21
2 eg

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ANALISIS DE FLUJOS PARA LA AMORTIZACION DE PRESTAMOS BAJO DIFERENTES PATRONES DE REDENCION

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

HILDA DELIA HUERTA DELGADILLO

MEXICO, D. F.

1990

INDICE

INTRODUCCION

Dentro de mi ámbito laboral me enfrenté con un patrón de redención diferente al que aparece en la bibliografía tradicional y que no fue tratado en los estudios de mi carrera universitaria; sin embargo, es el patrón de redención de uso generalizado y su importancia me llevó a la generación del presente trabajo ante la expectativa de hacer una divulgación formal que facilite a otros estudiantes su mejor comprensión.

La idea central de este patrón de redención es la amortización del capital en una forma mas flexible; ya que bajo el patrón de redención tradicional (PRESTAMO HIPOTECARIO), la secuencia de pagos muestra cantidades crecientes de capital, amortizándose en los últimos periodos una gran parte del préstamo. En épocas inflacionarias, la pérdida del poder adquisitivo de la moneda tiene un efecto enorme en el prestatario, quien a fin de cubrirse de las fluctuaciones en materia económica, realiza sus préstamos con tasas de interés variable, dependiendo esta variación de algún factor que refleje el comportamiento económico (por ejemplo el CPP), o algun intrumento de inversión típico (CETES).

La impredicibilidad del comportamiento futuro de semejantes tasas de interés, hace prácticamente imposible la determinación de las rentas de amortización bajo el patrón de redención tradicional, lo que condujo a la creación de un método al que se ha denominado patrón de redención refaccionario o "PRESTAMO REFACCIONARIO", ya que originalmente fue concebido para la adquisición de "refacciones" en la industria, de forma tal que se incentivara la producción.

Este trabajo está estructurado en cuatro capitulos: en el primero se desarrollan y definen los conceptos básicos de la teoria del interés; en el segundo, se describen y analizan las tablas de amortización bajo diferentes patrones de redención; en el siguiente capitulo se desarrolla el concepto de tasa global y sus implicaciones en el patrón de redención base de este trabajo, así como el significado de periodo de gracia en sus distintas modalidades; en el cuarto y último capitulo se presentan ejemplos prácticos e ilustrativos de la teoría expuesta en los capítulos anteriores. Posteriormente, se presenta la conclusión y los comentarios a que da lugar el presente trabajo y, finalmente, se presentan dos anexos: el primero es una herramienta para el cálculo de la tasa de interés o del período de redención de una deuda, el cual se denomina ALGORITHO DE BISECCION; el segundo es la demostración de una fórmula general para las anualidades a través de diferencias finitas, de la cual se deducen las fórmulas tradicionales para las anualidades con un comportamiento específico (ordinarias, variables en forma de progresión aritmética y geométrica).

No podría concluir esta Introducción sin expresar mi profundo agradecimiento al Act. Fernando Alonso Pérez Tejada López por su apoyo y confianza en la elaboración de este trabajo.

CAPITULO 1. LA TEORIA DEL INTERES, SU MEDIDA Y ECUACION DE VALOR.

Cuando una persona tiene disponible una cierta cantidad de dinero, se encuentra ante dos alternativas: adquirir un bien que le ofrezca algún beneficio o satisfactor, o prestar el dinero a cambio de un beneficio. Cuando el beneficio supera a la pérdida del poder adquisitivo del dinero, se logra incrementar el capital invertido (una buena inversión), en caso contrario, se decrementa (una mala inversión).

Supóngase que se tienen disponibles K unidades monetarias (U.M.) con las cuales se podría adquirir un microcomputador que generaría beneficios por el ingreso obtenido de los trabajos concluidos. Así, se podría pensar en prestar las K U.M. si al final del periodo convenido para saldarlas, se recuperara además, el ingreso que se obtendría por los trabajos concluidos si se hubiese comprado el microcomputador.

En lo sucesivo denominaremos por PRINCIPAL, a la cantidad de dinero invertida inicialmente; PERIODO DE INVERSION, al tiempo durante el cual el principal permanece invertido; VALOR ACUMULADO, a la cantidad total recibida después del periodo de inversión e INTERES, a la diferencia entre el principal y el valor acumulado.

FUNCION DE ACUMULACION Y FUNCION MONTO.

Independientemente de la forma en que "crezca" un principal, es de importancia saber cuánto se incrementa al cabo de t tiempo.

Comenzando con el caso más sencillo, considérese un principal de 1 U.M., el cual no es aumentado ni disminuido durante el periodo de inversión. La función que mide el "crecimiento" de 1 U.M. al cabo del tiempo t se le denomina FUNCION DE ACUMULACION a(t); es decir, a(t) es el valor acumulado al tiempo t de 1 U.M.

Esta función cumple con las siguientes propiedades:

i) El valor acumulado al inicio del periodo de inversión es el principal, debido a que no ha sido afectado por ningún interés

$$a(0)=1$$

ii) La función de acumulación es una función no decreciente. Una función decreciente implicaría un interés negativo.

$$a(t)\geq a(t-1) \qquad t\geq 1$$

iii) a(t) es continua porque representa el comportamiento a través del tiempo, de una unidad monetaria. Este comportamiento debe estar definido para cualquier momento de la inversión.

Ahora bien, si se tienen K U.M. en donde el valor acumulado de cada unidad monetaria es a(t), el "crecimiento" de las K U.M. al tiempo t será Ka(t). La función que define el valor acumulado de K U.M. al tiempo t se le denomina FUNCION MONTO A(t). Esto es:

$$A(t) = K\, a(t)$$

La función monto hereda las siguientes propiedades de la función de acumulación:

i) El valor de la función monto al inicio del periodo de inversión es el principal.

ii) A(t) es no decreciente.

iii) A(t) es continua.

Si se recuerda que el interés ha sido definido como la diferencia entre el principal y el valor acumulado, y que A(t) es continua, se puede conocer el interés en cualquier periodo de tiempo de la siguiente manera:

$$I_n = A(n) - A(n-1)$$

donde I_n denota la cantidad de interés ganada durante el n-ésimo periodo.

VALOR PRESENTE.

Se sabe que 1 U.M. al cabo del tiempo t tiene un valor acumulado a(t); sin embargo, es de importancia definir una función que indique cuánto se debe invertir al inicio del periodo de inversión, de tal manera que al final del tiempo t se tenga 1 U.M.

Esto es, se define una función tal que :

$$a(t)\,\Phi(t) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \Phi(t)=\frac{1}{a(t)} = a^{-1}(t)$$

A la función $\Phi(t)$ se le denomina VALOR PRESENTE y cumple con las siguientes propiedades:

i) $\Phi(0) = 1$

ii) $\Phi(t)$ es continua porque a(t) lo es.

iii) $\Phi(t)$ es no creciente porque a(t) es no decreciente.

INTERES SIMPLE E INTERES COMPUESTO.

Hasta este momento se sabe cuánto ha "crecido" un principal sin saber cómo; aún más, cualquier expresión algebraica que cumpla con las propiedades de a(t) representará una forma de "crecimiento" del principal.

Por tal motivo, es conveniente desarrollar fórmulas de equivalencia con las cuales se pueda determinar qué fuente de financiamiento ofrece mejores beneficios.

Bajo el patrón de interés simple, el interés que se gana en cada periodo no es reinvertido para generar intereses adicionales.

Si consideramos un principal de una unidad monetaria y un interés i constante, al final del primer periodo se tendrá:

$$a(1) = 1 + i$$

al final del segundo

$$a(2) = 1 + 2i$$

$$\vdots$$

al final de t-ésimo periodo

$$a(t) = 1 + ti$$

A diferencia del interés simple, la teoría del interés compuesto asume que el interés ganado es automáticamente reinvertido para generar intereses adicionales.

Si se considera un principal de una unidad monetaria y un interés i constante, al final del primer periodo se tendrá:

$$a(1) = 1 + i$$

al final del segundo

$$a(2) = (1 + i)^2$$

$$\vdots$$

al final del t-ésimo periodo

$$a(t) = (1 + i)^t$$

Tanto para el interés simple como para el interés compuesto,

$$a(1) = 1 + i$$

En particular se define

$$V = \frac{1}{a(1)} = \Phi(1)$$

que representa la cantidad que se debe invertir al inicio del primer periodo para que al final se tenga 1 U.M.

TASA EFECTIVA DE INTERES.

Al interés que gana el principal de una unidad monetaria, pagadero al final de un periodo se le denomina TASA EFECTIVA DE INTERES.

Sabemos que

$$i = a(1) - a(0)$$

$\Rightarrow$

$$a(1) = 1 + i$$

En términos de la función monto, se define a la TASA EFECTIVA DE INTERES como la razón del interés devengado en relación al capital invertido. Esto es:

$$i = \frac{A(1) - A(0)}{A(0)}$$

$\Rightarrow$

$$i = \frac{I_1}{A(0)}$$

Generalizando para cualquier periodo de inversión:

$$i_n = \frac{I_n}{A(n-1)}$$

Esto es, que la tasa efectiva de interés durante el periodo n es los intereses devengados al final del n-ésimo periodo entre el principal del n-1 periodo.

Para el caso de interés simple se tiene que la tasa efectiva de interés toma la siguiente forma:

$$i_n = \frac{(1+in) - (1+i(n-1))}{(1+i(n-1))}$$

$\Rightarrow$

$$i_n = \frac{i}{(1+i(n-1))} = \frac{i}{a(n-1)}$$

Nótese que i_n es una función decreciente con respecto al tiempo debido a que la cantidad de interés ganada de un periodo a otro es la misma y $a(n)$ es una función no decreciente.

Para el patrón de interés compuesto, se tiene que:

$$i_n = \frac{(1+i)^n - (1+i)^{n-1}}{(1+i)^{n-1}}$$

$\Rightarrow$

$$i_n = i$$

Esto indica que la tasa efectiva de interés es constante en todos los periodos debido a que la cantidad de intereses que se gana de un periodo a otro crece de tal manera que "compensa" el crecimiento de a(n).

TASA NOMINAL DE INTERES ($i^{(m)}$).

Si se conviene en denotar por $i^{(m)}$ a la tasa de interés anual involucrada en una operación de inversión, donde los intereses son pagados en periodos menores de un año para ser reinvertidos, de forma tal que cada m-ésimo de año se devengue un m-ésimo del total anual de interés, la tasa de interés involucrada en esta operación se le denomina TASA NOMINAL DE INTERES.

Una tasa nominal de $i^{(m)}$ por año equivale a una tasa efectiva de $\frac{i^{(m)}}{m}$ por m-ésimo de año porque cada m-ésimo se pagará una parte del interés anual.

El desarrollo para la tasa nominal de interés $i^{(m)}$, es similar al de i:

$$a(\frac{1}{m}) = 1 + \frac{i^{(m)}}{m}$$

$$a(\frac{2}{m}) = (1 + \frac{i^{(m)}}{m})^2$$

$$\vdots$$

$$a(\frac{m}{m}) = (1 + \frac{i^{(m)}}{m})^m$$

Por otro lado, se tiene que:

$$a(1) = 1 + i$$

$\Rightarrow$

$$(1 + i) = (1 + \frac{i^{(m)}}{m})^m$$

DESARROLLO DE $i^{(m)}$.

PERIODO	0	$\frac{1}{m}$	$\frac{2}{m}$	. . .	$\frac{m}{m}$
INTERES DEVENGADO DURANTE EL -- PERIODO		$\frac{i^{(m)}}{m} * 1$	$\frac{i^{(m)}}{m} (1+\frac{i^{(m)}}{m})$	. . .	$\frac{i^{(m)}}{m}(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{m-1}$
MONTO AL -- FINAL DEL - PERIODO	1	$(1+\frac{i^{(m)}}{m})$	$(1+\frac{i^{(m)}}{m})^2$	. . .	$(1+\frac{i^{(m)}}{m})^m$

FUERZA DE INTERES.

Así como con $\frac{i^{(m)}}{m}$ se tiene definida una tasa de interés para periodos menores de un año, es importante poder medir la intensidad con la cual el interés es operado en intervalos infinitesimales de tiempo. Esta medida de interés en momentos individuales de tiempo se le denomina FUERZA DE INTERES.

La intensidad con la cual el interés está operando al tiempo t depende de la pendiente de la curva A(t) al tiempo t, la cual está dada por su derivada; sin embargo, como medida de interés, DA(t) no es satisfactoria ya que depende del monto invertido.

Si se toma $\frac{DA(t)}{A(t}$, se tiene una medida de la intensidad con la que el interés está operando al tiempo t, expresada como una tasa independiente del principal. Esto es:

$$\delta_t = \frac{DA(t)}{A(t)} = \frac{Da(t)}{a(t)}$$

que cumple con las siguientes propiedades:

i) δ_t es una medida de interés exactamente al tiempo t.

ii) δ_t expresa este interés en la forma de una tasa anual.

Así definida, δ_t permite obtener una expresión para el valor de A(t) y de a(t):

$$\delta_t = \frac{DA(t)}{A(t)} = D \ln a(t)$$

$$\Rightarrow$$

$$\int_0^n \delta_t \, dt = \int_0^n D \ln A(t) \, dt = \ln \left(\frac{a(n)}{a(0)} \right)$$

$$\Rightarrow$$

$$e^{\int_0^n \delta_t \, dt} = a(n)$$

En teoria, la fuerza de interés debe variar instantáneamente; sin embargo, resulta que en la práctica es una constante. En particular, una tasa de interés efectiva constante equivale a una fuerza de interés.

$$\delta_t = \frac{(1+i)^t \ln(1+i)}{(1+i)^t} = \ln(1+i)$$

$\Rightarrow$

$$e^{\delta} = (1 + i)$$

Por otro lado también se obtuvo la siguiente igualdad:

$$(1 + i) = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$$

Por lo tanto

$$e^{n\delta} = (1 + i)^n = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mn}$$

A esta equivalencia se le denomina TRIPLE IGUALDAD.

