01168

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

PROGRAMACION LINEAL Y ENTERA CON **LINDO**

LA PROGRAMACION MATEMATICA SE HA CONVERTIDO EN UNA HERRAMIENTA MUY UTIL PARA RESOLVER ALGUNOS PROBLEMAS DE PLANEACION Y OPERACION DE SISTEMAS. SU APLICACION INDUCE ALTERNATIVAS QUE PERMITEN HACER UN USO MAS RACIONAL DE LOS RECURSOS MEJORANDO, ASI, LOS BENEFICIOS TANTO PROPIOS COMO LOS DE LA SOCIEDAD.

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN INGENIERIA
(INVESTIGACION DE OPERACIONES)

PRESENTA
FRANCISCO MARTINEZ ALLENDE

1990

consideraciones

tesis: PROGRAMACION LINEAL Y ENTERA CON LINDO
(LINEAR, INTERACTIVE DISCRETE OPTIMIZER)

I. OBJETIVO

CONTAR CON UN DOCUMENTO EN ESPAÑOL EN EL QUE SE PRESENTEN, DE MANERA ACCESIBLE, LOS PRINCIPALES ASPECTOS DE LA PROGRAMACION LINEAL; EL USO DEL PAQUETE LINDO; Y UN CONJUNTO DE PROBLEMAS EN LOS QUE SE ANALICEN LA FORMULACION DEL MODELO, LA SOLUCION MEDIANTE LINDO, Y LA INTERPRETACION DE LOS RESULTADOS. DANDO ENFASIS AL CARACTER ECONOMICO DE LOS MISMOS.

II. MOTIVACION

SENTIR LA NECESIDAD, EN LA PRACTICA Y EN LA DOCENCIA, DE UN MANUAL DE CONSULTA QUE COADYUVE AL APRENDIZAJE Y PRACTICA DE LA PROGRAMACION LINEAL.

III. BENEFICIOS ACADEMICOS

OBRA DE CONSULTA EN CURSOS DE PROGRAMACION LINEAL.

MANUAL DE MODELOS LINEALES PARA PROFESIONALES EN PLANEACION E INVESTIGACION DE OPERACIONES.

IV. CARACTERISTICAS

1. SIMPLICIDAD EN SU APLICACION. CON POCOS COMANDOS SE RESUELVE UN PROBLEMA DE PROGRAMACION LINEAL.
2. VERSATILIDAD EN EL FORMATO DE ENTRADA, YA QUE ES SIMILAR A LA ESCRITURA MANUAL DESARROLLADA DE UNA FORMULACION.

3. POSIBILIDAD DE CAPTURAR LOS DATOS MEDIANTE PROCESADOR DE PALABRAS O MEDIANTE UN PROGRAMA EN FORTRAN.
4. EFECTUAR CAMBIOS O MODIFICACIONES BASADOS EN LA SOLUCION O POR ERRORES.
5. COMANDOS ESPECIALES PARA SEGUIR PASO A PASO LA SOLUCION.
6. LA VERSION MAS COMUN PUEDE ACEPTAR HASTA 4500 VARIABLES Y 800 RENGLONES, INCLUYENDO LA FUNCION OBJETIVO.
7. UTILIZA EL METODO SIMPLEX REVISADO EN LA FORMA PRODUCTO DE LA INVERSA.

V. DESVENTAJAS DEL PAQUETE LINDO

1. SE TORNA LENTO EN FORMULACIONES GRANDES. SE REQUIERE COPROCESADOR MATEMATICO.
2. ACTUALMENTE CIRCULA EN EL MEDIO UN NUEVO PAQUETE DE OPTIMIZACION QUE TRABAJA DE MANERA MAS EFICIENTE EN FORMULACIONES GRANDES, EL CUAL SE DENOMINA " GAMS " (GENERAL ALGEBRAIC MODELING SYSTEM). ESTE PAQUETE INTEGRA IDEAS DE LA TEORIA DE BASE DE DATOS RELACIONAL Y LA PROGRAMACION MATEMATICA, DE TAL FORMA QUE PERMITE REPRESENTACIONES ALGEBRAICAS DE MANERA CONCISA.

VI. ESTRUCTURA DEL TRABAJO

CONSTA BASICAMENTE DE DOS MODULOS:
FUNDAMENTOS PARA EL USO DE LA PROGRAMACION LINEAL MEDIANTE EL PAQUETE LINDO, Y UN COMPENDIO DE APLICACIONES.

R E S U M E N

Estas notas constan de tres partes. La primera contiene una descripción de lo que es la programación lineal y sus aspectos conceptuales fundamentales. La segunda se refiere a un compendio de los principales comandos del paquete de computadora LINDO (Linear, INteractive, Discrete Optimizer); el cual es ejecutable en computadoras personales. La tercera contiene un conjunto de aplicaciones reales que comprenden el planteamiento, solución y análisis de resultados de problemas típicos que emergen en diversos campos de la industria y la administración pública y privada.

P R E S E N T A C I O N

En años recientes, la aplicación de la programación lineal se ha convertido en una herramienta importante y muy útil para resolver problemas de planeación y operación de sistemas. Más aún, en la actualidad, debido a las condiciones económicas por las que atraviesa el pais, se deberia tomar como lineamiento general el que los sistemas funcionen de manera satisfactoria, haciendo un uso más racional de los recursos; induciendo y analizando alternativas que permitan mejorar los beneficios tanto propios como los de la sociedad. Precisamente la programación matemática, en general, y la lineal en particular, está enfocada a coadyuvar en la difícil tarea de lograr eficientar los sistemas creados por el hombre.

La realización de estas notas fue motivada, principalmente, por el interés de presentar la teoría y aplicación de la programación lineal de una manera sencilla, y con una interpretación económica en todos sus conceptos. De este modo, este trabajo va dirigido a lectores que se inician en la materia o a aquellos que, habiéndola cursado, sólo requieran consultar. Con esto se habre la posibilidad de incorporar a profesionistas al ámbito de la pequeña y mediana industrias, por ejemplo, o a ciertas áreas de la administración pública. Este enfoque tiene razón de ser en la consideración de que en las grandes empresas y organismos públicos, generalmente se cuenta con recursos para disponer de especialistas que desarrollen estudios sobre la optimación de los sistemas. En cambio en sectores inferiores, su aplicación es casi nula o en todo caso se efectúa con esquemas subjetivos basados sólo en la experiencia. Por supuesto que la práctica anterior no puede ser totalmente rechazada; sino más bien, debe ser complementada con técnicas de este tipo. Ya que es poco frecuente que los problemas se estructuren con un enfoque sistémico, el cual es propio del planteamiento de un programa lineal.

Bajo el supuesto de que a la pequeña y mediana industrias llegan ingenieros con conocimientos básicos de programación lineal, no especialistas en investigación de operaciones, estas notas pueden ser de gran utilidad ya que conjuntan tres aspectos para el análisis, planteamiento y solución de problemas de optimización lineal. El primero se refiere a los conceptos fundamentales. El segundo comprende algunas sugerencias para plantear un programa lineal; así como un número de ejemplos reales en los que se muestra su formulación, y la solución mediante el paquete LINDO(LINEAR, INTERACTIVE,DISCRETE OPTIMIZER). El tercer aspecto trata sobre el manejo, desde el punto de vista usuario, del paquete de computadora LINDO. Dicho paquete aunque resuelve

programas lineales, enteros y cuadráticos, su empleo se refiere exclusivamente a la parte lineal y entera.
Se considera, entonces, que estas notas podrían servir de consulta tanto para alumnos a nivel licenciatura y maestria, como para profesionistas que tengan interés en aplicar estas técnicas en áreas como: producción, asignación de recursos, redes, planeación, competencia, etc., entre otros.

