UNIVERSIDAD LA SALLE

ESCUELA DE INGENIERIA
INCORPORADA A LA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

CALCULO DE TANQUES CIRCULARES DE ALMACENAMIENTO

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

I N G E N I E R O   C I V I L

P R E S E N T A :

RAFAEL DIAZ GUERRERO

Director de Tesis: Ing. Luis Miguel Arroyo Yllanes

México, D. F. 1990

I N D I C E

INTRODUCCION

Desde la más remota antigüedad han sido empleados los depósitos por el hombre, utilizando múltiples clases de materiales, prueba de ello son las grandes vasijas de barro cocido que se han utilizado en todos los tiempos y los depósitos o toneles de madera que aun se emplean para contener líquidos.

Los materiales que se emplean en cada época van dejando una huella característica de la misma. Hoy empezamos a utilizar depósitos de materiales plásticos, empezando así una bien definida diferenciación con otros tiempos, en que se usaron: el barro, la madera e incluso en un futuro, los de acero y concreto.

Los depósitos de almacenamiento para líquidos generalmente pueden estar a nivel del terreno, enterrados o semienterrados. El depósito enterrado tiene las ventajas de que no queda visible y la superficie sobre el puede tener algún uso, además de que el líquido queda sujeto a menores fluctuaciones térmicas;aunque la excavación necesaria aumenta el costo, si el líquido debe suministrar cierta carga hidráulica, como sucede en los tanques de distribución se recurre a los depósitos elevados. Un tanque elevado o sobre el terreno puede ser de concreto reforzado, presforzado o de acero. La selección del material habrá que hacerla en cada caso particular comparando costos que incluyan el mantenimiento y en los que se tome en cuenta la disponibilidad de los materiales en la localidad. Un aspecto que puede influir en la desición es la permanencia que se prevea para las instalaciones en el lugar de interes; esto es, habrá que tener en cuenta que un tanque de acero es suceptible de desmontarse e instalarse en otro sitio.

Desde el punto de vista de funcionamiento estructural y de consumo de materiales es mas eficiente un tanque circular que uno rectangular.

Este trabajo esta relacionado con el análisis de muros de cilindros circulares de espesor constante o variable, sujetos a carga axisimétrica. La principal aplicación de este análisis en la práctica es el diseño de muros de concreto o acero para tanques de almacenamiento y silos.

T E M A 1.

ANALISIS DE TANQUES CIRCULARES

1.1 ALCANCE.

Muros cilíndricos de tanques circulares y otros recipientes estan sujetos usualmente a presiones radiales del material contenido, o de tierra retenida externamente. Esta presión tiene una intensidad que es constante a un nivel pero que varia en dirección vertical.

Otras fuentes de cargas axisimétricas sobre muros son preesfuerzo circunferencial, peso de plataformas circulares colgadas o canales periféricos, este tipo de cargas produce desplazamientos axisimétricos radiales. Los extremos superiores o inferiores de los muros pueden estar libres para girar o traslaparse y pueden estar restringidos por la base o la cubierta. Así los extremos pueden recibir cortante radial axisimétrico o momento flexionante. Tales fuerzas extremas tambien se desarrollaran en los extremos restringidos debidos a efectos de variación de temperatura axisimétrica, contracción o a flujo del concreto.

Para el análisis de muros de este tipo es suficiente considerar las fuerzas y las deformaciones de una faja elemental típica paralela al eje del cilindro.

El desplazamiento radial de la faja debe estar acompañada por las fuerzas de anillo. Como más tarde discutiremos la faja elemental se comporta como una viga sobre cimentación elástica la cuál recibe fuerzas de reacción transversales proporcionales en cada punto a la deformación de la viga. El análisis constituye una solución de la ecuación diferencial que rige relacionando la deformación a la carga aplicada.

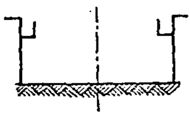
El objeto de este trabajo es proporcionar una solución a la anteriormente mencionada ecuación diferencial para obtener las reacciones sobre los extremos y las fuerzas internas en muros de sección circular cilíndrica.

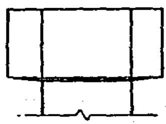
1.2 SUPOSICIONES BASICAS.

Los métodos de análisis estructural presentados en este trabajo están basados en la suposición de que el material es linealmente elástico, también los muros circulares se consideran como cascarones cilíndricos en los cuales el espesor es muy pequeño comparado con el radio, mientras se flexiona, una sección normal a la superficie media de un muro se supone que permanece recta y normal a la superficie media deformada. La ecuación diferencial que rige basada en dicha suposición anterior es resuelta en una forma cerrada para muros de espesor constante Cuando el espesor varía en una cara arbitraria, una solución cerrada llega a ser dificil de tal manera que el análisis es mejor llevarlo a cabo por procedimientos numéricos.

1.3 METODOS GENERALES DE ANALISIS ESTRUCTURAL.

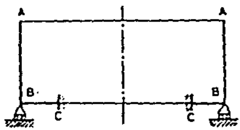
La figura 1a y b representa dos secciones rectas de tanques formadas por la intersección de cascarones de revolución cuando estan sujetos a cargas axisimétricas, estas estructuras pueden ser analizadas por los metodos del desplazamiento o el de las fuerzas del mismo modo que para los marcos planos. Para esto consideraremos una faja obtenida cortando el cascarón por dos planos verticales radiales con un pequeño ángulo arbitrario entre ellos. Esta faja es entonces tratada como un ensamble de elementos, para los cuales los coeficientes de rigidez en el método de los desplazamientos y los coeficientes de flexibilidad en el método de las fuerzas, necesitaran ser calculados. Domos y conos u otras formas de cascarones de revolución, los cuales son usados en la construcción de tanques, pueden ser analizados por los metodos anteriores.





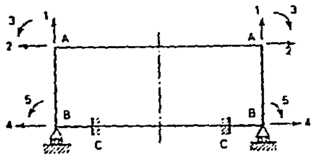
1.4 METODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS.

Para explicar el método consideraremos, por ejemplo el muro de un tanque (mostrado en la siguiente figura) sujeto a carga axisimétrica. El muro se supone que esta libre en el extremo superior A, pero continuo con una placa anular B en la base. La estructura esta soportada por un soporte deslizante en B y totalmente fijo en C.



El análisis por el método de los desplazamientos considera los 5 pasos siguientes:

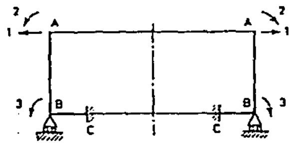
PASO 1: Un sistema coordenado es establecido para identificar la localización y la dirección positiva de los desplazamientos de las juntas.



El número de coordenadas n es igual al número de los posibles desplazamientos independientes de las juntas (grados de libertad). Hay generalmente dos traslaciones y una rotación en una junta libre (no soportada).

El número de desplazamientos conocidos puede ser reducido, ignorando el alargamiento de las generatrices rectas, lo cuál es equivalente a ignorar la deformación axial de un marco plano.

Por ejemplo considerando que las longitudes AB y BC permanecen sin cambio, los grados de libertad se reducen a tres y se muestran en la siguiente figura.



PASO 2: Fuerzas restrictivas (F) nx, son introducidas en las n coordenadas para prevenir los desplazamientos de las juntas. Las fuerzas (F) son calculadas sumando las fuerzas de empotramiento de los elementos que llegan a las juntas.

PASO 3: La estructura es ahora supuesta que será deformada por el desplazamiento j, Dj=1 con los desplazamientos fijos en todas las demas coordenadas, las fuerzas S1j, S2j... Snj. requeridas para sostener el cascarón en esta configuración son determinadas para las n coordenadas.

Este proceso es repetido para valores unitarios de desplazamientos en cada una de las coordenadas respectivamente.

Así un juego de n x n coeficientes de rigidez son calculados, los cuales forman la matriz de rigidez (S)nxn de la estructura; un elemento general Sij es la fuerza requerida en la coordenada i debido a un desplazamiento en la coordenada J.

PASO 4: Los desplazamientos (D)nx1 en la actual estructura deben ser de tal magnitud que las fuerzas restrictivas se desvanecen, las cuales estan expresadas por la superposición de ecuaciones:

F1 + S11D1 + S12D2 + ... + S1nDn = 0

F2 + S21D1 + S22D2 + ... + S2nDn = 0

...

Fn + Sn1D1 + SN2D2 + ... + SnnDn = 0

O en forma de matriz:

$$(S)(D) = -(F)$$

La solución de este grupo de ecuaciones simultaneas, da los n desplazamientos desconocidos (D).

PASO 5: Finalmente las reacciones y fuerzas internas en cualquier posición de la actual estructura del cascarón son obtenidas por la adición de los valores en la estructura restringida. A los valores causados por los desplazamientos de las juntas.

Esto es expresado por la superposición de ecuaciones:

$$A_i = A_{ri} + (A_{ui1} A_{ui2} \ldots A_{uin})(D)$$

Donde A_i es el valor de cualquier acción, una fuerza interna o reacción en la actual estructura; A_{ri} es el valor de la misma acción en la condición restringida; A_{uij} es el valor de la misma acción correspondiente al desplazamiento $d_j=1$.

Donde hay m valores que serán determinados. En la ecuación anterior puede ser usada m veces como sigue:

$$(A)_{m\times1} = (A_r)_{m\times1} + (A_u)_{m\times n}(D)_{n\times1}$$

T E M A 2.

TANQUES CIRCULARES DE ESPESOR CONSTANTE

2.1 INTRODUCCION.

Para analizar un cascarón cilíndrico de revolución sujeto a carga axisimétrica es suficiente considerar una faja elemental paralela al eje del cascarón; Se demostrará que este elemento se flexionará como una viga sobre cimentación elástica y la ecuación diferencial que relaciona la carga y la deformación seran deducidas.

La solución de la ecuación en una forma cerrada de un muro de espesor constante, sera discutida en este capítulo

2.2 ANALOGIA CON LA VIGA SOBRE CIMENTACION ELASTICA

Una carga axisimétrica actuando sobre un cascarón de revolución radialmente hacia a fuera, causa una deformación radial W hacia a fuera, que representa un incremento de radio del cilindro r.

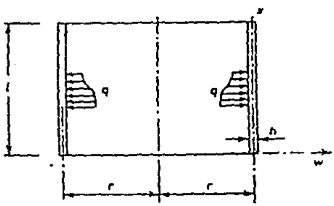


Fig 2.1.a

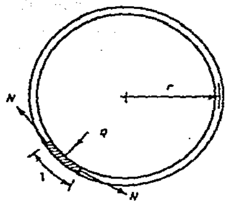


Fig 2.1 b

Consideremos un cascarón de revolución (tubo) cilíndrico de radio medio r y espesor h, sometido a una presión q (tomaremos q positiva si actua desde el interior hacia el exterior). La presion puede ser constante o variable a lo largo del tubo, pero son constantes a lo largo de cada paralelo (o sea que dependen solo de la coordenada X del paralelo). Además pueden actuar fuerzar radiales H y pares M en los planos radiales, uniformemente distribuidos a lo largo de uno o ambos bordes o de determinados paralelos intermedios. En estas condiciones de simetría radial, el cascarón se deforma de modo que cada paralelo se alarga o se acorta, manteniendose circular. En general, las generatrices se deforman flexionandose en los planos radiales.

La pared del tubo podemos suponerla descompuesta, sea en franjas longitudinales paralelas al eje del tubo y limitadas por dos generatrices, o en franjas anulares limitadas por dos circunferencias.

Todas las franjas longitudinales se deforman del mismo modo, por lo que basta con estudiar una cualquiera que supondremos de una unidad de ancho.

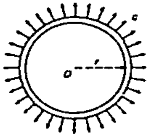


FIG. A

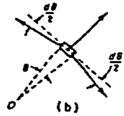


FIG. B

Longitud de arco $= 1 = r\theta$

$Q = q \times r\,\theta$

De la figura B:

$Q = 2N\ \mathrm{SEN}\ \theta/2$

$qr\theta = 2N\ \mathrm{SEN}\ \theta/2$

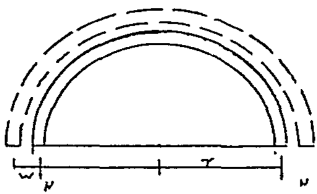
$N = qr\theta\ /\ 2\ \mathrm{SEN}\ (\theta/2)$

Para los ángulos pequeños $\mathrm{sen}\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\theta}{2}$

$$N = \frac{qr\theta}{2\times\theta/2} = \frac{qr\theta}{\theta}$$

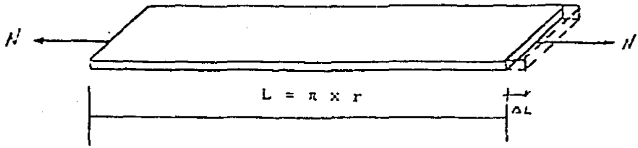
$N = qr$ QUE ES LA FORMULA DEL CILINDRO

Para calcular el desplazamiento radial debido a la presion q aislamos una franja semicircular de anillo.



$L = \pi\, r$

Si desarrollamos la faja considerada tenemos:



$$\Delta L = \frac{NL}{AE} = \frac{\pi r^2 q}{AE} \qquad A = 1 \times h$$

$$\text{Longitud total} = L + \Delta L = \pi r + \frac{\pi r^2 q}{AE}$$

$$\text{Radio incrementado por la nueva longitud} = \frac{\pi r}{\pi} + \frac{\pi r^2 q}{AE\pi}$$

$$\text{R incremento} = r + \frac{r^2 q}{AE}$$

I N C R E M E N T O   D E L   R A D I O = W

$$W = r - r + \frac{r^2 q}{AE} = \frac{r^2 q}{AE} = \frac{r^2 N/r}{1 \times hE} = \frac{Nr}{hE}$$

$$W = \frac{Nr}{hE} \qquad N = \frac{Eh}{r} W \qquad 2.1$$

$$W = \frac{r^2 q}{AE} = \frac{r^2 q}{1 \times h \times E} = \frac{r^2 q}{hE}$$

$$q = \frac{Eh}{r^2} W \qquad 2.2$$

Haciendo $k = Eh/r2$

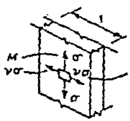
$$q = kw$$

Cuando la franja está sujeta a un momento flexionante positivo M, esfuerzos de tensión y compresión son pruducidos paralelos a la generatriz sobre las caras exteriores e interiores respectivamente. Debido al efecto de POISSON'S, los dos extremos de la franja tienden a girar del plano original radial. Por la simetría, esta rotación no puede ocurrir porque los lados de cualquier franja deben permanecer en planos radiales; así mientras en las franjas curvas la extensión lateral es evitada. La influencia restrictiva es producida por un momento flexionante $M\phi$ en la dirección circunferencial.

$$M\phi = \nu M \qquad (2.3)$$

Donde ν = COEFICIENTE DE POISSON'S

Esfuerzo causado por Momento flexionante M



Esfuerzos causados por Momentos flexionantes circunferenciales.

Esfuerzos en cualquier placa de una franja vertical

La deformación unitaria paralela a la generatriz será:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} - \nu\left(\frac{\nu\sigma}{E}\right) = \frac{\sigma(1-\nu^2)}{E}$$

Así el efecto de ν es equivalente a incrementar el módulo de elasticidad por la relación $1/(1-\nu^2)$

Se deduce que una franja de ancho unitario a lo largo de la generatriz de un cilindro circular sujeto a carga axisimétrica tiene la misma deformación que la de una viga sobre cimentación elástica para el cuál el módulo de reacción está dado por:

$$K = \frac{Eh}{r^2} \tag{2.4}$$

y la rigidez de flexión de la viga esta dada por:

$$EI = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{2.5}$$

Con la suposición usual en la flexión de las vigas, que el plano de la sección recta permanece plano, el momento M y la deformación W en cualquier punto X de la figura 2.1a, esta relacionada por:

$$M = -EI\frac{d^2w}{dx^2} \tag{2.6}$$

La intensidad q^* de la carga resultante transversal en cualquier posición es igual a la suma algebraica de las cargas externas aplicadas y la reacción elástica de la cimentación.

$$q' = q + \bar{q} = q - kw \tag{2.7}$$

La fuerza cortante V, el momento flexionante y la intensidad de carga q' estan relacionadas :

$$V = \frac{dm}{dx} = - \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2w}{dx^2}\right) \tag{2.8}$$

$$q' = - \frac{dv}{dx} = - \frac{d^2m}{dx^2} \tag{2.9}$$

Sustituyendo las ecuaciones 2.6 y 2.7 en la ecuación 2.9 da la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2w}{dx^2}\right) + kw = q$$

$$EI \frac{d^4w}{dx^4} + kw = q \tag{2.10}$$

Que es la misma ecuación (I) y corresponde a la ecuación diferencial de una viga apoyada en una cimentación elástica.

Si consideramos una viga apoyada en toda su longitud sobre un suelo elástico, sujeto a fuerzas verticales en el plano de simetría, tal que su reacción en cada punto sea proporcional al descenso que sufre la viga al flexionarse.

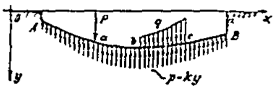


FIGURA 1

La suposición q = ky implica la declaración de que el apòyo es elástico, en otras palabras que el material sigue la ley de HOOKE. Por su elasticidad puede ser determinado, por un fuerza, la cual puede ser caracterizada por una uniformemente distribuida y que produce una deformación unitaria.

La constante del medio soportante ko (ton/m3) es llamada: MODULO DE REACCION DEL TERRENO.

Suponiendo que la viga bajo esta consideración tiene una sección recta uniforme, tal que b es de un ancho constante y soportada sobre la cimentación. Una deformación unitaria de esta viga causara una reacción bko en la cimentación; consecuentemente en un punto donde la deformación es y , la intensidad de la reacción distribuida(por unidad de longitud de viga) será:

$$P \text{ ton/m} = bkoy$$

$$k = bko$$

por lo tanto: $p = ky$

Tomemos un elemento infinitamente pequeño entre dos secciones rectas verticales a una distancia dx.

