

30
29



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

CONSTRUCCION DE UN MODELO EN COMUNICACION

T E S I S

que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

presenta:

MARTHA MARIA TELLEZ ROJO SOLIS

México, D.F.

Septiembre de 1990

FACULTAD DE CIENCIAS



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

INTRODUCCION	1
CAPITULO I :	
CONCEPTOS FUNDAMENTALES	4
CAPITULO II :	
EXPANSORES Y MAGNIFICADORES	15
CAPITULO III :	
SUPERCONCENTRADORES E HIPERCONCENTRADORES	28
CAPITULO IV :	
TEOREMA DE GABBER Y GALIL	41
3.1 Demostración del Teorema de Gabber y Galil	43
BIBLIOGRAFIA	67

INTRODUCCION

Dentro de los problemas más usuales que se pueden encontrar en la vida cotidiana, hayamos aquéllos relacionados con la comunicación: cómo construir la red telefónica de una población, el sistema de carreteras de un país, ó el cableado necesario para conectar un cierto número de computadoras, son solo algunos ejemplos de estas cuestiones. En todos estos casos, el objetivo primordial es transmitir la información lo más rápido posible y con el menor costo, es decir, se busca la construcción de una red de comunicación *eficiente*.

Este trabajo pretende analizar cierto tipo de gráficas que se proponen como modelos para alcanzar este objetivo: los magnificadores y los expansores, valiéndose principalmente de la Teoría de Gráficas y algunos aspectos del Análisis Funcional. Cabe señalar que G. Margulis ha trabajado sobre el tema haciendo uso de Representación de Grupos y N. Alon con Teoría de Grupos Libres, siendo estos dos caminos por los cuales se podría continuar el estudio.

El primer capítulo presenta algunos aspectos fundamentales de Teoría de Gráficas necesarios para el desarrollo del trabajo; posteriormente, en el capítulo dos, se abordan con más detalle las gráficas expansoras y magnificadoras, mostrando resultados importantes sobre ellas, que nos permiten una mayor comprensión de las mismas. En el tercer capítulo se proponen nuevas gráficas (superconcentradores e hiperconcentradores) que permiten "medir" la velocidad de transmisión del mensaje, además de incluir algunos resultados sobre los coeficientes de expansión y magnificación que ponen de manifiesto su complejidad de cálculo. Finalmente, en el cuarto capítulo se expone con todo detalle la demostración del Teorema de Gabber y Galil, que proporciona explícitamente la construcción de una familia infinita de expansores con coeficiente constante.

Actualmente siguen quedando problemas abiertos sobre las gráficas que se estudiaron en esta tesis que son de gran importancia, destacando principalmente los siguientes :

¿Existe un algoritmo eficiente que permita encontrar el coeficiente de expansión o de magnificación de una gráfica, conociendo su grado máximo?

¿Es posible construir una gráfica cuyo coeficiente de expansión (o de magnificación) y grado máximo estén dados previamente?

Finalmente quisiera agregar, que este estudio pretendió ser lo más objetivo posible, es decir, se buscó señalar tanto las ventajas como los inconvenientes de los modelos propuestos, donde éstos representan una manera de abordar el problema, que por supuesto no es única.

CAPITULO I

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Uno de los objetivos de este trabajo es el de analizar y construir un modelo que resulte eficiente y permita resolver ciertos problemas de comunicación. Transmitir mensajes por vía telefónica, trasladar individuos de un lugar a otro ó transportar algún elemento mediante tuberías resultan ser problemas de los antes mencionados.

Por el momento pensemos en un país en el cual existe una sola carretera para comunicar cualesquiera dos pueblos, supongamos que éste consta solo de cinco poblados y está representado por el siguiente mapa :

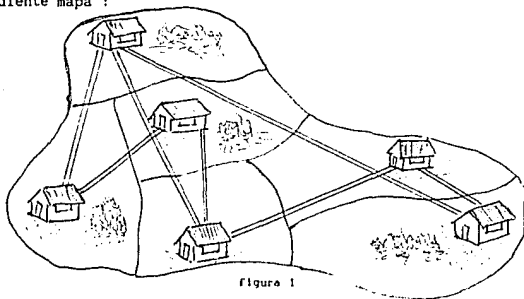


figura 1

Representando cada poblado por un punto (también llamado vértice o nodo) y una línea (arista o arco) para dos lugares que tengan comunicación directa, es decir, si existe una carretera para ir del pueblo A al B y en el recorrido de ésta no encontramos poblado alguno; el mapa de las carreteras del país de la figura 1 queda entonces representado como se ilustra enseguida:

G :

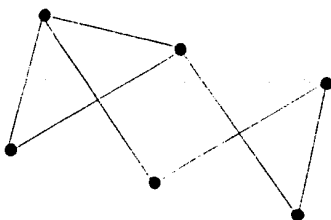


figura 2

Al dibujo representado en la figura 2 le llamaremos una *gráfica*. Formalmente diremos que una gráfica G consta de dos conjuntos de vértices y aristas $V(G)$ y $A(G)$ respectivamente, $V(G) \neq \emptyset$, $A(G)$ finito y una función η_G que asigna a cada arista sus extremos. Si u y v son dos vértices de una gráfica G diremos que u y v son *adyacentes*, si existe una arista $a \in A(G)$ que los une, es decir u y v son los extremos de a ó $a = \{u, v\}$; asimismo diremos que una arista a *incide* en un vértice v si uno de sus extremos es dicho nodo, al número de

aristas que inciden en él lo llamaremos el grado de v y lo denotaremos por $gr(v)$.

Ahora pensemos en que el mapa de las carreteras de otro país es el siguiente:

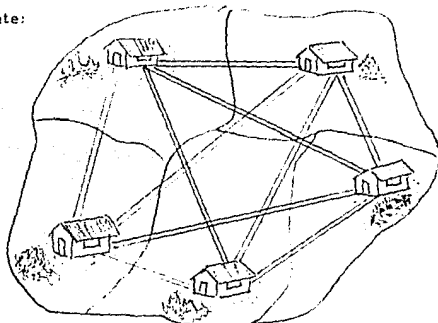


figura 3

La representación de este mapa como una gráfica es como se muestra en la figura 4

G' :

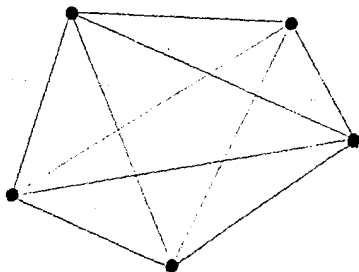


figura 4

Si observamos las gráficas G y G' podemos encontrar algunas diferencias importantes entre ellas. Todos los vértices de G' son adyacentes entre sí, en este caso llamaremos a la gráfica completa. A este tipo de gráficas las denotaremos por K_n cuando la gráfica conste de n puntos (vértices o nodos).

También podemos notar que a diferencia de G , en G' podemos encontrar una sucesión alternada de vértices y aristas $A_1 B A_2 C A_3 A$, por ejemplo, que forman un "camino cerrado" (principia y termina en el mismo vértice: A y no repite ningún otro punto) al que llamaremos ciclo. Observemos que los ciclos únicamente repiten el vértice final que coincide con el inicial.

Sin embargo también existe una semejanza importante entre estas gráficas, que consiste en que en ambos casos siempre podemos encontrar una sucesión de vértices y aristas, un camino, que una cualquier par de puntos que deseemos, es decir no existen vértices aislados o inaccesibles. Este tipo de gráficas se conocen como gráficas conexas y nos servirán de base en todo nuestro estudio ya que el tema que nos ocupa es el de una "buena comunicación". Por lo anterior, podemos ver que la gráfica G es conexa y sin ciclos, es decir, es un árbol. Dados dos vértices cualesquiera, los recorridos que podemos encontrar en este tipo de gráficas, se conocen como trayectorias y son caminos en los que no se repiten vértices. Para los términos no definidos consultar [Cu].

En los siguientes párrafos resaltamos algunos requisitos importantes que deberán cumplir las gráficas que sean candidatos a representar una red de comunicación. En primer lugar deben de ser gráficas conexas, con lo que garantizamos que no quedarán ciudades aisladas. También debemos de tomar en cuenta el costo de construcción del sistema en cuestión, es decir, si el problema que nos ocupa consiste en la construcción de carreteras entre un cierto número de poblados, podríamos pensar como primera opción en una carretera para cada dos pueblos, lo cual se traduce en una gráfica completa, con tantos vértices como pueblos tengamos (figura 3); este modelo sería muy confiable, ya que si alguna vía de comunicación llegara a averiarse, se interrumpiría el tránsito directo entre dos poblados, pero estos seguirían estando en contacto a través del resto de las poblaciones.

Sin embargo, construir una carretera entre todo par de ciudades, en condiciones reales es de un costo muy elevado, no solo de construcción sino también de mantenimiento. Es así como tenemos que pensar en una mejor opción, que sacrifique quizá un poco de confiabilidad pero que logre abatir los costos.

En un segundo intento por diseñar un buen modelo, podríamos pensar en una gráfica con un mínimo número de aristas y que sea conexa es decir, un árbol. Tal gráfica tiene costo mínimo pero es poco confiable ya que con solo quitar una arista la gráfica se desconecta, es decir, si por algún motivo llegara a averiarse una

carretera algunos de los poblados quedarían incomunicados, como se presenta en la figura 2.

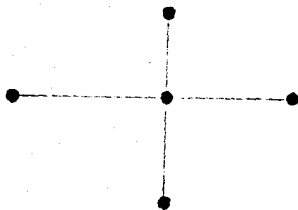
Es importante notar, que los dos casos analizados son justamente los casos opuestos, con confiabilidad máxima, pero también costo máximo ó viceversa. De ahí la necesidad de buscar una cierta familia de gráficas que sean confiables para nuestros fines, pero también de costo moderado. Esta confianza requerida, se traduce en que la gráfica deseada tenga la propiedad de que cada subconjunto de vértices tenga muchos vecinos y éstos a su vez otros tantos, estas gráficas se conocen como magnificadores. El concepto siguiente es necesario para definir dichas gráficas.

Sea G una gráfica, donde V es el conjunto de vértices y A el de aristas, supongamos que la cardinalidad de V es n y que el grado máximo de G es k . Para cada subconjunto X de V construimos el conjunto

$\partial X = \{ v \in V - X / \exists (v,x) \in A \text{ para alguna } x \in X \}$, que llamaremos la *frontera* de X . G se conoce como un (n,k,c) -magnificador si para cada subconjunto X de V , con $0 < |X| \leq n/2$ (ó $|X| < \infty$ si $n = \infty$), se tiene que

$$|\partial X| \geq c |X|$$

La máxima $c \in \mathbb{R}$ para la cual G es un (n,k,c) -magnificador es llamado el *coeficiente de magnificación* de G . (ver figura 5)



(4,4,1/2)-magnificador

figura 5

Si pensamos ahora en el problema de la transmisión de mensajes vía telefónica por ejemplo, este coeficiente representa someramente, la velocidad en la que es transmitida la información a través de la red representada por la gráfica G ; esto se puede ver más claramente ayudándose de algunos resultados ilustrativos que se presentarán en el siguiente capítulo.

Continuando con el modelo de la red telefónica, es importante señalar que cada aparato telefónico estará representado por un vértice de la gráfica (olvidémonos de las extensiones) y los cables existentes, por las aristas; pero además tiene un matiz importante: una persona no sólo desea hacer llamadas al exterior, sino también recibirlas, por lo que su teléfono debe estar representado dos veces es decir, un "vértice de entrada", y un "vértice de salida" que

reflejen esta situación; por supuesto que no existe arista entre dos "nodos entrada", o dos "salida" ya que al establecerse la comunicación entre un par de individuos, un aparato hace la llamada (vértice salida) y el otro la recibe (vértice entrada), de tal manera que la gráfica queda representada como en la figura 6.