Finalmente, se desea aclarar que el origen de este trabajo se basó totalmenete en el libro " LINEAR, INTEGER AND QUADRATIC PROGRAMMING WITH LINDO ", Linus Schrage, University of Chicago, Edit. The Scientific Press. En algunos casos en donde la descripción de un concepto no era clara, se modificó y aumento con el fin de que fuera más comprensible.

P R O L O G O

De acuerdo con el objetivo principal, estas notas constan basicamente de dos módulos: Fundamentos para el uso de la Programación Lineal mediante el paquete LINDO y Modelos de aplicación. En el primero (I), el capitulo I.1 es de motivación en cuanto a describir "Qué es la Programación Lineal" y los principales supuestos en que se basa; El capitulo I.2 describe, en forma sucinta, las características relevantes del paquete LINDO, así como el empleo de los comandos más útiles para la programación lineal y entera; en la parte final de este primer módulo, capítulos I.3.1 a I.3.10, se analizan los conceptos en la formulación de un modelo lineal y los resultados asociados a su solución, como es el caso del problema "dual", además de presentar algunos tópicos sobre los principales errores en la formulación y cómo evitarios, capitulos I.3.11 a I.3.13.

El segundo módulo, y el más extenso, contiene, primeramente, una descripción muy concreta de los pasos que deben efectuarse para formular y utilizar un modelo de programación lineal, capítulo II.1. Enseguida se presentan los problemas de aplicación real, comenzando con el problema de Producción, capitulo II.2; el de Asignación de Servicios, capítulo II.3; el de Mezclas, capítulo II.4; Planeación Multiperiódica Determinista, capítulo II.5; Modelos de Insumo-Producto, capítulo II.6; Redes, capitulo II.7; Planeación Estocástica, capitulo II.8; Competencia (teoría de juegos), capítulo II.9; Aplicación a la Estadistica, capítulo II.10; Equilibrio Económico, capitulo II.11; y por último, problemas resueltos con programación entera. En todos ellos el esquema de presentación es el siguiente: primero se describe una problemática, después se definen las variables de decisión y se formula el modelo lineal adicionando los comandos para su ejecución y variantes de resultados; por último, se efectúa una interpretación y análisis de los resultados proporcionados por la corrida del paquete LINDO.

CONTENIDO.

II. MODELOS DE APLICACION.

I N T R O D U C C I O N

El mundo ha observado un notable crecimiento en la magnitud y complejidades de las organizaciones desde el advenimiento de la revolución industrial. Una parte integral de este revolucionario cambio ha sido el incremento en la división de la mano de obra y la segmentación de las responsabilidades de administración de las organizaciones, así como la interrelación tanto de sus componentes internos como con otras organizaciones externas.

Los resultados han sido expectaculares. Sin embargo, junto con este desarrollo, esta creciente especialización ha creado nuevos problemas, problemas que se están presentando en muchas organizaciones. Uno de los problemas es cierta tendencia de muchos de los componentes de una organización a crecer relativamente autónomos, con sus propias metas y sistemas de valores perdiendo, en consecuencia, la visión de forma en que sus actividades y objetivos interactúan en su conjunto. Lo mejor para uno de los componentes, con frecuencia puede ir en decremento de otro, de modo que se puede finalizar trabajando con propósitos en conflicto.

Un problema relacionado es aquel en que se incrementa la complejidad y especialización de una organización, y se vuelve cada vez más difícil asignar los recursos disponibles a sus diversas actividades. Estos tipos de problemas y la necesidad de determinar la mejor manera de resolverlos, dió lugar que surgiera la Investigación de Operaciones.

Durante la Segunda Guerra Mundial, las autoridades militares inglesas encargaron a un grupo de científicos el estudio de los problemas estratégicos y tácticos asociados con la defensa aérea, marítima y terrestre del país. El objetivo de este grupo de científicos fue determinar, entre otras cosas, la utilización más efectiva de los recursos militares que eran limitados. Los estudios realizados incluyeron el uso eficiente del recien inventado radar, y la eficiencia de nuevos tipos de bombas, así como la minimización del tiempo de búsqueda del enemigo. El nombre de Investigación de Operaciones aparentemente se debe a que el equipo de científicos trató con investigación de operaciones militares. Por medio de esta actividad se trató de determinar la evaluación de un equipo o arma para descubrir qué tan bien funcionaba y también se hizo el análisis de las operaciones militares o bien hasta que punto las tácticas determinan el tipo de arma a escoger. Se hicieron predicciones del resultado de operaciones futuras, ya sea en el campo estratégico o táctico y se estudió la eficiencia de las organizaciones que manejan el equipo y armas de batalla. Por supuesto que en el pasado se había trabajado en esa forma, pero no fué sino hasta la incorporación del equipo de científicos que se hizo como actividad conciente.

Aunque la Investigación de Operaciones empezó en el contexto militar, su evolución se debe en gran parte al desarrollo de la organización industrial. Antes de la Revolución Industrial la mayoría de los negocios e industrias eran pequeñas compañías dirigidas por un solo hombre, el cual hacía las compras, planeaba, supervisaba la producción, vendía, etc. La mecanización de la producción dió origen a un crecimiento muy rápido, de tal modo que se volvió imposible para una sola persona desempeñar todas las funciones en organizaciones cada vez más complejas.

Al terminar la guerra, un considerable número de científicos empezaron a buscar las posibilidades de aplicar sus conocimientos en el campo industrial. Es así como con esos antecedentes, aunados al empleo de la computadora y al gran número de aportaciones por parte de especialistas, que se han ido incorporando a esta actividad, se ha conformado la actual actividad de la Investigación de Operaciones.

En este contexto recordamos, por ejemplo, en 1947 George Dantzig dá a conocer el método simplex para resolver problemas de Programación Lineal; a fines de la década de los 50s., el matemático soviético Pontriaguin dá un fuerte impulso al desarrollo de la Programación no Lineal y la Teoría del Control.

En la actualidad, podríamos decir que la Investigación de Operaciones se interesa en la Toma de Decisiones y en la formulación de modelos de sistemas determinísticos y estocásticos que surgen en la vida real, de la necesidad de asignar recursos limitados. En todo caso la contribución de la I.O. se deriva basicamente de:

a) La estructuración de una situación real en un modelo matemático, abstrayendo los elementos esenciales, de tal forma que la solución relevante a los objetivos de la persona que toma las decisiones, pueda ser de utilidad.

b) Explorar la estructura de tales soluciones y desarrollar procedimientos sistemáticos para obtenerlas.

c) Desarrollar la solución, incluyendo la teoría matemática, si se requiere, que lleva al valor óptimo de la medida deseada por el sistema, o posiblemente comparando cursos de acción alternativos evaluando su medida deseada.