TASA EFECTIVA DE DESCUENTO.

Hasta este momento se ha visto el comportamiento del valor acumulado de un principal cuando el interés es pagado al final del periodo; sin embargo no es la única forma de pago del interés. A la medida de interés pagada al inicio de cada periodo de inversión se le denomina TASA EFECTIVA DE DESCUENTO.

La tasa efectiva de descuento se define en base a la función monto de la siguiente manera:

$$d_n = \frac{I_n}{A(n)} \qquad n>0$$

donde d_n denota la cantidad de interés que se paga al inicio del n-ésimo periodo de un principal de $A(n)$ e I_n el interés devengado en el n-ésimo periodo.

Ahora bien, en términos de tasa efectiva de interés, se tiene que, considerando un principal de 1 U.M. al final del primer periodo se tendrá el valor acumulado de 1+i. Si se descuenta al inicio del periodo el total del interés devengado, la cantidad a descontar será iV. A esta cantidad se le denomina TASA EFECTIVA DE DESCUENTO. Esto es:

$$d = iV$$

Entonces, el total de capital recibido al inicio del periodo será:

$$1 - iV = 1 - d = \Phi(1)$$

$\Rightarrow$

$$1 - d = V$$

de donde

$$1-d = (1 + i)^{-1}$$

La tasa de descuento se maneja de dos formas:

i) MATEMATICO: Dada una tasa de interés se calcula la tasa de descuento equivalente.

ii) BANCARIO: La tasa de interés a la cual el banco dice prestar es realmente una tasa de descuento.

EJEMPLO.

Se obtiene un préstamo bancario de 100 U.M. a una tasa de interés del 44%; como la cantidad de interés es descontada al principio del periodo, el banco descuenta 44 U.M.

Si operara el descuento matemático, la cantidad a descontar debería corresponder a 30.55 U.M. ya que:

$$(1.44)^{-1} = 1 - d \quad \rightarrow \quad d = 30.55\%$$

En este caso como la cantidad de interés que se descuenta es 44 U.M., la tasa de interés involucrada es:

$$56\ (\ 1 + i\ ) = 100 \quad \rightarrow \quad i = 79\%$$

Lo cual significa que el descuento aplicado corresponde a una tasa de interés del 79%.

La función de acumulación para la tasa efectiva de descuento, bajo el patrón de interés simple es:

$$\Phi(1) = 1 - d$$

$$\Phi(2) = 1 - 2d$$

$$\vdots$$

$$\Phi(t) = 1 - td$$

Y bajo el patrón de interés compuesto:

$$\Phi(1) = 1 - d$$

$$\Phi(2) = (1 - d)^2$$

$$\vdots$$

$$\Phi(t) = (1 - d)^t$$

TASA NOMINAL DE DESCUENTO $d^{(m)}$.

Dada una tasa efectiva de descuento se puede encontrar la correspondiente tasa nominal de descuento $d^{(m)}$. La interpretación será la cantidad de interés que se cobra al inicio de cada m-ésimo de periodo.

DESARROLLO PARA $d^{(m)}$.

PERIODO	$\frac{1}{m}$	$\frac{2}{m}$	. . .	$\frac{m}{m}$
INTERES -- DEVENGADO PAGADO AL INICIO DEL PERIODO	$\frac{d^{(m)}}{m}(1-\frac{d^{(m)}}{m})^{m-1}$	$\frac{d^{(m)}}{m}(1-\frac{d^{(m)}}{m})^{m-2}$	. . .	$\frac{d^{(m)}}{m} \cdot 1$
PRINCIPAL AL INICIO DEL PERIODO	$(1 - \frac{d^{(m)}}{m})^{m}$	$(1 - \frac{d^{(m)}}{m})^{m-1}$	. . .	$(1 - \frac{d^{(m)}}{m})$

Esto es

$$(1 - d) = (1 - \frac{d^{(m)}}{m})^{m}$$

RELACION ENTRE $i^{(m)}$ Y $d^{(p)}$.

Las siguientes formulas se utilizan para encontrar tasas equivalentes de interés y descuento:

$$(1 - d)^{-1} = 1 + i$$

$\Rightarrow$

$$(1 - \frac{d^{(p)}}{p})^{-p} = (1 + \frac{i^{(m)}}{m})^{m}$$

Si $m = p$ $\Rightarrow$

$$(1 - \frac{d^{(m)}}{m})^{-m} = (1 + \frac{i^{(m)}}{m})^{m}$$

Si $m = 1$ $\Rightarrow$

$$(1 - \frac{d^{(p)}}{p})^{-p} = 1 + i$$

Si $p = 1$ $\Rightarrow$

$$(1 - d)^{-1} = (1 + \frac{i^{(m)}}{m})^{m}$$

FUERZA DE DESCUENTO.

Análogamente a la fuerza de interés, se define la fuerza de descuento a través de la función $a^{-1}(t)$ de la siguiente manera:

$$\delta_t' = -\frac{Da^{-1}(t)}{a^{-1}(t)}$$

Debido a que la fuerza de interés y de descuento operan sobre instantes de tiempo, coinciden. Esto es:

$$\delta_t' = -\frac{Da^{-1}(t)}{a^{-1}(t)} = \frac{a^{-2}(t)\ Da(t)}{a^{-1}(t)} = a^{-1}(t)\ a(t)\ \delta_t$$

por lo tanto

$$\delta_t' = \delta_t$$

EQUIVALENCIAS.

De acuerdo a las expresiones deducidas con anterioridad, se tienen las siguientes equivalencias:

$$(1+\frac{i^{(m)}}{m})^m = 1 + i = V^{-1} = (1 - d\ )^{-1} = (1-\frac{d^{(p)}}{p})^{-p} = e^{\delta}$$

VALOR DE ACUMULACION Y VALOR PRESENTE DE ACUERDO
A LA TASA DE INTERES INVOLUCRADA

TASA DE INTERES O DESCUENTO	VALOR ACUMULADO $a(t)$	VALOR PRESENTE $a^{-1}(t)$
<u>INTERES COMPUESTO</u>		
i	$(1+i)^{t}$	$(1+i)^{-t}$
$i^{(m)}$	$\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mt}$	$\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{-mt}$
d	$(1-d)^{-t}$	$(1-d)^{t}$
$d^{(m)}$	$\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{-nt}$	$\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mt}$
δ	$e^{\delta t}$	$e^{-\delta t}$
<u>INTERES SIMPLE</u>		
i	$(1+it)$	$(1+it)^{-1}$
d	$(1-dt)^{-1}$	$(1-dt)$

INTERES VARIABLE.

En las fórmulas desarrolladas con anterioridad se ha supuesto que la tasa efectiva de interés permanece constante durante el periodo de inversión. Si se considera que la tasa de interés es i_n durante el n-ésimo periodo, se tienen las siguientes expresiones para a(n):

Bajo el patrón de interés simple:

$$a(n) = 1 + i_1 + i_2 + \ldots + i_n$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{n} i_r$$

Bajo el patrón de interés compuesto:

$$a(n) = (1+i_1)(1+i_2)\ldots(1+i_n)$$

$$= \prod_{r=1}^{n} (1+i_r)$$

INFLACION.

Incrementos significativos en el nivel general de precios tanto de los artículos como de los servicios, han originado la necesidad de modificar los procedimientos tradicionales de evaluación de proyectos de inversión, con el objeto de lograr una mejor asignación de capital.

Por ejemplo, supóngase que un campesino desea comprar un tractor. En este momento, dicho tractor cuesta 100 U.M., que para él equivale a 10 vacas. Al cabo de un mes, el mismo tractor cuesta 120 U.M. Si para el campesino esta cantidad equivale a las mismas 10 vacas, el poder de compra no se ha visto afectado porque con las 10 vacas puede comprar los mismos bienes y servicios que en el mes anterior. Si por el contrario, las 120 U.M. equivalen a 11 vacas, el poder de compra ha disminuido porque con 10 vacas no pudo comprar los mismos bienes y servicios que en el mes anterior. La medida que se tiene para la variación en el poder de compra de 1 U.M. se le denomina INFLACION.

Así, si se depositan 100 U.M. en una cuenta de ahorro que paga el 10% anual y el dinero es retirado después de un año, se puede decir que la tasa de rendimiento real es del 10% siempre y cuando con el dinero obtenido se pueda comprar un 10% más de bienes y/o servicios que en el año anterior. Sin embargo, si la inflación ha reducido el poder de compra en un 20%, el rendimiento real resulta ser una pérdida.

Con el fin de tener un parámetro de referencia que indique si una inversión es rentable en ambientes crónicos inflacionarios, donde el poder de compra de la unidad monetaria disminuye, se define la TASA REAL DE INTERES la cual representa el rendimiento real de 1 U.M. de principal, considerando la inflación.

Si un principal X es invertido a una tasa de interés i, al final del periodo se tendrá X(1+i). Sin embargo, como el poder adquisitivo ha disminuido en f%, el valor acumulado se tendrá que deflactar, para comparar el principal y el valor acumulado al mismo poder de compra.

Si se denota por i_r a la tasa real de interés, se tiene que:

$$X (1 + i_r) = \frac{X (1 + i)}{(1 + f)}$$

de donde

$$i_r = \frac{i - f}{1 + f}$$

ECUACION DE VALOR.

Es un principio fundamental en la teoria del interés que el valor de una cantidad de dinero en algún punto del tiempo depende del tiempo transcurrido desde que el dinero fue pagado, o del tiempo que falta por transcurrir para hacer el pago. Asi, dos o más cantidades de dinero pagaderas en distintos puntos del tiempo no pueden ser comparadas, a menos que sean evaluadas en una misma fecha a la cual se le denomina FECHA DE EVALUACION o FECHA FOCAL.

A la ecuación que acumula o descuenta una serie de obligaciones a un punto del tiempo se le denomina ECUACION DE VALOR, y un apoyo para buscar su solución es el DIAGRAMA DEL TIEMPO.

Los problemas de la teoría del interés involucran cuatro factores:

i) El principal invertido

ii) Periodo de inversión

iii) Tasa de interés

iv) Valor acumulado o monto

Determinar el valor acumulado o el principal invertido no presenta mayor dificultad a través de la ecuación de valor.

EJEMPLO.

Una deuda X se liquida 2 años después de haber sido contraída con un pago de 300 U.M. Si el interés es del 7% anual efectivo:

a) Encuentre el valor de X.

b) Se desea cambiar el pago de 300 U.M. al final del segundo año, por una cantidad Y al final del quinto año. Encuentre el valor de Y.

```
X         300                  Y
|-----|-----|-----|-----|-----|
0     1     2     3     4     5
```

SOLUCION.

a) $X = 300\, V^{2}_{.07}$

$X = 262.03$

b) $Y = X\ (1+.07)^{5} = 367.51$

$Y = 300\ (1+.07)^{3} = 367.51$

Para determinar el periodo de inversión existen dos métodos: interpolación utilizando tablas de interés, o logaritmos despejando n.

EJEMPLO.

Cuánto tiempo se requiere para que un principal de 200 U.M. tenga un valor acumulado de 500 U.M., si la tasa de interés es del 5% anual efectivo?

$$500 = 200\,(1+.05)^n$$
$$2.5 = (1.05)^n$$

SOLUCIONES.

a) INTERPOLACION.

Buscando en las tablas de interés se tiene que:

$$\begin{array}{lll} n=18 & \rightarrow & (1.05)^{18} = 2.41 \\ n=x & \rightarrow & (1.05)^{n} = 2.5 \\ n=19 & \rightarrow & (1.05)^{19} = 2.53 \end{array}$$

Aplicando la fórmula de interpolación:

$$x = \frac{2.5 - 2.41}{2.53 - 2.41}\,(19-18) + 18 = 18.75$$

De donde

n = 18 años, 9 meses.

b) LOGARITMOS.

$$\ln(2.5) = n \ln(1.05)$$

De donde

$$n = \frac{\ln(2.5)}{\ln(1.05)} = 18.78$$

n = 18 años, 9 meses, 10 días.

Para determinar la tasa de interés existen tres metodos: interpolación utilizando tablas de interés; logaritmos y Algoritmo de Bisección (Anexo No. 1).

EJEMPLO.

A qué tasa de interés se debe invertir un principal de 100 U.M., para que al cabo de 5 años generen un valor acumulado de 378 U.M.?

$$378 = 100\ (1+i)^5$$
$$3.78 = (1+i)^5$$

SOLUCIONES.

a) INTERPOLACION.

Buscando en las tablas de interés se tiene que:

$i_1 = 0.30 \quad \Rightarrow \quad (1.30)^5 = 3.71$

$i = x \quad \Rightarrow \quad (1+i)^5 = 3.78$

$i_2 = 0.31 \quad \Rightarrow \quad (1.31)^5 = 3.86$

Aplicando la fórmula de interpolación:

$$x = \frac{3.78 - 3.71}{3.86 - 3.71}\ (.31 - .30) + 0.30 = 0.3047$$

$i = 30.47\%$

b) LOGARITMOS.

$\ln(3.78) = 5 \ln(1+i)$

$e^{(\ln(3.78)/5)} - 1 = i$

$i = 30.47\%$

c) ALGORITMO DE BISECCION.

