

77 20



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

MODELO DE HELE - SHAW
APLICADO AL ESTUDIO
DEL FLUJO DE AGUA EN SUELOS

TESIS PROFESIONAL
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
INGENIERO CIVIL
P R E S E N T A .
DAVID ALBERTO HERNANDEZ ROBLES



MEXICO, D. F.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1990



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

INTRODUCCION.....	1
-------------------	---

CAPITULO 1

FUNDAMENTOS TEORICOS DEL FLUJO DE AGUA EN SUELOS.

1.1	AGUA HIGROSCOPICA, CAPILAR Y GRAVITACIONAL.....	6
1.2	HIPOTESIS DEL MEDIO CONTINUO.....	7
1.3	DENSIDAD Y PESO ESPECIFICO.....	11
1.4	COMPRESIBILIDAD.....	13
1.5	METODOS DE ANALISIS DE LA MECANICA DEL MEDIO CONTINUO.....	15
1.6	TRAYECTORIAS Y LINEAS DE FLUJO.....	16
1.7	VELOCIDADES DE FILTRACION Y DESCARGA.....	21
1.8	ESFUERZOS Y FUERZAS MASICAS.....	27
1.9	VISCOSIDAD.....	37
1.10	FLUJO ROTACIONAL.....	41
1.11	ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA HIDRODINAMICA.....	43
1.12	ECUACION DE CONTINUIDAD.....	53
1.13	LEY DE DARCY.....	57
1.14	VALIDEZ DE LA LEY DE DARCY.....	62
1.15	ECUACION DE LAPLACE.....	65

CAPITULO 2

FLUJO CON POTENCIAL.

2.1	FUNCIONES DE CORRIENTE.....	75
2.2	POTENCIAL DE VELOCIDAD.....	85
2.3	SOLUCION DE LA ECUACION DE LAPLACE.....	90
2.4	CONDICIONES DE FRONTERA.....	95
2.5	METODO GRAFICO.....	102
2.6	DETERMINACION DEL GASTO UNITARIO A PARTIR DE LA RED DE FLUJO.....	104
2.7	CALCULO DE LAS PRESIONES HIDRODINAMICAS A PARTIR DE LA RED DE FLUJO.....	108
2.8	CALCULO DE VELOCIDADES Y GRADIENTES HIDRAULICOS.....	113

CAPITULO 3

MODELO DE HELE-SHAW.

3.1	FLUJO LAMINAR ENTRE PLACAS PLANAS, PARALELAS.....	116
3.2	PERDIDA DE ENERGIA POR FRICCION.....	135
3.3	MODELO DE HELE-SHAW.....	145

CONCLUSIONES.

CONCLUSIONES.....180

BIBLIOGRAFIA.....184



INTRODUCCION.

El agua es tan noble para quien se acerca a ella con humildad y deseo sincero de conocer su comportamiento, como traicionera para el incauto que, con poca preparación y visión estrecha, quiere dominarla.

Enzo Levi

El agua es uno de los elementos más abundantes de nuestro planeta, el volumen de toda clase de recursos hidráulicos a nivel mundial se ha estimado en 2,000 millones de kilómetros cúbicos, de los cuales aproximadamente el 0.002 % corresponden a los recursos de agua dulce, que en su mayor parte son de difícil acceso, por lo que solamente pueden aprovecharse aproximadamente 8,000 kilómetros cúbicos anuales, para satisfacer los múltiples requerimientos que demandan agua dulce.¹ Además, como es de imaginarse, la demanda de agua dulce crece con el tiempo, se ha estimado que al inicio de este siglo la demanda mundial de agua dulce era aproximadamente de 400 kilómetros cúbicos al año, que la demanda actual es ocho veces mayor (aproximadamente de 3,200 kilómetros cúbicos de agua dulce al año), y se estima que esta última cantidad se triplicará para el año 2009 (aproximadamente 9,600 kilómetros cúbicos de agua dulce anuales), de seguir con el mismo ritmo de consumo habrá un déficit considerable de este vital recurso en un futuro próximo.²

El agua es indispensable para la vida en nuestro planeta, también es causa de importantes y constantes cambios en la naturaleza, acarreado diversidad de materiales en su movimiento, disolviendo minerales, oxidando metales, etcétera, estos cambios influyen en las obras diseñadas y construidas por seres humanos, por lo general en perjuicio de las mismas, a esto se le denomina efecto destructivo del agua. Todavía, en determinadas estaciones del año, nos enteramos de noticias donde se ponen de manifiesto

¹González Villareal, Fernando Dr., "LA INGENIERIA HIDRAULICA", INGENIERIA, Vol. LV, Núm. 4, (Facultad de Ingeniería, U.N.A.M., México, 1985), pp. 84 - 90.

²Id.

los efectos destructivos del agua, tales como desbordamientos de ríos, inundaciones, deslaves, etcétera, con las consecuentes pérdidas de vidas y bienes, por lo tanto, es indispensable mejorar nuestros sistemas de explotación y control de agua, a partir de un mejor conocimiento de este vital líquido.

El agua que fluye en el interior de los suelos, constituye una de las principales fuentes de abastecimiento de este preciado líquido, en nuestro país se ha estimado un volumen de agua subterránea renovable de unos 48,000 millones de metros cúbicos anuales, siendo en la mayoría de las zonas áridas la única fuente de abastecimiento segura disponible.³ Para poder explotar eficientemente este recurso, y también para poder estimar los efectos de dicho flujo en la naturaleza y sus consecuencias en las obras construidas por los seres humanos, es necesario analizar y comprender los fenómenos relacionados con el flujo de agua en suelos, ya que es común subestimar estos efectos, especialmente por que es agua que no vemos ni tocamos, que sin embargo, es capaz de tirar muros; desestabilizar taludes, tablestacas, cortinas de presas; levantar placas de concreto armado, cimentaciones etcétera. Mediante el análisis del flujo del agua en los suelos, el ingeniero civil, requiere conocer sobre todo: el gasto de infiltración a través de la zona de flujo; la influencia del flujo de agua sobre la estabilidad general de la masa de suelo a través de la que ocurre; y la posibilidad del agua de infiltración de producir arrastres de material sólido, erosiones, tubificaciones, etcétera.

Aunque las obras de ingeniería que contemplan el flujo de agua en suelos son muy antiguas, no fué sino a mediados del siglo pasado, cuando un ingeniero francés llamado Henri Darcy presentó el primer análisis racional del flujo de agua a través de medios porosos, resultando de dicho análisis, una expresión matemática obtenida en forma experimental, actualmente denominada "ley de Darcy", que constituye el concepto fundamental de la teoría actual del flujo de agua a través de medios porosos.⁴

Posterior a Darcy, alrededor del año de 1880, Ph. Forchheimer demostró que la Ley de Darcy es una función armónica, es decir, que satisface la ecuación diferencial de Laplace.⁵ De

³Id.

⁴Darcy, H., LES FONTAINES PUBLIQUES DE LA VILLE DE DIJON, Paris, 1856.

⁵Forchheimer, Ph., UBER DIE ERGIEBIGKEIT VON BRUNNENANLAGEN UND SICKERSCHLITZEN, Zeitschrift Architekten und Ingenieur, Verein, Hannover, 1886.

esta manera, la teoría del flujo con potencial se convierte en la herramienta más importante y poderosa, en el análisis de flujos a través de medios porosos. Sin embargo, la solución matemática exacta de la ecuación de Laplace, en la mayoría de los casos prácticos, es sumamente complicada sino imposible, por lo que se tiene que recurrir a métodos numéricos aproximados, analógicos, gráficos, etcétera, para resolver los problemas prácticos de flujo con potencial.

El mismo Forchheimer desarrolló las bases de lo que en la actualidad se conoce como método gráfico o de las redes de flujo que es actualmente, por su versatilidad y sencillez, el método más utilizado por la mayoría de los ingenieros para resolver problemas de flujo con potencial. Este método, basa su solución en el trazo de la red de flujo correspondiente a una sección bidimensional de un problema en cuestión, una vez que la red de flujo ha sido trazada, el problema de flujo puede resolverse sin mayor complicación, a partir de datos proporcionados por la misma red, el principal problema del método es precisamente el trazo de la red de flujo, ya que por lo general, este se hace a mano y debe satisfacer una serie de requisitos para que la red sea representativa de la región de flujo que se está analizando.

El trazo o la reproducción confiable de las redes de flujo, ha sido de las principales preocupaciones de los ingenieros y científicos dedicados al estudio de flujos potenciales, resultando diversos métodos para tal fin, de muy variadas características.

Alrededor del año de 1899, Sir G. G. Stokes, presentó un análisis matemático del flujo laminar de un líquido viscoso entre paredes planas paralelas, demostrando que dicho flujo puede derivarse de un potencial bidimensional, como fue supuesto por Hele-Shaw quien a partir de este principio, diseñó en Inglaterra el primer modelo de este tipo, mediante el cual fue capaz de reproducir diferentes configuraciones de flujos potenciales bidimensionales.

Los modelos de Hele-Shaw, han sido ampliamente utilizados en diferentes lugares del mundo, para analizar todo tipo de flujos potenciales obteniendo resultados altamente satisfactorios, su operación es muy simple y por lo general tienen un costo de construcción más económico que cualquiera de los modelos actualmente utilizados en el estudio y resolución de problemas de flujo con potencial, pues esencialmente consisten en dos placas de material translúcido, separadas una distancia muy pequeña entre las que se hace pasar un líquido viscoso en régimen laminar, sin embargo, en México este tipo de modelos no ha sido bien difundido, siendo prácticamente desconocido por una gran parte de los ingenieros que tienen que ver con flujos potenciales, como es el caso del flujo de agua en suelos.

También en el campo de la docencia de la mecánica de fluidos, los modelos de Hele-Shaw constituyen una herramienta sumamente útil, reproduciendo imágenes de flujo, que proporcionan una idea clara y objetiva de los fenómenos de flujo.

El objetivo principal de esta tesis, es presentar las características esenciales de los modelos de Hele-Shaw y su relación con el estudio y resolución de problemas de flujo de agua a través de medios porosos, considerando que un modelo tan útil, de características adecuadas tanto para la investigación, como para la docencia no puede pasar inadvertido especialmente por los científicos e ingenieros de un país en el cual la economía y la eficiencia se han constituido en los principios de toda actividad emprendida, como es el caso de México.

CAPITULO 1

FUNDAMENTOS TEORICOS DEL FLUJO DE AGUA EN SUELOS

1.1 AGUA HIGROSCOPICA. CAPILAR Y GRAVITACIONAL.

El agua en nuestro planeta está en constante movimiento cíclico, conocido con el nombre de ciclo hidrológico, el cual es consecuencia de la interacción de la energía solar, de la fuerza de gravedad y movimientos de la Tierra.

Del agua que se precipita sobre las plataformas continentales, una parte fluye sobre la superficie del suelo, otra parte se evapora y otra se infiltra en el suelo fluyendo en su interior. De acuerdo a su disposición y movimientos en el interior de la masa de suelo, el agua puede clasificarse en tres categorías:

1° Considerando un suelo cualquiera, originalmente seco, al contacto con humedad, primeramente el agua será adsorbida por los granos que componen la masa del suelo, cubriéndolos en forma de película. En esta categoría, al agua se le conoce con el nombre de agua higroscópica o agua adsorbida.

2° Cuando el agua en el interior del suelo, llena los delgados poros intergranulares de la masa de suelo formando meniscos se le conoce con el nombre de agua capilar.

3° Finalmente, el agua que llena todos los poros y pequeños conductos intergranulares de la masa de suelo, a excepción quizá, de partes aisladas ocupadas por burbujas de aire atrapadas, moviéndose en el interior de la masa de suelo bajo el efecto de fuerzas gravitacionales, sin otro obstáculo que el que le impone su viscosidad y la trama estructural del suelo, se le conoce con el nombre de agua libre o gravitacional.

En el suelo, el agua gravitacional está separada del agua capilar por una superficie a la que se denomina nivel freático.

^a Se considera nivel freático, a la superficie que constituye el lugar geométrico de los puntos en que el agua posee una presión igual a la atmosférica.

1.2 HIPOTESIS DEL MEDIO CONTINUO.

Los suelos están compuestos por pequeños granos, producto de la descomposición de la roca, de diversas formas y tamaños, dispuestos aleatoriamente, los cuales encuentran el equilibrio con el contacto mutuo, formando poros o intersticios de formas y direcciones muy variadas, comunicados entre sí; razón por la cual a los suelos y a todo material con características similares se les denomina medios porosos. Por su trama estructural estos materiales permiten el flujo en su interior, por esto se les denomina también medios permeables.

Una partícula de agua que fluye en el interior de un medio poroso, se traslada describiendo trayectorias muy complicadas, con cambios drásticos de magnitud y dirección en velocidad y aceleración de un punto a otro. Sin embargo, este movimiento es de ningún modo caótico, sino ordenado, consecuencia de fuerzas desarrolladas en el interior del fluido que obedecen las leyes de la física. Por esta razón, es posible considerar los valores medios de magnitud y dirección de velocidad y aceleración de la tendencia general de movimiento para condiciones dinámicas definidas.

Para ejemplificar, considere la figura 1 (página 10), correspondiente al esquema de un dispositivo similar a un permeámetro de carga variable. Para las condiciones dinámicas específicas en el esquema, una partícula de agua que ocupa el punto b (sección 2), tenderá a trasladarse hacia el punto d (sección 4), describiendo una trayectoria recta, a través del medio poroso, no obstante esto no es posible debido a que los granos que forman el medio lo impiden y la trayectoria resulta, más bien, una línea sinuosa, tal como puede apreciarse en el esquema amplificado del punto c (sección 3). En ingeniería sin embargo, es suficientemente correcto considerar la trayectoria lineal de la partícula, desde un punto de vista macroscópico, para el problema en cuestión.

Debido a la complicada estructuración de los medios porosos, en la mayoría de los casos, es necesario adoptar hipótesis⁷ simplificadoras para poder analizar los fenómenos correspondientes a estos medios. El precio por abuso de la utilización de hipótesis simplificadoras se reflejará en la veracidad de los resultados del análisis relativo a la realidad del fenómeno en estudio. La aplicación de hipótesis simplificadoras en el análisis de todo fenómeno, debe

⁷Se define hipótesis, a la suposición de una cosa posible o imposible, para deducir de ella una consecuencia.

fundamentarse en criterios de aplicabilidad válidos, respaldados con la experimentación práctica y controlada.

La hipótesis más importante adoptada en el estudio de la mecánica de los materiales deformables, consiste en idealizarlos como medios continuos⁸. No obstante este concepto fundamental dió origen a la Mecánica del Medio Continuo⁹, no deja de constituir un modelo fenomenológico que solo es aceptable desde un punto de vista macroscópico.

La Mecánica del Medio Continuo, constituye la base teórica fundamental en el estudio del flujo de agua en suelos y de otras disciplinas.

En el análisis del flujo de agua en suelos, el suelo constituye el campo de flujo¹⁰ con determinadas características específicas, que se reflejan en el flujo, considerando que éstas no cambian por consecuencia del flujo. Se puede interpretar que el fluido, en este caso constituido por el agua, tiene una participación activa en el análisis, (es la que ejecuta la acción), es el objeto mismo del análisis, en cambio el suelo, tiene una participación más bien pasiva pero fundamental en el análisis. El suelo puede compararse a un escenario, donde se ejecuta la acción, cuyas características influyen en la acción misma, sin que ésta sea capaz de modificar las características propias del escenario.

⁸Se considera medio continuo, al lugar geométrico idealmente continuo, ocupado por materia homogénea e isotrópica, de idénticas propiedades características en todos sus puntos constitutivos.

⁹La MECANICA DEL MEDIO CONTINUO, es la ciencia que tiene como finalidad estudiar los esfuerzos que se manifiestan en el interior de los materiales deformables, sus deformaciones o fluencias y la relación entre los esfuerzos y las deformaciones o fluencias, idealizando los materiales como medios continuos.

¹⁰Se considera campo de flujo, a cualquier región en el espacio, idealmente continua, ocupada totalmente por un fluido en movimiento. No debe confundirse el concepto de campo de flujo, al concepto matemático de campo escalar, vectorial, tensorial, etc..

En el estudio del flujo de agua en suelos, tanto el agua como el suelo se idealizan como medios continuos, lo que implica que las características propias de cada material, tales como densidad, viscosidad, permeabilidad, temperatura, etcétera, serán idénticas en todos los puntos que los conforman, en cualquier instante considerado, además de estar dotados de esa continuidad ideal característica de los medios continuos.

El concepto de medio continuo, implica rigurosamente la característica de isotropía¹¹. Con frecuencia es posible considerar la isotropía del medio en determinados sentidos convenientes al análisis de un problema real, por esta razón, la hipótesis del medio continuo trasciende el caso anisótropo¹².

¹¹Un medio se considera isótropo, cuando sus propiedades físicas, en cualquier punto constitutivo del medio son idénticas en todas direcciones.

¹²Anisótropo es el medio que no es isótropo.

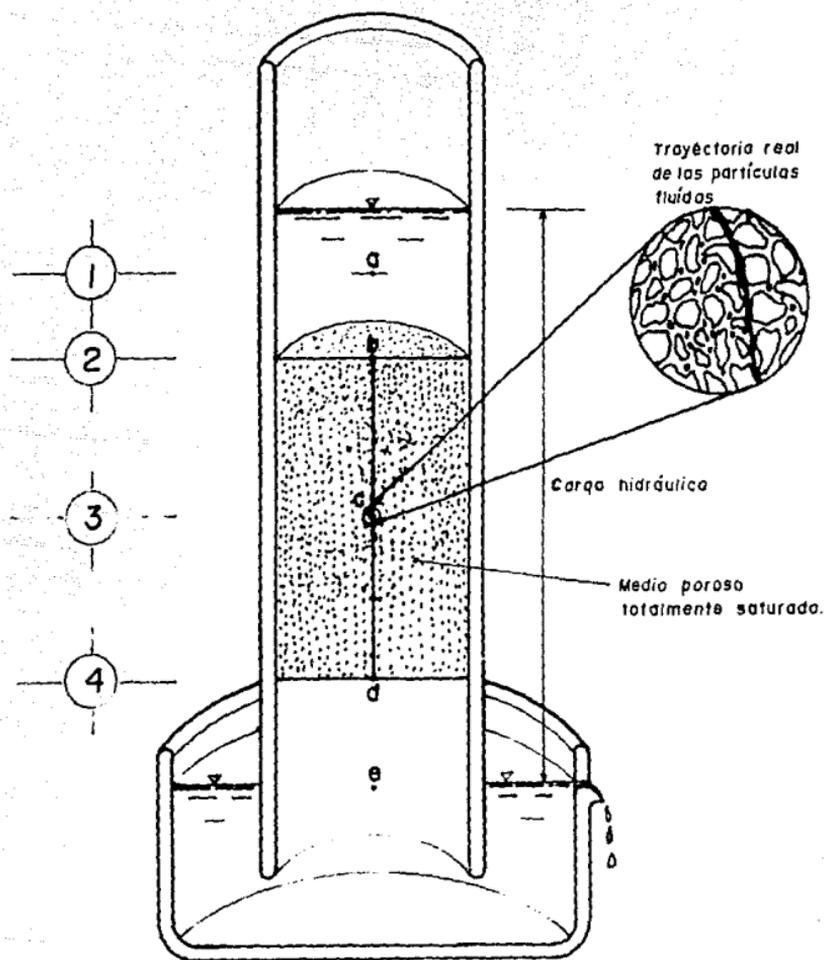


FIGURA 1

Esquema simplificado
de un permeámetro
de carga variable.

1.3 DENSIDAD Y PESO ESPECIFICO.

Todos los materiales cuentan con una serie de propiedades y características que los distinguen entre sí, de carácter extensivo cuando dependen de las dimensiones de los cuerpos. Los análisis basados en cuerpos de dimensiones definidas, tienen alcances muy limitados. Las leyes de la Mecánica, se caracterizan por la universalidad de sus conceptos cuya abstracción no distingue límites.

En la Mecánica del Medio Continuo, es importante que las propiedades y características de los materiales se puedan definir para todos los puntos que componen el material y que no dependan de las dimensiones de los cuerpos, por esta razón, se han definido las propiedades intensivas o de punto de los materiales, como aquellas propiedades características de todos los puntos de un medio continuo que idealiza a un material específico, las cuales surgen de las relaciones entre las propiedades extensivas. Las magnitudes denominadas específicas constituyen propiedades intensivas.

La densidad, también llamada masa específica, es una propiedad intensiva muy importante de los materiales, se representa con el símbolo ρ y se define como la cantidad de masa contenida en la unidad de volumen de un material, matemáticamente se expresa de la siguiente manera:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \quad (1.3.1)$$

donde: m es la masa del cuerpo, y
 V es el volumen del cuerpo.

Bajo la influencia de un campo gravitacional, surge la propiedad intensiva de los materiales denominada peso específico, la que es igual a la relación entre el peso¹³ del cuerpo y su volumen, se representa con el símbolo γ y matemáticamente se define como sigue:

$$\gamma = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta V} = \frac{dW}{dV} \quad (1.3.2)$$

donde: W es el peso del cuerpo.

El peso específico de un material, es igual a su densidad por el valor de la aceleración de la gravedad. El valor de la aceleración de la gravedad terrestre es g , por lo tanto, el peso específico de un material se puede expresar de la siguiente forma:

$$\gamma = \rho g \quad (1.3.3)$$

¹³ Peso es la fuerza de atracción que un planeta ejerce sobre la masa de un cuerpo.

1.4 COMPRESIBILIDAD.

La compresibilidad de un medio continuo, se define como la variación de su densidad respecto a la variación de la presión actuante en el medio, a temperatura constante (proceso isotérmico).

Considerese un volumen de control V en el interior de un material idealizado como medio continuo, como el que se muestra en la figura 5 (página 35), el cual, tiene una temperatura uniforme T , contiene una masa m y originalmente está sujeto a una presión p . La densidad del medio es $\rho = m/V$, considerando que los cambios de temperatura del medio durante un proceso cuasiestático son despreciables, al incrementar la presión actuante en el medio en dp , la densidad se incrementa en $d\rho$, esto implica que el volumen experimenta un decremento $-dV$, pero la masa del volumen de control permanecerá constante, por lo tanto, la variación de la masa con respecto a la variación de presión vale cero, matemáticamente se expresa como sigue:

$$\frac{dm}{dp} = \frac{d(\rho V)}{dp} = \rho \frac{dV}{dp} + V \frac{d\rho}{dp} = 0. \quad (1.4.1)$$

de la ecuación anterior se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\rho \frac{dV}{dp} = - V \frac{d\rho}{dp} \quad (1.4.2)$$

o bien,

$$\frac{dp}{\rho d\rho} = - V \frac{dV}{dV} \quad (1.4.3)$$

El incremento de densidad por unidad de densidad debido al incremento de presión, a temperatura constante, es igual al decremento de volumen por unidad de volumen.

El módulo de elasticidad volumétrica, es igual a la razón entre el incremento de presión dp y el consiguiente incremento relativo de densidad o el consiguiente decremento relativo de volumen. se representa con el símbolo E_v y matemáticamente es igual a cualquiera de los miembros de la ecuación (1.4.3)

$$E_v = \rho \frac{dp}{d\rho} = -v \frac{dp}{dv} \quad (1.4.4)$$

El módulo de elasticidad volumétrica, tiene un papel importante en la propagación de perturbaciones elásticas en la masa de un medio continuo, sus dimensiones corresponden a las de un esfuerzo, esto es: $[FL^{-2}]$ en el sistema gravitacional de unidades y $[ML^{-1}T^{-2}]$ en el sistema internacional de unidades.

Un medio se puede considerar incompresible cuando las variaciones de su densidad son relativamente pequeñas con respecto a las variaciones de la presión actuante en el medio las cuales se pueden considerar prácticamente despreciables. En este caso, el módulo de elasticidad volumétrica adquiere valores relativamente grandes (prácticamente vale infinito).

En el análisis del flujo de agua en suelos, se supone que tanto el agua como las partículas sólidas que componen la masa del suelo, son incompresibles en sí mismas, esta suposición, constituye otra de las hipótesis importantes del análisis.

1.5 METODOS DE ANALISIS DE LA MECANICA DEL MEDIO CONTINUO.

En la actualidad, se utilizan dos puntos de vista diferentes en el análisis teórico de la Mecánica del Medio Continuo, correspondientes a los métodos local ó euleriano y substancial ó lagrangiano.

El punto de vista local ó euleriano, (llamado de esta manera debido a que fué adoptado sistemáticamente por Euler en sus estudios de hidrodinámica); consiste en la determinación de las características cinemáticas de cada punto en cada instante de un flujo, sin considerar el destino individual de cada partícula. Haciendo un enfoque de una región determinada del flujo, de forma y dimensiones constantes, se analizan las condiciones en las que pasan las partículas por los puntos de dicha región, la cual constituye un volumen adecuado de fluido llamado volumen de control, que es fijo respecto a un sistema de referencia. El contorno del volumen de control se llama superficie de control. El análisis basado en este punto de vista considera el intercambio de masa, energía y cantidad de movimiento a través de las fronteras del volumen de control, que pueden ser de tamaño diferencial y de dimensiones finitas.

El punto de vista substancial ó lagrangiano (adoptado por Lagrange) consiste en determinar las características cinemáticas del movimiento de cada partícula del flujo en cada instante, siguiendo sus trayectorias. En el análisis lagrangiano se considera una cantidad definida de materia, que recibe el nombre de sistema, la cual ocupa una región dentro del flujo, que puede cambiar de posición, forma, condición térmica, etcétera, pero su masa permanece constante en cualquier instante considerado. La finalidad del análisis es poder determinar las características físicas del sistema en cualquier instante.

En el análisis del movimiento de los fluidos es preferible adoptar un punto de vista local ó euleriano, reservando el punto de vista lagrangiano al estudio de las deformaciones en los sólidos.

En el análisis de fenómenos reales, no es suficiente adoptar un punto de vista meramente teórico, se requiere además, de métodos experimentales que permitan verificar, evaluar y complementar los alcances de la teoría. Actualmente los métodos experimentales, constituyen el mejor intento de acercarse lo más razonablemente posible a la realidad, tratando de reproducir el fenómeno físico real en un medio controlado, de magnitudes y características conocidas. Estos métodos deben fundamentarse en conceptos teóricos científicos y constituyen una herramienta indispensable en la solución de problemas en ingeniería.

1.6 TRAYECTORIAS Y LINEAS DE FLUJO.

Se define como línea de flujo o de corriente a toda curva idealmente trazada en el interior de un campo de flujo, cuya dirección es igual a la del flujo y la velocidad tangente en todos los puntos que la forman, para un instante determinado.

La configuración de las líneas de corriente cambiarán de un instante a otro en un campo de flujo determinado.

No es posible que en un campo de flujo existan puntos con dos ó más velocidades distintas, por lo que en un instante determinado, cada punto de un campo de flujo será parte de una y solo una línea de flujo.

Utilizando un Sistema de Referencia Cartesiano¹⁴, las componentes de la velocidad en cada punto de un campo de flujo con respecto a cada uno de los ejes coordenados, en un instante determinado, son función exclusivamente del espacio

$$v_x = f(x, y, z) \quad (1.6.1.a)$$

$$v_y = g(x, y, z) \quad (1.6.1.b)$$

$$v_z = h(x, y, z) \quad (1.6.1.c)$$

¹⁴Se define "SISTEMA DE REFERENCIA CARTESIANO" a un sistema de referencia espacial, compuesto de tres ejes coordenados ortogonales entre sí, intersecados en un mismo punto denominado origen.

y por definición, las componentes de la velocidad pueden escribirse de la siguiente manera:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad (1.8.2.a)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} \quad (1.8.2.b)$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} \quad (1.8.2.c)$$

Si en las ecuaciones (1.8.2) se despeja dt , se pueden igualar, obteniendo un sistema de tres ecuaciones diferenciales que describen las líneas de corriente de un campo de flujo, en un instante determinado

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \quad (1.8.3)$$

Se llama trayectoria a la línea formada por los puntos de posiciones sucesivas ocupadas por una partícula de fluido en el tiempo.

No debe confundirse el concepto de trayectoria con el de línea de flujo, no obstante ambos conceptos son similares, su diferencia principal radica en que el concepto de línea de flujo, considera el estado del campo de flujo en un instante determinado, mientras que el concepto de trayectoria considera los desplazamientos individuales de las partículas que componen el fluido.

El concepto de línea de flujo se enfoca a un análisis basado en un punto de vista euleriano, mientras el concepto de

trayectoria se considera, más bien, en el análisis desde un punto de vista lagrangiano.