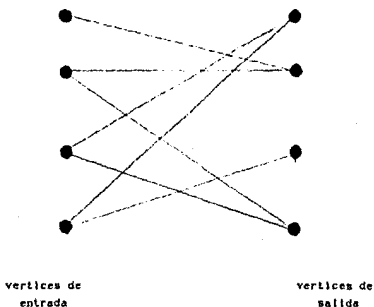


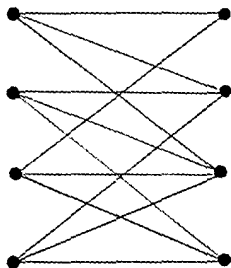
figura 6

Podemos notar que los vértices de esta gráfica están partidos en dos conjuntos V_1 y V_2 cuya intersección es vacía y cuya unión nos da el total de vértices; además, los extremos de cualquier arista pertenecen a conjuntos distintos. Este tipo de gráficas se conocen como *bipartitas*. Para garantizar que cada conjunto de vértices tenga una "buena cantidad" de vecinos que permitan la fluidez en la comunicación, se considera el coeficiente de expansión cuya definición es la siguiente:

Sea G una gráfica bipartita con bipartición E y S . En donde los conjuntos E y S son las entradas y salidas respectivamente ambos tienen n vértices y su grado máximo es k . G es un (n,k,c) -expansor si para cada subconjunto X de E se tiene que

$$|\partial X| \geq (1 + c(1 - |X|/n)) |X|$$

donde ∂X es la frontera de X . En caso de existir, la máxima $c \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ para la cual G es un (n,k,c) -expansor es llamada *coeficiente de expansión*. (ver figura 7)



(4,3,1)-expansor

figura 7

Recordando el teorema de Hall podemos ver que existe una relación entre éste y el concepto de expansor, ya que las gráficas

cuyo coeficiente es mayor ó igual a cero, satisfacen sus hipótesis. Para mayor claridad lo enunciamos y damos su demostración, pero como ésta requiere de la suposición de una versión del teorema de Menger, la recordaremos, pero omitiremos su prueba :

TEOREMA : Si S y T son subconjuntos arbitrarios de G, entonces el máximo número de S-T trayectorias ajenas en vértices (incluyendo a los puntos terminales) es igual al

$$\min \left\{ |W| : W \subset V(G) \text{ y } G-W \text{ no contiene S-T trayectorias} \right\}$$

TEOREMA DE HALL : Una gráfica bipartita G cuyos conjuntos de vértices son V_1 y V_2 contiene un apareamiento perfecto de V_1 a V_2 si

$$|\partial X| \geq |X| \text{ para cada } X \subset V_1$$

demostracion : Primero probaremos que la condición es necesaria:

Si existe un apareamiento perfecto de V_1 a V_2 , entonces para cada $X \subset V_1$, existen por lo menos $|X|$ vértices de V_2 adyacentes a los elementos de X, esto es

$$|\partial X| \geq |X|$$

Para probar la suficiencia, apliquemos el teorema anterior a los conjuntos V_1 y V_2 , lo que implica lo siguiente : Si G no contiene un apareamiento perfecto de V_1 a V_2 entonces existen $T_1 \subset V_1$ y $T_2 \subset V_2$ tales que $|T_1| + |T_2| < |V_1|$ y además no existen aristas de $V_1 - T_1$ a

$V_2 - T_2$. Entonces $\partial(V_1 - T_1) \subset T_2$, por lo que

$$|\partial(V_1 - T_1)| \leq |T_2| < |V_1| - |T_1| = |V_1 - T_1|$$

lo que prueba la suficiencia de la condición. ■

Debido a que este trabajo está enfocado principalmente al problema de la comunicación telefónica y a que los expansores son las gráficas que lo modelan adecuadamente, en el siguiente capítulo estudiaremos algunas de sus propiedades a través de resultados ilustrativos.

CAPITULO II

EXPANSORES Y MAGNIFICADORES

En el capítulo anterior, se propusieron en primera instancia los magnificadores y los expansores como modelos adecuados para el problema de comunicación, sin embargo es importante verificar si en efecto los coeficientes respectivos reflejan la velocidad de transmisión del mensaje ya que, de ser así, podríamos "evaluar" la calidad de cierta gráfica para cumplir dicha función.

En primer lugar, es de gran utilidad conocer el rango del coeficiente de magnificación en una gráfica. Directamente de la definición se obtiene que dicho coeficiente es mayor ó igual que cero y para las cotas superiores se proponen los siguientes resultados para el caso de gráficas finitas:

PROPOSICION : Sea G una gráfica cualquiera con n vértices tal que n es un número par, entonces

$$0 \leq c \leq 1.$$

donde c es su coeficiente de magnificación.

demonstración : Supongamos que existe una gráfica G con un número par de vértices y cuyo coeficiente de magnificación $c > 1$, es decir :

$$\exists m \in \mathbb{N} \text{ tal que } |V(G)| = n = 2m$$

Debido a que $c > 1$ sabemos que

$$|\partial X| > |X| \text{ para todo } X \subset V(G) \text{ tal que } |X| \leq n/2 = m \quad \dots(1)$$

Tomemos un subconjunto de los vértices de G: X^* cuya cardinalidad sea exactamente la mitad del número de vértices, es decir igual a m, por lo tanto la cardinalidad de su vecindad será menor ó igual a m :

$$|X^*| = n/2 = m \Rightarrow |\partial X^*| \leq m = |X^*|$$

$$\Rightarrow |\partial X^*| \leq |X^*| \text{ y esto contradice lo afirmado en (1)}$$

$$\therefore c \leq 1 \blacksquare$$

PROPOSICION : Sea G una gráfica cualquiera con n vértices y n un número impar, entonces su coeficiente de magnificación c cumple

$$0 \leq c \leq (n+1)/(n-1)$$

demonstración : Supongamos que existe una gráfica G con un número impar de vértices y además su coeficiente de magnificación $c > (n+1)/(n-1)$ es decir

$$\exists m \in \mathbb{N} \text{ tal que } |V(G)| = n = 2m + 1$$

$$|\partial X|/|X| > (n+1)/(n-1) \text{ para todo } X \subset V(G) \text{ con } |X| \leq n/2 \quad \dots(1)$$

Sea $X^* \subset V(G)$ tal que $|X^*| = m$

$$\Rightarrow |\partial X^*| \leq n - m = 2m + 1 - m = m + 1$$

$$\therefore |\partial X^*| \leq m + 1$$

$$\Rightarrow |\partial X^*|/|X^*| \leq (m+1)/m = (2m+2)/2m = (n+1)/(n-1) \text{ de donde}$$

$$|\partial X^*|/|X^*| \leq (n+1)/(n-1) \text{ lo que contradice (1)}$$

$$\therefore c \leq (n+1)/(n-1) \blacksquare$$

Ahora bien, si en realidad este coeficiente refleja la velocidad con la que es transmitido un mensaje en una unidad de tiempo a través de una cierta red de comunicación, nosotros esperaríamos que en una gráfica completa este valor sea lo más grande posible ya que todos los vértices son adyacentes entre sí; mientras que en una gráfica completamente disconexa (sin aristas) sea lo más pequeño posible debido a la carencia total de vías de comunicación. Es interesante ver cómo este coeficiente responde bastante bien a nuestra intuición, como se puede ver en los siguiente resultados:

PROPOSICION : Si G es una gráfica completa con n vértices, entonces G es un $(n, n-1, 1)$ -magnificador (es decir, el coeficiente de magnificación $c = 1$) en el caso de que n sea par, y es un $(n, n-1, (n+1)/(n-1))$ -magnificador para n entero impar.

demostración : Como G es una gráfica completa, el grado máximo de G , $\Delta(G) = n-1$.

a) Si n es un número par, entonces $n=2k$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Tomemos un subconjunto X de $V(G)$ tal que $0 < |X| \leq k$, debido a la completez de G , podemos afirmar que $|\partial X| = n - |X|$, de donde

$$\frac{|\partial X|}{|X|} = \frac{n - |X|}{|X|} = \frac{2k}{|X|} - 1 \geq \frac{2k}{k} - 1 = 1$$

$$\therefore c = 1$$

b) En el caso de que el número de vértices de G sea impar, es decir, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2k+1$. Tomemos un subconjunto X de $V(G)$ tal que $0 < |X| \leq k$; por la misma razón que en el inciso anterior, sabemos que $|\partial X| = n - |X|$, de donde

$$\frac{|\partial X|}{|X|} = \frac{n - |X|}{|X|} = \frac{2k+1}{|X|} - 1 \geq \frac{2k+1}{k} - 1 = 1 + \frac{1}{k} = \frac{n+1}{n-1}$$

$$\therefore c = \frac{n+1}{n-1} \quad \blacksquare$$

PROPOSICION : El coeficiente de magnificación de una gráfica completamente desconexa ($|A(G)| = 0$) es igual a cero.

demostración : Supongamos que $|V(G)| = n$ y sea $X \subset V(G)$ tal que $|X| \leq n/2$. Debido a la carencia de aristas en la gráfica, $|\partial X| = 0$ para todo X , teniendo así que

$$0 = |\partial X| \geq c|X|$$

y por lo tanto $c = 0$ ■

No obstante que un problema práctico de comunicación está modelado por gráficas finitas, se quiso incluir el siguiente resultado para el caso infinito.

DEFINICION : Una gráfica G es k -regular si $|\partial v| = k$ para cualquier vértice v de la gráfica.

PROPOSICION : Sea G un árbol infinito $(k+1)$ -regular. El coeficiente de magnificación $c = k-1$

demostración : Sea G una gráfica que cumple las hipótesis del teorema, y sea $X \subset V(G)$, $|X| = n$, $X \neq \emptyset$.

La subgráfica generada por el conjunto X , claramente es un bosque. Llamemos A_1, A_2, \dots, A_r a las componentes de dicha gráfica y n_1, n_2, \dots, n_r al número de vértices de cada una de ellas respectivamente. De aquí que $n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$. Como cada vértice de G tiene grado $k+1$, se tiene que el número de nodos con el que cada una de las componentes A_i ($i = 1, 2, \dots, r$) contribuye a la frontera de X es $(k+1)n_i - 2(n_i - 1)$, de donde tomando :

$$\sum_{i=1}^r \left\{ (k+1)n_i - 2(n_i - 1) \right\} = (k+1)n - 2n + 2r = (k-1)n + 2r$$

Observemos que cada dos componentes distintas A_i, A_j tienen a lo más un vértice de ∂X en común y éste se ha tomado en la sumatoria anterior dos veces. Como el número de componentes es r , entonces

$$|\partial X| = (k-1)n \text{ y } (k-1)n \geq cn \Rightarrow (k-1) \geq c$$

Si k fuera igual a c , consideraríamos una subgráfica de G con el aspecto que se muestra en la figura 8, en donde $|X| = n$ y $gr(v) = k+1$ para todo vértice v en X , obteniendo :

$$|\partial X| = 2k + (n-2)(k-1) = (k-1)n + 2, \text{ de donde}$$

$(k-1)n + 2 \geq nk$ que sólo se cumple para los subconjuntos de $V(G)$ cuya cardinalidad es menor ó igual a dos, obteniendo así una

contradicción que prueba el resultado. ■

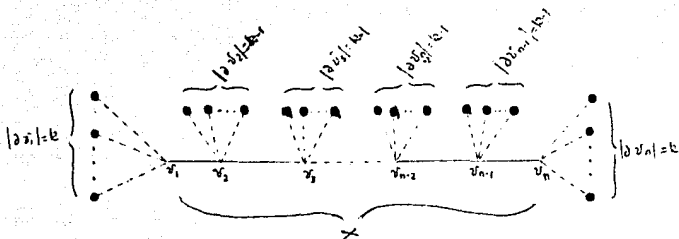


figura 8

Con anterioridad hemos propuesto dos tipos de gráficas a las que nombramos magnificadores y expansores, como buenos modelos para problemas sobre comunicación. Los siguientes resultados ofrecen características de uno a partir del otro, usando el concepto de doble cubierta que definimos enseguida:

DEFINICION : Dada una gráfica $G=(V,A)$ la doble cubierta de G consiste en una gráfica bipartita H , con bipartición $\{E,S\}$ en donde $|E|=|S|=|V|=n$. Si $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ las aristas de H son aquellas cuyos extremos $e_i \in E$ y $s_j \in S$ son tales que $i=j$ ó $(v_i, v_j) \in A(G)$.

PROPOSICION : La doble cubierta de un (n, k, c_m) -magnificador con $c_m \neq 0$, es un $(n, k+1, c_e)$ -expansor donde $c_e \geq c_m$.

demostración : Sea M un (n,k,c) -magnificador y H su doble cubierta.

Para cada $u \in V(H)$ tal que $gr_M(u) = k$, $gr_H(u) = gr_M(u)+1 = k+1$ donde $gr_M(u)$ es el grado de u en el magnificador; es así como el grado máximo de un vértice de la doble cubierta es igual a $k+1$.

Falta demostrar que para cada subconjunto X' de E

$$|\partial X'| \geq (1 + c(1 - |X'|/n))|X'|$$

Sean $X' \subset E$ y $X \subset V$ tales que $|X| = |X'| \leq n/2$ y cuyos elementos sean los que se corresponden via la construcción de la doble cubierta, entonces

$$\begin{aligned} |\partial X'| &= |\partial X| + |X| \geq c|X| + |X| = (1+c)|X| \geq (1 + c(1 - |X|/n))|X| \\ &= (1 + c(1 - |X'|/n))|X'| \end{aligned}$$

Si $X' \subset E$ es tal que $n/2 < |X'| < n$, tomemos un conjunto $X \subset V$ análogamente al caso anterior.