$f(x_0)=(1+x_0)^5 = 3.78 = y_0$

Sea $c=0.005$ y

$x_1= 0.30$ tal que $f(x_1)=3.713<3.78=y_0$
$x_2= 0.32$ tal que $f(x_2)=4.000>3.78=y_0$

Se evalúa la función en el punto medio del intervalo:

$$x_3 = \frac{0.30 + 0.32}{2} = 0.31$$

$\Rightarrow$

$$f(x_3) = (1.31)^5 = 3.858$$

Como $f(x_3)>y_0$ y $|y_0-f(x_3)|>c$, sustituimos el valor de x_2 por x_3 y repetimos el procedimiento:

$$x_3= \frac{0.30 + 0.31}{2} = 0.305$$

$\Rightarrow$

$$f(x_3) = (1.305)^5= 3.7849 >3.78 = y_0$$

pero como $|y_0- f(x_3)|<0.005$, $\Rightarrow x_0 = 0.305$

$\therefore$

$$i = 30.5\%.$$

ANUALIDADES.

Considérese el caso en el que se hacen pagos iguales de una unidad monetaria al final de cada año, durante n años. A esta de serie de pagos a intervalos iguales de tiempo se le denomina ANUALIDADES.

```
          1          1     . . .       1          1
|---------|----------|---  . . .  ---------|----------|
0         1          2     . . .          n-1         n
```

Si la fecha de evaluación de estos pagos es el punto cero, se dice que es el VALOR PRESENTE de la anualidad, denotada por $a_{\overline{n}|}$.

La expresión para $a_{\overline{n}|}$ es :

$$a_{\overline{n}|} = V^1 + V^2 + V^3 + \ldots + V^n$$

$$= \frac{V\,(\,1 - V^n\,)}{(\,1 - V\,)}$$

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1 - V^n}{i}$$

Si la fecha de evaluación es el año n , el valor acumulado denominado MONTO se denota por $S_{\overline{n}|}$.

La expresión para $S_{\overline{n}|}$ es :

$$S_{\overline{n}|} = 1 + (1+i)^1 + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-1}$$

$$= \frac{1 - (1+i)^n}{1 - (1+i)}$$

$$S_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

La relación que guardan el valor presente y el monto de una anualidad es:

$$S_{\overline{n}|} = (1+i)^n \, a_{\overline{n}|}$$

ANUALIDADES DIFERIDAS.

Se presentan casos en los cuales los pagos se comienzan a hacer m-periodos después de haber contraido la deuda. A este tipo de anualidad, denotada por $m|a_{\overline{n}|}$, se le llama ANUALIDAD DIFERIDA y al periodo que pasa antes de hacer el primer pago PERIODO DE DIFERIMIENTO.

La expresión para $m|a_{\overline{n}|}$ es :

$$m|a_{\overline{n}|} = v^m a_{\overline{n}|} = a_{\overline{m+n}|} - a_{\overline{m}|}$$

Los problemas de anualidades en donde el valor presente, el valor acumulado o el pago periódico son desconocidos, se calculan directamente de la ecuación de valor correspondiente.

EJEMPLOS.

a) Calcular el valor presente de una anualidad de 10 U.M. durante 7 años, a una tasa del 3% anu ! efectivo.

SOLUCION.

$$A = 10\, a_{\overline{7}|.03} = 10 \left[\frac{1 - V^7}{.03} \right] = 62.30$$

b) Calcular el monto de una anualidad de 150 U.M. durante 5 años, a una tasa de interés del 7%.

SOLUCION.

$$S = 150\, S_{\overline{5}|.07} = 150 \left[\frac{(1.07)^5 - 1}{.07} \right] = 862.61$$

c) Qué pago periódico X se debe hacer mensualmente durante 4 años a fin de liquidar una deuda de 100 U.M., si opera una tasa de interés del 36% convertible mensualmente?

SOLUCION.

$$i' = \frac{.36}{12} = .03 \qquad \text{(Tasa efectiva mensual)}$$

$$100 = X\, a_{\overline{48}|.03} \Rightarrow X = 3.96$$

En caso de ser desconocido el tiempo dentro de una anualidad, se determina a través de logaritmos o de interpolación utilizando tablas de interés.

EJEMPLO.

Durante cuánto tiempo se deben pagar 50 U.M. con objeto de saldar una deuda de 175 U.M., a una tasa de interés del 25% anual efectivo?

$$175 = 50\ a_{\overline{n}|.25}$$

$$3.5 = a_{\overline{n}|.25}$$

SOLUCIONES.

a) LOGARITMOS.

$$3.5 = \frac{1 - v^n}{.25}$$

De donde

$$n = \frac{\ln(0.125)}{\ln(0.8)} = 9.3188531$$

$$n = 9 \text{ años, } 3 \text{ meses, } 25 \text{ días.}$$

b) INTERPOLACION.

Buscando en las tablas de interés:

$$n=9 \quad \Rightarrow \quad a_{\overline{9}|.25} = 3.4631291$$

$$n=x \quad \Rightarrow \quad a_{\overline{n}|.25} = 3.5$$

$$n=10 \quad \rightarrow \quad a_{\overline{10}|.25} = 3.5705033$$

Utilizando la fórmula de interpolación:

$$x = \frac{3.5 - 3.4631291}{3.5705033 - 3.4631291}(10-9) + 9 = 9.3188531$$

De donde

n = 9 años, 4 meses, 3 días.

En caso de ser desconocida la tasa de interés, se determinaa través de interpolación o usando una expansión para $a_{\overline{n}|}$.

EJEMPLO.

A qué tasa de interés, convertible trimestralmente, 1000 U.M. pagaderas al final de cada trimestre durante 5 años, acumulan 16000 U.M.?

$$i' = \frac{i^{(4)}}{4}$$

$$16000 = 1000\, a_{\overline{20}|i'}$$

$$16 = a_{\overline{20}|i'}$$

SOLUCIONES.

a) INTERPOLACION.

$i_1=0.02 \quad \rightarrow \quad a_{\overline{20}|.02} = 16.3514$

$i'= x \quad \rightarrow \quad a_{\overline{20}|i'} = 16$

$i_2=0.0225 \quad \rightarrow \quad a_{\overline{20}|.0225} = 15.9637$

Utilizando la fórmula de interpolación:

$$x = \frac{16.0000 - 16.3574}{15.9637 - 16.3574}(0.0225-0.02) + 0.0200 = 0.0223$$

De donde

$$i'= 0.0223$$
$$i^{(4)} = 8.92\%$$

b) EXPANSION PARA $a_{\overline{n}|i}$

$$a_{\overline{n}|i} = n - \frac{n(n+1)}{2!}\, i + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\, i^2 - \ldots$$

De donde

$$16 = 20 - 210\, i' + 1540\, i'^2$$

$$1540\, i'^2 - 210\, i' + 4 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática

$$i' = 0.0229$$

$$i^{(4)} = 9.16\%$$

ANUALIDADES VARIABLES.

Hasta este momento se ha visto cómo calcular las anualidades cuyo pago periódico es el mismo durante el tiempo de vigencia de la anualidad. Sin embargo, existen inversiones en donde los pagos son irregulares. A este tipo de anualidad se le llama ANUALIDAD VARIABLE.

ANUALIDADES VARIABLES EN FORMA DE PROGRESION ARITMETICA.

En este tipo de anualidad, la serie de pagos varia de acuerdo a una progresión aritmética.

```
          K      K+P    K+2P   K+3P         K+(n-1)P
|-----|-----|-----|-----| . . . -----|
0     1     2     3     4            n
```

La ecuación de valor que representa esta serie de pagos, considerando i constante es:

$$A = KV + (K+P)\ V^2 + (K+2P)\ V^3 + \ .\ .\ .\ + (K+(n-1)P)\ V^n$$

Si se acuerda que el pago del primer periodo es A_1 y que a partir del segundo periodo los pagos se incrementan o disminuyen en una cantidad fija g, el valor presente , denotado por A, está dado por:

$$A = A_1\, a_{\overline{n}|} + g \left[1|\, a_{\overline{n-1}|} + 2|\, a_{\overline{n-2}|} + \ldots + (n-1)|\, a_{\overline{1}|} \right]$$

$$= A_1\, a_{\overline{n}|} + \frac{gV^n}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right]$$

$$\Rightarrow$$

$$A = A_1\, a_{\overline{n}|} + g\, \frac{a_{\overline{n}|} - n\,V^n}{i}$$

Y su valor acumulado es:

$$S = A_1\, S_{\overline{n}|} + g\, \frac{S_{\overline{n}|} - n}{i}$$

ANUALIDADES VARIABLES EN FORMA DE PROGRESION GEOMETRICA.

En este tipo de anualidades, la serie de pagos varía en forma de progresión geométrica.

La ecuación de valor para este tipo de anualidad, considerando i constante es:

$$A = A_1V + A_1(1+j_1)V^2 + A_1(1+j_1)(1+j_2)V^3 + \ldots + A_1(1+j_1)(1+j_2)\ldots(1+j_{n-1})V^n$$

Si se acuerda que el primer pago es de A_1 y a partir del segundo año, los pagos se incrementan en un porcentaje fijo g, el valor presente para este tipo de anualidad está dado por :

$$A = A_1V + A_1(1+g)V^2 + A_1(1+g)^2V^3 + \ldots + A_1(1+g)^{n-1}V^n$$

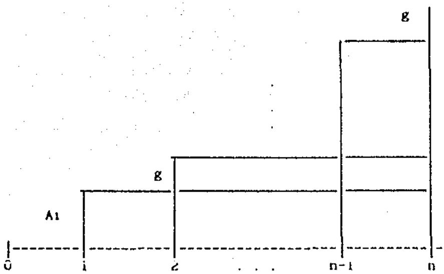
De donde

$$A = A_1 \left[\frac{1 - \left[\frac{1 + g}{1 + i} \right]^n}{i - g} \right] \qquad \text{si i es diferente a g.}$$

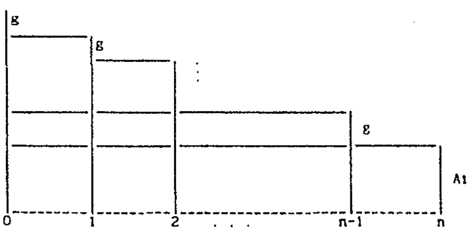
$$= \frac{n\,A}{(1+i)} \qquad \text{si } i = g.$$

REPRESENTACION GRAFICA DE LAS ANUALIDADES VARIABLES.

ANUALIDAD CRECIENTE.



ANUALIDAD DECRECIENTE.



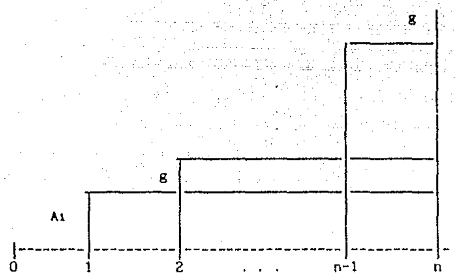
De donde

$$A = A_1 \left[\frac{1 - \left[\dfrac{1+g}{1+i} \right]^n}{i - g} \right] \quad \text{si i es diferente a g.}$$

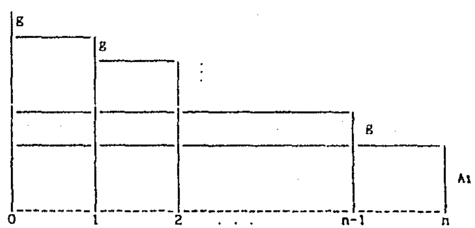
$$= \frac{n\ A}{(1+i)} \qquad \text{si } i = g.$$

REPRESENTACION GRAFICA DE LAS ANUALIDADES VARIABLES.

ANUALIDAD CRECIENTE.



ANUALIDAD DECRECIENTE.



UNA FORMULA GENERAL PARA LAS ANUALIDADES.

Sea u_t el pago hecho al final del t-ésimo periodo y considérese que está operando una tasa de interés i.

El valor presente de esta anualidad está dado por la suma de los pagos u_t. Es decir:

$$V.P. = \sum_{t=1}^{n} V^t u_t$$

Si se considera que

$$\Delta u_t = u_{t+1} - u_t$$

⇒ (Ver anexo No. 2)

$$\sum_{t=1}^{n} V^t u_t = \left[\frac{V^t}{V-1} \left[1 - \frac{V\Delta}{(V-1)} + \frac{V^2\Delta^2}{(V-1)^2} - \frac{V^3\Delta^3}{(V-1)^3} + \ldots \right] u_t \right]_{t=1}^{t=n+1}$$

$$= \left[\frac{V^{t-1}}{i} \left[1 + \frac{\Delta}{i} + \frac{\Delta^2}{i^2} + \frac{\Delta^3}{i^3} + \ldots \right] u_t \right]_{t=n+1}^{t=1}$$

Con esta igualdad se tiene una fórmula general para encontrar el valor presente de una anualidad expresada en términos de diferencias finitas.

