TEMA. Esto conlleva a utilizar la evaluación sumativa en esta parte del PROGRAMA. El instrumento que se utiliza para realizarla es un exámen escrito con valor de 10 puntos que se califica con baremo y que se exhibe al final de la planeación.

A pesar de que los *objetivos generales* del TEMA se refieren tanto a *contenidos* como a *habilidades* y *valores*, el examen que se aplica *no* está referido a todos ellos. Sólo a algunos. Aquellos que quedan excluídos de este examen no se cuantifican con ningún otro instrumento de evaluación y por ende, la calificación que se le asigne al estudiante, al finalizar el TEMA, *no dependerá* en ninguna medida de ellos.

Con la intención de puntualizar cuáles son los objetivos generales que se evalúan cuantitativamente, cuáles no, y a qué se debe esta decisión, clasifiquemos dichos objetivos, dependiendo de su naturaleza, en:

1. De *contenidos*.
2. De *habilidades algorítmicas*.
3. De *habilidades mentales* (inferir, generalizar, sintetizar, etc.).
4. De *valores* que *no* están relacionados "directamente" con las experiencias de aprendizaje (por ejemplo, la tolerancia).
5. De *valores* que están directamente relacionados con las experiencias de aprendizaje (responsabilidad hacia el trabajo académico).

El examen se limita a evaluar cuantitativamente el grado en que un alumno ha alcanzado los objetivos de tipo 1 y 2, de la clasificación anterior. La medida en que haya logrado, en el mes y medio que se le dedica al TEMA, los objetivos del tipo 3, 4 y 5, como ya se mencionó, no se cuantifican.

Antes de proceder a enunciar las razones que conllevan a circunscribir la calificación al nivel de aprovechamiento que el alumno ha tenido en los contenidos del TEMA y en las habilidades algorítmicas a que conducen dichos contenidos, cabe señalar lo siguiente:

Independientemente de la naturaleza del tipo de aprendizaje (contenido, habilidad o valor) que se pretenda calificar, para hacerlo, se requiere cuantificar el grado en que un estudiante ha alcanzado un determinado aprendizaje después de que se ha sometido a las experiencias de aprendizaje que se han planeado para tal fin. Para ello, es necesario, contar con dos observaciones o mejor dicho, dos mediciones. La primera, *antes* del proceso enseñanza-aprendizaje para determinar en qué medida está presente, en el alumno, el aprendizaje que se pretende adquiera o desarrolle. La segunda, con la misma finalidad que la primera pero, al *concluirse* las sesiones dedicadas a ese aprendizaje.

Al contar con las dos mediciones a las que hace referencia el párrafo anterior, es posible contrastarlas y determinar el *incremento* que ha logrado un estudiante en relación a un determinado aprendizaje. La calificación entonces, se asigna en función de dicho incremento.

Al tomar lo anterior como principio general para asignar calificación se considera, reconoce y acepta que:

I. Precisar el incremento que ha tenido un estudiante en el mes y medio que se le dedica al TEMA en cuestión, tanto en sus *contenidos* como en las *habilidades algorítmicas* a que dichos contenidos conducen, es posible hacerlo con "*relativa facilidad*". En primer lugar, porque se supone que el alumno, al iniciarse el TEMA, desconoce los contenidos matemáticos que serán objeto de enseñanza-aprendizaje. Esto implica que la primera medición, de las dos a que se ha hecho referencia renglones arriba, está realizada sin necesidad de someter al estudiante a cuestionamiento alguno. De aquí que, para asignar calificación, bastará utilizar el instrumento que se considere adecuado (en este caso un examen escrito) al final del TEMA para determinar en qué medida están presentes, en el alumno, los contenidos y las habilidades algorítmicas inherentes a ellos, que fueron objeto de enseñanza-aprendizaje. En segundo lugar, porque son específicos, concretos, particulares; factibles de ser aprendidos en un tiempo relativamente corto y no resulta extremadamente difícil demostrar, en un determinado momento, si se poseen o no.

II. La "relativa facilidad" que nos ofrecen los contenidos del TEMA y la habilidades algorítmicas a que ellos conducen (objetivos de tipo 1 y 2), para evaluarlos cuantitativamente, queda de manifiesto cuando se pretende hacer lo mismo con las habilidades mentales y los valores. El grado de generalidad que a éstos y aquellas caracteriza, conlleva a que su aprendizaje no se consolide en un lapso corto de tiempo. Ellos se irán reafirmando, modificando o desarrollando paulatinamente día con día, semana tras semana, mes con mes y año tras año, en la medida que el individuo se enfrente a una problemática específica (bien sea en su vida diaria o en un area del saber en particular) cuya "solución" dependa de una u otra forma de ellas.

No debemos esperar que las habilidades mentales y los altos valores de un estudiante, éstos últimos reflejados en sus actitudes, se modifiquen *sustancialmente* en un mes y medio a pesar de que se haya procurado, en un ambiente muy específico (el del salón de clases) y con un saber muy particular (un tema de la Geometría Analítica), crear condiciones adecuadas para que él las desarrolle. Pero no por esto, debemos marginarlos del proceso enseñanza-aprendizaje. Por el contrario, por ser aprendizajes que se consolidan después de haberse ejercitado una y otra y otra vez, es necesario crear la mayor cantidad de situaciones posibles para que el alumno las desarrolle.

La enorme dificultad que se tiene para determinar, y por ende, cuantificar el incremento que un estudiante ha tenido en el desarrollo de sus habilidades mentales y de sus altos valores (los que no están relacionados directamen con la experiencias de aprendizaje: solidaridad, equidad, tolerancia, etc.) en un mes y medio, nos limita seriamente poder asignarle una calificación al alumno en función de dicho incremento. Por tal motivo, esto no se hace en este TEMA.

III. Los valores estrechamente vinculados con las experiencias de aprendizaje (objetivos de tipo 5), al margen de lo ya expuesto, se sostiene el principio que todo individuo en una sociedad tiene *derechos* y *obligaciones*. Los primeros se ejercen e inclusive se exigen, pero las segundas se cumplen al margen del reconocimiento, el estímulo o el premio.

Tomando como marco la Educación Institucionalizada, se considera que un alumno tiene la responsabilidad de cumplir con el trabajo académico que le sea encomendado, bien sea tarea (trabajo extra-clase), ejercicio en clase, exposición ante sus compañeros de algún aspecto de un tema, etc.. El estudiante debe ser conciente que la finalidad de todo ese trabajo, es contribuir a que él alcance los aprendizajes propuestos y que, si bien la sociedad en su conjunto tiene la obligación de proporcionarle los medios necesarios para su formación, al mismo tiempo él contrae la obligación (entre otras) de realizar su mejor esfuerzo con el objeto de que no sea vano el esfuerzo que la sociedad realiza. La manera fundamental de realizar esto, se traduce en el cumplimiento de las diversas experiencias de aprendizaje que se han escogido no por capricho, sino con el fin de que su aprendizaje sea lo más óptimo posible. En consecuencia de lo anterior, el que un estudiante realice las diferentes actividades de aprendizaje, no será causa, motivo o razón de calificación alguna.

Por todo lo anterior, el examen, y en consecuencia la calificación que se le asigna al estudiante para efectos de promoción o no promoción, se limita a los contenidos del TEMA y a las habilidades algorítmicas a que conducen dichos contenidos.

Por otro lado, en virtud de que los contenidos de este TEMA son parte de los prerrequisitos de algunos de los TEMAS siguientes, la evaluación sumativa que se que se realiza en él, no sólo se utiliza para lo hasta aquí señalado. Su función va más allá. Sus resultados se utilizan como indicador del grado en que los alumnos cumplen con los prerrequisitos antes mencionados. En este mismo sentido, cabe señalar que para determinar en que medida los alumnos cumplen con los prerrequisitos para este TEMA 6, se recurre a las evaluaciones sumativas que se realizaron con anterioridad.

Finalmente, sólo resta mencionar que los resultados de la evaluación sumativa es un elemento más que se considera al retroalimentar la planeación del TEMA para cursos posteriores.

DESCRIPCION DE LAS SESIONES

PRIMERA SESION

DESCRIPCION DE LA SESION

La sesión se inicia con la explicación, por parte del maestro, de:

1. Los *objetivos* fundamentales del TEMA.
2. El *tiempo* aproximado que se le dedicará.
3. El *método de trabajo*.
4. Los *materiales* que se utilizarán.
5. El tipo de *evaluación* que se realizará para asignar *calificación* y cuándo se llevará a cabo.

Finalizada la intervención anterior, el profesor indica a los alumnos que su (de ellos) primera actividad es la elaboración del material necesario para el estudio del TEMA. Para tal fin, el maestro le proporciona a cada estudiante una hoja con 54 ecuaciones impresas. El

OBSERVACIONES

* Esta sesión es la primera que se le dedica al TEMA 6 del Programa de Matemáticas IV.

* De los cinco puntos anotados a la izquierda, el *segundo* y el *quinto* se consideran agotados con lo que el profesor diga en ese momento. El *primero* y *tercero* serán retomados esporádicamente en el desarrollo del TEMA y el *cuarto* se instrumenta en esta misma sesión dado que son los propios alumnos los que elaborarán la mayor parte de los materiales que son indispensables para el estudio de este TEMA y que a saber, dicha actividad constituye la primera experiencia de aprendizaje de esta unidad didáctica.

* En el *segundo* punto se habla de "*tiempo* aproximado" en virtud de que si bien el profesor, al realizar la planeación, considera que cierto tema se cubrirá en determinado tiempo, éste se puede ver modificado por el "avance" del grupo.

* En este TEMA se está interesado en establecer la correlación que existe entre los elementos algebraicos de una ecuación de la forma $y = ax^n + b$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $n = 1, 2, 3$; con los elementos geométricos que caracterizan su gráfica asociada. Por tal motivo, el mínimo

DESCRIPCION DE LA SESION

alumno deberá tabular y graficar cada ecuación siguiendo las instrucciones del profesor. Las indicaciones son:

1. Realizar las 54 tabulaciones en el cuaderno de tareas.
2. Todas las tabulaciones deben estar juntas. En otras palabras, no se debe dejar espacio para graficar entre una tabulación y otra ya que, las gráficas no se harán en este momento sino hasta que se hayan terminado y revisado todas las tabulaciones.
3. Las 54 tabulaciones se realizarán de -3 a 3 es decir, los valores que se le asignarán a la variable independiente ("x") son: -3, -2, -1, 0, 1, 2 y 3.
4. Cuando en la ecuación el coeficiente de la variable independiente sea un número racional de la forma $\frac{m}{n}$, con $n,m \in Z$ y $n \neq 0$ (comunmente llamado "quebrado"), las operaciones que se requieren al efectuar la tabulación deberán realizarse sin cambiar la forma del racional. Más llanamente, si en una ecuación el coeficiente de "x" es un "quebrado", al realizar la tabulación correspondiente, dicho "quebrado" no deberá "sustituírse" por su expresión decimal.
5. En todas las tabulaciones, primero se debe sustituir en la ecuación el valor asignado a la variable independiente y posteriormente realizar las operaciones. Aquí se les sugiere a los alumnos que anoten todas las operaciones que realicen y no unicamente el resultado ya que en este último caso es más

OBSERVACIONES

número de ecuaciones y gráficas con las que se habrá de trabajar asciende a 54. Este número resulta de considerar, en las ecuaciones, las combinaciones que se obtienen cuando estando la variable dependiente despejada los valores del exponente de la variable independiente, del coeficiente de la variable independiente y del término independiente son: $n=1,2,3$; $a=\pm 1$, $a>\pm 1$, $a<\pm 1$, $b=0$, $b>0$ y $b<0$.

* Uno de los objetivos de este curso es fomentar en el alumno los hábitos del orden y la limpieza en sus trabajos académicos. Si bien, estos hábitos no son lo único ni lo más importante en el ejercicio de una profesión o en la vida cotidiana de un individuo, es deseable que los tenga. Un trabajo con esas características facilita cualquier consulta que de él se quiera hacer, no sólo para el propio autor sino también, para cualquier lector interesado en él.
Con ese objetivo en mente, al menos en cuanto al orden se refiere, desde el inicio del semestre el maestro ha solicitado a los alumnos un cuaderno tamaño profesional cuadrícula chica el cual, está dedicado a las tareas (trabajo extra-clase) del curso. Este cuaderno es al que se hace referencia en el *primer* punto de la columna izquierda.

* En torno al *segundo* punto, cabe señalar que las 54 tabulaciones son revisadas antes de que el alumno proceda a graficar. Esto con el fin, por un lado, de tener una mayor garantía de que las gráficas estarán correctas, y por otro, evitar que el alumno "trabaje doble". Si a los estudiantes no se les dice explícitamente que en ese momento no grafiquen, muy probablemente alguno lo haga y en el

DESCRIPCION DE LA SESION

difícil detectar el error en caso de que haya.

6. En el extremo derecho de cada renglón de las tabulaciones se deberá anotar el par ordenado que le corresponde a dicho renglón.
7. Tanto las tabulaciones como los pares ordenados que se obtienen de ellas deberán realizarse con estricto orden y limpieza. Aquí se sugiere que trabajen con lápiz por si hay necesidad de corregir alguna(s) tabulación.
8. Las 54 tabulaciones deben estar terminadas dentro de ocho días (tercera sesión). Para la siguiente clase, cada alumno deberá traer mínimamente las 27 primeras tabulaciones.

Aclarado lo anterior, se procede a que los alumnos empiecen a realizar sus tabulaciones bajo la supervisión del profesor hasta que el tiempo de la clase finalice, dándose por terminada esta primera sesión.

Las 54 ecuaciones a las que nos hemos estado refiriendo son:

1. $y = x$
2. $y = 2x$
3. $y = \frac{1}{2}x$
4. $y = x + 3$
5. $y = x - 3$
6. $y = 2x + 3$
7. $y = 2x - 3$
8. $y = \frac{1}{2}x + 3$
9. $y = \frac{1}{2}x - 3$

OBSERVACIONES

caso que haya cometido algún error en la tabulación, no sólo tendrá que repetir dicha tabulación sino también, la gráfica correspondiente. De aquí que, es preferible que primero realicen todas las tabulaciones, éstas se revisen y cuando estén correctas se proceda a graficar. Esta es la razón fundamental por la cual se les pide a los alumnos que sólo efectúen las tabulaciones y que no grafiquen.

Por otro lado, se considera que para el análisis que deberán realizar los alumnos tanto de las 54 ecuaciones como de sus gráficas asociadas, *no* es conveniente que la forma de graficar sea *una* gráfica en cada Plano Cartesiano. Por tal motivo, se les dice a los estudiantes que no dejen espacio para graficar entre una tabulación y otra. La forma en que se graficarán las 54 ecuaciones se detalla en la tercera sesión de esta planeación.

* Probablemente el lector al leer el *tercer* punto de la lista que aparece a la izquierda en la página anterior, considere que no es del todo adecuado que sea el profesor quien determine los valores que se le asignarán a la variable independiente cuando es el alumno el que tiene que tabular para "encontrar" la gráfica asociada a una ecuación y que, lo más conveniente sería que fuera el propio alumno el que le asignara "libremente" los valores a dicha variable. Naturalmente, le asiste toda la razón. Sin embargo, esto último plantea una seria dificultad práctica. Si cada alumno hiciera lo anterior al tabular sus 54 ecuaciones entonces, si el profesor desea revisar las tabulaciones que realizaron sus estudiantes, se enfrentaría a un volúmen

DESCRIPCION DE LA SESION	OBSERVACIONES
10. $y = -x$ 11. $y = -2x$ 12. $y = -\frac{1}{2}x$ 13. $y = -x + 3$ 14. $y = -x - 3$ 15. $y = -2x + 3$ 16. $y = -2x - 3$ 17. $y = -\frac{1}{2}x + 3$ 18. $y = -\frac{1}{2}x - 3$ 19. $y = x^2$ 20. $y = 2x^2$ 21. $y = \frac{1}{2}x^2$ 22. $y = x^2 + 2$ 23. $y = x^2 - 2$ 24. $y = 2x^2 + 1$ 25. $y = 2x^2 - 1$ 26. $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ 27. $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$ 28. $y = -x^2$ 29. $y = -2x^2$ 30. $y = -\frac{1}{2}x^2$ 31. $y = -x^2 + 2$ 32. $y = -x^2 - 2$ 33. $y = -2x^2 + 1$ 34. $y = -2x^2 - 1$ 35. $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$ 36. $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3$ 37. $y = x^3$ 38. $y = 2x^3$ 39. $y = \frac{1}{2}x^3$ 40. $y = x^3 + 2$ 41. $y = x^3 - 2$	terriblemente grande de tabulaciones a revisar. Considere el lector el hecho de que un profesor de Matemáticas del C.C.H. tiene del orden de 200 a 300 alumnos y si todos ellos son de Matemáticas IV se tendrían que revisar 10 800 tabulaciones con 200 alumnos y 16 200 con 300. Suponiendo que un profesor se tardase un minuto en revisar cada tabulación, requeriría de 270 horas para terminar su tarea. Estas horas equivalen a más del triple de las horas que se dán por semestre (un semestre tiene una duración aproximada de 18 semanas lo cual dá un total de 72 horas). Para ser más exactos, 3.75 semestres. Ante estos hechos, no resulta difícil darse cuenta que es prácticamente imposible revisarles todas las tabulaciones a todos los alumnos. Frente a esta imposibilidad, otra posición que puede asumir el profesor y que se encuentra en el polo opuesto a la anterior en no revisar nada, a ningún alumno. Naturalmente, esto no es recomendable, por razones obvias. Una posición "intermedia" entre las dos anteriores consiste en "fijar" los valores que se le asignarán a la variable independiente de tal suerte que todos los alumnos trabajen con los mismos valores, lo cual permite, aplicando un mecanismo adecuado, una rápida revisión de los resultados que al tabular obtuvieron. A esto último obedece la razón por la cual se les estipulan a los estudiantes los valores que deberán asignarle a la variable independiente. Por otro lado, considerando que el número de tabulaciones que habrá de realizar el alumno es elevado, se piensa pertinente que los valores que se le

DESCRIPCION DE LA SESION

42. $y = 2x^3 + 1$

43. $y = 2x^3 - 1$

44. $y = \frac{1}{2}x^3 + 4$

45. $y = \frac{1}{2}x^3 - 4$

46. $y = -x^3$

47. $y = -2x^3$

48. $y = -\frac{1}{2}x^3$

49. $y = -x^3 + 2$

50. $y = -x^3 - 2$

51. $y = -2x^3 + 1$

52. $y = -2x^3 - 1$

53. $y = -\frac{1}{2}x^3 + 4$

54. $y = -\frac{1}{2}x^3 - 4$

OBSERVACIONES

asignen a la variable independiente sean de tal naturaleza que faciliten el trabajo algorítmico que los estudiantes deberán realizar. Por tal motivo, a la variable independiente se le han asignado únicamente números enteros. Las razones por las cuales el profesor asigna los valores a la variable independiente y además, el porque esos valores se hace del conocimiento de los alumnos.