Podemos decir entonces, que la I.O. se aplica a problemas que tienen que ver con la forma de conducir y coordinar las operaciones o actividades dentro de una organización. La naturaleza de la organización no interesa esencialmente y de hecho, la I. O. se ha aplicado con amplitud en los negocios, la industria, la milicia y el gobierno.

Cabe hacer mención que en paises como los Estados Unidos de América, el empleo de esta herramienta es de uso intensivo. Siendo las técnicas más empleadas: el Análisis Estadístico (29%); la Simulación (25%); la Programación Lineal (19%); y el 27% otras técnicas.*

Por lo anterior, nos damos cuenta que una de las técnicas actualmente más utilizadas, de la Investigación de Operaciones, es la Programación Lineal. Siendo ésta el planteamiento y solución, mediante ciertos algoritmos, de la maximización o minimización de una función lineal de varias variables sujeta a restricciones también lineales en estas mismas variables. Por supuesto si alguna función no cumple la linearidad, el problema es más complicado y sus técnicas de solución caen en lo que se considera la Programación no Lineal. Es por eso que la amplia aplicación de la Programación Lineal en muchos campos se debe, principalmente: 1) a su relativa facilidad de solución, ya que existe un algoritmo llamado SIMPLEX que resuelve dicho problema de manera eficiente; 2) la aplicación de programas de computadora o paquetes, utilizando SIMPLEX, que permiten.
La solución de problemas con varios cientos de variables y de restricciones en muy poco tiempo; 3) la interpretación económica de los subproductos en la solución de un problema, tales como variables duales, holguras y costos reducidos.

Por lo tanto, es evidente la preferencia de esta técnica sobre otras más sofisticadas. Ya que las segundas definitivamente requerirían un conocimiento sumamente especializado sobre el tema. En cambio la Programación Lineal, debido a su estructura matemática, basicamente sólo requiere de los principales conceptos del Algebra Lineal.

* N.N. Ledbetter y J.F. Cox "Are OR Techniques Being Used" Industrial Enginnering. Feb. 1977.

I. FUNDAMENTOS PARA EL USO DE LA PROGRAMACION LINEAL

Introducción

Para el uso de la programación lineal por computadora se requiere de un conjunto de conceptos básicos de la teoría de la programación lineal, tanto para la formulación del modelo como para la interpretación de los resultados del programa de computadora (LINDO). En lo que toca a los aspectos de solución por medio del método Simplex se asume que el lector conoce sus bases, por lo que no se presentan aquí.

En este capitulo se pretende describir, de manera sencilla, los conceptos fundamentales de la programación lineal. Para esto, se han agrupado en temas que corresponden a los primeros tres subcapitulos. En el primero, se dá una explicación de lo es la programación lineal y los supuestos que se deben cumplir al formular un programa lineal. El segundo comprende los comandos principales para correr un programa lineal por medio de LINDO: dando una explicación de la manera en que se introducen los datos, se efectúan modificaciones a la formulación y la interpretación de los resultados principales de la solución y sus subproductos. Finalmente, el tercer subcapitulo trata todo lo relacionado con el análisis de las soluciones tanto del modelo original como el que se obtiene al hacer cambios en los diferentes coeficientes que componen un programa lineal. Adicionalmente se revisa el problema dual y su interpretación económica; así como una parte que trata los errores comunes en la formulación y cómo evitarlos.

I.1. ¿Qué es la Programación Lineal?

La Programación Lineal es un procedimiento matemático para la asignación óptima de recursos escasos que ha encontrado aplicación práctica en los negocios, la publicidad, la industria, el transporte y la milicia, entre otras ramas de actividad. La industria del petróleo parece ser la que con mayor intensidad usa la programación lineal; ya que se ha estimado que en una compañía petrolera del 5 al 10% de su tiempo de cómputo es utilizado para procesar programas lineales.

En la mayor parte de los problemas lineales existen dos partes importantes: primero, los recursos limitados tales como infraestructura, capacidad de planta o tamaño de la fuerza en ventas; y segundo, las actividades tales como "producir acero bajo en carbón". Las actividades como la anterior consumen o posiblemente generan recursos. El problema es,entonces, determinar la mejor combinación de los niveles de actividad utilizando no más recursos que los actualmente disponibles. Con el fin de aclarar mejor los conceptos anteriores, consideremos el siguiente ejemplo:
Sea un problema de producción. La compañía ETC produce dos tipos de televisores, "Astro" y "Cosmo", en dos líneas de

producción; una por cada aparato. La capacidad de la línea de producción de "Astro" es de 60 televisores por día mientras que la de "Cosmo" es de 50 por día. Para un equipo "Astro" se requiere una hora-hombre de trabajo, en cambio la de "Cosmo" requiere dos horas-hombre. Actualmente se cuenta con un máximo de 120 horas-hombre por día para ser asignado a la producción de los dos tipos de televisores. Si las contribuciones a la ganancia son \$20 y \$30 respectivamente para Astro y Cosmo, ¿cuál debe ser la producción diaria?
Si definimos como:
A = Número de unidades del tipo Astro a producirse por día
C = Número de unidades del tipo Cosmo a producirse por día
El problema lineal asociado sería:

Maximizar	$20A + 30C$	(U. monetarias)
sujeto a:	$A \leq 60$	(capacidad de Astro)
	$C \leq 50$	(capacidad de Cosmo)
	$A + 2C \leq 120$	(mano de obra en horas)
	$A \geq 0$ y $C \geq 0$	

La mayor parte de los programas de computadora para programación lineal suponen que todas las variables están restringidas a ser no negativas, por lo que las restricciones $A \geq 0$ y $C \geq 0$ resultan innecesarias. La primera línea, "Maximizar 20A + 30C", se conoce como la función objetivo mientras que las restantes tres líneas se conocen como restricciones.

Usando la terminología de recursos y actividades, se tienen tres recursos: capacidad de Astro, capacidad de Cosmo y capacidad de labor o mano de obra. Las dos actividades son la producción de Astro y Cosmo. Por otra parte, generalmente cada restricción en un programa lineal se puede asociar a algún recurso mientras que cada variable de decisión corresponde a alguna actividad. Lo anterior se representa gráficamente en la Figura 1.1

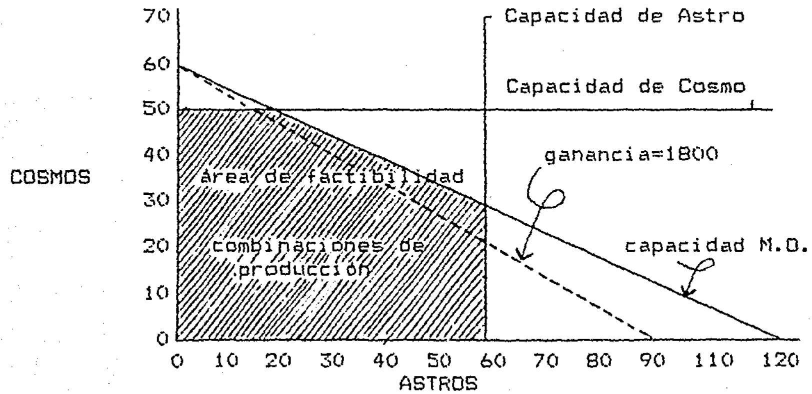


Fig. 1.1. Región de Factibilidad

Las combinaciones de producción factibles son los puntos dentro del área marcada por las cinco líneas contínuas. Para dar mayor claridad sobre la ubicación del punto o combinación de producción en donde se maximiza se ha dibujado una línea punteada de igual ganancia.