Las fórmulas para los casos en que la serie de pagos periódicos tienen un comportamiento particular, pueden ser deducidas a través de esta igualdad:

1. Si se supone una anualidad de 1 U.M. pagadera al final de cada periodo, se tiene que:

$$u_t = 1 \qquad \forall\, t$$

$$\Delta^i u_t = 0 \qquad \forall\, t,\ \forall\, i \geq 1$$

De donde

$$\sum_{t=1}^{n} V^t u_t = \left[\frac{V^{t-1}}{i}\right]_{t=n+1}^{t=1} = \frac{1 - V^n}{i}$$

2. Si se considera una anualidad cuyos pagos varian en forma de progresión aritmética, en donde A_1 es el primer pago y a partir del segundo periodo los pagos se incrementan o disminuyen en una cantidad fija g, se tiene que:

$$u_t = A_1 + (t-1)g \qquad t \geq 1$$

$$\Delta\, u_t = g \qquad t \geq 1$$

$$\Delta^i u_t = 0 \qquad \forall\, i \geq 2$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{t=1}^{n} V^t\, u_t = \left[\frac{1}{i}\left[A_1 + \frac{g}{i}\right] - \frac{V^n}{i}\left[A_1 + ng + \frac{g}{i}\right]\right]$$

$\Rightarrow$

$$= A_1\, a_{\overline{n|}} + \frac{g}{i}\left(a_{\overline{n|}} - nV^n \right)$$

3. Si se considera una anualidad cuyos pagos varian en forma de progresión geométrica, en donde el primer pago es A_1 y a partir del segundo periodo los pagos se incrementan en un porcentaje fijo g, se tiene que:

$$u_t = A_1 (1+g)^{t-1} \qquad t \geq 1$$

$$\Delta^i u_t = A_1 (1+g)^{t-1} g^i \qquad i, t \geq 1$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{t=1}^{n} V^t u_t = \left[\frac{1}{i} \left[A_1 \left(1 + \frac{g}{i} + \frac{g^2}{i^2} + \frac{g^3}{i^3} + \ldots \right) \right] - \frac{V^n}{i} \left[A_1 (1+g)^n \left(1 + \frac{g}{i} + \frac{g^2}{i^2} + \frac{g^3}{i^3} + \ldots \right) \right] \right]$$

$\Rightarrow$

$$= A_1 \left[\frac{1 - V^n (1+g)^n}{i} \right] \left[\frac{1}{1 - \frac{g}{i}} \right]$$

$$= A_1 \left[\frac{1 - \left[\frac{1+g}{1+i} \right]^n}{i - g} \right]$$

CAPITULO 2. PATRONES DE REDENCION.

AMORTIZACION.

Amortización significa resarcir una deuda en pagos periódicos cuyo valor presente es igual a la deuda contraida. Cada uno de estos pagos periódicos puede dividirse en dos partes: una destinada a cubrir los intereses devengados en el periodo y otra destinada a disminuir el capital insoluto. La herramienta que se utiliza para mostrar la división de cada pago en capital e intereses es la TABLA DE AMORTIZACION.

PRESTAMO HIPOTECARIO.

RENTAS VARIABLES Y TASA DE INTERES VARIABLE.

Si se considera que una deuda se va a saldar mediante pagos periódicos y que la tasa de interés involucrada varia periodo a periodo, la ecuación de valor que refleja el comportamiento de estos pagos es:

$$D = R_1 V_1 + R_2 V_1 V_2 + R_3 V_1 V_2 V_3 + \ . \ . \ . + R_n V_1 V_2 \ldots V_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} R_k \prod_{r=1}^{k} V_{1_r}$$

Donde

D : Deuda contraida

i_k : Tasa de interés del k-ésimo periodo

R_k : Renta o pago correspondiente al k-ésimo periodo

n : Periodo acordado para saldar la deuda

Esta ecuación nos permite calcular el valor presente de una serie de pagos (todos ellos conocidos) sujetos a tasas de interés conocidas.

En caso de desconocer las rentas, se tendría una ecuación con n incógnitas, lo que implica un número infinito de soluciones. Para tener una solución única, se requiere de fijar (n-1) rentas, para de este modo, tener una ecuación con una variable.

Una situación similar se presenta si se desconocen las n tasas de interés involucradas en la operación.

El periodo acordado para saldar la deuda se puede calcular a través del algoritmo de bisección.

La expresión algebraica de la tabla de amortización correspondiente a este patrón de redención es:

PERIODO	RENTA O PAGO	CAPITAL INSOLUTO AL INICIO DEL PERIODO	INTERES CONTENIDO EN EL PAGO	CAPITAL CONTENIDO EN EL PAGO
1	R_1	$\sum_{k=1}^{n} R_k \prod_{j=1}^{k} V_{i_j}$	$i_1 \sum_{k=1}^{n} R_k \prod_{j=1}^{k} V_{i_j}$	$R_1 - i_1 \sum_{k=1}^{n} R_k \prod_{j=1}^{k} V_{i_j}$
2	R_2	$\sum_{k=2}^{n} R_k \prod_{j=2}^{k} V_{i_j}$	$i_2 \sum_{k=2}^{n} R_k \prod_{j=2}^{k} V_{i_j}$	$R_2 - i_2 \sum_{k=2}^{n} R_k \prod_{j=2}^{k} V_{i_j}$
3	R_3	$\sum_{k=3}^{n} R_k \prod_{j=3}^{k} V_{i_j}$	$i_3 \sum_{k=3}^{n} R_k \prod_{j=3}^{k} V_{i_j}$	$R_3 - i_3 \sum_{k=3}^{n} R_k \prod_{j=3}^{k} V_{i_j}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
s	R_s	$\sum_{k=s}^{n} R_k \prod_{j=s}^{k} V_{i_j}$	$i_s \sum_{k=s}^{n} R_k \prod_{j=s}^{k} V_{i_j}$	$R_s - i_s \sum_{k=s}^{n} R_k \prod_{j=s}^{k} V_{i_j}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	R_n	$R_n V_{i_n}$	$i_n R_n V_{i_n}$	$R_n - i_n R_n V_{i_n}$
	TOTAL PAGADO		$\sum_{k=1}^{n} R_k - \sum_{k=1}^{n} R_k \prod_{j=1}^{k} V_{i_j}$	$\sum_{k=1}^{n} R_k \prod_{j=1}^{k} V_{i_j}$

RENTAS VARIABLES Y TASA DE INTERES FIJA.

Si la deuda se acuerda saldar con pagos diferentes en cada periodo y la tasa de interés permanece constante, la ecuación de valor que corresponde a este patrón de redención es:

$$D = \sum_{j=1}^{n} R_j \, V_i^{j}$$

donde

D : Deuda contraida

R_j : Renta del j-ésimo periodo

i : Tasa de interés

n : Periodo acordado para saldar la deuda

D se calcula a través de la ecuación de valor.

Si se desconoce más de una renta, no se tiene una única solución a la ecuación. Se requiere conocer (n-1) rentas para que la solución sea única.

La tasa de interés involucrada en la operación, se calcula a través del algoritmo de bisección.

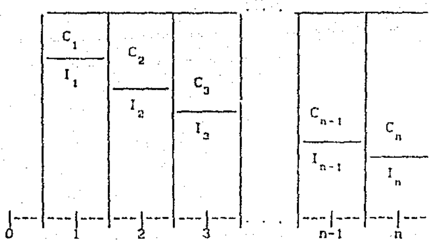
El periodo en el que se va saldar la deuda se calcula a través del algoritmo de bisección.

La expresión algebraica de la tabla de amortización para este patrón de redención es la siguiente:

PERIODO	RENTA O PAGO	CAPITAL INSOLUTO AL INICIO DEL	INTERES CONTENIDO EN	CAPITAL CONTENIDO EN
1	R_1	$\sum_{k=1}^{n} R_k V_i^{k}$	$i\sum_{k=1}^{n} R_k V_i^{k}$	$R_1 - i\sum_{k=1}^{n} R_k V_i^{k}$
2	R_2	$\sum_{k=2}^{n} R_k V_i^{k-1}$	$i\sum_{k=2}^{n} R_k V_i^{k-1}$	$R_2 - i\sum_{k=2}^{n} R_k V_i^{k-1}$
3	R_3	$\sum_{k=3}^{n} R_k V_i^{k-2}$	$i\sum_{k=3}^{n} R_k V_i^{k-2}$	$R_3 - i\sum_{k=3}^{n} R_k V_i^{k-2}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
j	R_j	$\sum_{k=j}^{n} R_k V_i^{k-(j-1)}$	$i\sum_{k=j}^{n} R_k V_i^{k-(j-1)}$	$R_j - i\sum_{k=j}^{n} R_k V_i^{k-(j-1)}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
n	R_n	$R_n V_i$	$i R_n V_i$	$R_n - i R_n V_i$
TOTAL PAGADO			$\sum_{k=1}^{n} i R_k \sum_{j=1}^{k} V_i^{j}$	$\sum_{k=1}^{n} R_k V_i^{k}$

En estos patrones de redención se puede verificar que cuando se tienen pagos periódicos iguales y la tasa de interés es constante, la cantidad de intereses correspondiente a cada pago disminuye, debido a que la tasa efectiva de interés que se aplica sobre la deuda al inicio de cada periodo (saldos insolutos) es decreciente.

En el caso en que los pagos periódicos son iguales, la cantidad correspondiente al capital aumenta en cada periodo. Así, el esquema de pagos tiene la siguiente forma:



Donde

C_k es la cantidad de capital contenida en el k-ésimo pago

I_k es la cantidad de interés contenida en el k-ésimo pago.

y

$$R_k = C_k + I_k$$

Las deudas que se liquidan con pagos periódicos de tal manera que el capital contenido en el pago aumenta y el interés contenido en el pago disminuye en cada periodo se conocen como PRESTAMOS HIPOTECARIOS.

PAGO UNICO EQUIVALENTE.

En un préstamo hipotecario, conocer el pago único equivalente a la serie de pagos periódicos, equivale a conocer el monto de estos pagos al final del plazo convenido.

Si S es el pago único equivalente $\Rightarrow$

```
     R1     R2     R3     R4        Rn-1   Rn
|------|------|------|------|  . . .  |------|
0      1      2      3      4        n-1     n
```

$$S = R_1\prod_{j=2}^{n}(1+i_j) + R_2\prod_{j=3}^{n}(1+i_j) + R_3\prod_{j=4}^{n}(1+i_j) + \ldots + R_{n-1}(1+i_n) + R_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} R_k \prod_{j=k}^{n-1}(1+i_{j+1}) + R_n$$

Suponiendo tasa de interés constante se tiene que:

$$S = R_1(1+i)^{n-1} + R_2(1+i)^{n-2} + R_3(1+i)^{n-3} + \ldots + R_{n-1}(1+i) + R_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} R_k(1+i)^{n-k}$$

Si además se supone que los pagos periódicos son iguales se tiene que:

$$S = R\left[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + \ldots + (1+i) + 1\right] = R\, S_{\overline{n}|i}$$

Debido a que $R = \dfrac{D}{a_{\overline{n}|}}$ $\Rightarrow$

$$S = R\, s_{\overline{n}|i} = \frac{D}{a_{\overline{n}|}}\, s_{\overline{n}|} = D\,(1+i)^{n}$$

Es decir, el monto de los pagos periódicos que redimen un préstamo hipotecario tienen un patrón de acumulación equivalente al del interés compuesto.

PRESTAMO REFACCIONARIO.

En todas las formas de redención que se han mencionado, la característica que tienen en común es que el valor presente de los pagos efectuados es igual a la deuda contraída. Se tiene además el inconveniente de no poder calcular la renta o pago si se considera un esquema de tasa variable de interés periodo a periodo, salvo que se conozcan de antemano estas tasas, lo que no ocurre en la realidad. Este inconveniente imposibilita el uso de este patrón de redención a menos que se hagan algunas consideraciones:

a) Recalcular las rentas futuras bajo las condiciones de mercado.

b) Las rentas deben ser iguales periodo a periodo ("a futuro").

Bajo esta circunstancia, surge la necesidad de implementar otro(s) patrón(es) de redención de uso sencillo y práctico que además permita(n) el resarcimiento de la deuda en condiciones favorables para el prestatario ante esquemas económicos inflacionarios.

TASA DE INTERES FIJA.

Considérese que se acuerda redimir la deuda contraída con pagos periódicos, de tal manera que la cantidad de capital que se destina a saldar la deuda es la misma en todos los periodos.

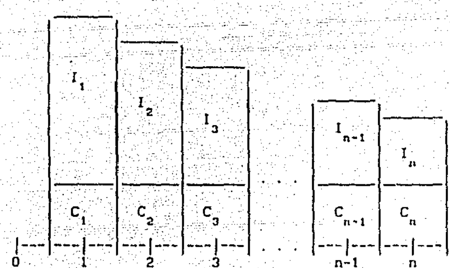
Si se supone que la cantidad que salda capital es $\frac{D}{n}$, y que la tasa de interés permanece constante, la tabla de amortización correspondiente se construye de la siguiente manera:

PERIODO	RENTA O PAGO	CAPITAL INSOLUTO AL INICIO DEL PERIODO	INTERES CONTENIDO EN EL PAGO	CAPITAL CONTENIDO EN EL PAGO
1	$D\,(i+\frac{1}{n})$	D	iD	$\frac{D}{n}$
2	$D(i\frac{n-1}{n}+\frac{1}{n})$	$D(\frac{n-1}{n})$	$iD(\frac{n-1}{n})$	$\frac{D}{n}$
3	$D(i\frac{n-2}{n}+\frac{1}{n})$	$D(\frac{n-2}{n})$	$iD(\frac{n-2}{n})$	$\frac{D}{n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
k	$D(i\frac{n-(k-1)}{n}+\frac{1}{n})$	$D(\frac{n-(k-1)}{n})$	$iD(\frac{n-(k-1)}{n})$	$\frac{D}{n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	$D(i\frac{1}{n}+\frac{1}{n})$	$D(\frac{1}{n})$	$iD(\frac{1}{n})$	$\frac{D}{n}$
	TOTAL PAGADO		$iD(\frac{n+1}{2})$	D

En esta tabla se observa que las rentas se componen de la cantidad destinada a saldar capital (constante), y la que salda interés (decreciente); por lo que se tiene que:

$$R_1 > R_2 > \ldots > R_{n-1} > R_n$$

Así, el esquema de pagos para este patrón de redención es de la siguiente manera:



Donde

C_k es la cantidad de capital contenida en el k-ésimo pago

I_k es la cantidad de interés contenida en el k-ésimo pago

$R_k = C_k + I_k$

Las deudas que se liquidan con pagos periódicos de tal manera que la cantidad de capital contenida en cada pago está previamente especificada en cada periodo, se conocen como PRESTAMOS REFACCIONARIOS.