* No obstante que se pretende allanar un tanto el trabajo algorítmico que habrá de realizar el estudiante, se considera conveniente repase las operaciones con racionales en la forma $\frac{m}{n}$. De aquí que, en la *cuarta* instrucción que le dá el profesor le diga que "no convierta a decimales" dichos números.

* Se pretende que cuando el alumno realice la *quinta* instrucción reafirme los conceptos de variable independiente, variable dependiente y constante. Además se espera que "la sustitución" sea un medio que le ayude al estudiante a identificar las operaciones inmersas en la ecuación y el orden en que se realizan, así como utilizar correctamente el lenguaje algebraico.

Explicitemos un poco más la última parte del párrafo anterior. Si al tener la ecuación $y=8x^2 + 4$ y el valor de la variable independiente ("x") es "-3" entonces, al sustituir $x=-3$ en la ecuación dada un alumno puede dar, por ejemplo, como respuesta $y = 8(-3)^2 + 4$ o bien $y = 8-3^2 + 4$. Cuando el profesor obtiene como respuesta la primera de estas dos expresiones, él puede estar seguro de que su alumno utiliza correctamente el lenguaje algebraíco y tener una "cierta garantía" de que el estudiante identifica las operaciones que subyacen en la ecuación. Naturalmente, esto último lo ratificará o rectificará, según sea el caso, cuando el alumno obtenga el resultado. Sin embargo, si la respuesta del estudiante es la segunda expresión, el maestro sabrá que el lenguaje

DESCRIPCION DE LA SESION OBSERVACIONES

algebraico no ha sido usado adecuadamente y que "muy probablemente" ese alumno no ha identificado correctamente las operaciones de la ecuación.

* El principio fundamental del método de tabulación radica en el hecho de que es el medio que permite asociarle una gráfica en el Plano Cartesiano a una ecuación con dos variables reales. Esta asociación se logra, cuando al asignarle un valor a la variable independiente, sustituirlo en la ecuación dada, realizar las operaciones y obtener el correspondiente valor de la variable dependiente, lo que obtenemos no es otra cosa que las coordenadas de uno de los puntos que pertenecen a la gráfica buscada. Principio, que el alumno deberá recordar cuantas veces sea posible. Este es el objetivo principal de la *sexta* instrucción cuando se les dice a los alumnos que en el extremo derecho de cada renglón de la tabulación anoten el par ordenado que le corresponde. Un objetivo secundario de tal instrucción es facilitar, en un momento posterior, la revisión de las tabulaciones y la graficación.

* Lo que en la *séptima* indicación se señala responde directamente, de nueva cuenta, al objetivo mencionado renglones arriba: fomentar en los estudiantes los hábitos del orden y la limpieza.

* Tabular las 54 ecuaciones dadas es, si bien no un trabajo extremadamente difícil, desde el punto de vista matemático, sí laborioso. En este sentido, se consideró que un alumno podría realizar 8 tabulaciones diarias, en promedio, sin que ello representara un trabajo excesivo para él. Por tal razón, en la primera parte de la *octava* instrucción se establece una semana para que los alumnos concluyan sus tabulaciones.
En torno a la segunda parte de esa misma instrucción, cabe señalar que el mínimo número de tabulaciones que el alumno deberá tener para la próxima sesión dependerá de cuándo sea ésta. Si las clases son lunes y jueves (como lo estamos suponiendo en esta planeación) entonces, un número adecuado de tabulaciones de sesión a sesión es 27. Pero, si las clases son, por ejemplo, martes y miércoles entonces, es claro que del martes al miércoles no se les pueden pedir 27 tabulaciones. Sin embargo, todas las tabulaciones deberán estar terminadas en una semana.

SEGUNDA SESION

DESCRIPCION DE LA SESION

En esta clase habrán de revisarse las 27 tabulaciones que se dejaron la sesión anterior. Para ello, los alumnos, por indicación del profesor, toman asiento de tal manera que el grupo en su conjunto, formen "*una mesa redonda*". En seguida, el maestro explica que la revisión se llevará a cabo de la siguiente manera:

- El primer alumno a su izquierda (o bien a su derecha) leerá la primera ecuación ($y = x$) y dará el primer par ordenado que se obtuvo en la tabulación. Es decir, aquel cuya abscisa es igual a -3. El siguiente alumno leerá el segundo par ordenado, el que le sigue el tercero, y así sucesivamente hasta finalizar con esa tabulación. A continuación el procedimiento se repite, correspondiéndole al siguiente alumno iniciar la otra tabulación, leyendo el número de la ecuación, la ecuación y el primer par ordenado. Así, tantas veces sea necesario hasta concluir con las 27 tabulaciones.
- Simultáneamente a lo anterior, los restantes integrantes del grupo, incluyendo al profesor, habrán de checar si lo que está diciendo el compañero en turno coincide con lo que cada quien tiene escrito.

OBSERVACIONES

* En virtud de que todos y cada uno de los alumnos habrán de dirigirse a los restantes integrantes del grupo, y considerando que lo más conveniente para un orador es visualizar a cada uno de los que conforman su público para cualquier pregunta, observación o sugerencia que alguno de ellos le quiera hacer, se solicita a los estudiantes que dispongan sus asientos de tal manera que se forme "*una mesa redonda*", esto garantiza que tanto el profesor como los alumnos tengan ante sí a los restantes integrantes del grupo en el momento que se dirigan a ellos.
* Algo que muy probablemente el lector ha inferido al leer la columna de la izquierda, y que por ende, no haya necesidad de mencionar, pero que aún a costa de parecer superfluo se cita, es el hecho de que el profesor debe llevar por escrito las tabulaciones cuando se efectúa la revisión.
* Si bien, para los propósitos que se persiguen en la revisión, bastaría que el profesor leyera los pares ordenados que se obtienen en cada tabulación, este procedimiento no se adopta en virtud de que se prefiere que todos los alumnos participen, de manera oral, en dicha revisión. Además, a la luz de la revisión, el profesor podrá, en cierta medida,

DESCRIPCION DE LA SESION

- Si el par ordenado que se lea en un determinado momento es incorrecto, el profesor, inmediatamente, lo hará saber al orador y al grupo en su conjunto. Y, le corresponderá, al siguiente alumno, o al siguiente, o al siguiente rectificar el error.
- Cuando algún par ordenado de algún alumno no coincida con el correcto que se haya dado en voz alta, el estudiante sólo deberá marcar con una cruz, rayita o lo que sea, dicho par ordenado y NO corregirlo en ese momento dado que las correcciones se harán al final de la revisión, de manera individual con el profesor, para detectar la fuente de error.
- Si algún alumno se atrasa o no escucha bien la respuesta correcta, alzará su mano para solicitar que le repitan lo que considere necesario.

Aclarado el procedimiento a seguir, se prosigue con la revisión de las tabulaciones. Concluída esta actividad, el profesor les señala a los alumnos, que aquellos estudiantes que tengan correctas *todas* las tabulaciones revisadas continúen con las restantes y que aquellos, que por alguna razón se hayan equivocado en alguna de ellas, rectifiquen el error antes de continuar con las demás; al tiempo les hace saber, que pasará a sus lugares para conocer el resultado particular de la revisión realizada y ayudar, a los alumnos que se hayan equivocado, a identificar la fuente de error si ésta no se ha detectado.

La supervisión del trabajo realizado y del que están efectuando los alumnos en

OBSERVACIONES

detectar algunas de las tabulaciones que representaron mayor dificultad para los alumnos, tomando como referencia los errores cometidos por los oradores. Con ello, el maestro tendrá una primera evaluación, a nivel grupal, del trabajo realizado. Una segunda evaluación la tendrá una vez que haya conocido los resultados particulares de los estudiantes.

* Si algún o algunos alumnos tabularon más de 27 ecuaciones, después de que el profesor ha conocido el resultado individual de todos los estudiantes, el grupo se redistribuye de tal manera que los alumnos formen dos conjuntos: el de los que ya no tienen más tabulaciones que revisar y el de los que sí tienen. Mientras los primeros trabajan individualmente rectificando errores o tabulando más ecuaciones, los segundos, trabajan colectivamente con el profesor a fin de determinar si los resultados que obtuvieron son correctos. En este caso, el procedimiento de revisión es, en esencia, idéntico al que realizaron con anterioridad. En lo único que se pueden diferenciar es en el hecho de que no todos los alumnos necesariamente terminan de revisar sus tabulaciones al mismo momento en virtud de que, muy probablemente algunos hayan tabulado más ecuaciones que otros. Conforme los estudiantes del segundo conjunto vayan terminando de revisar sus tabulaciones se incorporarán al primero y, la revisión continuará hasta que el segundo conjunto sea vacío. Cabe señalar que todas las tabulaciones que los alumnos realicen en el salón de clase se revisarán en la próxima sesión.

* Queda a juicio del profesor modificar su planeación y no esperar hasta la siguiente

DESCRIPCION DE LA SESION

el salón de clase es la actividad que el profesor llevará a cabo hasta que las dos horas de la sesión hayan transcurrido. En ese momento el maestro les recuerda a los estudiantes que para la próxima sesión deben estar terminadas las 54 tabulaciones y dá por concluída la clase.

OBSERVACIONES

sesión para dar las instrucciones de graficación. Esto dependerá de si hubo alumnos que hayan terminado las 54 tabulaciones o si no los hubo.

TERCERA SESION

DESCRIPCION DE LA SESION

Para dar comienzo a la sesión, los alumnos, al igual que en la clase anterior, toman asiento formando "una mesa redonda". Acto seguido, se procede a la revisión de las últimas 27 tabulaciones bajo las mismas normas con que se revisaron las 27 primeras. Al terminar, los alumnos que hayan tenido errores los rectificarán mientras que los que no los tuvieron deberán empezar a graficar. Por tal motivo, el maestro dá las instrucciones, a todo el grupo, de cómo deberán graficar antes de pasar con cada alumno para conocer el resultado particular de la revisión y ayudarlos a identificar la fuente de error en los casos necesarios.

OBSERVACIONES

* De muchas de las cosas que en esta sesión se hacen o se dicen, ya se explicó, en páginas anteriores, su razón de ser. Por tal motivo, ahora no se comenta sobre ellas. Tal es el caso de la forma en que se sientan los alumnos y de las instrucciones *primera*, *segunda* y *novena* que se dán para la graficación.

* En la primera parte del TEMA anterior (tabulación y graficación), mucho se habló de las normas, requisitos y convenciones que se siguen al representar, en un Plano Cartesiano, la gráfica asociada a una ecuación de dos variables reales. Los alumnos, en aquel momento, tuvieron vivencias en ese sentido. Ahora el estudiante retomará esos aspectos al

DESCRIPCION DE LA SESION

El profesor explica a los alumnos que para los fines que se pretenden en este TEMA, las gráficas asociadas a las 54 ecuaciones serán graficadas en 26 Planos Cartesianos, dándose el caso que algunas de ellas se repitan. Dados estos lineamientos generales, al instante el maestro entrega una hoja impresa a cada alumno cuyo contenido es el siguiente:

PLANO	ECUACIONES
1°	1, 2 y 3
2°	1, 4 y 5
3°	2, 6 y 7
4°	3, 8 y 9
5°	1 y 10
6°	10, 11 y 12
7°	10, 13 y 14
8°	11, 15 y 16
9°	12, 17 y 18
10°	19, 20 y 21
11°	19, 22 y 23
12°	20, 24 y 25
13°	21, 26 y 27
14°	19 y 28
15°	28, 29 y 30
16°	28, 31 y 32
17°	29, 33 y 34
18°	30, 35 y 36
19°	37, 38 y 39
20°	37, 40 y 41
21°	38, 42 y 43
22°	39, 44 y 45
23°	46, 47 y 48
24°	46, 49 y 50
25°	47, 51 y 52
26°	48, 53 y 54

A continuación el maestro explica que los números escritos en la primera columna de esa hoja, expresan los Planos Cartesianos que se deberán tener, mientras

OBSERVACIONES

considerar el contenido de las instrucciones *tercera*, *cuarta*, *sexta* y *séptima* que el profesor dá como recordatorio y los establece como requisito para este trabajo de graficación.

* Una razón que justifica la *quinta* instrucción es decir, el color de las gráficas, es que las diferencias entre ellas se perciben mejor cuando se hacen resaltar. Además, propicia una buena presentación del trabajo. Esto último, es un aspecto que no se debe perder de vista, no sólo por lo señalado páginas atrás (quinta observación de la primera sesión), sino también porque puede contribuir a que el estudiante se sienta satisfecho del trabajo que realiza y, esta satisfacción puede ser fuente de motivación para realizar de mejor grado sus actividades de estudiante.

* Bajo el supuesto de que es más fácil percibir y poder establecer diferencias y similitudes entre dos o más entes cuando éstos aparecen uno al lado del otro, se elige la forma de graficación que se estipuló en la hoja impresa. Lo mismo se puede decir de la *octava* instrucción salvo que en este caso, además de lo anterior, se pretende que el alumno cuente con una presentación adecuada de las ecuaciones y de sus gráficas asociadas a fin de establecer correlaciones entre ellas.

* Una forma de mostrarle al estudiante que se está interesado en su formación y por ende, en lo que haga, es revisar, sugerir y/o corregir el trabajo que realiza al margen de que éste no contribuya en la calificación. Además, para el profesor, la revisión individual del trabajo de sus alumnos le permite detectar

DESCRIPCION DE LA SESION	OSERVACIONES
que los de la segunda columna son los que corresponden a las ecuaciones cuyas gráficas asocidas habrán de representarse en el Plano que se indica en el mismo renglón pero de la primera columna. Así, en el primer Plano Cartesiano se representarán las gráficas asociadas a las ecuaciones 1, 2 y 3; en el segundo, las gráficas asociadas a las ecuaciones 1, 4 y5; etc. Además indica que:	si existieron o no dificultades en aquello que el estudiante ha llevado a cabo. Por tales razones, el maestro firma las tabulaciones.

1. La graficación se hará en el cuaderno de tareas inmediatamente después de las tabulaciones.
2. Los Planos Cartesianos deben estar numerados y ordenados de acuerdo a la secuencia establecida por el profesor en la hoja impresa.
3. Los Sistemas de Coordenadas Cartesianos que se construyan deben estar completos. Es decir, con las particiones, con las puntas de flecha que indican el sentido positivo de los ejes, etc..
4. En el caso de que no se utilice la misma unidad de medida para realizar las particiones en los ejes, se deberá indicar qué unidad se utilizó en el Eje de las Abscisas y cúal en el Eje de las Ordenadas.
5. Se utilizarán colores para representar las gráficas en el Plano Cartesiano, procurando que las que aparecen en un mismo Plano sean de colores distintos.
6. Al unir los puntos -en el Plano Cartesiano- que se obtuvieron de la tabulación, se deberá "respetar" la *forma* en que están dispuestos. Sólo se utilizará regla en el caso que los puntos estén dispuestos en línea recta.
7. En virtud de que las gráficas asociadas a las 54 ecuaciones son infinitas, los extremos de ellas no deben ser puntos específicos, pues ello indicaría que las gráficas son finitas. Por lo tanto, las gráficas deberán prolongarse más allá de los puntos, inicial y final, que se obtuvieron en la tabulación.

DESCRIPCION DE LA SESION | OBSERVACIONES

8. Se anotará, en uno de los extremos de las gráficas, la ecuación asociada a cada una de ellas, cuidando que las dos o tres ecuaciones que habrán de escribirse en un determinado Plano Cartesiano queden en un mismo lado, todas a la derecha o a la izquierda.
9. Los 26 Planos Cartesianos deben estar terminados en una semana. Para la próxima sesión, se recomienda traer mínimamente los trece primeros.

Estipuladas las condiciones para graficar, cada uno de los integrantes del grupo empieza a tabajar en la actividad que le corresponde: el maestro pasa con cada uno de los alumnos, algunos estudiantes rectifican errores y los otros grafican. Cuando el profesor termina, les anuncia a los alumnos que mientras ellos continúan trabajando él les firmará sus tabulaciones. Acto seguido, procede a tomar asiento y va llamando a uno por uno de los estudiantes para tal fin. Si el maestro termina de firmar antes de que finalice la clase, se dedica a supervisar el trabajo que están realizando los alumnos hasta que el tiempo dedicado a la sesión transcurra. En el caso que el tiempo haya sido insuficiente para que el maestro terminara de firmar, les comunica a los que faltaron que la próxima clase se las firma y dá por concluída la sesión.

CUARTA SESION

DESCRIPCION DE LA SESION

Durante las dos horas de esta clase los alumnos grafican, el profesor revisa las gráficas, las firma en el caso que estén correctas o indica el error para que el estudiante lo corriga.

OBSERVACIONES

* Revisar y firmar las gráficas no sólo persigue lo observado renglones arriba, sino también, eliminar como fuente de error, en el análisis que se habrá de realizar a partir de la sexta sesión, una graficación incorrecta.