Cualquier punto que cae sobre esta línea representa una combinación de producción en la que se logra una ganancia de $1800. Si seleccionamos una meta más alta en la ganancia, por ejmplo $1900, la linea punteada cambiará hacia arriba en forma paralela. En términos gráficos deseamos cambiar la línea punteada lo más alto posible sin que nos salgamos de la región factible. Resulta evidente, observando la figura, que la estrategia más redituable es correr la linea Astro a toda su capacidad. En este caso se deben producir 60 Astro por día y 30 Cosmo, con lo que se obtendría una ganancia de 1200 + 900 = $2100/día.

I.1.1. Linearidad.

La Programación Lineal se aplica sólo a situaciones en las que los efectos de las diferentes actividades son lineales. Para propósitos prácticos se puede decir que la linealidad consiste de tres facetas:

1.- Los efectos de una variable o actividad son proporcionales por si mismos; esto es, el doble de la cantidad de acero estructural producido doblará la cantidad en dólares del acero comprado, la electricidad para producir, etc.

2.- Las interacciones entre las variables deben ser aditivas; esto es, la cantidad, en unidades monetarias, por ventas es la suma de las ventas del acero estructural, la venta de aluminio, etc; mientras que la cantidad de electricidad es la suma de lo que se utiliza para producir acero, aluminio, etc.

3.- Las variables deben ser continuas; esto es, se permiten valores fraccionales para las variables de decisión, tal como 6.38.

I.2.- Solución de Programas Lineales en una Computadora - El Programa LINDO-

El proceso para resolver un programa linear requiere de un gran número de cálculos, por lo que es más eficiente utilizar una computadora. El programa de computadora que utilizaremos es el llamado LINDO, cuyas siglas corresponden a Linear, INteractive, Discrete Optimizer (optimizador linear, interactivo y discreto). El propósito principal de LINDO es permitir al usuario introducir rapidamente la formulación de un problema de Programación Lineal, resolverlo; efectuar cambios y las modificaciones basadas en la solución o por errores, para inmediatamente volver a correr el modelo.

LINDO es un programa interactivo; esto es, está diseñado para usarse desde un teclado que esté directamente conectado a la computadora. Todas las instrucciones para el uso de LINDO estan contenidas en el mismo programa. Dependiendo de cuál sea la situación, LINDO le preguntará al usuario cuál es el dato siguiente, o que espere para teclear otro comando.

LINDO está más bien orientado hacia el uso de comandos que hacia los denominados menúes; esto es, no se tiene que seguir una secuencia fija de pasos, lo que permite que se puedan tener opciones a lo largo del proceso de solución. LINDO verifica si un comando en particular tiene sentido en el contexto que se tenga al momento.

I.2.1. Programación Lineal con LINDO.

Los comandos básicos usuales son:

COMANDO	USO.
MAX	- Comienza la entrada de un problema de maximiza-- ción.
MIN	- Comienza la entrada de un problema de minimiza-- ción.
END	- Terminan los datos de entrada, regresa a nivel - de comando.
GO	- Resuelve el problema actual e imprime la solu--- ción.
LOOK	- Imprime partes seleccionadas de la formulación - actual.
ALTER	- Para cambiar o modificar un elemento del problema actual.

Ejemplo.

```
MAX      2X  +  3Y
ST
4X + 3Y < 10
3X + 5Y < 12
END
```

Recuérdese que las restricciones $X \geq 0$ y $Y \geq 0$ no son necesarias y que el sentido < el programa lo toma como $\leq$.

Una vez tecleado lo anterior si tecleamos GO, el problema comenzará a resolverse.

Si tecleamos LOOK, entonces LINDO pregunta sobre cuál renglón (row) queremos observar. Respuestas típicas pueden ser 3, 1-2, o ser (todos), que causará la aparición del renglón 3, ó del 1 al 2, o todos los renglones.

Si se teclea ALTER (alter), LINDO preguntará para un renglón, una variable y un nuevo coeficiente. Si se responde con la secuencia 2, x y 6 respectivamente, causará que en el renglón 2 (primera restricción) se cambie el coeficiente de la variable x, que en la formulación actual es 4 lpor 6. Así la restricción quedará 6x + 3y < 10 ; en vez d 4x ;+ 3y < 10. En este punto se podría otra vez teclear GO para resolver el nuevo problema.

Después de resolver un problema, LINDO preguntará si se desea un análisis de sensibilidad. A menos que se esté familiarizando con estos conceptos, la respuesta debe ser no.

Lo siguiente es una sesión que ilustra los comentarios anteriores.

Ejemplo.- Descripción del problema en pantalla

```
: MAX     2x +   !Note que se puede dividir un renglón largo en
                  varias.
> 3y             !líneas tecleando un enter en el punto adecua-
                  do
>                !como después de un signo +
> ST
> 4x + 3y < 10 !LINDO considera ≤
> 3x + 5y < 12
> END
: LOOK
ROW:
> ALL
MAX 2x + 3y
SUBJECT TO
2) 4X + 3Y ≤ 10
3) 3X + 5Y ≤ 12
END: GO
                     LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2
                      OBJETIVE FUNCTION VALUE
      1)                    7.45454550
      VARIABLE                  VALUE             REDUCED COST
         X                  1.272727               0.000000
         Y                  1.636364               0.000000
        ROW                    SLACK              DUAL PRICES
      2)                    0.000000               0.090909
      3)                    0.000000               0.545455

NO. ITERATIONS =            2
DO. RANGE (SENSITIVITY) ANALISIS ?
>NO
:ALTER
ROW:
> 2
VAR:
> X
```

```
NEW COEFICIENTE:
> 6
:LOOK
ROW:
:ALL
MAX 2x + 3y.
SUBJECT TO
  2)  6x +  3y ≤ 10
  3)  3x +  5y ≤ 12
END
:GO
                LP OPTIMUM FOUND AT STLEP 0
                  OBJETIVE FUNCTION VALUE
          1)              7.33333340
          VARIABLE          VALUE        REDUCED COST
             X            0.666667         0.000000
             Y            2.000000         0.000000
            ROW             SLACK        DUAL PRICES
          2)              0.000000         0.047619
          3)              0.000000         0.571429
NO. ITERATIONS=              0
DO RANGE (SENSITIVITY) ANALISIS:
>NO
:QUIT
STOP
```