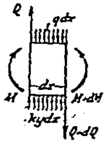


FIG. 2

FIGURA A

La acción ascendente de la fuerza cortante Q, a la izquierda de la sección recta, es considerada positiva, así como el momento flexionante correspondiente M, el cual es un momento en sentido de las manecillas del reloj actuando a la izquierda de la sección.

Considerando el equilibrio de la figura anterior:

$$Q - (Q+dQ) + kydx - qdx = 0$$

$$dQ / dx = ky - q \qquad (b)$$

Haciendo uso de la relación $Q = dM / dx$ podemos escribir:

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} = ky - q \qquad (c)$$

Usando la ecuación diferencial de una viga en flexión:

$$EI\left(\frac{d^2y}{d\,x^2}\right) = -M$$

Y diferenciando dos veces tenemos que:

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{d^2M}{dx^2} \qquad (d)$$

de (c)

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = -ky + q \qquad (e)$$

2.3 Solución general de la ecuación diferencial de la elástica de un muro de espesor constante.

Consideremos una viga sobre cimentación elástica, con EI y k constantes sujeta a una carga P y a una carga distribuída de intensidad q como en la FIGURA 1 y con las consideraciones del inciso anterior habíamos llegado a la ecuación.

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = -ky + q \qquad (I)$$

En la viga de la FIG. 1 en la zona de la viga donde no actua la carga distribuída, q = 0 y la ecuación tomará la forma:

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = -ky \qquad (II)$$

Será suficiente considerar solamente la solución general de (II) de dicha solución se obtendrán los casos implicados en (I) por adición a la integral correspondiente de q en (I) de (II).

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{ky}{EI}$$

Sustituyendo:

$$B = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} \; ; \; \frac{k}{EI} = 4B^4 \; ; \; \frac{dy}{dz} = DY$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = D^4y = -4B^4y \; ; \; D^4y + 4B^4y=0 \; ; \; D^4 + 4B^4 = 0$$

En la solución de esta expresión intervienen los siguientes valores conocidos:

$i=\sqrt{-1}$; $i^2= -1$; $i^3=-i$; $i^4=1$; $i^5=i$; $i^6=-1$

$e=1+1/1+\frac{1}{2}!+1/3!+...+1/n!+...$

$e^z=1+z/1+z^2/2!+z^3/3!+...+z^n/n!+...$

$e^{Bi}=1+Bi/1+(Bi)^2/2!+(Bi^3)/3!+...+(Bi^n)/n!+...$

$e^{Bi}=(1-B^2/2!+B^4/4!-B^6/6!+...)+i(B/1-B^3/3!+B^5/5!-B^7/7!+...)$

$(1-B^2/2!+B^4/4!-B^6/6!+...)=\cos B$

$(B/1-B^3/3!+B^5/5!-B^7/7!+...)=\operatorname{sen} B$

$e^{Bi}=\cos B+i\operatorname{sen}B$

$e^{Biz}=\cos Bz+i\operatorname{sen}Bz$ $\qquad$ $e^{-Biz}=\cos Bz-i\operatorname{sen}Bz$

$D^4+4B^4=0$

$D^4+4B^4=D^4 + 4B^4+4D^2B^2-4D^2B^2$

$$D^4+4\beta^4=(D^2+2\beta^2)^2-(2D\beta)^2$$

$$D^4+4\beta^4=(D^2+2\beta^2+2D\beta)(D^2+2\beta^2-2D\beta)$$

$$D^4+4\beta^4=\{(D+\beta-\beta i)(D+\beta+\beta i)\}\{(D-\beta+\beta i)(D-\beta-\beta i)\}=0$$

Cualquiera de los cuatro paréntesis anteriores debe ser igual a cero, por lo tanto, las cuatro raices son :

$$D=-\beta+\beta i \;;\; D=-\beta-\beta i \;;\; D=\beta-\beta i \;;\; D=\beta+\beta i$$

La solución para la primera raiz es:

$$D=-\beta+\beta i \;;\; Dy=(-\beta+\beta i)y=\frac{dy}{dz} \qquad \frac{dy}{y}=(-\beta+\beta i)dz$$

Integrando :

$$\operatorname{Log}_e y=(-\beta+\beta i)z+C$$

$$y=e^{-\beta z}\,e^{\beta iz}\,e^{c}=k1\,e^{-\beta z}\,e^{\beta iz}=k1\,e^{-\beta z}(\cos\beta z+\operatorname{sen}\beta z)$$

$$y=k1\,e^{-\beta z}(\cos\beta z+i\operatorname{sen}\beta z)$$

De la misma forma, las soluciones para las raices segunda, tercera y cuarta son:

$$y=k2\,e^{-\beta z}(\cos\beta z-i\operatorname{sen}\beta z)$$

$$y=k3\,e^{\beta z}(\cos\beta z-i\operatorname{sen}\beta z)$$

$$y=k4\,e^{\beta z}(\cos\beta z+i\operatorname{sen}\beta z)$$

La solución final es la suma de las cuatro soluciones anteriores:

$$y = e^{-\beta z} (k1 + k2)\cos\beta z + (ik1 - ik2)\text{sen}\beta z) +$$

$$+ e^{\beta z} ((k3 + k4)\cos\beta z + (ik4 + ik3)\text{sen}\beta z)$$

Sustituyendo:

$C1 = k1 + k2$; $C2 = ik1 - ik2$; $C3 = k3 + k4$; $C4 = ik4 - ik3$

LA EXPRESION FINAL ES:

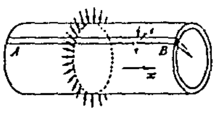
$$\boxed{y = e^{-\beta z} (C1\cos\beta z + C2\text{sen}\beta z) + e^{\beta z} (C3\cos\beta z + C4\text{sen}\beta z)}$$

Que es la solución general

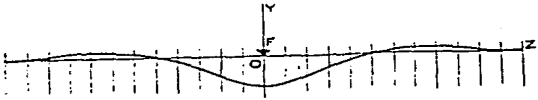
2.4 VIGA DE LONGITUD INFINITA.

Una viga de longitud infinita, es aquella en la que los desplazamientos producidos por la aplicación de una o varias cargas, no tienen influencia sobre los extremos de la viga. Como ejemplos citaremos los siguientes casos:

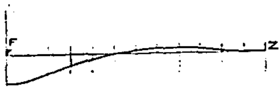
I. Aplicación de una carga concentrada en la parte central (como se muestra en la siguiente figura).



Que correspondería a la siguiente viga:



Que por su simetría podemos considerarla así:



Aplicando la solución general:

$$y = e^{-\beta z}(C1\cos\beta z + C2\operatorname{sen}\beta z) + e^{\beta z}(C3\cos\beta z + C4\operatorname{sen}\beta z)$$

En puntos muy distantes a ambos lados del origen O, la flecha es nula osea que para que Z = infinito, Y = 0; para que esta condición quede satisfecha en la ecuación anterior es necesario que las constantes C3 y C4 sean iguales a CERO.

Por lo tanto la ecuación general de la elástica y sus derivadas primera, segunda y tercera se expresaran.

$$y = e^{-\beta z}(C1\cos\beta z + C2\operatorname{sen}\beta z) \qquad (a)$$

$$\theta = \frac{dy}{dz} = -\beta e^{-\beta z}\left((C1 + C2)\operatorname{sen}\beta z + (C1 - C2)\cos\beta z\right) \qquad b)$$

$$-\frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dz^2} = 2\beta^2 e^{-\beta z}\left(C1\operatorname{sen}\beta z - C2\cos\beta z\right) \qquad (c)$$

$$-\frac{V}{EI} = \frac{d^3y}{dz^3} = 2\beta^3 e^{-\beta z}\left((C1+C2)\cos\beta z - (C1-C2)\operatorname{sen}\beta z\right) \qquad (d)$$

Para $Z=0 \qquad \theta = 0$

$$0 = -\beta\{(C1+C2)\operatorname{sen}(0) + (C1 - C2)\cos(0)\}$$

$$0 = C1 - C2 \qquad \text{por lo tanto} \qquad \boxed{C1 = C2}$$

Para $Z = 0 \qquad V = -F/2$

$$\frac{F/2}{EI} = 2\beta^3((C1+C2)) = 2\beta^3(2C1)$$

por lo tanto : $C1 = \dfrac{F}{8EI\beta^3}$ como $\beta = \sqrt[4]{\dfrac{k}{4EI}}$

$$C1 = \frac{F1\beta}{8EI\beta^4} = \frac{F1\beta}{8EIk/4EI} = \frac{F1\beta}{2k}$$

$$\boxed{C1 = C2 = \frac{F1\beta}{2k}}$$

Sustituyendo C1 y C2 en (a),(b),(c) y (d)

$$y = \frac{F\beta}{2k} e^{-\beta z}(\operatorname{sen}\beta z + \cos\beta z)$$

$$\frac{dy}{dz} = \theta = -\frac{F\beta^2}{k} e^{-\beta z}\operatorname{sen}\beta z$$

$$M = -EI\frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{F}{4\beta}e^{-\beta z}(\operatorname{sen}\beta z - \cos\beta z)$$

$$V = -EI\frac{d^3y}{dz^3} = -\frac{F}{2}e^{-\beta z}\cos\beta z$$

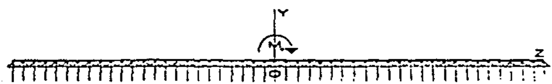
Estas ecuaciones muestran que los valores máximos de la flecha y el momento flexionante y la fuerza cortante corresponden al valor de Z=0

$$Yo = fmax = F\beta/2K$$

$$Mo = Mmax = F/4\beta$$

$$Vo = Vmax = F/2$$

II. La aplicación de un momento en el punto central.



En esta condición, en el origen O la flecha de la elástica es nula y el momento flexionante es igual a 1/2 Mo.

La ecuación de la elástica es :

$$y = e^{-\beta z}(C1\cos\beta z + C2\operatorname{sen}\beta z)$$

Para $Z=0$ $\quad Y=0$ $\quad$ por lo tanto : $C1=0$

Para $Z=0$ $\quad M=Mo/2$

$$M = 2EI\beta^2 e^{-\beta z}(C2\cos\beta z - C1\operatorname{sen}\beta z) = \frac{Mo}{2}$$

$$\frac{Mo}{2} = 2EI\beta^2 C2 \qquad \text{POR LO TANTO :} \quad C2 = \frac{Mo}{4EI\beta^2}$$

$$C2 = \frac{Mo\beta^2}{4EI\beta^4} = \frac{Mo\beta^2}{4EIK/4EI} = \frac{Mo\beta^2}{K}$$

$$C2 = \frac{Mo\beta^2}{K}$$

$$y = \frac{Mo\beta^2}{K} e^{-\beta z}\operatorname{sen}\beta z$$

$$\theta = \frac{dy}{dz} = -\frac{Mo\beta^3}{k} e^{-\beta z}(\operatorname{sen}\beta z - \cos\beta z)$$

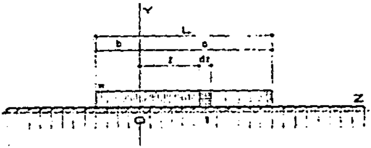
$$M = -EI\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{Mo}{2} = e^{-\beta z}\cos\beta z$$

$$V = -EI\frac{d^3y}{dz^3} = -\frac{Mo\beta}{2} e^{-\beta z}(\operatorname{sen}\beta z + \cos\beta z)$$

III CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA

Podemos considerar dos casos :

1.- La carga es asimétrica respecto al eje Y y el eje de referencia se encuentra dentro de la carga.



La ecuación de la Elástica

$$\delta y = \frac{w\,dz\,\beta}{2k}\,e^{-\beta z}(\operatorname{sen}\beta z+\cos\beta z)$$

$$Yo = \frac{w\beta}{2k}\left(\int_0^a e^{-\beta z}(\operatorname{sen}\beta z+\cos\beta z)\,dz+\int_0^b e^{-\beta z}(\operatorname{sen}\beta z+\cos\beta z)\,dz\right)$$

$$\boxed{Yo = \frac{W}{2k}\,(2-e^{-\beta a}\cos\beta a-e^{-\beta b}\cos\beta b)}$$

De la misma manera:

$$Mo = -\int_0^a \frac{wdz}{4\beta} e^{-\beta z}(\text{sen}\beta z-\cos\beta z)-\int_0^b \frac{wdz}{4\beta} e^{-\beta z}(\text{sen}\beta z-\cos\beta z)$$

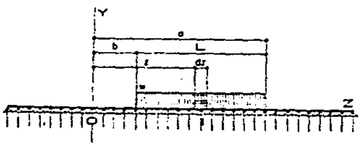
$$\boxed{Mo = \frac{w}{4\beta^2}(e^{-\beta a}\text{sen}\beta a+e^{-\beta b}\text{sen}\beta b)}$$

$$Vo = \int_0^a \frac{wdz}{2} e^{-\beta z}\cos\beta z - \int_0^b \frac{wdz}{2} e^{-\beta z}\cos\beta z =$$

$$= \frac{w}{4\beta}(e^{-\beta a}(\text{sen}\beta a-\cos\beta a)-e^{-\beta b}(\text{sen}\beta b-\cos\beta b))$$

$$\boxed{Vo = \frac{w}{4\beta}(e^{-\beta a}(\text{sen}\beta a-\cos\beta a)-e^{-\beta b}(\text{sen}\beta b-\cos\beta b))}$$

2.- La carga se encuentra separada del eje de referencia a la derecha como se indica en la siguiente figura.



Flecha, Momento Flexionante y Fuerza Cortante en el origen o estaran dados por las expresiones siguientes:

$$Y = \frac{w}{2k}\left(e^{-\beta b}\cos\beta b - e^{\beta a}\cos\beta a\right)$$

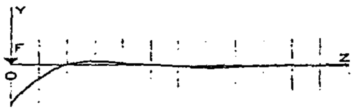
$$M = \frac{w}{4\beta^2}\left(e^{-\beta a}\operatorname{sen}\beta a - e^{-\beta a}\operatorname{sen}\beta b\right)$$

$$V = \frac{w}{4\beta}\left(e^{-\beta a}(\operatorname{sen}\beta a - \cos\beta a) - e^{-\beta b}(\operatorname{sen}\beta b - \cos\beta b)\right)$$

2.5 VIGA DE LONGITUD SEMI-INFINITA

Una viga de longitud semi-infinita es aquella en la que los desplazamientos producidos en uno de sus extremos por la aplicación de una o varias cargas, no tiene influencia sobre el otro extremo de la viga.

I CARGA CONCENTRADA F.



Como en los casos anteriores la ecuación general de la elástica y sus derivadas primera, segunda y tercera se expresan:

$$Y = e^{-\beta z}(C1\cos\beta z + C2\,\mathrm{sen}\,\beta z) \quad (a)$$

$$\theta = \frac{dy}{dz} = -\beta e^{-\beta z}((C1+C2)\,\mathrm{sen}\,\beta z + (C1-C2)\cos\beta z) \quad (b)$$

$$-\frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dz^2} = 2\beta^2 e^{-\beta z}(C1\,\mathrm{sen}\,\beta z - C2\cos\beta z) \quad (c)$$

$$-\frac{V}{EI} = \frac{d^3y}{dz^3} = 2\beta^3 e^{-\beta z}((C1+C2)\cos\beta z - (C1-C2)\,\mathrm{sen}\,\beta z) \quad (d)$$

Para $Z=0$ $\quad M=0$

$$M = -2\beta^2 EIe^{-\beta z}(C1\,\mathrm{sen}\,\beta z - C2\cos\beta z) = 0$$

por lo tanto $\underline{C2=0}$

Para $Z=0$

$$V = -2\beta^3 EIe^{-\beta z}((C1+C2)\cos\beta z - (C1-C2)\,\mathrm{sen}\,\beta z) = -F$$

$F = 2\beta^3 EIC1$ por lo tanto: $C1 = \dfrac{F}{2\beta^3 EI} = \dfrac{2F\beta}{K}$

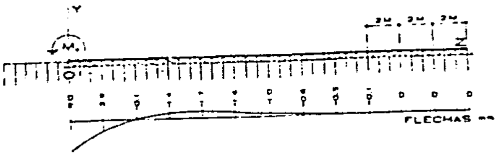
$$Y = \frac{2F\beta}{k} e^{-\beta z}\cos\beta z$$

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{2F\beta^2}{k} e^{-\beta z}(\cos\beta z + \mathrm{sen}\,\beta z)$$

$$M = -EI\frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{F}{\beta}e^{-\beta z}\operatorname{sen}\beta z$$

$$V = -EI\frac{d^3y}{dz^3} = -Fe^{-\beta z}(\cos\beta z-\operatorname{sen}\beta z)$$

II. Momento Mo



Aplicando la ecuación general de la elástica y sus derivadas primera, segunda y tercera.