El sistema de ecuaciones diferenciales que define la trayectoria de una partícula de un fluido, es similar al sistema de ecuaciones (1.6.3), sin embargo, en este caso, las componentes de la velocidad de cada partícula dependerán tanto del espacio como del tiempo

$$v_x = f(x, y, z, t) \quad (1.6.4.a)$$

$$v_y = g(x, y, z, t) \quad (1.6.4.b)$$

$$v_z = h(x, y, z, t) \quad (1.6.4.c)$$

En la figura 2 (página 19), se presenta una interpretación gráfica de los conceptos de línea de flujo y trayectoria para un flujo determinado, ambas curvas son tangentes en un instante específico, representado en la figura por t_0 . En un flujo permanente o establecido $\partial v / \partial t = 0$, solo en este caso las líneas de flujo coinciden con las trayectorias.

Una superficie idealmente trazada en el interior de un campo de flujo, formada por líneas de flujo, se denomina superficie de flujo o de corriente, cuando esta superficie es cerrada se forma un tubo denominado tubo de flujo o de corriente y el volumen contenido en dicho tubo se denomina vena fluida o líquida, En la figura 3 (página 20), se presenta una representación gráfica de estos conceptos.

La integración aproximada de las ecuaciones de la Mecánica para una vena líquida, equivale a considerar volúmenes finitos de control lo que simplifica el análisis considerablemente.

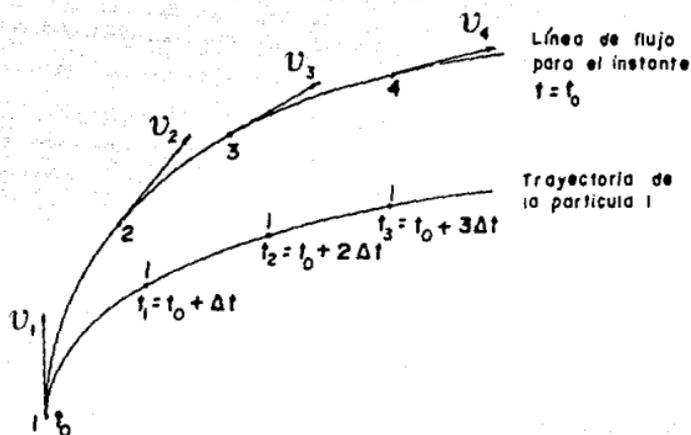
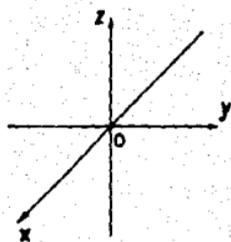


FIGURA 2

Representación gráfica
de línea de flujo y
trayectoria.

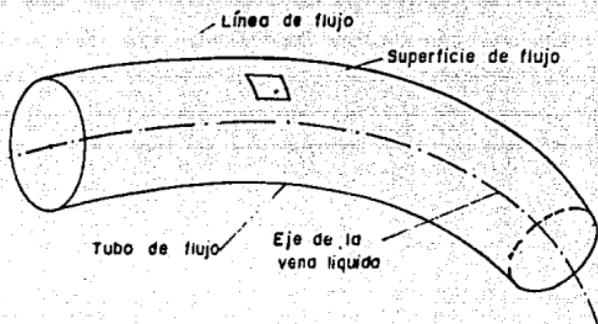
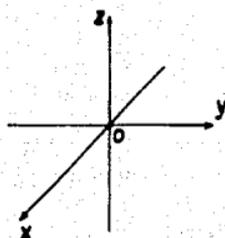


FIGURA 3

Representación gráfica de los
conceptos de tubo, línea y
superficie de flujo, y vena
líquida.

1.7 VELOCIDADES DE FILTRACION Y DESCARGA.

Considere que la muestra de suelo contenida en el dispositivo mostrado en la figura 1 (página 10) se encuentra totalmente saturada, ahora suponga que dicha muestra de suelo se puede dividir físicamente en sus fases sólida y líquida; de esta manera es posible determinar la relación entre las velocidades medias que adquiere el flujo antes de infiltrarse en el interior del suelo y a través de éste, a partir de la ley de la conservación de la materia para una vena líquida.

En la figura 4 (página 28), se presenta nuevamente el esquema del permeámetro de la figura 1, pero ahora conteniendo a la muestra saturada de suelo dividida en sus fases sólida y líquida. Si se supone un espesor unitario, normal a la hoja de papel, antes de infiltrarse en el interior del suelo, el agua adquiere una velocidad media v , a través de un área disponible para el paso del agua A (sección 1) y en el volumen de vacíos de la masa de suelo, el flujo adquiere una velocidad media v_s , con un área disponible para el paso del agua A_v (de la sección 2, a la sección 4). De acuerdo a la ley de la conservación de la materia para una vena líquida, en ambas secciones se tendrá el mismo caudal

$$Q = A v = A_v v_s \quad (1.7.1)$$

$$v_s = \frac{A}{A_v} v \quad (1.7.2)$$

donde: v_s es la velocidad media de avance del agua en la dirección del flujo a través del suelo, tomando en cuenta la existencia de una fase sólida impermeable del suelo, llamada velocidad media de infiltración (seepage velocity);

v es la velocidad media del flujo antes y después de la infiltración y se llama velocidad media de descarga o simplemente velocidad (discharge velocity);

A es el área total de la muestra de suelo, transversal a la dirección del flujo (total area); y

A_v es el área correspondiente al volumen de vacíos del suelo, transversal a la dirección del flujo (void area).

De la definición de porosidad de un suelo, resulta:

$$\mathcal{P} = \frac{V_v}{V_m} \quad (1.7.3)$$

donde: \mathcal{P} es la porosidad del suelo;

V_v es el volumen de vacíos de la muestra de suelo del dispositivo de la figura 4;

V_m es el volumen de la muestra de suelo del dispositivo de la figura 4.

esto es:

$$V_v = L A_v \quad (1.7.4)$$

$$V_m = L A \quad (1.7.5)$$

donde L es la longitud de la muestra de suelo contenida en el dispositivo de la figura 4.

Substituyendo las ecuaciones (1.7.4) y (1.7.5) en la ecuación (1.7.3) y desarrollando las operaciones algebraicas indicadas, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\eta = \frac{V_v}{V_m} = \frac{L A_v}{L A} = \frac{A_v}{A} \quad (1.7.6)$$

o bien,

$$\frac{1}{\eta} = \frac{A}{A_v} \quad (1.7.7)$$

Substituyendo la ecuación (1.7.7) en la ecuación (1.7.2), la velocidad de infiltración también puede expresarse de la siguiente manera:

$$u_s = \frac{1}{\eta} u \quad (1.7.8)$$

La relación de vacíos se expresa de la siguiente manera:

$$e = \frac{V_v}{V_s} \quad (1.7.9)$$

donde: e es la relación de vacíos, oquedad o índice de poros;

V_s es el volumen de la fase sólida de la muestra de suelo, contenida en el dispositivo de la figura 4 (volumen de sólidos).

El volumen de sólidos puede expresarse de la siguiente manera:

$$V_s = V_m - V_v \quad (1.7.10)$$

Substituyendo la ecuación (1.7.10) en la ecuación (1.7.9) se obtiene la siguiente ecuación:

$$e = \frac{V_v}{V_m - V_v} = \frac{V_v}{\left[\frac{V_m}{V_v} - 1 \right] V_v} \quad (1.7.11)$$

Substituyendo la ecuación (1.7.3) en la ecuación (1.7.11) y desarrollando operaciones algebraicas indicadas, se obtiene la siguiente ecuación:

$$e = \frac{1}{\frac{1}{\rho_s} - 1} \quad (1.7.12)$$

o bien,

$$\frac{1}{\rho_s} = \frac{1 + e}{e} \quad (1.7.13)$$

Finalmente, substituyendo la ecuación (1.7.13) en la ecuación (1.7.8) se obtiene otra expresión equivalente para calcular la velocidad de infiltración, a partir de la velocidad de descarga y la relación de vacíos

$$v_s = \frac{1 + e}{e} v \quad (1.7.14)$$

Para conocer la velocidad media real del flujo en el interior del suelo, es indispensable conocer la variación del área de los poros en cada intersticio de la masa de suelo, lo cual es prácticamente imposible en la actualidad.

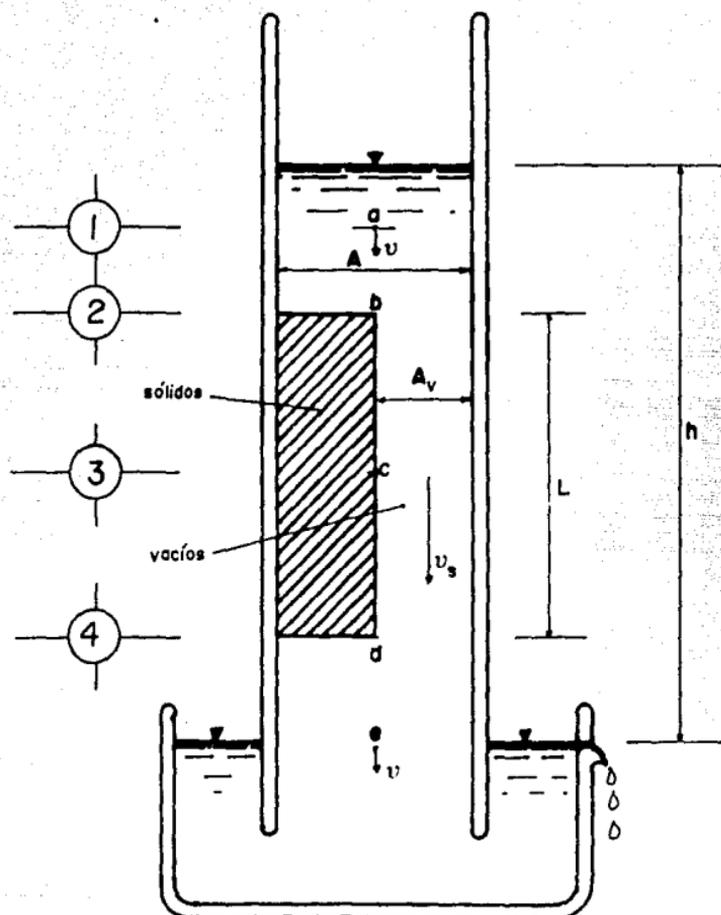


FIGURA 4

Interpretación gráfica de los conceptos de velocidad media de descarga y velocidad media de infiltración.

1.8 ESFUERZOS Y FUERZAS MASICAS.

Fuerza es la acción del medio sobre los cuerpos, que se manifiesta en la tendencia de cambiar la forma y cinemática de estos.

Las fuerzas que actúan en el interior de un medio continuo, se pueden clasificar en fuerzas de masa ó de cuerpo y fuerzas de superficie.

Las fuerzas de masa, se distribuyen uniformemente en toda la masa del medio. Por lo general, el peso de la materia representa la fuerza de masa más importante, también pueden ser magnéticas, electromagnéticas, centrifugas, etcétera. Son de carácter extensivo, por que dependen de las dimensiones del cuerpo al cual se aplican. Al dividir estas fuerzas entre la unidad de masa se obtiene la respectiva propiedad intensiva de las fuerzas de masa, llamadas fuerzas másicas ó por unidad de masa, cuyas unidades corresponden a las de una aceleración de acuerdo a la segunda ley de Newton.

En la figura 5 (página 35), se presenta un esquema de un volumen de control V_c de un medio continuo, el cual contiene substancia homogénea de densidad ρ , a una temperatura uniforme T . Considere a M una fuerza másica cualquiera, entonces la fuerza de masa F , aplicada en el centro de gravedad (punto Q) de un volumen diferencial dV cualquiera, interior al volumen de control, se expresa como sigue:

$$F = M \rho \, dV \quad (1.8.1)$$

Con respecto a un sistema de referencia cartesiano, la fuerza másica se puede expresar por el siguiente vector:

$$M = X_i + Y_j + Z_k \quad (1.8.2)$$

Si las fuerzas místicas son el resultado de la acción de la gravedad en el medio, las componentes de la fuerza mística adquieren los valores siguientes:

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = -g \quad (1.8.3)$$

Substituyendo las igualdades (1.8.3) en la ecuación (1.8.2) se obtiene la siguiente ecuación:

$$M = -gk \quad (1.8.4)$$

donde g es el valor local de la aceleración de la gravedad terrestre.

Las fuerzas de superficie, actúan sobre alguna superficie específica del medio continuo.

Las fuerzas de superficie también son de carácter extensivo, por que dependen de las dimensiones de la superficie a la cual se aplican. La magnitud intensiva corresponde al esfuerzo específico, unitario o simplemente esfuerzo.

Para definir el concepto de esfuerzo, considere el elemento diferencial de superficie dS , cuyo centroide se localiza en el punto p del volumen de control de la figura 5. El elemento diferencial de superficie dS , queda definido a partir de un vector unitario n , aplicado en el punto p , ortogonal a dicho elemento, cuyo sentido se considera positivo de acuerdo a una convención arbitraria. Ahora, si se considera una fuerza de superficie de magnitud df , aplicada uniformemente sobre el elemento dS (la línea de acción de df no necesariamente coincidirá con la dirección de n) el esfuerzo específico en el punto p con respecto a n , el cual se representa con el símbolo $T(n)$ se define de la siguiente manera:

$$T(n) = \frac{df}{dS} \quad (1.8.5)$$

La fuerza que el esfuerzo $T(n)$ genera sobre el elemento de superficie dS , será:

$$df = T(n) dS \quad (1.8.6)$$

La magnitud del esfuerzo específico, dependerá tanto de la ubicación del punto p como de la orientación del elemento dS .

La fuerza df , aplicada al elemento diferencial de superficie dS , puede descomponerse en dos componentes: una normal al elemento dS , representada con el símbolo df_n y otra tangente a dicho elemento de superficie, representada con el símbolo df_t , tal como se muestra en la figura 6 (página 38), matemáticamente la fuerza df es igual a la suma de sus componentes normal y tangente tal como se expresa en la siguiente ecuación:

$$df = df_n + df_t \quad (1.8.7)$$

Substituyendo la ecuación (1.8.7) en la ecuación (1.8.5), se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$T(n) = \frac{df}{dS} = \frac{df_n + df_t}{dS} \quad (1.8.8)$$

$$T(n) = \frac{df_n}{dS} + \frac{df_t}{dS} \quad (1.8.9)$$

Al primer término del segundo miembro de la ecuación (1.8.9) se le denomina esfuerzo normal y se representa con el símbolo σ , el cual puede ser de tensión, si el sentido de df_n es igual al de n , o de compresión, si el sentido de df_n es contrario al de n .

Al segundo término del segundo miembro de la ecuación (1.8.9), se le denomina esfuerzo tangencial y se representa con el símbolo τ . Matemáticamente el esfuerzo unitario es igual a la

suma de los esfuerzos normal y tangencial, expresado de la siguiente forma:

$$\sigma = \frac{df_n}{dS} \quad (1.8.10)$$

$$\tau = \frac{df_t}{dS} \quad (1.8.11)$$

$$T(n) = \sigma + \tau \quad (1.8.12)$$

En cualquier punto de un medio continuo existen infinitos esfuerzos, uno por cada elemento de superficie idealmente trazado por el punto mismo. Al conjunto de esfuerzos en un punto de un medio continuo se le denomina estado de esfuerzos en dicho punto, siempre es conveniente adoptar un sistema de referencia cartesiano y definir el estado de esfuerzos en un punto determinando los esfuerzos actuantes en los elementos de superficie ortogonales a los ejes coordenados del sistema de referencia cartesiano; esto equivale a descomponer el esfuerzo específico en tres componentes respectivas a los tres planos principales del sistema de referencia cartesiano, de esta manera se obtiene lo que se denomina tensor esfuerzo.

Considere nuevamente el vector unitario n , normal a un elemento diferencial de superficie dS , aplicado en su centroide correspondiente al punto p , de un medio continuo. Con respecto a un sistema de referencia cartesiano, matemáticamente el vector n es igual a la suma de sus componentes respecto a las direcciones de los ejes cartesianos

$$n = n_i + n_j + n_k \quad (1.8.13)$$

Entonces, el estado de esfuerzos se puede expresar como sigue:

$$T(n) = T(i i + m j + n k) \quad (1.8.14)$$

Matemáticamente el esfuerzo $T(n)$ corresponde a un operador T , que al aplicarlo al vector unitario n produce el esfuerzo correspondiente a un elemento de superficie dS , normal a n . El operador T constituye una función vectorial lineal u homografía vectorial, cuya demostración sobrepasa los objetivos propuestos en esta tesis, el lector interesado puede consultar el apéndice B.7 de la referencia 9. Teniendo en cuenta la linealidad del operador T , la ecuación (1.8.14) también puede expresarse de la siguiente manera:

$$T(n) = T(i i) + T(m j) + T(n k) \quad (1.8.15)$$

e igualmente,

$$T(n) = i T(i) + m T(j) + n T(k) \quad (1.8.16)$$

donde:

$$\begin{aligned} T(i) &= \sigma_x i + \tau_{yx} j + \tau_{zx} k \\ T(j) &= \tau_{xy} i + \sigma_y j + \tau_{zy} k \\ T(k) &= \tau_{xz} i + \tau_{yz} j + \sigma_z k \end{aligned} \quad (1.8.17)$$

Del sistema de ecuaciones anterior se obtiene el tensor esfuerzo

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1.8.18)$$

De acuerdo al tipo de deformación que le producen al medio, los esfuerzos se clasifican en isótropos y en distorsionales ó desviadores.

En cualquier punto del medio, los esfuerzos isótropos se manifiestan como esfuerzos puramente normales de igual magnitud en todos los elementos de superficie idealmente trazados por el punto mismo. Si además, estos esfuerzos son de compresión, a este estado de esfuerzos se le denomina intensidad de presión o simplemente presión. Estos esfuerzos se caracterizan por producir exclusivamente cambios volumétricos en el medio en el cual actúan, es decir, contracciones o dilataciones uniformes de volumen y por consiguiente, variaciones en la densidad del medio.

El estado de esfuerzos isótropos, se representa con el símbolo $T_v(n)$ y matemáticamente se expresa de la siguiente manera:

$$T_v(n) = T_v(i) + T_v(j) + T_v(k) \quad (1.8.19)$$

donde:

$$T_v(i) = \sigma_m i$$

$$T_v(j) = \sigma_m j \quad (1.8.20)$$

$$T_v(k) = \sigma_m k$$

El tensor de esfuerzos isotropos se obtiene del sistema de ecuaciones (2.8.20)

$$[T_v] = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \quad (1.8.21)$$

donde σ_m es el esfuerzo normal medio, isotropo u octaédrico.¹⁵

¹⁵El esfuerzo normal medio es igual al promedio aritmético de los esfuerzos normales principales:

$$\sigma_m = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

La suma de los esfuerzos normales que pasan por un punto, correspondientes a tres direcciones ortogonales entre sí, es siempre la misma, independientemente de la orientación de la terna. La demostración se puede consultar en el subcapítulo 2.1.8 de la referencia bibliográfica 9.

El estado de esfuerzos distorsionales produce unicamente deformaciones angulares del medio, representado por el simbolo $T_0(n)$, se define de la siguiente manera:

$$T_0(n) = T_0(i) + T_0(j) + T_0(k) \quad (1.8.22)$$

donde:

$$T_0(i) = (\sigma_x - \sigma_m) i + \tau_{yx} j + \tau_{zx} k$$

$$T_0(j) = \tau_{xy} i + (\sigma_y - \sigma_m) j + \tau_{zy} k \quad (1.8.23)$$

$$T_0(k) = \tau_{xz} i + \tau_{yz} j + (\sigma_z - \sigma_m) k$$

El tensor de esfuerzos distorsionales, el cual se obtiene del sistema de ecuaciones anterior es el siguiente:

$$\{T_0\} = \begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_m) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_m) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_m) \end{bmatrix} \quad (1.8.24)$$

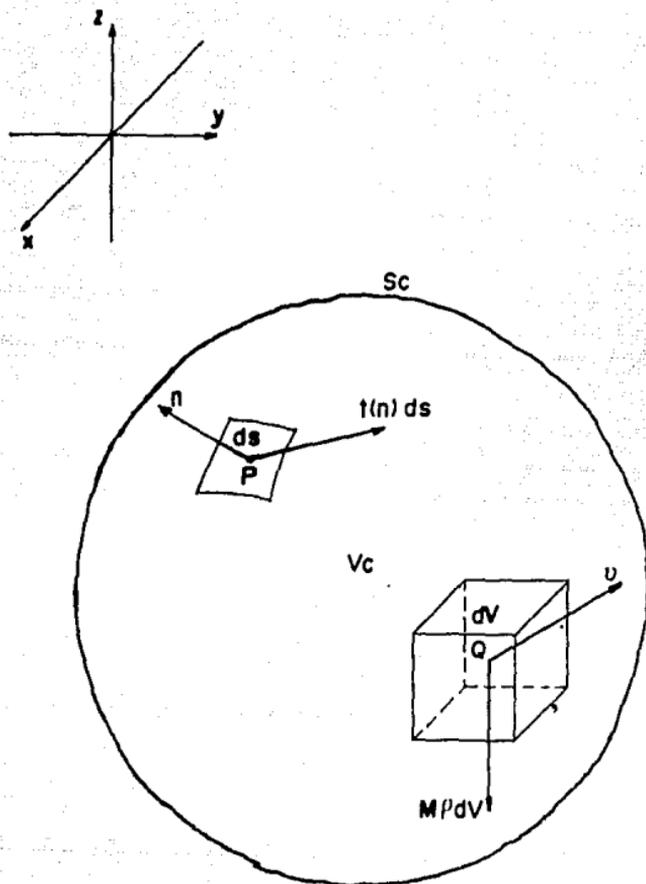


FIGURA 5

Fuerzas actuantes en un volumen de control de un medio continuo.

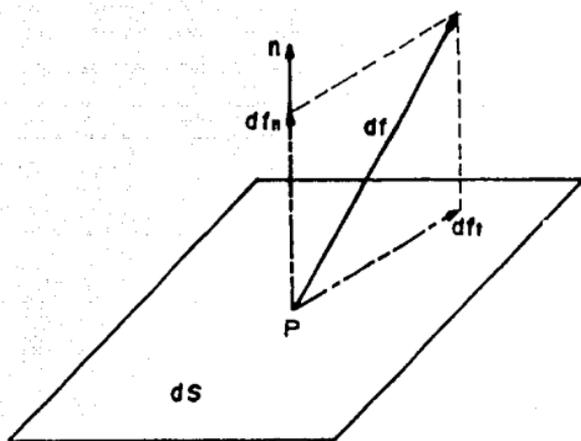


FIGURA 6

Componentes normal y tangencial de la fuerza aplicada al elemento diferencial de superficie ds .

1.9 VISCOSIDAD.

Todos los materiales experimentan deformaciones angulares bajo la acción de esfuerzos distorsionales de distintas maneras.

Los fluidos, son materiales que tienen la característica de deformarse sin dejar de hacerlo al someterlos a la acción de esfuerzos distorsionales, por pequeños que estos sean, mientras dure la acción de estos esfuerzos y una vez que esta acción cesa, permanecen con las deformaciones angulares alcanzadas.

En la figura 7 (página 39) se muestra el esquema del corte longitudinal de un conducto que aloja un flujo, considerando el flujo bidimensional, en una sección transversal a la dirección del flujo cualquiera (sección A). en un instante determinado el flujo en el interior del conducto tendrá una dirección y sentido iguales a los del eje x de un sistema de referencia cartesiano bidimensional adoptado, la velocidad v del flujo, como ya se mencionó previamente en esta tesis, es tangente a la dirección del flujo en todos los puntos del campo de flujo, por lo tanto, en la sección considerada la velocidad del flujo tendrá la misma dirección y sentido que el eje x en todos los puntos correspondientes a la sección A. Sin embargo, en los puntos de contacto entre el fluido y la pared interna del conducto (puntos a y b) la magnitud de la velocidad del flujo vale cero y al alejarse de las paredes que limitan físicamente el flujo en dirección ortogonal a la del flujo, la magnitud de la velocidad aumenta gradualmente hasta adquirir un valor límite máximo (punto c), denominado velocidad máxima, que para este caso se localiza en el punto equidistante entre las paredes del conducto, por lo que la magnitud de la velocidad variará con respecto a la dirección ortogonal a la del flujo, que en este caso corresponde al eje z del sistema de referencia cartesiano bidimensional considerado.

Considerando que el flujo está constituido por láminas hipotéticas infinitamente delgadas, en contacto sucesivo, todas paralelas al eje x , como si fueran las hojas de un libro colocado horizontalmente, cada una de estas láminas de fluido tienen velocidades diferentes con respecto a la inmediata superior e inferior, por lo tanto, entre estas láminas se desarrollarán esfuerzos tangenciales debido a la fricción entre éstas. Por esta analogía, a este tipo de flujo se le denomina flujo laminar, la fricción que se desarrolla entre las láminas hipotéticas de fluido, se manifiesta como una resistencia a la rapidez de deformación, que se denomina viscosidad y se caracteriza por el coeficiente de viscosidad dinámico representado con el símbolo μ .

Isaac Newton, expuso en su obra PHILOSOPHIAE NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA una ecuación de carácter bidimensional, para evaluar el esfuerzo tangencial τ desarrollado en el interior

de un flujo denominado newtoniano, medio viscoso o cuerpo de Newton, y establece que los esfuerzos tangenciales desarrollados en el interior de un flujo viscoso son directamente proporcionales a un gradiente de velocidades con dirección ortogonal a la dirección del flujo, el coeficiente de proporcionalidad corresponde precisamente al coeficiente de viscosidad dinámico y matemáticamente se expresa de la siguiente manera:

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial z} \quad (1.9.1)$$

En las gráficas de la figura 8 (página 40) se representa el comportamiento de un medio viscoso sometido a un esfuerzo distorsional constante. La magnitud del esfuerzo distorsional aplicado al medio viscoso no variará durante su aplicación, por lo tanto, la gráfica esfuerzo-tiempo es una semirrecta paralela al eje de tiempo (gráfica a). Al momento de aplicar el esfuerzo distorsional al medio viscoso, éste comienza a deformarse y la deformación aumentará con rapidez constante mientras el esfuerzo se mantenga actuando, la curva deformación-tiempo se representa en la gráfica b. La curva esfuerzo-deformación del cuerpo viscoso, es una semirrecta paralela al eje de deformación, tal como se representa en la gráfica c. Un esfuerzo distorsional cualquiera podrá provocar cualquier deformación en el medio viscoso con la condición de que sea aplicado el tiempo suficiente. El modelo analógico utilizado para estudiar el comportamiento de un medio viscoso corresponde a un amortiguador.

La viscosidad dinámica es función principalmente de la temperatura y de la presión. Para los líquidos, la variación de la viscosidad con respecto a la presión es prácticamente despreciable.

Al dividir el coeficiente de viscosidad dinámico entre la densidad del medio, se obtiene el coeficiente de viscosidad cinemático denominado de esta manera por que sus dimensiones son puramente cinemáticas. Este coeficiente se representa con el símbolo ν y se define con la ecuación siguiente:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.9.2)$$

En la práctica se prefiere utilizar el coeficiente de viscosidad cinemático en lugar del coeficiente de viscosidad dinámico por las ventajas que representa utilizar magnitudes intensivas.