OTROS COMANDOS

Se tienen tres comandos que nos ayudan a obtener más información sobre LINDO, estos son: HELP, CATEGORIES (o solo CAT) y COMMANDS (o COM). Si se teclea el comando COM y después se oprime la tecla enter, únicamente listará los comandos disponibles agrupados en categorías según su uso; esto es: INPUT, OUTPUT,etc., HELP seguido del nombre de un comando describirá el comando especificado. HELP por sí solo da información general. CAT listará solamente las categorías y entonces le permitirá a uno listar los comandos de una categoría específica. Lo siguiente es una demostración.

```
:CAT
LINDO COMMANDS BY CATEGORY  FOR INFORMATION
ON A SPECIFIC COMMAND, TYPE:
LINDO       (AQUI SALE LA FECHA)
: cat       !solicitamos categorías
LINDO COMMANDS  BY CATEGORY              FOR INFORMATION
- comandos  LINDO  por categorías.       para información.
ON A SPECIFIC COMMAND,      TYPE:        HELP FOLLOWED BY
sobre un comando específico,  tecle:     HELP seguido por
THE                 COMMAND                        NAME
el nombre del comando.
    1) INFORMATION                       (información)
    2) INPUT                             (entrada)
    3) DISPLAY                           (despliegue)
    4) FILE OUTPUT                       (archivos de salida)
```

```
5) SOLUTION                                   (solución)
6) PROBLEM EDITTING                           (edición de problemas)
7) QUIT                                       (abandono)
8) INTEGER, QUADRATIC,AND PARAMETRIC PROGRAMS
9) CONVERSATIONAL PARAMETERS                  (parámetros conversa-
                                               cionales)
10) USER SUPPLIED ROUTINES                    (rutinas proporsiona-
                                               das por el usuario)
11) MISCELLANEOS                              (miselanea)

WHICH CATEGORY  IS  OF  INTEREST     ( 1   TO     11  )  ?
-en que categoria esta interesado    ( 1    a     11  )  ?
?     5        . !   le pedimos la NO. 5
THE COMMANDS  IN  THIS  CATEGORY              ARE:
los comandos en esta categoría son:
     GO  PIV
WHICH CATEGORY IS OF INTEREST        ( 1   TO      11  ) ?
?     0          ! CON 0 NOS SALIMOS
:  help go
GO COMMAND
comando go

USE: TO SUBMIT THE CURRENT FORMULATION TO THE PROCESSING
uso:"somete la formulación al procedimiento del

PROGRAM, WHICH WILL EXECUTE AND THEN PRINT OUT THE
(programa, ejecuta e imprime la)
SOLUTION.    THE FORMULATION WILL REMAIN INTACT THROUGHOUT
(solución.  la formulación no cambia en todo el proceso)
: quit: abandonamos.
```

Los comandos listados por COMMANND:

1.- Informatión

HELP	Ayuda en varias situaciones.
COM	Lista comandos por categoría.
LOCAL	Da información específica a su instalación local.
	Lista categorías de comandos.

2.- Input.

MAX	Comienza una entrada natural.
MIN	Comienza una entrada natural
RETR	Recupera un problema de un archivo
RMPS	Recupera un archivo en formato MPS
TAKE	Toma los datos últimos de un archivo.
LEAVE	Deshace el TAKE previo.
RDBC	Recupera la última solución.

3.- Display.

LOOK	En pantalla parte del problema en forma natural.
SOLUTION	En pantalla un reporte standard de la solución
RANGE	En pantalla un reporte de análisis de rango.
PICTURE	En pantalla una imágen de la matriz
SHOCOLUMN	Aparece una columna del problema
TABLEAU	En pantalla el tableau actual.
NONZEROES	En pantalla el reporte de solución con variables no ceros.
BPICTURE	En pantalla una imágen de la base
CPRI	En pantalla información de columnas
RPRI	En pantalla información de renglores

4.- Salida a archivo.

SAVE	Guarda el problema actual en archivo
DIVERT	Aparta una salida a archivo.
RURT	Revierte una salida a terminal.
SMPS	Guarda el problema actual en formato MPS
SDBC	Guarda la solución en formato base de datos

5.- Solution.

GO	Resuelve el problema.
PIVOT	Efectúa el siguiente pivoteo

6.- Problema de edición.

ALTER	Modifica algún elemento del problema actual.
EXT	Extiende el problema por adición de restricciones.
DEL	Borra una restricción específica.
SUB	Pone una cota superior a una variable.
APPC	Aumenta una nueva columna al problema.
SLB	Pone una cota inferior a una variable.

7.- Programas Internos, Cuadráticos y Paramétricos.

INT	Identifica variables enteras.
QCP	Programación Cuadrática.
PARA	Programación Paramétrica.
POSD	Checa positiva definidad
TITAN	Apretar un programa entero.
BIP	Pone cotas a un problema entero.
GIN	Identifica variables enteras generales.
IPTOL	Pone tolerancias a un problema entero.

8.- Parámetros de lenguaje.

WIDTH	Poner ancho a la terminal.
TERSE	Pone el modo TERSE.
VERBASE	Pone el modo VERBASE (Por default)
BATCH	Llama a LINDO a correr en batch.
PAGE	Poner página según tamaño pantalla.
PAUSE	Para hasta que CR (enter) sea tecleado.

9.- Uso de subrutinas dadas por el usuario.

USER	Llama a subrutinas escritas por el usuario.

10.- Micelaneas.

INVERT	Invierte la base actual para dar respuestas más precisas.
STAT	Pone en pantalla un sumario estadístico.
BUG	Qué hacer cuando se encuentra un BUG

11.- Salir.

QUIT	Sale de LINDO y lo lleva a la Dirección anterior.

I.2.2. Programación Entera con LINDO

Las variables enteras en LINDO pueden ser 0/1 ó de tipo general. Las variables que son restringidas a valores 0/1 se identifican con el comando INTEGER, en alguna de las siguientes formas:

INTEGER VNOMBRE O INTEGER N

La primera (y la más recomendable) forma identifica a la variable vnombre a tomar valores 0/1.

La segunda forma identifica a las primeras n variables en la formulación actual a tomar valores 0/1. El orden de las variables se determina según la secuencia en que fueron metidas,.lo cual puede verificarse observando la lista de las variables en el reporte de solución.

En términos generales, las variables enteras, tal como 0, 1, 2,.....etc., se identifican en forma análoga usando GIN en vez de INT.
Ejemplo que ilustra el uso del comando INT.

```
: MAX 4 TOM  +  3 DICK  + 2 HARRY
? ST
? 2.5 TOM + 3.1 HARRY < 5
? .2 TOM + .7 DICK + .4 HARRY < 1
? END
```

```
: INTEGER TOM
: INTEGER DICK
: INTEGER HARRY
: GO
                    LP OPTIMUM AT STEP 4
                     OBJETIVE FUNCTION VALUE
    1)                     7.65898620
    VARIABLE                 VALUE         REDUCED COST
       TOM                 1.00000        - 2.912442
       DICK                0.682028         0.000000
       HARRY                0.806452        0.000000
       ROW                   SLACK          DUAL PRICES
    2)                     0.00000          0.092166
    3)                      0.00000         4.285714
NO. ITERATIONS = 4
BRANCHES = 0          DETERM= 2.170 E 0
NEW INTEGER SOLUTION AT BRANCH     1 PIVOT  6

                  OBJETIVE FUNCTION VALUE
    1)                     7.000000
    VARIABLE                 VALUE           REDUCED COST
       TOM                 1.00000        - 4.000000
       DICK                1.00000        - 3.000000
       HARRY                0.00000       - 2.000000
       ROW                   SLACK           DUAL PRICES
    2)                     2.50000          0.000000
    3)                     0.10000          0.000000
NO. ITERATIONS = 6
BRANCHES = 1 DETERM= 1.000 E 0
BEST REMAINING SOLUTION NO BETTER THAN 7.428571
DELETE HARRY AT LEVEL  1
   ENUMERATION COMPLETE   BRANCHES = 1 PIVOTS= 6
LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
: QUIT
STOP
```

El método de solución empleado es el Branch and Bound, el cuál imprimirá una secuencia típica de mejoramiento de soluciones, que proporciona un reporte por cada nueva solución; sin embargo, los costos reducidos (REDUCED COST) y los precios duales (DUAL PRICES) que aparecen en dichos reportes son no significativos al usuario casual y por lo tanto deben ignorarse.