Para Z=0

$$M = -2\beta^2EIe^{-\beta z}(C1\operatorname{sen}\beta z-C2\cos\beta z) = -Mo$$

$$C2 = -\frac{Mo}{2\beta^2EI}$$

Para Z=0

$$V = -2\beta^3EIe^{-\beta z}((C1+C2)\cos\beta z-(C1-C2)\operatorname{sen}\beta z)=0$$

$$C1 = \frac{Mo}{2\beta^2EI}$$

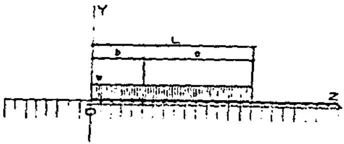
$$Y = \frac{2Mo\beta^2}{k}e^{-\beta z}(\cos\beta z-\operatorname{sen}\beta z)$$

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{4Mo\beta^3}{k}e^{-\beta z}\cos\beta z$$

$$M = -EI\frac{d^2y}{dz^2} = -Moe^{-\beta z}(\operatorname{sen}\beta z+\cos\beta z)$$

$$V = -EI\frac{d^3y}{dz^3} = 2Mo\beta e^{-\beta z}\operatorname{sen}\beta z$$

III. Carga Uniformemente Distribuida.



Este caso equivale al de una viga de longitud infinita, con carga uniformemente distribuida en la longitud L, a la cual se ha suprimido la porcion de viga desde el origen O hacia la izquierda. Al suprimir esta porción izquierda de viga, sera necesario aplicar en el punto O un momento y una fuerza cortante, iguales y contrarios a los existentes en una viga de longitud infinita.

$$Y'b = \frac{w}{2k}(2-e^{-\beta a}\cos\beta a-e^{-\beta b}\cos\beta b)$$

$$M'b = \frac{W}{4\beta^2}(e^{-\beta a}\operatorname{sen}\beta a+e^{-\beta b}\operatorname{sen}\beta b)$$

$$V'b = \frac{W}{4\beta}(e^{-\beta a}(\operatorname{sen}\beta a-\cos\beta a)-e^{-\beta b}(\operatorname{sen}\beta b-\cos\beta b))$$

Si usamos las funciones auxiliares:

$$f_2(\beta z) = e^{-\beta z} \operatorname{sen}\beta z$$

$$f_3(\beta z) = -e^{-\beta z} (\operatorname{sen}\beta z - \cos\beta z)$$

$$f_4(\beta z) = e^{-\beta z} \cos\beta z$$

$$Y'b = \frac{W}{2k}(2-f_4(\beta a)-f_4(\beta b))$$

$$Mb' = \frac{W}{4\beta^2}(f_2(\beta a)+f_2(\beta b))$$

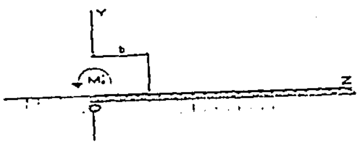
$$Vb' = \frac{W}{4\beta}(f_3(\beta b)-f_3(\beta a))$$

El momento flexionante Mo' y la fuerza cortante Vo' que habrán de aplicarse con sentido contrario, en el extremo O de la viga semi-infinita serán:

$$Mo' = \frac{W}{4\beta^2}(f_2(\beta L))$$

$$Vo' = \frac{W}{4\beta}(1-f_3(\beta L))$$

Para Mo'

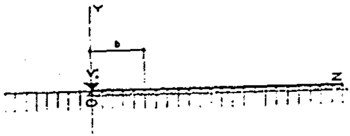


$$Y''b=\frac{W}{2k}(f_2(\beta L))f_3(\beta b)$$

$$M''b=-\frac{W}{4\beta^2}(f_2(\beta L))f_1(\beta b)$$

$$V''b=\frac{W}{2\beta}(f_2(\beta L))f_2(\beta b)$$

Para Vo'



$$Yb'''=\frac{W}{2k}(1-f_3(\beta L))f_4(\beta b)$$

$$Mb'''=-\frac{W}{4\beta^2}(1-f_3(\beta L))f_2(\beta b)$$

$$Vb'''=-\frac{W}{4\beta}(1-f_3(\beta L))f_3(\beta b)$$

Para una sección cualquiera (b) dentro de la longitud de la carga son:

$$Yb = Yb'+Yb''+Yb''' =$$

$$= \frac{W}{2k}(2-f_4(\beta a)+f_2(\beta L)f_3(\beta b)-f_3(\beta L)f_4(\beta b))$$

$Mb = Mb'+Mb''+Mb''' =$

$$= \frac{W}{4\beta^2}(f_2(\beta a)-f_2(\beta L)f_1(\beta b)+f_3(\beta L)f_2(\beta b))$$

$Vb = Vb'+Vb''+Vb''' =$

$$= \frac{W}{4\beta}(-f_3(\beta a)+2f_2(\beta L)f_2(\beta b)+f_3(\beta L)f_3(\beta b))$$

Y en una sección cualquiera (b) a la derecha de la longitud L de la carga.

$$Yb = \frac{W}{2k}(2f_4(\beta b)+f_4(\beta a)+f_2(\beta L)f_3(\beta b)-f_3(\beta L)f_4(\beta b))$$

$$Mb = \frac{W}{4\beta^2}(-2f_2(\beta b)-f_2(\beta a)-f_2(\beta L)f_1(\beta b)+f_3(\beta L)f_2(\beta b))$$

$$Vb = \frac{W}{4\beta}(-f_3(\beta a)+2f_2(\beta L)f_2(\beta b)+f_3(\beta L)f_3(\beta b))$$

2.6 VIGA DE LONGITUD FINITA.

Una viga de longitud finita es aquella en la que los desplazamientos producidos por la aplicación de una o varias cargas, si tiene influencia sobre el otro extremo de la viga.

El estudio de las vigas de longitud finita apoyadas en un medio elástico, puede tratarse valiendose de la transformada de Laplace, para facilitar el estudio, es conveniente abreviar las expresiones y con esto simplificar su escritura.

$$\beta^2 = \sqrt{(k/4EIx)}$$

que aparece en todas las expresiones trigonométricas e hiperbólicas, podra suprimirse durante el proceso algebraico y hacerla aparecer sólo en los resultados finales.

La notación abreviada sera la siguiente:

$$\operatorname{sen}\beta z = sz \qquad \operatorname{sen}\beta L = sL \qquad \operatorname{sen}^2\frac{BL}{2} = s^2\frac{L}{2}$$

$$\cos\beta z = cz \qquad \cos\beta L = cL \qquad \cos^2\frac{BL}{2} = c^2\frac{L}{2}$$

$$\operatorname{senh}\beta z = shz \qquad \operatorname{senh}\beta L = shL \qquad \operatorname{senh}^2\frac{BL}{2} = sh^2\frac{L}{2}$$

$$\cosh\beta z = chz \qquad \cosh\beta L = chL \qquad \cosh^2\frac{BL}{2} = ch^2\frac{L}{2}$$

Para la solución de una viga de longitud finita se parte de la igualdad:

$$EIx\frac{d^4y}{dz^4} = -ky$$

$$\frac{d^4y}{dz^4} + \frac{ky}{EIx} = 0$$

$$\frac{d^4 y}{dz^4} + 4\beta^4 y = 0$$

$$\mathcal{L}\, Y^{IV} + \mathcal{L}\, 4\beta^4 y = 0$$

$$(Y^{IV}) + (4\beta^4 y) = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$s^4 y - s^3 y(0) + s^2 y'(0) - sy''(0) - y'''(0) + 4\beta^4 y = 0$$

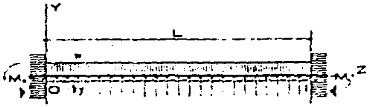
$$(s^4 + 4\beta^4) y - s^3 y(0) - s^2 y'(0) - sy''(0) - y'''(0) = 0 \qquad \text{(b)}$$

Si además la carga invertida o negativa Ky, la viga lleva cargas positivas como carga distribuida W1 carga concentrada F o momento M, en el lado derecho de las ecuaciones (a) y (b) el cero sera substituido por la expresión correspondiente.

En la ecuación (b) las expresiones Y'(0), Y''(0), Y'''(0), representan la flecha, la pendiente, Mo/EI, Vo/EI en el extremo de la viga y cuyos valores podrán conocerse dependiendo del tipo de apoyo de la misma y de la posición de la carga.

Una vez simplificada la ecuación(b) con los valores de apoyo se toma la transformada inversa y se obtiene la ecuación de la elástica y con sus derivadas primera, segunda y tercera, se tendrán las ecuaciones de pendiente, momento flexionante y fuerza cortante.

1) Viga distribuida con extremos empotrados.



$Y(0) = 0$ $\qquad$ $Y(L) = 0$

$Y'(0) = 0$ $\qquad$ $Y'(L) = 0$

$Y''(0) = M/EI$ $\qquad$ $Y''(L) = M1/EIx$

$Y'''(0) = Vo/EI$ $\qquad$ $Y'''(L) = V1/EIx$

$$EI \frac{d^{4y}}{dz^4} + ky = W$$

$$\frac{d^4 y}{dz^4} + \frac{k}{EI} Y = \frac{W}{EI}$$

$$Y^{IV} + 4B^4 y = \frac{W}{EI}$$

$$\int (Y^{IV}) + \int (4B^4 Y) = \int (W/EI)$$

$$S^4 Y - 0 - 0 - SY''(0) - Y'''(0) + 4B^4 Y = (W/EIx)\, 1/S$$

$$Y(s^4 + 4B^4) = \frac{Mo}{EIx} S + \frac{Vo}{EIx} + \frac{W}{EIx} \frac{1}{S}$$

$$EIxY = Mo \frac{S}{S^4 + 4B^4} + Vo \frac{1}{S^4 + 4B^4} + W \frac{1}{S(S^4 + 4B^4)}$$

$$EIxY = Mo \frac{1}{2\beta^2} (\operatorname{sen}\beta z \operatorname{senh}\beta z)$$

$$+ Vo \frac{1}{4\beta^3} (\operatorname{sen}\beta z \cosh\beta z - \cos\beta z \operatorname{senh}\beta z)$$

$$+ W \frac{1}{4\beta^4} (1 - \cos\beta z \cosh\beta z)$$

$$EIxY = Mo/2\beta^2(szshz)+Vo/4\beta^3(szchz-czshz)+w/4\beta^4(1-czchz) \qquad (c)$$

$$EIxY' = Mo/2\beta\ (szchz+czshz)+Vo/2\beta^2(szshz)+w/4\beta^3(szchz-czshz) \qquad (d)$$

$$EIxY'' = Mo(czchz)+Vo/2\beta\ (szchz+czshz)+W/2\beta^2(szshz) \qquad (e)$$

$$EIxY''' = Mo\beta(czshz-szchz)+Vo(czchz)+W/2\beta(szchz+czshz) \qquad (f)$$

Los valores de Mo y Vo se encuentran al satisfacer las condiciones de flecha y pendiente nulas en el extremo 1 obteniéndose:

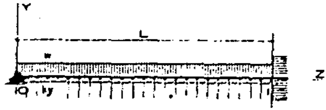
$$Vo = -\frac{W}{\beta} \frac{chL-cL}{sh+sL}$$

$$Mo = \frac{W}{2\beta^2} \frac{shL-sL}{shL+sL}$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (c), (d), (e) y (f) obtendremos:

Y, θ, M y V

2) Viga con extremos articulado, empotrado y carga unifomemente distribuida:



$Y(0) = 0$ $\qquad\qquad$ $Y(L) = 0$

$Y'(0) = \dfrac{Co}{EIx}$ $\qquad\qquad$ $Y'(L) = 0$

$Y''(0) = 0$ $\qquad\qquad$ $Y''(L) = \dfrac{M1}{EIx}$

$Y'''(0) = \dfrac{Vo}{EIx}$ $\qquad\qquad$ $Y'''(L) = \dfrac{V1}{EIx}$

$$EIx \frac{d^4 y}{dz^4} + ky = W$$

$$d^4 y/dz^4 + ky/EIx = W/EIx$$

$$Y^{IV} + 4\beta^4 y = W/EIx$$

$$\mathcal{L}(Y^{IV}) + \mathcal{L}(4\beta^4 Y) = \mathcal{L}\left(\frac{W}{EIx}\right)$$

$$S^4 Y - S^3 Y(0) - S^2 Y'(0) - SY''(0) - Y'''(0) + 4\beta^4 Y = \frac{W}{EIx}\,\frac{1}{S}$$

$$S^4 Y - 0 - S^2 \frac{Co}{EIx} - 0 - \frac{Vo}{EIX} + 4\beta^4 Y = \frac{W}{EIx}\,\frac{1}{S}$$

$$Y(S^4 + 4\beta^4) - S^2 \frac{Co}{EIx} - \frac{Vo}{EIx} = \frac{W}{EI}\,\frac{1}{S}$$

$$EIxY = Co\,\frac{S^2}{S^4+4\beta^4} + Vo\,\frac{1}{S^4+4\beta^4} + W\,\frac{1}{S(S^4+4\beta^4)}$$

$$EIxY = \frac{Co}{2\beta}(szchz+czshz) + \frac{Vo}{4\beta^3}(szchz - czshz) + \frac{W}{4\beta^4}(1 - czchz)$$

$$EIxY' = Co(czchz) + Vo/2\beta^2(szshz) + W/4\beta^3(szchz-czshz)$$

$$EIxY'' = Co\beta(czshz-szchz) + Vo/2\beta(szchz+czshz) + W/2\beta^2(szshz)$$

$$EIxY''' = -Co2\beta^2(szshz) + Vo(czchz) + W/2\beta(szchz+czshz)$$

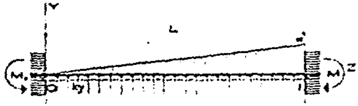
$$Y(L) = 0 = Co(sLchL+cLshL) + Vo/2\beta^2(sLchL-cLshL) + W/2\beta^3(1-cLchL)$$

$$Y'(L) = 0 = Co(cLchL) + Vo/2\beta^2(sLshL) + W/4\beta^3(sLchL-cLshL)$$

$$\boxed{Vo = \frac{W}{2\beta}\left(\frac{cLchL-s^2Lch^2L}{shLchL}\right)}$$

$$\boxed{Co = \frac{W}{4\beta^3}\left(\frac{sL(s^2L-chL)+cL(shL-sL)}{cLchL}\right)}$$

3) Viga con extremos empotrados y carga triangular:



$Y(0) = 0$ $\qquad$ $Y(L) = 0$

$Y'(0) = 0$ $\qquad$ $Y'(L) = 0$

$Y''(0) = Mo/EIx$ $\qquad$ $Y''(L) = M1/EIx$

$Y'''(0) = Vo/EIx$ $\qquad$ $Y'''(L) = V1/EIx$

$$EIx\, d^4y/dz^4 + ky = WZ/L$$

$$Y^{IV} + 4\beta^4 Y = WZ/LEI$$

$$\int(Y^{IV}) + \int(4\beta^4 Y) = \int(WZ/LEI)$$

$$S^4 Y - 0 - 0 - SY''(0) - Y'''(0) + 4\beta^4 Y = (W/LEI)\ 1/S^2$$

$$Y(S^4 + 4\beta^4) = Mo/EIx\ S + Vo/EIx + W/LEI\ 1/S^2$$

$$EIxY = Mo\ S/(S^4 + 4\beta^4) + Vo\ 1/(S^4 + 4\beta^4) + W/L\ 1/(S^2(S^4 + 4\beta^4))$$

$$EIxY = Mo/2\beta^2(szshz) + Vo/4\beta^3(szchz - czshz) - W/8L\beta^5(szchz + czshz - 2\beta z) \qquad (1)$$

$$EIxY' = (Mo/2\beta)(szchz + czshz) + (Vo/2\beta^2)(szshz) - (W/4L\beta^4)(czchz - 1) \qquad (2)$$

$$EIxY'' = Mo(czchz) + (Vo/2\beta)(szchz + czshz) + (W/4L\beta^3)(szchz - czshz) \qquad (3)$$

$$EIxY''' = -Mo\beta(szchz - czshz) + Vo(czchz) + W/2L\beta^2(szshz) \qquad (4)$$

$$Y(L)=0=Mo(sLshL)+(Vo/2\beta)(sLchL-cLshL)-(W/4L\beta^{3})(sLchL+cLshL-2\beta L) \qquad (a)$$

$$Y'(L)=0=Mo(sLchL+cLshL)+(Vo/2\beta)(2sLshL)-(W/4L\beta^{3})(2cLchL-2) \qquad (b)$$

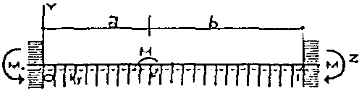
De las ecuaciones (a) y (b) :

$$Mo=\frac{W}{2L\beta^{3}}\left(\frac{shLchL-sLcL+sLchL}{sh^{2}L-s^{2}L}-\frac{cLshL+2\beta LsLshL}{sh^{2}L-s^{2}L}\right) \qquad (a')$$

$$Vo=-\frac{W}{2L\beta^{2}}\,\frac{(shL+sL-2\beta L(sLchL+cLshL))}{sh^{2}L-s^{2}L} \qquad (b')$$

Sustituyendo (a') y (b') en (1), (2), (3) y (4) se obtienen valores de Y, Y', M y V

4) Viga con extremos empotrados y momento concentrado a una distancia A de un apoyo:



$Y(0) = 0$	$Y(L) = 0$
$Y'(0) = 0$	$Y'(L) = 0$
$Y''(0) = Mo/EIx$	$Y''(L) = M1/EIx$
$Y'''(0) = Vo/EIx$	$Y'''(L) = V1/EIx$

$$EIx\, d^4 y/dz^4 + ky = Wz = F\delta(z-a)$$

$$d^4 y/dz^4 + 4\beta^4 y = F/EIx\ \partial(z-a)$$

$$Y^{IV} + 4\beta^4 Y = F/EIx\ \partial(z-a)$$

$$\int(Y^{IV}) + \int(4\beta^4 Y) = \int(F/EIx\ \partial(z-a))$$

$$S^4Y -0-0-SY''(0)-Y'''(0)+4\beta^4 Y = F/EIx\ e^{-sa}$$

$$Y(s^4+4\beta^4) = MoS/EIx + Vo/EIx + F/EI\ e^{-sa}$$

$$EIY = Mo(s)/(S^4+4\beta^4) + Vo\ 1/(S^4+4\beta^4) + F\ e^{-sa}/(s^4+4\beta^4)$$

$$EIxY = Mo/2\beta^2(szshz) + Vo/4\beta^3(szchz-czshz)$$

$$+ F/4\beta^3(s(z-a)ch(z-a)-c(z-a)sh(z-a))U(z-a)$$

Para $o<z<a$

$$EI_xY=(Mo/2\beta^2)(szshz)+(Vo/4\beta^3)(szchz-czshz)$$

$$EIxY'=(Mo/2\beta)(szchz+czshz)+(Vo/2\beta^2)(szshz)$$

$$EIxY''=Mo(czchz)+(Vo/2\beta)(szchz+czshz)$$

$$EIxY'''=Mo\beta(-szchz+czshz)+Vo(czchz)$$

Para $a<z<L$

$$EIxY=(Mo/2\beta^2)(szshz)+(Vo/4\beta^3)(szchz-czshz)$$
$$+(M/4\beta^3)(s(z-a)ch(z-a)-c(z-a)sh(z-a))$$

$$EIxY'=(Mo/2\beta)(szchz+czshz)+(Vo/2\beta^2)(szshz)$$
$$+(M/2\beta^2)(s(z-a)sh(z-a))$$

$$EIxY''=Mo(czchz)+(Vo/2\beta)(szchz+czshz)$$
$$+(M/2\beta)(s(z-a)ch(z-a)+c(z-a)sh(z-a))$$