QUINTA SESION

DESCRIPCION DE LA SESION

En esta clase el maestro debera terminar de revisar los 26 Planos Cartesianos de cada alumno. Mientras él realiza esta actividad, los estudiantes "construirán", en el cuaderno de tareas, el llamado "CUADRO I", bajo las siguientes instrucciones que les dá el profesor:

1. Considerando las 54 ecuaciones que se tabularon, formar *tres bloques* de tal suerte que cada uno

OBSERVACIONES

* El cuadro al que se hace referencia, es uno de los materiales fundamentales en el desarrollo de este TEMA, sobre todo en la primera parte. La distribución de las ecuaciones y por ende, el de las gráficas responde a la forma en que se abordará el análisis de las ecuaciones y de sus gráficas asociadas.

* Pedir a los alumnos que utilicen colores

DESCRIPCION DE LA SESION

de ellos conste de *dos columnas*, cada columna de *nueve renglones* y cada renglón de *una ecuación*. Para distribuir las ecuaciones en bloque, columnas y renglones, se atenderá al orden en que dichas ecuaciones fueron dadas.

2. Al anotar las ecuaciones, las variables y la relación entre ellas se hará co lápiz, los exponentes con rojo, los coeficientes con azul y los términos independientes con verde.
3. Al pie de cada columna estipular los Planos que le corresponden, es decir, los Planos Cartesianos en los que se encuentran las gráficas asociadas a las ecuaciones de esa columna.
4. Para finalizar el CUADRO I, explicitar los Planos Cartesianos asociados a cada uno de los bloques de ecuaciones. Lo anterior se hará en la parte inferior de lo realizado en la instrucción anterior.

OBSERVACIONES

para anotar los diferentes elementos algebraicos de las ecuaciones, es con la intensión de que reafirmen esos conceptos en virtud de que el analisis que se hará a partir de la próxima clase estará, en mucho, referido a ellos. Además, se considera que esta actividad le permite al estudiante, en un primer nivel, percatarse de algunas diferencias y similitudes existentes entre las ecuaciones.

* Ir clasificando los planos según la columna o el bloque, también es un primer acercamiento a las diferencias y similitudes que presentan las gráficas.

* El trabajo extra-clase que tendrán los alumnos para la próxima sesión es diferenciado. Aquellos alumnos que no tuvieron errores en la graficación, y a los cuales se les firmaron todos sus Planos Cartesianos, no tendrán tarea; mientras que para aquellos que los tuvieron, ésta consistirá en corregir todos y cada uno de sus errores.

Al finalizar la clase el alumno deberá tener un cuadro como el siguiente:

C U A D R O I

BLOQUE I		BLOQUE II		BLOQUE III	
1a C O L U M N A	2a C O L U M N A	1a C O L U M N A	2a C O L U M N A	1a C O L U M N A	2a C O L U M N A
1. $y = x$	10. $y = -x$	19. $y = x^2$	28. $y = -x^2$	37. $y = x^3$	46. $y = -x^3$
2. $y = 2x$	11. $y = -2x$	20. $y = 2x^2$	29. $y = -2x^2$	38. $y = 2x^3$	47. $y = -2x^3$
3. $y = \frac{1}{2}x$	12. $y = -\frac{1}{2}x$	21. $y = \frac{1}{2}x^2$	30. $y = -\frac{1}{2}x^2$	39. $y = \frac{1}{2}x^3$	48. $y = -\frac{1}{2}x^3$
4. $y = x + 3$	13. $y = -x + 3$	22. $y = x^2 + 2$	31. $y = -x^2 + 2$	40. $y = x^3 + 2$	49. $y = -x^3 + 2$
5. $y = x - 3$	14. $y = -x - 3$	23. $y = x^2 - 2$	32. $y = -x^2 - 2$	41. $y = x^3 - 2$	50. $y = -x^3 - 2$
6. $y = 2x + 3$	15. $y = -2x + 3$	24. $y = 2x^2 + 1$	33. $y = -2x^2 + 1$	42. $y = 2x^3 + 1$	51. $y = -2x^3 + 1$
7. $y = 2x - 3$	16. $y = -2x - 3$	25. $y = 2x^2 - 1$	34. $y = -2x^2 - 1$	43. $y = 2x^3 + 1$	52. $y = -2x^3 - 1$
8. $y = \frac{1}{2}x + 3$	17. $y = -\frac{1}{2}x + 3$	26. $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$	35. $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$	44. $y = \frac{1}{2}x^3 + 4$	53. $y = -\frac{1}{2}x^3 + 4$
9. $y = \frac{1}{2}x - 3$	18. $y = -\frac{1}{2}x - 3$	27. $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$	36. $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3$	45. $y = \frac{1}{2}x^3 - 4$	54. $y = -\frac{1}{2}x^3 - 4$
Planos del 1º al 4º.	Planos del 6º al 9º.	Planos del 10º al 13º.	Planos del 15º al 18º.	Planos del 19º al 22º.	Planos del 23º al 26º.
PLANOS DEL 1º AL 9º		PLANOS DEL 10º AL 18º		PLANOS DEL 19º AL 26º	

SEXTA SESION

DESCRIPCION DE LA SESION

Al inicio de esta sesión se forman equipos de cuatro personas, se les dán las instrucciones de cómo deben trabajar (los tres primeros aspectos del Método de Trabajo anteriormente expuesto) y se procede a formular la primera pregunta:

PREGUNTA	RESPUESTA
1. ¿ Cuáles son las *diferencias* que existen entre los tres BLOQUES en: a. ecuaciones, b. gráficas?.	a. El *exponente* de la variable independiente. En el primer BLOQUE el exponente de la variable independiente es *uno*, en el segundo BLOQUE es *dos* y en el tercer BLOQUE, *tres*. b. La *forma*. Las del primer BLOQUE son *rectas*, las del segundo son *parábolas* y las del tercero son *parábolas cúbicas*.

OBSERVACIONES

* Cabe señalar que la respuesta que se anota en la columna anterior, es la que se pretende obtener después de la discusión grupal.

* Antes de que los alumnos procedan a dar respuesta a esta pregunta, se les aclara que los *bloques* a los que se hace referencia en ella, son los del CUADRO I y que por brevedad, esto último no se incluye, ni se incluirá en todas aquellas preguntas que hagan referencia a *bloques* o *columnas*, en la redacción de las mismas.

* En torno a la respuesta del inciso "b", es menester señalar que los alumnos, muy probablemente, determinen sin mayor dificultad que la diferencia entre las gráficas es la *forma*. Sin embargo, al momento de enunciar cual es cada una de esas *formas*, pueden tener problemas con las de los BLOQUES II y III por la simple y sencilla razón que desconocen *el nombre* que la Matemática les ha asignado a esas formas geométricas. Ante tal situación, el profesor, en el momento que considere oportuno (bien puede ser cuando los alumnos pregunten: "¿Maestro, cómo se llaman las de los BLOQUES II y III?", o bien después de que hayan expresado con sus "propias palabras" la *forma* de tales gráficas, lo cual generalmente hacen comparándolas con las *formas* de las letras y de esta manera afirman: "las del BLOQUE II tienen forma de "*u*" y las del BLOQUE III, de "*ese alargada*""), explicitará que las gráficas del BLOQUE II se les conoce con el nombre de parábolas y las del BLOQUE III, parábolas cúbicas. Además explica que:

DESCRIPCION DE LA SESION | OBSERVACIONES

i. En la parábola existe un punto en el cual la gráfica termina su ascenso y empieza su descenso o viceversa, que recibe el nombre de *vértice* de la parábola; que ésta se puede abrir hacia arriba, hacia abajo, a la derecha, a la izquierda, etc. y que se puede encontrar en cualquier posición del Plano Cartesiano. Finalmente en relación a la parábola, explicita que las *únicas* parábolas que se estudiarán son aquellas que se abren hacia arriba o hacia abajo y cuyo vértice se encuentra en el Eje de las Ordenadas.

ii. La parábola cúbica tiene un punto con la propiedad de que al dejar fija una de las partes en que dicho punto divide a la gráfica (cualquier punto de una curva "abierta" divide a ésta en dos partes) y rotar -adecuadamente- la otra parte de la gráfica en torno a ese punto, las dos partes coinciden. Además, dicho punto separa a la curva en dos partes que tienen su concavidad en sentidos opuestos. Una parte es cóncava hacia arriba y la otra cóncava hacia abajo. Por esto último, el tan mencionado punto recibe el nombre de *punto de inflexión*, y así nos referiremos a él. El profesor termina esta intervención aclarando que si bien una parábola cúbica se puede encontrar en cualquier posición del Plano Cartesiano y por ende, su punto de inflexión puede ser cualquier punto de él, *sólo* se estudiarán las parábolas cúbicas cuyo punto de inflexión se encuentre en el Eje de las Ordenadas y que se abra en dirección de dicho eje.

* Una vez aclarado lo anterior, los estudiantes proceden a escribir la respuesta del inciso "b" utilizando los *nombres* que la Matemática le asigna a las gráficas de los BLOQUES II y III. Con las del BLOQUE I, no hay o mejor dicho, no hubo problema.

DESCRIPCION DE LA SESION		*OBSERVACIONES*
PREGUNTA	RESPUESTA	
2. ¿ Cuáles son las *similitudes* que existen entre los tres BLOQUES en: a. ecuaciones, b. gráficas?.	a. ∘Todas tienen *dos variables*. La variable independiente representada por "x" y la variable dependiente representada por "y", ∘la variable *dependiente* está *despejada*. b. ∘Todas están graficadas en un *Plano Cartesiano*, ∘son *continuas* (de un solo trazo), ∘son *infinitas*.	* En esta pregunta se les aclara a los alumnos, inmediatamente después de haberla dictado, que aquello que contesten se debe cumplir para las 54 ecuaciones o las 54 gráficas, según sea el caso.
3. ¿ En una ecuación *qué* determina la *forma* de la gráfica que le corresponde?.	Los *exponentes* de las variables.	* En las dos preguntas anteriores los estudiantes analizan *por separado* tanto las ecuaciones como las gráficas. La finalidad de esta pregunta es que el alumno empiece a *integrar*, *relacionar* o *establecer correlaciones* entre ecuaciones y gráficas, con lo cual justifica su observación de que "modificaciones" en unas conlleva a "modificaciones en las otras.
4. ¿ De una gráfica *qué* determina el *tipo* de ecuación que le corresponde?.	Su *forma*.	* Las consideraciones que se pueden hacer en relación a esta pregunta, prácticamente son las mismas que en la anterior, salvo por el hecho que ésta se refiere al proceso inverso abordado en la pregunta 3.

DESCRIPCION DE LA SESION

PREGUNTA

5. ¿Cuáles son las condiciones *necesarias* y *suficientes* que debe cumplir una *ecuación* para que su gráfica sea una *recta* en el *Plano Cartesiano*?.

RESPUESTA

- Que tenga *dos* variables (independiente y dependiente),
- que el *exponente* de la variable independiente sea *uno*,
- que el exponente de la variable dependiente también sea uno.

OBSERVACIONES

* Antes de que los alumnos procedan a dar respuesta a esta pregunta, es conveniente hacerles notar que con ella se están abordando, simultáneamente, para el caso de recta, tanto el proceso gráfica-ecuación, como el de ecuación-gráfica; y que la proposición lógica que se "desprenderá" de la pregunta y de la respuesta que a ella se dé, es una bicondicional.

* Resulta muy probable que más de un equipo ponga como condición que la variable dependiente *debe* estar despejada. En estos casos se cuestiona nuevamente al grupo. La pregunta que se les hace es -por ejemplo- : ¿La gráfica de la ecuación $y - 3 = 2x$ es una recta?. Con el fin de dar respuesta a esta pregunta, el profesor cuestiona a los alumnos, quienes con sus respuestas deberán llegar al concepto de *ecuaciones equivalentes* (se dice que dos o más ecuaciones son equivalentes, cuando es posible obtenerlas a partir de una cualesquiera de ellas mediante la utilización de las operaciones algebraicas definidas en el conjunto de los números Reales). Las interrogantes planteadas por el maestro estarán referidas, fundamentalmente, a la *forma* de las ecuaciones.

Después de la discusión y llegar a la conclusión de que la ecuación $y - 3 = 2x$ es la misma que $y = 2x + 3$ sólo que en *forma* distinta y que por lo tanto, la gráfica asociada a la ecuación $y - 3 = 2x$ es una recta, se infiere que *no* es condición necesaria y suficiente que en una ecuación la variable dependiente esté despejada dado que, en una ecuación la variable dependiente puede no estar despejada y su gráfica ser una recta o bien, asociarle (correctamente) a una recta en el Plano Cartesiano una ecuación en la cual, la variable dependiente no esté despejada. Aunque para tabular, es recomendable

DESCRIPCION DE LA SESION *OBSERVACIONES*

que la variable dependiente esté despejada.

* Se aprovecha esta coyuntura y se les pide a los alumnos que dén cinco ecuaciones equivalentes a $y = 2x + 3$. Obteniendo como respuestas $y - 2x = 3$, $y - 2x - 3 = 0$, $2y = 4x + 6$, $0 = 8x + 12 - 4y$, $y + 5 = 2x + 8$, por ejemplo.

Luego se les vuelve a cuestionar: ¿Dada una ecuación cuántas ecuaciones equivalentes tiene?. Al llegar a la conclusión de que existen un número infinito de ecuaciones equivalentes a una dada, se pregunta: ¿Si dos ecuaciones son equivalentes sus gráficas son iguales o diferentes?. Cuando se llegue a la respuesta de que las gráficas de ecuaciones equivalentes son iguales, se tratará de "conducir" a los estudiantes, nuevamente mediante preguntas, a la conclusión de que ante el problema de conocer las características que tendrá la gráfica asociada a una ecuación determinada y el problema recíproco, no es necesario estudiar los diferentes tipos de ecuaciones en todas sus *formas*, basta estudiar las ecuaciones en *una* de sus *formas* y saber que características tiene su gráfica asociada, de tal suerte que si se nos dá una ecuación que *no* esté en esa *forma*, sólo es necesario "*llevarla*" a ella, para saber las características que tendrá su gráfica. La situación es análoga para el problema recíproco. Si a una gráfica le tenemos que asociar una ecuación, será suficiente saber que características debe tener dicha ecuación en una de sus *formas* para realizar la asociación correcta. Llegado a esto, se aclara que la *forma* que se trabajará es cuando la variable dependiente está *despejada*.

* Las discusiones anteriores permiten, de manera natural, hacer otras preguntas de las cuales las *primeras* tienden a que el alumno *generalice* y con ello, ratificar que aquellos elementos de la ecuación que ellos *no* establecieron como requisito: el valor del coeficiente de la variable independiente y el valor del término independiente; *no lo son*, motivo por el cual éstos pueden ser cualquier número Real. Las *segundas* no dejar "*cabos sueltos*".

Las primeras son del tipo: ¿La gráfica de la ecuación $y=5x+8$ es una recta?; las cuales no presentan mayor dificultad para la mayoría de los estudiantes. No pudiendo decir lo mismo para las segundas. Una muestra de ellas son las siguientes:

¿La gráfica de la ecuación $y = \sqrt{9x + 16}$ es una recta?.

¿La gráfica de la ecuación $y = \frac{8}{x} - 2$ es una recta?.

¿La gráfica de la ecuación $x \cdot y = 9$ es una recta?.

DESCRIPCION DE LA SESION OBSERVACIONES

Para llegar a que ninguna de estas ecuaciones es una recta, hay necesidad de recurrir a las definiciones de exponentes y a sus leyes. Sin embargo, la tercera pregunta, o cualquiera de su tipo, permite que el alumno se dé cuenta que el *segundo* y *tercer* punto de la *respuesta* a la *pregunta original*, están "*incompletos*" y que hay necesidad de "completarlos". Ante esta necesidad, se inicia una nueva discusión que finaliza cuando los alumnos establecen que la *respuesta correcta a la pregunta* 5 es:

- Que tenga dos variables (independiente y dependiente),
- que el *exponente* de la variable *independiente* sea *uno*, *cuando* la variable *dependiente* está *despejada*.

Acto seguido, los estudiantes realizan la corrección en su cuaderno y proceden, por instrucción del profesor, a enunciar la *bicondicional* que se "desprende" de la pregunta 5 y su respectiva respuesta. Cuando han establecido que:

Una gráfica en el Plano Cartesiano es una recta
si y solo si,
su ecuación tiene dos variables y la variable independiente tiene exponente uno, cuando la variable dependiente está despejada;

el profesor dicta la pregunta 6.

* Antes de continuar, cabe señalar que por la *forma* de las ecuaciones con que en este TEMA se trabaja, se está *excluyendo* el estudio de las *rectas paralelas al Eje de las Ordenadas*. Las ecuaciones asociadas a esas rctas, no son un caso particular de la *forma* $y = ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ en virtud de que no pueden escribirse en esta *forma* para valores específicos de "a" y "b". Llegar a esta conclusión no es fácil para el alumno, menos, cuando por estar iniciando el análisis de gráficas y ecuaciones ni siquiera ha establecido la *forma* de las ecuaciones que está trabajando. Estas son las razones fundamentales por las cuales *no* se "obliga" al estudiante a que establezca la bicondicional, que se desprende de la pregunta 5 y su respectiva respuesta, con el *rigor lógico* que la Matemátics exige. Este es un aspecto de ella que, en un primer momento, se habrá de "*sacrificar*" a fin de que el alumno *redescubra* el concepto, la definición, la relación

DESCRIPCION DE LA SESION | OBSERVACIONES

entre conceptos, el teorema o el algoritmo objeto de estudio en una(s) clase(s) determinada(s).