Hagamos una partición de X' y de X en dos subconjuntos $\{Y', Z'\}$ y $\{Y, Z\}$ de tal manera que sus cardinalidades sean menores ó iguales a $n/2$ y que estén asociados por la construcción de la doble cubierta $(|Y'| = |Y|, |Z'| = |Z|)$

$$|\partial X'| = |\partial Y'| + |Y'| + |\partial Z'| + |Z'| - |\partial X' \cap \partial Y'|$$

en el mejor de los casos $|\partial X' \cap \partial Y'| = 0$, de donde

$$\begin{aligned} |\partial X'| &= |\partial Y'| + |Y'| + |\partial Z'| + |Z'| \geq c|Y| + |Y| + c|Z| + |Z| = \\ &= c(|Y| + |Z|) + |Y| + |Z| = c|X| + |X| = (1+c)|X| \geq \\ &\geq (1 + c(1 - |X|/n))|X| = (1 + c(1 - |X'|/n))|X'| \end{aligned}$$

ahora bien, el otro caso extremo consiste en que $|\partial X' \cap \partial Y'| = |\partial X'|$

es decir $|\partial X'| = |\partial Y'| = |\partial Z'|$:

$$\begin{aligned} |\partial X'| &= |\partial Y'| + |Y'| + |\partial Z'| + |Z'| - |\partial Z'| = |\partial X'| + |Y'| + |Z'| = \\ &= |\partial X'| + |X'| + |X'| \geq c|X'| + 2|X'| \geq (1+c)|X'| \geq \\ &\geq (1 + c(1 - |X'|/n))|X'| = (1 + c(1 - |X'|/n))|X'| \end{aligned}$$

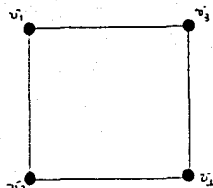
finalmente, si $|X'| = n$ y el coeficiente de magnificación de M es distinto de 0, el magnificador es una gráfica conexa, por lo que la doble cubierta también lo será y $|\partial X'| = n$

$$|\partial X'| = |X'| = (1 + c(1 - |X'|/n))|X'| \quad \blacksquare$$

si el coeficiente de magnificación es igual a 0, el magnificador no es conexo y podremos encontrar subconjuntos no vacíos de E cuya vecindad sea vacía y para los cuales no existe una constante c que cumpla la desigualdad, siendo este el único caso donde el resultado no es válido.

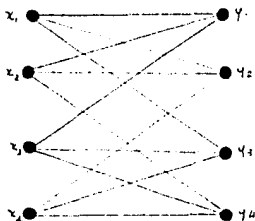
En la mayoría de las gráficas la desigualdad $c_e \geq c_m$ es estricta, lo que quiere decir que en general, la expansión de la doble cubierta es mejor que la magnificación de una gráfica dada, en lo referente a la velocidad de transmisión de un mensaje.

Como ejemplo de lo anterior podemos señalar que un ciclo de longitud cuatro es un (4,2,1)-magnificador y su doble cubierta es un (4,3,4/3)-expansor. Ver figura 9 y 9 a.



(4,2,1)-magnificador

figura 9



(4,3,4/3)-expansor

90figura 9 a

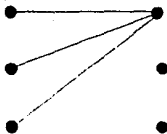
De la proposición anterior puede desprenderse la siguiente pregunta: ¿dada una gráfica bipartita G , ésta es la doble cubierta de alguna gráfica G' ? Es claro que esto no siempre sucede ya que los elementos de la partición no tienen por que ser del mismo tamaño y en

el caso de que lo fueran, no necesariamente se tiene que cada $x_i \in E$ es adyacente a su homólogo.

Lo que resulta inmediato es que cualquier gráfica es un magnificador con coeficiente de magnificación mayor ó igual a cero; sin embargo no toda gráfica bipartita es un expansor cuyo coeficiente $c \geq 0$. Podemos encontrar gráficas que no lo sean (ver figura 10) e incluso algunas para las cuales el coeficiente de expansión sea negativo, basta que exista $X \subset V(E)$ tal que $|\partial X| < |X|$, entonces

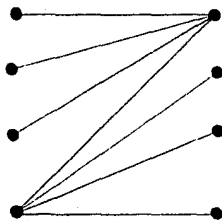
$$|X| > |\partial X| \geq (1 + c(1 - |X|/n))|X|$$

lo que implica que $c(1 - |X|/n) \leq 0$, de donde $c < 0$. (ver figura 11)



gráfica que no es expansor

figura 10



coeficiente de expansión negativo

figura 11

Igualmente que en el caso de los magnificadores, se buscaron cotas para el coeficiente de expansión, encontrándose que éste incluso puede ser negativo y a diferencia del coeficiente de magnificación, no depende de la paridad del conjunto de vértices.

Es fácil demostrar que la expansión de una gráfica será negativa en el caso en que exista un subconjunto de las entradas cuya cardinalidad sea mayor que la de su vecindad y que es precisamente la situación de la gráfica de la figura 10. También se pudo encontrar que para cualquier gráfica bipartita completa con n puntos en cada elemento de la bipartición, esta constante es igual a $1 + 1/(n-1)$:

PROPOSICION : Una gráfica bipartita completa $K_{n,n}$ es un $(n,n,1+1/(n-1))$ -expansor.

demostración : En el caso en que $|X| = |\partial X| = n$, la desigualdad

$$|\partial X| \geq (1 + c(1 - |X|/n))|X| \dots (1)$$

se cumple para cualquier $c \in \mathbb{R}$.

Sea $X \subset E$ tal que $|X|=m$ con $1 \leq m \leq n-1$. Debido a la completez de la gráfica $|\partial X|=n$, por lo que sustituyendo en(1) obtenemos

$$\frac{n-m}{m} \geq c \frac{n-m}{n} \quad \text{de donde } c \leq n/m = 1 + \frac{n-m}{m}$$

alcanzando su valor mínimo $1 + 1/(n-1)$ cuando $m=n-1$ ■

Sin embargo, pensando en un problema de la vida real, este tipo de construcción es muy costosa, por lo que se trató de disminuir el número de aristas en la gráfica sin que esto repercutiera fuertemente en el coeficiente de expansión, lográndose encontrar que si a una gráfica bipartita completa con n vértices en cada componente, se le quita un apareamiento perfecto, que existe por el Teorema de Hall, quedando cada vértice con grado igual a $n-1$, entonces este coeficiente permanece invariante con respecto a la gráfica original. La idea de la demostración es esencialmente igual a la del caso anterior, con la única variante que para todo subconjunto X de cardinalidad mayor que uno, el tamaño de su frontera es n , y para $|X|=1$, $|\partial X|=n-1$.

También se pudo observar que si quitamos una arista más a esta última familia de gráficas, el coeficiente de expansión disminuye, sin poderse encontrar una relación entre esta disminución y la cardinalidad del conjunto de vértices. Desgraciadamente no se conocen

algoritmos eficientes que nos permitan encontrar el coeficiente de magnificación ó de expansión de una gráfica dada. Si tratamos de calcularlos como sugiere la definición, se tiene que buscar la frontera de todos los subconjuntos de vértices cuya cardinalidad sea a lo más $n/2$, lo que equivale a analizar $\sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{i}$ conjuntos, siendo éste un número muy grande.

Las gráficas que hemos estado manejando garantizan que la información se transmite a una cierta velocidad a través de la gráfica, pero esto no asegura que un individuo pueda comunicarse con otra persona en un tiempo determinado. Para que esto suceda, las gráficas en cuestión requieren de más propiedades que se discutirán en el siguiente capítulo.

CAPITULO III

SUPERCONCENTRADORES E HIPERCONCENTRADORES

En el intento por salvar las limitaciones de los expansores y magnificadores comentadas en el capítulo anterior, para que un par de individuos se puedan comunicar en un cierto tiempo dado, surge la necesidad de contemplar una nueva clase de gráficas que tengan la propiedad de poseer una buena cantidad de trayectorias ajenas en vértices entre los posibles subconjuntos de puntos, que nos permita aumentar la velocidad de transmisión del mensaje. Este nuevo requerimiento nos conduce a la siguiente definición :

DEFINICION : Un (n,k) -superconcentrador es una gráfica acíclica con n entradas y n salidas y a lo más kn aristas, tales que para todo $1 \leq m \leq n$, cada subconjunto de m entradas pueda ser conectado a cualquier subconjunto de m salidas por a lo más m trayectorias ajenas en vértices.

El problema ahora, es construir familias de superconcentradores cuya densidad k sea lo más pequeña posible, ya que las aristas representan cables y por las razones explicadas en el capítulo I,

queremos minimizar la densidad del cableado. La existencia de familias de este tipo de gráficas, fué establecida por métodos de conteo probabilístico, pero además se ha probado que se pueden construir superconcentradores arbitrariamente grandes usando gráficas expansoras; la densidad estará determinada por el coeficiente de expansión y el número de aristas de los expansores. La construcción es recursiva y se explica a continuación :

Supongamos que tenemos un (n_0, k_0) -superconcentrador Y y una gráfica bipartita expansora X con n_0 vértices en cada componente y $d n_0$ aristas ($d \in \mathbb{R}$), cuyo coeficiente de expansión es c . Nosotros podemos obtener un (n_1, k_1) -superconcentrador con $n_1 = (a+1)n_0$, $a \in \mathbb{Z}^+$, cuya densidad k_1 es :

$$k_1 \leq n_1 + (2(a+d) + k_0)n_0$$

Primero construimos una gráfica bipartita C , llamada concentrador, que cuenta con n_1 entradas y n_0 salidas y numeramos estos vértices. Las primeras n_0 entradas se conectan a las n_0 salidas vía el expansor X y los $a n_0$ vértices de entrada restantes, son conectadas, módulo n_0 , a las salidas. Posteriormente se construye el superconcentrador mismo como se indica a continuación y se muestra en la figura 12 :

1. n_1 aristas de las entradas a las salidas,
2. identificación de vértices,
3. dos concentradores con n_1 entradas y n_0 salidas,
4. un superconcentrador con n_0 entradas y salidas construido recursivamente.

Si no es suficientemente pequeño, se puede iniciar la "cascada" con una gráfica bipartita completa.

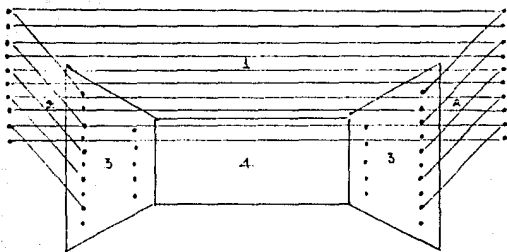


figura 12

Otra construcción de superconcentradores interesante por su sencillez, se basa en el siguiente concepto, pero parte de la suposición de que se cuenta con dos gráficas de este tipo :

DEFINICION : Un n -hiperconcentrador es una gráfica bipartita con n entradas y n salidas, donde para todo r ($1 \leq r \leq n$) existen r trayectorias ajenas en vértices de cada subconjunto de r entradas al conjunto $\{b_1, b_2, \dots, b_r\}$ de vértices de salida.

Un n -superconcentrador con E^* entradas y S^* salidas, puede ser

construido a partir de dos n -hiperconcentradores H_1 y H_2 , simplemente identificando sus respectivas salidas (S_1 con S_2) y pensando las entradas de uno (E_2 por ejemplo) como las salidas de la gráfica resultante (ver figura 13).

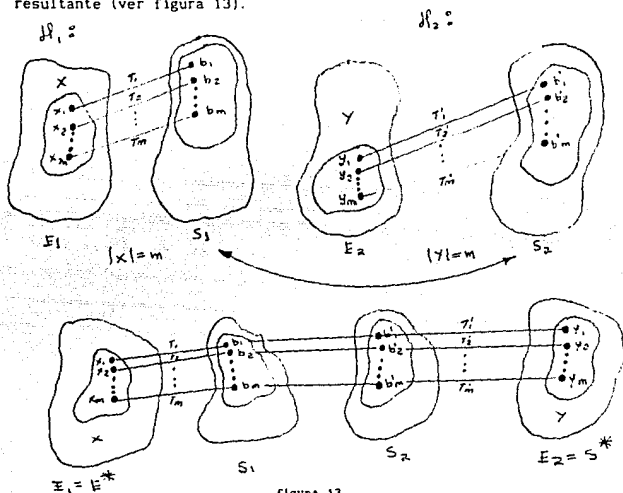


figura 13

Cabe señalar que de estos dos nuevos tipos de gráficas que hemos definido (superconcentradores e hiperconcentradores) las que imponen una condición más severa de concentración son precisamente las propuestas al inicio del capítulo.