Si se comparan los préstamos hipotecario y refaccionario se tiene que mientras en el hipotecario se destina mas al pago de intereses durante los primeros años, en el refaccionario se destina mas hacia el pago de capital, lo que hace del patrón de pagos del préstamo refaccionario una herramienta más atractiva en condiciones económicas cambiantes. Además, los cálculos involucrados en la determinación de los parámetros del préstamo refaccionario son mas simples y permiten variaciones preestablecidas en capital contenido en el pago, periodos de gracia y tasas de interés.

Asimismo, la consolidación de deudas bajo el esquema del préstamo refaccionario se puede realizar con extrema sencillez.

Por este motivo, en economías inflacionarias en donde el dinero se demerita, es más conveniente el préstamo refaccionario ya que si la cantidad de capital que se recupera se invierte a una tasa de interés mayor a la que está contratado el préstamo, se puede compensar la pérdida del valor del dinero. Aún más, con este capital se puede adquirir un bien el cual genere una ganancia o proporcione un servicio.

PAGO UNICO EQUIVALENTE.

En un préstamo refaccionario, el pago único correspondiente a la serie de pagos periódicos, considerando una tasa de interés constante es:

```
      R1     R2     R3         Rn-1    Rn
|------|------|------|  . . .  |------|
0      1      2      3         n-1     n
```

$$\sum_{j=1}^{n} R_j \, (1+i)^j = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{D}{n} + i \, D \, \frac{n-(j-1)}{n} \right) (1+i)^{n-j}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{D}{n} (1+i)^{n-j} + \frac{iD}{n} \sum_{j=1}^{n} (n-(j-1)) (1+i)^{n-j}$$

$$= \frac{D}{n} S_{\overline{n|}} + \frac{iD}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (1+i)^{j} S_{\overline{n-j|}}$$

$$= \frac{D}{n} S_{\overline{n|}} + \frac{D}{n} (n (1+i)^{n} - S_{\overline{n|}})$$

$$= D (1+i)^{n}$$

$\Rightarrow$

$$\sum R_{j} (1+i)^{j} = D (1+i)^{n}$$

Lo cual implica que el monto de los pagos periódicos que redimen un préstamo refaccionario tienen un patrón de acumulacion equivalente al del interés compuesto.

Es importante destacar que el monto de los pagos periódicos, tanto de un préstamo hipotecario como de un refaccionario, se acumulan bajo el patrón del interés compuesto. Esto significa que la diferencia entre ambos patrones de redención esta en el capital contenido en el pago y en el interés contenido en el pago de cada periodo.

Debido a que en ambos patrones de redención la suma del capital contenido en el pago de cada periodo es la deuda contraída, es posible calcular la tasa de interés equivalente con la cual el total de intereses pagado sea el mismo bajo cualquiera de los dos patrones de redención.

Por lo anterior, si se denota por i^{*} a la tasa de interés del prestamo refaccionario y por i a la tasa de interés del préstamo hipotecario, se tiene la siguiente equivalencia:

$$\text{Total de intereseses pagados en el préstamo hipotecario} = \text{Total de intereses pagados en el préstamo refaccionario}$$

Esto es:

$$\sum_{l=1}^{n} i_l \sum_{k=1}^{n} R_k V_i^k = i^* D \left(\frac{n+1}{2}\right)$$

EJEMPLO.

Una deuda de 10,000 U.M. se va a saldar con pagos anuales iguales a capital durante 5 años a una tasa de interés del 25%. Cuál es la tasa anual equivalente bajo el patrón hipotecario, si se tendrían que hacer pagos de 2,500 U.M. al final del 1er. año y los siguientes aumentan en una cantidad fija de 500 U.M., durante el mismo periodo de redención?

$D = 10,000$	$R_1 = 2,500$	$R_4 = 4,000$
$n = 5$	$R_2 = 3,000$	$R_5 = 4,500$
$i = 25\%$	$R_3 = 3,500$	

De la fórmula de equivalencia se tiene que:

$$\sum_{k=1}^{n} i \ R_k \sum_{j=1}^{k} V_i^j = i^* D \left(\frac{n+1}{2}\right)$$

De donde

$$\sum_{k=1}^{5} R_k - (R_1 V_i + R_2 V_i^2 + \ldots + R_5 V_i) = (.25)(10,000)(3) = 7,500$$

$$17,500 - (2,500\ a_{\overline{5}|i} + \frac{500}{i} (a_{\overline{5}|i} - 5V_i^5) = 7,500$$

⇒

$$2{,}500\ a_{\overline{5}|i} + \frac{500}{i}\left(a_{\overline{5}|i} - 5V_i^5 \right) = 10{,}000$$

Utilizando el algoritmo de Bisección se tiene que:

Sea $\varepsilon = 10$ y

$x_1 = 0.195 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) = 10{,}051.948$

$x_2 = 0.20 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) = 9{,}929.5909$

$\Rightarrow$

$$x_3 = \frac{0.195 + 0.20}{2} = 0.1975$$

De donde

$$f(x_3) = 9{,}990.4758$$

Como $|y_0 - f(x_3)| = |10{,}000 - 9{,}990.4758| = 9.5242 < 10 \leq \varepsilon$,

$\Rightarrow$

$$x_0 = 0.1975$$

$\therefore$

$$i = 19.75\%$$

Esta equivalencia entre tasas de interés de los dos patrones de redención permite aplicar la Teoría de Evaluación de Proyectos (cómo encontrar la Tasa Interna de Retorno, Tasa de Recuperación Mínima Atractiva, Valor Presente Neto, etc.) al patrón de redención refaccionario. Como nota aclaratoria, la teoría de Evaluación de Proyectos ha sido desarrollada para el patrón de redención hipotecario.

TASA DE INTERES VARIABLE.

Si en un préstamo refaccionario la tasa de interés varía en cada periodo, la tabla de amortización correspondiente tiene la siguiente forma:

PERIODO	RENTA O PAGO	CAPITAL INSOLUTO AL INICIO DEL PERIODO	INTERES CONTENIDO EN EL PAGO	CAPITAL CONTENIDO EN EL PAGO
1	$D(i_1 + \frac{1}{n})$	D	$i_1 D$	$\frac{D}{n}$
2	$D(i_2 \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n})$	$D\ (\frac{n-1}{n})$	$i_2 D(\frac{n-1}{n})$	$\frac{D}{n}$
3	$D(i_3 \frac{n-2}{n} + \frac{1}{n})$	$D\ (\frac{n-2}{n})$	$i_3 D(\frac{n-2}{n})$	$\frac{D}{n}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
k	$D(i_k \frac{n-(k-1)}{n} + \frac{1}{n})$	$D(\frac{n-(k-1)}{n})$	$i_k D(\frac{n-(k-1)}{n})$	$\frac{D}{n}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
n	$D(i_n \frac{1}{n} + \frac{1}{n})$	$D(\frac{1}{n})$	$i_n D(\frac{1}{n})$	$\frac{D}{n}$
		TOTAL PAGADO	$D \sum_{j=1}^{n} i_j (\frac{n-(j-1)}{n})$	D

Donde i_k es la tasa de interés del k-ésimo periodo.

OTRA FORMA DE SALDAR EL PRESTAMO REFACCIONARIO.

Si se supone que se hace un pago inicial de X% de una deuda contratada bajo el patrón del préstamo refaccionario, el k-ésimo renglón de la tabla de amortización correspondiente es:

PERIODO	RENTA O PAGO	CAPITAL INSOLUTO AL INICIO DEL PERIODO	INTERES CONTENIDO EN EL PAGO	CAPITAL CONTENIDO EN EL PAGO
k	$A(i_k\frac{n-(k-1)}{n}+\frac{1}{n})$	$A(\frac{n-(k-1)}{n})$	$i_k A(\frac{n-(k-1)}{n})$	$\frac{A}{n}$

Donde

i_k es la tasa de interés del k-ésimo periodo

$A = D(1-X)$

La principal conveniencia de este tipo de préstamos radica en su flexibilidad para el cálculo de los pagos periódicos, ya que en la práctica las tasas de interés son acordadas en función del comportamiento del CPP o el rendimiento de algún mecanismo de inversión. Por ejemplo: " La tasa de interés será la correspondiente tasa periódica equivalente al CPP más 30 puntos porcentuales"; o bien, " La tasa de interés será la correspondiente tasa periódica equivalente al CPP más el 42% del mismo".

Predecir el comportamiento del CPP resulta riesgoso, sobre todo si la estimación resultante es utilizada para la fijación de tasas periódicas de interés; no obstante, la forma de calcular el pago (o renta) bajo el patrón refaccionario brinda una flexibilidad suficiente.

CAPITULO 3. ALGUNOS CASOS ESPECIALES EN LOS PATRONES DE REDENCION

TASA GLOBAL DE INTERES.

Existe otro patrón de redención en el cual la tasa de interés correspondiente tiene un manejo distinto; esto es, calcular la cantidad devengada de interés en relación a la deuda original, con lo que la base de cálculo permanece constante implicando similar comportamiento en la cantidad devengada de interés. A esta tasa de interés se le denomina TASA GLOBAL DE INTERES.

Este patrón de redención tiene la ventaja de que permite que la compra de un bien de capital sea comercialmente más atractiva. Esta conveniencia comercial radica en que cualquier comprador se inclina por la adquisición de bienes a una tasa de interés baja, sin analizar su forma de aplicación; aún cuando la cantidad total de intereses sea la misma que con una tasa de interés "mayor", pero con distinto mecanismo de aplicación.

A diferencia del interés sobre saldos insolutos, en donde la cantidad de interés devengada en un periodo está en función de lo que se debe al inicio del mismo, el interés global se aplica sobre el valor de compra del bien, lo que implica que la cantidad de intereses que se pagará en cada periodo sea constante. Así si D es el valor del bien e i_g es la tasa de interés global, la cantidad de interés que se pagará en cada periodo será $i_g D$.

APLICADA AL PRESTAMO REFACCIONARIO.

En un préstamo refaccionario, utilizar una tasa de interés global implica que los pagos periódicos sean constantes, ya que se está considerando que todas las rentas contienen una cantidad similar destinada al pago de capital y que la cantidad destinada al pago de intereses es la misma.

Si se considera un préstamo refaccionario de D U.M. a una tasa de interés global i_g, la tabla de amortización correspondiente es:

PERIODO	RENTA O PAGO	CAPITAL INSOLUTO AL INICIO DEL PERIODO	INTERES CONTENIDO EN EL PAGO	CAPITAL CONTENIDO EN EL PAGO
1	$D(i_g + \frac{1}{n})$	D	$i_g D$	$\frac{D}{n}$
2	$D(i_g + \frac{1}{n})$	$D(\frac{n-1}{n})$	$i_g D$	$\frac{D}{n}$
3	$D(i_g + \frac{1}{n})$	$D(\frac{n-2}{n})$	$i_g D$	$\frac{D}{n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
k	$D(i_g + \frac{1}{n})$	$D(\frac{n-(k-1)}{n})$	$i_g D$	$\frac{D}{n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	$D(i_g + \frac{1}{n})$	$D(\frac{1}{n})$	$i_g D$	$\frac{D}{n}$
		TOTAL PAGADO	$n\, i_g D$	D

destinada al pago de capital y que la cantidad destinada al pago de intereses es la misma.

Si se considera un préstamo refaccionario de D U.M. a una tasa de interés global i_g, la tabla de amortización correspondiente es:

PERIODO	RENTA O PAGO	CAPITAL INSOLUTO AL INICIO DEL PERIODO	INTERES CONTENIDO EN EL PAGO	CAPITAL CONTENIDO EN EL PAGO
1	$D(i_g + \frac{1}{n})$	D	$i_g D$	$\frac{D}{n}$
2	$D(i_g + \frac{1}{n})$	$D(\frac{n-1}{n})$	$i_g D$	$\frac{D}{n}$
3	$D(i_g + \frac{1}{n})$	$D(\frac{n-2}{n})$	$i_g D$	$\frac{D}{n}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
k	$D(i_g + \frac{1}{n})$	$D(\frac{n-(k-1)}{n})$	$i_g D$	$\frac{D}{n}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
n	$D(i_g + \frac{1}{n})$	$D\ (\frac{1}{n})$	$i_g D$	$\frac{D}{n}$
	TOTAL PAGADO		$n\ i_g D$	D

PAGO UNICO EQUIVALENTE.

El pago único equivalente (o monto) a esta serie de pagos está dada por:

```
       R1     R2     R3     R4 . . . Rn-1   Rn
|------|------|------|------| . . . |------|
0      1      2      3      4       n-1    n
```

$$R = \left(\frac{D}{n} + i_g D\right)$$

$\Rightarrow$

$$nR = D\,(\,1 + n i_g\,)$$

Lo cual significa que el monto de la serie de pagos periódicos bajo el patrón de redención refaccionario, considerando una tasa global de interés, se acumula de forma equivalente al patrón del interés simple.