Cuando el estudiante se encuentra en las primeras etapas del proceso de redescubrimiento del conocimiento, no sólo suele suceder que sea inconciente de las restricciones que debe tener una determinada formulación sino que también, en algunas ocasiones, no logra percatarse de los alcances de la misma. Por ejemplo, en el caso que ahora nos ocupa, el alumno no ha percibido que en la bicondicional que él estableció al decir: "...*una* recta...", se está refiriendo a *todas* las rectas que existen en el Plano Cartesiano y por ende, debe considerar tanto las rectas *paralelas* a los Ejes Coordenados como aquellas que *no* lo *son*. El, en la práctica, sólo considera estas últimas y en consecuencia no percibe —y difícilmente lo puede hacer en este momento, por las razones antes apuntadas— ni que la bicondicional sólo es válida para las rectas no paralelas al Eje de las Ordenadas y que esta puntualización, formalmente, se tiene que hacer; ni que, dicha bicondicional es válida para las rectas paralelas al Eje de las Abscisas dado que las ecuaciones asociadas a estas rectas son un caso particular de la *forma* $y = ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$; a saber, cuando $a = 0$. Es más, de las rectas paralelas a los Ejes Coordenados nada se ha dicho, ni siquiera se han mencionado. De cualquier manera, ambas cosas, tarde o temprano, se tendrán que hacer explícitas, e inclusive, llegado el momento, si se desea, se puede hacer ver a los estudiantes que *otra forma* de las ecuaciones de las rectas paralelas al Eje de las Abscisas y de las rectas paralelas al Eje de las Ordenadas es cuando el exponente de la variable independiente es cero, para las primeras, y cuando el exponente de la variable dependiente es cero, para las segundas. Las paralelas al Eje de las Abscisas serán tratadas en

DESCRIPCION DE LA SESION		OBSERVACIONES
		la siguiente clase y las paralelas al Eje de las Ordenadas hasta el TEMA 8, si es que los alumnos no lo plantean en la sesión siguiente.
PREGUNTA	RESPUESTA	
6. ¿Cuáles son las condiciones *necesarias* y *suficientes* que debe cumplir una *ecuación* para que su gráfica sea una *parábola*, en el *Plano Cartesiano*, con *vértice* en el *Eje* de las *Ordenadas* y que se *abra* hacia *arriba* o hacia *abajo*?	∘ Que tenga *dos* variables (independiente y dependiente, ∘ que el *exponente* de la variable *independiente* sea *dos*, *cuando* la variable *dependiente* está *despejada*.	* Después de la discusión que se dió en la pregunta anterior, se espera que los alumnos contesten correctamente y establezcan la bicondicional que se desprende de esta pregunta sin mayor dificultad. En otras palabras, se espera que los estudiantes relacionen el conocimiento que acaban de adquirir con el problema que se les está planteando, reconociendo regularidades y patrones. En caso de que esto no suceda, el maestro tendrá que intervenir en el mismo sentido que su participación anterior.
7. ¿Cuáles son las condiciones *necesarias* y *suficientes* que debe cumplir una *ecuación* para que su gráfica sea una *parábola cúbica*, en el *Plano Cartesiano*, con *punto* de *inflexión* en el *Eje* de las *Ordenadas* y que se *abra* en dirección de *dicho Eje*?	∘ Que tenga *dos* variables (independiente y dependiente), ∘ que el *exponente* de la variable *independiente* sea *tres*, *cuando* la variable *dependiente* está *despejada*.	* Las mismas que en la pregunta 6.

DESCRIPCION DE LA SESION

Una vez que los alumnos han contestado correctamente la pregunta anterior, el maestro interviene dando algunas ecuaciones y cuestionando a los estudiantes sobre la *forma* de la gráfica que le corresponde a cada una de las ecuaciones dadas y posteriormente, hacer el proceso inverso es decir, el profesor dá la *forma* de la gráfica y el alumno deberá dar una ecuación que le corresponda. Una muestra del tipo de preguntas que se les hacen a los estudiantes son:

i. ¿ La gráfica de la ecuación $y = 7x - 8$ es una recta ?.

ii. ¿ La gráfica de la ecuación $y = -6x^2 + 2$ es una parábola ?.

iii. ¿ La gráfica de la ecuación $y = \frac{4}{5}x^3 - 6$ es una parábola cúbica ?.

iv. ¿ La gráfica de la ecuación $y = -\frac{5}{7}x - \frac{3}{4}$ es una recta?.

v. ¿ La gráfica de la ecuación $y = \frac{2}{9}x^2 - \frac{7}{3}$ es una parábola ?.

vi. ¿ La gráfica de la ecuación $y = -\frac{8}{3}x^3 + \frac{2}{9}$ es una parábola cúbica ?.

vii. ¿ La gráfica de la ecuación $y^2 = 7x^3 - 2$ es una parábola cúbica ?.

viii. ¿ La gráfica de la ecuación $y^2 = 4x^2 - 9$ es una parábola? ¿ Una recta ?.

ix. ¿ La gráfica de la ecuación $y^7 = x + \frac{2}{7}$ es una recta ?.

OBSERVACIONES

* Apesar de que se considera que después de la pregunta 7 los alumnos están en posibilidad de *inferir* las ecuaciones de las gráficas que se están trabajando en *una* de sus *formas*, a saber, cuando la variable *dependiente* está *despejada*; se juzga conveniente realizar algunos ejercicios antes de proceder a ello a fin de que el estudiante ratifique, en ejemplos concretos, la validez de las tres bicondicionales que estableció, producto de las preguntas 5, 6 y 7.

* En relación a las preguntas que en este momento hace el maestro, se espera que los alumnos contesten afirmativamente a las seis primeras en virtud de que las ecuaciones planteadas cumplen los requisitos que previamente se habían estipulado y negativamente a las tres últimas. La finalidad de incluir las preguntas vii, viii y ix (o cualquiera de su tipo) es por un lado, que el alumno compruebe que estas ecuaciones *no* cumplen con las condiciones —necesarias y suficientes— para que su gráfica sea una recta, una parábola o una parábola cúbica y por lo tanto, su gráfica *no* será ninguna de ellas; y por otro lado, es hacerle "ver" al estudiante que: saber que la gráfica de $y^2 = 7x^3 - 2$ —por ejemplo— no es recta, ni parábola ni parábola cúbica es tener un conocimiento *muy somero* pero al fin y al cabo un conocimiento de la gráfica de dicha ecuación. En otras palabras, *no sabemos* cuál es su gráfica, pero si sabemos cuál *no es*. Cabe señalar que en la pregunta viii, no resulta remoto que más de un alumno conteste que la gráfica sea una recta, basado en el razonamiento siguiente:

> Para aplicar el requisito del exponente de la variable independiente, la variable dependiente debe estar despejada de donde:

DESCRIPCION DE LA SESION — *OBSERVACIONES*

Si $y^2 = 4x^2 + 9$ entonces,

$y = \sqrt{4x^2 + 9}$ por lo que,

$y = 2x + 3$

$\therefore$ es una recta.

En ese preciso momento el maestro deberá intervenir y exhibir que $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$. Con lo cual el problema queda zanjado.

Para el *proceso inverso*, el maestro le formula una de las cuatro preguntas que se encuentran al finalizar este párrafo, a un determinado alumno, el cual deberá conestar de manera oral. El profesor anota la respuesta en el pizarrón y se ratifica o se rectifica, según sea el caso. Lo mismo se hace con el alumno que sigue y así sucesivamente hasta que todos los estudiantes han contestado a la pregunta que se les formuló. Las preguntas a las que hemos estado haciendo referencia son:

- Si la gráfica que se tiene es una recta, ¿cuál podría ser su ecuación?.
- Si la gráfica que se tiene es una parábola, ¿cuál podría ser su ecuación?.
- Si la gráfica que se tiene es una parábola cúbica, ¿cuál podría ser su ecuación?.
- Si se desea tener una gráfica que no sea recta, ni parábola, ni parábola cúbica entonces, ¿cuál podría ser su ecuación?.

Finalizada esta actividad, en el pizarrón se encuentran cuatro columnas. En una, están anotadas las ecuaciones de recta que los alumnos

DESCRIPCION DE LA SESION | OBSERVACIONES

acaban de dar, en otra, las ecuaciones de parábola, la tercera contiene las ecuaciones de parábola cúbica y la cuarta contiene ecuaciones que no corresponden a ninguna de estas gráficas. El profesor elige una ecuación de recta de las que se encuentran en el pizarrón por ejemplo, $y = 3x + 5$. En torno a ella hace las siguientes preguntas:

¿ Cuántas cantidades aparecen en la ecuación ?.
¿ Cuántas operaciones aparecen en ella ?.

Cuando los estudiantes han contestado que en la ecuación $y = 3x + 5$ aparecen cuatro cantidades —x, y, 3 y 5— y dos operaciones —suma y producto—, el profesor "toma" otra ecuación y formula las mismas preguntas que para la anterior. Una vez ratificadas o rectificadas las respuestas, nuevamente el maestro les formula dos preguntas. Estas estarán en los mismos términos que las anteriores pero, referidas a *todas* las ecuaciones de recta que tienen: las 18 contenidas en el CUADRO 1 y las que se encuentran anotadas en el pizarrón.

Una vez que se han obtenido las respuestas correctas y el maestro las ratifica oralmente, se cuestiona nuevamente, para que los alumnos establezcan mediante sus respuestas, que lo que diferencía una ecuación de otra es el valor del coeficiente de la variable independiente y/o del término independiente.

Cuando los alumnos hayan comprendido (comprensión que se evalúa, nuevamente, por la respuesta que dén a la pregunta que para esos fines se les formula) que existen tantas ecuaciones como números hay para multiplicar por "x" y sumar, o sea, un número infinito, el maestro interviene para hacer ver que si bien todas las ecuaciones son diferentes, tienen algo en común: *su forma*, de la cual cada una de ellas es un caso particular. Acto seguido, el profesor solicita a los estudiantes que determinen *la forma* de estas ecuaciones.

A fin de atender la petición del profesor, los alumnos trabajan primero de manera individual, después por equipo y en caso de ser necesario —si la conclusión a la que llegan los equipos no es única— se entabla la discusión grupal. Al final de estas actividades, se establece que las ecuaciones asociadas o a las que se les asocia una *recta* en el *Plano Cartesiano* son de la *forma* $y = ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

DESCRIPCION DE LA SESION | OBSERVACIONES

El profesor anota en el pizarrón la *forma* de las ecuaciones de recta, haciendo hincapié en que la expresión $y = ax + b$, representa a *todas* las ecuaciones que se obtienen al sumar un número real cualquiera, al producto que se obtuvo de multiplicar la variable independiente "x" por cualquier otro número real; en tanto que la ecuación $y = 3x + 5$ sólo representa un caso particular, específico, determinado, de entre el conjunto infinito que se obtiene a partir de $y = ax + b$, cuando se sustituye la "a" y la "b" por valores particulares. En este caso, 3 y 5 respectivamente.

Concluída esta intervención, el maestro vuelve a formular dos preguntas. La primera de ellas, es en relación a la *forma* de la ecuación de una *parábola* con vértice en el Eje de las Ordenadas y que se abre hacia arriba o hacia abajo, la segunda, a la *forma* de la ecuación de la *parábola cúbica* con punto de inflexión en el Eje de las Ordenadas y que se "abre" en dirección de dicho eje.

Cuando los alumnos dán las respuestas correctas, el maestro las anota en el pizarrón y procede a dictar la tarea (trabajo extra-clase), con lo cual finaliza la sesión. La tarea consiste en :

I. Contestar por escrito cada una de las siguientes preguntas.

¿Cuáles son las *diferencias* que existen entre la primera y segunda COLUMNA del BLOQUE I en:

a. ecuaciones,

b. gráficas?.

¿Cuáles son las *similitudes* que existen entre la primera y segunda COLUMNA del BLOQUE I en:

a. ecuaciones,

b. gráficas?.

II. Pensar si se puede establecer alguna correlación entre las ecuaciones y las gráficas a las que hacen referencia las dos preguntas anteriores.

El objetivo de esta tarea, es continuar con el trabajo hecho en esta clase así como adelantar el de la próxima.

SEPTIMA SESION

DESCRIPCION DE LA SESION

Esta clase, al igual que las siguientes, se inicia cuando el maestro les solicita a algunos alumnos que expliquen lo que se vió la sesión anterior. Cuando los alumnos enuncian que la *forma* de la ecuación de una *recta* es $y = ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$; la de una *parábola* con vértice en el Eje de las Ordenadas y que se abre hacia arriba o hacia abajo es $y = ax^2 + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y que la de una *parábola cúbica* con punto de inflexión en el Eje de las Ordenadas y que se abre en dirección de dicho eje es $y = ax^3 + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, el profesor las anota en el pizarrón y concluye la intervención de los alumnos. A continuación el maestro participa con la finalidad de hacer notar a los estudiantes que:

i. Afirmar que "$a, b \in \mathbb{R}$" nos permite asegurar que tanto 'a' como 'b' pueden ser cualquier número *positivo*, *negativo* o *cero*.

ii. En los casos particulares que se trabajaron (los cuales permitieron realizar las generalizaciones correspondientes), se tienen ecuaciones donde $b > 0$, $b < 0$ e inclusive cuando $b = 0$ pero, para 'a' sólo ecuaciones con $a > 0$ o $a < 0$.

iii. Al no tener ninguna ecuación particular donde $a = 0$ se carece del ejemplo concreto que permita afirmar que 'a' puede ser *cualquier* número real tanto en la ecuación de la recta como en la de parábola y parábola cúbica. Pero, tampoco se tienen elementos para afirmar que 'a' no puede ser cero. Luego entonces, en este momento, el problema consiste en determinar qué valores puede tomar 'a'.

Una vez planteado el problema que existe en torno

OBSERVACIONES

* El interrogatorio con el que dá comienzo la sesión, tiene por objetivo repasar y retomar lo de la clase pasada y se realiza a "cuaderno cerrado" es decir, los estudiantes no deben consultar sus apuntes.

DESCRIPCION DE LA SESION	OBSERVACIONES

al coeficiente de la variable independiente, el profesor, cuestiona nuevamente a los alumnos a fin de que propongan vías de solución.

Ante tal situación, no es difícil que los alumnos lleguen a la conclusión de que si el problema que se tiene radica sólo para el caso cuando $a = 0$ entonces, para solucionarlo, basta trabajar con ecuaciones de recta, parábola y parábola cúbica cuyo coeficiente de la variable independiente sea cero; de tal suerte que si al tabularlas y graficarlas, la gráfica que se obtiene es la esperada entonces, 'a' puede ser cualquier número real; en caso contrario, 'a' puede ser cualquier número real *diferente* de cero.

A continuación, por indicación del profesor, cada equipo determina cual es la ecuación de recta —con el coeficiente de la variable independiente igual a cero— que van a tabular y graficar. Este trabajo primero lo realizan en forma individual y luego "comparan" resultados con sus compañeros de equipo.

* La finalidad de que cada equipo tabule y grafique una ecuación diferente a la de los otros equipos —pero con la condición de que $a = 0$— es tener un mayor número de casos particulares que conformen el sustento empírico de la generalización que en un momento posterior habrán de realizar. Las ecuaciones con las que trabajan son, por ejemplo, $y = 0x + 4$, $y = 0x + 7$, $y = 0x - 5$, $y = 0x - 9$, etc..

Al finalizar la actividad anterior y una vez que los alumnos han observado que la gráfica que se obtuvo es una *recta paralela* al *Eje de las Abscisas* el profesor, primero, anota en el pizarrón la ecuación que cada equipo trabajó y la gráfica correspondiente, después, otras ecuaciones como por ejemplo, $y = 0x + \frac{1}{3}$, $y = 0x - \frac{2}{5}$, $y = 0x - \frac{7}{4}$, $y = 0x + \frac{4}{3}$, etc., las cuales tabula de manera oral y dibuja su gráfica asociada.

Cuando los alumnos concluyen que en la ecuación de la *recta* de la *forma* $y = ax + b$, 'a' puede ser *cualquier* número real y que cuando $a = 0$ (en dicha *forma*)

DESCRIPCION DE LA SESION | OBSERVACIONES

lo que se obtiene son *rectas paralelas* al *Eje* de las *Abscisas*, el profesor les hace ver —si es que ellos aún no lo han explicitado— que una *manera simplificada* de escribir las ecuaciones $y = 0x + 4$, $y = 0x + 7$, $y = 0x - 5$, $y = 0x - 9$, etc., es $y = 4$, $y = 7$, $y = -5$, $y = -9$, etc., respectivamente.

Apoyados en todo este trabajo, los alumnos *infieren* que la *forma* de las ecuaciones de las *rectas paralelas* al *Eje* de las *Abscisas* es $y = b$, donde $b \in \mathbb{R}$. Además, con un análisis un poco más detallado de los casos particulares (el cual se centra en los diferentes valores de 'b', los cuadrantes en los que se encuentran las rectas y el punto donde éstas intersecan al Eje de las Ordenadas) los alumnos *infieren* que:

- En la ecuación $y = b$, con $b \in \mathbb{R}$, en general, existen tres posibilidades para 'b': $b>0$, $b<0$ y $b=0$.
- Una recta en el Plano Cartesiano paralela al Eje de las Abscisas, en cuanto a su posición se refiere, tiene tres posibilidades: o se encuentra en los Cuadrantes I y II, o en los Cuadrantes III y IV, o coincide con el Eje de las Abscisas.
- Dada una ecuación de la *forma* $y = b$, la posición de la recta paralela al Eje de las Abscisas asociada a tal ecuación depende del signo de 'b' y recíprocamente es decir, dada una recta paralela al Eje de las Abscisas, el signo de 'b' en su ecuación asociada de la *forma* $y = b$, dependerá de la posición de la recta.
- La ordenada del punto de intersección de la recta, con el Eje de las Ordenadas, asociada a una ecuación de la *forma* $y = b$, está determinada por el valor de 'b' y recíprocamente, dada una recta en el Plano Cartesiano paralela al Eje de las Abscisas, el valor de 'b' en su ecuación asociada de la *forma* $y = b$, está determinado por la ordenada del punto de intersección de dicha recta con el Eje de las Ordenadas.

DESCRIPCION DE LA SESION

Una vez obtenidos estos resultados, se procede a "construir", en el pizarrón, el llamado CUADRO II. Este, resume las conclusiones que en torno al punto a discusión se obtuvieron. El CUADRO al que se hace referencia es:

C U A D R O II

$y = b$, con $b \in \mathbb{R}$ — *Recta paralela* al E.A.