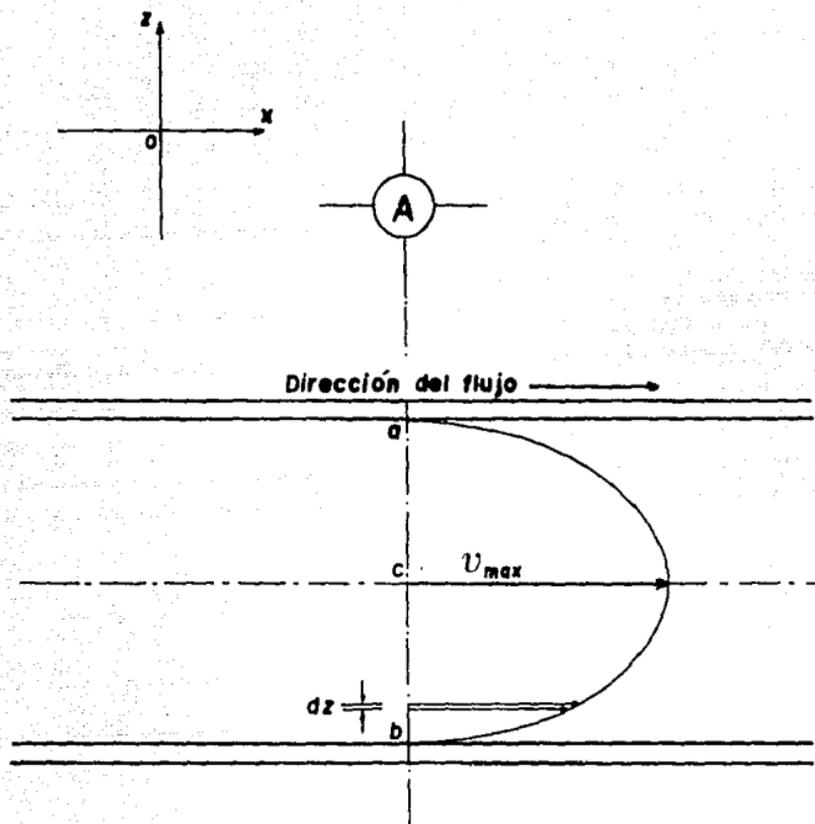
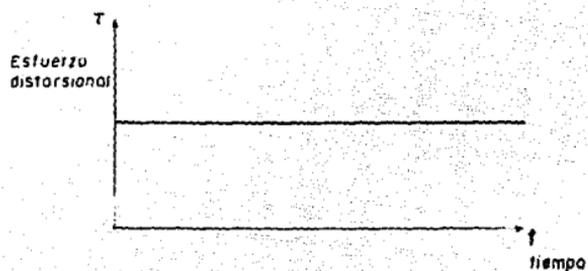
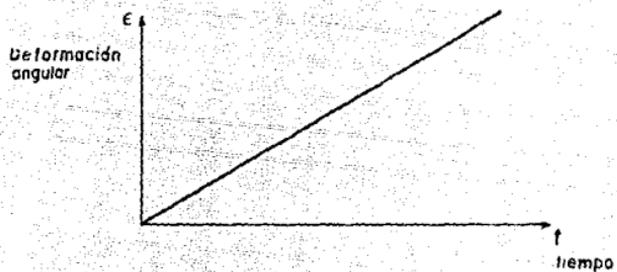


FIGURA 7

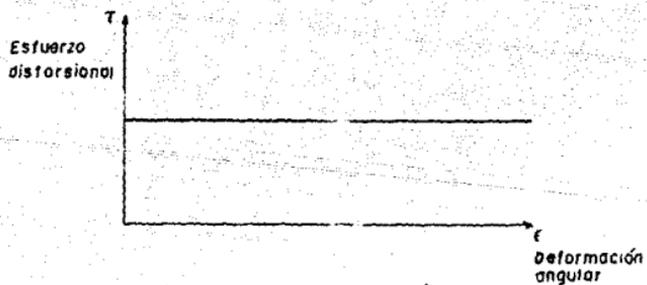
Flujo laminar



a) Esfuerzo - tiempo.



b) Deformación - tiempo.



c) Esfuerzo - deformación

FIGURA 8

110 FLUJO ROTACIONAL

Se denomina flujo rotacional, al flujo aquel en el que las partículas fluidas experimentan un giro sobre sí mismas.

Tanto el flujo rotacional como el flujo laminar son consecuencia de la viscosidad del fluido.

La distribución de velocidades característica de los flujos laminares, provocada por la acción de los esfuerzos distorsionales actuantes en el flujo de un medio viscoso, generan una rotación de las partículas fluidas, creando un campo vectorial denominado rotacional, vorticoso o de los torbellinos.

El campo rotacional se define a partir del campo vectorial de velocidades del flujo¹⁶, el cual queda definido con respecto a un sistema de referencia cartesiano por la ecuación siguiente:

$$\text{rot } \vec{u} = \nabla \times \vec{u} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{bmatrix} \quad (1.10.1)$$

El símbolo ∇ que aparece en la ecuación (1.10.1), es el operador de Hamilton denominado nabla¹⁷, el cual, con respecto a

¹⁶ Apostol, Tom M., CALCULUS, Barcelona, Reverté, (1980), Vol. 2, p. 538.

¹⁷ Bronshtein, Ilya y Semendiaev Konstantín, MANUAL DE MATEMÁTICAS PARA INGENIEROS Y ESTUDIANTES, México, E. C. P., (1985), p. 628.

un sistema de referencia cartesiano se define de la siguiente manera:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \quad (1.10.2)$$

Para el caso bidimensional, considerando el flujo en el plano xz , cuyo vector normal es j , la ecuación (1.10.1) adquiere la siguiente forma:

$$\text{rot } \vec{v} = \left[\frac{\partial}{\partial z} v_x - \frac{\partial}{\partial x} v_z \right] j \quad (1.10.3)$$

En un flujo establecido, el campo rotacional es función exclusivamente del espacio.

1.11 ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA HIDRODINAMICA.

Con frecuencia, en el estudio de fenómenos referentes al movimiento de fluidos, conviene considerar los fluidos como si carecieran de viscosidad. A este tipo de fluidos se les denomina **ideales** ó **no viscosos**.

La Hidrodinámica es la ciencia que estudia el movimiento de los fluidos ideales.

La carencia de viscosidad en los fluidos ideales, implica que solamente podrán desarrollarse esfuerzos isotropos y fuerzas máxicas en su interior.

Un flujo puede considerarse ideal, cuando los efectos de los esfuerzos distorsionales sean prácticamente despreciables, lo que sucede en los siguientes casos:

- a) Cuando el fluido se encuentra en reposo, en su interior no podrán desarrollarse esfuerzos tangenciales a superficie alguna.
- b) Cuando la viscosidad del fluido sea relativamente pequeña, la cual se puede considerar prácticamente inexistente.
- c) Cuando el flujo alcanza un alto grado de turbulencia, en cada punto del flujo se generan esfuerzos tangenciales de diversas magnitudes y direcciones, provocando un efecto de intenso mezclado, en este caso no existe una distribución uniforme de esfuerzos tangenciales, que impida la propagación de estos a distancia.
- d) Cuando la zona de flujo en estudio se encuentre relativamente alejada de cualquier obstáculo sólido, o bien, de la influencia de la capa límite¹⁹.

En la figura 9 (página 52), se presenta el esquema de un volumen diferencial de control hipotético, del interior de un flujo ideal, de forma cúbica, cuya densidad es ρ y cuyas aristas están orientadas en forma conveniente para el análisis de acuerdo a los ejes coordenados de un sistema de referencia cartesiano.

¹⁹ Se define como capa límite, a la zona del flujo generalmente delgada, en contacto con una frontera sólida o de diferente naturaleza que la del flujo en cuestión (pudiendo ser otro flujo de características diferentes sin que exista mezcla), en la que los efectos generados por la viscosidad del flujo son significativos.

La adopción del concepto diferencial aplicado a un elemento de dimensiones físicas representativas (pudiendo ser longitud, área o volumen), implica considerar la resultante de las fuerzas actuantes sobre el elemento y las características cinemáticas, aplicadas en el centroide de dicho elemento. El centroide del volumen de control diferencial de la figura 9 se localiza en el punto q.

La segunda ley de Newton, establece que la resultante de las fuerzas actuantes sobre un cuerpo, provoca un cambio de la velocidad del cuerpo en la dirección de la resultante y matemáticamente queda expresada por la siguiente ecuación:

$$F = m a \quad (1.11.1)$$

donde: F es la resultante del sistema de fuerzas actuantes sobre un cuerpo,

m es la masa del cuerpo, y

a es la aceleración o cambio de velocidad que experimenta el cuerpo en dirección de la resultante.

La resultante de las fuerzas que actúan en el interior de un fluido ideal será igual a la suma de las fuerzas de presión y las fuerzas de masa.

Si se aplica la segunda ley de Newton al volumen diferencial de control de la figura 9, en la dirección x , se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \rho \, dx \, dy \, dz \, \frac{dv_x}{dt} &= \left[p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx \right] dy \, dz \dots \\ &- \left[p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx \right] dy \, dz \dots \quad (1.11.2) \\ &+ \rho X \, dx \, dy \, dz \end{aligned}$$

Desarrollando las operaciones algebraicas indicadas en la ecuación (1.11.2), se obtiene la ecuación fundamental de la Hidrodinámica en la dirección del eje x. La interpretación de los términos que componen la ecuación (1.11.2) es la siguiente:

el término $dx dy dz$ del primer miembro es el volumen diferencial de control que al multiplicarse por la densidad del fluido ρ se obtiene la masa del volumen,

dv_x/dt es la componente de la aceleración en la dirección x,

la resultante de las fuerzas de presión, actuantes en el volumen diferencial de control, en la dirección x, es igual a la expresión siguiente:

$$\left(p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz - \left(p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz$$

del segundo miembro de la ecuación (1.11.2).

el último término del segundo miembro de la ecuación (1.11.2), corresponde a la expresión $\rho X dx dy dz$ es igual a la resultante de las fuerzas de masa en la dirección del eje x.

Desarrollando operaciones algebraicas indicadas en la ecuación (1.11.2), reduciéndola a su mínima expresión, se obtiene la ecuación fundamental de la hidrodinámica en la dirección del eje x

$$\frac{dv_x}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.11.3.a)$$

Procediendo en forma similar como se hizo para la dirección del eje x, aplicando la segunda ley de Newton, ahora para las

direcciones y y z, se obtienen ecuaciones similares a la ecuación (1.11.3.a) para las direcciones y y z respectivamente

$$\frac{dv_y}{dt} = \gamma - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (1.11.3.b)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (1.11.3.c)$$

A las ecuaciones (1.11.3) se les denomina Ecuaciones Fundamentales de la Hidrodinámica o Ecuaciones de Euler, las cuales describen el movimiento de los fluidos ideales.

Considerando que por lo general, la fuerza másica resulta de la acción de la gravedad sobre el fluido, se puede substituir los términos correspondientes de las expresiones (1.8.3) en las respectivas ecuaciones (1.11.3), obteniendo las siguientes ecuaciones:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.11.4.a)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (1.11.4.b)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (1.11.4.c)$$

Si el fluido se encuentra en reposo, entonces:

$$v_x = v_y = v_z = 0 \quad (1.11.5)$$

y las derivadas de las componentes de la velocidad con respecto al tiempo también valdrán cero

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_y}{dt} = \frac{dv_z}{dt} = 0 \quad (1.11.6)$$

entonces las ecuaciones (1.11.3) adquieren la siguiente forma:

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (1.11.7.a)$$

$$Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (1.11.7.b)$$

$$Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (1.11.7.c)$$

Las ecuaciones (1.11.7) se les conoce con el nombre de Ecuaciones Estáticas de Euler o Ecuaciones Fundamentales de la hidrostática de los Fluidos Incompresibles.

Considerando nuevamente que la fuerza de masa es debido al campo gravitacional, las ecuaciones (1.11.7) adquieren la siguiente forma:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (1.11.8.a)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (1.11.8.b)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = g \quad (1.11.8.c)$$

o bien,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (1.11.9.a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (1.11.9.b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g = -\gamma \quad (1.11.9.c)$$

De las ecuaciones anteriores se concluye que la presión en el interior de un fluido incompresible en reposo, varía exclusivamente en el sentido de la gravedad, correspondiente al

eje z para el sistema de referencia considerado y es constante en todos los puntos contenidos en cualquier plano ortogonal a dicha dirección.

Debido a que la presión p es función exclusivamente de la dirección z , la derivada de p con respecto a z corresponde a la derivada total de la presión

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{dz} = -\gamma \quad (1.11.10)$$

o bien,

$$dp = -\gamma dz \quad (1.11.11)$$

integrando la ecuación anterior resulta:

$$\int dp = \int -\gamma dz \quad (1.11.12)$$

como el fluido es incompresible $\gamma = \text{constante}$ y la ecuación anterior se puede escribir de la siguiente manera:

$$\int dp = -\gamma \int dz \quad (1.11.13)$$

e integrando la ecuación anterior se obtiene lo siguiente:

$$p + C_1 = -\gamma z + C_2 \quad (1.11.14)$$

donde C_1 y C_2 son constantes producto de la integración.

Simplificando mediante operaciones algebraicas, la ecuación (1.11.14) también se puede escribir como sigue:

$$p + \gamma z = C_2 - C_1 \quad (1.11.15)$$

si $C_3 = C_2 - C_1$, entonces

$$p + \gamma z = C_3 \quad (1.11.16)$$

ahora, si $C = C_3/\gamma$, la ecuación anterior puede escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{p}{\gamma} + z = C \quad (1.11.17)$$

A la ecuación anterior se le conoce con el nombre de Ley de Pascal, es una ecuación muy importante en la hidrostática que permite calcular la distribución de presiones hidrostáticas en el interior de fluidos incompresibles en reposo.

La constante C de la ecuación (1.11.17) se denomina altura piezométrica, por lo general se representa con el símbolo h y si el fluido en estudio es agua, la ecuación (1.11.17) se escribe de la siguiente manera:

$$\frac{p}{\gamma_w} + z = h \quad (1.11.18)$$

La ecuación anterior constituye uno de los términos del gradiente hidráulico, que integran la expresión denominada Ley de Darcy, base fundamental del análisis del flujo de agua en suelos.

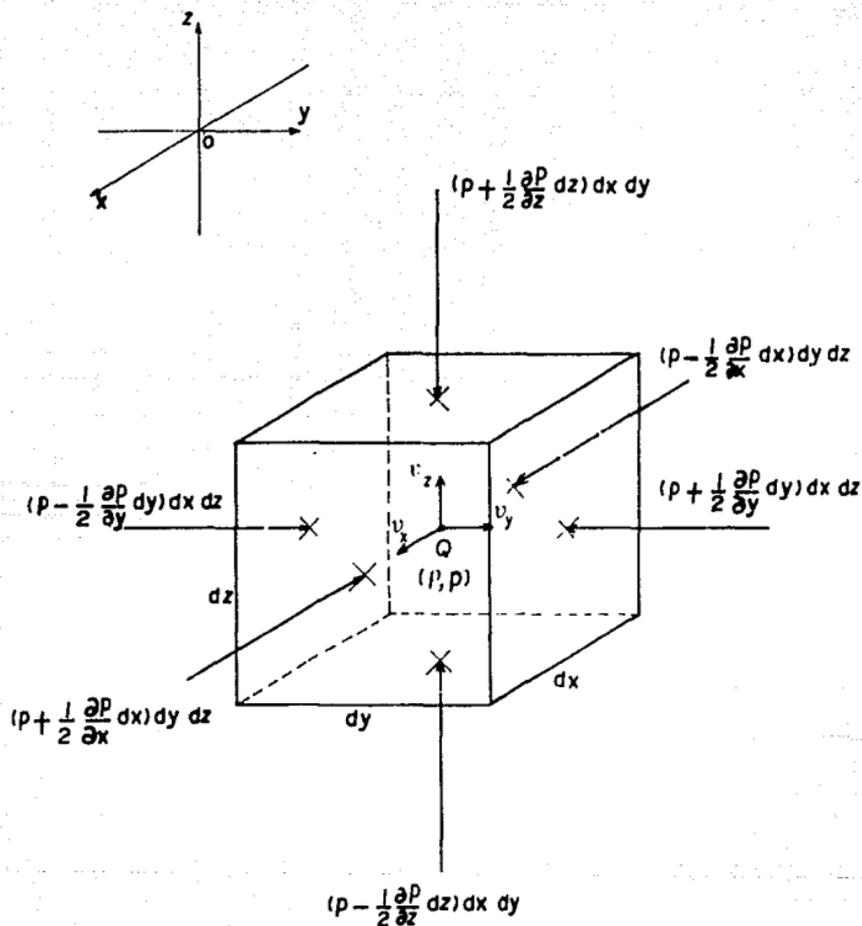


FIGURA 9

Fuerzas actuantes en un elemento diferencial de volumen, de un fluido ideal.

1.12 ECUACION DE CONTINUIDAD.

La ecuación de continuidad, se obtiene al aplicar el principio de la conservación de la materia a un volumen de control fijo, del interior de un flujo. Este principio, es equivalente al principio de la conservación de la energía (primera ley de la Termodinámica) y dice que no hay creación ni destrucción de la materia, los cambios de masa en el interior del volumen de control son consecuencia del flujo a través de la superficie de control, esto es: la cantidad neta de masa que atraviesa la superficie de frontera del volumen de control, en la unidad de tiempo, más la rapidez de variación de la masa contenida en dicho volumen, es siempre igual a cero.

Considerese una vez más, el volumen de control V_c de la figura 5 (página 35). La rapidez de variación de la masa del elemento diferencial de volumen dV , es:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) dV \quad (1.12.1)$$

La rapidez de variación de la masa contenida en todo el volumen de control se obtiene integrando en todo el volumen de control la expresión (1.12.1)

$$\int_{V_c} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) dV \quad (1.12.2)$$

La masa que atraviesa un elemento diferencial de superficie dS , de la superficie de control S_c , en la unidad de tiempo, si avanza con velocidad v , recorre a través de dS un espacio $v \cdot n$, donde n es el vector unitario normal al elemento dS , dicha masa vale:

$$(\rho \cdot v \cdot n) dS \quad (1.12.3)$$

y la cantidad neta de masa que atraviesa la superficie de control, en la unidad de tiempo vale:

$$\oint_{S_c} (\rho v \cdot n) dS \quad (1.12.4)$$

Sumando las expresiones (1.12.2) y (1.12.4) se obtiene la ecuación general de continuidad en su carácter extensivo, sin embargo, para poder sumar estas expresiones, es necesario transformar la integral de superficie de la expresión (1.12.4) en integral de volumen, aplicando el teorema de la divergencia o teorema de Gauss¹⁰

$$\oint_{S_c} (\rho v \cdot n) dS = \int_{V_c} \text{div}(\rho v) dV \quad (1.12.5)$$

Sumando la expresión (1.12.2) con el segundo miembro de la ecuación (1.12.5), se obtiene la ecuación general de continuidad en su forma extensiva

$$\int_{V_c} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV + \int_{V_c} \text{div}(\rho v) dV = 0 \quad (1.12.6)$$

¹⁰ Apostol, Tom M., Op. cit., pp. 557 - 563.

o bien,

$$\int_{V_c} \left[\frac{\partial p}{\partial t} + \text{div}(\rho v) \right] dV = 0 \quad (1.12.7)$$

La ecuación (1.12.7) de carácter extensivo, puede transformarse fácilmente en intensiva, por que la integral de volumen se extiende a todo el volumen de control, como éste puede escogerse de manera arbitraria, la integral no puede valer siempre cero, a menos que la función integrada valga cero

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0 \quad (1.12.8)$$

La ecuación anterior, es la ecuación diferencial general de continuidad en su carácter intensivo.

Si el flujo en estudio es permanente, el primer término del primer miembro de la ecuación (1.12.8) vale cero

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (1.12.9)$$

y la ecuación (1.12.8) adquiere la siguiente forma:

$$\text{div}(\rho v) = 0 \quad (1.12.10)$$

Si además el fluido se puede considerar incompresible, su densidad será constante y la ecuación (1.12.10) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\rho \operatorname{div} v = 0 \quad (1.12.11)$$

o bien,

$$\operatorname{div} v = 0 \quad (1.12.12)$$

y recordando la definición matemática de divergente de una función, la ecuación anterior también se escribe como sigue:

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (1.12.13)$$

La ecuación anterior, es la ecuación de continuidad para un flujo establecido e incompresible, es común referirse a esta ecuación como la condición de incompresibilidad²⁰.

²⁰Levi, Enzo. ELEMENTOS DE LA MECANICA DEL MEDIO CONTINUO. México, Limusa-Wiley, [1971], subcap 2.2.9..

1.13 LEY DE DARCY.

Se le atribuye al ingeniero frances Henri Phillibert Gaspard Darcy (1808 - 1858) de les Corps des Ponts et Chaussées de Dijon, ser el iniciador del estudio racional de los problemas prácticos que contemplan la infiltración del agua en los medios porosos.

En su obra LES FONTAINES PUBLIQUES DE LA VILLE DE DIJON, publicada en el año de 1856, Darcy presentó una expresión matemática obtenida experimentalmente, que permite calcular la velocidad media de descarga del agua que se infiltra a través de un medio poroso, si se conoce en forma cuantitativa la capacidad del agua para fluir en el interior del medio y el gradiente hidráulico al que está sometido el flujo; a esta expresión matemática se le conoce en la actualidad con el nombre de "LEY DE DARCY".

El dispositivo experimental que Darcy utilizó en dicho estudio, era similar al mostrado en la figura 10 (página 81), basados en las características hidráulicas de este dispositivo, la ley de Darcy se expresa de la siguiente manera:

$$v = -k i \quad (1.13.1)$$

La gran importancia adquirida por la ecuación (1.13.1) en el estudio del flujo de agua en suelos, radica en su simplicidad, siendo indispensable la correcta interpretación de cada uno de los términos que la integran.

El término k del segundo miembro de la ecuación (1.13.1), es una constante numérica llamada coeficiente de permeabilidad del suelo (el signo negativo que aparece en el segundo miembro de la ecuación (1.13.1), corresponde al gradiente hidráulico i). Mediante esta constante numérica se pretende cuantificar en forma práctica y general, la mayor o menor facilidad del agua para fluir en el interior del suelo. Sus dimensiones corresponden a las de una velocidad.

El valor del coeficiente de permeabilidad de un suelo se determina mediante procedimientos experimentales, realizados en muestras del suelo a estudiar.

Los procedimientos para determinar los coeficientes de permeabilidad de los suelos, pueden clasificarse en: métodos directos, los que se enfocan a la determinación exclusiva del valor de dicho coeficiente y métodos indirectos, que permiten la

deducción del valor del coeficiente de permeabilidad a partir de los resultados de pruebas aplicadas a muestras de suelo con diversos objetivos.

Entre los métodos directos que actualmente se aplican para la determinación del valor del coeficiente de permeabilidad de los suelos, se encuentran:

- a) el permeámetro de carga constante,
- b) el permeámetro de carga variable y
- c) la prueba directa de permeabilidad de los suelos en el lugar.

Entre los métodos indirectos aplicados en la actualidad, para la determinación del valor del coeficiente de permeabilidad de los suelos, se encuentran:

- a) cálculo de k a partir de la curva granulométrica,
- b) cálculo de k a partir de la prueba de consolidación y
- c) cálculo de k con la prueba horizontal de capilaridad.

La elección del método para determinar el valor de k , depende de las características del suelo y del grado de precisión requerido, por ejemplo, los permeámetros se utilizan para suelos relativamente permeables tales como limos, arenas y demás materiales no plásticos; para suelos de baja permeabilidad como las arcillas, se prefiere la prueba de consolidación; la prueba directa de permeabilidad de los suelos en el lugar, se basa en la determinación de k , a partir del análisis de la operación de un sistema de pozos de bombeo²¹; si el cálculo de k , se hace a partir de la curva granulométrica no es muy confiable, solamente se utiliza cuando se requiere una idea aproximada del orden de magnitud de k ; la prueba horizontal de capilaridad, se emplea sobre todo, cuando se requieren hacer diferentes pruebas del suelo de un mismo lote, o bien, en suelos elaborados con técnicas iguales en los que se presumen características iguales.

Es necesario aclarar, que todos los métodos empleados en la actualidad para determinar el valor del coeficiente de permeabilidad de los suelos, proporcionan resultados representativos aproximados, por supuesto que unos métodos proporcionan valores más representativos que otros, sin embargo,

²¹ Juárez Badillo, Eulalio y Rico Rodríguez, Alfonso, MECANICA DE SUELOS: FLUJO DE AGUA EN SUELOS, 3^a ed., México, Limusa, (1972), Vol. 3, Cap. VII.

de ninguna manera se ha de suponer que el valor de k obtenido por cualquier método actual tiene una exactitud indiscutible, pues esto implicaría asegurar que el suelo en cuestión constituye una masa homogénea continua, lo que por supuesto es falso.

La explicación detallada de los métodos experimentales empleados en la actualidad para la obtención del valor del coeficiente de permeabilidad de los suelos k , está fuera de los alcances de esta tesis, sin embargo, el lector interesado bien puede consultar la referencia bibliográfica 8.

El valor del coeficiente de permeabilidad de los suelos k , pretende contemplar características tanto del suelo como del agua que fluye en el interior de éste, su valor se ve afectado por diversos factores inherentes a ambos. Entre los relativos al suelo, por ejemplo, se encuentran la relación de vacíos, estructura, granulometría, estratificación, existencia de agujeros, fisuras, grietas, etcétera y entre los relativos al agua, se pueden mencionar por ejemplo, temperatura, viscosidad, materia en suspensión, sales disueltas, dureza, etcétera.

Al contemplar la viscosidad del agua en el coeficiente de permeabilidad se hace posible considerar al agua que se infiltra en el suelo, como un fluido ideal, lo que permite aplicar la teoría de la hidrodinámica en el análisis del flujo de agua en suelos. Esta característica del coeficiente de permeabilidad de los suelos, es tan atractiva que compensa todas las desventajas relativas a la determinación de su valor, además que en los problemas prácticos se obtienen resultados bastante satisfactorios para fines ingenieriles.

La función del coeficiente de permeabilidad en el análisis del flujo de agua en suelos es tan ambiciosa que se deben extremar los cuidados en la determinación de este valor que pretende evaluar conjuntamente diversas características importantes tanto del suelo como del agua, lo que implica procesos experimentales sofisticados y costosos que sin embargo, no tienen más trascendencia que para las condiciones experimentales reproducidas en el laboratorio.

Nutting (1930), estableció un coeficiente denominado Coeficiente de Permeabilidad Específica²², representado con el símbolo k' , el cual considera exclusivamente las características del medio poroso. Este coeficiente, se determina a partir del coeficiente de permeabilidad k con la expresión siguiente:

²²Juárez Badillo, Eulalio y Rico Rodríguez, Alfonso, MECANICA DE SUELOS. FUNDAMENTOS DE LA MECANICA DE SUELOS, 3^o ed., México, Limusa, [1974], Vol. 1. p. 218.

$$k' = \frac{\mu}{\gamma_w} k \quad (1.13.2)$$

donde μ es el coeficiente de viscosidad dinámica del agua,
 γ_w es el peso específico del agua en las condiciones de trabajo, y

k es el coeficiente de permeabilidad del suelo.

Considerando que $\gamma_w = g\rho_w$ [ecuación (1.3.3)] y que $\nu = \mu/\rho_w$, [ecuación (1.9.2)] la ecuación (1.13.2) también puede escribirse de la siguiente manera:

$$k' = \frac{\mu}{\gamma_w} k = \frac{\mu}{g\rho_w} k = \frac{\nu}{g} k \quad (1.13.3)$$

donde: ν es el coeficiente de viscosidad cinemático y

g es el valor de la aceleración de la gravedad terrestre.

El segundo término de la ecuación (1.13.1) -i, se denomina gradiente hidráulico y es igual al límite siguiente:

$$-i = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta h}{\Delta S} = \frac{dh}{dS} \quad (1.13.4)$$

donde: Δh es la diferencia de las alturas piezométricas correspondientes a dos puntos localizados sobre una línea de flujo considerada y

ΔS es la distancia entre dichos puntos sobre la línea de flujo.

El término Δh de la ecuación (1.13.4), representa la disipación de energía en forma de calor, que experimenta el flujo a lo largo del desplazamiento ΔS .