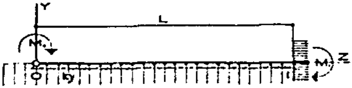
$$EIxY'''=Mo\beta(-szchz+czshz)+Vo(czchz)+M(c(z-a)ch(z-a))$$

$$Y(L)=0=Mo2\beta(sLshL)+Vo(sLchL-cLshL)+M(sbchb-cbshb)$$

$$Y'(L)=0=Mo\beta(sLchL+cLshL)+Vo(sLshL)+M(sbshb)$$

$$\boxed{Vo=\frac{M(sbchb-cbshb)(sLchL+cLshL)-2M(sbshb)(sLshL)}{c^2Lsh^2L-s^2Lch^2L+2s^2Lsh^2L}}$$

5) Viga con extremos articulado y empotrado y un momento Mo en la articulacion O:



$Y(0) = 0$	$Y(L) = 0$
$Y'(0) = Co/EIx$	$Y'(L) = 0$
$Y''(0) = Mo/EI$	$Y''(L) = M1/EIx$
$Y'''(0) = Vo/EI$	$Y'''(L) = V1/EIx$

$$EI\, d^4y/dz^4 + ky = 0$$

$$Y^{IV} + 4\beta^4 Y = 0$$

$$\int (Y^{IV}) + \int (4\beta^4 Y) = 0$$

$$S^4 Y - 0 - S^2 Y'(0) - SY''(0) - Y'''(0) + 4\beta^4 Y = 0$$

$$Y(S^4 + 4\beta^4) = (Co/EIx\ S^2) + (Mo/EIx)S + Vo/EIx$$

$$EIxY = Co \frac{S^2}{S^4+4\beta^4} + Mo \frac{S}{S^4+4\beta^4} + Vo \frac{1}{S^4+4\beta^4}$$

$$EIxY = Co/2\beta\ (szchz+czshz) + (Mo/\ 2\beta^2)(szshz)$$
$$+(Vo/4\beta^3)(szchz-czshz) \qquad (1)$$

$$EIxY' = Co(czchz) + (Mo/2\beta)(szchz+czshz) + (Vo/2\beta^2)(szshz) \qquad (2)$$

$$EIxY'' = Co\beta(-szchz+czshz) + Mo(czchz) + (Vo/2\beta)(szchz+czshz) \qquad (3)$$

$$EIxY''' = Co2\beta^2(-szshz) + Mo\beta(-szchz+czshz) + Vo(czchz) \qquad (4)$$

$$Y(L)=0=Co(sLchL+cLshL)+(Mo/2\beta)(2sLshL)+(Vo/2\beta^2)(sLchL-cLshL) \qquad (a)$$

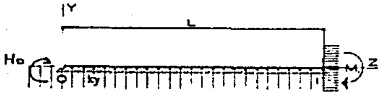
$$Y'(L)=0=Co(cLchL)+(Mo/2\beta)(sLchL+cLshL)+(Vo/2\beta^2)(sLshL) \qquad (b)$$

$$\boxed{Co = \frac{-Mo}{2\beta}\,\frac{sh^2L-s^2L}{shLchL-sLcL}} \qquad (a')$$

$$\boxed{Vo = -Mo\beta\,\frac{sh^2L+s^2L}{shLchL-sLcL}} \qquad (b')$$

Sustituyendo (a') y(b') en (1), (2), (3) y (4) obtendremos los valores de Y, Y', Mo y Vo:

6) Viga con extremos libre y empotrado y un momento en el extremo libre:



$Y(0) = Y(0)/EIx$	$Y(L) = 0$
$Y'(0) = Co/EIx$	$Y'(L) = 0$
$Y''(0) = Mo/EIx$	$Y''(L) = M1/EIx$
$Y'''(0) = 0$	$Y'''(L) = V1/EIx$

$$EIx\, d^4y/dz^4 + ky = 0$$

$$Y^{IV} + 4\beta^4 Y = 0$$

$$\int (Y^{IV}) + \int (4\beta^4 Y) = 0$$

$$S^4 Y - S^3 Y(0) - S^2 Y'(0) - SY''(0) - Y'''(0) + 4\beta^4 Y = 0$$

$$S^4 Y - S^3\, Yo/EIx - S^2\, Co/EIx - S\, Mo/EIx - 0 + 4\beta^4 Y = 0$$

$$EIY = Yo\, S^3/(S^4 + 4\beta^4) + Co\, S^2/(S^4 + 4\beta^4) + Mo\, S/(S^4 + 4\beta^4)$$

$$EIY = Yo(czchz) + (Co/2\beta)(szchz + czshz) + (Mo/2\beta^2)(szshz)$$

$$EIY' = Yo\beta(czshz - szchz) + Co(czchz) + (Mo/2\beta)(szchz + czshz)$$

$$EIY'' = Yo2\beta^2(-szshz) + Co\beta(-szchz + czshz) + Mo(czchz)$$

$$EIY''' = Yo2\beta^3(-szchz - shzcz) + Co2\beta^2(-szshz) + Mo\beta(-szchz + czshz)$$

$$Y(L)=0=Yo(cLchL)+(Co/\beta)(sLchL+cLshL)+(Mo/2\beta^2)(sLshL) \quad (1)$$

$$Y'(L)=0=Yo\beta(cLshL-sLchL)+Co(cLchL)+Mo/2\beta(sLchL+cLshL) \quad (2)$$

$$\boxed{Co = \frac{Mo}{2\beta}\left(\frac{sLcL + shLchL}{c^2Lsh^2L-s^2Lch^2L-c^2LshLchL+sLcLch^2L}\right)} \quad (a')$$

$$\boxed{Yo = \frac{Mo}{2\beta^2}\,\frac{s^2Lch^2L+c^2Lsh^2L+sLcLshLchL}{c^2L+s^2Lch^2L}} \quad (b')$$

Sustituyendo (a') y (b') en (1), (2), (3) y (4) se obtendrán :

Y, Θ, M, y V

7) Viga con extremos libre, empotrado y carga triangular:

$$Y(0) = Yo/EIx \qquad Y(L) = 0$$

$$Y'(0) = Co/EIx \qquad Y'(L) = 0$$

$$Y''(0) = 0 \qquad Y''(L) = M1/EIx$$

$$Y'''(0) = 0 \qquad Y'''(L) = V1/EIx$$

$$EIx\, d^4y/dz^4 + ky = WZ/L$$

$$Y^{IV} + 4\beta^4 Y = WZ/LEI$$

$$\int(Y^{IV}) + \int(4\beta^4 Y) = \int(W/LEIx)$$

$$S^4 Y - S^3 Y(0) - S^2 Y'(0) - SY''(0) - Y'''(0) + 4\beta^4 Y = W/LEIx\ 1/S^2$$

$$S^4 Y - S^3\ Yo/EIX - S^2\ Co/EIx - 0 - 0 + 4\beta^4 Y = W/LEIx\ 1/S^2$$

$$Y(S^4 + 4\beta^4) = S^3\ Yo/EIx + S^2\ Co/EIx + W/LEIx\ 1/S^2$$

$$EIxY = Yo\ S^3/S^4 + 4\beta^4 + Co\ S^2/S^4 + 4\beta^4 + (W/L)\,1/S^2(S^4 + 4\beta^4)$$

$$EIxY = Yo(czchz) + Co/2\beta(szchz + czshz) +$$

$$+ W/8L\beta^5\ (2\beta z - szchz - czshz) \qquad (1)$$

$$EIxY' = Yo\beta(czshz - szchz) + Co(czchz) +$$

$$+ W/4L\beta^4\ (1 - czchz) \qquad (2)$$

$$EIxY'' = 2Yo\beta^2(-szshz)+Co\beta(-szchz+czshz)+$$

$$+ W/4L\beta^3\ (szchz-czshz) \qquad (3)$$

$$EIxY''' = -2Yo\beta^3\ (szchz+shzcz)\ +Co2\beta^2(-szshz)+$$

$$+ W/2L\beta^2(szshz) \qquad (4)$$

$$EIxY(L)=0=Yo(cLchL)+Co/2\beta(sLchL+cLshL)+$$

$$+ W/8L\beta^5\ (2\beta L-sLchL-cLshL)$$

$$EIxY'(L)=0=Yo\beta(cLshL-sLchL)+Co(cLchL)+$$

$$+ W/4L\beta^4\ (1-cLchL)$$

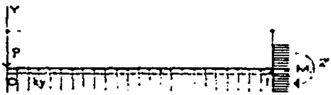
$$\boxed{Co = \frac{W}{4L\beta^4} \quad \frac{(cL-chL)^2+2\beta L(cLshL-sLchL)}{c^2L+ch^2L}} \qquad (a')$$

$$\boxed{Yo = \frac{W}{4L\beta^5} \quad \left(\frac{chL(sL-2\beta LcL)+cLshL}{c^2L+ch^2L}\right)}$$

Sustituyendo (a') y (b') en (1), (2), (3) y (4) tendremos los valores de:

$$Y,\ (\theta),\ M\ y\ V$$

9) viga con extremos libre, empotrado y carga concentrada en el extremo libre:



$Y(0) = Yo/EIx$

$Y'(0) = Co/EIx$

$Y''(0) = 0$

$Y'''(0) = P/EIx$

$Y(L) = 0$

$Y'(L) = 0$

$Y''(L) = M1/EIx$

$Y'''(L) = V1/EIx$

$$EIx\, dy^{4}/dz^{4} + ky = 0$$

$$Y^{IV} + 4B^{4} y = 0$$

$$\int (y^{IV}) + \int (4B^{4} Y) = 0$$

$$S^{4} (Y) - S^{3} Y(0) - S^{2} Y'(0) - SY''(0) - Y'''(0) + 4B^{4} y = 0$$

$$S^{4} - S^{3}\ Yo/EIx - S^{2}\ Co/EIx - 0 - P/EIx + 4B^{4} Y = 0$$

$$EIY(S^4+4\beta^4) = Yo\,S^3 + Co\,S^2 + P$$

$$EIY = Yo\,S^3/S^4+4\beta^4 + Co\,S^2/S^4+4\beta^4 + P\,1/S^4+4\beta^4$$

$$EIY = Yo(czchz)+(Co/2\beta)(szchz+czshz)+(P/4\beta^3)(szchz-czshz) \qquad (1)$$

$$\theta=EIY'=Yo\beta(czshz-szchz)+Co(czchz)+(P/4L\beta^4)(1-czchz) \qquad (2)$$

$$M=EIY''=Yo2\beta^2(-szshz)+Co\beta(-szchz+czshz)+$$

$$+(P/4L\beta^3)(szchz-czshz) \qquad (3)$$

$$V=EIY'''=-Yo2\beta^3(szchz+czshz)+Co\beta^2(-szshz)+$$

$$+(P/2L\beta^2)(szshz) \qquad (4)$$

$$EIxY=0=Yo(cLchL)+Co/2\beta(sLchL+cLshL)+$$

$$+\ P/4\beta^3\ (sLchL-cLshL)$$

$$EIxY'=0=Yo\beta(cLshL-sLchL)+Co(cLchL)+$$

$$+\ P/4L\beta^4\ (1-cLchL)$$

$$\boxed{Co = \frac{P}{2L\beta^4}\left(\frac{(cLchL-1)cLchL-L\beta^2(cLshL-sLchL)^2}{c^2L+ch^2L}\right)} \qquad (a')$$

$$\boxed{Yo=\frac{Po}{4L\beta^5}\left(\frac{(1-cLchL)(sLchL+cLshL)-2\beta^2LcLchL(sLchL-cLshL)}{c^2L+ch^2L}\right)} \qquad (b')$$

Sustituyendo (a') y (b') en (1), (2), (3) y (4) obtendremos:

Y, θ, M y V

En el caso de tanques circulares habíamos definido:

$$B = \sqrt[4]{k/4E}$$

$$K = Eh/R^2$$

$$EI = 4EH^3/12(1- \ ^2)$$

$$\boxed{B = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \ \frac{1}{\sqrt{Rh}}}$$

En la que los coeficientes de POISSON para concreto y acero son los siguientes:

$$V \text{ concreto} = 0.20$$

$$V \text{ acero} = 0.25$$

Para el calculo de tanques circulares se utilizan las ecuaciones deducidas para vigas de longitud finita de acuerdo a las cargas que se presentan y a las condiciones de apoyo en los extremos de los tanques.

T E M A 3

TANQUES CIRCULARES DE ESPESOR VARIABLE.

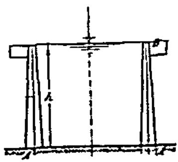
3.1 INTRODUCCION.

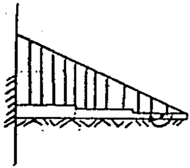
La ecuación diferencial que relaciona la deflexión de un tanque circular cilíndrico de espesor variable y con una carga radial axisimétrica se deriva de la ecuación:

$$d^2/dx^2\ (EI\ d^2y/dz^2) + ky = q$$

Una solución de forma cerrada esta disponible para el caso de muros con variacion lineal del espesor sujeto a carga triangular uniformemente distribuida.

Para una variación arbitraria en espesor o carga es recomentable usar el método de las rigideces para resolver el problema y discretizandola de la siguiente manera:



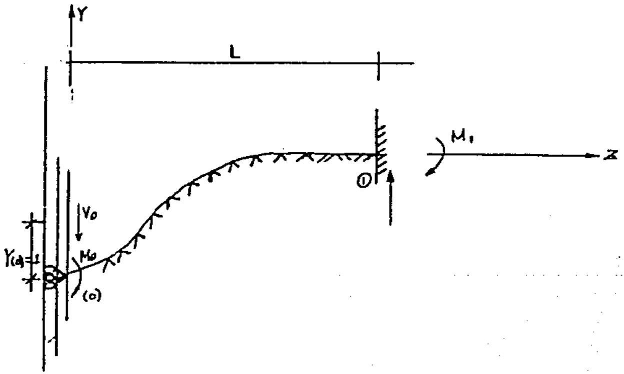


o en un número de secciones MAYOR.

3.2 RIGIDECES.

Para usar el método de las rigideces o de los desplazamientos es necesario conocer las rigideces de los miembros.

RIGIDEZ LINEAL.



$Y(0) = 1/EIx$ $\quad$ $Y(L) = 0$

$Y'(0) = 0$ $\quad$ $Y'(L) = 0$

$Y''(0) = Mo/EIx$ $\quad$ $Y''(L) = M1/EIx$

$Y'''(0) = Vo/EIx$ $\quad$ $Y'''(L) = V1/EIx$

$$EI\, d^4y/dz^4 + ky = 0$$

$$Y^{IV} + 4B^4 y = 0$$

$$S^4Y - S^3Y(0) - S^2Y'(0) - SY''(0) - Y'''(0) + 4B^4Y = 0$$

$$S^4Y - S^3 - 0 - S\,Mo/EIx - Vo/EIx + 4B^4Y = 0$$

$$Y(S^4 + 4B^4) = S^3 + (Mo/EIx)S + Vo/EIx$$

$$Y = S^3/(S^4 + 4B^4) + (Mo/EIx)(S/S^4\,4B^2) + (Vo/EIx)(1/S^4 + 4B^4)$$

$$Y = czchz + (Mo/EIx)(1/2B^2)(szshz) + (Vo/EIx)(1/4B^3)(szchz - czshz)$$

$$EIxY = czchz + (Mo/2B^2)(szshz) + (Vo/4B^3)(szchz - czshz) \qquad (1)$$

$$EIxY' = B(czshz - szchz) + (Mo/2B)(szchz + czshz) + (Vo/2B^2)(szshz) \qquad (2)$$

$$EIxY'' = 2B^2(-szshz) + Mo(czchz) + (Vo/2B)(szchz + czshz) \qquad (3)$$

$$EIxY''' = B(-szchz - shzcz) + MoB(-szchz + czshz) + Vo(czchz) \qquad (4)$$

Para $Z=L$ $\quad Y(L)=0$ y $Y'(L)=0$

$$0 = cLchL + (Mo/2B^2)(sLshL) + (Vo/4B^3)(sLchL - cLshL)$$

$$0 = B(cLshL - sLchL) + (MoB/2B^2)(sLchL + cLshL) + (Vo/2B^2)(sLshL)$$

$$Vo = \frac{4\beta^3 (shLchL-sLcL)}{s^2L-sh^2L}$$

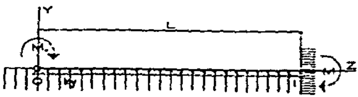
$$Mo = \frac{2\beta^2(c^2Lsh^2L+s^2Lch^2L)}{s^2L-sh^2L}$$

Para calcular M1 y V1

$$M1=EIY''(L)=2\beta^2(-sLchL)+Mo(cLchL)+(Vo/2\beta)(sLchL+cLshL)$$

$$V1=EIY'''(L)=\beta(-sLchL-shLcL)+Mo\beta(-sLchL+cLshL)+Vo(cLchL)$$

RIGIDEZ ANGULAR.