No debemos olvidar que en el capítulo anterior, se mencionó un problema importante concerniente a las gráficas que han ocupado

mayormente nuestra atención: los magnificadores y los expansores, que radica en la complejidad del cálculo de los coeficientes respectivos para una gráfica dada, por lo que procederemos a presentar resultados que nos permitan aproximarnos a estos valores valiéndonos de otro tipo de herramientas que eviten el proceso exhaustivo sugerido directamente por las definiciones. Es así como surge la necesidad de utilizar algunas caracterizaciones alternativas de las gráficas que nos brindan la opción de aplicar técnicas del álgebra y que se presentan a continuación:

DEFINICION : Sea $G(V,A)$ una gráfica finita conexa, con p vértices y q aristas; escojamos una orientación en G , es decir, asociemos a cada arista $a \in A$ un vértice inicial y uno final que denotaremos a^- y a^+ respectivamente. La Matriz de Incidencia de la gráfica orientada G , es una matriz I , de $p \times q$, cuyas entradas son :

$$I_{x,a} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a^+ \\ -1 & \text{si } x = a^- \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La Matriz de Advacencia es una matriz K , de $p \times p$ cuyas entradas son:

$$K_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } (v_i, v_j) \in A \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Definamos el operador Δ como el producto de la matriz de incidencia por su transpuesta: $\Delta = I I^t$. Este operador nos brinda una relación entre esta matriz y la de adyacencia, ya que resulta que $\Delta = D - K$, donde D es una matriz diagonal de $p \times p$ en la cual D_{ii} es el grado del vértice v_i en G . La demostración se presenta enseguida:

Sea J la matriz que resulta de multiplicar I por I^t , lo que tendremos que demostrar entonces, es que $J = D - K$.

Las dimensiones de I e I^t son $p \times q$ y $q \times p$ respectivamente, por lo que J es una matriz cuadrada de $p \times p$.

$$J_{ij} = (I_{i1}, I_{i2}, \dots, I_{iq}) \begin{pmatrix} I_{11} \\ I_{21} \\ \vdots \\ I_{q1} \end{pmatrix} = (I_{i1}, I_{i2}, \dots, I_{iq}) \begin{pmatrix} I_{11} \\ I_{12} \\ \vdots \\ I_{1q} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^q (I_{ij})^2 = gr(v_i) \quad \dots (1)$$

$$J_{ik} = 0 \quad (i \neq k) \Leftrightarrow \sum (I_{ij})(I^t_{jk}) = 0 \Leftrightarrow (I_{ij})(I^t_{jk}) = 0 \text{ ya que}$$

$$I_{ij} I^t_{jk} \neq 0 \Leftrightarrow I_{ij} \neq 0 \text{ y } I^t_{jk} = I_{kj} \neq 0, \text{ sucediendo esto solo}$$

si:

$$a) I_{ij} \neq 0 \Rightarrow I_{ij} = 1 \text{ ó } I_{ij} = -1$$

$$\text{si } I_{ij} = 1 \Rightarrow j = (i, x) \text{ para algún vértice } x$$

$$\text{si } I_{ij} = -1 \Rightarrow j = (x, i) \text{ para algún vértice } x$$

y

$$b) I^t_{jk} = I_{kj} \neq 0 \Rightarrow I_{kj} = 1 \text{ ó } I_{kj} = -1$$

si $I_{kj} = 1 \Rightarrow j=(k,x)$ para algún vértice x

si $I_{kj} = -1 \Rightarrow j=(x,k)$ para algún vértice x

Como se deben cumplir ambas condiciones y no tenemos aristas múltiples,

$I_{ij} = 1$ quiere decir que existe la arista $j=(i,k)$, por lo que $I_{kj} = -1$ y $I_{ij} I_{jk} = -1$. Análogamente, $I_{ij} = -1$ implica que $j=(k,i)$ de donde $I_{ij} I_{jk} = -1$; es así como podemos concluir que

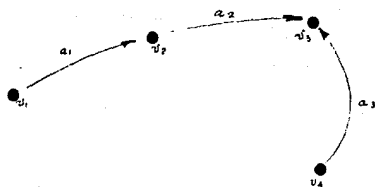
$J_{jk} = -1$ si y solo si (i,k) ó (k,i) son aristas de G (2)

y $J_{jk} = 0$ si y solo si $(i,k) \notin A(G)$ (3)

Por tanto, J se puede descomponer en la diferencia de dos matrices: la matriz diagonal D que cumple (1) menos una matriz que cumpla las condiciones (2) y (3), que es precisamente la de Adyacencia. Cabe señalar que si G es una gráfica sin dirección, el operador Δ se descompondrá como $D + K$ y su demostración se obtiene siguiendo un proceso análogo al anterior.

En la figura 14 y 15 se presentan dos ejemplos de lo anterior, donde la única diferencia entre las gráficas consiste en que G_1 es dirigida y G_2 , no lo es.

G1 :

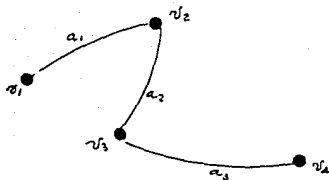


$$\Delta = I I^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= D - K$$

figure 14

G2 :



$$\Delta = I I^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= D + K$$

figure 15

En el caso en que nos interese "cuantificar" la información que puede ser transmitida a través de cables que tienen limitaciones de capacidad, podemos asignar a las aristas correspondientes números que reflejen esta situación y que llamaremos "etiquetas". El grado de un vértice será entonces, la suma de las etiquetas que inciden en él y la entrada K_{xy} de la matriz de adyacencia, la etiqueta de la arista (x,y) en caso de existir y cero de otra forma. Nótese que esta nueva definición no altera Δ .

El siguiente teorema nos permite acotar los coeficientes expansión y magnificación de una gráfica G , a través del valor propio positivo más pequeño de $\Delta(G)$, que llamaremos $\lambda_1(G)$ ó simplemente λ_1 .

Cabe señalar que si G es sin dirección, $\Delta(G)$ es simétrica y diagonal dominante (es decir positiva definida) con entradas reales, por lo que se puede garantizar que todos sus valores propios son reales. La ventaja está en que existen algoritmos eficientes para calcular este valor o podemos ayudarnos de paquetes de computadora que realicen el cálculo (como el Linpak, Toolbox Numerical Analysis y Matlab, entre otros).

TEOREMA :

a) Dada una gráfica cualquiera de grado máximo k , se magnifica con $c_m \geq 2\lambda_1/k + 2\lambda_1$.

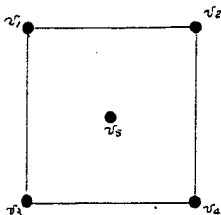
b) La doble cubierta de cualquier gráfica cuyo grado máximo es k , se expande con $c_e \geq 4\lambda_1/k + 4\lambda_1$.

c) Si el coeficiente de magnificación de una gráfica es c_m , entonces $\lambda_1 \geq c^2/4 + 2c^2$.

Estos resultados fueron probados por Tanner, Alon-Milman y Alon respectivamente (2), (3), (4). Se ha observado que las gráficas donde λ_1 tiende a crecer, tienen *conexidad* grande, es decir, se necesita quitar un gran número de vértices para desconectarla; su *diámetro*, o longitud de una trayectoria máxima es pequeña y finalmente, cuentan con un *cuello* (longitud del ciclo mínimo) grande. Por todo lo anterior, podemos concluir que entre más grande es λ_1 , la gráfica nos será más útil como modelo de comunicación, ya que su coeficiente de magnificación también será grande (recuérdese que $c_m \leq 1$).

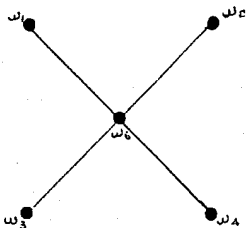
Por toda la reflexión anterior, se podría pensar que una manera de determinar exactamente el coeficiente de magnificación de una gráfica podría estar dada a través del *espectro* del operador Δ , es decir, por todos los valores propios de esta matriz; sin embargo a continuación se presentan gráficas *coespectrales* (con el mismo espectro), pero diferente coeficiente de magnificación, (ver figuras 16a y 16 b) lo que elimina esta posibilidad.

G1 :



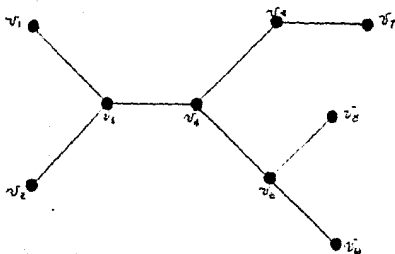
coeficiente de magnificacion de G1 : 0
espectro de G1 : (-2, 0, 0, 0, 2)
figura 16 a

G2 :



coeficiente de magnificacion de G2 : 0.5
espectro de G2 : (-2, 0, 0, 0, 2)
figura 16 b

G3 :

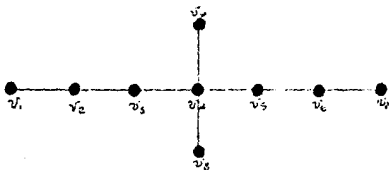


coeficiente de magnificación de G3 : 1/3

espectro de G3 : (-2.18, -1.41, -1.13, 0, 0, 0, 1.13, 1.41, 2.18)

figura 17 a

G4 :

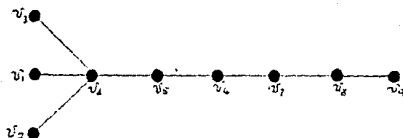


coeficiente de magnificación de G4 : 0.25

espectro de G2 : (-2.18, -1.41, -1.13, 0, 0, 0, 1.13, 1.41, 2.18)

figura 17 b

G5 :



coeficiente de magnificación de G5 : 0.25
espectro de G5 : { -212, -1.64, -0.91, 0, 0, 0, 2.12, 1.64, 0.91 }
figura 17c

Como pudo observarse, existen gráficas coespectrales cuyos coeficientes de magnificación son diferentes (figuras 16a y 16b, 17a y 17b) así como gráficas de igual coeficiente y distinto espectro (figuras 17b y 17c). Lo anterior nos permite concluir que los magnificadores no quedan totalmente caracterizados por su espectro, quedando abierto el problema ya mencionado.

CAPITULO IV

TEOREMA DE GABBER Y GALIL

Debido a la dificultad práctica para poder decidir si una gráfica es un expansor o no, resulta importante tratar de encontrar alguna construcción de este tipo de gráficas; Offer Gabber y Zvi Galil, muestran explícitamente una familia con n vértices $\{G_n\}$, para $n=m^2$, con $m=1,2,\dots$ de la manera siguiente:

Tanto los vértices de entrada como los de salida, serán los elementos del conjunto $A_m=\{0, 1, \dots, m-1\} \times \{0, 1, \dots, m-1\}$ y las aristas están dadas por cinco permutaciones σ_i sobre A_m definidas a continuación:

$$\sigma_0(x,y) = (x,y)$$

$$\sigma_1(x,y) = (x,x+y)$$

$$\sigma_2(x,y) = (x,x+y+1)$$

$$\sigma_3(x,y) = (x+y,y)$$

$$\sigma_4(x,y) = (x+y+1,y)$$

donde el símbolo $+$ se define como la suma módulo m .

Para ejemplificar lo anterior, construyamos una gráfica cualquiera de la manera propuesta, digamos G_4 : (ver figura 18)

$n=4,$

$m=2,$

$A_2=\{0,1\} \times \{0,1\}$

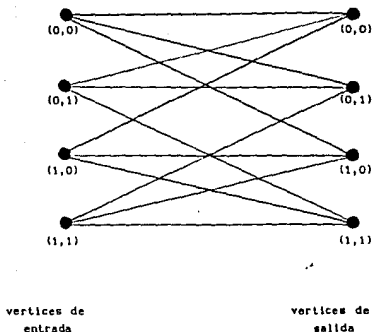


figura 18

La importancia de esta construcción radica en el siguiente teorema:

TEOREMA : Para $n=m^2$, $m=1, 2, \dots$ G_n es un $(n,5,d_0)$ -expansor, donde $d_0=(2-\sqrt{3})/4$

Debido a la trascendencia de este resultado, se decidió incluir su demostración, para lo cual, se requieren de algunos conocimientos de Teoría de la Medida, que se irán definiendo conforme se vayan requiriendo.