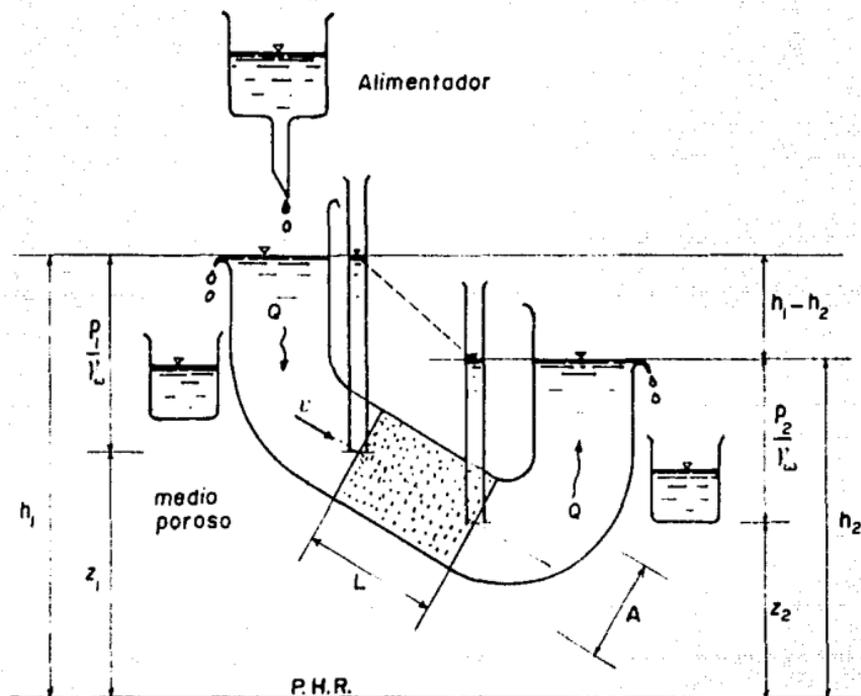


FIGURA 10

Dispositivo experimental de Darcy

1.14 VALIDEZ DE LA LEY DE DARCY.

La validez de la ley de Darcy se restringe al análisis del flujo de agua en medios porosos con fines prácticos. El resultado de su aplicación, de ninguna manera es equiparable con la realidad y pretender explicar la dinámica real de las partículas de agua que se infiltran en el interior de un medio poroso real actualmente es imposible. Sin embargo, constituye la base teórica del método experimental actual y permite determinar con un grado aceptable de precisión, las magnitudes físicas del flujo que interesan al ingeniero, siempre y cuando se consideren las restricciones de aplicación de esta ley.

En la determinación de la ley de Darcy, se ha considerado que la velocidad media de descarga del flujo es tan pequeña que la energía cinética es prácticamente despreciable, razón por la cual se considera la altura piezométrica en el gradiente hidráulico.

El flujo del agua en el interior de un medio poroso dista mucho de ser laminar, sin embargo, la baja velocidad media de descarga permite tratar el flujo como laminar.

Se dice que un flujo es laminar cuando se cumplen las condiciones vistas en el subcapítulo 2.9 de esta tesis, de no ser así, el flujo solo puede ser turbulento.

Un medio fluye, cuando la posición relativa entre sus partículas que lo forman va cambiando constantemente durante el transcurso del fenómeno. A partir de este concepto, se puede admitir, que solamente existen dos tipos de flujo: el laminar y el turbulento. El movimiento de los fluidos ideales ó no viscosos, no constituye propiamente un flujo, puesto que la posición relativa entre sus partículas permanece inalterada durante el fenómeno, el fluido ideal tiene mas bién, un movimiento de cuerpo rígido.

Una forma práctica de distinguir el flujo laminar del turbulento, es a partir del Número de Reynolds²³, el cual es un número adimensional que contempla los factores que establecen las características de un flujo y permite definir por medio de su valor numérico cuando un flujo es laminar o turbulento. En el

²³Reynolds, O., "AN EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF THE CIRCUMSTANCES WHICH DETERMINE WHETHER THE MOTION OF WATER SHALL BE DIRECT OR SINUOUS AND THE LAW OF RESISTENCE IN PARALLEL CHANNELS"., PHIL. TRANS. ROYAL SOCIETY. Vol. 174, London England, 1883.

estudio del flujo de agua en suelos, el número de Reynolds se define por la ecuación siguiente:

$$R = \frac{v D}{\nu} \quad (1.14.1)$$

- donde: v es la velocidad media de descarga del flujo, en cm/s.
- D es el diámetro promedio de las partículas del suelo, en cm, y
- ν es el coeficiente de viscosidad cinemática del fluido, en cm^2/s .

La ley de Darcy será aplicable siempre que se garantice el régimen laminar del flujo mediante la ecuación (1.14.1), lo que sucede en la mayoría de los casos de flujo de agua en suelos.

La velocidad bajo la cual, para ciertas condiciones de frontera y temperatura, un flujo siempre es laminar, se denomina "velocidad crítica".

Cuando el flujo es laminar para ciertas condiciones, al aumentar la velocidad del flujo éste se transformará en turbulento; pasando por un rango de velocidades de transición, en el cual, el flujo puede ser tanto laminar como turbulento. En el estudio del flujo de agua en suelos, varios investigadores han comprobado que los valores del número de Reynolds, que define el intervalo de transición entre flujo laminar y turbulento, oscila entre 1 y 12. Se garantizará el régimen laminar de todo flujo cuando el valor de R sea menor a uno. Para la mayoría de los suelos inclusive para los compuestos por granos gruesos, como por ejemplo, arenas con $D=0.4$ mm, el valor de R es mucho menor a la unidad.

En suma, para poder aplicar la ley de Darcy al análisis del flujo de agua en suelos, se deben tener en cuenta las hipótesis siguientes:

- a) se debe garantizar el régimen laminar del flujo,
- b) el suelo debe de estar totalmente saturado,
- c) las partículas sólidas que componen la masa del suelo como el agua se supondrán incompresibles en sí mismas,

- d) el flujo no implicará modificaciones en la estructura del suelo,
- e) el análisis del flujo se limitará a un instante determinado o bien, para los casos de flujo establecido o permanente,
- f) tanto el suelo como el agua de infiltración se idealizarán como medios continuos.

1.15 ECUACION DE LAPLACE.

La ley de Darcy, es una expresión matemática de carácter vectorial que junto con la Hidrodinámica, constituye la base teórica actual del análisis del flujo de agua en suelos.

Por la hipótesis de incompresibilidad del agua y de las partículas que componen la masa del suelo, y debido a que la energía cinética del agua que fluye en el interior de un medio poroso es prácticamente despreciable, el análisis del flujo de agua en suelos se comienza a partir de las ecuaciones estáticas de Euler o ecuaciones fundamentales de la hidrostática

$$X = \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.15.1.a)$$

$$Y = \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (1.15.1.b)$$

$$Z = \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (1.15.1.c)$$

Para obtener las respectivas derivadas parciales de la presión p en las ecuaciones fundamentales de la hidrostática, para un flujo establecido como se está considerando, se despeja p de la ecuación (1.11.18) respectiva a la altura piezométrica

$$p = \gamma_w(h - z) = \rho_w g(h - z) \quad (1.15.2)$$

Por la hipótesis de incompresibilidad del fluido, el valor de la densidad será constante, igualmente el valor de la aceleración de la gravedad terrestre se puede considerar constante con respecto a variaciones de altitud relativamente

pequeñas comparadas con las dimensiones del planeta, por lo tanto, en un flujo establecido las derivadas parciales de p de las ecuaciones (1.15.1) con respecto a un sistema de referencia cartesiano están definidas por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \rho_{\omega} g(h - z)}{\partial x} = \frac{\partial \rho_{\omega} gh}{\partial x} - \frac{\partial \rho_{\omega} gz}{\partial x} = \rho_{\omega} g \frac{\partial h}{\partial x} \quad (1.15.3.a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \rho_{\omega} g(h - z)}{\partial y} = \frac{\partial \rho_{\omega} gh}{\partial y} - \frac{\partial \rho_{\omega} gz}{\partial y} = \rho_{\omega} g \frac{\partial h}{\partial y} \quad (1.15.3.b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \rho_{\omega} g(h - z)}{\partial z} = \frac{\partial \rho_{\omega} gh}{\partial z} - \frac{\partial \rho_{\omega} gz}{\partial z} = \rho_{\omega} g \frac{\partial h}{\partial z} - \rho_{\omega} g \quad (1.15.3.c)$$

Substituyendo las ecuaciones anteriores en las respectivas ecuaciones (1.15.1) y desarrollando las operaciones algebraicas indicadas, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$X = g \frac{\partial h}{\partial x} \quad (1.15.4.a)$$

$$Y = g \frac{\partial h}{\partial y} \quad (1.15.4.b)$$

$$Z = g \frac{\partial h}{\partial z} - g \quad (1.15.4.c)$$

A las derivadas parciales de la altura piezométrica h , con respecto a cada una de las direcciones de los ejes coordenados x , y y z , se les denomina gradiente hidráulico con respecto a cada una de las direcciones de dichos ejes coordenados y se representan con los símbolos i_x , i_y y i_z respectivamente

$$i_x = \frac{\partial h}{\partial x} \quad (1.15.5.a)$$

$$i_y = \frac{\partial h}{\partial y} \quad (1.15.5.b)$$

$$i_z = \frac{\partial h}{\partial z} \quad (1.15.5.c)$$

Para una dirección s cualquiera la ley de Darcy se puede escribir de la siguiente manera:

$$-i_s = \frac{v_s}{k_s} \quad (1.15.6)$$

donde s puede ser cualquiera de las direcciones de los ejes coordenados del sistema de referencia cartesiano.

Substituyendo la ecuación (1.15.6) en las ecuaciones (1.15.5) considerando las direcciones x , y y z , en s , respectivamente, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$-\frac{v_x}{k_x} = \frac{\partial h}{\partial x} \quad (1.15.7.a)$$

$$- \frac{\partial \kappa_y^v}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (1.15.7.b)$$

$$- \frac{\partial \kappa_z^v}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial z} \quad (1.15.7.c)$$

Substituyendo las ecuaciones anteriores en las ecuaciones (1.15.4) respectivamente, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$X = - \sigma \frac{\partial \kappa_x^v}{\partial x} \quad (1.15.8.a)$$

$$Y = - \sigma \frac{\partial \kappa_y^v}{\partial y} \quad (1.15.8.b)$$

$$Z = - \sigma \frac{\partial \kappa_z^v}{\partial z} - \sigma \quad (1.15.8.c)$$

Substituyendo nuevamente las ecuaciones anteriores en las correspondientes ecuaciones (1.15.4), se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$-\sigma \frac{v}{k} \frac{x}{x} = \sigma \frac{\partial h}{\partial x} \quad (1.15.9.a)$$

$$-\sigma \frac{v}{k} \frac{y}{y} = \sigma \frac{\partial h}{\partial y} \quad (1.15.9.b)$$

$$-\sigma \frac{v}{k} \frac{z}{z} - \sigma = \sigma \frac{\partial h}{\partial z} - \sigma \quad (1.15.9.c)$$

o bien,

$$-\frac{v}{k} \frac{x}{x} = \frac{\partial h}{\partial x} \quad (1.15.10.a)$$

$$-\frac{v}{k} \frac{y}{y} = \frac{\partial h}{\partial y} \quad (1.15.10.b)$$

$$-\frac{v_z}{k_z} = \frac{\partial h}{\partial z} \quad (1.15.10.c)$$

En las ecuaciones anteriores, se pueden despejar las componentes de la velocidad de descarga obteniendo las siguientes ecuaciones:

$$v_x = -k_x \frac{\partial h}{\partial x} \quad (1.15.11.a)$$

$$v_y = -k_y \frac{\partial h}{\partial y} \quad (1.15.11.b)$$

$$v_z = -k_z \frac{\partial h}{\partial z} \quad (1.15.11.c)$$

Las ecuaciones anteriores corresponden a las componentes de la velocidad media de descarga, expresadas de acuerdo a la ley de Darcy con respecto a un sistema de referencia cartesiano.

La velocidad media de descarga del flujo es igual a la suma de sus componentes

$$\bar{v} = v_x i + v_y j + v_z k \quad (1.15.12)$$

Substituyendo en cada una de las componentes de la velocidad media de descarga las correspondientes ecuaciones (2.15.11), se obtiene la siguiente ecuación:

$$\bar{v} = -k_x \frac{\partial h}{\partial x} i - k_y \frac{\partial h}{\partial y} j - k_z \frac{\partial h}{\partial z} k \quad (1.15.13)$$

La ecuación anterior es el gradiente de la función vectorial velocidad del flujo,²⁴ la cual por definición se puede escribir de la siguiente manera:

$$\bar{v} = \text{grad}(-kh) = \nabla(-kh) \quad (1.15.14)$$

donde ∇ es el operador de Hamilton nabra.

La ecuación (1.15.14) es la expresión vectorial de la ley de Darcy, considerada para un medio poroso anisótropo; no obstante aún cuando la característica de anisotropía es común en los suelos, existe un artificio matemático llamado "Teoría de la Sección Transformada" a partir de la cual se puede transformar un caso anisótropo en isotrópico. Aunque en esta tesis no se presenta la teoría de la sección transformada, el lector interesado en este útil y práctico método lo puede consultar en el capítulo 1 de la referencia bibliográfica 7.

A partir de la teoría de la sección transformada, el caso isotrópico adquiere importancia en el análisis del flujo de agua en suelos y la expresión vectorial de la ley de Darcy, para el caso isotrópico se escribe de la siguiente manera:

$$\bar{v} = -k \nabla h \quad (1.15.15)$$

²⁴ Apostol, Tom N., Op. cit., pp. 318 - 319.

Ahora, a partir de la ecuación de continuidad para flujo establecido e incompresible (suposición de incompresibilidad), substituyendo en ésta, las ecuaciones (1.15.11) que son las componentes de la velocidad media de descarga expresadas de acuerdo a la ley de Darcy, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-k_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) = -k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (1.15.16.a)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-k_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) = -k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \quad (1.15.16.b)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-k_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) = -k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \quad (1.15.16.c)$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones anteriores, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\operatorname{div} \bar{v} = -k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (1.15.17)$$

La ecuación anterior es otra forma de expresar la ecuación de continuidad para un flujo incompresible y permanente, que fluye en el interior de un medio poroso anisótropo con velocidad

muy pequeña. Para un medio poroso isotrópico, la ecuación (1.15.17) adquiere la siguiente forma:

$$\operatorname{div} \bar{v} = -k \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - k \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - k \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (1.15.18)$$

o bien,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \nabla^2 h = 0 \quad (1.15.19)$$

A la ecuación anterior se le denomina ECUACION DE LAPLACE, en honor de Pierre Simon Marqués de Laplace (1749 - 1827) quien, alrededor del año 1782, estudió sus soluciones mientras investigaba la atracción gravitacional de cuerpos arbitrarios en el espacio, sin embargo, esta ecuación apareció por primera vez escrita en una memoria de Euler sobre hidrodinámica, alrededor del año 1752. Al primer miembro de esta ecuación se le denomina laplaciana de h .

En general, cuando la laplaciana de una función vectorial / vale cero, se dice que la función f es armónica²⁵, por esto, la función vectorial h es armónica.

La ecuación de Laplace es fundamental en el análisis del flujo de agua en suelos, constituye la base de la teoría denominada "flujo con potencial" que es la herramienta actual más poderosa utilizada en el estudio de fenómenos de hidrodinámica y otros campos de la Física. La versatilidad de esta teoría permite emplear varias técnicas de análisis como gráficas, matemáticas, de modelos, etcétera, de gran utilidad en la solución de problemas en ingeniería.

La teoría que trata sobre la solución de la ecuación de Laplace y la teoría del flujo con potencial, se presentan en el capítulo segundo de esta tesis.

²⁵ Apostol, Tom M., Op. cit. p. 542.

CAPITULO 2

FLUJO CON POTENCIAL

2.1 FUNCIONES DE CORRIENTE.

Un conjunto o familia de superficies de flujo, con una o más características en común, puede definirse a partir de una función denominada de corriente.

En un campo de flujo se puede definir una infinidad de familias diferentes de superficies de flujo, las superficies de flujo de una misma familia no pueden intersectarse entre sí, por que en un instante determinado no pueden haber dos ó más velocidades diferentes en un mismo punto del campo de flujo, em cambio dos superficies de flujo de diferentes familias se intersectan en una línea de flujo, la que obviamente pertenece a ambas familias de flujo simultaneamente.

En un flujo permanente la configuración de las superficies de flujo depende exclusivamente del espacio.

El campo de velocidades de un flujo puede definirse a partir de un sistema de dos familias diferentes de superficies de flujo, que sean mutuamente ortogonales entre sí, considerando que respecto a un sistema de referencia cartesiano estas familias de superficies quedan definidas por las funciones de corriente $\psi = F(x, y, z)$ y $\chi = G(x, y, z)$. (figura 11, página 82), el vector velocidad del flujo en cualquier punto del campo de flujo será tangente a la línea de flujo que pasa por el punto, como esta línea de flujo corresponde a la intersección de una superficie de flujo de la familia ψ con otra de la familia χ , el vector velocidad será simultaneamente tangente a ambas superficies de flujo en el punto en cuestión, entonces, el campo de velocidades de un flujo queda definido por la siguiente ecuación:

$$\vec{v} = \nabla\psi \times \nabla\chi \quad (2.1.1)$$

Las funciones de corriente adquieren un valor constante para cada una de las superficies de flujo en particular de la familia que definen.

La ecuación (2.1.1) tiene una importante interpretación gráfica, considere el punto p de el campo de flujo de la figura 12 (página 83), por este punto pasará solo una línea de flujo correspondiente a la intersección de las superficies de flujo $\psi = a$ y $\chi = b$, donde a y b son constantes, por la condición de ortogonalidad entre las familias de superficies de flujo ψ y χ , el vector $\nabla\psi$ es ortogonal a la superficie $\psi = a$ y simultaneamente tangente a la superficie $\chi = b$ en el punto p , de la misma manera el

vector $\nabla\chi$ es ortogonal a la superficie $\chi=b$ y tangente a la superficie $\psi=a$ en dicho punto, el producto cruz de los vectores $\nabla\psi$ y $\nabla\chi$ es un vector ortogonal a ambos y simultáneamente tangente a $\psi=a$ y $\chi=b$, por tratarse de superficies de flujo el vector $\nabla\psi \times \nabla\chi$ define la velocidad del flujo en el punto p .

Así como por cada punto del campo de flujo pasa una y solo una línea de flujo, cada línea de flujo del campo de flujo corresponde a la intersección de una superficie de flujo de la familia ψ con otra de la familia χ y no existirá línea de flujo del campo de flujo que no corresponda a la intersección de una superficie ψ con una χ .

Desarrollando la ecuación (2.1.1) se obtiene lo siguiente:

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}i + \frac{\partial\psi}{\partial y}j + \frac{\partial\psi}{\partial z}k \quad (2.1.2.a)$$

$$\nabla\chi = \frac{\partial\chi}{\partial x}i + \frac{\partial\chi}{\partial y}j + \frac{\partial\chi}{\partial z}k \quad (2.1.2.b)$$

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial z} \\ \frac{\partial\chi}{\partial x} & \frac{\partial\chi}{\partial y} & \frac{\partial\chi}{\partial z} \end{vmatrix} \quad (2.1.3)$$

desarrollando el determinante de la ecuación (2.1.3) se obtiene la siguiente ecuación:

$$\vec{u} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \chi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) \mathbf{k}$$

(3.1.4)

y por igualdad de vectores:

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \chi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \chi}{\partial y} \quad (2.1.5.a)$$

$$u_y = \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial z} \quad (2.1.5.b)$$

$$u_z = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \chi}{\partial x} \quad (2.1.5.c)$$

Por lo general, en los problemas prácticos de flujo se tienen flujos con simetría axial, lo que permite analizarlos desde un punto de vista bidimensional, simplificando significativamente el problema.

En un flujo bidimensional se puede definir una familia de superficies de flujo planas, paralelas entre sí, cuyo eje de simetría axial es una línea recta. Para analizar estos casos conviene establecer un sistema de referencia cartesiano de tal manera que la dirección de cualquiera de los ejes cartesianos sea igual a la dirección del eje de simetría axial de la familia de superficies de flujo planas; por ejemplo, si se define a la familia de superficies de flujo planas con la función de corriente $\chi = \chi(x, y, z)$ y la dirección del eje de simetría axial de dichas superficies se iguala a la del eje coordenado y , entonces $\nabla \chi = j$, donde: j es el vector unitario con la misma dirección a la del eje y , todas las superficies de flujo de la familia χ serán

paralelas al plano xz del sistema de referencia cartesiano y la configuración de las líneas de flujo correspondientes a las intersecciones entre las superficies ψ y χ será representativa en cualquiera de las superficies χ . (ver figura 13, página 84).

Para el caso bidimensional la ecuación (2.1.1) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\bar{v} = \nabla\psi \times j \quad (2.1.6)$$

Desarrollando la ecuación anterior se obtiene la siguiente ecuación:

$$\nabla\psi \times k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial z} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial\psi}{\partial z}i + 0j + \frac{\partial\psi}{\partial x}k \quad (2.1.7)$$

o bien,

$$\bar{v} = v_x i + v_y j + v_z k = -\frac{\partial\psi}{\partial z}i + 0j + \frac{\partial\psi}{\partial x}k \quad (2.1.8)$$

y por igualdad de vectores:

$$v_x = -\frac{\partial\psi}{\partial z} \quad (2.1.9.a)$$

$$v_y = 0 \quad (2.1.9.b)$$

$$v_z = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.1.9.c)$$

De acuerdo a la ecuación (1.6.3) que describe las líneas de corriente en el espacio, la ecuación diferencial de una línea de corriente en el plano xz considerando un sistema bidimensional es:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dz}{v_z} \quad (2.1.10)$$

o bien,

$$v_z dx - v_x dz = 0 \quad (2.1.11)$$

Substituyendo los segundos miembros de las ecuaciones (2.1.9) en los términos respectivos de la ecuación (2.1.11), se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = 0 \quad (2.1.12)$$

La ecuación anterior es la derivada total de ψ con respecto a una longitud s

$$d\psi = \nabla \psi \cdot ds = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = 0 \quad (2.1.13)$$

Puesto que la derivada total de ψ a lo largo de la línea de corriente vale cero, la función de corriente ψ es constante a lo largo de la línea de corriente.

Como se ha mencionado anteriormente, las líneas de corriente constituyen en sí, las fronteras naturales de volúmenes de control del flujo. En el flujo bidimensional se puede considerar el gasto entre las superficies de flujo ψ por unidad de ancho, puesto que su configuración es la misma en planos ortogonales a dichas superficies, el gasto calculado de esta forma se denomina gasto unitario o por unidad de ancho.

De acuerdo a la ecuación de continuidad para una vena líquida, el gasto elemental dq que cruza un elemento diferencial de área dA es:

$$dq = \bar{v} \cdot dA \quad (2.1.14)$$

Considere al elemento diferencial de área dA localizado en un plano ortogonal al eje x , entre las superficies de flujo $\psi=a$ y $\psi=b$ de ancho unitario, de la figura 13. Como el flujo a través de dicho elemento diferencial de área es ortogonal a la dirección del flujo, la ecuación (2.1.14) se puede escribir como sigue

$$dq = v_x dy dz \quad (2.1.15)$$

Substituyendo la ecuación (2.1.9.a) en la ecuación anterior, se obtiene la siguiente ecuación:

$$dq = - \frac{\partial \psi}{\partial z} dy dz \quad (2.1.16)$$

Integrando la ecuación anterior en una sección de área delimitada por las superficies de flujo $\psi=a$, $\psi=b$ y dos superficies x planas separadas una unidad de ancho, se obtiene el gasto a través de dicha sección de área

$$q = \int_{\psi=b}^{\psi=a} \int_0^{-1} -\frac{\partial \psi}{\partial z} dy dz = [\psi]_b^a \quad (2.1.17)$$

o bien,

$$q = a - b \quad (2.1.18)$$

en un flujo bidimensional, el gasto unitario en un tubo de flujo formado por dos superficies de flujo definidas por la misma función de corriente, de ancho unitario, será igual a la diferencia de los valores que la función de corriente adquiere en las fronteras de dicho tubo de flujo. El lector interesado, puede consultar el capítulo 12 de la referencia bibliográfica 17 una demostración más formal sobre la validez de la ecuación (2.1.18).

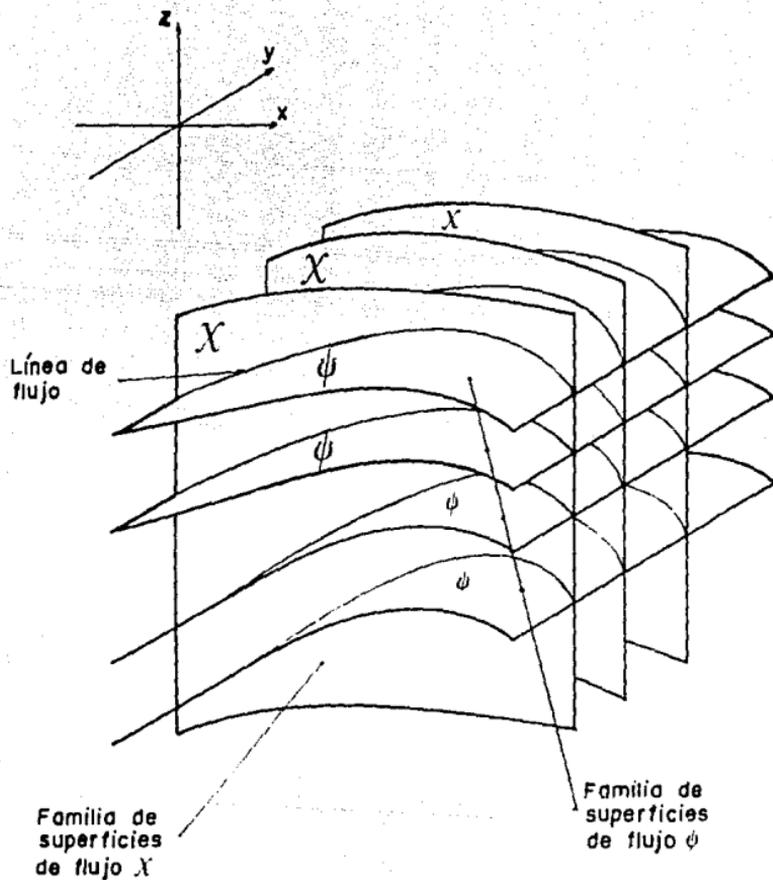


FIGURA II

Familia de superficies de flujo ψ y χ mutuamente ortogonales entre sí, de un campo de flujo.

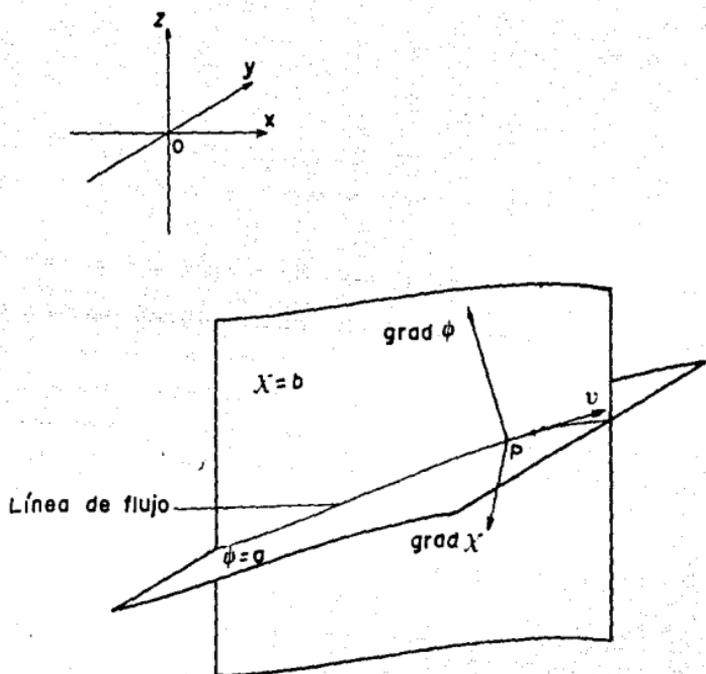


FIGURA 12

Superficies de flujo $\chi = b$ y $\phi = a$
 y vectores $\text{grad } \chi$, $\text{grad } \phi$ y v .