En un programa entero no se pueden utilizar los comandos SOLUTION y RANGE.
Aunque la capacidad de la programación entera es muy poderosa, se requiere utilizarla eficientemente. Es muy fácil preparar una mala formulación para un problema esencialmente sencillo. De tal forma que una formulación inadecuada necesite cantidades intolerables de tiempo de cómputo para resolverla. Por lo tanto se debe encargar estas formulaciones a personas experimentadas en esta especialidad; LINDO, sin embargo, acortará el proceso de solución si considera que el

problema es muy largo. De esta manera, el novato está protegido contra un costo excesivo por una mala formulación.

I.3. Análisis de Soluciones de los Programas lineales y un Analisis Elemental de Sensibilidad.

Cuando la computadora resuelve un problema de programación lineal (LP) se puede producir alguno de los siguientes posibles resultados:

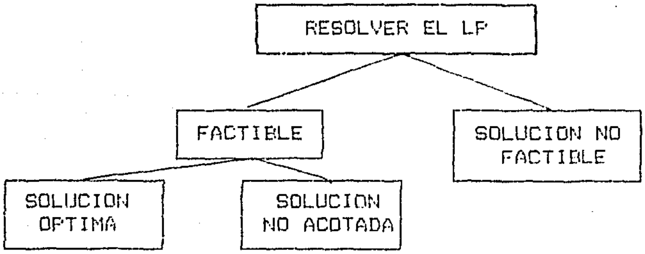


Fig. 3.1 Resultados en la solución.

En un problema bien formulado generalmente el camino debe ser el más a la izquierda, en la figura anterior. El procedimiento de solución primero se concentrará en encontrar una solución factible, esto es, una solución que simultáneamente satisfaga todas las restricciones, no siendo necesario que la función objetivo tome el valor óptimo. La parte más a la derecha "Solución no factible" indicará que se han especificado dos o más restricciones que no pueden satisfacerse simultáneamente. Un ejemplo sencillo es el par de restricciones $x \leq 2$ y $x \geq 3$. La inexistencia de una solución factible depende únicamente de las restriciones y es independiente de la función objetivo. En la práctica un resultado "Solución no factible" puede ocurrir en un problema grande y complicado, por ejemplo cuando se especificó un límite superior sobre el número de horas productivas disponibles y una demanda alta irreal sobre el número de unidades a producir.

Si se encuentra una solución factible, entonces el procedimiento trata de encontrar una solución óptima. Si ocurre un final con una "Solución no acotada", entonces esto implica que la formulación admite un resultado irreal debido a que se genera una ganancia infinita. Una conclusión más real es que una restricción importante se ha omitido o la formulación contiene un error tipográfico crítico.

Cuando el problema de la producción de televisores Astro y Cosmo se resuelve, se produce un reporte de solución como el siguiente:

	OBJETIVA FUCTION VALUE	
1)	2100.000	
VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
A	60.00000	0.00000
C	30.00000	0.00000
ROW	SLACK	DUAL PRICES
2)	0.00000	5.00000
3)	20.00000	0.00000
4)	0.00000	15.00000

NO. ITERATIONS = 3

Los resultados tienen dos secciones, una de variables y otra de renglones (ROWS). Las primeras dos columnas en cada sección son directas. La solución de máximo ganancia es producir 60 ASTROS y 30 COSMOS con una contribución de 2100. Esta solución ocasiona que se tenga una holgura nula en el renglón 2 (la restricción $A \leq 60$), ya que se cumple con estricta igualdad'esto es, se ocupa toda la capacidad de ASTRO.Una holgura de 20 en el renglón 3 (la restricción $C \leq 50$) lo que significa que sólo se empleó un nivel de 30. Por último en la restricción de mano de obra la holgura es nula, lo que significa que en la solución óptima se utiliza la fuerza de trabajo.

Los resultados que aparecen en la tercera columna, también como producto de los cálculos son un número de oportunidad o costo marginal. La interpretación de esos costos reducidos y precios duales se discutirán enseguida.

I.3.1. Análisis de Sensibilidad

Muchas veces se está interesado en el manejo del modelo cuando se alteran los datos de entrada. Precisamente es el análisis de sensibilidad el término que se aplica al proceso de responder dichas preguntas. Afortunadamente, un reporte de solución proporciona información suplementaria que es útil en el análisis de sensibilidad. Esta información se localiza en las columnas de costos reducidos y precios duales.

El análisis de sensibilidad puede revelar que parte de la información debe estimarse con más precisión. Por ejemplo, si es obvio que cierto producto no es redituable, entonces, sólo se necesitará un pequeño esfuerzo que se utilizará en la precisión de la estimación de esos costos.

La primera ley en la modelación es: no desperdiciar tiempo en la estimación precisa de un parámetro, si un error pequeño en éste tiene un efecto mínimo en la decisión recomendada.

I.3.2. Costos Reducidos

Asociado con cada variable en cualquier solución se tiene una cantidad conocida como costo reducido (REDUCED COST). Si las unidades de la función objetivo son dólares o pesos y las unidades de la variable son litros, entonces las unidades del costo reducido son dólares o pesos por litro. Este valor es la cantidad, asociada a cada variable, con la que se contribuirá a la utilidad, antes de que una variable específica tenga un valor positivo en la solución óptima. Obviamente una variable activa en la solución óptima tiene un costo reducido de cero.

Una segunda interpretación del costo reducido es que esta la tasa a la cual el valor de la función objetivo se deteriorará si una variable actualmente en cero se forza arbitrariamente a incrementarse en una pequeña cantidad.

Para dar una idea más clara consideremos lo siguiente: suponga que tenemos un problema de maximización, el valor de la función objetivo para la solución actual es z, y sea z' el nuevo valor de la función objetivo para una nueva solución. Por otra parte, consideremos que la cantidad $(z_j - c_j)$ es la tasa a la cual se mejora o se empeora la función objetivo si una variable entra a la solución. Lo anterior lo podemos representar como:

$$z' = z - (z_j - c_j)$$

Precisamente es la $(z_j - c_j)$ el costo reducido. De tal forma que de la expresión anterior se puede decir que el costo reducido más positivo, asociado a una cierta variable, empeorará en mayor cantidad al valor de la función objetivo z dando como resultado el nuevo valor z'. En cambio si (z_j - c_j) fuera negativo, se mejoraría a esa tasa el valor de la función objetivo. Esta simbología aparece en cualquier texto de Programación Lineal.

I.3.3. Precios Duales.