$b > 0$ <=> Cuadrantes I y II, P.I.E.O. $(0,b)$

$b < 0$ <=> Cuadrantes III y IV, P.I.E.O. $(0,b)$

$b = 0$ <=> Coincide con el E.A., P.I.E.O. $(0,0)$

OBSERVACIONES

* En el grupo se adopta la convención de que se utilizarán las siglas E.A. y P.I.E.O. cuando se esté haciendo referencia al Eje de las Abscisas y al punto de Intersección de una gráfica con el Eje de las Ordenadas, respectivamente.

* Probablemente, algún alumno afirme que si $b < 0$ entonces, P.I.E.O. es $(0,-b)$. En este caso, el maestro deberá intervenir para zanjar el problema.

* En el CUADRO II falta establecer uno de los elementos que se consideran en este TEMA para caracterizar una recta: el ángulo que forma (la recta) con el Eje de las Abscisas. Este punto será tratado con posterioridad y en ese momento, se completará el CUADRO.

* Puede suceder que después de estudiar las rectas paralelas al Eje de las Abscisas surga el interés, en los estudiantes, por conocer *la forma* de las ecuaciones asociadas a las rectas paralelas al Eje de las Ordenadas. De darse esta situación, se aborda, de inmediato, el estudio de este tipo especial de rectas. En caso contrario, se tratarán en el TEMA 6. El estudio se realiza a partir, nuevamente, de casos particulares. Estos consisten en dar a los alumnos algunas rectas en el Plano Cartesiano paralelas al Eje de las Ordenadas, así como algunos pares ordenados que pertenezcan a cada una de

DESCRIPCION DE LA SESION

OBSERVACIONES

ellas. Los estudiantes *inferirán* la ecuación asociada de cada una de dichas rectas y después, por un proceso de *generalización*, determinarán *la forma* de esas ecuaciones ($x = k$, con $k \in \mathbb{R}$).
Realizado lo anterior, el profesor, mediante preguntas, "conducirá" al grupo para que obtenga las conclusiones siguientes:

- Las ecuaciones asociadas a las rectas paralelas al Eje de las Ordenadas, *no* son un caso particular de la *forma* $y = ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, en virtud de que no existe ningún valor de 'a' y 'b' tal que, al sustituirlos en $y = ax + b$, se obtenga una ecuación de la *forma* $x = k$, con $k \in \mathbb{R}$.
- Las ecuaciones de recta de la *forma* $Ax + By + C = 0$ con $A, B, C \in \mathbb{R}$, tienen al menos una ecuación equivalente de la *forma* $y = ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, para cualquier valor de A, B y C en el conjunto de los números Reales *excepto para el caso cuando* $B = 0$.
- Las ecuaciones asociadas a las rectas paralelas al Eje de las Ordenadas son un caso particular de la *forma* $Ax + By + C = 0$, con $A, B, C \in \mathbb{R}$. A saber, cuando $B = 0$.

Establecidas las conclusiones anteriores se procede a analizar las ecuaciones de la *forma* $x = k$, con $k \in \mathbb{R}$, sus gráficas asociadas y se "construye" el CUADRO II' que se muestra a continuación, y en el cual E.O. significa "Eje de las Ordenadas".

C U A D R O II'

$x = k$, con $k \in \mathbb{R}$ — *Recta paralela al E.O.*

$k > 0$ <=> Cuadrantes I y IV , $\nexists$ P.I.E.O. , P.I.E.A. $(k,0)$
$k < 0$ <=> Cuadrantes II y III , $\nexists$ P.I.E.O. , P.I.E.A. $(k,0)$
$k = 0$ <=> Coincide con el E.O., P_s.I.E.O. todos los puntos del E.O. , P.I.E.A. $(0,0)$

* Finalmente, cabe señalar, que de tratarse las rectas paralelas al Eje de las Ordenadas en esta clase, muy probablemente el tiempo de la sesión resulte insuficiente para trabajar todo el material que resta. En

DESCRIPCION DE LA SESION | *OBSERVACIONES*

. tal caso, el maestro redistribuirá el contenido, tanto de esta clase como el de las siguientes, según juzgue conveniente. Además, el CUADRO II' al igual que el CUADRO II, no explicita cual es el valor del ángulo que forman las rectas estudiadas con el Eje de las Abscisas. Ambos CUADROS se "completarán" c u a n d o se haya dado respuesta a la PREGUNTA II que se plantea en esta misma sesión.

Una vez que se ha concluído que en la ecuación de la recta de la *forma* $y = ax + b$, el coeficiente de la variable independiente puede ser cualquier número Real, y además, se han establecido algunas de las características que tiene la recta cuando $a = 0$, el profesor pregunta a los alumnos si en la *forma* de las ecuaciones de *parábola* y *parábola cúbica* 'a' puede ser *cero*. Al llegar a la conclusión de que en la *forma* de dichas ecuaciones, el coeficiente de la variable independiente *no* puede ser *cero*, se anota esta condición en el pizarrón en la *forma* correspondiente.

* En el caso que se hayan tratado las rectas paralelas al Eje de las Ordenadas, los estudiantes, además de lo que se indica en la columna izquierda de esta página, concluirá que *otra forma* de las ecuaciones de *parábola* y *parábola cúbica* —de las que se están estudiando— es, $Ax^2 + By + C = 0$, con $A, B, C \in \mathbb{R}$ y $A, B \neq 0$ para la *parábola* y, $Ax^3 + By + C = 0$, con $A, B, C \in \mathbb{R}$ y $A, B \neq 0$ para *parábola cúbica*.

Acto seguido, se procede a formar equipos para que discutan y unifiquen (en caso de ser posible) las respuestas tanto de las preguntas que se dejaron de tarea, como de las que posteriormente se les formularán.

DESCRIPCION DE LA SESION		OBSERVACIONES
PREGUNTA	RESPUESTA	
8. ¿ Cuáles son las *diferencias* entre la *primera* y *segunda* COLUMNA del BLOQUE I en: a. ecuaciones, b. gráficas ?.	a. El *signo* de 'a'. En la *primera* COLUMNA $a > 0$ y en la *segunda*, $a < 0$. b. Los *cuadrantes* por los que *necesariamente* pasan. Las de la *primera* COLUMNA, *necesariamente* pasan por los *Cuadrantes I y III*, mientras que las de la *segunda* COLUMNA por los *Cuadrantes II y IV*. *o* El *ángulo* que forman con el Eje de las Abscisas (α). En las de la *primera* COLUMNA, $\alpha < 90°$ y en las de la *segunda*, $\alpha > 90°$.	* Si el grupo obtuvo las "*dos*" respuestas del inciso 'b' — bien sea porque unos equipos dieron *una* y otros la *otra* — , el profesor hará ver la equivalencia entre ellas. En el caso, que sólo hayan obtenido *una*, el maestro hará notar que existe *otra* respuesta equivalente a la que ellos dieron.
9. ¿ Cuáles son las *similitudes* que existen entre la *primera* y *segunda* COLUMNA del BLOQUE I en: a. ecuaciones, b. gráficas ?.	a. ◦Todas tienen *dos variables* (independiente y dependiente), ◦la variable *dependiente* está *despejada*, ◦el *exponente* de la variable *independiente* es *uno*.	* En esta pregunta, se tratará que los alumnos sean concientes de que aquellas similitudes que establecieron para los tres BLOQUES (pregunta 2), se siguen cumpliendo para las de la primera y segunda COLUMNA del BLOQUE I por ser éstas (ecuaciones o gráficas según sea el caso), un subconjunto de aquellas. Por lo que, la respuesta que aquí se dé, deberá contener tanto las similitudes que presentan las 54 ecuaciones y las 54 gráficas, como las similitudes *propias* de la primera

DESCRIPCION DE LA SESION		OBSERVACIONES
PREGUNTA	RESPUESTA	
	b. ¿Están en un *Plano Cartesiano*, ¿son *continuas*, ¿son *infinitas*, ¿son *rectas*.	y segunda COLUMNA del BLOQUE I. Naturalmente, "esa repetición" de similitudes no sólo se presentará en esta pregunta, sino en otras más.
10. Dada la *ecuación* de una *recta*, ¿ *qué* determina el *ángulo* que forma su gráfica asociada con el Eje de las Abscisas?.	El *coeficiente* de la variable independiente. Si $a > 0 \Rightarrow \alpha < 90°$ y, si $a < 0 \Rightarrow \alpha > 90°$	* Si bien desde el punto de vista de la Lógica Clásica, el símbolo " => " representa el conectivo ló gico *si...entonces...*, en este TEMA se expresarán las condiciona les en la *forma si* $P \Rightarrow Q$ donde P y Q simbolizan dos proposicio- nes cualesquiera. Es decir, se es cribirá la partícula "*si*" aunque ésta esté ya contenida en el sím- bolo " => ", con el objeto de ha- cer más explícita la condicional en el estudiante.
11. Dada la *gráfica* de una *recta* en el Plano Cartesiano, ¿ *qué* determina el *signo* del *coeficiente* de la variable independiente en su ecuación asociada ?.	El *ángulo* que forma dicha recta con el Eje de las Abscisas. Si $\alpha < 90° \Rightarrow a > 0$ y si $\alpha > 90° \Rightarrow a < 0$	

Contestada la pregunta 11, el maestro intervie- ne con la finalidad de ir "armando" en el piza- rrón el CUADRO que contendrá las generalizacio- nes a las que llegue el grupo, reiterando oral- mente las posibilidades que tiene el coeficien- te de la variable independiente en la ecuación de una recta y que características tienen sus

DESCRIPCION DE LA SESION

gráficas, para que posteriormente sólo se anote en el pizarrón la *forma* de las ecuaciones de recta y las dos posibilidades de 'a' que no han sido analizadas. En este momento, lo que se tiene en el pizarrón es lo que aparece en el recuadro que se encuentra al finalizar este párrafo, el cual será usado de aquí en adelante para representar el pizarrón.

$y = ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ — *Recta*	
$a > 0$	$a < 0$

Cuando el profesor ha terminado de escribir en el pizarrón, les aclara a los alumnos que primero se analizará con más detalle el caso cuando $a > 0$ (lo cual implica trabajar con la Primera COLUMNA del BLOQUE I tanto en ecuaciones como en gráficas y "construir" el CUADRO III) y posteriormente, el caso cuando $a < 0$ (Segunda COLUMNA del BLOQUE I y "construcción" del CUADRO IV).

Antes de proceder a formularles las preguntas que "orienten" el análisis de las ecuaciones de la Primera COLUMNA del BLOQUE I y de sus gráficas asociadas, se retoma el caso de las rectas paralelas al Eje de las Abscisas a fin de que los estudiantes establezcan que el *ángulo* que forman con el Eje de las Abscisas es de 0° o 180° y anoten este resultado en el CUADRO II.

Después de que los alumnos han "completado" el CUADRO de paralelas, el profesor dicta la siguiente pregunta, no sin antes explicar que en algunas de las preguntas que se les formularán a lo largo del TEMA se "*abusará*" del lenguaje

OBSERVACIONES

* En el caso que se hayan estudiado las rectas paralelas al Eje de las Ordenadas, los alumnos determinarán el valor del ángulo que forman dichas rectas con el Eje de las Abscisas y lo anotarán en el CUADRO correspondiente.

DESCRIPCION DE LA SESION	OBSERVACIONES

al referirlas al "número del Plano" en lugar de enunciar las ecuaciones —y sus gráficas asociadas— sujetas a análisis en un momento determinado. Lo anterior, con la intención de que la redacción de las preguntas sea lo más breve posible.

PREGUNTA	RESPUESTA	OBSERVACIONES
12. ¿Cuáles son las *diferencias* que existen en el *Primer Plano* en: a. ecuaciones, b. gráficas?.	a. El *valor* del *coeficiente* de la variable *independiente*. b. El *ángulo* que forman las rectas con el Eje de las Abscisas.	* En el Primer Plano se encuentran graficadas las ecuaciones $y = x$, $y = 2x$ e $y = \frac{1}{2}x$.
13. ¿Cuáles son las *similitudes* que existen en el *Primer Plano* en: a. ecuaciones, b. gráficas?.	a. ∘Tienen *dos variables* (independiente y dependiente), ∘la variable *dependiente* está *despejada*, ∘el *exponente* de la variable *independiente* es *uno*, ∘el *signo* del *coeficiente* de la variable *independiente*, ∘el *término independiente* es *cero*. b. ∘Estan en un *Plano Cartesiano*, ∘son *continuas*, ∘son *infinitas*, ∘son *rectas*,	

DESCRIPCION DE LA SESION | OBSERVACIONES

PREGUNTA	RESPUESTA
	∘ pasan por el *origen*,
	∘ pasan por los *Cuadrantes I y III* o bien, $\alpha < 90°$.

Cuando finaliza la discusión de las respuestas 12 y 13, el maestro interviene con la finalidad de:

i. Explicitar que la recta $y = x$ tiene la propiedad de *bisecar* los Cuadrantes I y III por lo que, el *ángulo* que forma con el Eje de las Abscisas (α) es *igual* a 45°.

ii. Aclarar que la recta asociada a la ecuación $y = x$ es la que se tomará como parámetro para analizar las otras.

iii. Que los alumnos establezcan que la recta asociada a la ecuación $y = \frac{1}{2}x$, forma un *ángulo* con el Eje de las Abscisas mayor que 0° pero, menor que 45°. Es decir, $0° < \alpha < 45°$.

iv. Que los estudiantes determinen que para la recta asociada a la ecuación $y = 2x$, $45° < \alpha < 90°$.

v. "Construir el *Plano Aumentado*". Es decir, un Plano donde el profesor no sólo grafica las rectas que tienen por ecuación $y = x$, $y = 2x$ e $y = \frac{1}{2}x$, sino que grafica otras rectas. Por ejemplo, las asociadas a las ecuaciones $y = 3x$, $y = 5x$, $y = 9x$, $y = \frac{1}{4}x$, $y = \frac{1}{7}x$, $y = \frac{5}{3}x$, $y = \frac{8}{3}x$, $y = \frac{15}{6}x$.

Con las preguntas 12, 13 y la intervención del profesor, se considera que los estudiantes están en posibilidad de *inferir* que:

- Para el caso que se está analizando ($a > 0$), el *coeficiente* de la variable independiente tiene *tres* posibilidades: $a = 1$, $a > 1$, $a < 1$.
- Si $a > 1 \Rightarrow 45° < \alpha < 90°$ y que, si $a < 1 \Rightarrow 0° < \alpha < 45°$. Así como las recíprocas correspondientes.
- Si en la ecuación de una recta el *término independiente* es *cero* entonces, la gráfica asociada a tal ecuación,

DESCRIPCION DE LA SESION | OBSERVACIONES

pasa por el *origen*. Es decir, la recta interseca a los dos ejes en un *mismo* punto, y recíprocamente.

- Cuando algebraícamente la variable *independiente* se *multiplica* por un número, geométricamente lo que sucede es que la recta "*cambia*" el *ángulo* que forma con el Eje de las Abscisas, y recíprocamente.
- Si dos rectas forman *ángulos distintos* (aunque estén en un mismo intervalo) con el Eje de las Abscisas entonces, el *coeficiente* de la variable *independiente* de sus ecuaciones asociadas es *diferente*, y recíprocamente.

Para corroborar si los estudiantes han logrado inferir estos cinco resultados, el profesor les formula nueve preguntas. Una cuya respuesta sea la primera inferencia esperada y dos para cada una de las restantes. Las respuestas serán el indicador de la inferencia lograda. Si son correctas (a nivel grupal), se continúa. En caso contrario, habrá necesidad de una nueva intervención del maestro y un replanteamiento de las preguntas.

Finalizada la discusión grupal en torno a las nueve preguntas que se les plantearon, el profesor participa reiterando oralmente las respuestas y anotando en el pizarrón sólo la primera respuesta, a fin de ir "construyendo" el CUADRO III. Acto seguido, el maestro dicta nuevamente dos preguntas.

CUADRO III

$y = ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ — *Recta*

$$a > 0 \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ a > 1 \\ a < 1 \end{array} \right.$$

DESCRIPCION DE LA SESION		OBSERVACIONES
PREGUNTA	RESPUESTA	
14. ¿ Cuáles son las *diferencias* que existen en el *Segundo Plano* en: a. ecuaciones, b. gráficas ?.	a. El *término independiente*. En la ecuacion "uno", $b = 0$; en la "cuatro", $b = 3$ y en la "cinco", $b = -3$. b. Los *cuadrantes* por los que pasan. La recta asociada a la ecuación "uno", pasa por los Cuadrantes I y III, la de la "cuatro" por los Cuadrantes I, II y III y la de la "cinco" por I, III y IV.	* En el Segundo Plano no se encuentran las gráficas de las ecuaciones 1,4 y 5. Es decir, $y = x$, $y = x + 3$ e $y = x - 3$.

Antes de dictar la pregunta 15, el profesor hace hincapié en el hecho de que cuando una recta no pasa por el Origen del Sistema de Coordenadas, interseca a los Ejes Cartesianos en puntos distintos. Además, aclara que por *el momento sólo* se centrará la atención en el *punto de intersección* de la gráfica con el *Eje de las Ordenadas* (P.I.E.O.).

PREGUNTA	RESPUESTA	OBSERVACIONES
15. ¿ Cuáles son las *similitudes* que existen en el *Segundo Plano* en: a. ecuaciones, b. gráficas ?.	a. ∘Tienen *dos variables* (independiente y dependiente), ∘la variable *dependiente* está *despejada*, ∘el *exponente* de la variable *independiente* es *uno*, ∘el *coeficiente* de la variable *independiente* es *uno*. b. ∘Están en un *Plano Cartesiano*, ∘son *continuas*, ∘son *infinitas*,	

DESCRIPCION DE LA SESION | *OBSERVACIONES*

PREGUNTA | RESPUESTA

- son *rectas*,
- pasan *necesariamente* por los *Cuadrantes I y III*, (su "prolongación infinita" se encuentra en estos Cuadrantes).

Al terminar la discusión de estas dos últimas preguntas, el maestro participa nuevamente con la intención de:

i. "Llevar al grupo" a la conclusión de que las rectas *son paralelas*, y que por lo tanto, forman el *mismo ángulo* con el Eje de las Abscisas ($\alpha = 45°$).