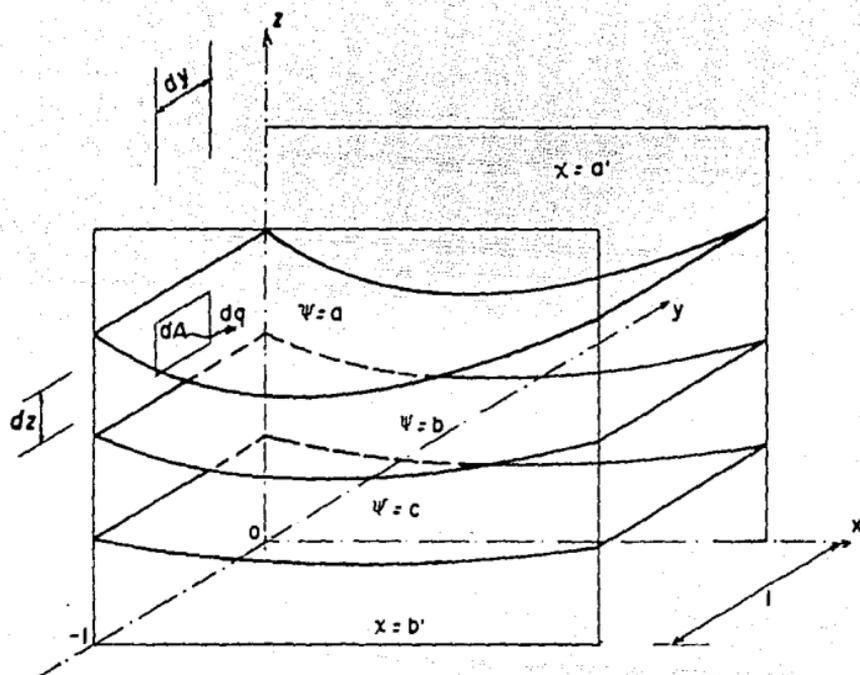


FIGURA 13

2.2 POTENCIAL DE VELOCIDAD.

Cuando las condiciones del flujo de agua en suelos permiten considerar válida la ley de Darcy, el campo de velocidades del flujo puede expresarse como el gradiente de un campo escalar

$$\vec{v} = \nabla \phi \quad (2.2.1)$$

En general, "si un campo vectorial f es el gradiente de un campo escalar ϕ , entonces ϕ se llama función potencial para f ".²⁶

La función ϕ es la función potencial para el campo de velocidades del flujo, por esta razón a la función ϕ se le denomina "potencial de velocidades".²⁷

En un flujo establecido, la función potencial de velocidades ϕ no tendrá variación con respecto al tiempo, es función exclusivamente del espacio, cuya expresión respecto a un sistema de referencia cartesiano será: $\phi = \phi(x, y, z)$.

La función de energía potencial de una partícula de agua que fluye en el interior de un medio poroso, sobre la que actúan únicamente fuerzas gravitacionales, representada por ϕ , también se puede definir de la siguiente manera:

$$\phi = -kh + c \quad (2.2.2)$$

dónde: k es el coeficiente de permeabilidad del suelo,

h es la altura piezométrica y

c es una constante.

²⁶ Apostol, Tom M., Op. Cit., p. 408.

²⁷ Boyce, William E. y DiPrima, Richard C., ECUACIONES DIFERENCIALES Y PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA, 3^a ed., México, Limusa, [1978], p 598.

La función ϕ define una familia de superficies denominadas equipotenciales, en cada una de estas superficies la función ϕ adquiere un valor constante.

Si se substituye la ecuación (2.2.2) en la ecuación (2.2.1), se obtiene la siguiente ecuación:

$$\vec{v} = \nabla(-kh + c) \quad (2.2.3)$$

Por otro lado, el operador gradiente cumple con las siguientes propiedades

$$\nabla(a + b) = \nabla a + \nabla b \quad (2.2.4.a)$$

$$\nabla a = 0, \quad \text{si } a \text{ es constante} \quad (2.2.4.b)$$

Considerando las propiedades del operador gradiente anteriores, la ecuación (2.2.3) es equivalente a la ecuación (1.15.14) que es la expresión vectorial de la ley de Darcy.

El término $\nabla\phi$ corresponde a un vector normal a las superficies equipotenciales definidas por la función ϕ , este vector corresponde a la velocidad del flujo [ecuación (3.2.1)] como las superficies de flujo son tangentes a la velocidad del flujo en cualquier punto de la región de flujo; entonces, las superficies equipotenciales serán ortogonales a las superficies de flujo.

Las funciones de corriente $\psi = F(x, y, z)$ y $\chi = G(x, y, z)$ junto con la función potencial de velocidad $\phi = H(x, y, z)$ definen un sistema de familias de superficies triortogonales, a partir del cual se pueden definir las características del flujo en cualquier punto

del campo de flujo. Substituyendo la ecuación (2.2.1) en la ecuación (2.1.1) se obtiene la siguiente ecuación:

$$\nabla p = \nabla \psi \times \nabla \chi \quad (2.2.5)$$

Para el caso de flujo bidimensional, el sistema de superficies triortogonales ψ , χ y p , corresponde a un sistema de dos familias de curvas resultantes de la intersección de las familias de superficies ψ y p con el plano xz paralelo a todas las superficies planas χ .

A las curvas obtenidas por la intersección de las superficies equipotenciales p con el plano xz se les denomina líneas equipotenciales (o equienergéticas) y a las curvas obtenidas por la intersección de las superficies de corriente ψ con el plano xz se les denomina líneas de corriente (o de flujo). El sistema formado por la familia de líneas equipotenciales y de corriente se le denomina red de flujo.

El caso bidimensional de la ecuación (2.2.1) se expresa de la siguiente manera:

$$\vec{v} = v_x \mathbf{i} + v_z \mathbf{k} = \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k} \quad (2.2.6)$$

por igualdad de vectores,

$$v_x = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.2.7.a)$$

$$v_z = \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.2.7.b)$$

Las familias de curvas equipotenciales y de corriente se relacionan a partir de las siguientes ecuaciones, obtenidas de la

relación entre las ecuaciones (2.1.9) y (2.2.7)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (2.2.8.a)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.2.8.b)$$

Las ecuaciones (2.2.8) constituyen las condiciones denominadas de D'Alembert - Euler o de Cauchy - Riemann para las ecuaciones φ y ψ .²⁸

Las líneas de flujo definidas por la función de corriente ψ son ortogonales a las curvas equipotenciales φ , lo que puede demostrarse a partir de la derivada total a lo largo de la curva $\varphi(x,z)=\text{constante}$

$$d\varphi = \nabla \varphi \cdot d\vec{s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0 \quad (2.2.9)$$

La ecuación (2.1.13) es la derivada total a lo largo de la curva $\psi(x,z)=\text{constante}$, similar a la ecuación anterior.

²⁸ Polubarinova Kochina, Pelageia Iakovlevna, THEORY OF GROUND WATER MOVEMENT, Princeton N. J., Princeton University, 1962, p. 31.

La pendiente de la familia de curvas ψ está definida por la siguiente ecuación:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_{\psi} = -\frac{\frac{\partial\psi}{\partial x}}{\frac{\partial\psi}{\partial z}} \quad (2.2.10.a)$$

y la pendiente de la familia de curvas ρ está definida por la siguiente ecuación:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_{\rho} = -\frac{\frac{\partial\rho}{\partial x}}{\frac{\partial\rho}{\partial z}} \quad (2.2.10.b)$$

Substituyendo las ecuaciones (2.2.8) (condiciones de Cauchy - Riemann), en la ecuación (2.2.10.a), se obtiene la siguiente ecuación:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_{\psi} = \frac{\frac{\partial\phi}{\partial z}}{\frac{\partial\phi}{\partial x}} \quad (2.2.11)$$

Comparando las ecuaciones (2.2.10.b) y (2.2.11) las pendientes resultantes de ambas familias de curvas ψ y ρ son recíprocas y de signo contrario, lo cual es la condición de ortogonalidad,²⁹ puesto que las superficies de flujo definidas por la función de corriente $\psi(x,y,z)$ son ortogonales a las superficies equipotenciales definidas por $\phi(x,y,z)$.

²⁹Juárez Badillo, E. y Rico Rodríguez, A., Op. Cit., Vol. 3, p. 24.

2.3 SOLUCION DE LA ECUACION DE LAPLACE.

En el análisis bidimensional de un flujo ideal, establecido e incompresible, el sistema formado por las dos familias de curvas ψ y ϕ mutuamente ortogonales entre sí, se denomina red de flujo, este sistema de curvas satisface la ecuación de Laplace en su carácter bidimensional.

Primero se demostrará que la función potencial de velocidad satisface la ecuación de Laplace.

De acuerdo a la ecuación (1.12.13), el divergente del campo de velocidad de un flujo ideal e incompresible vale cero, como dicho campo de velocidad se definió en la ecuación (2.2.1) igual al gradiente del campo escalar ϕ , la condición de incompresibilidad, también se expresa de la siguiente manera:

$$\text{div } \vec{v} = \text{div}(\nabla\phi) = 0 \quad (2.3.1)$$

desarrollando la ecuación anterior se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\vec{v} = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} i + \frac{\partial\phi}{\partial y} j + \frac{\partial\phi}{\partial z} k \quad (2.3.2)$$

$$\text{div}(\nabla\phi) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.3.3)$$

o bien,

$$\text{div}(\nabla\phi) = \nabla^2\phi = 0 \quad (2.3.4)$$

La ecuación (2.3.4) expresa que la divergencia del gradiente del campo escalar ϕ es la laplaciana de ϕ y puesto que vale cero la función ϕ es armónica,³⁰ entonces la función potencial de velocidad satisface la ecuación de Laplace.

En el flujo ideal, el campo rotacional de velocidad es nulo; a partir de este principio se puede demostrar que la función corriente ψ para el caso bidimensional también satisface la ecuación de Laplace.

En un flujo ideal, bidimensional, incompresible y establecido la ecuación (1.10.3) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\text{rot } \bar{v} = \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right] j = 0 \quad (2.3.5)$$

Obviamente, el vector unitario j nunca podrá valer cero, por lo tanto:

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0 \quad (2.3.6)$$

Substituyendo las respectivas ecuaciones (2.1.9) en la ecuación anterior, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.3.7)$$

³⁰ Apostol, Tom M., op. cit., p. 542.

o bien,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad (2.3.8)$$

La laplaciana de la función ψ también vale cero, por lo tanto, la función ψ es armónica y satisface la ecuación de Laplace.

Es posible obtener la laplaciana de la función ψ , a partir de las condiciones de Cauchy-Riemann, [ecuaciones (2.2.8)], simplemente derivando con respecto a z la derivada parcial de ψ respecto a x y derivando con respecto a x la derivada parcial de ψ respecto a z , obteniendo las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (2.3.9.a)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (2.3.9.b)$$

Restando miembro a miembro las ecuaciones (2.3.9) se obtiene que la laplaciana de ψ es igual a cero, por lo tanto ψ es una función armónica y satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad (2.3.10)$$

o bien,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \nabla^2 \psi = 0 \quad (2.3.11)$$

La determinación de dos funciones que definan las familias de curvas ψ y ϕ respectivamente, que satisfagan la ecuación de Laplace y las condiciones en la frontera del campo de flujo de un problema específico de flujo ideal, bidimensional, permanente e incompresible, constituye la única solución de dicho problema.

Puesto que los problemas de flujo establecido no dependen del tiempo, no existen condiciones iniciales que deben ser satisfechas por la solución de la ecuación de Laplace para un problema específico, sin embargo, dicha solución deberá satisfacer las condiciones impuestas en la frontera limitante del campo de flujo en estudio.

El problema de determinar la solución de la ecuación de Laplace a partir de las condiciones impuestas en la frontera del campo de flujo en cuestión, se denomina primer problema o "problema de Dirichlet" en honor a Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 - 1859).

El segundo problema, denominado "problema de Neumann", en honor a Karl Gottfried Neumann (1832 - 1925), consiste en la determinación de la solución de la ecuación de Laplace, determinando los valores de la derivada de la función potencial ϕ , normal a la frontera, en el interior del campo de flujo, lo que ocurre en aquellas fronteras que coinciden con superficies de corriente o equipotenciales. en este tipo de problemas se satisfacen las condiciones denominadas de gradiente nulo,³¹ esto es:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial s} = 0 \quad (2.3.12. a)$$

³¹ Sotelo Avila, Gilberto, HIDRAULICA GENERAL; FUNDAMENTOS, México, Limusa, [1974], Vol. 1, p. 414.

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$$

(2.3.12.b)

donde n es la dirección normal y s la dirección tangente a dichas superficies.

En la mayoría de los casos prácticos de flujo bidimensional, la determinación matemática exacta de las funciones ψ y p , que satisfacen la ecuación de Laplace y las condiciones de frontera del problema en cuestión, es sumamente complicada y en muchos casos imposible. sin embargo, gracias a la investigación científica referente al flujo ideal e incompresible, han surgido una serie de métodos que permiten obtener soluciones confiables con diferentes grados de aproximación a la solución exacta, entre los cuales se encuentran los métodos numéricos aproximados, tales como la técnica de Monte Carlo, método matricial, solución de la ecuación de Laplace en diferencias finitas, etcétera; los métodos analógicos, como el de la red eléctrica, analogía de la membrana, conformógrafo de Urquijo, túnel de flujo viscoso, etcétera; los modelos de flujo; y el de método gráfico o de la red de flujo que actualmente es el método de mayor demanda en ingeniería.

Para seleccionar un método específico en la solución de un problema de flujo, es necesario evaluar si el grado de exactitud requerido justifica el costo del método. Existen métodos sumamente sofisticados y complejos que proporcionan resultados con un alto grado de exactitud que sin embargo tienen un costo muy elevado, también existen otros métodos menos sofisticados, de menor costo y de menor grado de exactitud en sus resultados pero que proporcionan soluciones útiles y confiables en muchos problemas de ingeniería.

2.4 CONDICIONES DE FRONTERA.

Para resolver un problema de flujo de agua en suelos, primeramente se requiere definir las características hidráulicas y geométricas de las superficies de frontera que delimitan la región de flujo. En el análisis bidimensional del flujo, estas superficies de frontera corresponden a líneas de frontera.

De acuerdo a las diferentes clases de líneas de frontera que pueden presentarse en una región de flujo bidimensional, los problemas de flujo de agua en suelos pueden clasificarse en problemas de flujo confinado y problemas de flujo no confinado.

Los problemas de flujo confinado tienen la característica de que permiten definir las líneas de frontera a partir de la selección de la región de flujo, por esta razón se conocen de antemano. En la figura 14 (página 99) se presenta un ejemplo de flujo confinado.

Las líneas de frontera que se presentan en los problemas de flujo confinado son de dos clases:

a) La primera clase de línea de frontera corresponde a la superficie de contacto entre el suelo infiltrado y un medio prácticamente impermeable el cual puede ser roca, concreto u otro material con permeabilidad mucho menor a la del suelo infiltrado (frontera impermeable). Se considera que el agua no es capaz de fluir a través de esta clase de frontera, por lo que el flujo siempre será paralelo a ésta y por tal motivo esta línea de frontera constituye una línea de flujo. En la figura 14 esta clase de frontera está representada por las líneas BCDEF y HI.

b) La segunda clase de línea de frontera corresponde a la superficie de contacto entre el agua y el suelo infiltrado (frontera agua - suelo infiltrado), en la figura 14 esta clase de frontera está representada por las líneas AB y FG. Mas adelante se demuestra que esta clase de frontera constituye una línea equipotencial.

En los problemas de flujo no confinado no todas las líneas de frontera se conocen de antemano, en la figura 15 (página 100) se presenta un ejemplo de flujo no confinado. En este tipo de problemas de flujo, se pueden presentar cuatro clases de líneas de frontera diferentes:

a) Igual que en los problemas de flujo confinado, esta clase de frontera corresponde a la superficie de contacto entre el suelo infiltrado y un medio impermeable (frontera impermeable), que constituye, como ya se dijo, una línea de flujo. En la figura 15 esta clase de frontera está representada por la línea BH.

b) La segunda clase de línea de frontera que se presenta en problemas de flujo no confinado, al igual que en problemas de flujo confinado, corresponde a la superficie de contacto entre el agua y el suelo infiltrado, representada por las líneas BC y OH en la figura 15. Como la carga de velocidad a lo largo de esta frontera es prácticamente despreciable la distribución de presiones se puede considerar hidrostática, por ejemplo: considerese el punto J de la figura 15, situado sobre la línea BC (frontera agua - suelo infiltrado) a una profundidad z con respecto del nivel de la superficie libre del agua en el embalse, como la presión p puede considerarse hidrostática se define por la siguiente ecuación:

$$p = \gamma_w z \quad (2.4.1)$$

donde γ_w es el peso específico del agua. La carga de presión, entonces, queda definida por la siguiente ecuación:

$$\frac{p}{\gamma_w} = \frac{\gamma_w z}{\gamma_w} = z \quad (2.4.2)$$

si se considera la línea AJ como el plano horizontal de referencia, la carga hidráulica total H en el punto J será igual a la carga de presión más la carga de posición.

$$H = z + (h_a - z) = h_a \quad (2.4.3)$$

donde h_a es el tirante del embalse.

De acuerdo a la ecuación (2.4.3), la carga hidráulica total a lo largo de la frontera agua-suelo infiltrado vale siempre lo mismo y es igual al tirante del embalse, por lo que esta clase de frontera constituye una línea equipotencial, como ya se había mencionado anteriormente.

c) La tercera clase de línea de frontera, corresponde a la

superficie que divide al agua gravitacional del agua capilar en el interior de la masa de suelo infiltrado. Esta superficie, tiene la característica de poseer una presión igual a la atmosférica en todos sus puntos constitutivos y constituye la superficie de frontera superior del flujo de agua gravitacional.³²

Es obvio que no es posible el flujo de agua gravitacional a través de esta clase de frontera, por lo tanto, esta superficie de frontera es una superficie de flujo. En problemas de flujo bidimensional, esta superficie corresponde a la línea superior de flujo, también denominada línea equipresión. En la figura 13 esta línea de frontera está representada por la línea ϕ .

En la práctica, es común considerar una escala relativa de presiones cuyo origen corresponde a la presión atmosférica, con base en esto, la carga de presión a lo largo de la línea superior de flujo será nula y puesto que la carga de velocidad del flujo se considera despreciable, la carga hidráulica total, a lo largo de la línea superior de flujo será igual a la carga de posición

$$H = z$$

(2.4.4)

De acuerdo a la ecuación anterior, la caída de carga hidráulica entre dos puntos sobre la línea superior de flujo, correspondientes a la intersección de ésta con dos líneas equipotenciales contiguas, corresponde solamente a una pérdida de posición, por lo que en una red de flujo se han de dibujar las líneas equipotenciales que intersecan la línea superior de flujo con una separación vertical Δh constante, como se muestra en la figura 16 (página 101).

A diferencia de las dos primeras clases de fronteras definidas en los incisos a) y b), para poder resolver un problema de flujo no confinado, es necesario determinar la posición y configuración de la línea superior de flujo a partir de sus características hidráulicas, ya que no se conocen de antemano.

Es un problema singular la determinación de la línea superior de flujo, en problemas de flujo no confinado, cuyas bases teóricas también tienen fundamento en la experiencia, dicho problema trasciende los modestos objetivos propuestos en esta

³² En el subcapítulo 1.1 de esta tesis, esta superficie se denomina nivel freático.

tesis, el lector interesado puede consultar las referencias bibliográficas 4, 5, 7, 11, 13, 14 y 18, si desea profundizar más sobre tan importante e interesante tema.

d) La cuarta clase de línea de frontera corresponde a la superficie de contacto entre el suelo infiltrado y el aire (línea de descarga libre) representada por la línea fg en la figura 15.

Al igual que la línea superior de flujo, la línea de descarga libre es una línea equipresión, por que la presión en todos sus puntos constitutivos es igual a la atmosférica, por lo tanto, con respecto de una escala de presiones relativa, la carga hidráulica total a lo largo de esta línea de frontera es igual a la carga de posición [ecuación (2.4.4)]. Sin embargo, esta línea de frontera no constituye ni línea equipotencial, ni línea de flujo, es simplemente una cara de descarga libre.

Igual que en la línea superior de flujo, en una red de flujo las líneas equipotenciales que intersequen la línea de descarga libre, se han de dibujar con una separación vertical Δh constante, tal y como se muestra en la figura 16, y puesto que la línea de descarga libre no corresponde ni a línea equipotencial ni a línea de flujo, ésta se interseca tanto con líneas equipotenciales como con líneas de flujo, aunque no necesariamente en forma ortogonal.

La geometría de la línea de descarga libre está determinada de antemano por la forma de la superficie de contacto entre la masa de suelo infiltrado y el aire, no obstante también se conoce de antemano el punto final de esta línea, el punto inicial corresponde al punto de salida de la línea superior de flujo (punto f de la figura 15) y quedará determinado cuando previamente se determine la línea superior de flujo.

Por lo general, en las fronteras se presentan puntos en los que la teoría del potencial no considera la separación del flujo, resultando que en estos puntos la condición de ortogonalidad entre las líneas equipotenciales y de flujo no se cumple, estos puntos se les denomina puntos singulares, como ejemplo de estos puntos se pueden mencionar a los casos de fronteras que presentan quiebres bruscos o bien puntos que simultáneamente pertenecen a una línea de flujo y a una equipotencial. Estos puntos generan en el trazo de la red de flujo cuadros denominados singulares, en el subcapítulo II-4 de la referencia bibliográfica 7, el lector puede consultar la correcta interpretación respecto de estos puntos singulares y la demostración de su validez.

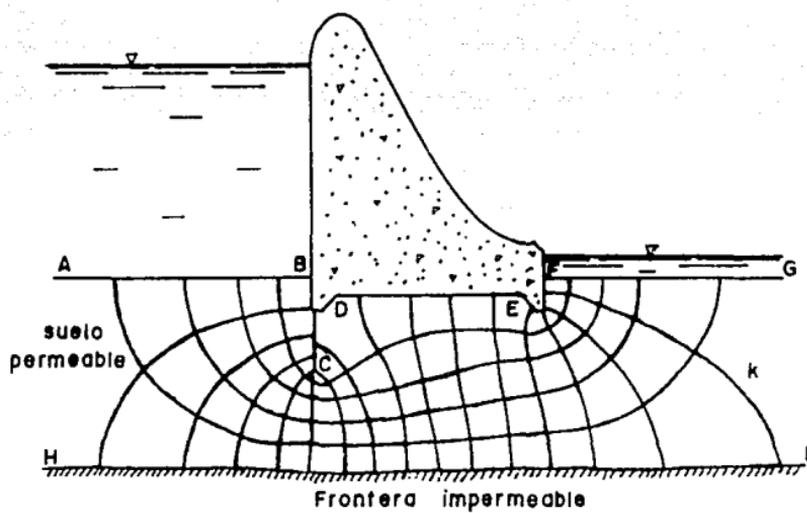


FIGURA 14
Flujo confinado

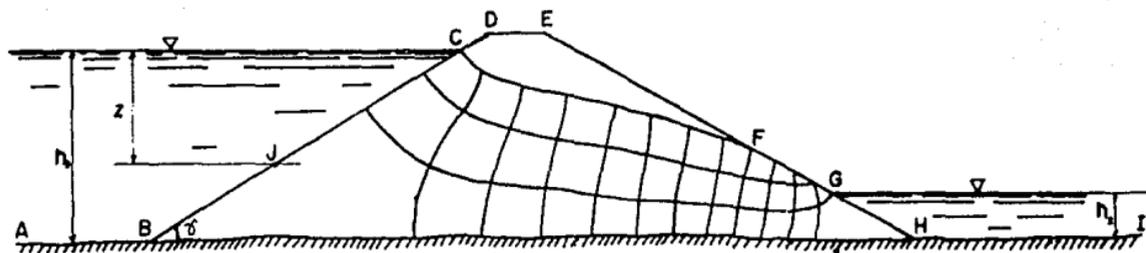


FIGURA 15

Flujo no confinado.

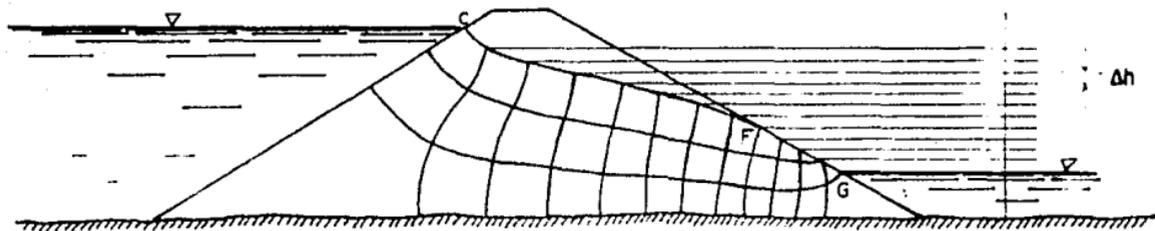


FIGURA 16

Caidas de carga hidráulica de
la línea superior de flujo.

2.5 METODO GRAFICO.

El método gráfico, también denominado método de la red de flujo, es el método aproximado más utilizado en ingeniería para la resolución de problemas de flujo bidimensional y ciertos problemas de flujo tridimensional con simetría axial.

Este método consiste en la elaboración a mano de una red de flujo, correspondiente a una región de flujo bidimensional de un problema específico, a partir del trazo ordenado y conveniente de cierto número de líneas equipotenciales y de corriente, que satisfagan las condiciones de ortogonalidad y en la frontera limitante de la región de flujo, sobre un esquema a escala de la región de flujo del problema.

A partir del método gráfico se pueden obtener datos bastante confiables para fines ingenieriles, si en el trazo de la red de flujo se tratan de satisfacer lo mejor posible la condición de ortogonalidad entre las líneas equipotenciales y de flujo, y las condiciones en la frontera de la región de flujo. Por su costo muy bajo con respecto a los demás métodos aproximados y por que no se requiere dominar teorías matemáticas demasiado complejas, este método ha adquirido gran popularidad entre los ingenieros que comúnmente tienen que enfrentarse a problemas de flujo bidimensional, además tiene la gran ventaja de crear una concepción objetiva de los fenómenos de flujo en quienes lo aplican sistemáticamente.

La solución de problemas de flujo bidimensionales, a partir de una imagen gráfica de éste es sumamente sencilla, la principal complicación del método gráfico es precisamente el trazo de la red de flujo. Para un ingeniero experimentado en la materia, quizá el trazo de la red de flujo no signifique mayor problema, sin embargo, para la mayoría de los ingenieros no experimentados y con pocas aptitudes artísticas en el dibujo, esta tarea puede significar una gran desventaja que a menudo desmerece a tan noble método. En las páginas 35 y 36 de la referencia bibliográfica 7 se presentan algunos consejos muy útiles, con respecto al trazo de la red de flujo.

Como ya se ha mencionado anteriormente, el número de líneas de flujo y equipotenciales de una región de flujo es infinito, puesto que en cada punto de la región de flujo el agua tiene una velocidad y una carga hidráulica. El trazo de todas las líneas de flujo y equipotenciales posibles daría como resultado una mancha uniforme en toda la región de flujo, de la cual no se podría obtener ningún resultado práctico. Para poder obtener información adecuada de la red de flujo, es necesario no trazar todas, sino algunas de las infinitas líneas de flujo y equipotenciales, de acuerdo a una convención que permita aprovechar eficientemente la red de flujo resultante.

La convención sugerida por varios ingenieros experimentados en el análisis de problemas de flujo bidimensional, consta de los siguientes dos incisos:

- a) Dibujar las líneas de flujo de tal manera que el gasto Δq que pase entre cada dos de ellas sea el mismo.
- b) Dibujar las líneas equipotenciales de tal manera que la caída de carga hidráulica Δh entre dos líneas equipotenciales contiguas sea la misma.

De esta forma se obtiene una red de flujo formada por N_f canales de flujo y N_e caídas de potencial.

El valor de la relación N_f/N_e , depende solamente de la forma de la región de flujo, este valor, denominado factor de forma, se representa por el símbolo F_f

$$F_f = \frac{N_f}{N_e} \quad (2.5.1)$$

En las figuras 14 (página 99) y 15 (página 100), se muestran dos ejemplos de redes de flujo para problemas de flujo confinado y no confinado respectivamente.

2.6 DETERMINACION DEL GASTO UNITARIO A PARTIR DE LA RED DE FLUJO.

Una de las aplicaciones inmediatas de la teoría del flujo con potencial utilizando el método gráfico, es la determinación del gasto unitario o por unidad de ancho a través de una región de flujo específica.

En la figura 17 (página 107), se presenta el fragmento de una red de flujo, puesto que el análisis del flujo es bidimensional, el tubo de flujo formado por las líneas de flujo ψ_1 y ψ_2 tendrá un espesor unitario normal a la hoja de papel.