EQUIVALENCIA ENTRE TASA GLOBAL DE INTERES Y TASA DE INTERES SOBRE SALDOS INSOLUTOS.

En virtud de que existe una equivalencia entre las tasas de interés bajo los patrones de interés simple y compuesto, se puede encontrar una relación entre la tasa de interés sobre saldos insolutos y la tasa global de interés.

Suponiendo que el patrón de redención es refaccionario, esta equivalencia está dada de la siguiente manera:

Sea i la tasa efectiva de interés sobre saldos insolutos e i_g la tasa global de interés, ambas constantes en todo el periodo de redención.

El total de interés pagado en un préstamo refaccionario es:

$$I_t = i\ D\ (\frac{n+1}{2}) = \sum_{t=1}^{n} (\frac{t}{n}\ D)\ i$$

De donde la tasa global efectiva será:

$$D\ (1 + i_g) = i\ D\ (\frac{n+1}{2}) + D$$

$$i_g = i\ (\frac{n+1}{2})$$

La tasa global efectiva por periodo está dada por:

$$D\ i_g\ n = D\ i\ (\frac{n+1}{2})$$

$\Rightarrow$

$$i_g = \frac{i(n+1)}{2n}$$

Si la tasa de interés sobre saldos insolutos varía en cada periodo, la tasa global efectiva será:

$$D\ (1 + i_g) = \sum_{t=1}^{n} (\ \frac{t}{n}\ D\ )\ i_t\ +\ D$$

$\rightarrow$

$$i_g = \sum_{t=1}^{n} (\frac{t}{n})\ i_t$$

Y la tasa global efectiva por periodo estará dada por:

$$i_g = \frac{\sum_{t=1}^{n} (\frac{t}{n})\ i_t}{n}$$

En caso de que varíen tanto i como i_g, la tasa global efectiva será:

$$\sum_{t=1}^{n} I_{g_t} = \sum_{t=1}^{n} \left(\frac{t}{n}\right) I_t$$

PERIODO DE GRACIA.

Supóngase que se solicita un préstamo para adquirir un bien de capital el cual no produce ganancias en el momento de la adquisición, de tal manera que la deuda se puede comenzar a saldar m periodos después de que fue adquirida. Por ejemplo cuando se consigue un crédito para la construcción de un centro recreativo, habrá que esperar a terminar la obra y lograr una afluencia tal que permita solventar los gastos corrientes para poder comenzar a amortizar la deuda contraída. Al periodo que pasa sin que se hagan aportaciones que rediman capital, se le denomina PERIODO DE GRACIA.

El periodo de gracia puede ser de dos formas:

i) Durante m periodos no se redime capital. Esto es, únicamente se saldan los intereses correspondientes a cada periodo. Este es - el esquema más conocido y el que se presupone cuando se habla - de periodo de gracia (PERIODO DE GRACIA SOBRE CAPITAL).

ii) Durante m periodos no se redime capital ni intereses. Esto es, se difiere el pago m periodos. (PERIODO DE GRACIA SOBRE CAPITAL E INTERESES).

SOBRE CAPITAL.

Suponiendo un préstamo refaccionario con tasa constante de interes sobre saldos insolutos, con periodo de gracia sobre capital de m periodos y que no se modifica el periodo de redención (la deuda se liquida en el año n), la tabla de amortización correspondiente tiene la siguiente forma:

PERIODO	RENTA O PAGO	CAPITAL INSOLUTO AL INICIO DEL PERIODO	INTERES CONTENIDO EN EL PAGO	CAPITAL CONTENIDO EN EL PAGO
1	$i\,D$	D	$i\,D$	0
2	$i\,D$	D	$i\,D$	0
3	$i\,D$	D	$i\,D$	0
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
m	$i\,D$	D	$i\,D$	0
$m+1$	$D(i + \frac{1}{n-m})$	D	$i\,D$	$\frac{D}{n-m}$
$m+2$	$D(i\frac{n-(m+1)}{n-m} + \frac{1}{n-m})$	$D(\frac{n-(m+1)}{n-m})$	$iD(\frac{n-(m+1)}{n-m})$	$\frac{D}{n-m}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
n	$D(i\frac{1}{n-m} + \frac{1}{n-m})$	$D(\frac{1}{n-m})$	$iD(\frac{1}{n-m})$	$\frac{D}{n-m}$
	TOTAL PAGADO		$iD(\frac{n+m+1}{2})$	D

SOBRE CAPITAL E INTERESES.

Suponiendo un préstamo refaccionario con periodo de gracia de m años sobre capital e intereses y una tasa de interés i constante durante todo el periodo del préstamo, siendo éste de n años, se tiene la siguiente tabla de amortización:

PERIODO	RENTA O PAGO	CAPITAL INSOLUTO AL INICIO DEL PERIODO	INTERES CONTENIDO EN EL PAGO	CAPITAL CONTENIDO EN EL PAGO
1	0	D	0	0
2	0	$D\ (1+i)^1$	0	0
3	0	$D\ (1+i)^2$	0	0
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
m	0	$D\ (1+i)^{m-1}$	0	0
m+1	$A(i + \frac{1}{n-m})$	$A=D(1+i)^m$	iA	$\frac{A}{n-m}$
m+2	$A(i\frac{n-(m-1)}{n-m} + \frac{1}{n-m})$	$A(\frac{n-(m-1)}{n-m})$	$iA(\frac{n-(m-1)}{n-m})$	$\frac{A}{n-m}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
n	$A(i\ \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n-m})$	$A(\frac{1}{n-m})$	$iA(\frac{1}{n-m})$	$\frac{A}{n-m}$
		TOTAL PAGADO	$iA(\frac{(n-m)+1}{2})$	A

Si a las condiciones del préstamo anteriormente descrito se le incluye el hecho de considerar tasas de interés variables periodo a periodo, la tabla de amortización resultante será:

PERIODO	RENTA O PAGO	CAPITAL INSOLUTO AL INICIO DEL PERIODO	INTERES CONTENIDO EN	CAPITAL CONTENIDO EN
1	0	D	0	0
2	0	$D(1+i_1)$	0	0
3	0	$D(1+i_1)(1+i_2)$	0	0
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
m	0	$D\prod_{j=1}^{m-1}(1+i_j)$	0	0
m+1	$A(i_{m+1}+\frac{1}{n-m})$	$A=D\prod_{j=1}^{m}(1+i_j)$	$i_{m+1}A$	$\frac{A}{n-m}$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
n	$A(i_n\frac{1}{n-m}+\frac{1}{n-m})$	$A(\frac{1}{n-m})$	$i_nA(\frac{1}{n-m})$	$\frac{A}{n-m}$
	TOTAL PAGADO		A	A

CAPITULO 4. EJEMPLOS.

Con objeto de ilustrar la teoría expuesta con anterioridad, se presentan los siguientes ejemplos prácticos e ilustrativos acerca del préstamo refaccionario.

EJEMPLO 1.

Supóngase que se adquiere un préstamo refaccionario de 100 U.M., redimible en 8 años con tasa de interés constante del 12% sobre saldos insolutos.

a)Construir la Tabla de Amortización correspondiente.

. Como las 100 U.M. serán saldadas con iguales aportaciones a capital, el c.c.p. (capital contenido en el pago) para todos los periodos será $\frac{100}{8} = 12.5$.

. El c.i.i.p. (capital insoluto al inicio del periodo) será la deuda al inicio del periodo menos el c.c.p. correspondiente al periodo. Esto es, para el primer año el c.i.i.p. es la deuda (100); para el segundo año será 100-12.5=87.5; para el tercer periodo será 87.5-12.5=75, etc.

. Debido a que el interés se aplica sobre saldos insolutos, el i.c.p. (interés contenido en el pago) será la tasa de interés por el c.i.i.p.; así, el i.c.p. del primer año será (0.12)(100)=12; el del segundo año (0.12)(87.5)=10.5, etc.

. Las rentas o pagos periódicos serán la suma del i.c.p. y el c.c.p. de cada periodo.

Así, la tabla de amortización correspondiente toma la siguiente forma:

PERIODO	RENTA	C.I.I.P.	I.C.P.	C.C.P.
1	24.5	100.0	12.0	12.5
2	23.0	87.5	10.5	12.5
3	21.5	75.0	9.0	12.5
4	20.0	62.5	7.5	12.5
5	18.5	50.0	6.0	12.5
6	17.0	37.5	4.5	12.5
7	15.5	25.0	3.0	12.5
8	14.0	12.5	1.5	12.5

b) Encontrar la tasa de interés equivalente en préstamo hipotecario.

De la fórmula de equivalencia se tiene que:

$$\sum_{k=1}^{n} iR_k \sum_{j=1}^{k} v^j = i^* D \left(\frac{n+1}{2}\right)$$

De donde

$$\sum_{k=1}^{8} iR_k \sum_{j=1}^{k} v^j = (0.12)(100)(4.5) = 54$$

Suponiendo rentas fijas:

$$i(R\, a_{\overline{1|}} + R\, a_{\overline{2|}} + \ldots + R\, a_{\overline{8|}}) = 54$$

$$8R - R\, a_{\overline{8|}} = 54$$

Si las rentas son de 25 U.M. $\Rightarrow$

$$200 - 25\left(\frac{1 - V^{8}}{i}\right) = 54$$

Por lo que

$$a_{\overline{8|}} = 5.84$$

Aplicando el algoritmo de bisección se tiene que

$$i = 7.5625\%$$

EJEMPLO 2.

Considérese el mismo préstamo anterior con un periodo de gracia sobre capital de 3 años.

a)Construir la tabla de amortización correspondiente.

. Como la deuda se saldará en 8-3= 5 periodos debido a que se están concediendo 3 años de gracia sobre capital, el c.c.p. a partir del 4o. año será de $\frac{100}{5}$ = 20 (los 3 primeros años, el c.c.p. es de 0).

. El c.i.i.p. de los primeros 4 años será la deuda ya que no se está abonando cantidad alguna a capital. Para el 5o. año, el c.i.i.p. será de 100-20=80; para el 6o.: 80-20=60, etc.

. El i.c.p. de los 4 primeros años sera de (0.12)(100)=12; a partir del 5o. año, como se está utilizando una tasa de interés sobre saldos insolutos, será de (0.12)(80)=9.6; para el 6o.:(0.12)(60)=7.2, etc.

. Las rentas o pagos periódicos serán la suma del i.c.p. y el c.c.p. de cada periodo.

Así, la tabla de amortización correspondiente tiene la siguiente forma:

PERIODO	RENTA	C.I.I.P.	I.C.P.	C.C.P
1	12.0	100.0	12.0	0.0
2	12.0	100.0	12.0	0.0
3	12.0	100.0	12.0	0.0
4	32.0	100.0	12.0	20.0
5	29.6	80.0	9.6	20.0
6	27.2	60.0	7.2	20.0
7	24.8	40.0	4.8	20.0
8	22.4	20.0	2.4	20.0

b)Encontrar la tasa de interes equivalente en préstamo hipotecario.

Del total de intereses pagados tanto en uno como en otro patrón, se tiene que:

$$\sum_{k=1}^{n} i \ R_k \sum_{j=1}^{k} V^j = i^* \ D \ (\frac{n+m+1}{2})$$

De donde

$$\sum_{k=1}^{8} i \ R_k \sum_{j=1}^{k} V^j = (0.12)(100)(6)=72$$

Suponiendo rentas fijas se tiene que:

$$iDa_{\overline{3}|} + V^3(\sum_{k=1}^{5} iR_k \sum_{j=1}^{k} V^j) = 72$$

Si las rentas son de 25 U.M.:

$$V^3(a_{\overline{5}|} - 1) = 1.12$$

Aplicando el algoritmo de bisección se tiene que

$$i = 20.46875\%$$

EJEMPLO 3.

Considérese el mismo préstamo que en el EJEMPLO 1 pero con tasa global de interés del 12%.

a)Construir la tabla de amortización correspondiente.

. Como se trata de un préstamo refaccionario, el c.c.p. será de $\frac{100}{8} = 12.5$, para todos los periodos.

. El c.i.i.p. será la deuda al inicio del periodo menos el c.c.p. de cada periodo. Así, para el primer año será de la deuda (100); para el segundo será de 100-12.5=87.5, etc.

. El i.c.p. será de 12 para todos los periodos ya que se está utilizando una tasa global de interés.

. Las rentas serán el c.c.p. más en i.c.p. de cada periodo.

Por lo que la tabla de amortización toma la siguiente forma:

PERIODO	RENTA	C.I.I.P.	I.C.P.	C.C.P.
1	24.5	100.0	12.0	12.5
2	24.5	87.5	12.0	12.5
3	24.5	75.0	12.0	12.5
4	24.5	62.5	12.0	12.5
5	24.5	50.0	12.0	12.5
6	24.5	37.5	12.0	12.5
7	24.5	25.0	12.0	12.5
8	24.5	12.5	12.0	12.5

b)Encontrar la tasa de interés sobre saldos insolutos efectiva por periodo equivalente a la tasa global de interés en un préstamo refaccionario.

De la fórmula de equivalencia se tiene que:

$$D\, i_g\, (n) = D\, i^{*}\, (\frac{n+1}{2})$$

De donde

$$i^{*} = \frac{(0.12)(8)}{4.5} = 21.33\%$$

c)Encontrar la tasa equivalente efectiva por periodo sobre saldos insolutos en préstamo hipotecario.