3.1 DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE GABBER Y GALIL

DEFINICION: Una familia Ω de subconjuntos de un conjunto X es una σ -álgebra si:

i) $\phi, X \in \Omega$

ii) Si $A \in \Omega$, entonces el complemento $A^c = X - A \in \Omega$

iii) Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos de Ω , entonces

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Omega$$

DEFINICION: Una medida es una función μ :

$$\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \{\infty\}$$

tal que:

i) $\mu(\phi) = 0$

ii) $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ si $A_n \cap A_m = \phi$ con $n \neq m$

algunos ejemplos de medidas son los siguientes:

a) Sean X un conjunto no vacío, X' la σ -álgebra de todos los subconjuntos de X y p un elemento fijo de X . Definimos la medida μ de un conjunto $E \in X'$ como

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \notin E \\ 1 & \text{si } p \in E \end{cases}$$

b) Sean $X = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ y Ω la σ -álgebra de todos los subconjuntos de \mathbb{N} . Si $A \in \Omega$, definimos la medida de A , $\mu(A)$, como el número de elementos en A si A es un conjunto finito, y como ∞ si A es infinito.

c) Sean $X = \mathbb{R}$ y Ω el álgebra de Borel (la σ -álgebra generada por todos los intervalos abiertos $(a,b) \in \mathbb{R}$). Se define la medida de un intervalo no vacío $E=(a,b)$, como la longitud del intervalo: $\mu(E)=b-a$. Asimismo se puede definir la σ -álgebra de los conjuntos Lebesgue-medibles usando los borellianos y la noción de medida exterior, la medida resultante (la medida exterior restringida a los Lebesgue-medibles) es llamada "*medida de Lebesgue*" que resulta ser completa (ver [Ba]) y para el caso de los intervalos reales coincide con la medida de Borel.

Pensemos ahora en el conjunto $(0,1) \times (0,1)$, al que llamaremos A ; si "pegamos" las líneas punteadas con las continuas, como se indica en la figura 16, obtendremos lo que se muestra en la figura 17, que se denomina TORO y donde, de la manera señalada anteriormente, se puede definir una medida completa, pero que en este caso coincide con el área. (ver [Ba])

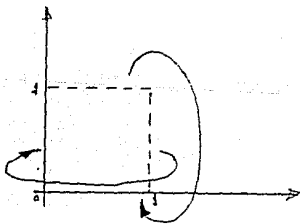


figura 19

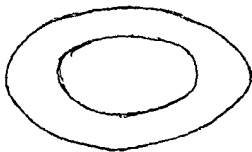


figura 20

La demostración del teorema se obtiene suponiendo el lema 1, que se probará más adelante:

LEMA 1 : Para todo $X \subseteq A_n$, $\sum_{i=1}^4 |\sigma_i(X) - X| \geq 4d\alpha|X||X^c|/n$ donde $d\alpha = (2 - \sqrt{3})/4$.

PRUEBA DEL TEOREMA : Por el Lema 1, para cada $X \subseteq A_n$ existe alguna i tal que $|\sigma_i(X) - X| \geq d\alpha|X||X^c|/n = d\alpha|X|(1 - |X|/n)$; pero $|\partial X| \geq |X \cup \sigma_i(X)|$ ya que al aplicar σ a los elementos de X obtenemos tantas aristas como la cardinalidad de X , y al aplicarles σ_i , con $i=1, \dots, 4$ a lo más aumenta una arista por elemento de X , sin embargo la frontera ∂X cuenta con las aristas anteriores pero también con las que se obtienen de las permutaciones restantes, por lo tanto

$$X \cup \sigma_i(X) \subseteq \partial X$$

$$\sigma_i(X) - X = (X \cup \sigma_i(X)) - X \subseteq \partial X - X, \text{ por lo que}$$

$$d\alpha|X|(1 - |X|/n) \leq |\sigma_i(X) - X| \leq |\partial X - X|$$

pero como $X \subseteq \partial X$, $|\partial X - X| = |\partial X| - |X|$ podemos concluir que

$$|\partial X| \geq (1 + d_0(1 - |X|/n)) |X|, \dots (1)$$

Por la forma en que se definieron las adyacencias, sabemos que el grado de un vértice es a lo más cinco; esto, aunado a lo obtenido en ... (1) demuestra que G_n es un $(n, 5, d_0)$ -expansor. ■

Para demostrar el lema 1, definimos el conjunto A como el toro $[0, 1) \times [0, 1)$ y dos automorfismos $\tau_i : A \rightarrow A$ ($i=1, 2$)

$$\tau_1(x, y) = (x, x+y) \quad y$$

$$\tau_2(x, y) = (x+y, y)$$

donde el símbolo $+$ representa la suma módulo 1.

Esta prueba requiere de la suposición del lema 2, que se demostrará posteriormente.

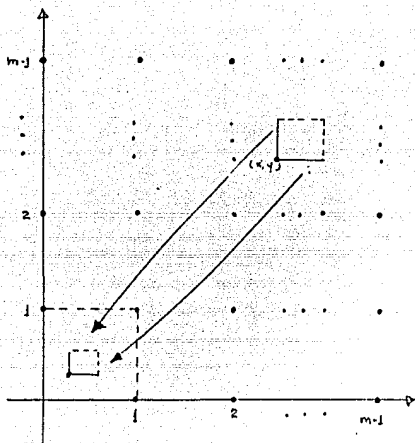
LEMA 2 : Para cada conjunto Lebesgue-medible $X \subseteq A$, se tiene

$$\sum_{i=1}^2 \mu(X - \tau_i^{-1}(X)) \geq 2d_0 \mu(X) \mu(X^c)$$

DEMOSTRACION DEL LEMA 1 : Sea $X \subseteq A_m = \{0, 1, \dots, m-1\} \times \{0, 1, \dots, m-1\}$

Para cada $(x, y) \in A_m$

definimos $A'(x, y) = \left\{ \left((x+u)/m, (y+v)/m \right) : 0 \leq u, v \leq 1 \right\}$ (figura 21)



el area sombreada, se contrae por un factor $1/m$, que provoca una deformacion y la manda al toro.

figura 21

Sea $X' = \bigcup_{a \in X} A^a$. Probaremos que $\mu(X') = |X|/n$ y que $\mu(X'^c) = |X^c|/n$

Definimos el conjunto $\omega = \{(x+u, y+v) : 0 \leq u, v \leq 1\}$ para cada $(x,y) \in A_m$.

El teorema de cambio de variable nos garantiza que

$$\int_{\omega} f(T(\beta)) |JT(\beta)| = \int_{T(\omega)} f(\gamma) d\gamma$$

donde $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(\gamma) = 1/m \gamma = 1/m \text{Id}(\gamma)$, entonces

$$JT = \det \begin{pmatrix} 1/m & 0 \\ 0 & 1/m \end{pmatrix} = 1/m^2 = 1/n$$

$$\int_{T(\omega)} 1 d\gamma = \int_{\omega} 1/m^2 dy = 1/m^2$$

$$\therefore \mu(T(\omega)) = \mu(A'(x,y)) = 1/m^2$$

Es importante señalar que dos conjuntos ω_i , originados a partir de puntos $(x_i, y_i) \in A_m$ distintos, tienen intersección vacía, por lo que al contraerlos y sumergirlos en el toro, siguen siendo conjuntos ajenos, de donde

$$\mu(X') = \sum_{(x,y) \in X} \mu(A'(x,y)) = \frac{|X|}{m^2} = \frac{|X|}{n} \quad \dots (1)$$

De manera análoga, podemos ver que si definimos $X'^c = \bigcup_{a \in X} A'_a$

$$\mu(X'^c) = \sum_{(x,y) \in X} \mu(A'(x,y)) = \frac{|X^c|}{n} \quad \dots (2)$$

Sean $a=(x,y) \in A_m$ y $p \in A'_a$, con $p = (u(p), v(p))$

AFIRMACION 1 :

$$\tau_1(p) \in \begin{cases} A'\sigma_1(a) & \text{si } u(p)+v(p) < 1 \text{ ó} \\ A'\sigma_2(a) & \text{si } u(p)+v(p) \geq 1 \end{cases}$$

DEMOSTRACION :

Recordemos que : $\tau_1(x,y) = (x, x+y)$, $\tau_2(x,y) = (x+y, x)$ y

$$\sigma_1(x,y) = (x, x+y), \quad \sigma_2(x,y) = (x, x+y+1)$$

Si $u(p)+v(p) < 1$, entonces

$$\begin{aligned} \tau_1(p) &= ((x+u(p))/m, (x+u(p))+y+v(p))/m) \\ &= ((x+u(p))/m, (x+y) + (u(p)+v(p)) /m) \in A'(x, x+y) \end{aligned}$$

$$\text{pero } A'(x, x+y) = A'\sigma_1(a)$$

Si $u(p)+v(p) \geq 1$, entonces

$$\tau_1(p) = \left(\frac{x+u(p)}{m}, \frac{(x+y+1) + v'(p)}{m} \right) \in A'(x, x+y+1)$$

$$\text{donde } v'(p) = u(p)+v(p)-1 < 1$$

$$\text{pero } A'(x, x+y+1) = A' \sigma_2(a) \blacksquare$$

Por lo anterior, podemos afirmar que

$$p \in X' - \tau_1^{-1}(X') \Leftrightarrow p \in X' \text{ y } p \notin \tau_1^{-1}(X') \Leftrightarrow p \in X' \text{ y } \tau_1(p) \notin X'$$

$$\Leftrightarrow p \in A' a \text{ para alguna } a \in X \text{ y si } \begin{cases} u(p)+v(p) < 1 \text{ entonces } \sigma_1(a) \notin X \\ u(p)+v(p) \geq 1 \text{ entonces } \sigma_2(a) \notin X \end{cases}$$

$$\text{con lo que concluimos que si } \begin{cases} u(p)+v(p) < 1 \text{ entonces } a \in (X - \sigma_1^{-1}(X)) \\ u(p)+v(p) \geq 1 \text{ entonces } a \in (X - \sigma_2^{-1}(X)) \end{cases}$$

Observemos que $\mu(\{ (u,v) \mid 0 < u+v < 1 \}) = 1/2 \dots (1)$ (ver figura 22)

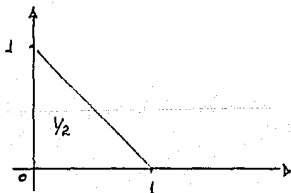


figura 22

$$\text{AFIRMACION 2 : } \mu(X' - \tau_1^{-1}(X')) = \frac{1}{2n} (|X - \sigma_1^{-1}(X)| + |X - \sigma_2^{-1}(X)|)$$

DEMOSTRACION : De la última doble implicación y de ... (1), podemos concluir que

$$\mu(X' - \tau_1^{-1}(X')) \leq \frac{|X - \sigma_1^{-1}(X)|}{2n} + \frac{|X - \sigma_2^{-1}(X)|}{2n} \quad \blacksquare$$

Siguiendo todo el proceso anterior, podemos probar lo siguiente:

$$\text{AFIRMACION 3 : } \mu(X' - \tau_2^{-1}(X')) \leq \frac{1}{2n} (|X - \sigma_3^{-1}(X)| + |X - \sigma_4^{-1}(X)|),$$

donde

$$\sigma_3(x, y) = (x+y, y), \quad \sigma_4(x, y) = (x+y+1, y) \quad \tau_2(x, y) = (x+y, y)$$

Sumando lo obtenido en las dos últimas afirmaciones obtenemos:

$$\sum_{i=1}^2 \mu(X' - \tau_i^{-1}(X')) \leq \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^4 |X - \sigma_i^{-1}(X)|$$

como σ_i es una permutación, es biyectiva, por lo que podemos asegurar

$$\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^4 |X - \sigma_i^{-1}(X)| = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^4 |\sigma_i(X) - X|,$$

de donde

$$\sum_{i=1}^2 \mu(X' - \tau_i^{-1}(X')) \leq \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^4 |\sigma_i(X) - X|$$

Aplicando el lema 2 al conjunto X' , se tiene :

$$2 \text{do} \mu(X') \mu(X'^c) \leq \sum_{i=1}^2 \mu(X' - \tau_i^{-1}(X')) \leq \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^4 |\sigma_i(X) - X|$$

esto, aunado a que $\mu(X') = |X'|/n$ y que $\mu(X'^c) = |X'^c|/n$ (demostrado en

los incisos (1) y (2)), se deduce precisamente el lema 1 :

$$\sum_{i=1}^4 |\sigma_i(X) - X| \geq 4d\sigma(X) |X^c| / n \quad \blacksquare$$

Ahora procederemos a demostrar el lema 2, que requiere de la suposición del lema 3, que se presenta a continuación.