Asociado a cada restricción se tiene una cantidad conocida como precio dual. Si las unidades de la función objetivo son pesos y las unidades de la restricción en cuestión son kilogramos, entonces las unidades del precio dual son pesos por kilogramo (en las mismas unidades que el costo reducido). Este valor es la tasa a la cual el valor de la función objetivo mejorará si el lado derecho de la restricción se incrementa en una pequeña cantidad.

Diferentes paquetes de Programación Lineal pueden usar distintas convensiones de signos para tratar a los precios duales.

En este manual se usará la convensión de que un precio dual positivo significa que si se incrementa el lado derecho en cuestión se mejora el valor de la función objetivo, mientras que en precio dual negativo significa que si se incrementa el lado derecho causará un deterioro en el valor de la función objetivo. Un precio dual de cero significa que si cambiando el lado derecho a una pequeña cantidad, ésto no tendrá ningún efecto en el valor de la solución.

En términos económicos, el precio dual representa el valor que estaríamos dispuestos a pagar por tener una unidad adicional de un cierto recurso restringido. De tal forma que aumentara el valor de la función objetivo a una tasa igual al precio dual.

Como resultado de dicha convensión , las restricciones $\leq$ tendrán precios duales no negativos, mientras que restricciones $\geq$ tendrán precios duales no positivos y restricciones de igualdad pueden tener precios duales de cualquier signo.

El lector perspicaz estará pensando que un costo reducido es realmente un precio dual con un signo equivocado. En nuestra convensión el costo reducido de una variable x realmente es el precio dual, con el signo cambiado, sobre la restricción $x \geq 0$. Recordaremos que el costo reducido de una variable mide la tasa a la cual el valor de la solución se deteriora conforme x se incrementa desde cero. El precio dual sobre $x \geq 0$ mide la tasa a la cual el valor de la solución mejora conforme el lado derecho (y así x) se incrementa desde cero.

Resulta instructivo analizar los precios duales en la solución del problema de los televisores. El precio dual sobre la restricción A ≤ 60 es $ 5/unidad. En principio uno puede sospechar que esta cantidad debería ser de $ 20/unidad; ya que si se produce un televisor más del tipo ASTRO se tendría un ingreso adicional de $ 20. Una unidad adicional de ASTRO requerirá sacrificios en otras partes. Puesto que toda la mano de obra se utiliza, producir más ASTROS requeriría reducir la producción de COSMOS para liberar mano de obra. La tasa de intercambio de mano de obra para ASTROS y COSMOS es de 1/2; esto es, producir una unidad más de ASTRO implica reducir la producción de COSMOS en medio aparato. Puesto que COSMO tiene una contribución al ingreso de $ 30/unidad, el incremento neto en el ingreso es $ 20 - 1/2* $ 30 = $ 5.

Ahora consideremos el precio dual de $ 15/hora sobre la restricción de mano de obra. Si se aumenta una hora más de mano de obra, ésta se usará únicamente para producir más COSMOS; ya que COSMO tiene una contribución de $ 30/unidad. Puesto que una hora de mano de obra sólo es suficiente para producir medio COSMO, el valor de la hora adicional de mano de obra es de $ 15.

I.3.4. Formulaciones no Acotadas e Infactibles.

Si en el ejemplo que venimos manejando se nos hubiera olvidado incluir la restricción de mano de obra y la de producción de COSMOS, entonces se podría tener una utilidad ilimitada produciendo una gran cantidad de COSMOS. Esto se ilustra en seguida:

```
LOOK ALL
MAX  20A + 30C
    2)   A ≤  60
END
:GO
UNBOUNDED SOLUTION
UNBOUNDED VARIABLES ARE:
C.
```

Típicamente se pueden tener variables que sean no acotadas y no ser fácil de identificar la manera en que surge este no acotamiento.

Un ejemplo de una formulación infactible, se obtiene si el lado derecho de la restricción de mano de obra en la formulación original , se cambia a 120 horas de mano de obra. Pero inadvertidamente también se cambia el sentido de la restricción. En seguida pensaríamos a mayor mano de obra podríamos producir a las máximas capacidades; es 60 ASTROS y 50 COSMOS para un consumo total de 60 + 2 * 50 = 160 horas. Sin embargo la formulación y solución es:

```
MAX   20A  +  30C
SUBJECT TO
   2)   A≤ 60
   3)   C≤ 50
   4) A  +  2C  ≥ 190
END
: GO
     NO FEASIBLE SOLUTION
VIOLATED ROWS HAVE NEGATIVE SLACK
OR (EQUALITY ROWS) NONZERO SLACKS.
ROWS CONTRIBUTING TO INFEASIBILITY HAVE.
NONZERO DUAL PRICES.

                  OBJETIVE FUNCTION VALUE
     1)                3300.000
     VARIABLE           VALUE           REDUCED COST.
        A               90.0000            0.00000
        C               50.0000            0.00000
       ROW              SLACK           DUAL PRICES
     2)              - 30.00000            1.00000
     3)                0.00000            2.00000
     4)                0.00000          - 1.00000
```

En este caso los precios duales dan información útil para determinar como surge la infactibilidad. Por ejemplo, el + 1 asociado al renglón 2 indica que si se incrementa su lado derecho en uno, decrecerá la infactibilidad en uno. El + 2 en el renglón 3 significa que si permitimos una unidad más de producción de COSMO, la infactibilidad decrecería por 2 unidades; ya que cada COSMO utiliza 2 horas de labor. El - 1 asociado al renglón 4 significa que si el lado derecho asociado a la restricción de mano de obra fuera disminuido en uno, entonces la infactibilidad debiera reducirse en uno.

I.3.5. Soluciones Optimas Múltiples y Degeneración.

Si una formulación tiene una solución óptima acotada, entonces existirá un único valor de la función objetivo que es óptimo. Sin embargo, frecuentemente existen diferentes soluciones que tienen el mismo valor. Por ejemplo, supongamos en el mismo problema anterior, disminuimos la ganancia que proporciona A en \$ 5/unidad. El problema y su solución es:

```
MAX               15 A  +  30 C
Sujeto a:
2)   A ≤ 60
3)   C ≤ 50
4)   A  + 2C = 120
END
```

```
                    OBJECTIVE FUNCTION VALUE
     1)                    1800.000
     VARIABLE                VALUE          REDUCED COST
         A                  60.00000          0.00000
         C                  30.0000           0.00000
        ROW                 SLACK          DUAL PRICES
     2)                     0.00000           0.00000
     3)                    20.00000           0.00000
     4)                     0.00000          15.00000
NO ITERATIONS= 0
DO RANGE (SENSITIVITY) ANALISIS?
?Y
RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED

                    COST COEFFICIENT RANGES
     VARIABLE       CURRENT      ALLOWABLE       ALLOWABLE
                     COEF        INCREASE        DECREASE
         A         15.00000      INFINITY        0.00000
         C         30.00000      0.00000        30.00000

                     RIGHTHAND SIDE RANGES
        ROW         CURRENT      ALLOWABLE       ALLOWABLE
                      RHS        INCREASE        DECREASE
     2)            60.00000     60.00000        40.00000
     3)            50.00000      INFINITY       20.00000
     4)           120.00000     40.00000        60.00000
```