De la fórmula de equivalencia se tiene que:

$$D\, i_g\, (n) = D\, i^{*}\, (\frac{n+1}{2}) = \sum_{k=1}^{n} i\, R_k \sum_{j=1}^{k} V^{j}$$

De donde

$$(100)(0.12)(8) = \sum_{k=1}^{8} i\, R_k \sum_{j=1}^{k} V^j$$

Suponiendo rentas constantes de 25 U.M.

$$a_{\overline{8|}} = 4.16$$

Por el algoritmo de bisección se tiene que

$$i = 17.31\%$$

EJEMPLO 4.

En el mes de noviembre de 1989 se contrajo una deuda de 100 U.M. con las siguientes características: redimible en 8 meses, con periodo de gracia sobre capital de 3 meses y tasa de interés sobre saldos insolutos en función del C.P.P. más 10 puntos porcentuales del mismo.

a)Construir la tabla de amortización correspondiente.

Según información del Banco de México publicada en el Diario Oficial de la Federación, el C.P.P. de noviembre de 1989 a junio de 1990 tomó los siguientes valores:

MES	C.P.P. ANUAL	INTERES MENSUAL APLICADO AL c.i.i.p.
Noviembre	39.51%	4.1258%
Diciembre	40.11%	4.1758%
Enero	42.08%	4.34%
Febrero	44.87%	4.5725%
Marzo	47.15%	4.7625%
Abril	47.20%	4.7667%
Mayo	42.62%	4.385%
Junio	35.16%	3.7633%

. Como las 100 U.M. se redimirán en 8-3=5 periodos debido a que se otorgaron 3 meses de periodo de gracia sobre capital, el c.c.p. a partir del 4o. año será de $\frac{100}{5} = 20$.

. Debido a los 3 años de gracia sobre capital, en los 3 primeros años no se salda capital; por lo que el c.i.i.p. será la deuda durante los 4 primero años. A partir del 5o. año, el c.i.i.p. será la deuda al inicio del periodo menos el c.c.p. de dicho periodo; así, el c.i.i.p. del 5o. año será de 100-20=80; del 6o.: 80-20=60, etc.

. El i.c.p. será el interés mensual correspondiente aplicado al c.i.i.p.

Asi, la tabla de amortización toma la siguiente forma:

PERIODO	RENTA	C.I.I.P.	I.C.P.	C.C.P.
1	4.13	100.0	4.13	0.0
2	4.18	100.0	4.18	0.0
3	4.34	100.0	4.34	0.0
4	24.58	100.0	4.58	20.0
5	23.81	80.0	3.81	20.0
6	22.86	60.0	2.86	20.0
7	21.75	40.0	1.75	20.0
8	20.75	20.0	0.75	20.0

EJEMPLO 5.

Considerese un préstamo refaccionario de 100 U.M., el cual se saldará en 15 años, bajo las siguientes condiciones:

a) 5 años de periodo de gracia; 3 sobre capital e intereses y 2 sobre capital.

b) Pagos trimestrales.

c) Tasa de interés del 120% del rendimiento de CETES a 28 dias en colocación primaria.

d) En los 4 años siguientes a los 5 de periodo de gracia, se deberá saldar el 60% de la deuda; en los siguientes 3, el 25% y en los restantes el 15%.

Construir la tabla de amortización correspondiente.

Como se están considerando 3 años de gracia sobre capital e intereses, las rentas son de 0 U.M. y la deuda se acumula de acuerdo al comportamiento de los CETES en cada trimestre.

El c.i.i.p. del primer periodo es la deuda. Para calcular el interés del 2o. trimestre supóngase que el comportamiento de los CETES a 28 días en colocación primaria es de la siguiente manera: el primer mes 42.24%; el segundo, 45.86% y el tercero de 48.72%. Entonces se tiene que el interés que se aplicará en este trimestre será el promedio aritmético del comportamiento de los CETES a 28 días, de los tres meses anteriores a la fecha de pago, dividido entre 4 para obtener una tasa efectiva trimestral y multiplicado por (1.20). Es decir:

$$\left(\frac{0.4224 + 0.4586 + 0.4872}{3(4)}\right)(1.2) = 0.1368 = 13.68\%$$

Así, los dos primeros renglones de la tabla de amortización tienen la siguiente forma:

PERIODO	RENTA	C.I.I.P.	I.C.P.	C.C.P.
1	0.00	100.00	0.00	0.00
2	0.00	113.68	0.00	0.00

Si se supone que para el siguiente trimestre el comportamiento de los CETES es de 45.86% para el primer mes; 48.72% para el segundo y de 49.92% para el tercer mes, el interés aplicado en este trimestre será:

$$\left(\frac{0.4586 + 0.4872 + 0.4992}{3(4)}\right)(1.2) = 0.14448 = 14.448\%$$

Con lo que el tercer renglón sería:

PERIODO	RENTA	C.I.I.P.	I.C.P.	C.C.P.
3	0.00	130.10	0.00	0.00

Si se supone que el comportamiento del rendimiento de los CETES a 28 días en colocación primaria es tal que el interés aplicado en cada trimestre es del 15%, la tabla de amortización correspondiente toma la siguiente forma:

PERIODO	RENTA	C.I.I.P.	I.C.P.	C.C.P.
4	0.00	149.61	0.00	0.00
5	0.00	172.05	0.00	0.00
6	0.00	197.85	0.00	0.00
7	0.00	227.52	0.00	0.00
8	0.00	261.64	0.00	0.00
9	0.00	300.88	0.00	0.00
10	0.00	346.01	0.00	0.00
11	0.00	397.91	0.00	0.00
12	0.00	457.59	0.00	0.00

En los siguientes 8 trimestres la renta será el interés correspondiente de cada periodo (ya que se tiene un periodo de gracia sobre capital) por la deuda al inicio del periodo (c.i.i.p.).

Si se supone que para el 13o. trimestre el comportamiento de los CETES a 28 días es de 53.04% para el primer mes; de 57.05% para el segundo y de 49.92% para el tercero, el interés que deberá aplicarse será:

$$\left(\frac{0.5304 + 0.5705 + 0.4992}{3(4)}\right)(1.2) = 0.162 = 16.2\%$$

Así, el 13o. renglón de la tabla toma la siguiente forma:

PERIODO	RENTA	C.I.I.P.	I.C.P.	C.C.P.
13	74.12	457.59	74.12	0.00

Considerando que el rendimiento de los CETES a 28 días es de tal manera que el interes aplicado del 14o al 20o. trimestre sea del 13%, la tabla de amortización queda de la siguiente manera:

PERIODO	RENTA	C.I.I.P.	I.C.P.	C.C.P.
14	59.48	457.59	59.48	0.00
15	59.48	457.59	59.48	0.00
16	59.46	457.59	59.48	0.00
17	59.48	457.59	59.48	0.00
18	59.48	457.59	59.48	0.00
19	59.48	457.59	59.48	0.00
20	59.48	457.59	59.48	0.00

Ahora bien, como en los siguientes 16 trimestres se deberá saldar el 60% de la deuda, es decir (0.60)(457.59)=274.55, el capital contenido en el pago durante estos 16 trimestres será de $\frac{274.55}{16} = 17.15$.

Supóngase que durantes estos 16 trimestres el comportamiento del rendimiento de CETES es de tal manera que el interés aplicado en cada trimestre es del 8%, se tiene el siguiente comportamiento de la tabla de amortización:

PERIODO	RENTA	C.I.I.P.	I.C.P.	C.C.P.
21	53.75	457.59	36.60	17.15
22	52.38	440.44	35.23	17.15
23	51.01	423.29	33.86	17.15
24	49.64	406.14	32.49	17.15
25	48.26	388.99	31.11	17.15
26	46.89	371.84	29.74	17.15
27	45.52	354.69	28.37	17.15
28	44.15	337.54	27.00	17.15
29	42.78	320.39	25.63	17.15
30	41.40	303.24	24.25	17.15
31	40.03	286.09	22.88	17.15
32	38.66	268.94	21.51	17.15
33	37.29	251.79	20.14	17.15
34	35.92	234.64	18.77	17.15
35	34.54	217.49	17.39	17.15
36	33.17	200.34	16.02	17.15

Como en los siguientes 12 trimestres habrá que redimir el 25% de la deuda original, es decir (0.25)(457.59)=114.39, el capital contenido en el pago de estos trimestres será de $\frac{114.39}{12} = 9.53$.

Si suponemos que el rendimiento de los CETES es de tal manera que el interés aplicado en los trimestres 37o. al 48o, es del 10%, se tiene que:

PERIODO	RENTA	C.I.I.P.	I.C.P.	C.C.P.
37	27.85	183.19	18.32	9.53
38	26.89	173.63	17.36	9.53
39	25.94	164.10	16.41	9.53
40	24.99	154.57	15.46	9.53
41	24.03	145.04	14.50	9.53
42	23.08	135.51	13.55	9.53
43	22.13	125.98	12.60	9.53
44	21.18	116.45	11.65	9.53
45	20.22	106.92	10.69	9.53
46	19.27	97.39	9.74	9.53
47	18.32	87.86	8.79	9.53
48	17.36	78.33	7.83	9.53

A partir del 49o. trimestre el c.c.p. será de $\frac{68.80}{12} = 5.73$.

Si se supone que el rendimiento de los CETES se comporta de tal manera que durante los 6 primeros trimestres el interés aplicado es del 11% y durante los últimos 6 trimestres es del 12%, la tabla de amortización respectiva es:

PERIODO	RENTA	C.I.I.P.	I.C.P.	C.C.P.
49	13.29	68.80	7.56	5.73
50	12.66	63.07	6.93	5.73
51	12.03	57.34	6.30	5.73
52	11.04	51.61	5.67	5.73
53	10.77	45.88	5.04	5.73
54	10.14	40.15	4.41	5.73
55	9.86	34.42	4.13	5.73
56	9.17	28.69	3.44	5.73
57	8.48	22.96	2.75	5.73
58	7.79	17.23	2.06	5.73
59	7.11	11.50	1.38	5.73
60	6.42	5.8	0.69	5.73

A partir del 49o. trimestre el c.c.p. será de $\frac{68.80}{12} = 5.73$.

Si se supone que el rendimiento de los CETES se comporta de tal manera que durante los 6 primeros trimestres el interés aplicado es del 11% y durante los últimos 6 trimestres es del 12%, la tabla de amortización respectiva es:

PERIODO	RENTA	C.I.I.P.	I.C.P.	C.C.P.
49	13.29	68.80	7.56	5.73
50	12.66	63.07	6.93	5.73
51	12.03	57.34	6.30	5.73
52	11.04	51.61	5.67	5.73
53	10.77	45.88	5.04	5.73
54	10.14	40.15	4.41	5.73
55	9.86	34.42	4.13	5.73
56	9.17	28.69	3.44	5.73
57	8.48	22.96	2.75	5.73
58	7.79	17.23	2.06	5.73
59	7.11	11.53	1.38	5.73
60	6.42	5.8	0.69	5.73

CONCLUSION

La importancia del presente trabajo es que trata de manera formal la redención de un préstamo a través del patrón refaccionario, el cual es el método de uso generalizado en América Latina.

Una de las ventajas que presenta el Préstamo Refaccionario es que las aportaciones a capital pueden ser determinadas desde el momento en que se contrae la deuda. Para efectos prácticos, se consideró que las aportaciones a capital fueran constantes ($\frac{D}{n}$); sin embargo, puede acordarse que, por ejemplo, en los tres primeros periodos se abone el 70% de la deuda, con el fin de recuperar rápidamente capital y contrarrestar la pérdida del valor del dinero; o bien, puede acordarse que las aportaciones a capital sean variables periodo a periodo, de tal manera que con los últimos pagos se recupere más capital. La forma que va a tomar la serie de aportaciones a capital dependerá de lo que sea conveniente para el prestatario.

Otra ventaja es que al tener predeterminada la aportación a capital en cada pago, se sabe cuánto se debe al inicio de cada periodo. Esto implica que únicamente conociendo el comportamiento de la tasa de interés en el periodo (en caso de que se aplique sobre saldos insolutos), es posible determinar la aportación correspondiente a interés. Esta tasa de interés puede ser igual o no a la del periodo anterior; puede estar en función de la variación del CPP o de algún mecanismo típico de inversión, o bien, puede ser totalmente arbitraria. Aún más, para determinar la aportación de interés no se requiere predecir el comportamiento de las tasas de interés "a futuro".

Sabiendo cómo son las aportaciones tanto de capital como de interés en un periodo, el cálculo de la renta resulta ser muy sencillo ya que es la suma de estas aportaciones ($R_k = I_k + C_k$).

En el patrón de redención hipotecario, las aportaciones a capital e interés están en función de las rentas. En economías inflacionarias, en donde no se conoce el comportamiento de las tasas de interés, no se puede calcular con exactitud el valor de cada renta, ya que la ecuación de valor correspondiente tendría (n+1) incógnitas. Para obtener las rentas en cada periodo se tendría que recalcular la deuda, suponiendo rentas constantes y que el comportamiento de la tasa de interés de un periodo será igual en los restantes. Por este motivo, el préstamo hipotecario es conveniente en economías estables, dentro de las cuales la tasa de interés permanece constante, cosa que no ocurre en los países de América Latina.

El periodo de gracia aplicado al préstamo refaccionario permite la adquisición de un bien de capital que no produce ganancias inmediatas, el cual se comienza a pagar m periodos después. La ventaja de que esté aplicado al préstamo refaccionario es que se tiene una diversidad de formas para saldar capital, a conveniencia del vendedor, y que es muy sencillo el cálculo de las aportaciones a capital, a interés y las rentas de cada periodo.