El gasto unitario en el tubo de flujo es igual a la velocidad media de descarga del flujo, por el área de la sección normal al flujo, de acuerdo a la ley de Darcy, la velocidad media de descarga vale:

$$v = - k i \quad (2.6.1)$$

El área de la sección normal al flujo es igual a la altura a por el espesor unitario, entonces, por continuidad el gasto en el tubo de flujo vale

$$\Delta q = v a = - k a i \quad (2.6.2)$$

En la ecuación anterior, el gradiente hidráulico i es igual a la caída de potencial entre las líneas equipotenciales ϕ_1 y ϕ_2 , que es igual a Δh entre la distancia media recorrida por el agua de ϕ_1 a ϕ_2 que es b

$$i = - \frac{\Delta h}{b} \quad (2.6.3)$$

Substituyendo la ecuación (2.6.3) en la ecuación (2.6.2), el gasto unitario por el tubo de flujo también puede expresarse de la siguiente manera:

$$\Delta q = k \frac{a}{b} \Delta h \quad (2.6.4)$$

El gasto unitario total q , a través de la región de flujo, será igual a la suma de los gastos unitarios parciales de cada tubo de flujo que conforman la red. Por el primer inciso de la convención adoptada para el trazo de la red de flujo, el cual contempla que por cada dos líneas de flujo contiguas de la red debe pasar el mismo gasto unitario Δq y considerando que la red de flujo que se utiliza para el cálculo del gasto cumple con esta condición, el gasto unitario total q a través de la región de flujo, queda definido por la siguiente ecuación

$$q = \Delta q \mathcal{N} \quad (2.6.5)$$

Substituyendo la ecuación (2.6.4) en la ecuación (2.6.5), el gasto unitario total q también se expresa de la siguiente manera:

$$q = k \frac{a}{b} \Delta h \mathcal{N} \quad (2.6.6)$$

Considerando que la red de flujo que se utiliza también cumple con el segundo inciso de la convención adoptada para el trazo de la red de flujo, la caída de potencial Δh entre cada dos líneas equipotenciales contiguas será la misma y la caída de potencial total h entre las líneas equipotenciales extremas será:

$$h = \Delta h \mathcal{N}_e \quad (2.6.7)$$

Despejando Δh de la ecuación (2.6.7) y substituyendolo en la ecuación (2.6.6), se obtiene la siguiente ecuación:

$$q = k h \frac{a}{b} \frac{\mathcal{P}_r}{\mathcal{P}_e} \quad (2.6.8)$$

En una red de flujo de un problema de flujo ideal, bidimensional, establecido e incompresible, las magnitudes q , k , h , \mathcal{P}_r y \mathcal{P}_e son constantes, esto implica que la relación a/b también debe ser constante.

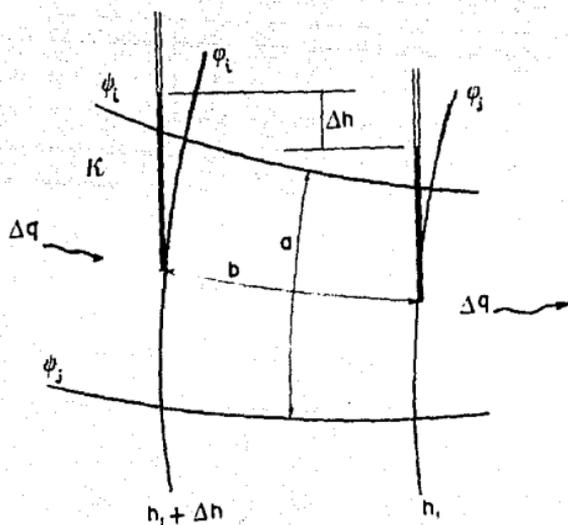
Para satisfacer las condiciones de los incisos a) y b) de la convención adoptada para el trazo de la red de flujo, los rectángulos curvilíneos que se forman en la red, deben ser semejantes, esto es, la relación entre el ancho a y el largo b de todos los rectángulos curvilíneos de la red debe ser la misma.

Si el trazo de la red de flujo se hace de tal manera que en lugar de rectángulos curvilíneos se tengan cuadrados curvilíneos, entonces $a = b$ y la relación a/b valdrá la unidad, de esta forma se tiene la ventaja de permitir evaluar a simple vista la calidad de la red de flujo y de simplificar significativamente el cálculo del gasto unitario, por esta razón, bien vale la pena trazar la red de flujo siempre tratando de obtener cuadrados curvilíneos, si se considera que todas las redes de flujo a utilizar estarán conformadas de cuadrados curvilíneos, la expresión (2.6.8) adquiere la siguiente forma:

$$q = k h \frac{\mathcal{P}_r}{\mathcal{P}_e} \quad (2.6.9)$$

La relación $\mathcal{P}_r/\mathcal{P}_e$ es el factor de forma, representado con el símbolo F_f , el cual se definió en el subcapítulo 2.5 de esta tesis (ecuación (2.5.1)). El gasto unitario total a través de la región de flujo considerada se puede calcular con la siguiente ecuación:

$$q = k h F_f \quad (2.6.10)$$



$$\Delta q = k \cdot \Delta h \cdot \frac{a}{b}$$

FIGURA 17

Cuadrado curvilíneo
de una red de flujo.

2.7 CALCULO DE LAS PRESIONES HIDRODINAMICAS A PARTIR DE LA RED DE FLUJO.

El método de la red de flujo permite calcular las presiones hidrodinámicas en el agua que se infiltra a través de una región de flujo, de manera práctica y sencilla.

Por ejemplo, suponiendo que se requiere calcular las presiones hidrodinámicas del agua que se infiltra en el estrato de suelo permeable de la figura 18 (página 112), puesto que la carga de velocidad del flujo de agua a través de un medio poroso es prácticamente despreciable, la carga hidráulica en cualquier punto de la región de infiltración será igual a la altura piezométrica del agua en dicho punto

$$h = \frac{P}{\gamma_w} + z \quad (2.7.1)$$

La carga de presión del agua en cualquier punto de la región de infiltración se puede obtener a partir de la ecuación (2.7.1), considerando la pérdida de potencial en el lugar del punto en cuestión, así, para el punto 1 de la figura 18, localizado en la intersección de la 3ª línea equipotencial (la primera línea equipotencial de la red de flujo de la figura 18, corresponde a la línea de frontera AB), con la línea de frontera BC, la caída de carga hidráulica es $2\Delta h$ y la carga hidráulica en el punto 1 será igual a la carga hidráulica total h a la que está sometida la región de flujo, menos la caída de potencial al punto en cuestión (que se obtiene contando las líneas equipotenciales antes del punto), que para el punto 1 es $2\Delta h$, entonces la carga hidráulica en el punto 1 vale $h - 2\Delta h$ y la carga de presión vale:

$$\frac{P_1}{\gamma_w} = h - 2\Delta h - z \quad (2.7.2)$$

Para determinar la carga de posición es necesario definir un plano horizontal de referencia, el cual puede ser cualquiera, en la figura 18, se eligió a la línea AG como el plano horizontal de referencia (P.H.R.).

Todo punto por arriba del plano horizontal de referencia tendrá una carga de posición positiva, la cual será igual a la distancia vertical entre el punto y el plano horizontal de referencia, por el contrario, todos los puntos abajo del plano horizontal de referencia tendrán una carga de posición negativa y su magnitud será igual a la distancia vertical entre dicho punto y el plano horizontal de referencia.

Si se define como z_1 la distancia vertical entre el punto 1 y el plano horizontal de referencia AG, como este punto está abajo de dicho plano, entonces la carga de posición de este punto es negativa y vale $-z_1$, substituyendo esta carga de posición en la ecuación (2.7.2), se obtiene la expresión que evalúa la carga de presión del agua en el punto 1

$$\frac{P_1}{\gamma_w} = h - 2\Delta h + z_1 \quad (2.7.3)$$

El resultado obtenido en la ecuación anterior también es posible obtenerlo directamente del esquema de la región de flujo en el que se ha trazado la red, para ello es necesario trazar una vertical de magnitud igual a la carga hidráulica total a la que está sometida la región de flujo, (representada por h en la figura 18), con su extremo final en contacto con el plano horizontal de referencia; luego dividir esta vertical de magnitud h en el número de caídas de potencial N_e de la red, en tramos Δh iguales, (para el caso de la red de la figura 18, la cual cuenta con 18 caídas de potencial, la vertical de magnitud h tiene 18 divisiones iguales y la distancia vertical de cada división es Δh); trácense líneas horizontales en el inicio de cada división de la vertical de magnitud h , que corresponderán a cada una de las caídas de potencial de la red.

Por ejemplo, para obtener la carga de presión del punto 1, de la figura 18, el cual está en la segunda caída de potencial (tercera línea equipotencial), se traza una vertical comenzando en la tercera línea horizontal (la primera es la línea 0) y terminando en la horizontal que pasa por el punto 1, la magnitud de la distancia de esta línea vertical es igual a la carga de presión del punto 1, en la unidad de longitud considerada en el esquema. De igual manera se puede proceder para calcular la carga de presión del agua en cualquier punto de la región de flujo.

Si se define como m al número de caídas de potencial a un punto cualquiera de la región de flujo, por ejemplo, para el

punto 1 de la figura 18, m será igual a 2 por que 1 está en la segunda caída de potencial de la red de flujo, para el punto 2, m será igual a 3.5 por que el punto 2 está a tres veces y media caídas de potencial, para el punto 3, $m=9$, etc., entonces se puede definir una expresión que permite calcular la carga de presión en cualquier punto i de la región de flujo

$$\frac{P_i}{\gamma_w} = h - m \frac{h}{\eta \tau_0} - z \quad (2.7.4)$$

o bien,

$$\frac{P_i}{\gamma_w} = h \left(1 - \frac{m}{\eta \tau_0} \right) - z \quad (2.7.5)$$

Para obtener la presión p en cualquier punto i de la región de flujo, basta con despejar p_i de la ecuación (2.7.5).

El agua que fluye a través del suelo, ejerce una presión hidrodinámica sobre las partículas del suelo, que generan empujes hidrodinámicos en la dirección del flujo, cuya magnitud depende sobre todo del gradiente hidráulico prevaleciente.

Si se considera un fragmento de una red de flujo, como el que se muestra en la figura 17 (página 107), la presión hidrodinámica que ejerce el agua sobre las partículas del suelo en la sección a de espesor unitario, del cuadrado curvilíneo vale:

$$p_D = \gamma_w \Delta h \quad (2.7.6)$$

La pérdida de carga hidráulica Δh se transmite a las partículas del suelo por el efecto de la viscosidad del fluido.

El empuje hidrodinámico generado por la presión hidrodinámica p_D vale:

$$J = p_D a = \gamma_{\omega} \Delta h a \quad (2.7.7)$$

Por lo general, los empujes hidrodinámicos se expresan por unidad de volumen, para el cuadrado curvilíneo considerado sería:

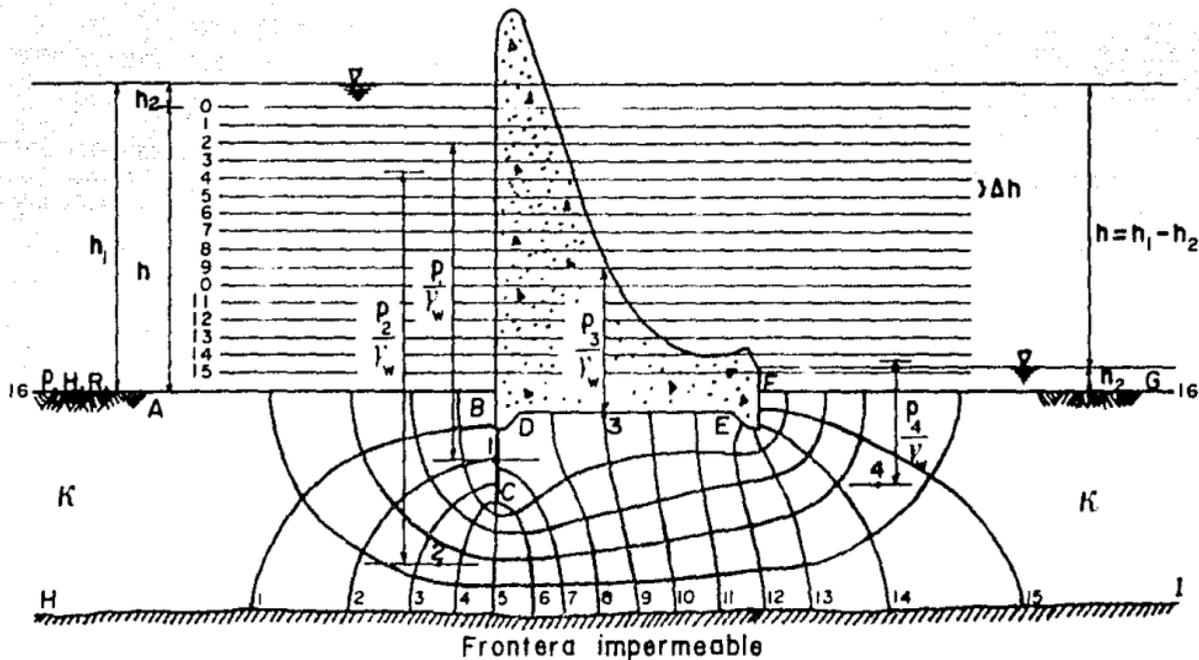
$$j = \frac{J}{a b} = \frac{\Delta h \gamma_{\omega} a}{a b} = \gamma_{\omega} \frac{\Delta h}{b} \quad (2.7.8)$$

o bien,

$$j = \gamma_{\omega} t \quad (2.7.9)$$

Para calcular cualquier fuerza de filtración en la dirección del flujo, actuante en el centroide de un cuadro curvilíneo de una red de flujo, basta multiplicar el segundo miembro de la ecuación (2.7.9), por el volumen del cuadrado.

Los fenómenos de estabilidad, tubificación y ebullición de los suelos, están íntimamente relacionados con la magnitud de las presiones hidrodinámicas del agua que fluye en su interior.



$$p = (H - n \Delta h - z) \gamma_w$$

FIGURA 18

Presiones hidrodinámicas del agua de infiltración en una región de flujo.

2.8 CALCULO DE VELOCIDADES Y GRADIENTES HIDRAULICOS.

El cálculo de las velocidades y gradientes hidráulicos del agua en los puntos de una región de flujo, a partir de su red de flujo, es sumamente sencillo, basta con trazar el segmento de línea de flujo que le corresponda al punto en cuestión; el gradiente hidráulico del agua en dicho punto será igual a la caída de potencial Δh correspondiente a las líneas equipotenciales contiguas entre las que se encuentre el punto dividida entre la magnitud del segmento de línea de flujo correspondiente al punto en cuestión, contenida entre dichas líneas equipotenciales.

Por ejemplo, si se requiere calcular el gradiente hidráulico del agua i en el punto r de la figura 19 (página 114), el cual se encuentra localizado entre las líneas equipotenciales ϕ y ϕ_j , cuya caída de potencial de una a otra es Δh , trácese el segmento de línea de flujo w_r que pasa por r y mídase su longitud contenida entre las dos líneas equipotenciales consideradas, que para el caso del punto r de la figura 19 es b ; entonces el gradiente hidráulico del agua en el punto r vale:

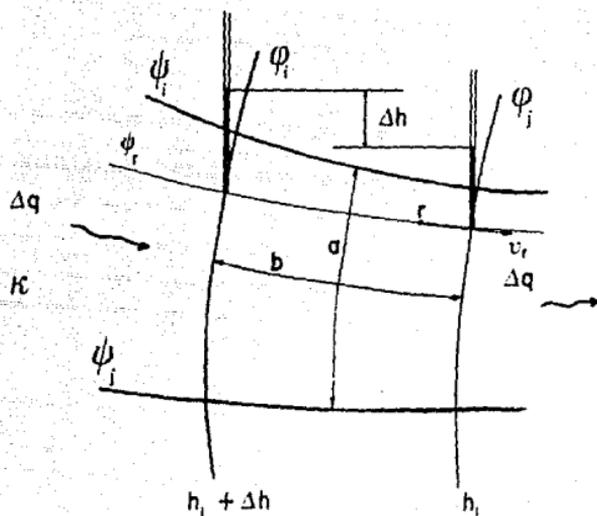
$$i_r = - \frac{\Delta h}{b} \quad (2.8.1)$$

De requerirse mayor precisión en el valor del gradiente hidráulico en el punto considerado, se puede subdividir el cuadrado curvilíneo de la red de flujo, en el que se localiza el punto en cuestión en cuadrados más pequeños conteniendo siempre al punto en cuestión.

La magnitud de la velocidad del agua en cualquier punto de la región de flujo, se puede obtener, de acuerdo a la ley de Darcy, calculando el gradiente hidráulico del agua en el punto de interés y multiplicándolo por el coeficiente de permeabilidad del suelo, por ejemplo:

$$\bar{v}_r = -k i_r = k \frac{\Delta h}{b} \quad (2.8.2)$$

La dirección de la velocidad del flujo en el punto considerado será tangente a la línea de flujo respectiva en dicho punto y el sentido de la velocidad será igual al sentido del flujo.



$$i_r = -\frac{\Delta h}{b}$$

$$v_r = \kappa \frac{\Delta h}{b}$$

FIGURA 19

Cálculo de velocidades y gradientes
hidráulicos de una red de flujo.

CAPITULO 3

MODELO DE HELE-SHAW

3.1 FLUJO LAMINAR ENTRE PAREDES PLANAS, PARALELAS.

Por el año de 1899, Sir George Gabriel Stokes (1819 - 1930) presentó un análisis matemático de un flujo laminar y establecido, de un líquido viscoso entre placas planas, paralelas, ligeramente separadas (representado gráficamente en la figura 20, página 133), demostrando que tal flujo puede derivarse de un potencial bidimensional⁹⁹.

Considerando las características hidráulicas del flujo laminar, incompresible, establecido y uniforme, en la ecuación constitutiva y fundamental de la mecánica de los fluidos, también conocida como "ecuación de Navier-Stokes", se obtiene una ecuación simplificada denominada "ecuación de Stokes", con la que se puede analizar este tipo de flujos.

La ecuación de Navier-Stokes puede expresarse de la siguiente forma:

$$\rho a = \rho M - \nabla p + \mu \nabla^2 u + \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot u) \quad (3.1.1)$$

Los términos constitutivos de la ecuación de Navier - Stokes son de carácter vectorial y corresponden a los conceptos previamente explicados en esta tesis.

La determinación de la ecuación de Navier - Stokes sobrepasa los objetivos propuestos en esta tesis, el lector interesado en el tema puede consultarlo en cualquier libro de mecánica de fluidos, o bien, en cualquiera de las referencias bibliográficas 9, 10 ó 15.

⁹⁹ De Wiest, Roger J. M., GEOHYDROLOGY, New York, John Wiley & Sons, 1965, p. 322.

En la mayoría de los casos los líquidos pueden suponerse incompresibles, lo que permite introducir la condición de incompresibilidad [ecuación (1.12.13)] en la ecuación de Navier-Stokes, obteniendo la siguiente ecuación:

$$\rho a = \rho M - \nabla p + \mu \nabla^2 v \quad (3.1.2)$$

la aceleración del flujo, respecto a un sistema de referencia cartesiano, puede expresarse de la siguiente manera:

$$a = a_x i + a_y j + a_z k \quad (3.1.3)$$

donde:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (3.1.4.a)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (3.1.4.b)$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (3.1.4.c)$$

o bien,

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad (3.1.5.a)$$

$$a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \quad (3.1.5.b)$$

$$a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (3.1.5.c)$$

A la derivada parcial de la velocidad con respecto al tiempo se le denomina aceleración local y corresponde a la variación de la velocidad del flujo en el transcurso del tiempo. Si se considera que la aceleración local del flujo es despreciable, se dice que el flujo es permanente ó establecido y para esta condición las componentes de la aceleración pueden expresarse de la siguiente manera:

$$a_x = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad (3.1.6.a)$$

$$a_y = v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \quad (3.1.6.b)$$

$$a_z = u_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (3.1.6.c)$$

Las ecuaciones anteriores corresponden a las componentes de la aceleración denominada convectiva, que se define como la variación de la velocidad del flujo con respecto al cambio de posición. Si la aceleración convectiva del flujo es despreciable, se dice que el flujo es uniforme.

En flujos permanentes, confinados por conductos de sección constante, no puede haber variación de la velocidad en la dirección del movimiento, pues esto implicaría una variación en el gasto, que de acuerdo al principio de continuidad [ecuación (1.7.1)] esto no puede ser posible y se puede afirmar de antemano que estos flujos son uniformes.

Para el flujo laminar, incompresible, establecido y uniforme, la ecuación de Navier-Stokes puede expresarse en la siguiente forma:

$$0 = \rho M - \nabla p + \mu \nabla^2 v \quad (3.1.7)$$

Por lo general las fuerzas de masa actuantes en el flujo son producidas por la acción de la gravedad, en este caso, la fuerza másica M está definida por la ecuación (1.8.4) que es la siguiente:

$$M = -gk$$

Ahora bien, el vector unitario k es igual al gradiente de la dirección z , esto es:

$$\nabla z = \frac{\partial z}{\partial x} i + \frac{\partial z}{\partial y} j + \frac{\partial z}{\partial z} k = k \quad (3.1.8)$$

entonces, la ecuación (1.8.4) también puede expresarse de la siguiente manera:

$$M = -g\nabla z \quad (3.1.9)$$

Por lo general el valor de la gravedad se puede considerar constante, por lo que la ecuación (3.1.9) también se puede escribir en la siguiente forma:

$$M = -\nabla(gz) \quad (3.1.10)$$

De la ecuación anterior se puede observar que las fuerzas másicas M admiten un potencial ϕ expresado de la siguiente forma:

$$\phi = -gz \quad (3.1.11)$$

entonces, existe un escalar función de los puntos del espacio ocupado por el fluido

$$M = \nabla\phi \quad (3.1.12)$$

Si el fluido se puede suponer incompresible su densidad puede considerarse constante. Si se substituye la ecuación (3.1.10) en la ecuación (3.1.7) se obtiene la siguiente ecuación:

$$0 = -\nabla(\rho z) - \nabla p + \mu \nabla^2 u \quad (3.1.13)$$

y por la propiedad del operador gradiente expuesta en la ecuación (3.2.4.a), la ecuación anterior también puede escribirse de la siguiente manera:

$$0 = -\nabla(p + \rho z) + \mu \nabla^2 u \quad (3.1.14)$$

o bien,

$$\mu \nabla^2 u = \nabla(p + \rho z) \quad (3.1.15)$$

Por la ecuación (1.3.3) $\gamma = \rho g$, entonces la ecuación anterior también puede expresarse como sigue:

$$\mu \nabla^2 u = \nabla(p + \gamma z) \quad (3.1.18)$$

Como g es constante y ρ es constante, entonces γ también debe ser constante. Si se divide a ambos miembros de la ecuación anterior entre γ se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{\mu}{\gamma} \nabla^2 v = \nabla \left[\frac{p}{\gamma} + z \right] \quad (3.1.17)$$

El segundo miembro de la ecuación anterior es el gradiente de la altura piezométrica, representado por h de acuerdo con la ecuación (1.11.18), entonces la ecuación (3.1.17) también puede escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{\mu}{\gamma} \nabla^2 v = \nabla h \quad (3.1.18)$$

La ecuación anterior se conoce con el nombre de "ecuación de Stokes" y constituye la ecuación fundamental para el análisis del flujo laminar, incompresible, uniforme y establecido.

Si se considera el flujo representado en la figura 20, en el cual la componente de la velocidad en la dirección z vale cero por que el flujo no puede atravesar las paredes que lo confinan, la ecuación de Stokes se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{\mu}{\gamma} \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) i = \frac{\partial h}{\partial x} i \quad (3.1.19.a)$$

$$\frac{\mu}{\gamma} \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) j = \frac{\partial h}{\partial y} j \quad (3.1.19.b)$$

$$0 = \frac{\partial h}{\partial z} k \quad (3.1.19.c)$$

Una conclusión importante se obtiene de una simple inspección de la ecuación (3.1.19.c): la presión se distribuye hidrostáticamente en dirección normal a las placas (dirección z), resultando que en cualquier punto del campo de flujo el gradiente de la altura piezométrica, en cualquiera de las direcciones x ó y , es completamente independiente de la dirección z . Aunque la magnitud de la velocidad del flujo varíe en dirección normal a las placas por efecto de la viscosidad del fluido, la altura piezométrica debe permanecer la misma.

Por la propiedad de viscosidad, la velocidad del flujo en contacto con las placas vale cero, aumentando a medida que se incrementa la distancia en dirección normal a cualquier frontera de la región de flujo, por esta razón, la magnitud máxima de la velocidad se alcanza en un plano paralelo y equidistante a las placas (ver figura 21, página 134). Este gradiente de velocidades es inversamente proporcional a la distancia entre fronteras; en las direcciones correspondientes a los ejes x y y las distancias entre fronteras son muy grandes en comparación con la separación entre placas (distancia entre fronteras en la dirección z), por lo que la variación de la magnitud de la velocidad del flujo en las direcciones x y y será insignificante en comparación con la que experimenta en la dirección z , bajo esta consideración, las derivadas parciales de las componentes v_x y v_y con respecto a x y y , y sus respectivas segundas derivadas valen cero, esto es:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = 0 \quad (3.1.20.a)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} = 0 \quad (3.1.20.b)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} = 0 \quad (3.1.20.c)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} = 0 \quad (3.1.20.d)$$

Introduciendo las condiciones (3.1.20) en las ecuaciones (3.1.19) se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\mu}{\gamma} \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} i = \frac{\partial h}{\partial x} i \quad (3.1.21.a)$$

$$\frac{\mu}{\gamma} \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} j = \frac{\partial h}{\partial y} j \quad (3.1.21.b)$$

$$0 = \frac{\partial h}{\partial z} k \quad (3.1.21.c)$$

Las ecuaciones (3.1.21.a) y (3.1.21.b) pueden integrarse con respecto a la dirección z ,

$$\int \frac{\mu}{\gamma} \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} dz = \int \frac{\partial h}{\partial x} dz \quad (3.1.22.a)$$

$$\int \frac{\mu}{\gamma} \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} dz = \int \frac{\partial h}{\partial y} dz \quad (3.1.22.b)$$

efectuando la intergración se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\mu}{\gamma} \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial x} z + C_{x_1} \quad (3.1.23.a)$$

$$\frac{\mu}{\gamma} \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial y} z + C_{y_1} \quad (3.1.23.b)$$

La velocidad del flujo será máxima cuando su derivada con respecto a z es igual a cero, como ésta se alcanza en el plano $z=0$ entonces las constantes de integración C_{x_1} y C_{y_1} valen cero y las ecuaciones (3.1.23) se expresan de la siguiente forma:

$$\frac{\mu}{\gamma} \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial x} z \quad (3.1.24.a)$$

$$\frac{\mu}{\gamma} \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial y} z \quad (3.1.24.b)$$

Volviendo a integrar las ecuaciones anteriores con respecto a z , se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\int \frac{\mu}{\gamma} \frac{\partial v_x}{\partial z} dz = \int \frac{\partial h}{\partial x} z dz \quad (3.1.25.a)$$

$$\int \frac{\mu}{\gamma} \frac{\partial v_y}{\partial z} dz = \int \frac{\partial h}{\partial y} z dz \quad (3.1.25.b)$$

o bien,

$$\frac{\mu}{\gamma} v_x = \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x} z^2 + C_{x2} \quad (3.1.26.a)$$

$$\frac{\mu}{\gamma} v_y = \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial y} z^2 + C_{y2} \quad (3.1.26.b)$$

Nuevamente, considerando que la velocidad máxima del flujo, representada con el símbolo u_{max} , sucede en el plano $z=0$, entonces, las constantes Cx_2 y Cy_2 de las ecuaciones (3.1.26) quedan definidas en la forma siguiente:

$$\frac{\mu}{\gamma} u_{max_x} = Cx_2 \quad (3.1.27.a)$$

$$\frac{\mu}{\gamma} u_{max_y} = Cy_2 \quad (3.1.27.b)$$

Substituyendo las ecuaciones (3.1.27) en las respectivas ecuaciones (3.1.26) se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\mu}{\gamma} u_x = \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x} z^2 + \frac{\mu}{\gamma} u_{max_x} \quad (3.1.28.a)$$

$$\frac{\mu}{\gamma} u_y = \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial y} z^2 + \frac{\mu}{\gamma} u_{max_y} \quad (3.1.28.b)$$

Considerando que el valor de la velocidad del flujo en contacto con las paredes vale cero, esto es: $u_x = 0$ y $u_y = 0$ para $z = \pm b$, el valor de las componentes de la velocidad máxima del flujo quedan definidas de la siguiente manera:

$u_x = u_y = 0$ para $z = \pm b$, entonces:

$$\frac{\mu}{\gamma} u_{max_x} + \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x} (\pm b)^2 = 0 \quad (3.1.29.a)$$

$$\frac{\mu}{\gamma} v_{\max y} + \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial y} (zb)^2 = 0 \quad (3.1.29. b)$$

o bien,

$$v_{\max x} = - \frac{b^2 \gamma}{2\mu} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.1.30. a)$$

$$v_{\max y} = - \frac{b^2 \gamma}{2\mu} \frac{\partial h}{\partial y} \quad (3.1.30. b)$$

y substituyendo las ecuaciones (3.1.30) en las respectivas ecuaciones (3.1.28) se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\mu}{\gamma} v_x = \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x} z^2 - \frac{b^2}{2} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.1.31. a)$$

$$\frac{\mu}{\gamma} v_y = \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial y} z^2 - \frac{b^2}{2} \frac{\partial h}{\partial y} \quad (3.1.31. b)$$

Desarrollando las operaciones algebraicas indicadas en las ecuaciones anteriores, se obtienen las ecuaciones que definen las componentes de la velocidad en cualquier punto de la región de flujo, que son las siguientes:

$$v_x = \frac{(z^2 - b^2)\gamma}{2\mu} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.1.32.a)$$

$$v_y = \frac{(z^2 - b^2)\gamma}{2\mu} \frac{\partial h}{\partial y} \quad (3.1.32.b)$$

Por simple inspección de las ecuaciones (3.1.32) se concluye que la distribución de velocidades del flujo es parabólica, tal como se representa en la figura 21.