$Y(0) = 0$

$Y'(0)=1/EIx$

$Y''(0)=Mo/EIx$

$Y'''(0)=Vo/EIx$

$Y(L) = 0$

$Y'(L)= 0$

$Y''(L)=M1/EIx$

$Y'''(L)=V1/EIx$

$$EIx\, d^4y/dz^4 + ky = 0$$

$$Y^{IV} + 4B^4 Y = 0$$

$$\mathcal{L}(Y^{IV}) + \mathcal{L}(4B^4 Y) = 0$$

$$S^4 Y - 0 - S^2 Y'(0) - SY''(0) - Y'''(0) + 4B^4 Y = 0$$

$$Y(S^4 + 4B^4) = (1/EIx)S^2 + (Mo/EIx)S + Vo/EIx$$

$$EIxY = S^2/(S^4 + 4B^4) + Mo\ S/(S^4 + 4B^4) + Vo\ 1/(S^4 + 4B^4)$$

$$EIxY = (1/2B)(szchz + czshz) + (Mo/2B^2)(szshz) + (Vo/4B^3)(szchz - czshz)$$

$$EIxY' = (czchz) + (Mo/2B)(szchz + czshz) + (Vo/2B^2)(szshz)$$

$$EIxY'' = B(-szchz + czshz) + Mo(czchz) + (Vo/2B)(szchz + czshz)$$

$$EIXY''' = 2B^2(-szshz) + MoB(-szchz + czshz) + Vo(czchz)$$

Los valores de Mo y Vo se encuentran al satisfacer las condiciones de flecha y pendiente nulas en el empotramiento 1.

$$Y(L) = 0 = (sLchL + cLshL) + (Mo/2B)(2sLshL) + (Vo/2B^2)(sLchL - cLshL)$$

$$Y'(L) = 0 = (cLchL) + (Mo/2B)(sLchL + cLshL) + (Vo/2B^2)(sLshL)$$

De estas ecuaciones se obtienen los siguientes valores para Mo y Vo.

$$Mo = \frac{2\beta(shLchL-sLcL)}{(sh^2L-s^2L)}$$

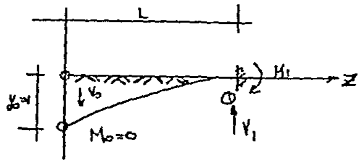
$$Vo = -Mo\beta \frac{sh^2L+s^2L}{shLchL-sLcL}$$

Para calcular M1 y V1

$$M1=EIxY''=\beta(-sLchL+cLshL)+Mo(cLchL)+Vo/2\beta\ (sLchL+cLshL)$$

$$V1=EIxY'''=2\beta^2(-sLshL)+Mo\beta(-sLchL+cLshL)+Vo(cLchL)$$

RIGIDEZ LINEAL CON GIRO:



$Y(0) = 1/EIx$

$Y'(0)= Co/EIx$

$Y''(0)= 0$

$Y'''(0)= Vo/EIx$

$Y(L) = 0$

$Y'(L)= 0$

$Y''(L)= M1/EIx$

$Y'''(L)= V1/EIx$

$$EIx\ d^4/dz^4 + ky = 0$$

$$\mathcal{L}\, Y^{IV} + \mathcal{L}\, 4\beta^4 Y = 0$$

$$(Y^{IV}) + (4\beta^4 Y) = 0$$

$$S^4 Y - S^3 Y(0) - S^2 Y'(0) - SY''(0) - Y'''(0) + 4\beta^4 Y = 0$$

$$S^4 Y - S^3 \; 1/EIx - S^2 \; Co/EIx - 0 - Vo/EIx + 4\beta^4 Y$$

$$Y(S^4 + 4\beta^4) = S^3 (1/EIx) + S^2 \; Co/EIx + Vo/EIx$$

$$Y = (1/EIx) S^3/(S^4 + 4\beta^4) + (Co/EIx) S^2/(S^4 + 4\beta^4) + (Vo/EIx) 1/(S^4 + 4\beta^4)$$

$$YEIx = S^3/(S^4 + 4\beta^4) + Co \; S^2/(S^4 + 4\beta^4) + Vo \; 1/(S^4 + 4\beta^4)$$

$$EIxY = czchz + Co(1/2\beta)(szchz + czshz) + Vo(1/4\beta^3)(szchz - czshz) \quad (1)$$

$$EIxY' = \beta(czshz - szch) + Co(czchz) + (Vo/2\beta^2)(szshz) \quad (2)$$

$$EIxY'' = 2\beta^2(-szshz) + Co\beta(-szchz + czshz) + (Vo/2\beta)(szchz + czshz) \quad (3)$$

$$EIxY''' = \beta(-szchz - shzcz) + Co2\beta^2(-szshz) + Vo(czchz)$$

Los valores de Co y Vo se encuentran al satisfacer las condiciones de flecha y pendiente nulas en el empotramiento.

$$Y(L) = 0 = czchz + Co(1/2\beta)(szchz + czshz) + Vo/4\beta^3(szchz - czshz)$$

$$Y'(L) = 0 = \beta(czshz - szchz) + Co(czchz) + (Vo/2\beta^2)(szshz)$$

$$Vo = 2\beta^{3} \frac{c^{2}z+ch^{2}z}{shzchz-szcz}$$

$$Co = \frac{\beta(-s^{2}zch^{2}z-c^{2}zsh^{2}z)}{shzchz(szcz+c^{2}z)+ch^{2}z(s^{2}z-szcz)}$$

Para calcular M1 y V1 se sustituyen los valores anteriores en:

$$M1 = Co\beta(-sLchL+cLshL)+Mo(cLchL)+(Vo/2\beta)(sLchL+cLshL)$$

$$V1 = Co2\beta^{2}(-sLshL)+Mo\beta(-sLchL+cLshL)+Vo(cLchL)$$

3.3 ELEMENTOS DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ EN EL SISTEMA DE EJES DE LOS MIEMBROS.

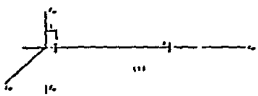
Las fuerzas en los extremos de los miembros de un marco plano estan relacionados con los desplazamientos por los elementos de la matríz de rigidez como sigue:

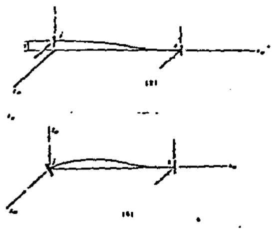
$$\begin{bmatrix} f_{ijx} \\ f_{ijy} \\ m_{ij} \\ f_{jix} \\ f_{jiy} \\ m_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{ijx} \\ \delta_{ijy} \\ \theta_{ij} \\ \delta_{jix} \\ \delta_{jiy} \\ \theta_{ji} \end{bmatrix}$$

En la figura siguiente se muestra un elemento "i,j" de un marco plano, los ejes de los miembros y el numero de grados de libertad.

Los elementos de la matríz de rigidez pueden ser encontrados tratando los elementos como una estructura no restringida con 6 grados de libertad.

Las rigideces para un marco plano las podemos resumir de la manera siguiente:





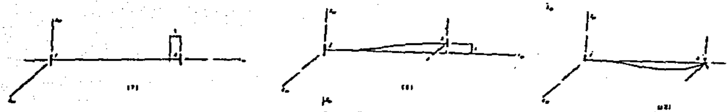


Fig 3.1

Por inspección de la fig. 3.1 los coeficientes de rigidez asociados a los siguientes grados de libertad son:

Grado de libertad N.1

$k11=EA/L$; $k21=0$; $k31=0$; $k41=-EA/L$; $k51=0$; $k61=0$

Grado de libertad N.2

$k12=0$

$$k22=\frac{4\beta^{3}(\operatorname{senh}\beta L\cosh\beta L-\operatorname{sen}\beta L\cos\beta L)}{\operatorname{sen}^{2}\beta L-\operatorname{senh}^{2}\beta L}$$

$$k32=\frac{2\beta^{2}(\cos^{2}\beta L\operatorname{senh}^{2}\beta L+\operatorname{sen}^{2}\beta L\cosh^{2}\beta L)}{\operatorname{senh}^{2}\beta L-\operatorname{sen}^{2}\beta L}$$

$k42=0$

$$k52=\beta(\operatorname{sen}\beta L\cos\beta L+\operatorname{senh}\beta L\cos\beta L)+k32(\operatorname{sen}\beta L\cosh\beta L-\cos\beta L\operatorname{senh}\beta L)$$
$$-k22(\cos\beta L\cosh\beta L)$$

$$k62=2\beta^{2}(\operatorname{sen}\beta L\operatorname{senh}\beta L)-k32(\cos\beta L\cosh\beta L)-$$
$$-k22(\operatorname{sen}\beta L\cosh\beta L+\cos\beta L\operatorname{senh}\beta L)$$

Grado de libertad N.3

$$k13 = 0$$

$$k23 = k33 \times \beta \frac{senh^2 \beta L + sen^2 \beta L}{(senh \beta L cosh \beta L - sen \beta L cos \beta L)}$$

$$k33 = \frac{2\beta (senh \beta L cosh \beta L - sen \beta L cos \beta L)}{(senh^2 \beta L - sen^2 \beta L)}$$

$$k43 = 0$$

$$k53 = 2\beta^2 (sen \beta L senh \beta L) + k33\beta (sen \beta L cosh \beta L - cos \beta L senh \beta L)$$
$$-k23 (cos \beta L cosh \beta L)$$

$$k63 = \beta (sen \beta L cosh \beta L - cos \beta L senh \beta L) - k33 (cos \beta L cosh \beta L) -$$
$$(k23/2\beta)(sen \beta L cosh \beta L + cos \beta L senh \beta L)$$

Grado de libertad N.4

$k14=-k11$; $k24=0$; $k34=0$; $k44=k11$; $k54=0$; $k64=0$

Grado de libertad N.5

$k15=0$; $k25=k52$; $k35=k63$; $k45=0$; $k55=k22$; $k65=k33$

Grado de libertad N.6

$k_{16}=0$; $k_{26}=-k_{53}$; $k_{36}=k_{63}$; $k_{46}=0$; $k_{56}=-k_{23}$; $k_{66}=k_{33}$

La relación de las rigideces de elementos se muestran como sigue.

$$
\begin{bmatrix} f_{ijx} \\ f_{ijy} \\ m_{ij} \\ \hline f_{jix} \\ f_{jiy} \\ m_{ji} \end{bmatrix}
=
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\
0 & k_{22} & k_{23} & 0 & k_{52} & -k_{53} \\
0 & k_{32} & k_{33} & 0 & k_{62} & k_{63} \\ \hline
-EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\
0 & k_{52} & k_{53} & 0 & k_{22} & -k_{23} \\
0 & k_{62} & k_{63} & 0 & k_{32} & k_{33}
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} \delta_{ijx} \\ \delta_{ijy} \\ \theta_{ij} \\ \hline \delta_{jix} \\ \delta_{jiy} \\ \theta_{ji} \end{bmatrix}
$$

Si lo expresamos en términos de submatrices indicados en las lineas punteadas se reduce a la siguiente ecuación:

$$
\begin{bmatrix} f_{ij} \\ \hline f_{ji} \end{bmatrix}
=
\left[\begin{array}{cc}
k^{j}_{ii} & k_{ij} \\ \hline
k_{ji} & k^{i}_{jj}
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} \delta_{ij} \\ \hline \delta_{ji} \end{bmatrix}
$$

Donde:

$$f_{ij} = k^{j}_{ii}\,\delta_{ij} + k_{ij}\,\delta_{ji} \qquad (3.2)$$

$$f_{ji} = k_{ji}\,\delta_{ij} + k_{ij}\,\delta_{ji} \qquad (3.3)$$

3.4 TRANSFORMACION DE FUERZA Y DESPLAZAMIENTO.

La relación en donde las fuerzas extremas de los miembros sè expresan en un sistema de ejes globales es:

$$Fij = Tij^{-1} \; fij \qquad (3.4) \qquad\qquad fij = Tij \; Fij \quad (3.6)$$

$$Fji = Tij^{-1} \; fji \qquad (3.5) \qquad\qquad fji = Tij \; Fji \quad (3.7)$$

En donde:

Fij= vector de las fuerzas extremas en los miembros de extremo i para el miembro "i,j" en el sistema global.

Fji= vector de las fuerzas extremas en los miembros del extremo j del miembro "i,j" en el sistema global.

fij= vector de las fuerzas extremas en los miembros del extremo i para el miembro "i,j" en un sistema local de ejes.

fji= vector de las fuerzas extremas en los miembros del extremo i para el miembro "i,j" en un sistema local de ejes

$$Tij = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha & 0 \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Tij^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha & 0 \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

α = rotación el el sentido de las manecillas del reloj de el miembro respecto a "i" que hara que los ejes de los miembros coincidan con los ejes globales.

La relación de los desplazamientos de los nudos de un sistema de ejes locales de ejes globales

EJEMPLO.

$$\partial ij = Tij \Delta i$$

$$\partial ji = Tij \Delta j$$

Δi= Vector del desplazamiento nodal en un sistema global de ejes.

Δj= Vector del desplazamiento nodal en un sistema global de ejes.

De la ecuación (3.2) y (3.4) tenemos:

$$Fij = T^{-1} K^{j}ii\ \delta ij + T^{-1} Kij\ \delta ij \qquad (3.8)$$

A fin de generar y resolver la ecuación de rigidez para toda la estructura, las fuerzas y desplazamientos en cada nudo deben ser expresados en un sistema de ejes comun (sistema de ejes global), consecuentemente los desplazamientos extremos de los miembros ∂ij y ∂ji deben ser transformados de un sistema de ejes de los miembros a un sistema de ejes comun y la ecuacion (3.8) se convierte en :

$$Fij= T^{-1} K^{j}ii\ Tij \Delta i+T^{-1}ij\ kij\ Tij\ \Delta j$$

$$Fij= K^{j}ii \Delta i+Kij \Delta j$$

Donde:

$$K_{ii}^{j} = T_{ij}^{-1}\, K_{ii}^{j}\, T_{ij}$$

$$K_{ij} = T_{ij}^{-1}\, k_{ij}\, T_{ij}$$

$$K_{ii}^{j} = \begin{bmatrix} \cos a & -\operatorname{sen} a & 0 \\ \operatorname{sen} a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos a & \operatorname{sen} a & 0 \\ -\operatorname{sen} a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_{ii}^{j} = \begin{bmatrix} (EA/L)\cos^2 a + k_{22}\operatorname{sen}^2 a & (EA/L - k_{22})\operatorname{sen} a \cos a & -k_{23}\operatorname{sen} a \\ (EA/L - K_{22})\operatorname{SEN} a \operatorname{COS} a & (EA/L \operatorname{sen}^2 a + K_{22}\cos^2 a) & k_{23}\cos a \\ -k_{23}\operatorname{sen} a & k_{32}\cos a & k_{33} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} \cos a & -\operatorname{sen} a & 0 \\ \operatorname{sen} a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & K_{52} & -K_{53} \\ 0 & K_{62} & k_{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos a & \operatorname{sen} a & 0 \\ -\operatorname{sen} a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} (-EA/L)\cos^2 + k_{52}\operatorname{sen}^2 a & (-EA/L - K_{52})\operatorname{sen} a \cos a & k_{53}\operatorname{sen} a \\ (-EA/L - k_{52})\operatorname{sen} a \cos a & (-EA/L)\operatorname{sen}^2 a + k_{52}\cos^2 a & -k_{53}\cos a \\ -k_{62}\operatorname{sen} a & k_{62}\cos a & k_{63} \end{bmatrix}$$

$$
K_{ji} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & k_{52} & k_{53} \\ 0 & k_{62} & k_{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
K_{ji} = \begin{bmatrix} (-EA/L)\cos^2\alpha + k_{52}\operatorname{sen}^2\alpha & (-EA/L-K_{52})\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha & -k_{53}\operatorname{sen}\alpha \\ (-EA/L-k_{52})\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha & (-EA/L)\operatorname{sen}^2\alpha + k_{52}\cos^2\alpha & k_{53}\cos\alpha \\ -k_{62}\operatorname{sen}\alpha & k_{62}\cos\alpha & k_{63} \end{bmatrix}
$$

$$
K_{ji}^{i} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & -k_{23} \\ 0 & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
K_{ji}^{i} = \begin{bmatrix} (EA/L)\cos^2\alpha + k_{22}\operatorname{sen}^2\alpha & (EA/L-k_{22})\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha & k_{23}\operatorname{sen}\alpha \\ (EA/L-k_{22})\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha & (EA/L)\operatorname{sen}^2\alpha + k_{22}\cos^2\alpha & -k_{23}\cos\alpha \\ -k_{32}\operatorname{sen}\alpha & k_{32}\cos\alpha & k_{33} \end{bmatrix}
$$

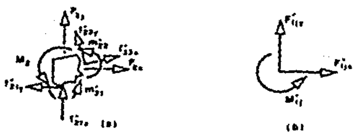
3.5 EQUILIBRIO NODAL.