LEMA 3 : Para todo $X \subseteq A$ medible, se tiene que

$$\sum_{i=1}^2 \mu(X - \tau_i^{-2}(X)) \geq 4d\sigma(X)\mu(X^c)$$

DEMOSTRACION DEL LEMA 2 :

AFIRMACION : Para todo $X \subseteq A$ medible, se tiene que :

$$X - \tau_1^{-2}(X) \subset \left((X - \tau_1^{-1}(X)) \cup (\tau_1^{-1}(X - \tau_1^{-1}(X))) \right)$$

DEMOSTRACION : Sea $x \in (X - \tau_1^{-2}(X))$ entonces $x \in X$ y $x \notin \tau_1^{-2}(X)$, es decir $x \in X$ y $\tau_1(x) \notin \tau_1^{-1}(X)$.

Si $x \in (X - \tau_1^{-1}(X))$, la afirmación está probada.

Supongamos que $x \notin (X - \tau_1^{-1}(X))$, como sabemos que $x \in X$, podemos concluir que $x \in \tau_1^{-1}(X)$, de donde $\tau_1(x) \in X$, por lo tanto

$$\tau_1(x) \in (X - \tau_1^{-1}(X)), \text{ entonces } x \in \tau_1^{-1}(X - \tau_1^{-1}(X))$$

y la afirmación queda demostrada.

Esto nos permite asegurar que

$$\begin{aligned} \mu(X - \tau_1^{-2}(X)) &\leq \mu \left((X - \tau_1^{-1}(X)) \cup (\tau_1^{-1}(X - \tau_1^{-1}(X))) \right) \leq \\ &\leq \mu(X - \tau_1^{-1}(X)) + \mu(\tau_1^{-1}(X - \tau_1^{-1}(X))) \end{aligned}$$

Recordando la definición de τ_1 , podemos observar que se trata

prácticamente de una translación, y que preserva la medida, es decir:

$$\mu(\tau_i^{-1}(X - \tau_i^{-1}(X))) = \mu(X - \tau_i^{-1}(X)), \text{ por lo que}$$

$$\mu(X - \tau_i^{-2}(X)) \leq 2\mu(X - \tau_i^{-1}(X)),$$

$$\sum_{i=1}^2 \mu(X - \tau_i^{-2}(X)) \leq 2 \sum_{i=1}^2 \mu(X - \tau_i^{-1}(X))$$

Por la suposición del lema 3:

$$4d\mu(X)\mu(X^c) \leq \sum_{i=1}^2 \mu(X - \tau_i^{-2}(X)) \leq 2 \sum_{i=1}^2 \mu(X - \tau_i^{-1}(X)),$$

con lo que podemos concluir el lema 2:

$$\sum_{i=1}^2 \mu(X - \tau_i^{-1}(X)) \geq 2d\mu(X)\mu(X^c) \quad \blacksquare$$

Antes de continuar con la demostración del lema 3, es necesario definir algunos conceptos que serán utilizados.

DEFINICION : Dada una terna (A, Ω, μ) , donde A es un conjunto, Ω una σ -álgebra y μ una medida, se dice que $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ es medible si $f^{-1}(\alpha, \infty) \in \Omega$ para toda $\alpha \in \mathbb{R}$.

DEFINICION : Sea $D \subset \Omega$. La funcion característica χ_D se define como :

$$\chi_D(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in D \\ 0 & \text{si } x \notin D \end{cases}$$

por lo que $\int \chi_D d\mu = \mu(D)$

La demostración del lema 3 requiere de la suposición del lema 4, que se probará más adelante. Ambos resultados se enuncian a

continuación :

LEMA 3 : Para todo $X \in A$ medible, se tiene que

$$\sum_{i=1}^2 \mu \{ X - \tau_i^{-2}(X) \} \geq 4 \operatorname{dom}(X) \mu(X^c)$$

Si τ_i es un automorfismo de A y f una función de A en \mathbb{R} , definimos $\bar{\tau}_i(f) = f(\tau_i^{-1})$.

LEMA 4 : Para toda función medible ϕ en A , que cumple :

$$i) \int_A \phi = 0 \quad \text{y} \quad ii) \int_A |\phi|^2 < \infty \quad \text{se tiene que}$$

$$\sum_{i=1}^2 \int_A |\bar{\tau}_i^2(\phi) - \phi|^2 \geq 8 \operatorname{dom} \int_A |\phi|^2$$

En lo sucesivo se usará la notación $\int_A \psi$ para $\int_A \psi(x) d\mu(x)$

DEMOSTRACION DEL LEMA 3 : Sea $X \in A$ medible, definimos

$$\phi(x) = \chi_X(x) - \mu(X), \quad \psi(x) = \begin{cases} \mu(X^c) & \text{si } x \in X \text{ (ya que } \phi(x) = 1 - \mu(X) = \mu(X^c)) \\ -\mu(X) & \text{si } x \in X^c \text{ (ya que } \phi(x) = 0 - \mu(X)) \end{cases}$$

por lo que reescribir $\phi(x)$ como :

$$\phi(x) = \mu(X^c) \chi_X(x) - \mu(X) \chi_{X^c}(x).$$

(Por comodidad, se usará la notación : $\phi = \mu(X^c) \chi_X - \mu(X) \chi_{X^c}$)

nos permite concluir que :

$$\int_A \phi = \mu(X^c) \mu(X) - \mu(X) \mu(X^c) = 0 \quad \dots (1)$$

$$\begin{aligned} \phi^2 &= \mu^2(X^c) \chi_X + \mu^2(X) \chi_{X^c} \\ \int_A |\phi|^2 &= \mu^2(X^c) \mu(X) + \mu^2(X) \mu(X^c) = \mu(X^c) \mu(X) \{ \mu(X^c) + \mu(X) \} \\ &= \mu(X^c) \mu(X) < \infty \quad \dots (2) \end{aligned}$$

Como se observó en ... (1) y ... (2), la función ϕ cumple las hipótesis del lema 4, por lo que también satisface su conclusión.

Nótese que para $Y \subseteq A$:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_1(\chi_Y)(x) &= \chi_Y(\tau_1^{-1}(x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau_1^{-1}(x) \in Y \\ 0 & \text{si } \tau_1^{-1}(x) \notin Y \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \tau_1(Y) \\ 0 & \text{si } x \notin \tau_1(Y) \end{cases} = \chi_{\tau_1(Y)}(x) \quad \therefore \bar{\tau}_1(\chi_Y) = \chi_{\tau_1(Y)} \quad \dots (3) \end{aligned}$$

Además τ_1 cumple las siguientes propiedades:

Si f, g y h son funciones de A en R , tales que h es una función constante y f, g sin restricción.

$$\begin{aligned} i) \quad \bar{\tau}_1(f+g)(x) &= (f+g)(\tau_1^{-1}(x)) = f(\tau_1^{-1}(x)) + g(\tau_1^{-1}(x)) = \\ &= \bar{\tau}_1(f(x)) + \bar{\tau}_1(g(x)) \end{aligned}$$

$$ii) \quad \bar{\tau}_1(h)(x) = h(\tau_1^{-1}(x)) = h(x)$$

Retomemos lo que se había concluido acerca de la función ϕ :

$$\phi = \chi_X - \mu(X) = \begin{cases} \mu(X^c) & \text{sobre } X \\ -\mu(X) & \text{sobre } X^c \end{cases}$$

Por $i)$, $ii)$ y ... (3) , podemos afirmar que :

$$\bar{\tau}_1^2(\phi) - \phi = \bar{\tau}_1^2(\chi_X - \mu(X)) - \chi_X + \mu(X) = \bar{\tau}_1^2(\chi_X) - \bar{\tau}_1^2(\mu(X)) - \chi_X + \mu(X)$$

$$= \bar{\tau}_1^2(\chi_X) - \mu(X) - \chi_X + \mu(X) = \bar{\tau}_1^2(\chi_X) - \chi_X = \chi_{\tau_1^2(X)} - \chi_X$$

$$\therefore \bar{\tau}_1^2(\phi) - \phi = \chi_{\tau_1^2(X)} - \chi_X \quad \dots (4)$$

Analizando el segundo miembro de la igualdad tenemos que :

$$(\chi_{\tau_1^{-2}(X)} - \chi_X)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (\tau_1^{-2}(X) - X) \\ -1 & \text{si } x \in X - \tau_1^{-2}(X) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

lo que implica que

$$|\chi_{\tau_1^{-2}(X)} - \chi_X|^2 = \begin{cases} 1 & \text{sobre } (\tau_1^{-2}(X) - X) \cup (X - \tau_1^{-2}(X)) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$= \chi_{(\tau_1^{-2}(X) - X) \cup (X - \tau_1^{-2}(X))}$$

por lo que podemos deducir (de ... (4)) que :

$$|\tilde{\tau}_1^{-2}(\phi) - \phi|^2 = \chi_{(\tau_1^{-2}(X) - X) \cup (X - \tau_1^{-2}(X))}$$

que aunado al hecho de que $\tau_1^{-2}(X) - X$ y $X - \tau_1^{-2}(X)$ son conjuntos ajenos, nos permite concluir que :

$$\begin{aligned} \int_A |\tilde{\tau}_1^{-2}(\phi) - \phi|^2 &= \int \chi_{(\tau_1^{-2}(X) - X) \cup (X - \tau_1^{-2}(X))} d\mu = \\ &= \mu((\tau_1^{-2}(X) - X) \cup (X - \tau_1^{-2}(X))) \\ &= \mu(\tau_1^{-2}(X) - X) + \mu(X - \tau_1^{-2}(X)) \end{aligned}$$

Demostramos que la función ϕ cumple las hipótesis del lema 4, de tal manera que si lo suponemos cierto obtenemos :

$$8do \int_A |\phi|^2 \leq \sum_{i=1}^2 \int_A |\tilde{\tau}_1^{-2}(\phi) - \phi|^2 = \sum_{i=1}^2 (\mu(\tau_1^{-2}(X) - X) + \mu(X - \tau_1^{-2}(X)))$$

$$\text{AFIRMACION : } \mu(\tau_1^{-2}(X) - X) = \mu(X - \tau_1^{-2}(X))$$

DEMOSTRACION : Como τ_1 y τ_1^{-1} preservan la medida

$$\begin{aligned} \mu(X - \tau_1^{-2}(X)) &= \mu(X) - \mu(X \cap \tau_1^{-2}(X)) = \mu(\tau_1^{-2}(X)) - \mu(X \cap \tau_1^{-2}(X)) \\ &= \mu(\tau_1^{-2}(X) - X) = \mu(X - \tau_1^{-2}(X)) \end{aligned}$$

Además en ... (2) se probó que $\int_A |\phi|^2 = \mu(X^c)\mu(X)$, por lo que obtenemos :

$$\begin{aligned} 8\text{do}\mu(X^c)\mu(X) &= 8\text{do}\int_A |\phi|^2 \leq \sum_{i=1}^2 \int_A |\tau_i^2(\phi) - \phi|^2 = 2 \sum_{i=1}^2 \mu(\tau_i^2(X) - X) = \\ &= 2 \sum_{i=1}^2 \mu(X - \tau_i^{-2}(X)) \\ &\therefore \sum_{i=1}^2 \mu(X - \tau_i^{-2}(X)) \geq 4 \text{do}\mu(X^c)\mu(X) \blacksquare \end{aligned}$$

Para poder continuar con la prueba del lema 4, es preciso recordar algunos conceptos y resultados que se requerirán. Cabe señalar, que no se incluyen demostraciones, ni se profundiza demasiado para no desviarnos del tema que nos atañe.

Dado un espacio vectorial H sobre un cierto campo K , en particular \mathbb{C} un producto interior es una función de $H \times H$ en K tal que para toda x, y, z en H y toda λ, β en \mathbb{C} se tiene que :

$$(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$$

- a) $(x+z, y) = (x, y) + (z, y)$
- b) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$

- c) $\overline{(x, y)} = (y, x)$, donde la barra indica conjugación compleja
- d) $(x, x) > 0$ si $x \neq 0$

Se dice que este producto interior sobre los complejos, es *lineal en la primera coordenada* si $(\lambda x + \beta y, z) = \lambda(x, z) + \beta(y, z)$ y es *lineal*

conjugado en la segunda si $(z, \lambda x + \beta y) = \bar{\lambda}(z, x) + \bar{\beta}(z, y)$.