El valor máximo que puede tomar la ordenada z dentro de la región de flujo es b y el mínimo es $-b$, por lo que z^2 es siempre menor ó igual a $(b)^2$, resultando que el primer término, del segundo miembro, de las ecuaciones (4.1.32) es siempre negativo; como la velocidad del flujo es positiva el gradiente de la altura piezométrica también debe ser negativo.

Definir magnitudes medias de las características hidráulicas del flujo, por lo general simplifica considerablemente el análisis y proporciona un enfoque global de mayor utilidad. Las componentes de la velocidad media representativa de la distribución de velocidades, para el flujo laminar entre paredes planas, paralelas, representada por el símbolo v_m , se definen de la siguiente forma:

$$v_{m_x} = \frac{1}{b} \int_0^b v_x dz \quad (3.1.33.a)$$

$$v_{m_y} = \frac{1}{b} \int_0^b v_y dz \quad (3.1.33.b)$$

Substituyendo las ecuaciones (3.1.32) en las respectivas ecuaciones (3.1.33) se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$v_{m_x} = \frac{1}{b} \int_0^b \frac{(z^2 - b^2)\gamma}{2\mu} \frac{\partial h}{\partial x} dz \quad (3.1.34.a)$$

$$v_{m_y} = \frac{1}{b} \int_0^b \frac{(z^2 - b^2)\gamma}{2\mu} \frac{\partial h}{\partial y} dz \quad (3.1.34.b)$$

y efectuando la integración de las ecuaciones anteriores, se obtienen las siguientes ecuaciones que definen las componentes de la velocidad media del flujo:

$$v_{m_x} = -\frac{\gamma b^2}{3\mu} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.1.35.a)$$

$$v_{m_y} = -\frac{\gamma b^2}{3\mu} \frac{\partial h}{\partial y} \quad (3.1.35.b)$$

Comparando las ecuaciones (3.1.30) con las ecuaciones (3.1.35), se puede apreciar que el valor de la velocidad media del flujo es dos tercios del valor de la velocidad máxima, esto es:

$$v_m = \frac{2}{3} v_{max} \quad (3.1.36)$$

Si se substituyen las ecuaciones (3.1.32) en la ecuación de continuidad para flujo incompresible y permanente (condición de incompresibilidad, ecuación (1.12.13)), se obtiene la laplaciana de la altura piezométrica h , esto es:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (3.1.37)$$

La ecuación anterior muestra que la altura piezométrica $h = p/\gamma + z$ para las condiciones del flujo representado en la figura 20 satisface la ecuación de Laplace, entonces existe una función escalar bidimensional de la que se pueden derivar las componentes de la velocidad en el plano xy , esto es: existe un potencial de velocidades ϕ_z que tiene la forma siguiente:

$$\phi_z = \frac{(z^2 - b^2)\gamma}{2\mu} h \quad (3.1.38)$$

El potencial de velocidades expresado por la función (3.1.38) está restringido a cualquier plano paralelo al plano xy , separados una distancia z en dirección normal a ambos en la región de flujo.

Substituyendo las ecuaciones (3.1.35) en la condición de incompresibilidad se demuestra que también existe un potencial para la velocidad media del flujo que tiene la siguiente forma:

$$\bar{\phi}_m = - \frac{\gamma b^2}{3\mu} h \quad (3.1.39)$$

No obstante se ha establecido que un potencial de velocidades solamente es posible en flujos ideales, se debe recordar que las funciones (3.1.38) y (3.1.39) son el resultado de considerar despreciable el gradiente de velocidades en las direcciones x y y , de lo que se concluye que: un potencial de velocidades solo puede existir en un flujo viscoso si no existe aceleración apreciable del flujo en la dirección de su movimiento.

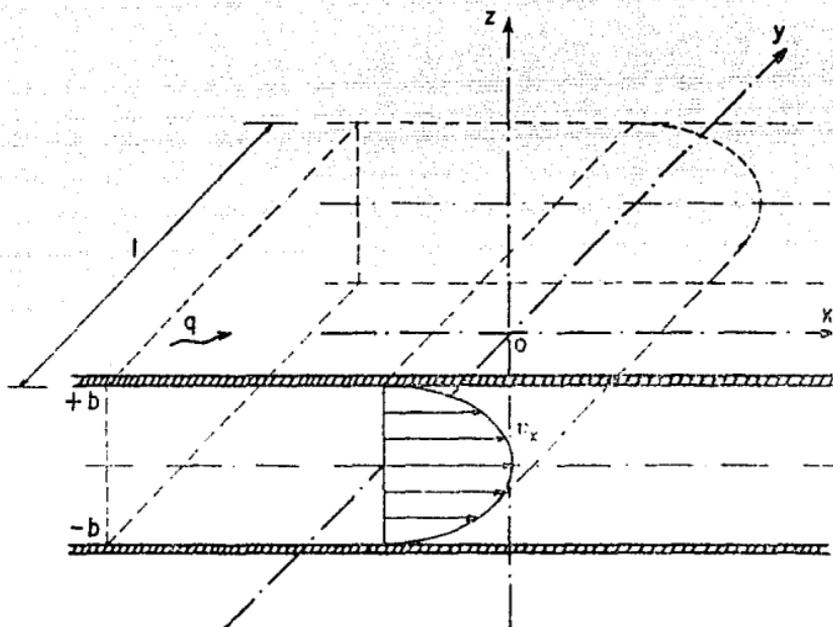


FIGURA 20

Flujo laminar, incompresible,
permanente y uniforme,
entre placas planas paralelas.

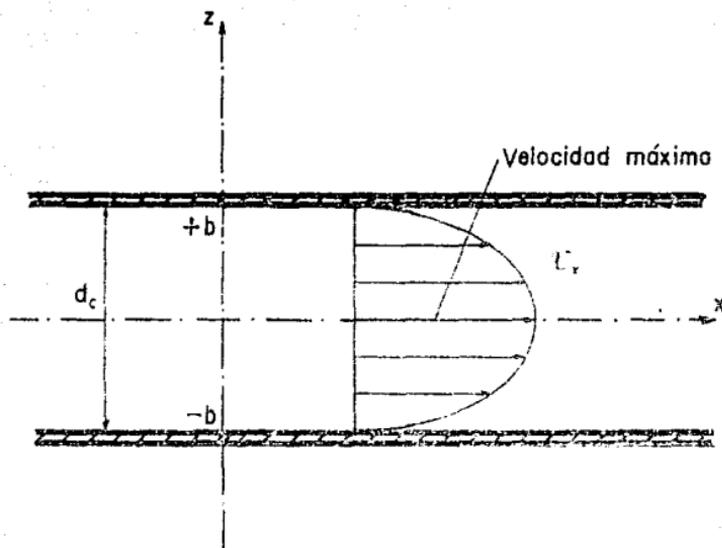


FIGURA 21

Flujo laminar, incompresible,
permanente y bidimensional,
entre dos placas planas,
paralelas y horizontales.

3.2 PERDIDA DE ENERGIA POR FRICCION.

La fricción desarrollada en el movimiento de un fluido viscoso, provoca una disminución de su energía en dirección de su movimiento.

En los flujos uniformes no existe variación de la distribución de velocidades de una sección a otra, por lo que tampoco habrá variación de la energía cinética en dirección del movimiento, la energía requerida por el flujo para vencer las fuerzas de fricción que se oponen al movimiento, es proporcionada por la energía piezométrica, provocando una disminución de ésta en la dirección del flujo.

Por el año 1850, Darcy, Weisbach y otros investigadores obtuvieron experimentalmente una ecuación para calcular la disminución o pérdida de la energía por fricción, en flujos confinados³⁴, expresada en la siguiente forma:

$$h_f = f \frac{L}{d_c} \frac{v_m^2}{2g} \quad (3.2.1)$$

los términos que integran la ecuación anterior corresponden a los siguientes conceptos:

h_f representa la pérdida de energía del flujo por fricción.

f se denomina "coeficiente de fricción", no tiene dimensiones. En flujos laminares este coeficiente depende exclusivamente del valor que adquiere el número de Reynolds y en los flujos turbulentos este coeficiente depende tanto del valor del número de Reynolds, como de la rugosidad ϵ de las paredes del conducto en contacto con el flujo.

L es la longitud considerada en la dirección del flujo para el cálculo de la pérdida de energía por fricción.

d_c representa la magnitud del diámetro correspondiente a la circunferencia inscrita en la sección del conducto.

v_m es la velocidad media del flujo.

³⁴Sotelo Avila, Gilberto, Op. cit., p. 278.

g es el valor de la aceleración de la gravedad.

A la variación de la energía del flujo con respecto a la dirección de su movimiento se le denomina: "pendiente de fricción", se representa con el símbolo S_f y se puede expresar, respecto a un sistema de referencia local tal que la coordenada curvilínea s sea igual a la dirección del flujo y r el radio instantáneo de curvatura, de la siguiente manera:

$$S_f = - \frac{dh_f}{ds} \quad (3.2.2)$$

En flujos confinados por conductos de sección constante y eje longitudinal recto, la variación de la energía es constante y la pendiente de fricción también puede expresarse de la siguiente forma:

$$S_f = - \frac{dh_f}{ds} = - \frac{hf}{L} = \text{constante} \quad (3.2.3)$$

Substituyendo la ecuación (3.2.1) en la ecuación anterior, se obtiene la siguiente ecuación:

$$S_f = - \frac{f}{dc} \frac{v_m^2}{2g} \quad (3.2.4)$$

En los flujos uniformes la pendiente de fricción es igual a la variación de la altura piezométrica con respecto a la dirección del flujo, esto es:

$$S_f = \frac{dh}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{p}{\gamma} + z \right) \quad (3.2.5)$$

En la figura 22 (página 143), se presenta una interpretación gráfica de la variación de la energía del flujo por fricción.

El coeficiente de fricción f para el flujo laminar, incompresible, uniforme y permanente, confinado por fronteras planas, paralelas, ligeramente separadas, [como el representado en la figura 20 (página 133)], puede determinarse a partir de cualquiera de las ecuaciones que definen las componentes de la velocidad media del flujo [ecuaciones (3.1.35)], si se considera la dirección x , la variación de la altura piezométrica con respecto a esta dirección se expresa de la siguiente forma:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = - \frac{3\mu}{\gamma b^2} v_{m_x} \quad (3.2.6)$$

Si se multiplica y divide simultáneamente el segundo miembro de la ecuación anterior por $8 \delta v_{m_x}$, la igualdad no se altera y se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = - \frac{3\mu}{\gamma b^2} v_{m_x} \frac{8 \delta v_{m_x}}{8 \delta v_{m_x}} \quad (3.2.7)$$

Realizando operaciones algebraicas en la ecuación anterior, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = - \frac{24}{4b^2} \frac{\mu}{\rho} \frac{1}{v_{m,x}} \frac{v_{m,x}^2}{2g} \quad (3.2.8)$$

De la ecuación (1.9.2) se tiene que el coeficiente de viscosidad cinemático del fluido ν , es igual al coeficiente de viscosidad dinámico μ entre la densidad del fluido ρ , de esta forma la ecuación (3.2.8) también puede escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = - \frac{24}{4b^2} \frac{\nu}{v_{m,x}} \frac{v_{m,x}^2}{2g} \quad (3.2.9)$$

o bien,

$$\frac{\partial h}{\partial x} = - \frac{24}{2b} \frac{\nu}{2b v_{m,x}} \frac{v_{m,x}^2}{2g} \quad (3.2.10)$$

El diámetro d_c de la circunferencia inscrita entre las placas planas, paralelas (separación entre placas) que confinan el flujo representado en el esquema de la figura 20, es igual a dos veces la distancia b , esto es:

$$d_c = 2b \quad (3.2.11)$$

y substituyendo la ecuación anterior en la ecuación (3.2.10), se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = - \frac{24}{dc} \frac{\nu}{dc} \frac{v_m}{v_m} \frac{x^2}{2g} \quad (3.2.12)$$

Para el caso de flujos confinados por conductos de sección constante, el número de Reynolds se define de la siguiente forma:

$$R = \frac{v_m dc}{\nu} \quad (3.2.13)$$

de esta manera, la ecuación (3.2.12) se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = - \frac{24}{R} \frac{1}{dc} \frac{v_m}{v_m} \frac{x^2}{2g} \quad (3.2.14)$$

Ahora bien, si se comparan las ecuaciones (3.2.4) y (3.2.5), se obtiene la siguiente ecuación:

$$S_f = \frac{dh}{ds} = - \frac{f}{dc} \frac{v_m}{v_m} \frac{x^2}{2g} \quad (3.2.15)$$

y substituyendo la ecuación anterior en la ecuación (3.2.14), se obtiene el valor del coeficiente de fricción f para el flujo

laminar, incompresible, uniforme y establecido, confinado por fronteras planas, paralelas, que es el siguiente:

$$f = \frac{24}{R} \quad (3.2.16)$$

El valor del coeficiente de fricción definido por la ecuación anterior, es válido tanto para paredes rugosas como para paredes lisas siempre y cuando el flujo confinado por dichas paredes sea laminar, esto es, cuando el valor del número de Reynolds del flujo sea menor a cierto valor crítico, el cual define el inicio de la zona de transición de flujo laminar a flujo turbulento. Santig y Aravin³⁵ propusieron el valor de 1,000. como valor crítico, siendo este valor sumamente conservador respecto al valor propuesto por Poiseuille.

Alrededor del año 1846, el médico y físico francés Jean Poiseuille (1799 - 1869) fue el primer científico en determinar matemáticamente el valor del coeficiente de fricción f en flujos laminares, confinado por conductos de sección circular, demostrando que dicho factor es independiente de la rugosidad de las paredes del conducto en contacto con el flujo y válido para valores del número de Reynolds del flujo menores al valor crítico de 2,300.³⁶ Este resultado ha sido ampliamente comprobado por varios investigadores entre los que se puede nombrar a Nikuradse, Colebrook y White³⁷. El factor de fricción para flujos laminares confinados por conductos de sección circular se define como sigue:

$$f = \frac{64}{R} \quad (3.2.17)$$

³⁵ De Wiest, Roger J. M., Op. cit., p. 325.

³⁶ Sotelo Avila, Gilberto, Op. cit., p. 279.

³⁷ Ibid., pp. 280 - 283.

La deducción del factor de fricción para conductos circulares, se puede realizar a partir de un proceso similar al efectuado en la determinación de la ecuación (3.2.16), no obstante este desarrollo no se presenta en esta tesis el lector interesado en el tema puede consultarlo en el anexo B, de la referencia bibliográfica 17.

Al flujo laminar, incompresible y establecido, confinado por fronteras planas, paralelas, también se le denomina "flujo de Poiseuille"^{38y39} en honor a Jean Poiseuille.

Si la dirección del flujo está contenida en un plano horizontal, siempre ortogonal a la dirección de la gravedad, la energía de posición del flujo será siempre la misma a lo largo del movimiento y la energía necesaria para vencer las fuerzas de fricción que se oponen al movimiento, la proporciona la energía de presión.

En el esquema de la figura 23 (página 144), se presenta una interpretación gráfica de la variación de energía del flujo laminar, incompresible y establecido, confinado por placas planas, paralelas y horizontales, (flujo de Poiseuille).

La ecuación (3.2.5) también puede escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{dh}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{p}{\gamma} + z \right) = \frac{d}{ds} \frac{p}{\gamma} + \frac{dz}{ds} \quad (3.2.18)$$

Considerando la condición de flujo horizontal, se tiene que:

$$\frac{dz}{ds} = 0 \quad (3.2.19)$$

³⁸ Ibid., p. 141.

³⁹ Levi, Enzo, Op. cit., p. 227.

y substituyendo la ecuación (3.2.19) en la ecuación (3.2.18) se obtiene la siguiente ecuación:

para flujo horizontal:
$$\frac{dh}{ds} = \frac{d}{ds} \frac{p}{\gamma} \quad (3.2.20)$$

La distribución de la presión en una sección ortogonal a la dirección del flujo es prácticamente despreciable, se considera únicamente la variación de la presión media aplicada sobre todos los puntos de una misma sección, en la dirección del movimiento.

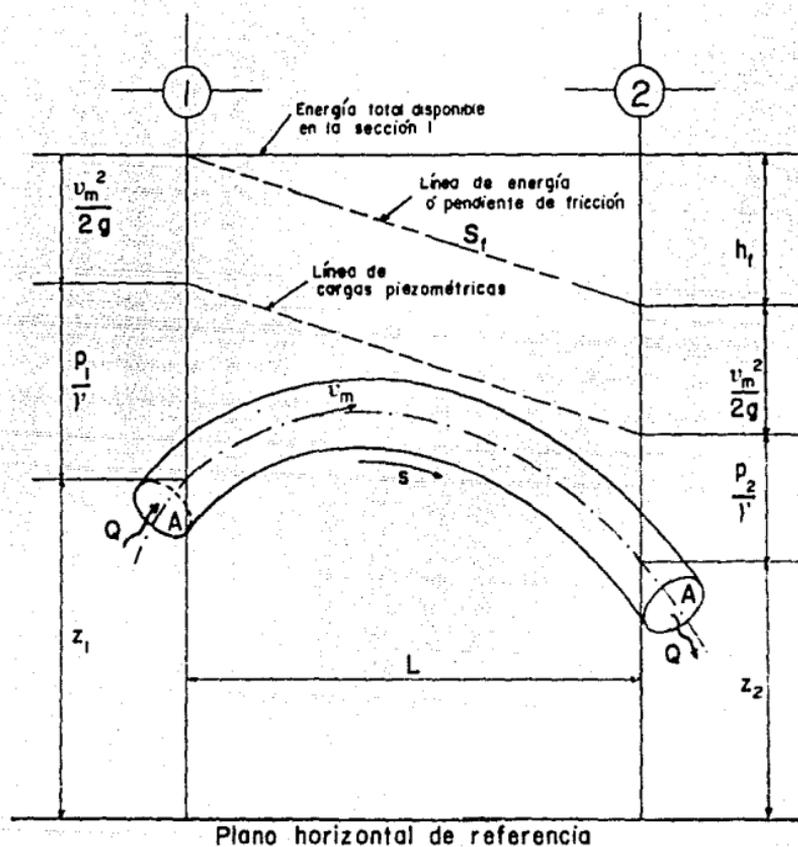


FIGURA 22

Interpretación gráfica de la energía de un flujo confinado por un conducto de sección constante.

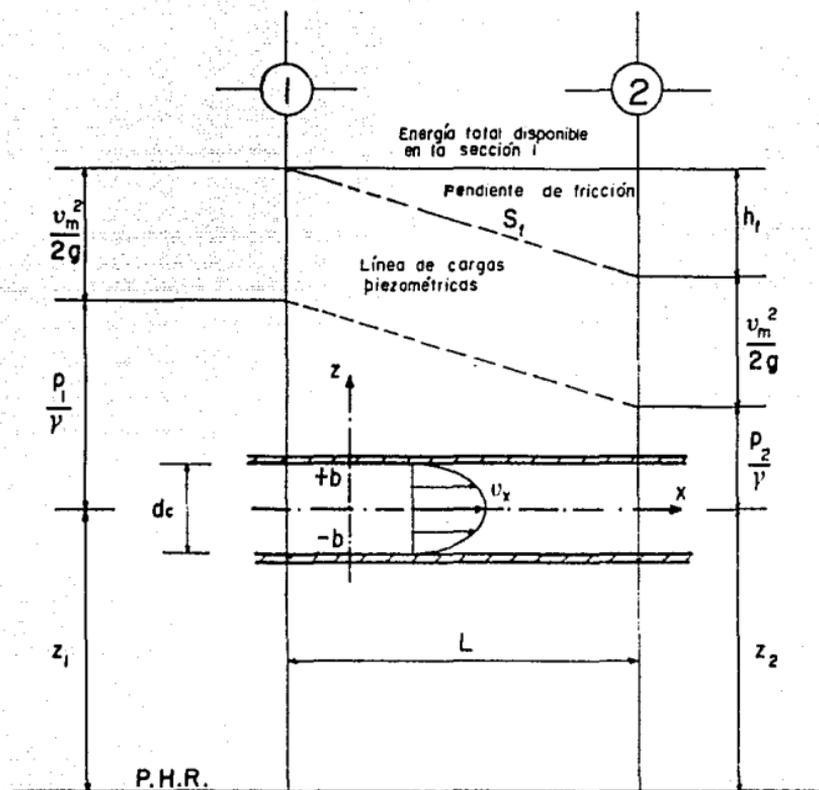


FIGURA 23

Interpretación gráfica de la energía de un flujo laminar, incompresible, uniforme y establecido, confinado por fronteras planas, paralelas y horizontales.

3.3 MODELO DE HELE - SHAW.

Alrededor del año 1897, HELE-SHAW^{40y41} diseñó en Inglaterra, el primer modelo de flujo laminar entre placas planas, paralelas, mediante el cual fué capaz de reproducir diversas configuraciones de flujos dotados de potencial bidimensional, insertando diferentes perfiles de obstáculos entre las placas que confinaban el flujo.

Los modelos de Hele-Shaw constan de dos placas planas, de material transparente y rígido, separadas una distancia muy pequeña, entre las cuales se hace fluir un líquido viscoso en régimen laminar; la imagen del flujo se obtiene coloreando un número arbitrario de filamentos de flujo, por medio de inyectar colorante a través de la entrada del fluido.

El flujo laminar confinado por placas planas, paralelas, rodea el obstáculo a propósito colocado entre las placas, obteniendo, mediante la coloración de líneas de flujo, diversas configuraciones del flujo alrededor del obstáculo, idénticas a las que se pueden determinar analíticamente para condiciones de frontera similares, con excepción de una pequeña distorsión en la inmediata vecindad del obstáculo mismo, en la cual, la hipótesis de que las variaciones de las componentes de la velocidad del flujo en la dirección del movimiento, son despreciables en comparación con las variaciones experimentadas en la dirección normal a la dirección del flujo, no sigue siendo válida. Sin embargo, la zona de influencia de la frontera (capa límite), se extiende dentro del flujo una distancia aproximadamente igual a la separación entre las placas, siendo posible reducir este efecto tanto como se quiera simplemente acercando las placas un con otra. Para garantizar el régimen laminar del flujo y reducir los efectos de la capa límite De Wiest⁴² propone una separación entre las placas del modelo, de un milímetro o fracción si se utilizan líquidos de baja viscosidad, tales como agua o aceites ligeros, y de pocos milímetros cuando se utilicen aceites pesados o glicerina.

⁴⁰Hele-Shaw, H. S., "EXPERIMENTS ON THE NATURE OF THE SURFACE RESISTANCE IN PIPES AND ON SHIPS," Transactions Institute Naval Architects, Vol. 39, pp. 145 - 158, (1897).

⁴¹Hele-Shaw, H. S., "INVESTIGATION OF THE NATURE OF SURFACE RESISTANCE OF WATER AND STREAMLINE MOTION UNDER CERTAIN EXPERIMENTAL CONDITIONS," Transactions Institute Naval Architects, Vol. 40, pp. 21 - 46, (1898).

⁴²De Wiest, Roger J. M., Op. cit., p. 325.

Los modelos de Hele-Shaw no solo son capaces de reproducir configuraciones de flujo alrededor de obstáculos, también han sido extensamente utilizados para simular flujos bidimensionales de agua a través de medios porosos. Estos modelos tienen dos formas principales de operación: en tunel cuando las placas y los perfiles de obstáculos que confinan el flujo forman un tunel o conducto a presión, y en canal cuando el flujo presenta una superficie expuesta a la atmósfera, en ambos casos las ecuaciones de la dinámica del flujo son totalmente análogas⁴⁹.

Los modelos de operación en tunel se utilizan principalmente para reproducir flujos potenciales, bidimensionales, establecidos alrededor de obstáculos, tales como pilas, perfiles de alas de aviones, secciones de cascos de embarcaciones, etc., también son ampliamente utilizados en el análisis de explotación de acuíferos por sistemas de pozos de bombeo. Aunque también pueden utilizarse para simular flujo de agua a través de medios porosos, tienen la desventaja que para los casos de flujos no confinados, no son capaces de reproducir la línea superior de flujo, siendo necesario determinarla de antemano ya sea a partir de las teorías de Dupuit, Schaffernak y Van Iterson, Casagrande, Kozeny, etc., o bien en forma gráfica, para introducirla como obstáculo en el interior del tunel, obviamente la precisión de la configuración de flujo obtenida en esta forma, será función de los cuidados y consideraciones adoptadas en la determinación de la línea superior de flujo. Sin embargo, los modelos de operación en tunel tienen la ventaja de poder reproducir configuraciones de flujos de diferentes problemas, simplemente introduciendo perfiles de obstáculos en el interior del tunel, además de que estos modelos son, por lo general, de construcción económica y fácil operación, por lo que estos modelos son ampliamente utilizados para actividades docentes, en la figura 24 (página 152) se presenta un esquema de un modelo de Hele-Shaw de operación en tunel.

Los modelos de Hele-Shaw de operación en canal, tienen la ventaja de reproducir la línea superior de flujo en forma natural, son ampliamente utilizados para reproducir flujos de agua a través de medios porosos, perfiles en canales y estructuras de aforo como vertedores y compuertas, flujos confinados y no confinados tanto establecidos como no establecidos, su uso para reproducir flujos alrededor de obstáculos es muy poco común. Este tipo de modelos reproducen configuraciones de flujo de alta calidad en forma natural, sin embargo, el diseño de cada modelo de operación en canal está limitado a un problema en específico y por lo general tienen un elevado costo de construcción y operación. Para que el

⁴⁹Ibid., p. 324.

funcionamiento del modelo sea satisfactorio, la dirección del flujo debe estar contenida en un plano vertical. Este tipo de modelos se utilizan principalmente en los laboratorios en investigaciones y análisis de problemas de flujo específicos muy complejos. En la figura 25 (página 153) se presenta el esquema de un modelo de Hele-Shaw de operación en canal.

De las ecuaciones (3.1.35), que definen las componentes de la velocidad media del flujo laminar entre placas planas paralelas, se puede definir un coeficiente de permeabilidad medio para los modelos de Hele-Shaw, de operación tanto en tunel como en canal, representado con el símbolo k_m , de la siguiente forma:

$$k_m = \frac{\gamma b^2}{3\mu} \quad (3.3.1)$$

entonces, las componentes de la velocidad media del flujo laminar en el modelo de Hele-Shaw se pueden expresar de la siguiente manera:

$$v_{m_x} = -k_m \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.3.2.a)$$

$$v_{m_y} = -k_m \frac{\partial h}{\partial y} \quad (3.3.2.b)$$

y considerando el operador gradiente para un campo bidimensional, las ecuaciones anteriores también se pueden escribir en la siguiente forma:

$$v_m = -k_m \nabla h \quad (3.3.3)$$

Existe una completa analogía entre la ecuación anterior y la ley de Darcy (ecuación (1.15.15)), lo que permite simular flujos

bidimensionales de agua a través de medios porosos mediante el flujo laminar medio en los modelos de Hele-Shaw, como ya se había mencionado.

Si se substituye la ecuación (3.3.1) en la ecuación (3.1.39), la función potencial de velocidades para el flujo medio en los modelos de Hele-Shaw, también puede escribirse como sigue:

$$\bar{\phi}_m = -k_m h \quad (3.3.4)$$

Cualquier configuración de flujo con potencial depende exclusivamente de la forma geométrica de las fronteras, por esta razón, a partir de los modelos de Hele-Shaw se pueden obtener configuraciones de flujo de problemas prácticos sumamente confiables y útiles, especialmente para aquellos problemas de flujo con potencial de compleja solución analítica.