En general cada miembro de un plano transporta una carga axial, un cortante y un momento flexionante. En la figu ra 3.2 (a) se muestra el diagrama de cuerpo libre para el nudo 2 de un marco plano. Como el nudo es parte de una estructura en equilibrio, entonces este también deberá estar en equilibrio bajo la acción de fuerzas internas de miembro (f21x,f21y,m21,f23x,etc.) y de cargas externas (P2x,P2y,M2). Si las fuerzas extremas de los miembros son transformadas a un sistema de ejes como se indica en la fig. 3.2 (b), entonces la suma de fuerzas horizontales, las fuerzas verticales y los momentos deberán sumar cero.

$$P2x + \overset{1}{F21x} + \overset{1}{F23x} = 0$$

$$P2y + \overset{1}{F21y} + \overset{1}{F23y} = 0$$

$$M2 + \overset{1}{M21} + \overset{1}{M23} = 0$$



Las fuerzas ejercidas sobre un nudo por un miembro serán igual y opuestas a las fuerzas extremas de un miembro.

$$P2x - F21x - F23x = 0$$

$$P2y - F21y - F23y = 0$$

$$M2 - M21 - M23 = 0 \qquad (m21 = M21, \quad m23 = M23)$$

O en notación matricial.

$$P2 = F21 + F22$$

Donde:

$$P2 = \begin{bmatrix} P2x \\ P2y \\ M2 \end{bmatrix} \qquad F21 = \begin{bmatrix} F21x \\ F21y \\ M21 \end{bmatrix} \qquad F23 = \begin{bmatrix} F23x \\ F23y \\ M23 \end{bmatrix}$$

La Ecuación de equilibrio para un nudo "i" en el cuál concurren los miembros "i,a", "i,b","i,c",..."i,n" es:

$$Pi = Fia + Fib + Fic + \ldots + Fin$$

Esta ecuación muestra que los vectores de carga externos Pi aplicados al nudo "i", deben ser equilibrados por los vectores de fuerza internos Fia, Fib, Fic, ... Fin,de los miembros. Obviamente la suma de las fuerzas componentes debe estar en un sistema de ejes consistente.

La siguiente ecuación da la relación entre fuerzas extremas de los miembros y los desplazamientos nodales en un sistema de ejes globales.

$$Fij = K^{j}ii\Delta i + kij\Delta j$$

Donde

$$K^{j}ii = T^{-1}ij\ kij\ Tij$$

y

$$Kij = T^{-1}\ kij\ Tij$$

Sustituyendo las fuerzas extremas de los miembros en la ecuación de equilibrio nodal.

$$Pi = K^{a}ii\Delta i + Kia\Delta a + k^{b}ii\Delta i + kib\Delta b +$$

$$k^{c}ii\Delta i + Kic\Delta c + \ldots + K^{n}ii\Delta i + Kin\Delta n$$

$$Pi = Kii\Delta i + Kia\Delta a + Kib\Delta b + \ldots + Kin\Delta n$$

Donde:

$$Kii = \Sigma K^{j}ii$$

Que es la suma de todos los miembros conectados al nudo "i"

3.6 MATRIZ DE RIGIDEZ INICIAL.

Inicialmente a la aplicación de las condiciones de frontera, las ecuaciones de equilibrio nodal forman un sistema de ecuaciones simultaneas. Los coeficientes de estas ecuaciones forman la matriz de rigidez de la estructura inicial   Las submatrices de la rigidez de los elementos en sistema de ejes globales K_{ii}^{j}, K_{ij}, K_{ji}, y K_{jj}^{i} para un marco plano son matrices de 3x3. Por lo tanto la dimensión de la matriz de rigidez de la estructura inicial es 3 veces el número de nudos. El procedimiento para generar la matriz de rigidez es el siguiente:

1.- Hacer todos los elementos de la matriz de rigidez de la estructura igual a cero.

2.- Para el miembro "i,j" calcule las submatrices de rigidez k_{ii}^{j}, k_{ij}, k_{ji} y k_{jj}^{i} usando las ecuaciones 3.9 a 3.12

3.- Sume Estas submatrices de rigidez con la siguiente localización en la matriz de rigidez de la estructura inicial.

K_{ii}^{j} es sumado a la posición:

$$\begin{bmatrix} (3i-2),(3i-2) & (3i-2),(3i-1) & (3i-2),(3i) \\ (3i-1),(3i-2) & (3i-1),(3i-1) & (3i-1),(3i) \\ (3i),(3i-2) & (3i),(3i-1) & (3i),(3i) \end{bmatrix}$$

K_{ij} es sumado a la posición:

$$\begin{bmatrix} (3i-2),(3j-2) & (3i-2),(3j-1) & (3i-2),(3j) \\ (3i-1),(3j-2) & (3i-1),(3j-1) & (3i-1),(3j) \\ (3i),(3j-2) & (3i),(3j-1) & (3i),(3j) \end{bmatrix}$$

K_{ji} es sumado a la posición:

$$\begin{bmatrix} (3j-2),(3i-2) & (3j-2),(3i-1) & (3j-2),(3i) \\ (3j-1),(3i-2) & (3j-1),(3i-1) & (3j-1),(3i) \\ (3j)\ ,(3i-2) & (3j)\ ,(3i-1) & (3j)\ ,(3i) \end{bmatrix}$$

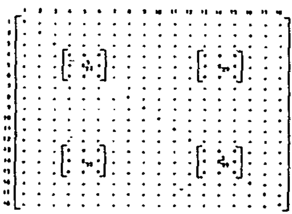
K^{i}_{jj} es sumado a la posición:

$$\begin{bmatrix} (3j-2),(3j-2) & (3j-2),(3j-1) & (3j-2),(3j) \\ (3j-1),(3j-2) & (3j-1),(3j-1) & (3j-1),(3j) \\ (3j)\ ,(3j-2) & (3j)\ ,(3j-1) & (3j)\ ,(3j) \end{bmatrix}$$

4.- Repetir pasos 2 y 3 para todos los otros elementos.

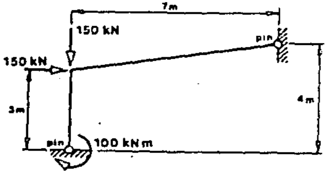
Para un estructura de 6 nudos la matriz inicial de la estructura será de 18 x 18.

La siguiente figura muestra la localización de las submatrices de rigidez de los miembros 2,5 de una estructura de 6 nudos.



3.7 APLICACION DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA.

Consideremos la siguiente estructura de 3 nudos.



Y cuya ecuación es:

$$
\begin{bmatrix}
K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{17} & K_{18} & K_{19} \\
K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & K_{27} & K_{28} & K_{29} \\
K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} & K_{38} & K_{39} \\
K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{47} & K_{48} & K_{49} \\
K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} & K_{57} & K_{58} & K_{59} \\
K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} & K_{67} & K_{68} & K_{69} \\
K_{71} & K_{72} & K_{73} & K_{74} & K_{75} & K_{76} & K_{77} & K_{78} & K_{79} \\
K_{81} & K_{82} & K_{83} & K_{84} & K_{85} & K_{86} & K_{87} & K_{88} & K_{89} \\
K_{91} & K_{92} & K_{93} & K_{94} & K_{95} & K_{96} & K_{97} & K_{98} & K_{99}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Delta 1x \\ \Delta 1y \\ \theta 1 \\ \Delta 2x \\ \Delta 2y \\ \theta 2 \\ \Delta 3x \\ \Delta 3y \\ \theta 3
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
R_{1x} \\ R_{2y} \\ M_{1} \\ P_{2x} \\ P_{2y} \\ M_{2} \\ R_{2x} \\ R_{2y} \\ M_{3}
\end{bmatrix}
$$

En esta estructura nuestras condiciones de frontera son:

$$\Delta 1x = \Delta 1y = \Delta 3x = \Delta 3y = 0$$

y

$$M1 = -100 \text{ KNm}$$

$$P2x = 150 \text{ KN}$$

$$P2y = -150 \text{ KN}$$

La ecuación toma la siguiente forma:

$$m\, d^2x/dt^2 + kx = 0$$

$$ms^2x(s) - msx(0) - m\dot{x}(0) + kx(s) = 0$$

$$x(s)(ms^2+k) - m\dot{x}(0) - msx(0) = 0$$

$$x(s) = \frac{m\dot{x}(0)}{ms^2+k} + \frac{msx(0)}{ms^2+k}$$

$$x(s) = \frac{\dot{x}(0)}{s^2+k/m} + \frac{s}{s^2+k/m}\, x(0)$$

$$\mathcal{L}[\text{sen } at] = \frac{a}{s^2+a^2} \qquad a^2 = \frac{k}{m}$$

por lo tanto: $a = \sqrt{k/m}$

$$\mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$x(t) = \frac{\dot{x}(0)}{\sqrt{(k/m)}} \quad \text{sen}\sqrt{(k/m)}\, t + x(0) \quad \cos \sqrt{(k/m)}\, t \qquad (1)$$

Haciendo:

$Wn = \sqrt{(k/m)}$ $\quad x(0) = Xo \qquad \dot{X}(0) = Vo$

Sustituyendo en (1) los valores de Wn, X(0) y $\dot{X}(0) = Vo$

$$\boxed{X(t) = Xo\ \cos Wnt + \frac{Vo}{Wn}\ \mathrm{sen}Wnt}$$

Que es la solución General.

T E M A 4

CONSIDERACIONES PARA EL ANALISIS DE TANQUES CIRCULARES

4.1 INTRODUCCION.

El término tanques con superficie libre se refiere a depósitos para líquidos cuya superficie se halla sujeta a la presión atmosférica. En este capítulo se dan recomendaciones para el análisis de tanques con superficie libre de concreto reforzado y de acero. En el apartado de requisitos generales se presentan aquellos aspectos de la determinación de las acciones del análisis estructural que pueden ser comunes a los diferentes tipos de tanques.

4.2 REQUISITOS GENERALES.

4.2.1 ACCIONES.

En el análisis de tanques se considera la necesidad de tomar en cuenta las acciones siguientes:

a) Peso propio del tanque y sus accesorios, incluyendo la tapa y la estructura de soporte, en su caso. Las cargas de peso propio son cargas axisimétricas y se puede usar el criterio de análisis indicado en temas anteriores.

b) Presión interior del líquido almacenado. El diseño se realizará sobre el supuesto de que el tanque almacena agua a 15 grados centrígrados, ó el líquido al cuál esta destinado si su densidad es mayor a la del agua. Cuando se considere simultaneamente con este empuje el efecto del sismo o del viento, se supondrá que el tanque esta lleno al 80% de su capacidad. Para valuar deformaciones diferidas en estructura y en cimentación, se supondrá lleno al 70%. Esta carga de presión es carga axisimétrica.

c) Carga viva sobre la tapa. La carga viva sobre la tapa no se tomara menor de 120 kg. por metro cuadrado de proyección horizontal. Sobre las escaleras, pasillos y plataformas se considerara una carga concentrada móvil de 500 kg/m^2 Los barandales se diseñaran para una carga de 100 kg., capaz de acturar en cualquier punto del pasamanos y en cualquier dirección. Esta carga viva si es una carga axisimétrica.

d) En tanques bajo el nivel del terreno, subpresión sobre losas de fondo y empuje lateral de los rellenos y del agua del subsuelo sobre las paredes. Esta también es carga axisimétrica.

e) Efectos de los cambios de temperatura, de contracciones y del flujo plástico. (carga axisimétrica)

f) Efectos de viento.

g) Efectos de sismo.

4.3 EFECTOS DEL VIENTO.

Los efectos de viento se tomarán en cuenta mediante presiones y succiones estáticas valuadas de acuerdo a efectos equivalentes a los de una fuerza distribuida sobre el área expuesta. Dicha fuerza se supondrá perpendicular a la superficie en que actua y su valor por unidad de area se calculara con:

$$p = 0.0048\ GCV^2$$

Donde:

C = Coefieciente de empuje (sin dimensiones). Cuando C es positivo, se trata de empuje sobre el area expuesta, cuando es negativo se trata de succión.

p = Presión o succión debida al viento en kg/m^2

V = Velocidad de diseño en km/h calculada de acuerdo a la expresión que se indica posteriormente.

G = (8+h)/(8+2h) = Factor de reducción de densidad de la atmósfera, a la altura h en km sobre el nivel del mar.

V = K1 K2 Vo

En la cual:

$K1 = 1.2$ = Factor de topografía.

$K2 = 1.00$ = Factor de recurrencias.

V = Velocidad básica, en km/hr.

Vo = Velocidad regional

Valores de la velocidad regional:
(Período de recurrencia = 100 años, intervalos de medición = 15 seg)

ZONA	Vo (km/hr)
a) Mesa central	140
b) Zona costera (faja de 150 km de ancho a lo largo de cada costa. Penínsulas de Baja California y de Yucatán.	170
c) Valle de México	100

El valor de C se considerará de acuerdo a lo siguiente:
C = 0.75 para presión
C = -0.68 para succión

Nota: Los efectos de viento no corresponden a cargas axisimétricas.

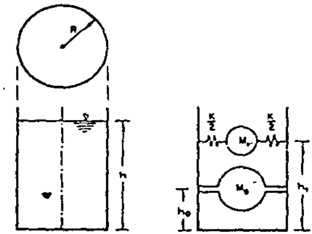
4.4 EFECTOS DE SISMO.

a) Fuerza hidrodinamica.

El procedimiento que se presenta para valuar la fuerza hidrodinámica causada por un sismo en el manual de diseño de obras civiles de la Comisión Federal de Electricidad (1969). Es un procedimiento aproximado que se apoya en ciertas simplificaciones, pero conduce a resultados suficientemente precisos desde el punto de vista del diseño estructural.

Cuando un tanque que contiene un líquido de masa M experimenta una aceleración horizontal, una cierta porción del líquido actua como si fuera un cuerpo sólido, de masa Mo, unido rigidamente a las paredes. Si se supone que el tanque se mueve como cuerpo rígido, de modo que el fondo y las paredes tengan la misma aceleración, la masa Mo ejercerá sobre las paredes una fuerza horizontal máxima que será proporcional a la máxima aceleración del tanque; esta fuerza se conoce como fuerza impulsiva. La aceleración también causa oscilaciones en el líquido, en las que una parte de este, de masa M1, responde como si fuera una masa sólida unida elásticamente a las paredes; estas oscilaciones causan presiones dinámicas adicionales en las paredes y en el fondo. La amplitud máxima de las oscilaciones de M1 respecto a las paredes determina tanto el máximo movimiento vertical de la superficie delgada, dmax, como el valor máximo de la fuerza horizontal ejercida sobre las paredes. Esta fuerza se define como una fuerza convectiva, debido a que implica movimiento del líquido. Sobre el fondo del tanque se producen presiones dinámicas cuya resultante es un par, de manera que, si en una sección inmediatamente arriba del fondo del tanque se tiene cierto momento, en la estructura de soporte, inmediatamente abajo del fondo, se tendrá un momento mayor. Los valores de Ho y H1, calculados con $\alpha = 0$ y $B = 1$, se usan para valuar el momento en una sección arriba del fondo y calculadas con $\alpha = 1.3$ y $\beta = 2.0$ para valuar el momento en la estructura de soporte inmediatamente abajo del fondo.

De acuerdo a la siguiente Figura se indican las masas M1, Mo y las elevaciones Ho y H1.



TANQUE CILIDRICO CIRCULAR Y MASAS EQUIVALENTES SEGUN HOUSNER (1963)

Las presiones hidrodinámicas en tanques superficiales cilíndricos con fondo plano se calculan con las siguientes expresiones

$$Mo = \frac{\tanh 1.73\ R/h}{1.73\ R/h} M$$

$$ho = 0.30[1+\alpha\ (M/Mo-1)] \qquad \text{para } h/R \leq 1.5$$

$$pwo = -1.73 \rho \ddot{u}_o h[y/h-0.50(y/h)^2](\tanh 1.73R/h)\cos Ø$$

$$pbo = -0.87\ \rho \ddot{u}_o\ h\ \frac{\text{senh } 1.73x/h}{\cosh 1.73R/h}$$

$$Po = \pi R^2 h \rho \ddot{u}_o \frac{\tanh 1.73\ R/h}{1.73\ R/h} = \frac{W}{g} \ddot{u}_o \frac{\tanh 1.73R/h}{1.73\ R/h}$$

$$M1 = \frac{0.72 \tanh 1.84\ h/R}{1.84\ h/R} M$$

$$h1 = h[1-0.21\ M/M1\ (R/h)^2+0.558\,(r/h)\sqrt{0.15(R/h\ M/M1)^2-1}]$$

$$k1 = \frac{4.75gM1^2h}{MR^2} = M1W1^2$$

$$(W1)^2 = 1.84(g/R)\tanh(1.84h/R)$$

$$pw1 = 0.61\rho R^2 \Theta h W1^2[(\frac{\cosh 1.84y/R}{\text{senh}(1.84h/R)})\ (1 - \frac{\cos^2 Ø}{3} - \frac{\text{sen}^2 Ø}{4})\ \cos Ø]\ \text{sen } W1t$$

$$pb1 = -0.61\ \rho\ R^2[x/R - (1/3)(x/R)^3 - (1/4)(x/R)(Z/R)^2].$$

$$.[\frac{W1^2\ \Theta h}{\text{senh} 1.84\ h/R} - \text{sen } W1t]$$

$$P1 = \frac{12}{11} M1g\Theta h \; senW1t$$

$$X1 = A1 \; sen \; W1t$$

$$\ddot{X}1 = -W1^2 A1senW1t = -\dot{U}o \; sen \; W1t$$

$$F1 = -M1W1^2 A1senW1t = -M1\dot{U}osenW1t$$

$$A1 = \frac{\dot{U}o}{W1^2}$$

$$A1 = \frac{R\Theta h}{1.69 + W1h1.84h/R}$$

$$P1 = F1 \; max/2$$

$$d1 = \eta X1 \quad \text{para } d1 < 0.2R$$

$$\eta = \frac{0.69(k1R/M1g)}{1-0.92(x1/R)/k1R/M1g)^2}$$

$\alpha = 1.3$, $\beta = 2.0$ (incluye efectos de presión en el fondo)

$\alpha = 0$, $\beta = 1.0$ (solo efectos de presión sobre paredes)

M = Masa de agua total dentro del recipiente.

Mo = Masa de agua impulsiva (provoca la fuerza total impulsiva sobre las paredes del recipiente).

M1 = Masa de agua convectiva (provoca la fuerza total convectiva sobre las paredes del recipiente, 2P1).

h = Altura del agua en un tanque.

ho = Posición de la fuerza impulsiva resultante sobre la pared del recipiente, se mide arriba del fondo (posición de la masa Mo)

h1 = Posición de la fuerza convectiva resultante sobre la pared del recipiente, se mide sobre el fondo. (posición de la masa M1).