* Cuando los alumnos logran establecer el resultado al que se hace referencia en la columna izquierda, el profesor les hace ver (en el caso que ellos no lo hayan percibido) que las *similitudes* que existen entre las gráficas del Segundo Plano, están *incompletas*. Falta, a saber, el hecho de que las *tres* gráficas forman *el mismo ángulo* con el Eje de las Abscisas. Acto seguido, los estudiantes proceden a completar dichas similitudes.

ii. "Construir el *Plano Aumentado*". Graficando las rectas que tienen por ecuación $y = x + 5$, $y = x + 9$, $y = x + 12$, $y = x + \frac{1}{4}$, $y = x + \frac{7}{3}$, $y = x + \frac{4}{9}$, $y = x - 1$, $y = x - 15$, $y = x - \frac{3}{5}$, $y = x - \frac{6}{8}$, $y = x - \frac{11}{7}$, por ejemplo.

Con las preguntas 14, 15 y la participación del maestro, se estima que los alumnos lograrán *inferir* que:

- Para el caso que se está analizando ($a = 1$), el *término*

DESCRIPCION DE LA SESION | *OBSERVACIONES*

independiente tiene *tres* posibilidades: $b = 0$, $b > 0$ y $b < 0$.

- Cuando *algebraicamente* a la variable *independiente* se le *suma* o se le *resta* un número, *gráficamente* lo que sucede es que la recta *se desplaza* y recíprocamente.
- Si $b > 0$ entonces, la recta *"sube"* al Cuadrante II, si $b < 0$ entonces, la recta *"baja"* al Cuadrante IV, y recíprocamente, si la gráfica de una recta pasa por los *Cuadrantes I, II y III* entonces, $b > 0$ en su *ecuación* asociada y, si la gráfica de una recta pasa por los *Cuadrantes I, III y IV* entonces, en su *ecuación* asociada $b < 0$.
- El término independiente de la ecuación *no "afecta"* el ángulo que forma su gráfica asociada con el Eje de las Abscisas.
- Si en la ecuación de una recta $a = 1$ entonces, $\alpha = 45°$ *independientemente* del valor de b y recíprocamente, si una recta forma un *ángulo* de 45° con el Eje de las Abscisas entonces, el *coeficiente* de la variable independiente de su ecuación asociada es *uno*, *independientemente* de los Cuadrantes por los que pase la recta.
- El *valor* de la *ordenada* del punto de intersección de la gráfica con el Eje de las Ordenadas, es el *término independiente* de su ecuación asociada.
- Si dos rectas *cortan* al Eje de las Ordenadas en *puntos distintos* entonces, el *término independiente* de sus ecuaciones es *diferente* y recíprocamente.

Una vez finalizada la discusión de las once preguntas que se les formula (una para la primera, cuarta y sexta inferencia deseada y dos para las restantes) con la finalidad de "medir" la *inferencia* lograda y suponiendo que el objetivo ha sido alcanzado, nuevamente el profesor participa reiterando oralmente las respuestas y anotando en el pizarrón tanto la respuesta a la primera pregunta como las características que tiene la gráfica en cada uno de esos casos, con lo cual se va "completando" el CUADRO III.

DESCRIPCION DE LA SESION

CUADRO III

$y = ax + b$, con a, b R —— Recta

$a > 0$ $\begin{cases} a = 1 \text{ y } \begin{cases} b = 0 \iff \text{Cuadrantes I y III; } \alpha = 45°\text{; P.I.E}_s\text{. } (0,0) \\ b > 0 \iff \text{Cuadrantes I, II y III; } \alpha = 45°\text{; P.I.E.O. } (0,b) \\ b < 0 \iff \text{Cuadrantes I, III y IV; } \alpha = 45°\text{; P.I.E.O. } (0,b) \end{cases} \\ a > 1 \\ a < 1 \end{cases}$

DESCRIPCION DE LA SESION

OBSERVACIONES

La discusión entre los alumnos se reanuda después de contestar individualmente las dos preguntas que les plantea el profesor.

* En el grupo se llega a la convención de que "P.I.E$_s$." representa el punto de intersección de una gráfica con los Ejes.

PREGUNTA	RESPUESTA	
16. ¿ Cuáles son las *diferencias* que existen en el *Tercer Plano* en: a. ecuaciones, b. gráficas ?	a. El *término independiente*. En la ecuación "dos", $b = 0$, en la "seis", $b = 3$ y en la "siete", $b = -3$. b. Los *Cuadrantes* por los que pasan. La recta asociada a la ecuación "dos", pasa por los	* En el Tercer Plano se encuentran las gráficas asociadas a las ecuaciones 2, 6 y 7. Es decir, $y = 2x$, $y = 2x + 3$ e $y = 2x - 3$.

DESCRIPCION DE LA SESION		OBSERVACIONES
PREGUNTA	RESPUESTA	
	Cuadrantes I y III, la de la " seis" por los Cuadrantes I, II y III y la de la "siete", por I, III y IV.	
17. ¿ Cuáles son las *similitudes* que existen en el *Tercer Plano* en: a. ecuaciones, b. gráficas ?.	a. ∘Tienen *dos variables* (independiente y dependiente), ∘la variable *dependiente* está *despejada*, ∘el *exponente* de la variable *independiente* es *uno*, ∘el *coeficiente* de la variable *independiente* es *dos*. b. ∘Están en un *Plano Cartesiano*, ∘son *continuas*, ∘son *infinitas*, ∘son *rectas*, ∘pasan *necesariamente* por los *Cuadrantes I y III* (su "prolongación infinita" se encuentra en estos Cuadrantes), ∘forman *el mismo ángulo* con el Eje de las Abscisas.	* En esta pregunta se espera que cuando los alumnos enlisten las similitudes que tienen las gráficas, no omitan el hecho de que las rectas forman el mismo ángulo con el Eje de las Abscisas. En el caso que esto no suceda así, el profesor hará notar la incompletez de la respuesta en el momento que intervenga para analizar con "más detalle" dicho Plano y se discuta el paralelismo de las rectas.

La intervención que realiza el profesor al finalizar la discusión de estas dos preguntas, ya no tiene la intención de "llevar al grupo" a la conclusión de que las rectas son paralelas, sino más bien, *ratificar* este hecho en el Plano que ahora se analiza.

El maestro "construye el *Plano Aumentado*" para que los estudiantes

DESCRIPCION DE LA SESION | OBSERVACIONES

cuenten con un "poco más" de información que le permita "*validar*" tanto sus inferencias como sus generalizaciones. Algunas rectas que el profesor grafica son por ejemplo, las que tienen por ecuación $y=2x+7$, $y=2x+11$, $y=2x+\frac{13}{4}$, $y=2x+\frac{2}{5}$, $y=2x+\frac{3}{7}$, $y=2x-6$, $y=2x-1$, $y=2x-\frac{19}{7}$, $y=2x-\frac{2}{3}$, $y=2x-\frac{1}{9}$.

Las finalidades que tiene el maestro en esta participación, no sólo son las dos anteriormente señaladas, sino además:

i. Construir otros Planos Cartesianos donde se grafiquen familias de rectas paralelas que cumplan con la condición de que $a>1$.

ii. Exhibir mediante ejemplos que " *las propiedades de las rectas se pueden deducir mediante los procesos algebraicos aplicados a las ecuaciones* ". Es decir, que cada "*operación algebraica*" que se realice en una ecuación implica una "*modificación*" en la gráfica y recíprocamente.

A continuación, se ilustra con un ejemplo el método seguido por el profesor para lograr lo planteado en el punto ii.

El profesor elige una ecuación cualquiera de recta con la propiedad de que $a>1$. Por ejemplo, $y=4x+5$. En torno a esta ecuación el profesor hace las siguientes preguntas:

PREGUNTA	RESPUESTA
¿Cuál es la gráfica de la ecuación $y=4x+5$?.	Una recta
¿Qué se necesita tener para graficarla?.	Los valores de 'x' e 'y'.
¿Qué se necesita hacer, algebraícamente hablando, para obtener los valores de 'y'.	Tabular. Es decir, primero asignarle valores a 'x', después multiplicar estos valores por 'cuatro' y por último, sumarle a este resultado 'cinco'.

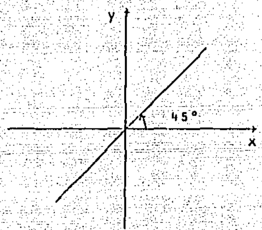
El maestro retoma la respuesta de la última pregunta e indica a los estudiantes que lo que ahora se pretende es ver qué

DESCRIPCION DE LA SESION | *OBSERVACIONES*

sucede geométricamente cuando se efectúan algebraícamente cada uno de los pasos que se describieron en dicha respuesta.

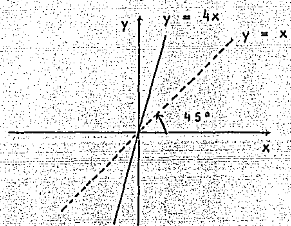
PROCESO ALGEBRAICO	*EQUIVALENCIA GEOMETRICA*
Asignarle valores a la variable independiente. *Cuando se asignan valores a 'x', lo que prácticamente se tiene es:*	*Trazar la recta asociada a la ecuación* $y = x$.

x	y = 4 x + 5
-2	-2
-1	-1
0	0
1	1
2	2



PROCESO ALGEBRAICO	*EQUIVALENCIA GEOMETRICA*
Multiplicar los valores de 'x' por "cuatro". *Al hacer lo anterior, lo que de hecho se tiene es:*	*La recta 'gira', cambiando el ángulo que forma con el Eje de las Abscisas de* $\alpha = 45°$ *a* $45° < \alpha < 90°$.

x	y = 4 x + 5
-2	4(-2)
-1	4(-1)
0	4(0)
1	4(1)
2	4(2)

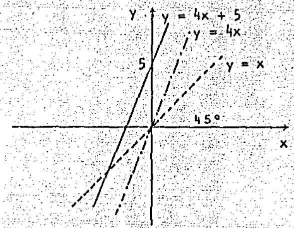


PROCESO ALGEBRAICO	*EQUIVALENCIA GEOMETRICA*
Finalmente, se suma "cinco" al producto anteriormente realizado. *Al sumar "cinco", se "completa" la tabulación y lo que se tiene es:*	*La recta trazada en el paso anterior, "sube" al Cuadrante II sin cambiar el ángulo que forma con el Eje de las Abscisas (se desplaza paralelamente), hasta que su P.I.E.O. sea* $(0,5)$. *Esta es la gráfica asociada a la ecuación* $y = 4x + 5$.

DESCRIPCION DE LA SESION | OBSERVACIONES

PROCESO ALGEBRAICO | EQUIVALENCIA GEOMETRICA

x	y = 4 x + 5
-2	4(-2) + 5
-1	4(-1) + 5
0	4(0) + 5
1	4(1) + 5
2	4(2) + 5



Cuando el profesor, con la participación de los alumnos, ha terminado de ilustrar con ejemplos el método que recibirá el nombre de "Método de los procesos algebraicos aplicados a las ecuaciones", les solicita a los estudiantes que resuelvan los ejercicios que él les plantea utilizando dicho método.

Se considera que si los alumnos realizan con éxito los ejercicios propuestos, esto muestra no sólo que han logrado *inferir* los seis primeros resultados, que al finalizar el párrafo se enuncian, sino que además los aplican, restando por "comprobar" si han logrado *inferir* los tres últimos resultados. Para esto, el maestro formula tres preguntas. Los nueve resultados a que se ha hecho referencia son:

- Si $a > 1$ entonces, b tiene *tres* posibilidades: $b = 0$, $b > 0$, $b < 0$.
- Si $b > 0$ entonces, la recta *"sube"* al Cuadrante II, si $b < 0$ entonces, la recta *"baja"* al Cuadrante IV y recíprocamente.
- El término independiente de una ecuación *no "afecta"* el ángulo que forma su gráfica asociada con el Eje de las Abscisas.
- Si en la ecuación de una recta $a > 1$ entonces, $45° < \alpha < 90°$ *independientemente* del valor de 'b' y recíprocamente.
- Cuando la *gráfica* de una recta *"ha sufrido dos modificaciones"* con respecto a la gráfica de la ecuación $y = x$ entonces, *"su ecuación asociada tiene dos operaciones"* (suma y producto) y recíprocamente.

DESCRIPCION DE LA SESION | OBSERVACIONES

- El *valor* de la *ordenada* del punto de intesección de la gráfica con el Eje de las Ordenadas es el *valor* del *término independiente* de su ecuación asociada.
- Dos *rectas*, en el Plano Cartesiano, se *intersecan* si y sólo si, el *valor* de 'a' en sus respectivas ecuaciones es *diferente*.
- Dos *rectas*, en el Plano Cartesiano, se *intersecan* en el Eje de las *Ordenadas* si y sólo si, sus ecuaciones tienen el *mismo término independiente* y *diferente* el *coeficiente* de la variable *independiente*.
- Dos *rectas*, en el Plano Cartesiano, se *intersecan* en un punto "*fuera*" del Eje de las *Ordenadas* si y sólo si, sus ecuaciones tienen *diferente* tanto el *coeficiente* de la variable *independiente*, como el *término independiente*.

Habiéndose dado por concluída la discusión del Tercer Plano, el maestro participa, como de costumbre, para hacer un resumen oral de las conclusiones hasta aquí obtenidas y anotar las generalizaciones de algunas de ellas en el pizarrón.

C U A D R O III

$y = ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ —— Recta

$a > 0$	$a = 1$ y	$b = 0 \iff$	Cuadrantes I y III;	$\alpha = 45°$;	P.I.E_s. $(0,0)$
		$b > 0 \iff$	Cuadrantes I, II y III;	$\alpha = 45°$;	P.I.E.O. $(0,b)$
		$b < 0 \iff$	Cuadrantes I, III y IV;	$\alpha = 45°$;	P.I.E.O. $(0,b)$
	$a > 1$ y	$b = 0 \iff$	Cuadrantes I y III;	$45° < \alpha < 90°$;	P.I.E_s. $(0,0)$
		$b > 0 \iff$	Cuadrantes I, II y III;	$45° < \alpha < 90°$;	P.I.E.O. $(0,b)$
		$b < 0 \iff$	Cuadrantes I, III y IV;	$45° < \alpha < 90°$;	P.I.E.O. $(0,b)$
	$a < 1$				

DESCRIPCION DE LA SESION | OBSERVACIONES

Una vez que los alumnos han terminado de anotar en su cuaderno lo que se encuentra en el pizarrón, se procede a analizar el Cuarto Plano, el cual contiene las ecuaciones $y = \frac{1}{2}x$, $y = \frac{1}{2}x + 3$ e $y = \frac{1}{2}x - 3$, así como sus respectivas gráficas. Dicho análisis se realiza exactamente de la misma forma que se analizó el Tercero.

La metodología seguida en el análisis del Tercer Plano se puede resumir en cuatro etapas, las cuales no se verán modificadas en su orden al efectuar el análisis del Cuarto Plano, aunque sí en su contenido, por trabajar ahora con gráficas cuyas ecuaciones tienen el coeficiente de la variable independiente menor que "uno". Las etapas a las que se ha hecho referencia son:

1ª Se formulan dos preguntas. Una para diferencias y otra para similitudes, tanto en ecuaciones como en gráficas.

2ª Interviene el profesor al finalizar la discusión de las dos preguntas que se plantearon en la primera etapa, con la finalidad de:

i. "Llevar al grupo" a la conclusión de que algunas propiedades tanto de las gráficas como de las ecuaciones de los Planos anteriores se siguen cumpliendo en el Plano que se está analizando.

ii. "Construir el *Plano Aumentado*".

iii. "Construir" Planos Cartesianos donde se grafiquen familias de rectas que cumplan con la condición que en ese momento se está analizando.

iv. Reiterar, mediante ejemplos, que las propiedades de las rectas se pueden deducir mediante los procesos algebraicos aplicados a las ecuaciones y viceversa.

v. Plantear los ejercicios que los alumnos deberán resolver con el método que se utilizó en los ejemplos anteriores.

3ª Se formulan preguntas con la finalidad de "medir la *inferencia*" lograda en los estudiantes, sobre todo para aquellos aspectos que por una u otra razón, el

DESCRIPCION DE LA SESION *OBSERVACIONES*

alumno no ha tenido oportunidad de manifestarla explícitamente.

4ª Participa el profesor una vez concluída la discusión del Plano correspondiente haciendo un resumen oral de las conclusiones obtenidas y anotar en el pizarrón las generalizaciones de algunas de ellas, a saber, aquellas que irán conformando el CUADRO correspondiente.

Como maestro y alumnos realizan el análisis del Cuarto Plano "respetando" las etapas anteriormente descritas, no se considera necesario detallarlas aquí. No obstante esto, y en razón de que lo tratado en estas etapas nos lleva a resultados particulares, producto de las características exclusivas de Cuarto Plano, a continuación se describe lo que el profesor anota en el pizarrón, con lo cual se concluye el CUADRO III.

* Cabe señalar, que las cuatro etapas descritas en la columna izquierda, no sólo constituyen el marco en el que se analizará el Cuarto Plano sino también, de algunos de los 22 Planos restantes.