La tasa global de interés permite que la adquisición de un bien sea comercialmente más atractiva ya que se manejan intereses aparentemente bajos. Esta forma de aplicar el interés en un préstamo refaccionario permite, además, que exista una diversidad de formas de recuperación de capital y que el cálculo de rentas, aportaciones a capital e interés sea muy sencillo. Aún más, en caso de que las aportaciones a capital se determinen como constantes, en virtud de que las respectivas a interés también lo son, la renta sería la misma para todos los periodos.

Aún cuando el patrón de redención refaccionario surgió con el fin de adquirir bienes de capital para incentivar el desarrollo de la industria, su manejo se ha proliferado en el ámbito comercial ya que su aplicación resulta ser muy sencilla.

ANEXOS

ANEXO No. 1. ALGORITMO DE BISECCION

Sea $f(x)$ una función monótona tal que $f(x_0)= y_0$; si se conoce la expresión algebraica de $f(x)$, x_0 puede ser determinada mediante el siguiente procedimiento:

1) Seleccione x_1, x_2 y ε (error máximo posible), tal que

$$f(x_1) < y_0$$

$$f(x_2) > y_0$$

2) Sea $x_3 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$; evaluar $f(x_3)$.

3) Si $f(x_3) < y_0$ y $|y_0 - f(x_3)| < \varepsilon \Rightarrow x_0 = x_3$

   En caso contrario

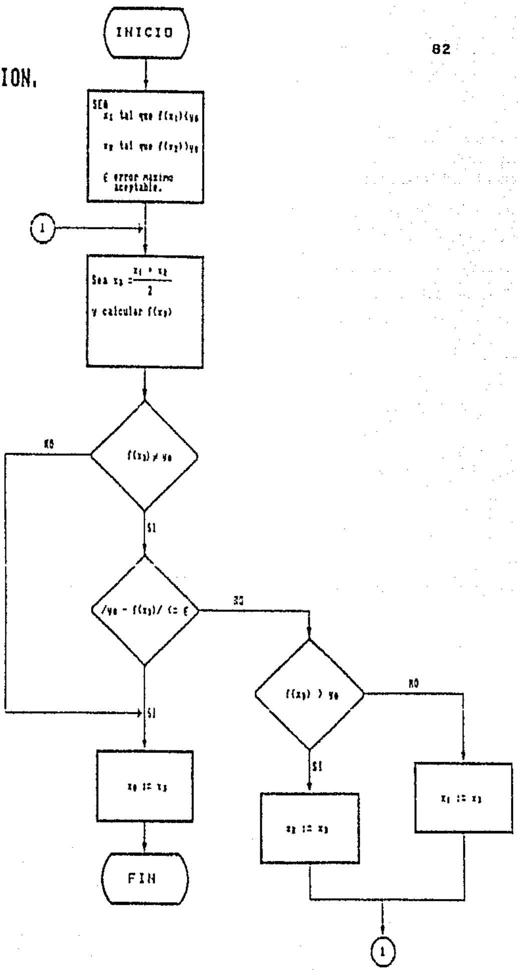
   $x_1 = x_3$ y regresar al punto No. 2.

   Si $f(x_3) > y_0$ y $|y_0 - f(x_3)| < \varepsilon \Rightarrow x_0 = x_3$

   En caso contrario

   $x_2 = x_3$ y regresar al punto No. 2.

ALGORITMO DE BISECCION.



ANEXO No. 2. DEDUCCION DE LA FORMULA GENERAL DE ANUALIDADES A TRAVES DE DIFERENCIAS FINITAS.

El METODO DE DIFERENCIAS FINITAS, además de que permite deducir fórmulas polinomiales aproximativas de funciones cuya forma analítica se desconoce o es de tal naturaleza que es deseable sustituirla por otra más simple, también permite encontrar el valor de una serie finita.

Por definición se tiene que:

$$
\begin{aligned}
f(x+h) - f(x) &= \Delta f(x) = \Phi(x) \\
f(x+2h) - f(x+h) &= \Delta f(x+h) = \Phi(x+h) \\
f(x+3h) - f(x+2h) &= \Delta f(x+2h) = \Phi(x+2h) \\
&\vdots \\
f(x+nh) - f(x+(n-1)h) &= \Delta f(x+(n-1)h) = \Phi(x+(n-1)h)
\end{aligned}
$$

De donde

$$\sum_{t=0}^{n-1} \Delta f(x+th) = f(x+nh) - f(x) = \sum_{t=0}^{n-1} \Phi(x+th) \qquad \ldots\ldots..(A.1)$$

Esto es que si $f(x)$ es una función tal que sus primeras diferencias finitas son $\Phi(x)$, se puede encontrar la suma de cualquier serie, cuyo término general es $\Phi(x)$, en términos de los valores que toma $f(x)$ para cualquier intervalo donde está definida la diferencia.

Si se hace un cambio de origen y escala se tiene que el intervalo de la diferencia es unitario, que el primer término de la serie algebraica es $\Phi(1)$ y que los términos son sucesivos.

Bajo estas condiciones, la fórmula (A.1) toma la siguiente forma:

$$\sum_{x=1}^{n} \Phi(x) = f(x)\Big|_{x=1}^{n+1} = f(n+1) - f(n) \qquad \text{.......(A.2)}$$

Con lo cual tenemos una fórmula para encontrar la suma de los n primeros términos de $\Phi(x)$, evaluando $f(x)$ en los límites de la sumatoria.

Algunos ejemplos de las funciones que cumplen con la característica de que sus primeras diferencias finitas pueden ser expresadas como una función explícita, son los siguientes:

1) Sea $f(x) = ka^x$

$$\Phi(x) = \Delta\ ka^x = k(a^{x+1} - a^x)$$

Aplicando la fórmula (A.2) se tiene que:

$$\sum_{x=1}^{n} \Phi(x) = \sum_{x=1}^{n} k(a-1)a^x = f(x)\Big|_{x=1}^{n+1} = ka^{n+1} - ka$$

De donde

$$\sum_{x=1}^{n} ka^x = \frac{k}{a-1}\ (\ a^{n+1} - a\ ) = \frac{K}{a-1}\ (a^n - 1) \text{.......(A.3)}$$

ii) Sea $f(x) = x^{(m)} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-(m-1))$

$$\Phi(x) = \Delta x^{(m)} = (x+1)^{(m)} - x^{(m)}$$
$$= (x+1)(x+1-1)\ldots(x+1-m+1)-x(x-1)(x-2)\ldots(x-m+1)$$
$$= mx^{(m)}$$

Aplicando la fórmula (A.2) se tiene que:

$$\sum_{x=1}^{n}\Phi(x) = \sum_{x=1}^{n} mx^{(m)} = f(x)\Big|_{x=1}^{n+1} = (n+1)^{(m)} - 1^{(m)}$$

Despejando

$$\sum_{x=1}^{n} x^{(m-1)} = \frac{1}{m}\left[(n+1)^{(m)} - 1^{(m)} \right]$$

iii) Sea $f(x) = x_{(m)} = \dfrac{x!}{(x-m)!\ m!}$

$$\Phi(x) = \Delta x_{(m)} = (x+1)_{(m)} - x_{(m)}$$

$$= \frac{(x+1)!}{((x+1)-m)!\ m!} - \frac{x!}{(x-m)!\ m!}$$

$$= \frac{m\ x!}{(x-(m-1))!\ m!} = \frac{x!}{(x-(m-1))!\ (m-1)!}$$

$$= x_{(m-1)}$$

Aplicando la fórmula (A.2) se tiene que

$$\sum_{x=1}^{n} \Phi(x) = \sum_{x=1}^{n} x_{(m-1)} = f(x)\Big|_{x=1}^{n+1} = (n+1)_{(m)} - 1_{(m)}$$

iv) Dado un polinomio de grado n ($P_n(x)$), es posible encontrar un polinomio aproximativo asociado a $\Delta^n\mu_x$ donde cada coeficiente es de la forma $\frac{1}{2}\left[x_{(m)} + (x+1)_{(m)}\right]$.

Ahora bien, de la fórmula de diferencias avanzadas se tiene que:

$$\mu_{a+x} = E^x\mu_a \qquad \qquad ....(A.4)$$

$$= (1+\Delta)^x\mu_a$$

Desarrollando:

$$(1+\Delta)^x\mu_a = \mu_a + \frac{x}{1!}\Delta\mu_a + \frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2\mu_a + \ldots + \frac{x!}{x!}\Delta^x\mu_a + \ldots$$

$$= \mu_a + x_{(1)}\Delta\mu_a + x_{(2)}\Delta^2\mu_a + \ldots + x_{(x)}\Delta^x\mu_a + \ldots$$

Obsérvese que $x_{(k)} = 0 \quad \forall\ k>x$

$$\sum_{x=1}^{n} \mu_{a+x} = \sum_{x=1}^{n} E^x\mu_a = \mu_a \sum_{x=1}^{n} (1+\Delta)^x$$

Sea $(1+\Delta) = a \Rightarrow$ (de la fórmula (A.3))

$$\mu_a \sum_{x=1}^{n} a^x = \mu_a \left[\frac{a(1-a^n)}{(1-a)}\right]$$

RELACION ENTRE LOS OPERADORES $\sum$ y Δ.

Se sabe que

$$\Delta f(x) = \Phi(x)$$

y que

$$\sum \Phi(x) = f(x)$$

donde la sumatoria es efectuada para ciertos limites.

En caso de eliminar los limites, se podria decir, bajo ciertas condiciones, que la sumatoria es el proceso inverso de la diferenciación; es decir:

$$\Phi(x) = \Delta f(x) = \Delta\sum\Phi(x)$$

$$\Delta\sum = I \qquad \sum = \Delta^{-1} \qquad \text{.......(A.5)}$$

Así, el proceso de suma en diferencias finitas, es similar al correspondiente proceso en el Cálculo Integral; y la relación entre los símbolos es análoga a las que existen entre los símbolos de diferenciación e integración; por tal motivo, es frecuente referirse a $\sum$ en diferencias finitas, como una integración finita.

DEMOSTRACION DE LA FORMULA GENERAL PARA CALCULAR EL VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD

POR DEMOSTRAR

$$\sum_{x=1}^{n} V^x u_x = \left[\frac{V^x}{V-1} \left[1 - \frac{V\Delta}{V-1} + \frac{V^2\Delta^2}{(V-1)^2} - \dots \right] u_x \right]_{x=1}^{n+1}$$

DEMOSTRACION.

De la fórmula (A.5) se tiene que:

$$\sum_{x=1}^{n} V^x \; u_x = \Delta^{-1} V^x u_x \Big|_{x=1}^{n+1}$$

Como $(1 + \Delta) = E \quad \rightarrow \quad \Delta^{-1} = (E - 1) \quad \therefore$

$$\Delta^{-1} V^x u_x \Big|_{x=1}^{n+1} = (E-1)^{-1} \; V^x u_x \Big|_{x=1}^{n+1} \qquad \dots\dots.(A.6)$$

Ahora bien, de la fórmula (A.4) se tiene que

$$V^{x+r} u_{x+r} = E^r V^x u_x$$

Por otro lado

$$V^{x+r} u_{x+r} = V^x V^r u_{x+r} = V^x V^r E^r u_x = V^x (VE)^r u_x = (VE)^r V^x u_x$$

$\therefore$

$$E^r V^x u_x = (VE)^r V^x u_x$$

$\Rightarrow$

$$E = VE$$

Sustituyendo en la fórmula (A.6)

$$(E - 1)^{-1} V^x u_x = (VE - 1)^{-1} V^x u_x$$

$$= V^x (V(1+\Delta)-1)^{-1} u_x$$

$$= \frac{V^x}{V-1} \left[1 + \frac{V\Delta}{V-1} \right]^{-1} u_x$$

Desarrollando el binomio

$$= \frac{V^x}{V-1} \left[1 - \frac{V\Delta}{V-1} + \frac{V^2\Delta^2}{(V-1)^2} - \dots \right] u_x$$

$\therefore$

$$\sum_{x=1}^{n} V^x u_x = \left[\frac{V^x}{V-1} \left[1 - \frac{V\Delta}{V-1} + \frac{V^2\Delta^2}{(V-1)^2} - \frac{V^3\Delta^3}{(V-1)^3} + \dots \right] u_x \right]_{x=1}^{n+1}$$

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

Coss Bu Raúl, ANALISIS Y EVALUACION DE PROYECTOS DE INVERSION. Ed. LIMUSA, 1982.

De la Cueva Benjamin, MATEMATICAS FINANCIERAS. Ed. PORRUA, 1982.

Freeman Harry, FINITE DIFFERENCES FOR ACTUARIAL STUDENTS. Cambridge published for the Institute of Actuaries at University Press, 1960.

Jordan Karoly, CALCULUS OF FINITE DIFFERENCES. Chelsea Publishing Company, New York, 1960.

Kellison Stephen G., THE THEORY OF INTEREST, Ed. Irwin, 1970.

Kunz Kaiser S., NUMERICAL ANALYSIS, Ed. McGraw Hill, 1957.

Pérez Tejada López F. Alonso, PROYECTO DE TEXTO PARA CALCULO ACTUARIAL I. Tésis para obtener el Titulo de Actuario, UNAM, 1985.

Richardson Clarence H., CALCULUS OF FINITE DIFFERENCE. O. Van -- Nostrand Company, Inc., USA, 1966.

Scarborough James B., NUMERICAL MATHEMATICAL ANALYSIS. The Johns Hopkins Press, 1966.

Tarquin Anthony J. & Leland T. Blank, INGENIERIA ECONOMICA. Ed. McGraw Hill, 1979.