R = Radio del tanque.

R1 = Rigidez del resorte imaginario que une la masa M1 + la masa del recipiente.

Pwo = Presión dinamica impulsiva sobre la pared del tanque.

Pbo = Presión dinámica impulsiva sobre el fondo del tanque.

Po = Fuerza dinámica impulsiva horizontal total debida al líquido sobre una pared del recipiente.

ρ = Masa específica.

$\ddot{U}o$ = Aceleración del tanque superficial o de la estructura provocada por un movimiento terrestre.

ω_1 = Frecuencia natural de vibración del líquido en su modo fundamental (frecuencia de vibración de la masa M1)

pw1 = Presión dinámica convectiva debida al líquido sobre la pared del recipiente.

t = Tiempo.

pb1 = Presión dinámica convectiva sobre el fondo del recipiente.

y = Distancia vertical de la superficie del tanque a la elevación en cuestión.

x = Distancia horizontal del centro del tanque a las paredes del tanque.

P_1 = Fuerza dinámica impulsiva horizontal debido al líquido sobre una pared del recipiente.

h = Desplazamiento angular de la superficie del líquido.

X_1 = Desplazamiento horizontal de la masa M_1 con respecto al tiempo en tanques superficiales.

X_1 = Aceleración horizontal convectiva de la masa M_1 con respecto al tiempo en tanques superficiales.

A_1 = Amplitud del desplazamiento de la masa M_1

F_1 = Fuerza convectiva sobre las paredes del tanque variable con el tiempo.

d_1 = Altura del líquido sobre el plano $y=h$ que se levanta por el oleaje, en el primer modo de vibrar.

n = Factor de cálculo de d_1.

d_{max}= Amplitud de las superficies de agua respecto a su posición horizontal.

T E M A 5

CONSIDERACIONES PARA EL DISEÑO DE TANQUES CIRULARES.

5.1 TANQUES DE CONCRETO REFORZADO.

5.1.1 ALCANCE.

Estas recomendaciones incluyen el diseño estructural de tanques de concreto.

5.1.2 CRITERIO GENERAL DE DISEÑO.

Los tanques de concreto reforzado se diseñaran suponiendo comportamiento elástico. Las paredes y el fondo se dimensionarán sobre la base de esfuerzos admisibles en condiciones de servicio como se muestra en la tabla I. Las estructuras de soporte pueden dimensionarse por resistencia y servicio de acuerdo al reglamento de construcciones vigentes.

TABLA I. Esfuerzos admisibles en condiciones de servicio, en paredes y fondo (kg / cm^2)*.

T A B L A I

	kg/cm^2
Concreto	
Tensión directa	20
Flexión	
Fibra extrema en com - presión	95
Esfuezo cortante (como medida de la tensión diagonal)	
Vigas y nervaduras sin refuerzo transversal	4
Vigas y nervaduras con refuerzo transversa l - (esfuerzo medio en la- sección)	20
En losas y zapatas al- rededor de cargas o - reacciones concetradas	7
Acero de refuerzo ***	
Miembros a tensión di- recta	950

	kg/cm^2
Tensión por Flexión	
Refuerzo adyacente a - la cara en contacto - con el líquido	1100
Refuerzo adyacente a la cara que no esta en contacto con el líquido.	
Si el espesor del elemento es por lo menos de 30 cm.	1400
Si el espesor de elemento es menor de - 30 cm.	1100

* Bajo la combinación de carga muerta, viva y sismo o viento, los esfuerzos admisibles pueden incrementarse 25%.

** Estos valores se aplican independientemente de f'c, valor que no debe ser menor de 250 kg/cm^2.

*** Estos valores se aplican independientemente del grado del acero, el cuál no debe ser menor que el 30 (fy = 3000 kg/cm^2).

5.1.3 CONCRETO.

El proporcionamiento del concreto de las paredes y del fondo de un tanque debe dar lugar a una mezcla bien graduada, de alta densidad y máxima trabajabilidad. La resistencia especificada a los 28 días, f'c, no debe ser menor de 250 kg/cm^2. Se recomienda usar un aditivo inclusor de aire.

5.1.4 REFUERZO POR CAMBIOS VOLUMETRICOS.

A menos que se justifique el uso de cantidades menores, el refuerzo por cambios volumetricos debe cumplir con los requisitos siguientes

Losas y muros estructurales. Se revisará que en cada cara y en cada una de dos direcciones normales entre sí el area de refuerzo, incluyendo el de flexión, sea por lo menos 0.0020 veces el área bruta de la sección transversal de losa o muro.

5.1.4 RECOMENDACIONES GENERALES.

El espesor, h, de la pared se determinará de manera que bajo la tensión horizontal máxima, e incluyendo el efecto de la contracción, el esfuerzo horizontal de tensión en el concreto, suponiendo sección transformada no agrietada, no exceda del valor admisible, fct = 20 kg/cm^2.

Se puede aplicar la expresión siguiente:

$$h = \frac{C\,Es + fs - nfct}{100\,fs\,fct}\,Tm$$

Donde:

C Deformación unitaria del concreto por contracción (puede tomarse igual a 0.0003)

Es Módulo de elasticidad del acero, en kg/cm^2

fs Esfuerzo admisible en el acero en kg/cm^2

n Es/Ec

Tm Tensión máxima por metro de alto en kg.

El espesor resulta en cm.

El refuerzo horizontal constara de barras en forma de anillos, y se dimensionará para que tome la tensión horizontal total trabajando al esfuerzo admisible, fs, y suponiendo agrietado el concreto. Si T y As son la tensión y el area de refuerzo por metro de alto, se tiene:

$$As = T/fs$$

El refuerzo horizontal se colocará en dos capas próximas a las caras de las paredes del tanque ,y su cuantía podra variar con la altura, de acuerdo con la variación de la tensión horizontal. Los traslapes de los distintos anillos deben quedar lo mas lejanos posible unos de otros.

5.2 TANQUES DE ACERO.

5.2.1 CRITERIO GENERAL DE DISEÑO.

Los esfuerzos obtenidos de las acciones a que están sujetos los tanques de almacenamiento se determinarán por metodos elástico, y se compararán con los esfuerzos permisibles que a continuación se presentan.

5.2.2 ESFUERZOS PERMISIBLES.

Todas las partes de la estructura se dimensionarán de tal manera que la suma de los esfuerzos máximos debidos a cargas estáticas no exceda de los siguientes valores en kg/cm^2.

a.1) TENSION

En la sección neta de piezas de acero laminado.

$$Ft = 0.60 \quad Fy$$

pero sin exceder 0.5 veces la resistencia mínima a tensión del acero.

a.1.1) COMPRESION.

En la sección total de los miembros cargados axialmente.

para $kl/r \leq Cc$

$$Fa = \frac{\left(1 - \frac{(kl/r)^2}{2Cc^2}\right) Fy\ Y}{5/3 + 3(kl/r)/8Cc - (kl/r)^3/8Cc^3}$$

para $kl/r > Cc$

$$Fa = \frac{10480000\ Y}{(kl/r)^2}$$

En las que :

kl/r Relación de esbeltez efectiva máxima del segmento sin arriostramiento que se este diseñando

r Radio de giro mínimo del miembro en cm.

k Factor de longitud efectiva de pandeo.

L Longitud del tramo de columna sin arriostramiento, en cm.

Fy Esfuerzo de fluencia mínimo especificado según el tipo de acero usado, en kg/cm^2.

Y 1.0 (para secciones estructurales o secciones tubulares con valores de t/R o mayores que 0.015).

$$Y = \left[\frac{200}{3}(t/R)\right]\left[2 - \frac{200}{3}(t/R)\right]$$ (para secciones tubulares que tienen valores de t/R menores que 0.15)

t Espesor de la pared de la sección tubular, en cm (63 mm como mínimo para miembros principales, y 4.8 mm como mínimo para contravientos y miembros secundarios).

R Radio exterior de la sección tubular, en cm.

$$Cc = \sqrt{2\pi^2 E/Fy}$$

E Módulo de elasticidad del acero (2,000,000 kg/cm^2)

Para miembros principales, la relación kl/r no excederá de 180.

Para contravientos y miembros secundarios, la relación kl/r no excederá de 200 .

a.2) FLEXION.

a.2.1) La tensión y compresión en las fibras extremas de perfiles laminados compactos y miembros compuestos compactos, que tienen sus ejes de simetría en el plano de la carga, no excederá de

$$Fb = 0.66\ Fy$$

Para poder considerar una sección como compacta, debe cumplir las siguientes condiciones:

1.- Los patines deberán conectarse al alma o almas de una manera continua.

2.- La relación ancho - espesor de los elementos salientes no rigidizados del patín de compresión, como se define en la fracción a.8), no debe exceder de $545/\sqrt{fy}$

3.- La relación ancho - espesor de los elementos rigidizados del patín de compresión no debe exceder de $1600/\sqrt{Fy}$

4.- La relación peralte - espesor del alma o almas no debe exceder el valor dado por la fórmula que sea aplicable de las dos siguientes:

$d/t = (5365/\sqrt{Fy})(1-3.74\ fa/Fy)$, cuando $fa/Fy < 0.16$

$d/t = 2155/\sqrt{Fy}$, cuando $fa/Fy \geq 0.16$

Donde fa es el esfuerzo axial actuante, en kg / cm^2

5.- El patin de compresión deberá estar soportado lateralmente a intervalos que no excedan de $637\ b_f / \sqrt{Fy}$, ni de $1400\ 000\ Af\ /dFy$.

En estas expresiones b_f es el ancho del patín de una viga laminada o una trabe de alma llena, en cm, y Af el area del patín a compresión, en cm^2.

6.- La longitud lateral no soportada del patín a compresión de un miembro tipo cajón de sección transversal rectangular, tal que su peralte no sea mayor de 6 veces el ancho y cuyo espesor del patín no sea mayor de 2 veces el espesor del alma, no debe exceder el valor.

$$(1.37 \times 10^{5} + 8.437 \times 10^{4} \; M1/M2)(b/Fy) >= 84370 \; b / Fy$$

Donde b, en cm, es el ancho del patín a compresión no soportado, los momentos M1 y M2 se definen en la fracción a.2.6

Las vigas y trabes que cumplen con los 6 requisitos anteriores y son continuas sobre soportes o están rígidamente unidas a columnas por medio de remaches o soldaduras, pueden diseñarse para 9/10 de los momentos negativos producidos por las cargas de gravedad, los cuales son máximos en los puntos de apoyo, siempre que los momentos máximos positivos se les aumente la décima parte del promedio de los momentos negativos. Esta reducción no se aplica a momentos producidos por cargas en voladizos. Si el momento negativo es absorvido por una columna rígidamente unida a la viga o trabe, el décimo de reducción puede aplicarse al dimensonar dicha columna por flexocompresión, con tal que el esfuerzo fa, debido a la mayor carga axial que pueda actuar en el elemento, no exceda de 0.15 Fa.

a.2.2) Miembros que cumplen con los requisitos de las secciones compactas, excepto que $b_f / 2t_f$ excede de $545 / \sqrt{Fy}$ pero es menor que $800 / \sqrt{Fy}$, pueden diseñarse con el siguiente esfuerzo permisible.

$$F_b = F_y(0.79 - 0.000238\,(b_f/2t_f)\sqrt{F_y})$$

a.2.3) La tensión y compresión enlas fibras extremas de perfiles I y H con 2 ejes de simetría, que cumplen con los requisitos 1 y 2 de las secciones compactas y se flexionan alrededor de su eje de menor momento de inercia, de barras soldadas que se flexionan alrededor de su eje de menor momento de inercia, no excederán de:

$$F_b = 0.75\,F_y$$

Los miembros I y H con dos ejes de simetría, que se flexionan alrededor de su eje de menor momento de inercia y que cumplen con el requisito 1 de las secciones compactas, y donde $b_f / 2t_f$ excede de $545/\sqrt{F_y}$ pero es menor que $800/\sqrt{F_y}$ pueden diseñarse con el siguiente esfuerzo permisible.

$$F_b = F_y\,(1.075 - 0.000596\,(b_f / 2t_f)\,\sqrt{F_y})$$

a.2.4) La tensión y compresión admisibles en fibras extremas de miembros tipo cajón y miembros a flexión cuyo patín a compresión,o relación ancho - espesor del alma no cumple con los requisitos de las secciones compactas, pero sí con los de la fraccion a.8) no excederá de :

$$F_b = 0.60\,F_y$$

a.2.5) La tensión admisible en fibras extremas de miembros a flexión no cubiertos en los parrafos de "flexión" anteriores a este, será:

$$Fb = 0.60\ Fy$$

a.2.6) La compresión admisible en fibras extremas de miembros a flexión incluidos en el parrafo anterior, cumplen con los requisitos de la fraccion a.8) y tienen la carga y un eje de simetría en el plano de su alma, así como la compresión en fibras extremas de canales* cuando se flexionan alrededor de su eje de mayor momento de inercia, sera el mayor.

* La fórmula I.32 es aplicable solo a canales de los valores calculados con las formulas I.30 , I.31 y I.32 pero sin exceder de 0.60 Fy.

Cuando $\sqrt{7.172\times10^{6}\ Cb/Fy} \le L/r_T \sqrt{3.58\times30^{7}\ Cb/Fy}$

$$Fb = \left[2/3 - \frac{Fy\ (L/rT)^2}{107.57\times10^{6}\ Cb}\right] Fy \qquad (I.30)$$

Cuando $L/rT \ge \sqrt{3.58\times10^{7}\ Cb/Fy}$

$$Fb = \frac{11.953\times10^{6}\ Cb}{(L/rT)^2} \qquad (I.31)$$

O bien cuando el patín a compresión es sólido y aproximadamente rectangular en su sección transversal y tiene un area mayor o igual que la del patín en tensión.

$$Fb = 843700\ Cb\ /\ (Ld/Af) \qquad (I.32)$$

En estas expresiones:

L Distancia entre secciones transversales cuyo patín a compresión esta soportado lateralmente. Para miembros en voladizo arriostrados contra el pandeo lateral tan sólo en el apoyo, L puede considerarse conservadoramente igual a la longitud real.

r_t Radio de giro con respecto al eje en el plano del alma, de una porción que comprende el patín en compresión mas 1/3 del alma

Af Area del patín a compresión.

$C = 1.75+1.05(M1/M2) + 0.3(M1/M2)^2$ sin exceder de 2.3.En esta expresión M1 es el menor y M2 el mayor de los momentos en los extremos de la longitud sin arriostrar, tomados alrededor del eje de mayor momento de inercia; la relación de los momentos extremos, M1/M2 se tomará como la unidad cuando el momento flexionante dentro de la longitud no arriostrada sea mayor que los de cada extremo.

a.2.7) La compresión admisible en fibras extremas de miembros a flexión incluidos en la fracción a.2.5) y que cumplen con los requisitos de la fracción a.8) pero que no estan incluidos en a.2.6) será:

$$Fb = 0.60\ Fy$$

Siempre y cuando las secciones se flexionen alrededor de su eje de mayor momento de inercia y esten soportadas lateralmente en la región de esfuerzos de compresión a intervalos que no excedan de $637\ b_f / \sqrt{Fy}$.

a.3) FLEXOCOMPRESION.

Cuando los miembros estan sujetos a una combinacion de esfuerzos de flexión y compresion axial, deberan diseñarse cumpliendo los siguientes requisitos:

$$fa/Fa + \frac{Cmxfbx}{(1-fa/F'ex)Fbx} + \frac{Cmy\ fby}{(1-fa/F'e\ y)Fby} \leq 1.0 \quad (I.33)$$

$$fa/0.6Fy + fbx/Fbx + fby/Fby \leq 10 \quad (I.34)$$

Cuando fa/ Fa <= 0.15 la formula I.35 puede usarse en lugar de las formulas I.33 y I.34

$$fa/Fa + fbx/Fbx + fby/Fby \leq 1.0 \quad (I.35)$$

En las formulas I.33,I.34 y I.35, los subindices X y Y, combinados con el subindice b,m o e, indican el eje de flexión alrededor del cual se aplica un esfuerzo particular o una propiedad de diseño, Y.

Fa Esfuerzo axial permisible si solamente existiera carga axial.

Fb Esfuerzo permisible de compresión por flexión, si solamente existiera flexión.

$Fe' = 10480000 / (RL_b / r_b)^2$ (Donde Lb es la longitud real sin arriostramiento en el plano de la flexión, r_b es el radio de giro correspondiente y k es el factor de longitud efectiva en el plano de la flexión)

Cm Coeficiente cuyo valor puede considerarse como sigue:

1.- Para miembros en compresión, sujetos a traslación lateral de sus extremos, Cm = 0.83

2.- Para miembros en compresión con sus extremos restringidos lateralmente, sin estar sujetos a cargas transversales entre sus apoyos en el plano de flexión:

$$Cm = 0.6-0.4(M1/M2) \text{ (pero no menor que 0.4)}$$

Donde M1 /M2 es la relación del menor al mayor de los momentos extremos de la porción del miembro sin arriostrar, en el plano de flexión considerado. La relación M1/M2 es positiva cuando el miembro se flexiona con curvatura doble y negativa cuando lo hace con curvatura simple.

3.- Para miembros en compresión con sus extremos restringidos lateralmente y sujetos a cargas transversales entre sus apoyos, el valor de Cm puede determinarse por un análisis racional; sin embargo, en lugar de dicho análisis, pueden aplicarse los siguientes valores Cm = 0.85 para miembros cuyos extremos estan restringidos angularmente, y Cm = 1.0 en caso contrario.

a.4) CORTANTE.

Esfuerzos cortantes en el área de la garganta de soldaduras de filete cualquiera que sea la dirección de aplicación de la carga, cortante en el area efectiva de soldaduras de penetración completa y esfuerzos cortantes en el area efectiva de soldaduras de tapón o de ranuras.
0.30 x (resistencia nominal a tensión del metal de la soldadura) sin que el esfuerzo en el metal base exceda de 0.4 x (esfuerzo de fluencia del metal base).