C U A D R O III

$y = ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ —— Recta

$a > 0$:

- $a = 1$ y
  - $b = 0 \iff$ Cuadrantes I y III; $\alpha = 45°$; P.I.E_s. $(0,0)$
  - $b > 0 \iff$ Cuadrantes I, II y III; $\alpha = 45°$; P.I.E.O. $(0,b)$
  - $b < 0 \iff$ Cuadrantes I, III y IV; $\alpha = 45°$; P.I.E.O. $(0,b)$
- $a > 1$ y
  - $b = 0 \iff$ Cuadrantes I y III; $45° < \alpha < 90°$; P.I.E_s. $(0,0)$
  - $b > 0 \iff$ Cuadrantes I, II y III; $45° < \alpha < 90°$; P.I.E.O. $(0,b)$
  - $b < 0 \iff$ Cuadrantes I, III y IV; $45° < \alpha < 90°$; P.I.E.O. $(0,b)$
- $a < 1$ y
  - $b = 0 \iff$ Cuadrantes I y III; $0° < \alpha < 45°$; P.I.E_s. $(0,0)$
  - $b > 0 \iff$ Cuadrantes I, II y III; $0° < \alpha < 45°$; P.I.E.O. $(0,b)$
  - $b < 0 \iff$ Cuadrantes I, III y IV; $0° < \alpha < 45°$; P.I.E.O. $(0,b)$

DESCRIPCION DE LA SESION | OBSERVACIONES

La sesión finaliza cuando el profesor reitera las similitudes que se observan en el CUADRO III y dicta la tarea, la cual tiene por objetivo, en esta ocasión, que el alumno "empiece a adquirir" habilidad en la resolución de ejercicios, poniendo en práctica lo visto en clase. A continuación, se describe el contenido de la tarea.

TAREA

I. Describa las características que tiene la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $y = 5x + 4$	5. $y = \frac{7}{4}x$	9. $y = \frac{2}{5}x$
2. $y = x - 9$	6. $y = x + \frac{1}{7}$	10. $y = \frac{1}{5}x + \frac{5}{9}$
3. $y = 6x - 2$	7. $y = \frac{3}{4}x - 6$	11. $y = \frac{8}{6}x - \frac{3}{7}$
4. $y = 4x + 5$	8. $y = 6x + \frac{1}{4}$	12. $y = \frac{2}{3}x + 5$

II. De las doce ecuaciones dadas anteriormente, diga cuáles ecuaciones corresponden a:

a. Rectas paralelas,

b. rectas que se intersecan en el Eje de las Ordenadas y,

c. rectas que se intersecan fuera del Eje de las Ordenadas (dé tres parejas).

ARGUMENTE sus respuestas.

III. Utilizando el "Método de los procesos algebraicos aplicados a las ecuacione", bosqueje la gráfica asociada a:

1. $y = 9x - \frac{2}{3}$ 2. $y = \frac{7}{8}x + \frac{3}{5}$ 3. $y = \frac{4}{7}x - \frac{8}{9}$.

OCTAVA SESION

DESCRIPCION DE LA SESION | *OBSERVACIONES*

La clase se inicia cuando el maestro les solicita a algunos alumnos que resuman, oralmente, lo de la clase pasada. Posteriormente, el profesor elige al azar a un estudiante, el cual deberá resolver un ejercicio de la tarea también en forma oral, luego otro, y así sucesivamente hasta terminar de revisar la tarea. En cada caso, el profesor rectifica o ratifica la respuesta con la finalidad de que los demás estudiantes se "califiquen" su tarea.

En seguida, el maestro les pide a los alumnos que abran su cuaderno en el *Quinto Plano* mientras él lo dibuja en el pizarrón. Este Plano contiene las gráficas de las ecuaciones $y = x$ e $y = -x$. Con este Plano se pretende que el estudiante, "guiado" por el profesor, concluya que:

- La *gráfica* de la ecuación $y = -x$, al igual que la de la ecuación $y = x$, tiene la propiedade de *bisecar* los Cuadrantes por los que pasa (II y IV).
- La *recta* asociada a la ecuación $y = -x$, forma un *ángulo* de 135° con el Eje de las Abscisas.
- La *gráfica* de la ecuación $y = -x$ pasa por el *origen* del Sistema de Coordenadas, en virtud de que en su *ecuación*, $b = 0$.

Una vez que los alumnos hayan obtenido estas cuatro conclusiones y explicitado que la recta asociada a la ecuación $y = -x$ se utilizará como "*parámetro*" para analizar las rectas cuyas ecuaciones cumplan con la condición de que $a > 0$, se procede a formar los equipos para discutir y unificar, en caso de ser posible, las respuestas de las preguntas que se plantearán en el transcurso de esta sesión.

Formados los equipos, se continúa con el análisis del *Sexto Plano*, en el cual se encuentran las gráficas de las ecuaciones $y = -x$, $y = -2x$ e $y = -\frac{1}{2}x$. Dicho análisis, como es

DESCRIPCION DE LA SESION | OBSERVACIONES

costumbre, empieza con la formulación de dos preguntas. Una para *diferencias* y otra para *similitudes* tanto en ecuaciones como en gráficas. Al término de la discusión que se lleva a cabo en torno a estas preguntas, el maestro interviene con la finalidad de:

i. Que los alumnos establezcan el *intervalo* en el que se encuentra el ángulo que forman, con el Eje de las Abscisas, las rectas asociadas a las ecuaciones $y = -2x$ e $y = -\frac{1}{2}x$.

ii. "Construir el *Plano Aumentado*".

Se considera que en este momento los alumnos están en posibilidad de *inferir* los cinco resultados, que renglones abajo se enuncian, así como "darse cuenta" de que los tres últimos se cumplen *independientemente* de que 'a' sea mayor que cero o menor que cero. Dichos resultados son:

- Para el caso que se está analizando ($a < 0$), el *coeficiente* de la variable *independiente* tiene *tres* posibilidades: $a = -1$, $a > -1$ y $a < -1$.
- $a > -1 \Longleftrightarrow 135° < \alpha < 180°$ y $a < -1 \Longleftrightarrow 90° < \alpha < 135°$.
- Una *recta* pasa por el *origen* si y sólo si, el *término independiente* de su ecuación es *cero*.
- El *ángulo* que forma una recta con el Eje de las Abscisas, "*depende o está determinado*" por el *coeficiente* de la variable *independiente* de su ecuación asociada y recíprocamente.
- Dos *rectas* forman *ángulos distintos* (aunque estén en un mismo intervalo) con el Eje de las Abscisas si y sólo si, el *coeficiente* de la variable *independiente* de sus ecuaciones es *diferente*.

Una vez que finaliza la discusión de las respuestas a las preguntas que se les plantean a los alumnos con el objetivo de "evaluar" la inferencia lograda, y los resultados obtenidos son "satisfactorios", el profesor participa nuevamente reiterando oralmente las respuestas y anotando en el pizarrón sólo la primera respuesta, con lo cual se empieza a "construir" el CUADRO IV.

* Cabe señalar antes de continuar, que un "problema" con el que el maestro se puede enfrentar en esta parte del TEMA, es la dificultad que para la mayoría de los estudiantes, representa el hecho de

DESCRIPCION DE LA SESION

En esta sesión se analizan los *Planos Séptimo, Octavo* y *Noveno* de los cuales, el primero de ellos contiene las gráficas asociadas a las ecuaciones $y=-x$, $y=-x+3$ e $y=-x-3$; el segundo, $y=-2x$, $y=-2x+3$ e $y=-2x-3$ y el tercero, $y=-\frac{1}{2}x$, $y=-\frac{1}{2}x+3$ e $y=-\frac{1}{2}x-3$. El análisis de estos Planos se realiza de uno por uno basándose, en términos generales, en las cuatro etapas señaladas en la penúltima y antepenúltima página de la séptima sesión. Las conclusiones a las que se llegan al finalizar el estudio de estos Planos son:

- Las plasmadas en el CUADRO IV que se muestra a continuación.
- Las condiciones necesarias y suficientes para que *dos* rectas se *intersequen* ya sea en el Eje de las *Ordenadas* o en un punto *fuera de él*.
- En *cualquier* ecuación de recta, 'a' determina el *ángulo* que forma su gráfica asociada con el Eje de las Abscisas y 'b', su *desplazamiento* vertical; y recíprocamente, dada una recta *cualquiera* en el Plano Cartesiano, el *ángulo* que forme con el Eje de las Abscisas, determina el *coeficiente* de la variable *independiente* en su ecuación asociada de la *forma* $y=ax+b$ y su *desplazamiento* vertical, el *término independiente* de la ecuación.

CUADRO IV

$y = ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ —— *Recta*

$$a < 0 \begin{cases} a = -1 \\ a > -1 \\ a < -1 \end{cases}$$

OBSERVACIONES

poder determinar si un número menor que cero es mayor o menor que "-1". Ante lo cual, el profesor deberá proporcionarles las "herramientas" que les permitan zanjar esta dificultad.

C U A D R O I V

$y = ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ —— *Recta*

$a < 0$	$a = -1$ y	$b = 0 \Leftrightarrow$	Cuadrantes II y IV;	$\alpha = 135°$;	P.I.E$_s$. (0,0)
		$b > 0 \Leftrightarrow$	Cuadrantes I, II y IV;	$\alpha = 135°$;	P.I.E.O. $(0,b)$
		$b < 0 \Leftrightarrow$	Cuadrantes II, III y IV;	$\alpha = 135°$;	P.I.E.O. $(0,b)$
	$a > -1$ y	$b = 0 \Leftrightarrow$	Cuadrantes II y IV;	$135° < \alpha < 180°$;	P.I.E$_s$. (0,0)
		$b > 0 \Leftrightarrow$	Cuadrantes I, II y IV;	$135° < \alpha < 180°$;	P.I.E.O. $(0,b)$
		$b < 0 \Leftrightarrow$	Cuadrantes II, III y IV;	$135° < \alpha < 180°$;	P.I.E.O. $(0,b)$
	$a < -1$ y	$b = 0 \Leftrightarrow$	Cuadrantes II y IV;	$90° < \alpha < 135°$;	P.I.E$_s$. (0,0)
		$b > 0 \Leftrightarrow$	Cuadrantes I, II y IV;	$90° < \alpha < 135°$;	P.I.E.O. $(0,b)$
		$b < 0 \Leftrightarrow$	Cuadrantes II, III y IV;	$90° < \alpha < 135°$;	P.I.E.O. $(0,b)$

DESCRIPCION DE LA SESION

Concluído el análisis de recta, los alumnos resuelven algunos ejercicios, fundamentalmente para el caso cuando $a < 0$, tanto de "manera descriptiva" como por el "método de los procesos algebraícos aplicados a las ecuaciones".

En la segunda parte de esta sesión, se estudian los cuatro primeros Planos de parábola. A saber, el *Décimo*, *Decimoprimero*, *Decimosegundo* y *Decimotercero*. Antes de empezar con el análisis del *Décimo Plano*, se cuestiona a los estudiantes

OBSERVACIONES

* Recuérdese que las *únicas* parábolas que en este TEMA se estudian, son aquellas que se abren hacia arriba o hacia abajo y que tienen su vértice en el Eje de las Ordenadas. De aquí que, cuando en estas páginas se haga referencia a "una

DESCRIPCION DE LA SESION

sobre las *diferencias* y *similitudes* que existen entre la *primera* y *segunda* COLUMNA del BLOQUE II. Las dos preguntas que se formulan tienen la finalidad de que los alumnos hagan explícito que:

- En las ecuaciones de parábola, el *coeficiente* de la variable *independiente* ('a') tiene *dos* posibilidades: $a > 0$ y $a < 0$.
- Una parábola se *abre hacia arriba* si y sólo si, en su ecuación asociada $a > 0$.
- Una parábola se *abre hacia abajo* si y sólo si, en su ecuación asociada $a < 0$.

Aclarado que al igual que en recta, primero se estudiará el caso cuando $a > 0$, dá comienzo el análisis del *Décimo Plano*, el cual contiene las gráficas de las ecuaciones $y = x^2$, $y = 2x^2$ e $y = \frac{1}{2} x^2$.

Por n-ésima vez más uno, se les formulan a los estudiantes las dos preguntas ya clásicas en este estudio: *diferencias* y *similitudes* en ecuaciones y en gráficas. Se discuten las respuestas y el maestro interviene en esta ocasión con el objeto de "guiar" a los alumnos para que *infieran* que:

- La parábola con ecuación $y = 2x^2$ es "*más cerrada*" que la parábola con ecuacion $y = x^2$.
- La parábola con ecuación $y = \frac{1}{2} x^2$ es "*más abierta*" que la parábola asociada a la ecuación $y = x^2$.
- La parábola con ecuación $y = x^2$ es la que se tomará como parámetro para analizar todas la demás (por ser la "menos afectada con las operaciones de suma y producto") y de la cual se dirá que es "*normal*".
- En estas parábolas se sigue cumpliendo que cuando el *término independiente* de la ecuación dada es *cero*, la gráfica asociada pasa por el *origen*, y recíprocamente.

OBSERVACIONES

parábola", *no se está hablando de cualquier parábola, sino sólo de aquellas que tienen las características antes señaladas.* Lo mismo se puede decir de las ecuaciones. Cuando se habla de la ecuación asociada a una parábola, *se están considerando aquellas que tienen la forma* $y = ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$. Y, se utilizará 'a' para referirnos al coeficiente de la variable independiente de una ecuación determinada y 'b' para su su término independiente.

DESCRIPCION DE LA SESION | *OBSERVACIONES*

- Para el caso que se está analizando ($a > 0$), el *coeficiente* de la variable *independiente* tiene *tres* posibilidades: $a = 1$, $a > 1$ y $a < 1$.
- Una parábola que se abre hacia arriba es "*cerrada*" si y sólo si, $a > 1$.
- Una parábola que se abre hacia abajo es "*abierta*" si y sólo si, $a < 1$.
- Una parábola se abre hacia *arriba* y tiene su *vértice* en el *origen* si y sólo si, $a > 0$ y $b = 0$.

* Las cuatro últimas *inferencias* no sólo se logran con el análisis del *Décimo Plano* sino también, con la "ayuda" del "*Plano Aumentado*".

* El "logro de las *inferencias*" se evalúa con las respuestas que dán los estudiantes a las preguntas elaboradas para tal fin.

* Las generalizaciones de algunos resultados que el maestro suele anotar en el pizarrón al finalizar el análisis de un Plano, en este escrito, a partir de este momento, se presentarán juntas al concluírse el estudio del *Plano Decimotercero*, en el primer CUADRO de parábola (CUADRO V).

Las gráficas de las ecuaciones $y = x^2$, $y = x^2 + 2$ e $y = x^2 - 2$ se encuentran en el *Decimoprimer Plano*. El objetivo de este Plano, así como el de su correspondiente "*Aumentado*", es que el alumno *infiera* que:

- Para el caso que se está analizando ($a = 1$), 'b' tiene *tres* posibilidades: $b = 0$, $b > 0$ y $b < 0$.

DESCRIPCION DE LA SESION	OBSERVACIONES

. El *término independiente* no "afecta la *abertura*" de la parábola (el equivalente en recta es el ángulo que que forma con el Eje de las Abscisas).

. Al igual que en recta, el *término independiente* únicamente *desplaza* la gráfica verticalmente. Hacia *arriba*, si $b > 0$ y hacia *abajo*, si $b < 0$.

. La *ordenada* del *vértice* de una parábola es el *término independiente* de su ecuación asociada, y recíprocamente.

. Si *dos* ecuaciones (distintas) de parábola cumplen con que $a = 1$, entonces sus gráficas *no* se *intersecan*.

* La recíproca de esta condicional *no* es válida.

En el *Plano Decimosegundo* se encuentran las gráficas de las cuaciones $y = 2x^2$, $y = 2x^2 + 1$ e $y = 2x^2 - 1$, y en el *Decimotercero*, las gráficas de las ecuaciones $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ e $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$. Las *inferencias* que se espera logren los alumnos con estos Planos, sus "*Aumentados*" y con los Planos en que se grafican *familias* de parábolas que cumplan la condición que se esté analizando en ese momento ($a > 1$ para el *Plano Decimosegundo* y $a < 1$ para el *Decimotercero*), son prácticamente las mismas que en el *Decimoprimer Plano* a excepción de la quinta *inferencia* que se "modifica" obteniendo las siguientes:

. Dadas *dos* parábolas, existen *tres* posibilidades:
  - Que no se *interseque*,
  - que se *intersequen* en *un* punto,
  - que se *intersequen* en *dos* puntos.

. Si *dos* parábolas *no* se intersecan, entonces o bien el *coeficiente* de la variable *independiente* de sus ecuaciones es el *mismo* y sus *términos independientes diferentes*, o tanto los *coeficientes* de la variable *independiente* de sus ecuaciones, como sus *términos independientes* son *diferentes*.

. *Dos* parábolas se intersecan en *un* punto, si y sólo si sus ecuaciones tienen el *mismo término independiente*.

* Aquí se supone que los coeficientes de la variable independiente son distintos, pues en caso contrario, o bien "las parábolas" no se intersecan o bien, se intersecan en todos sus puntos, según la convención que se tome.

DESCRIPCION DE LA SESION

OBSERVACIONES

∘ Si *dos* parábolas se intersecan en *dos* puntos entonces, tanto lo *coeficiente* de la variable *independiente* de sus ecuaciones, como sus *términos independientes son diferentes*.

* La recíproca de esta condicional no es válida.

* Antes de anotar el primer CUADRO de parábola, cabe señalar que en el estudio de éstos dos últimos Planos, también se recurre al "método de los procesos algebraicos aplicados a las ecuaciones" para *bosquejar* las gráficas de las parábolas. Reiterando de esta manera, el carácter general que esto tiene.

C U A D R O V

$y = ax^2 + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$ — *Parábola*

$a > 0$	$a = 1$ y	$b = 0$ <=>	Se abre hacia arriba;	" normal " ;	V(0,0)
		$b > 0$ <=>	Se abre hacia arriba;	" normal " ;	V(0,b)
		$b < 0$ <=>	Se abre hacia arriba;	" normal " ;	V(0,b)
	$a > 1$ y	$b = 0$ <=>	Se abre hacia arriba;	" cerrada " ;	V(0,0)
		$b > 0$ <=>	Se abre hacia arriba;	" cerrada " ;	V(0,b)
		$b < 0$ <=>	Se abre hacia arriba;	" cerrada " ;	V(0,b)
	$a < 1$ y	$b = 0$ <=>	Se abre hacia arriba;	" abierta " ;	V(0,0)
		$b > 0$ <=>	Se abre hacia arriba;	" abierta " ;	V(0,b)
		$b < 0$ <=>	Se abre hacia arriba;	" abierta " ;	V(0,b)

DESCRIPCION DE LA SESION

OBSERVACIONES

Efectuado el resumen oral y escrito por parte del profesor, éste procede a dictar la tarea, con lo cual dá por concluída la *octava sesión*.