Si H es un espacio con producto interior, definimos la norma (o longitud) de x mediante $\|x\| = \{(x, x)\}^{1/2}$

Pensemos ahora en el conjunto $\mathcal{L}^2(A)$, formado por las clases de equivalencia inducidas por la siguiente relación: si f y g son funciones medibles sobre el toro (al que le habíamos llamado A), $f \sim g$ si $f(x) = g(x)$ para casi toda $x \in A$, excepto quizá en un conjunto de medida cero. Los elementos de $\mathcal{L}^2(A)$ deben ser de norma finita, por lo que es preciso definir un producto interior en este espacio de la siguiente manera:

$$(f, g) = \int_A f \bar{g} \, d\mu, \text{ de donde } \|f\| = (f, f) = \left(\int_A |f|^2 \right)^{1/2}$$

Una base para este conjunto, está integrada por elementos de la forma

$$\chi_{m,n}(p) = e^{-2\pi i(m x + n y)} \text{ donde } p = (x, y)$$

es decir, la familia $\{\chi_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ tiene las siguientes propiedades

$$i) (\chi_{m,n}, \chi_{m',n'}) = \begin{cases} 1 & \text{si } (m,n) = (m',n') \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$ii) \text{ Para toda } f \in \mathcal{L}^2(A), f = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} (f, \chi_{m,n}) \chi_{m,n}$$

$$iii) \|f\|^2 = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |(f, \chi_{m,n})|^2 \quad \text{Ver [Ru]}$$

La demostración del lema 4 requiere de la suposición del lema 5, por lo que se enunciarán los dos y una vez concluido esto, se probará el lema 5.

LEMA 4 : Para toda función medible ϕ en Λ , que cumple :

$$i) \int_{\Lambda} \phi = 0 \quad \text{y} \quad ii) \int_{\Lambda} |\phi|^2 < \infty \quad \text{se tiene que}$$

$$\sum_{l=1}^2 \int_{\Lambda} |\bar{\tau}_l^2(\phi) - \phi|^2 \geq 8 \text{do} \int_{\Lambda} |\phi|^2$$

LEMA 5 : Sea $\{a_{m,n}\}$ un sistema de números complejos tales que

$$i) a_{0,0} = 0 \quad \text{y} \quad ii) \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |a_{m,n}|^2 < \infty \quad \text{entonces}$$

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |a_{m,n+2m} - a_{m,n}|^2 + \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |a_{m+2n,n} - a_{m,n}|^2 \geq 8 \text{do} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |a_{m,n}|^2$$

DEMOSTRACION DEL LEMA 4 : Por las hipótesis que se piden, podemos asegurar que $\phi \in \mathcal{L}^2(\Lambda)$, por lo que puede ser expresada como :

$$\phi = \sum_{m,n} (\phi, \chi_{m,n}) \chi_{m,n} = \sum_{m,n} a_{m,n}(\phi) \chi_{m,n}$$

$$\text{donde } a_{m,n}(\phi) = (\phi, \chi_{m,n}) = \int_{\Lambda} \phi \overline{\chi_{m,n}} \, d\mu$$

Veremos ahora que se cumplen las hipótesis del lema 5 :

$$i) a_{0,0}(\phi) = (\phi, \chi_{0,0}) = \int_{\Lambda} \phi \overline{\chi_{0,0}} \, d\mu = \int_{\Lambda} \phi \, d\mu = 0$$

$$(\text{ya que } \chi_{0,0} = e^0 = 1)$$

$$ii) \sum_{m,n} |a_{m,n}|^2 = \sum_{m,n} |(\phi, a_{m,n})|^2 = \|\phi\|^2 = \int_{\Lambda} |\phi|^2 \, d\mu < \infty$$

Habíamos definido $\tilde{\tau}_1^2(\phi) = \phi(\tau_1^{-2})$, calculamos $a_{m,n}(\tilde{\tau}_1^2(\phi))$

$$a_{m,n}(\tilde{\tau}_1^2(\phi)) = \int_A \overline{\tilde{\tau}_1^2(\phi)} \chi_{m,n} d\mu = \int_A \overline{\phi(\tau_1^{-2}(p))} \chi_{m,n}(p) d\mu(p)$$

pero como τ_1^{-2} preserva la medida (su jacobiano es 1), lo anterior

$$= \int_A \overline{\phi(p)} \chi_{m,n}(\tau_1^2(p)) d\mu(p) \dots (1)$$

como $\tau_1(x,y) = (x, x+y)$, $\tau_1^2(x,y) = (x, 2x+y)$ y $\chi_{m,n}(x,y) = e^{-2\pi i(mx+ny)}$

si $p=(x,y)$ se tiene :

$$\begin{aligned} \chi_{m,n}(\tau_1^2(x,y)) &= e^{-2\pi i(mx+n(2x+y))} = e^{-2\pi i((m+2n)x+ny)} = \\ &= \chi_{m+2n,n}(x,y) \end{aligned}$$

$$\dots (1) = \int_A \overline{\phi(p)} \chi_{m+2n,n}(p) d\mu(p) = a_{m+2n,n}(\phi)$$

$$\therefore a_{m,n}(\tilde{\tau}_1^2(\phi)) = a_{m+2n,n}(\phi) \dots (2)$$

Usando $\tilde{\tau}_2^2$ de manera análoga a la anterior, se puede concluir que

$$a_{m,n}(\tilde{\tau}_2^2(\phi)) = a_{m,n+2m}(\phi) \dots (3)$$

Por el lema 5 sabemos que :

$$\sum_{m,n} |a_{m,n+2m} - a_{m,n}|^2 + \sum_{m,n} |a_{m+2n,n} - a_{m,n}|^2 \geq 8 \text{do} \sum_{m,n} |a_{m,n}|^2$$

Aplicando ... (2) y ... (3), sabemos que lo anterior es equivalente a :

$$\begin{aligned} &\sum_{m,n} |a_{m,n}(\tilde{\tau}_1^2(\phi)) - a_{m,n}(\phi)|^2 + \sum_{m,n} |a_{m,n}(\tilde{\tau}_2^2(\phi)) - a_{m,n}(\phi)|^2 \geq \\ &\geq 8 \text{do} \sum_{m,n} |a_{m,n}(\phi)|^2 \end{aligned}$$

$$\text{y como } a_{m,n}(\psi + \lambda) = \int_A (\psi + \lambda) \overline{\chi_{m,n}} d\mu = \int_A \psi \overline{\chi_{m,n}} d\mu + \int_A \lambda \overline{\chi_{m,n}} d\mu$$

$$= a_{m,n}(\phi) + a_{m,n}(\lambda)$$

también resulta equivalente a :

$$\sum_{m,n} |a_{m,n}(\bar{\tau}^2(\phi) - \phi)|^2 + \sum_{m,n} |a_{m,n}(\bar{\tau}_1^2(\phi) - \phi)|^2 \geq 8 \text{do} \sum_{m,n} |a_{m,n}(\phi)|^2$$

$$\text{recordando que } \int_{\Lambda} |f|^2 = \|f\|^2 = \sum_{m,n} |(f, \chi_{m,n})|^2 = \sum_{m,n} |a_{m,n}(f)|^2$$

se deduce precisamente el lema 4 :

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Lambda} |\bar{\tau}_i^2(\phi) - \phi|^2 = \int_{\Lambda} |\bar{\tau}_2^2(\phi) - \phi|^2 + \int_{\Lambda} |\bar{\tau}_1^2(\phi) - \phi|^2 \geq 8 \text{do} \int_{\Lambda} |\phi|^2 \blacksquare$$

Para finalizar la demostración de este teorema, sólo resta probar el lema 5, que se presenta enseguida :

DEMOSTRACION DEL LEMA 5 : Definamos los conjuntos :

$$S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{(0,0)\} \text{ y para todo } T \subseteq S \quad \ell_2(T) = \{f: T \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{x \in T} |f(x)|^2 < \infty\}$$

$$\text{donde } \|f\|_T = \left(\sum_{x \in T} |f(x)|^2 \right)^{1/2}$$

y las siguientes funciones :

$$w_1 : S \rightarrow S$$

$$w_2 : S \rightarrow S$$

$$w_1(m,n) = (m, n+2m)$$

$$w_2(m,n) = (m+2n, n)$$

Veremos que demostrar el lema 5 es equivalente a probar que :

Para toda $f \in \ell_2(S)$ se tiene que

$$\|f - f \circ w_2\|_S^2 + \|f - f \circ w_1\|_S^2 \geq (4 - 2\sqrt{3}) \|f\|_S^2 \quad \dots (1)$$

Definiendo $f : S \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(m,n) = a_{m,n} \quad (\text{recuérdese que } a_{0,0} = 0)$$

se tiene que : i) $f(m,n) = a_{m,n}$

$$ii) f_{ow1}(m,n) = f(m,n+2m) = a_{m,n+2m}$$

$$iii) f_{ow2}(m,n) = f(m+2n,n) = a_{m+2n,n}$$

de donde

$$\|f(m,n) - f_{ow1}(m,n)\|_S^2 = \sum_{(m,n) \in S} |f(m,n) - f_{ow1}(m,n)|^2 = \sum_{(m,n) \in S} |a_{m,n} - a_{m,n+2m}|^2$$

$$\|f(m,n) - f_{ow2}(m,n)\|_S^2 = \sum_{(m,n) \in S} |f(m,n) - f_{ow2}(m,n)|^2 = \sum_{(m,n) \in S} |a_{m+2n,n} - a_{m,n}|^2$$

$$\|f(m,n)\|_S^2 = \sum_{(m,n) \in S} |a_{m,n}|^2 \quad \text{y} \quad 8do = (4 - 2\sqrt{3})$$

con lo que se prueba la equivalencia propuesta, que se demostrará a continuación :

Definamos $S_m = \{ (a,b) \in S : \text{mcd}(a,b) = m \}$ con $\text{mcd}(0,a) = |a|$

y observemos que constituye una partición de S . Además cada S_m es invariante ante w_1 y sus inversas (por propiedades del máximo común divisor) :

$$w_1(S_m) = w_1^{-1}(S_m) = w_2(S_m) = w_2^{-1}(S_m) = S_m$$

Dado que $S_1 \subset S$, tiene sentido hablar de $\ell_2(S_1)$

AFIRMACION : Para la demostración de ... (1) basta probar que para toda $f \in \ell_2(S_1)$ real, se tiene que :

$$\|f - f_{ow1}\|_{S_1}^2 + \|f - f_{ow2}\|_{S_1}^2 \geq (4 - 2\sqrt{3}) \|f\|_{S_1}^2 \quad \dots (2)$$

DEMOSTRACION : Supongamos ... (2) y probemos ... (1).

Para cualquier subconjunto T de S y $f \in \ell_2(T)$, se tiene que

$$f = f_1 + if_2 \quad \text{con } f_1 \text{ y } f_2 \text{ funciones reales}$$

$$|f(p)|^2 = f_1^2(p) + f_2^2(p) \text{ por lo que}$$

$$\sum_{p \in T} |f(p)|^2 = \sum_{p \in T} f_1^2(p) + \sum_{p \in T} f_2^2(p)$$

esto, aunado a que $\{S_n\}_{n \geq 1}$ constituye una partici3n de S , tenemos que, partiendo de ... (1) :

$$\begin{aligned} \|f - f_{\omega 2}\|_S^2 + \|f - f_{\omega 1}\|_S^2 &\geq \|f - f_{\omega 1}\|_S^2 = \\ &= \sum_{n \geq 1} \|f - f_{\omega 1}\|_{S_n}^2 = \sum_{n \geq 1} \|\operatorname{Re}(f) - \operatorname{Re}(f_{\omega 1})\|_{S_n}^2 + \\ &+ \sum_{n \geq 1} \|\operatorname{Im}(f) - \operatorname{Im}(f_{\omega 1})\|_{S_n}^2 \end{aligned}$$