El esfuerzo cortante medio en el alma de los elementos de seccion I . laminados o formados por placas soldadas en los que la relación entre el peralte del alma y su grueso no exceda de 3700 / $\sqrt{fy}$, no sera mayor que 0.40 fy. Los patines, el esfuerzo cortante medio se calculará dividiendo la fuerza cortante entre el producto del peralte total de la seccion por el grueso del alma.

a.5) TENSION AXIAL Y FLEXION.

Los pernos sujetos a una combinación de esfuerzos cortantes y de tensión debidos a fuerzas aplicadas en las partes conectadas, deberan diseñarse de tal manera que los esfuerzos de tensión producidos por las fuerzas no excedan los valores siguientes, en kg/cm^2 :

Para pernos de acero A307	Ft = 1970-1.6 fv <= 1400
Para pernos de acero A325 y A449	Ft = 3515-1.6fv<=2800
Para pernos de acero A490	Ft = 4290-1.6fv<= 3800

Donde fv, en kg/cm^2, es el esfuerzo cortante actuante, el cual no debe exceder de los siguientes valores:

Para pernos de acero A307	700
Para pernos de acero A325 y A449	1050
para pernos de acero A490	1400

a.6) PERNOS DE ANCLAJE.

Los pernos de anclaje que se utilizan para transmitir las cargas a los cimientos, se diseñaran para resistir todas las posibles condiciones de tensión y corte en las bases de las columnas, incluyendo la tensión resultante del moment o originado por el empotramiento o semiempotramiento de la columna.

a.7) RELACIONES DE ESPELTEZ.

La relacion de esbeltez, kl/r, para miembros en compresion no debe exceder de 200.

La relación de esbeltez, kl/r, para miembros a tensión excepto varillas, de preferencia no deberá exceder de 240 en miembros principales, ni de 300 en contravientos y otros miembros secundarios.

a.8) RELACIONES ANCHO - ESPESOR.

Los elementos que sobresalen de miembros sujetos a compresión axial, a compresión debida a flexión, tendrán relaciones no mayores que las siguientes:

En puntales formados por ángulos simples o dobles con separadores -----------	$640/\sqrt{Fy}$
En puntales formados por ángulos dobles en contacto; en ángulos - o placas que sobresalen de tra - bes, columnas u otros miembros - en compresión; en patines de vi- gas y atiezadores de trabes ar - madas -----------	$800/\sqrt{Fy}$
En almas de "Tes" -----------	$1060/\sqrt{Fy}$

El ancho de las placas debe tomarse del borde libre a la primera hilera de remaches, tornillos o soldadura. Para el ancho de los patines de los angulos, canales, zetas y almas de las "Tes", debera tomarse la dimensión total nominal.

Para el de los patines de vigas y "Tes" se tomará la mitad del ancho nominal. El espesor de un patín con pendiente debe medirse a la mitad de la distancia entre el canto libre y la cara correspondiente del alma.

a.9) ESFUERZOS PERMISIBLES BAJO LA COMBINACION DE CARGAS MUERTAS, VIVAS Y ACCIDENTALES.

Los esfuerzos permisibles especificados pueden aumentarse en un 25% cuando son originados por el viento o sismo en combinación con las cargas muertas y vivas.

T E M A 6

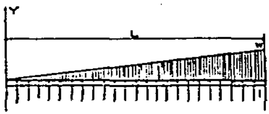
PROYECTO DE UN TANQUE CILINDRICO DE CONCRETO CON LAS SIGUIENTES DIMENSIONES:

Radio = 9.00 mts.

Altura= 7.00 mts.

Este tanque será llenado con agua con un peso específico de γ = 1 ton/m3.

Para el análisis de los muros del tanque consideraremos el muro en cantiliver aplicando los principios del tema 2 inciso 2.6.



$Y(0) = Yo/EI$

$Y'(0) = Co/EI$

$Y''(0) = 0$

$Y'''(0) = 0$

$Y(L) = 0$

$Y'(L) = 0$

$Y''(L) = M1/EI$

$Y'''(L) = V1/EI$

Las ecuaciones generales para calcular flechas, momentos y cortantes son las siguientes:

$$Y = Co/2\beta EI(szchz+czshz)+Yo/EI\ czchz - W/8L\beta^5 EI(szchz+czshz-2\beta z)$$

$$M = EY'' = -Co\ (szchz-czshz)-Yo2\beta^2\ (szshz)+W/4L\beta^3\ (szchz-czshz)$$

$$Q = EIQ''' = -Co2\beta^2\ (szshz)-Yo2\beta^3\ (szchz+czshz)+W/2L\beta^2\ (szshz)$$

$$Co = \frac{W}{4L\beta^4}\ \frac{(chL-cL)^2 + 2\beta L(cLshL-sLchL)}{(ch^2 L+c^2 L)}$$

$$Yo = \frac{W}{4L^5}\ \frac{chL(sL-s\beta LcL)+cLshL}{ch^2 L+c^2 L}$$

En la que:

$$\beta = \sqrt[4]{(1-\mu^2)}\ \ 1/\sqrt{Rt}$$

t = Espesor del muro = 0.35m

ν = Coeficiente de Poisson = 0.25

$W = \gamma h$ = 1'7 = 7 ton/m2 por metro de ancho.

$K = Et/R^2$

E = Módulo de elasticidad del concreto.

E = 200,000 kg/cm2 = 20000t/m2

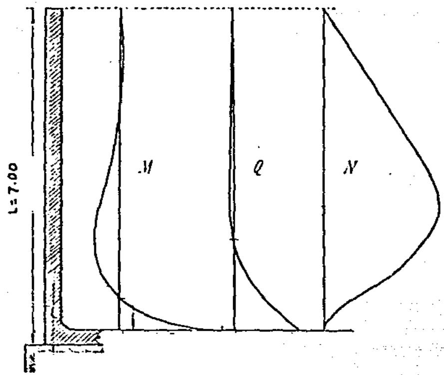
R = Radio en metros = 9.00

L = 7.00m

N = -kgR

Aplicando estas ecuaciones obtenemos los siguientes valores:

SECCION	M EN TON-M	Q TON	N TON
1	-5.28667	-8.653	0
2	-0.83981	-4.253	9.451
3	1.02335	-1.337	24.537
4	1.37291	0.131	34.831
5	1.0684	0.617	38.086
6	0.62613	0.595	35.696
7	0.27641	0.393	29.921
8	0.07548	0.188	22.605
9	0	0.047	14.830
10	0.00944	-0.014	7.038
11	0	0	0



D I S E Ñ O   D E L   M U R O

$$h = \frac{CEs + fs - nfct}{100fs\ fct}\ Tm$$

C = 0.0003

Es= 2000 000 Kg/cm2

fs=1400 kg/cm2

fct=20kg/cm2

n= Es/Ec = 10

Tm= 38086 Kg

$$h = \frac{0.0003 * 2000,000 + 1400 - 10 * 20}{100 * 1400 * 20} * 38086 = 24.480 \text{ cm}$$

Usando concreto de f'c = 250 Kg/cm2 y Acero de fy = 4200 Kg/cm2, fs = 1400 Kg/cm2 fc = 95 Kg/cm2, Elásticamente:

$$k = \frac{1}{1 + \frac{fs}{nfc}}$$

$$k = \frac{1}{1 + \frac{1400}{10*25}} = 0.404$$

$$j = 1-k/3 = 0.865$$

$$K = 1/2\ fckj = 1/2*95*0.404*0.865 = 16.6 \text{ Kg/cm2}$$

$$d = \sqrt{\frac{M}{kb}}$$

M = 528667 kgcm b = 100 k= 16.6

$$d = \sqrt{\frac{528667}{16.6*100}} = 17.84 \text{ cm}$$

RECUBRIMIENTO = 7 cm

h = 18+7 = 25 cm

Como el espesor mínimo del muro es de 30 cm, tomaremos h=35 cm.

$d = 35-7 = 28$ cm

$$As = \frac{M}{fsjd} = \frac{M(\text{en ton-m})*100000}{1400*0.865*28} = 2.949156\ M(\text{ton-m})$$

$$v = \frac{V}{bd} = \frac{8653}{100*28} = 3.09\ Kg/cm2 < 4kg/cm2$$

Vpermisible = 4 kg/cm2

SECCION	M(ton-m)	As(cm2)	Separación diam 5/8"
1	-5.28667	15.59	13
2	-0.93981	2.77	26
3	1.02335	3.02	26
4	1.37291	4.05	26
5	1.06840	3.15	26
6	0.62618	1.85	26
7	0.27641	0.82	26
8	0.07548	0.22	26
9	0.0	0.0	26
10	0.009440	0.03	26
11	0.0	0.0	26

La separación de las varillas usando de 5/8" diam.

$$Sep = \frac{100as}{As} = \frac{197.83}{As}$$

$$Ast = 0.002\, b*h = 0.002*100*35 = 7 \text{ cm2}$$

$$\text{Separación con varillas de } 5/8" = \frac{197.83}{7} = 28 \text{ cm}$$

Areas de acero para fuerza normal.

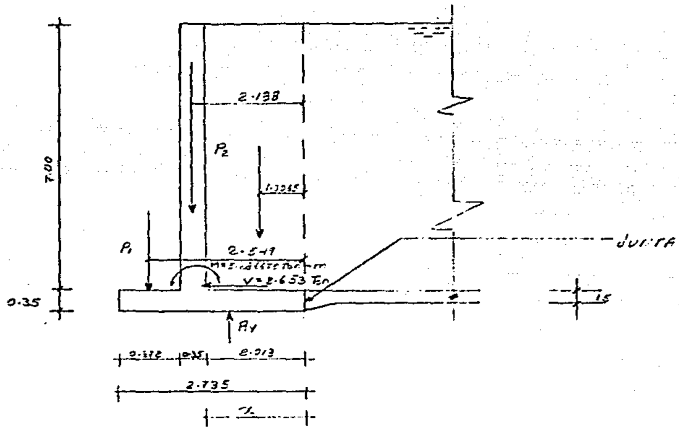
$$As = \frac{N*1000}{1400} = 0.714286*N(ton)$$

SECCION	N(TON)	As(cm2)	SEPARACION diam.5/8"
1	0.0	0.0	28
2	9.451	6.75	28
3	24.537	17.53	22
4	34.831	24.88	16
5	38.086	27.20	15
6	35.696	25.50	15
7	29.921	21.37	18
8	22.605	16.15	24
9	14.830	10.59	28
10	7.083	5.03	28
11	0.0	0.0	28

NOTA: La separación de las secciones 3 a la 8 es de 14 cm.

Análisis de la zapata del Muro.

La zapata del muro del tanque se encuentra en las siguientes condiciones.



P1 = 0.372*0.35*2.4*1.0 = 0.312 ton

P2 = 7.35*0.35*2.4*1.0 = 6.174 ton

P3 = 7*2.013+2.013*0.35*2.4 = 15.782 ton

Rx = 22.268 ton

Σ Mo = 0

15.782*1.0065+6.174*2.188+0.312*2.549+8.65*0.35+5.286675-22.268X = 0

X = 1.729

$$\text{Excentricidad} = 1.729 - \frac{2.735}{2} = 0.362$$

Esfuerzos:

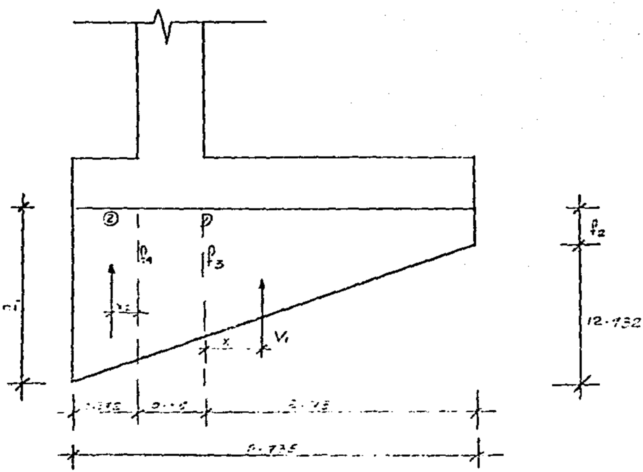
$$f = \frac{P}{A} \pm \frac{6RvE}{L2}$$

$$f = \frac{22.268}{2.735} \pm \frac{6*22.268*0.362}{2.735^{2}}$$

$$f = 8.142 \pm 6.466$$

$$f1 = 14.608\ T/m2 < 15\ T/m2$$

$$f2 = 1.676\ T/m2$$



$$f3 = 1.676 + \frac{12.932}{2.735} * 2.013 = 11.194 \text{ T/m2}$$

$$f4 = 1.676 + \frac{12.932}{2.735} * 2.365 = 12.858 \text{ T/m2}$$

$$V1 = 2.013 \left(\frac{1.676+11.194}{2} \right) = 12.954 \text{ Ton}$$

$$X1 = \frac{2.013}{3} \left(\frac{2*1.676+11.194}{1.676+11.194} \right) = 1.130 \text{ m}$$

$$X2 = 0.372 \left(\frac{14.608+12.858}{2} \right) = 5.109 \text{ Ton}$$

$$X2 = \frac{0.372}{3} \left(\frac{2*14.608+12.858}{14.608 + 12.858} \right) = 0.190$$

$$M1 = 12.954*1.130 - \frac{7*2.013^2}{2} - 0.35*2.4*\frac{2.013^2}{2} =$$

$$M1 = -1.246 \text{ Ton.m}$$

$$M2 = 5.109*0.190-2.4*0.35*\frac{0.372^2}{2} =$$

$$M2 = 0.913 \text{ Ton.m}$$

DISEÑO DE LA ZAPATA

Para Lado 1

$$V = \frac{12954}{100*28} = 4.62 \text{ Kg/cm2} = 4.6$$

$$Vperm = 0.29\sqrt{f'c} = 0.29*\sqrt{250} = 4.6$$

$$As = \frac{M}{fsjd} = \frac{124600}{1400*0.865*28} = 3.67 \text{ cm2}$$

$$Ast = 0.002*35*100 = 7 \text{ cm2}$$

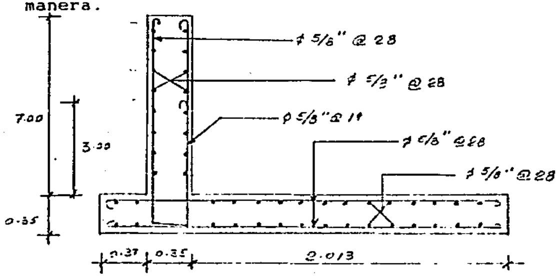
$$Sep\ \phi\ 5/8 = \frac{197.86}{7} = 28 \text{ CM.}$$

Para lado 2

Se usará la separación de Ast

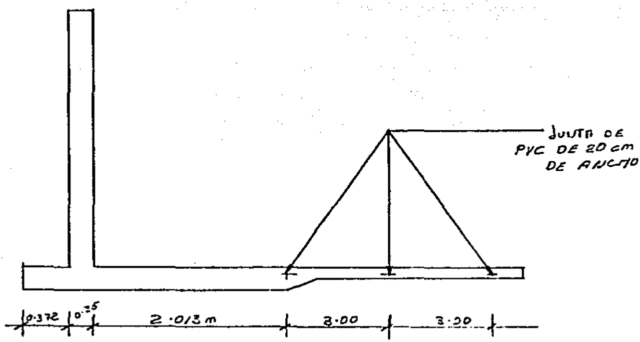
ϕ 5/8" a 28 cm.

Por lo que el armado del muro queda de la siguiente manera.



Las losas de fondo interiores trabajan a pura compresión y se pondrán con un espesor de 15 cm. y con un armado de 1/2" de diametro a @ 30.

Estas losas se harán de cuadros de 3m. * 3m. poniendo una junta de P.V.C. de 20cm. de ancho perimetralmente como se indica a continuación.



Con esto quedaría terminado el proyecto de un tanque cilíndrico de concreto con radio de 9.00m y que contendrá agua.

C O N C L U S I O N E S

Con este estudio se presentan las soluciones para el análisis de cascarones cilíndricos de revolución con cargas axisimétricas, a este tipo de estructuras pertenecen los tanques circulares para almacenamiento, ya sean a nivel de terreno o elevados sin tapa o cubiertos. También pertenecen a este tipo los domos y cascarones cónicos.

Los muros cilíndricos de tanques circularse de sección variable se pueden considerar dentro del alcance de este trabajo.

El procedimiento de cálculo para tanques circulares con muros de sección constante, es por analogía con la viga sobre cimentación elástica.

Para resolver el problema de un tanque con pared de sección variable o el caso de domos y cascarones cónicos se recurre al método de las rigideces discretizandolo de una manera adecuada.

El método de las rigideces comprende los métodos matriciales que hacen más sistemática la solución, proporcionan una forma compacta de presentacion y son idealmente adecuados para la programación por computadora, por la complejidad del problema conviene programar la solución para obtener soluciones rápidas.

B I B L I O G R A F I A

BEAMS ON ELASTIC FOUNDATION ----------- HETENY

CIRCULAR STORAGE TANKS AND SILOS ----------- A. GHALI

ELEMENTOS DE RESISTENCIA DE MATERIALES ---------- S. TIMOSHENKO

INTRODUCCION AL ANALISIS ESTRUCTURAL CON MATRICES ---------- HAYRETTIN K.

ANALISIS DE ESTRUCTURAS RETICULARES ---------- JAMES M.GERE
WILLIAM WEAVER JR.

COMPUTER ANALYSIS OF STRUCTURAL FRAMEWORKS ---------- JAMES A. D BALFOUR

FUNDAMENTOS DE INENIERIA SISMICA ---------- E. ROSENBLUETH
N.M. NEWMARK