* La tarea que se les deja en esta clase, tiene el mismo objetivo que la que se dejó la vez pasada,diferenciándose sólo en el contenido, pues en esta ocasión los ejercicios se refieren a rectas y el caso de parábola visto en esta clase.

NOVENA SESION

DESCRIPCION DE LA SESION | *OBSERVACIONES*

Al principio de la clase, algunos alumnos (escogidos al azar) hacen un resumen oral de lo visto la clase pasada. Se revisa la tarea, tal cual se describió en la *octava sesión*, y una vez aclaradas las dudas que hayan surgido en ella y/o corregido errores de la misma, se continúa con el estudio de los Planos.

En esta sesión se analizan los *Planos* del *Decimocuarto* al *Vigesimosexto*. El análisis de los *Planos*, *Decimoquinto* al *Vigesimosexto*, y las generalizaciones de algunos resultados (CUADROS), los alumnos lo harán "solos", salvo pequeñas intervenciones del profesor. Bueno, al menos eso se pretende. Prácticamente, la última participación prolongada del profesor es cuando, apoyado en el *Plano Decimocuarto*, que contiene las gráficas de las ecuaciones $y = x^2$ e $y = -x^2$, "guía" a los alumnos a *inferir* que:

- Nuevamente se cumple que si en la ecuación $b = 0$ entonces, la gráfica pasa por el *origen*.
- La gráfica de la ecuación $y = -x^2$ es "*normal*".

* En este punto, el maestro deberá hacer notar que al multiplicar por "-1" a "x^2", no varía su "*anchura*".

- La parábola con ecuación $y = -x^2$ es la que se tomará como parámetro para analizar las parábolas en cuyas ecuaciones $a < 0$.

Concluído el estudio del *Plano Decimocuarto*, el maestro les reitera a los alumnos el hecho de que *todos* y *cada uno* de los 26 *Planos* que "construyeron" tiene un *objetivo*. Por lo que, a partir de ese momento, las preguntas en torno a los Planos ya no serán las "clásicas", que sólo se les hará *una* pregunta y que, para contestarla correctamente, deberán *analizar* "*muy bien*" el Plano al que hace referencia.

DESCRIPCION DE LA SESION

OBSERVACIONES

La pregunta que se les hace a los estudiantea es:

¿ Cuál considera usted que sea el (los) objetivo (s) del *Plano Decimoquinto* ?.

Si la respuesta de los alumnos a esta pregunta es:

El objetivo del *Plano Decimoquinto* es *mostrar* que:

- La parábola con ecuación $y = -2x^2$ es "*más cerrada*" que la parábola que tiene por ecuación $y = -x^2$;
- la parábola con ecuación $y = -\frac{1}{2}x^2$ es "*más abierta*" que la parábola con ecuación $y = -x^2$;
- en éstas parábolas se sigue cumpliendo que cuando el *término independiente* de la ecuación dada es *cero*, la gráfica asociada pasa por el *origen*, y recíprocamente;
- para el caso que se está analizando ($a < 0$), el *coeficiente* de la variable *independiente* tiene *tres* posibilidades: $a = -1$, $a > -1$ y $a < -1$;
- una parábola que se abre hacia abajo es "*cerrada*", si y sólo si $a < -1$;
- una parábola que se abre hacia abajo es "*abierta*", si y sólo si $a > -1$ y,
- una parábola se abre hacia *abajo* y tiene su *vértice* en el *origen*, si y sólo si $a < 0$ y $b = 0$.

"*estamos del otro lado*", pues sin mayor dificultad lograrán realizar con éxito los análisis restantes. En caso contrario, el maestro deberá intervenir en el mismo sentido que en sus participaciones anteriores y al "cambiar" de Plano, reiterar la pregunta para ver si es posible que dén la respuesta deseada. Aquí supondremos que los alumnos dán la respuesta correcta.

Una vez que los alumnos han dado la respuesta correcta, se les pide que vayan "armando el CUADRO" correspondiente (segundo de parábola) y posteriormente se les plantea la misma pregunta para los *Planos Decimosexto*, *Decimoséptimo* y *Decimoctavo* (claro, de una por una). El primero de ellos tiene las gráficas de las ecuaciones $y = -x^2$, $y = -x^2 + 2$ e $y = -x^2 - 2$; el segundo, $y = -2x^2$, $y = -2x^2 + 1$ e $y = -2x^2 - 1$ y el último, $y = -\frac{1}{2}x^2$; $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$ e $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3$.

* Las gráficas de las ecuaciones $y = -x^2$, $y = -2x^2$ e $y = -\frac{1}{2}x^2$ son las del *Plano Decimoquinto*.

Si todo "marcha bien", se espera que los alumnos:

- En sus respuestas *reiteren* las condiciones que deben cumplir las ecuaciones de *dos* parábolas para que éstas *no* se *intersequen*, se *intersequen* en *un* punto o se *intersequen* en *dos* puntos y establezcan que estas condiciones son *válidas* para *cualquier valor* de 'a' ($a > 0$ o $a < 0$).
- Establezcan que para que *dos* parábolas *abiertas* para *diferentes lados* (una hacia arriba y la otra hacia abajo) se *intersequen* en *dos* puntos, es necesario y suficiente que el *vértice* de la que se *abre hacia arriba* esté *más "abajo"* en el Eje de las Ordenadas que el *vértice* de la que se *abre hacia abajo*.
- Hagan el CUADRO correspondiente (el cual se muestra en seguida), utilizando para ello las generalizaciones de algunos de sus resul tados.

CUADRO VI

$y = ax^2 + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$ —— *Parábola*

$a < 0$	$a = -1$ y	$b = 0 \iff$	Se abre hacia abajo; " normal " ; $V(0,0)$
		$b > 0 \iff$	Se abre hacia abajo; " normal " ; $V(0,b)$
		$b < 0 \iff$	Se abre hacia abajo; " normal " ; $V(0,b)$
	$a > -1$ y	$b = 0 \iff$	Se abre hacia abajo; " abierta " ; $V(0,b)$
		$b > 0 \iff$	Se abre hacia abajo; " abierta " ; $V(0,b)$
		$b < 0 \iff$	Se abre hacia abajo; " abierta " ; $V(0,b)$
	$a < -1$ y	$b = 0 \iff$	Se abre hacia abajo; " cerrada " ; $V(0,b)$
		$b > 0 \iff$	Se abre hacia abajo; " cerrada " ; $V(0,b)$
		$b < 0 \iff$	Se abre hacia abajo; " cerrada " ; $V(0,b)$

DESCRIPCION DE LA SESION | OBSERVACIONES

Los *ocho* Planos restantes están dedicados a *parábolas cúbicas*, y se estudian exactamente de la misma forma que los cuatro Planos anteriores. Al finalizar su análisis, se espera que los alumnos:

- Determinen que *dos* parábolas cúbicas o *no* se *intersecan*, o se *intersecan sólo* en *un* punto.
- Establezcan las *condiciones* necesarias y suficientes tanto para que *dos* parábolas cúbicas se *intersequen*, como para que *no* se *intersequen*.
- "Construyan" los CUADROS correspondientes (CUADROS VII y VIII).
- "*Resuman el papel*" que desempeña, para los casos vistos, el *coeficiente* de la variable *independiente* y el *término independiente* de una ecuación, *en* su *gráfica* asociada.

Las ecuaciones, con sus respectivas gráficas , que se toman como base para estos últimos análisis son:

$y = x^3$, $y = 2x^3$ e $y = \frac{1}{2}x^3$ en el *Plano Decimonoveno*.

$y = x^3$, $y = x^3 + 2$ e $y = x^3 - 2$ en el *Plano Vigésimo*.

$y = 2x^3$, $y = 2x^3 + 1$ e $y = 2x^3 - 1$ en el *Plano Vigesimoprimero*.

$y = \frac{1}{2}x^3$, $y = \frac{1}{2}x^3 + 4$ e $y = \frac{1}{2}x^3 - 4$ en el *Plano Vigesimosegundo*.

$y = -x^3$, $y = -2x^3$ e $y = -\frac{1}{2}x^3$ en el *Plano Vigesimotercero*.

$y = -x^3$, $y = -x^3 + 2$ e $y = -x^3 - 2$ en el *Plano Vigesimocuarto*.

$y = -2x^3$, $y = -2x^3 + 1$ e $y = -2x^3 - 1$ en el *Plano Vigesimoquinto*.

$y = -\frac{1}{2}x^3$, $y = -\frac{1}{2}x^3 + 4$ e $y = -\frac{1}{2}x^3 - 4$ en el *Plano Vigesimosexto*.

Los CUADROS que se obtienen en esta parte del TEMA se muestran en la página siguiente. Para su "construcción", el profesor interviene a lo más en dos ocasiones: *una*, en el *Plano Decimonoveno* para "explicitar" los aspectos que se tomarán en cuenta para "caracterizar" una parábola cúbica (Cuadrantes por los que pasa, "abertura" y punto de intersección de la gráfica con el Eje de las Ordenadas) y *otra*, en el *Plano Vigesimotercero* para "mostrar" que la gráfica de la ecuación $y = -x^3$ al igual que la de $y = x^3$, es "*normal*".

La sesión finaliza cuando el maestro dicta la tarea, la cual es en los mismos términos que las anteriores y con el mismo objetivo.

C U A D R O VII

$y = ax^3 + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$ —— *Parábola Cúbica*

$a > 0$	$a = 1$ y	$b = 0$ <=>	Cuadrantes I y III ; " *normal* "	; P.I.E_s.	$(0,0)$
		$b > 0$ <=>	Cuadrantes I, II y III ; " *normal* "	; P.I.E.O.	$(0,b)$
		$b < 0$ <=>	Cuadrantes I, III y IV ; " *normal* "	; P.I.E.O.	$(0,b)$
	$a > 1$ y	$b = 0$ <=>	Cuadrantes I y III ; " *cerrada* "	; P.I.E_s.	$(0,0)$
		$b > 0$ <=>	Cuadrantes I, II y III ; " *cerrada* "	; P.I.E.O.	$(0,b)$
		$b < 0$ <=>	Cuadrantes I, III y IV ; " *cerrada* "	; P.I.E.O.	$(0,b)$
	$a < 1$ y	$b = 0$ <=>	Cuadrantes I y III ; " *abierta* "	; P.I.E_s.	$(0,0)$
		$b > 0$ <=>	Cuadrantes I, II y III ; " *abierta* "	; P.I.E.O.	$(0,b)$
		$b < 0$ <=>	Cuadrantes I, III y IV ; " *abierta* "	; P.I.E.O.	$(0,b)$

C U A D R O VIII

$y = ax^3 + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$ —— *Parábola Cúbica*

$a < 0$	$a = -1$ y	$b = 0$ <=>	Cuadrantes II y IV ; " *normal* "	; P.I.E_s.	$(0,0)$
		$b > 0$ <=>	Cuadrantes I, II y IV ; " *normal* "	; P.I.E.O.	$(0,b)$
		$b < 0$ <=>	Cuadrantes II, III y IV ; " *normal* "	; P.I.E.O.	$(0,b)$
	$a > -1$ y	$b = 0$ <=>	Cuadrantes II y IV ; " *abierta* "	; P.I.E_s.	$(0,0)$
		$b > 0$ <=>	Cuadrantes I, II y IV ; " *abierta* "	; P.I.E.O.	$(0,b)$
		$b < 0$ <=>	Cuadrantes II, III y IV ; " *abierta* "	; P.I.E.O.	$(0,b)$
	$a < -1$ y	$b = 0$ <=>	Cuadrantes II y IV ; " *cerrada* "	; P.I.E_s.	$(0,0)$
		$b > 0$ <=>	Cuadrantes I, II y IV ; " *cerrada* "	; P.I.E.O.	$(0,b)$
		$b < 0$ <=>	Cuadrantes II, III y IV ; " *cerrada* "	; P.I.E.O.	$(0,b)$

DECIMA Y DECIMAPRIMERA SESION

DESCRIPCION DE LA SESION

Estas dos clases están *dedicadas* única y exclusivamente a *resolver ejercicios*. Esto se realiza *como se describió* en las seis etapas del cuarto aspecto del *método de trabajo* que se expuso con anterioridad.

OBSERVACIONES

* Las hojas con 54 gráficas a las que se hace referencia en las etapas cuarta, quinta y sexta del "método de trabajo", y que son las mismas que se utilizarán en el exámen escrito, constituyen las últimas dos páginas de esta planeación.

DECIMASEGUNDA SESION

DESCRIPCION DE LA SESION

En esta sesión se les aplica a los alumnos el exámen escrito. El contenido de éste se muestra a continuación.

OBSERVACIONES

INSTRUMENTO PARA LA EVALUACION SUMATIVA DE LOS ALUMNOS

NOMBRE: ______________________________ GRUPO: __________

I. Relacione las gráficas con las ecuaciones, anotando, en el espacio indicado, el número de gráfica que le corresponde a la ecuación dada y las coordenadas del vértice, punto de intersección con el Eje de las Ordenadas o punto de intersección con los Ejes, según sea el caso.

ECUACION	NUMERO DE GRAFICA	VERTICE O PUNTO DE INTERSECCION
A. $y = -\frac{7}{9}x^3$	______	__________
B. $y = -x^3 + 7$	______	__________
C. $y = -\frac{10}{3}x + 6$	______	__________
D. $y = \frac{7}{4}x^2 + 2$	______	__________
E. $y = -\frac{5}{8}x^2 + 4$	______	__________
F. $y = \frac{9}{4}x + 8$	______	__________
G. $y = \frac{2}{9}x^3 + 7$	______	__________
H. $y = \frac{5}{7}x - 2$	______	__________
I. $y = \frac{3}{16}x^2$	______	__________
J. $y = -\frac{4}{7}x + 8$	______	__________
K. $y = \frac{7}{6}x^3 - 2$	______	__________
L. $y = -\frac{8}{3}x^2 - 6$	______	__________
M. $y = -x - 6$	______	__________
N. $y = -x^2 - 1$	______	__________
O. $y = -\frac{9}{5}x^2 + 4$	______	__________

II. Dé una ecuación que le corresponda a cada una de las gráficas que se le indican.

NUMERO DE GRAFICA	ECUACION
51	__________
11	__________

NUMERO DE GRAFICA	ECUACION
40	______
23	______
4	______
29	______
6	______
44	______
20	______
46	______

III. A. Dé dos ecuaciones de recta cuyas gráficas se intersequen en el Eje de las Ordenadas.

III. B. Dé dos ecuaciones de parábola cuyas gráficas no se intersequen.

III. C. Dé dos ecuaciones de parábola cúbica cuyas gráficas se intersequen en un punto fuera del Eje de las Ordenadas.

IV. Utilizando el "método de procesos algebraicos aplicados a las ecuaciones", bosqueje la gráfica asociada a cada una de las dos ecuaciones siguientes:

A. $y = -\frac{2}{3}x + 4$

B. $y = \frac{2}{5}x^3 - 6$

CONCLUSIONES

El objetivo de este trabajo ha sido la formulación de una propuesta metodológica en base a consideraciones de tipo psicológico y filosófico. Se llegaron a establecer un conjunto de actividades de enseñanza-aprendizaje ordenadas y distribuídas en un cierto número de sesiones.

El supuesto fundamental que subyace en esta propuesta es que es la "mejor estrategia" para que determinados alumnos alcancen ciertos aprendizajes. Sin embargo hace falta aportar elementos que de alguna manera justifiquen dichos supuestos. Este trabajo está por realizarse.

Las ocasiones que se ha puesto en práctica han permitido observar resultados generales, que si bien no pueden considerarse, de manera rigurosa, como elementos a favor de ella, indican cierto grado de adecuación para los propósitos que se persiguen. Entre estos resultados cabe resaltar los siguientes:

- Juzgado a través de la actividad que realizan los alumnos se puede decir que el grado en el que participan es más que satisfactorio. Entre otras cosas por el nivel de "profundidad" que alcanzan algunas de sus discusiones por equipo o grupal.
- Interés por el trabajo que se realiza.
- El logro de los objetivos de "contenido" matemático que por su "facilidad" para evaluarlos constituyen el examen que se les aplica al finalizar el TEMA y que se revela por las notas altas que obtienen en dicho examen.
- Un alumno que realiza las actividades de aprendizaje propuestas alcanza a aprobar el examen que se aplica con una calificación alta.
- Aún los alumnos considerados de "bajo nivel académico", en términos de sus evaluaciones obtenidas en sus cursos anteriores de matemáticas, logran resolver con exito el examen que se les aplica.
- Algunos de los alumnos considerados como "sobresalientes" por sus notas obtenidas con anterioridad, presentan serias dificultades en la realización de las actividades de aprendizaje que requieren de la observación, del análisis, de la comparación, Etc..

La bondad de una metodología es "relativa". Relativa a otras. No tiene sentido decir que una metodología es "buena". Sólo tiene sentido decir que es "mejor" o "peor" que otra.

Por lo tanto la eficacia de la metodología propuesta sólo se puede juzgar en forma comparativa con otras, lo cual requiere de la puesta en práctica de ellas y diseñar algún criterio de evaluación comparativo que permita decidir sobre la bondad de una sobre otras.

Por otro lado, la propuesta metodológica que se ha hecho es posible que presente limitaciones como consecuencia de la forma en la cual se han llevado a la práctica los supuestos que la sustentan. Asumiendo una actitud autocrítica al trabajo realizado, cabrían las siguientes preguntas:

- ¿Realmente un estudiante "típico" ha desarrollado las "operaciones necesarias para que mediante su "modificación" obtenga las que se requieren para desarrollar el pensamiento característico de la Geometría Analítica?.
- ¿Qué operaciones son necesarias y suficientes para desarrollar el pensamiento propio de la Geometría Analítica?.
- ¿Qué características tiene el pensamiento "propio" de la Geometría Analítica?.
- ¿Son "adecuadas" las actividades de aprendizaje para la construcción de las operaciones que se desea tener?.
- ¿Cómo saber si la construcción de las operaciones ha tenido lugar?.