Por otro lado, $(a, b) \in S_n$ si y solo si $(a/m, b/m) \in S_1$, de tal manera que si $g : S_n \rightarrow \mathbb{C}$ y $g_n : S_1 \rightarrow \mathbb{C}$, $g_n(x, y) = g(mx, my)$ y

$$\begin{aligned} \|g_n\|_{S_1}^2 &= \|g\|_{S_n}^2, \text{ de donde :} \\ \sum_{n \geq 1} \|\operatorname{Re}(f) - \operatorname{Re}(f_{\omega 1})\|_{S_n}^2 + \sum_{n \geq 1} \|\operatorname{Im}(f) - \operatorname{Im}(f_{\omega 1})\|_{S_n}^2 \\ &= \sum_{n \geq 1} \|\operatorname{Re}(f_n) - \operatorname{Re}(f_{\omega 1})\|_{S_1}^2 + \sum_{n \geq 1} \|\operatorname{Im}(f_n) - \operatorname{Im}(f_{\omega 1})\|_{S_1}^2 \end{aligned}$$

ademi3s de que todas las funciones son reales, estamos en S_1 , de tal manera que podemos aplicar el resultado de ... (2), obteniendo :

$$\begin{aligned} &= \sum_{n \geq 1} \|\operatorname{Re}(f_n) - \operatorname{Re}(f_{\omega 1})\|_{S_1}^2 + \sum_{n \geq 1} \|\operatorname{Im}(f_n) - \operatorname{Im}(f_{\omega 1})\|_{S_1}^2 \geq \\ &\geq (4 - 2\sqrt{3}) \left(\sum_{n \geq 1} \|\operatorname{Re}(f_n)\|_{S_1}^2 + \sum_{n \geq 1} \|\operatorname{Im}(f_n)\|_{S_1}^2 \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (4 - 2\sqrt{3}) \left(\sum_{n \geq 1} \| \operatorname{Re}(f) \|_{S_n}^2 + \sum_{n \geq 1} \| \operatorname{Im}(f) \|_{S_n}^2 \right) \\
&= (4 - 2\sqrt{3}) \sum_{n \geq 1} \| f \|_{S_n}^2 = (4 - 2\sqrt{3}) \| f \|_{S_1}^2
\end{aligned}$$

con lo que queda demostrado ... (1), pero falta probar ... (2) :

$$\| f - f_{w_1} \|_{S_1}^2 + \| f - f_{w_2} \|_{S_1}^2 \geq (4 - 2\sqrt{3}) \| f \|_{S_1}^2 \quad \dots (2)$$

$$\begin{aligned}
&\| f - f_{w_1} \|_{S_1}^2 + \| f - f_{w_2} \|_{S_1}^2 = (f - f_{w_1}, f - f_{w_1}) + (f - f_{w_2}, f - f_{w_2}) \\
&= (f, f) - (f_{w_1}, f) - (f, f_{w_1}) + (f_{w_1}, f_{w_1}) + \\
&\quad + (f, f) - (f_{w_2}, f) - (f, f_{w_2}) + (f_{w_2}, f_{w_2})
\end{aligned}$$

pero como todas son funciones reales :

$$\begin{aligned}
&= 2(f, f) - 2(f, f_{w_1}) - 2(f, f_{w_2}) + (f_{w_1}, f_{w_1}) + (f_{w_2}, f_{w_2}) \\
&= 2 \| f \|_{S_1}^2 - 2(f, f_{w_1}) - 2(f, f_{w_2}) + \| f_{w_1} \|_{S_1}^2 + \| f_{w_2} \|_{S_1}^2
\end{aligned}$$

$$\text{por otro lado: } \| f_{w_1} \|_{S_1}^2 = \sum_{p \in S_1} \{f(w_1(p))\}^2 = \sum_{p \in S_1} \{f(p)\}^2 = \| f \|_{S_1}^2$$

ya que w_i ($i = 1, 2$) son funciones biyectivas, de donde lo anterior

$$= 4 \| f \|_{S_1}^2 - 2(f, f_{w_1}) - 2(f, f_{w_2})$$

Por consiguiente lo que hay que demostrar es que :

$$4 \| f \|_{S_1}^2 - 2(f, f_{w_1}) - 2(f, f_{w_2}) \geq (4 - 2\sqrt{3}) \| f \|_{S_1}^2$$

ó lo que es equivalente :

$$2\sqrt{3} \| f \|_{S_1}^2 \geq 2(f, f_{w_1}) + 2(f, f_{w_2})$$

Sea $x = (m, n) \in S_1$, sobre el que definimos la siguiente norma :

$\|x\| = \max(|m|, |n|)$ y pensemos en el conjunto $\Sigma = \{w_1, w_2, w_1^{-1}, w_2^{-1}\}$,
 (llamaremos por σ a los elementos de Σ).

AFIRMACION: a) Si $\|x\| = 1$, entonces $\|\sigma(x)\| = \|x\|$ para dos
 $\sigma \in \Sigma$ y $\|\sigma(x)\| > \|x\|$ para los otros dos elementos del conjunto.

b) Si $\|x\| > 1$, entonces $\|\sigma(x)\| < \|x\|$ para un $\sigma \in \Sigma$ y
 $\|\sigma(x)\| > \|x\|$ para los otros tres.

DEMOSTRACION : Como se realiza por un método exhaustivo, sólo se
 hará para un caso ($\|x\| = 1$), obteniéndose los demás de manera
 análoga :

$$w_1(m, n) = (m, n+2m) \rightarrow \|w_1(x)\| = |2m+n| > \|x\|$$

$w_2(m, n) = (m+2n, n) \rightarrow \|w_2(x)\| = |m+2n| \geq \|x\|$ (con $n = 0$ se
 cumple la igualdad y con $n = 1$, la desigualdad es estricta)

$w_1^{-1}(m, n) = (m, n-2m) \rightarrow \|w_1^{-1}(x)\| = |n-2m| \geq \|x\|$ (con $n = 0$
 la desigualdad es estricta, con $n = 1$ se da la igualdad)

$$w_2^{-1}(m, n) = (m-2n, n) \rightarrow \|w_2^{-1}(x)\| = |m-2n| = \|x\| \blacksquare$$

AFIRMACION : Para cada $x \in S_1$, $\sum_{\sigma \in \Sigma} \lambda(x, \sigma(x)) \leq 2\sqrt{3}$, donde

$$\lambda(x, y) = \begin{cases} 1/\sqrt{3} & \text{si } \|x\| < \|y\|, \\ 1 & \text{si } \|x\| = \|y\|, \\ \sqrt{3} & \text{si } \|x\| < \|y\|. \end{cases}$$

Nótese que $1/\lambda(x,y) = \lambda(y,x)$ para toda $x,y \in S_1$

DEMOSTRACION :

Si $\|k\| = 1$, entonces : $\sum_{\sigma \in \Sigma} \lambda(x, \sigma(x)) = 1 + 1 + 1/\sqrt{3} + 1/\sqrt{3} < 2/\sqrt{3}$

Si $\|k\| > 1$, entonces : $\sum_{\sigma \in \Sigma} \lambda(x, \sigma(x)) = 3(1/\sqrt{3}) + \sqrt{3} = 2/\sqrt{3}$

Recordemos que lo que faltaba por probar era :

$$2/\sqrt{3} \|f\|_{S_1}^2 \geq 2(f, f_{w_1}) + 2(f, f_{w_2})$$

Es fácil ver que para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $c > 0$ se cumple que :

$$2ab \leq c a^2 + b^2/c, \text{ por lo que si hacemos } a = f(x), b = f(\sigma(x)) \text{ y}$$

$c = \lambda(x, \sigma(x))$, entonces :

$$\begin{aligned} 2f(x)f(\sigma(x)) &\leq \lambda(x, \sigma(x))f^2(x) + f^2(\sigma(x))/\lambda(x, \sigma(x)) \\ &= \lambda(x, \sigma(x))f^2(x) + \lambda(\sigma(x), x)f^2(\sigma(x)) \\ &= \lambda(x, \sigma(x))f^2(x) + \lambda(\sigma(x), \sigma^{-1}(\sigma(x)))f^2(\sigma(x)) \end{aligned}$$

de donde :

$$\begin{aligned} \sum_{x \in S_1} \sum_{\sigma \in \{w_1, w_2\}} 2f(x)f(\sigma(x)) &\leq \sum_{x \in S_1} \sum_{\sigma \in \{w_1, w_2\}} \lambda(x, \sigma(x))f^2(x) + \\ &+ \sum_{x \in S_1} \sum_{\sigma \in \{w_1, w_2\}} \lambda(\sigma(x), \sigma^{-1}(\sigma(x)))f^2(\sigma(x)) \end{aligned}$$

pensando $\sigma(x)$ como $y \in S_1$ y $\sigma^{-1}(\sigma(x))$ como $\sigma^{-1}(y)$ tenemos que lo anterior es igual a :

$$\begin{aligned} &= \sum_{x \in S_1} \sum_{\sigma \in \Sigma} \lambda(x, \sigma(x))f^2(x) = \sum_{x \in S_1} f^2(x) \sum_{\sigma \in \Sigma} \lambda(x, \sigma(x)) \leq \sum_{x \in S_1} f^2(x) 2/\sqrt{3} = \\ &= 2/\sqrt{3} \sum_{x \in S_1} f^2(x) = 2/\sqrt{3} \|f\|_{S_1}^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{x \in S_1} \sum_{\sigma \in \{w_1, w_2\}} 2f(x)f(\sigma(x)) \leq 2/\sqrt{3} \|f\|_{S_1}^2$$

$$\text{pero } \sum_{x \in S_1} \sum_{\sigma \in \{w_1, w_2\}} 2f(x)f(\sigma(x)) = 2 \sum_{x \in S_1} f(x)f(w_1(x)) + 2 \sum_{x \in S_1} f(x)f(w_2(x))$$

$$= 2(f, f \circ w_1) + 2(f, f \circ w_2) \text{ por lo que}$$

$$2\sqrt{3} \|f\|_{S_1}^2 \geq 2(f, f \circ w_1) + 2(f, f \circ w_2) \blacksquare$$

Con esto queda completamente terminada la demostración del teorema de Gabber y Galil, que nos permite la construcción de una familia infinita de expansores, con coeficiente de expansión constante, e igual a $(2-\sqrt{3})/4 \approx 0.067$, que desgraciadamente es muy pequeño. Pero también ellos exhibieron otra familia de este tipo de gráficas $G'_{n,7}$, construidas sobre los mismos vértices de $G_{n,5}$ (los expansores del teorema demostrado), pero con las aristas dadas por siete permutaciones :

$$\begin{array}{ll} \sigma_0'(x,y) = (x,y) & \sigma_4'(x,y) = (x+2y,y) \\ \sigma_1'(x,y) = (x,y+2x) & \sigma_5'(x,y) = (x+2y+1,y) \\ \sigma_2'(x,y) = (x,y+2x+1) & \sigma_6'(x,y) = (x+2y+2,y) \\ \sigma_3'(x,y) = (x,y+2x+2) & \end{array}$$

Estas gráficas resultan ser $(n=m^2, 7, (2-\sqrt{3})/2)$ -expansores. Cabe señalar que este coeficiente es mayor al obtenido para la familia anterior (aproximadamente 0.134), aunque desgraciadamente sigue siendo pequeño. Dicho aumento era de esperarse, pues el número de aristas de $G'_{n,7}$ es mayor al conjunto correspondiente de $G_{n,5}$.

BIBLIOGRAFIA

1. (Ba) Bartle R. G., *The Elements of Integration*, John Wiley and Sons, New York, 1966.
2. (Be) Benés V. E., *Mathematical Theory of Connecting Networks and Telephone Traffic*, Academic Press, New York, 1965.
3. (Bi) Bien F, *Constructions of Telephone Networks by Group Representation*, Notices of the American Mathematical Society, Vol 36, Number 1, January 1989.
4. (B) Bollobás B, *Graph Theory an Introduction Course*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 63, Springer Verlag, Berlin, New York, 1979.
5. (Bo) Bollobás B, *Random Graphs*, Academic Press, London, 1985.
6. (BM) Bondy J., Murty U., *Graphs Theory with Applications*, MacMillan, London, 1976.
7. (Cu) Curco M. C., *Una Introducción a la Teoría de las Gráficas*, Tesis, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 1989.
8. (Cv) Cvetkovic D. M., Doob M., Sachs H., *Spectra of Graphs, Theory and Applications*, Academic Press, New York, 1980.
9. (GG) Gabber O., Galil Z., *Explicit Constructions of Linear Sized Superconcentrators*, Journal of Computer and System Sciences, Vol. 22, 407-420, 1981.
10. (G) Gross J.C., Tucker T.W., *Topological Graph Theory*, Willey Interscience in Discrete (Graph Theory) Mathematics and Optimization.

11. (Ha) Harary F., *Graph Theory*, Addison-Wesley, USA, 1972.
12. (HF) Harary F., Schwenk A., *Which Graphs Have Integral Spectra?* Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, Germany, 1974
13. (Ma) Margulis G. A., *Explicit Constructions of Constrators*, Plenum Publishing Corporation, New York, 1975.
14. (Ru) Rudin W., *Real and Complex Analysis*, Tata McGraw Hill, New York, 1977.
- 15 (Va) Valiant L., *Graphs Theoretic Properties in Computational Complexity*, Journal of Computer and System Sciences, Vol 13, 278-285, 1976.