La versatilidad de los modelos de Hele-Shaw como herramienta para la investigación de flujo de agua en suelos, tanto permanentes como no permanentes, radica en la fácil simulación de valores diferentes de la conductividad hidráulica del suelo, mediante variaciones de los componentes del coeficiente de permeabilidad del modelo k_m , i.e., mediante la variación de la separación de las placas b y de las propiedades del fluido γ y μ , variaciones regionales de k para simular flujos en suelos estratificados pueden considerarse por medio de la inserción de delgadas cintas transparentes para reducir la separación de las placas en la región deseada.

Se pueden armar modelos de Hele-Shaw, con materiales comerciales de bajo costo y operación satisfactoria. En esta tesis se propone la construcción de un modelo de Hele-Shaw para uso didáctico que opera en forma de tunel; el cual consta de dos placas de vidrio colocadas en posición horizontal, separadas por una placa de neopreno de 1.6 mm de espesor, previamente recortada en la forma del perfil de la frontera alrededor de la cual se quiere simular el flujo.

La placa de vidrio inferior es de 60 cm de largo, por 50 cm de ancho y 6 mm de espesor, se coloca en forma horizontal, simplemente apoyada en todo su perímetro sobre una estructura metálica que también soporta los tanques de alimentación y descarga de agua del modelo, tal como se muestra en el esquema de la figura 26 (página 154).

La placa de vidrio inferior soporta a su vez, la placa de neopreno recortada y la placa de vidrio superior. Se recomienda

que la placa de neopreno utilizada para separar las placas de vidrio, tenga magnitudes externas similares o ligeramente menores a la placa de vidrio inferior, el recorte practicado en la placa de neopreno, tiene la finalidad de dirigir el flujo, así como simular los perfiles de frontera, y se debe hacer coincidir con los accesos de los tanques de alimentación y descarga de agua del modelo.

La placa de vidrio superior es de 35 cm de largo, por 25 cm de ancho y 6 mm de espesor, se coloca exactamente encima del recorte practicado en la placa de neopreno, cuidando que por lo menos dos de sus lados queden totalmente apoyados sobre el neopreno, de tal manera que se forme un tunel en el cual el piso corresponderá a la placa de vidrio inferior, el techo a la placa de vidrio superior y las paredes laterales a las caras recortadas de la placa de neopreno, tal y como se muestra en los esquemas de las figuras 27 (página 155) y 28 (página 156).

El flujo de agua entre las placas se logra creando una diferencia entre los niveles de agua de alimentación y descarga, siendo el nivel de agua de alimentación obviamente mayor que el nivel de agua de descarga, la carga hidráulica requerida para lograr el flujo de agua entre las placas, se ajusta por medio de un pequeño vertedor de cresta rectangular colocado en el depósito de salida de agua. (ver figura 29 (página 157)).

La carga hidráulica máxima, posible en el modelo de Hele-Shaw propuesto en esta tesis, dado las dimensiones de sus componentes, no puede ser mayor de 6 mm, puesto que cualquier excedente de este valor, provocaría el desbordamiento del agua fuera del modelo, ni menor de 1.6 mm correspondiente a la separación de las placas.

No obstante la separación de las placas de vidrio del modelo es igual a 1.6 mm, la carga hidráulica tan baja con la que puede operar garantiza el régimen laminar del flujo de agua en el modelo; i.e., la condición crítica de operación sucede con la máxima carga hidráulica y temperatura de operación posibles.

La velocidad media teórica del flujo de agua en el modelo, despreciando pérdidas de energía por fricción, para la condición de la carga hidráulica máxima posible, se puede definir como sigue:

$$u_m = \sqrt{2gH} \quad (3.3.5)$$

donde H es la máxima carga hidráulica posible en el modelo. Substituyendo los valores de los términos constitutivos de la

ecuación anterior, en unidades congruentes se obtiene que el valor teórico de la velocidad media del flujo, despreciando pérdidas de energía por fricción, como sigue:

$$v_m = 343.1 \frac{\text{mm}}{\text{s}} \quad (3.3.6)$$

La viscosidad del agua disminuye al aumentar la temperatura. Si se considera que la temperatura del agua en el modelo que determina la condición de operación más desfavorable posible es aproximadamente de 30°C, el valor aproximado de la viscosidad cinemática del agua para esta temperatura será igual a 0.008 stokes⁴⁴, o bien, 0.8 mm²/s, y el valor máximo teóricamente posible del número de Reynolds del flujo de agua en el modelo será:

$$R = \frac{v_m d_c}{\nu} = \frac{343.1 (1.6)}{0.8} = 686.2 \quad (3.3.7)$$

que es mucho menor inclusive que el valor crítico propuesto por Santig y Aravin.

Se midieron en el modelo de Hele-Shaw propuesto en esta tesis, en forma práctica y aproximada, velocidades del flujo de agua inferiores a los 30 mm/s en operación normal, por lo que difícilmente el flujo dejará de ser laminar.

Con el objeto de evitar cualquier turbulencia u oleaje en el flujo que pudiera provocar la descarga de agua, ésta se introduce por la parte inferior del tanque de alimentación (ver figura 29).

Una vez que se ha estabilizado el flujo en el modelo, se procede a colocar pequeños trozos de la puntilla de un lápiz tinta, directamente dentro del flujo, apoyados sobre la placa de vidrio inferior, convenientemente espaciados a lo largo de la entrada al tunel, (ver figura 28). Los trozos de la puntilla del lápiz tinta se disuelven al contacto con el agua, coloreando las líneas de flujo correspondiente a su colocación, obteniendo de

⁴⁴Sotelo Avila, Gilberto, Op. Cit., p. 26.

esta manera, la imagen de la configuración de las líneas de flujo deseada [ver figura 30 (página 158)].

Cualquier imperfección en las placas de vidrio y neopreno, se reflejará en la imagen del flujo, por lo que se recomienda utilizar placas de vidrio y neopreno limpias y libres de imperfecciones, esto facilitará el flujo del agua y el desalojo de burbujas de aire en el tunel, igualmente debe utilizarse agua limpia durante la operación del modelo.

La estructura metálica que soporta el modelo, cuenta con una repisa específicamente diseñada para colocar un aparato de retroproyección estándar, que permite proyectar la imagen de las líneas de flujo en una pantalla (ver figura 20).

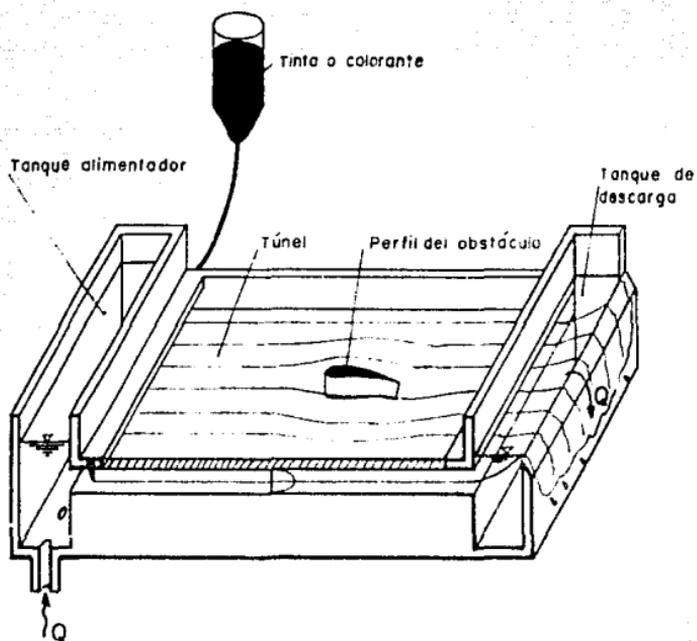


FIGURA 24

Modelo de Hele-Shaw
de operación en túnel.

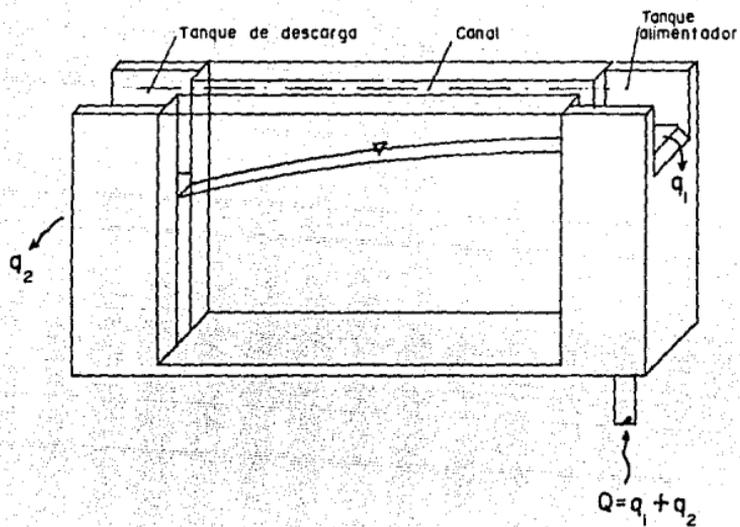


FIGURA 25

Modelo de Hele-Shaw
de operación en canal.

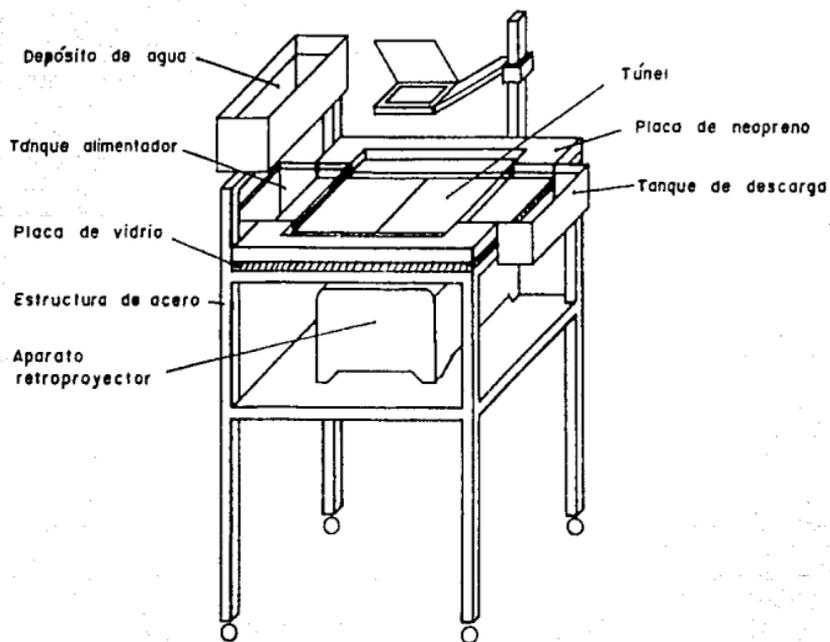


FIGURA 26

Modelo de Hele-Shaw
de operación en túnel
propuesto.

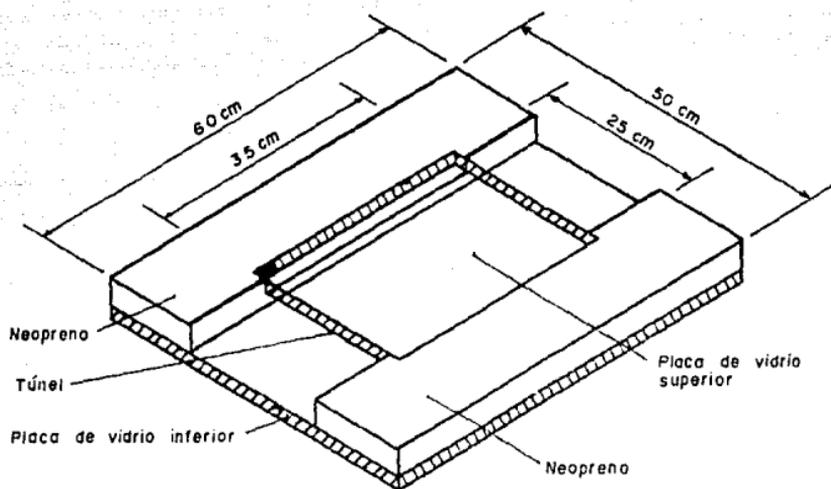


FIGURA 27

Configuración para
flujo alrededor
de obstáculos.

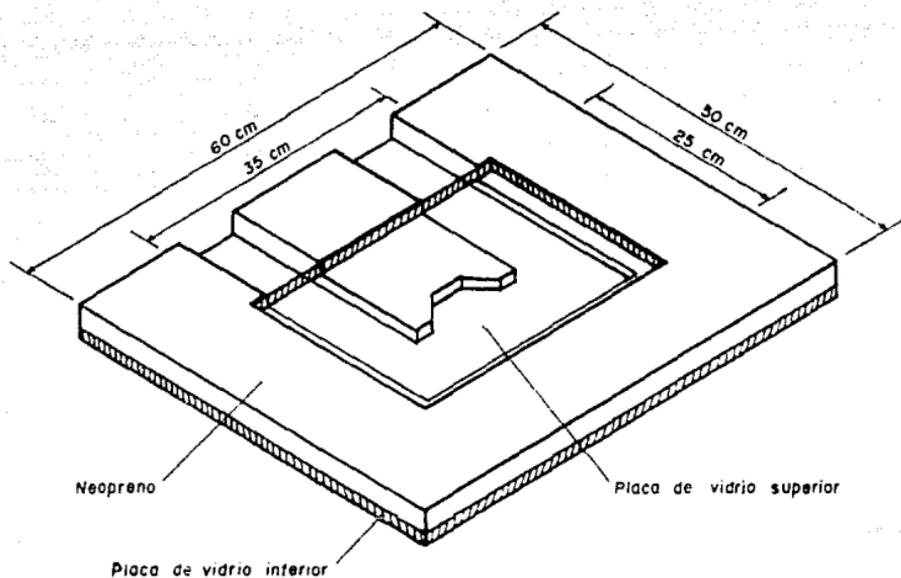


FIGURA 28

Configuración para flujo
a través de medios
permeables.

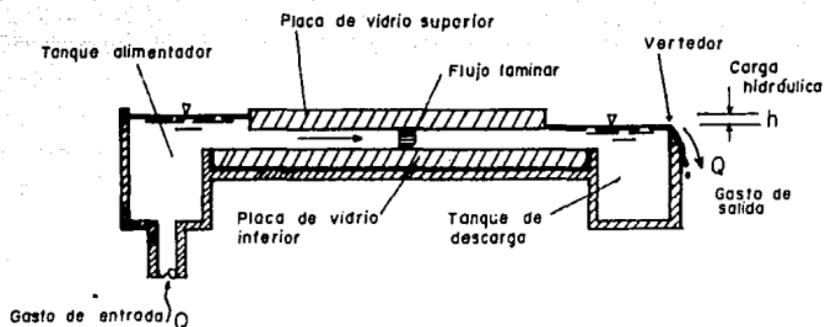
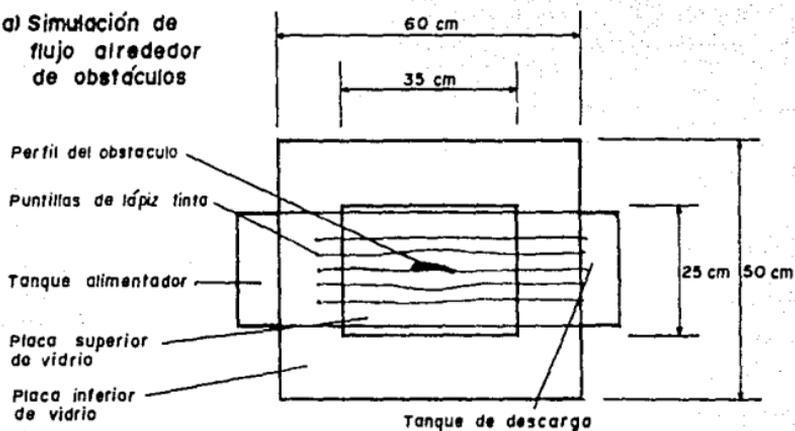


FIGURA 29

Sección longitudinal del modelo de Hele-Shaw propuesto.

a) Simulación de
flujo alrededor
de obstáculos



b) Simulación de
flujo a través
de medios
porosos

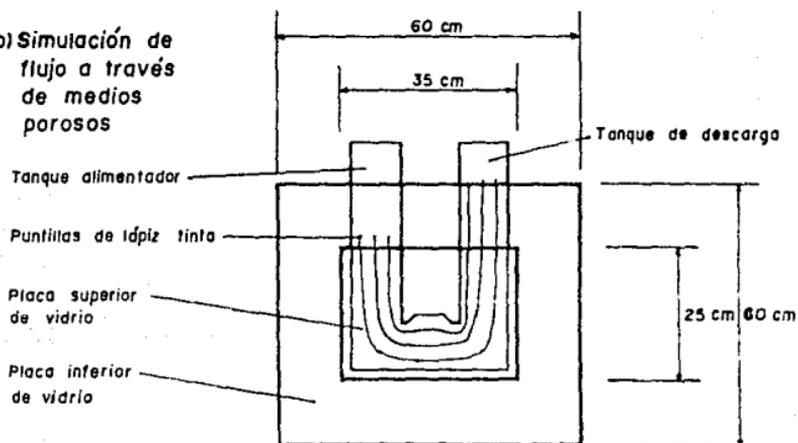


FIGURA 30

CONCLUSIONES

CONCLUSIONES.

"...No hay verdadera ciencia que no dependa de las demostraciones matemáticas."

Leonardo de Vinci.

De la experiencia obtenida mediante la construcción de un modelo de Hele-Shaw, de operación en túnel, como el que se propone en esta tesis, fué posible observar aspectos importantes de su operación y funcionamiento.

El modelo tiene un funcionamiento satisfactorio, para diferentes condiciones de trabajo, siempre y cuando se observen los requisitos básicos para su operación, como son: la correcta nivelación del modelo y la limpieza de sus componentes.

Para operar el modelo se puede utilizar cualquier tipo de agua siempre y cuando ésta esté limpia, puede tomarse directamente del grifo de la alimentación doméstica, aunque después de un funcionamiento prolongado (aproximadamente de una hora o más) se forman burbujas en el interior del túnel que impiden el correcto funcionamiento del modelo, esto se puede solucionar simplemente separando la placa de vidrio superior del flujo, permitiendo de esta manera el desalojo de las burbujas. También se puede utilizar agua desairada que no forma burbujas si se cuenta con este recurso. El desalojo de burbujas en el interior del túnel se simplifica considerablemente si las placas de vidrio y neopreno están limpias y libres de grasa, se recomienda lavar con algún detergente las placas y enjuagarlas bien antes de usarlas, debe evitarse tocar el interior del túnel con los dedos, sobretodo si se tiene las manos sucias.

Para colorar las líneas de flujo se colocaron con pinzas, pequeños trozos de la puntilla de un lápiz tinta, igualmente espaciados a lo largo de la entrada al túnel. Como éstas se disuelven en el agua, se adhieren a la placa de vidrio inferior permaneciendo en el lugar donde se colocan. La coloración de las líneas de flujo con lápiz tinta es muy recomendable porque se obtienen coloraciones de alta calidad a un costo relativamente bajo, además se disuelven lentamente prolongando el tiempo de exposición. Sin embargo, desafortunadamente en México se ha dejado de fabricar el lápiz tinta y en la actualidad resulta

difícil contar con este recurso. Las líneas de flujo también se pueden colorar utilizando colorante líquido, inyectándolo al flujo mediante agujas hipodérmicas. Para fabricar el colorante líquido, se recomienda diluir azul de metileno, ó permanganato de potasio en agua (el azul de metileno puede adquirirse previamente diluido en agua), de estas soluciones se obtienen coloraciones nítidas de buena calidad, también se puede utilizar anilina ó tinta para pluma fuente, pero la nitidez de la coloración no es de buena calidad y ésta última resulta sumamente cara.

El tanque de alimentación tiene un funcionamiento satisfactorio, aunque toma algo de tiempo llenarlo hasta el nivel de vertido al túnel con el gasto tan pequeño descargado por la manguera de 3/8 de pulgada, se lograrían iguales resultados con un tanque mas pequeño, siempre y cuando se garantice el ahogamiento de la descarga de la manguera.

En el tanque de descarga se colocó un vertedor de cresta rectangular, con el objeto de regular los niveles de agua a la entrada y salida del túnel, no obstante en el funcionamiento normal del modelo el nivel del agua no llega al de la cresta del vertedor de salida, el funcionamiento del modelo resulta satisfactorio. Dado las dimensiones del modelo, la carga hidráulica necesaria para su operación se logra automáticamente por la tensión superficial del agua y por la pérdida de energía por fricción en el flujo, se puede prescindir del vertedor en la salida cuando la tensión superficial del líquido que se utilice sea significativa.

La placa de neopreno utilizado como material para separar las placas de vidrio y formar el túnel, así como para fabricar los perfiles de los obstáculos alrededor de los cuales se quiere simular el flujo, tiene un funcionamiento aceptable. Igualmente se pueden utilizar placas de acrílico. Sin embargo, este material tiene un precio más elevado en el mercado y es más difícil de trabajar. No se recomienda el uso de materiales suaves como cierto tipo de hules, que aunque tienen la propiedad de sellar juntas impidiendo el paso del agua a través de éstas, también experimentan grandes deformaciones al ser comprimidas por las placas, provocando una distorsión tanto del perfil del obstáculo en el interior del túnel, como de las fronteras, además se adhieren fuertemente a las placas de vidrio dificultando su colocación dentro del túnel en la posición requerida. Las placas de neopreno y de acrílico no sufren deformaciones apreciables al ser comprimidas por las placas de vidrio del modelo y aunque no tienen la propiedad de sellar las juntas como los materiales suaves, la pérdida de energía del flujo entre las placas de neopreno y vidrio en contacto mutuo, es mucho mayor que la del flujo en el interior del túnel, por lo que el flujo entre las placas de vidrio y neopreno puede desprejarse. Para que dicha pérdida de energía por fricción sea significativa, se recomienda recortar las fronteras en la placa de neopreno dejando un ancho

mínimo de 8 cm en contacto con la placa de vidrio, si se utiliza agua en el modelo.

El diseño del modelo propuesto en esta tesis, tenía la finalidad de poder proyectar la imagen del flujo reproducida, en una pantalla mediante la colocación de un aparato retroproyector abajo del mismo. Esto no fué posible por que no se puede juntar el espejo del aparato retroproyector a la placa de vidrio inferior del modelo, impidiéndolo el espesor de los elementos de acero que forman la estructura del modelo, el espacio entre estas dos placas provoca una sombra de los obstáculos en el interior del túnel y de la imagen del flujo sobre el espejo del aparato retroproyector, si se juntan hasta donde es posible el espejo del aparato retroproyector a la placa de vidrio inferior del modelo, de tal manera que pueda enfocarse la imagen del flujo, se logra proyectar en la pantalla una parte de esta imagen, así como su sombra sobre el espejo.

Aunque no se logró una proyección satisfactoria de la imagen del flujo reproducida por el modelo sobre una pantalla, con la experiencia obtenida de la fabricación y operación del modelo propuesto, se concluye que es posible diseñar y construir un modelo en el cual sea posible proyectar la imagen del flujo reproducida. Considerando el funcionamiento del aparato retroproyector en el diseño del modelo: la imagen del flujo reproducida en el túnel debe estar tan cerca como sea posible del espejo del aparato retroproyector, si la separación corresponde al espesor de la placa de vidrio inferior del modelo, las sombras de los obstáculos y del flujo sobre el espejo del aparato retroproyector prácticamente se sobreponen, proyectándose como una sola imagen en la pantalla.

Los modelos de Hele-Shaw constituyen un medio práctico y confiable para reproducir imágenes de flujos potenciales, substituyendo la onerosa actividad del trazo de la red de flujo, implícita en el método gráfico o de las redes de flujo, que a menudo desmerecen a tan versátil método.

En la actualidad existen diferentes métodos que se pueden aplicar en el análisis y resolución de los problemas de flujo. Con el advenimiento de las computadoras los métodos numéricos han adquirido un nuevo auge; no obstante que éstos proporcionan resultados numéricos de gran utilidad, por lo general carecen de objetividad. Los métodos gráficos aunque carecen de precisión rigurosa, proporcionan una imagen representativa de la naturaleza ideal del fenómeno, que facilita la comprensión de sus conceptos esenciales.

No es posible decir que un método es mejor que otro para la generalidad de los casos, la selección de los métodos que deben utilizarse en el análisis de algún fenómeno, dependerá de las características específicas del fenómeno, así como del tipo de información requerida y de los medios con los que se cuenta. Los diferentes métodos que pueden aplicarse en el análisis de cualquier fenómeno, antes de contradecirse se complementan unos a otros. Los métodos numéricos, gráficos y analógicos deben complementarse entre sí, así como la práctica debe fundamentarse en la teoría y la teoría debe complementarse con la práctica. Los métodos constituyen solo las herramientas con las que el ser humano puede comprender algún aspecto de la esencia de los fenómenos inherentes a su universo, es responsabilidad de él utilizarlos adecuadamente.

No obstante que el hombre nunca será capaz de trascender los límites de la realidad universal, existen maneras con las que puede capturar la experiencia.



BIBLIOGRAFIA

1. APOSTOL, TOM M., CALCULUS, Barcelona, Reverté, [1980], Vol. 2, pp. 813.
2. ASOCIACION MEXICANA DE HIDRAULICA, "II CONGRESO NACIONAL DE HIDRAULICA", (s.p.i.).
3. BRONSHEIN, ILYA Y SEMENDIAEV KONSTANTIN, MANUAL DE MATEMATICAS PARA INGENIEROS Y ESTUDIANTES, México, Ediciones de Cultura Popular, [1985], pp. 896.
4. DE WIEST, ROGER J. M., GEOHYDROLOGY, New York, John Wiley & Sons, pp. XV - 388.
5. HARR, MILTON EDWARD, (1925), GROUNDWATER AND SEEPAGE, New York, McGraw-Hill, 1962, pp. 315.
6. JUAREZ BADILLO, EULALIO Y RICO RODRIGUEZ, ALFONSO, MECANICA DE SUELOS; FUNDAMENTOS DE LA MECANICA DE SUELOS, 3^a ed., México, Limusa, [1974], Vol. 1, pp. 842.
7. JUAREZ BADILLO, EULALIO Y RICO RODRIGUEZ, ALFONSO, MECANICA DE SUELOS; FLUJO DE AGUA EN SUELOS, México, Limusa, [1972], Vol.3, pp. 414.
8. LAMBE, T. WILLIAM Y WHITMAN, ROBERT V., MECANICA DE SUELOS, [tr. Jiménez Salas, José A. y Rodríguez Ortiz, José Ma.], México, Limusa, [1972], pp. 582.
9. LEVI, ENZO, ELEMENTOS DE LA MECANICA DEL MEDIO CONTINUO, México, Limusa-Wiley, 1971, pp. 287.
10. LEVI, ENZO, MECANICA DE LOS FLUIDOS; INTRODUCCION TEORICA A LA HIDRAULICA MODERNA, México, Facultad de Ingeniería, UNAM, 1965, pp. xiii-388.
11. MARSAL, R. J. Y PESENDIZ D., ANALISIS DEL FLUJO DE AGUA EN PRESAS, México, Instituto de Ingeniería, 1968, pp. 54.
12. MATAIX, CLAUDIO, MECANICA DE FLUIDOS Y MAQUINAS HIDRAULICAS, 2^a ed. rev. y aument., México, Harla, [1982], pp. 660.

13. MUSKAT, MORRIS. (1907), THE FLOW OF HOMOGENEOUS FLUIDS THROUGH POROUS MEDIA, [introd. R. D. Wyckoff], New York, Ann Arbor, J. W. Edward, 1948, pp. 783.
14. POLUBARINOVA KOCHINA, PELAGEIA IAKOVLEVNA, THEORY OF GROUND WATER MOVEMENT, [tr. De Wiest, Roger J. M.], Princeton N. J., Princeton University, 1962, pp. xix-613.
15. ROUSE, HUNTER, FLUID MECHANICS FOR HYDRAULIC ENGINEERS, New York, Dover, [1961], pp. 422.
16. SCOTT, RONALD F., PRINCIPLES OF SOIL MECHANICS, Mass. Addison-Wesley, c 1983, pp. 550.
17. SOTELO AVILA, GILBERTO, HIDRAULICA GENERAL: FUNDAMENTOS, México, Limusa, [1974], Vol. 1, pp. 561.
18. TODD, DAVID KEITH, GROUND WATER HYDROLOGY, 2^a ed., c 1980, New York, John Wiley & Sons, pp. 538.