Observando detenidamente lo anterior, nos podemos dar cuenta que el renglón 2, el de la restricción A ≤ 60, tiene holgura cero y precio dual cero. Esto sugiere que la producción de ASTROS puede disminuirse en una pequeña cantidad sin ningún efecto en los beneficios totales. Por supuesto deberá haber un incremento compensatorio en la producción de COSMOS. Concluímos que debe existir una solución óptima alterna, la cual indica que se produzcan pocos ASTROS y más COSMOS. Se puede descubrir esta solución incrementando la ganancia de COSMOS muy ligeramente .Observemos:

```
MAX   15 A  +  30.00001 C

Sujeto a:

2)    A  ≤  60
3)    C  ≤  50.
4)    A  +  2C ≤ 120
END
: GO
                   LP OPTIMUM FOUND AT STEP

                   OBJECTIVE FUNCTION VALUE

     1)              1800.001
     VARIABLE          VALUE               REDUCED COST
         A            20.00000                0.00000
```

C	50.00000	0.00000
ROW	SLACK	DUAL PRICES
2)	40.00000	0.000000
3)	0.00000	0.000010
4)	0.00000	15.000000

NO ITERATIONS= 1
DO RANGE (SENSITIVITY) ANALISIS?
> Y

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED

COST COEFICIENT RANGE

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
A	15.00000	0.000005	15.00000
C	30.00001	INFINITY	0.00001

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2)	60.00000	INFINITY	40.00000
3)	50.00000	10.00000	20.00000
4)	120.00000	40.00000	20.00000

Como se había dicho, la ganancia está fija en $ 1800; sin embargo, la producción de COSMOS se ha incrementado de 30 a 50, mientras que la de ASTROS bajo de 60 a 20.

En general, únicamente pueden existir óptimos alternos, si algún renglón en el reporte de solución tiene ceros en la segunda y tercera columnas. Esto es, se tienen óptimos alternos sólo si una variable tiene valor cero y su costo reducido es cero o alguna restricción tiene holgura y precio dual ceros. Los matemáticos llaman a esas soluciones (sin tener nada que ver con juicios morales) como degeneradas.

I.3.6. Relaciones Económicas entre kos Precios Duales y los Costos Reducidos

Nuestro conocimiento acerca de los costos reducidos y los precios duales puede resumirse como sigue:

"Los costos reducidos de una (no utilizada) actividad: es la cantidad en que disminuirán las ganancias si una unidad de esa actividad se aumenta en la solución".

"El precio dual de una restricción: es la cantidad por la cual disminuyen las ganancias si la disponibilidad del recurso asociado con esta restricción se reduce en una unidad".

Se puede decir que el costo reducido de una actividad realmente es su contribución neta, si valuamos la actividad usando precios duales como cargos por la utilización del recurso. Si una unidad de una actividad se activa en la solución, esto efectivamente reduce la disponibilidad de los recursos que ella utiliza, los cuales tienen un valor agregado o imputado en la forma de precios duales; por lo tanto la actividad debiera cargar con esos valores. Veamos un ejemplo para checar si el argumento es cierto.

Suponga que la compañía de televisores está considerando adicionar una videograbadora para su línea de productos. La investigación técnica y de mercado estima que la contribución a la ganancia de una videograbadora es de $ 47 por unidad. La que se fabricará en la línea de producción de ASTRO con un consumo de 3 horas. Obviamente, esto forzará a una disminución de la producción de ASTRO (ya que afecta su línea de producción) y de la producción de COSMO (ya que se consume mano de obra). Es conveniente este intercambio ? Al menos se ve prometedor. Se hacen más dólares por hora de labor que una COSMO y se hace un uso más eficiente de la línea de producción ASTRO. Recordaremos que los precios duales sobre la capacidad de ASTRO y la capacidad de labor en la solución original fueron de $ 5 y $ 15. De esta forma, se debe valorar a la videograbadora a 1 x 5 + 3 x 15 - 47 = $ 3. Este costo neto es positivo, así aparentemente no vale la pena su producción. El análisis puede pararse en este punto, pero es mayor nuestra curiosidad, por lo que lo formularemos y resolveremos. Si V= número de videograbadoras a producir, entonces se desea:

MAX 20 + 30C + 47V

Sujeto a:

2) A + V ≤ 60
3) C ≤ 50
4) A + 2C + 3V ≤ 120
END.

La solución es:

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO

1) 2 100.0000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
A	60.00000	0.00000
C	30.00000	0.00000
V	0.00000	3.00000

RENGLON	HOLGURA	PRECIOS DUALES
2)	0.00000	5.00000
3)	20.00000	0.00000
4)	0.00000	15.00000

La solución indica que no se produzcan videograbadoras, además nótece que el costo reducido de V es $ 3 que es el valor calculado cuando valuamos a la videograbadora. Esto es una ilustración de lo siguiente:

"El costo reducido de una actividad es igual a la suma ponderada de sus tasas por uso de recursos menos su tasa de contribución a la ganancia, donde los ponderadores son los precios duales".

I.3.7. Rango de Validez de los Costos Reducidos y los Precios Duales.

En la descripción de los costos reducidos y precios duales nos hemos limitado a "cambios muy pequeños"; esto es, si el precio dual de una restricción es de $ 3/hora, entonces incrementando el número de horas disponibles mejorarán las ganancias en $ 3 por cada una de las primeras horas (posiblemente menos de una) adicionadas. Esta tasa de mejoramiento en general, no se mantendrá por siempre. Podemos esperar que si tenemos más horas de capacidad disponibles, el valor (es decir el precio dual) de esas horas podría no incrementarse y si disminuir. Esto puede no ser verdad en todas las situaciones, pero en Programación Lineal es verdad que incrementando el lado derecho de una restricción, puede ser que no se incremente el precio dual. El precio dual sólo puede permanecer o decrecer.

Si cambiamos el lado derecho de un problema los valores óptimos de las variables de decisión pueden cambiar; sin embargo, los precios duales y costos reducidos no cambiarán mientras la "naturaleza" de la solución óptima no cambie. Hablaremos de cambios de naturaleza (los matemáticos dicen cambios de base) cuando ya sea que el conjunto de variables que son no ceros o el conjunto de restricciones, son cambios obligatorios. En resumen, si alteramos el lado derecho, se aplican los mismos precios duales mientras la "naturaleza" o "base" no cambia.

La mayor parte de los códigos de programación lineal opcionalmente proporcionan el reporte de solución con análisis de rango o sensibilidad, que indica las cantidades en que los lados derechos y los coeficientes de la función objetivo pueden cambiarse unilateralmente sin afectar la naturaleza o base de la solución óptima. Este reporte de sensibilidad para el problema de la compañía de televisores aparece en seguida:

DO RANGE (SENSITIVITY) ANALISIS? (Se efectúa análisis de sensibilidad?)
> Y (si)

RANGES IN WHICH THE BASIS IN UNCHAGED

RANGOS EN LOS CUALES LA BASE NO CAMBIA.

RANGOS DE LOS COEFICIENTES DE LOS COSTOS.

VARIABLE	COEF. ACTUAL.	INCREMENTO PERMITIDO	DECREMENTO. PERMITIDO.
A	20.00000	INFINITO	5.00000
C	30.00000	10.00000	30.00000

RANGOS DE LOS LADOS DERECHOS.

RENGLON	ACTUAL RHS	INCREMENTO PERMITIDO	DECREMENTO. PERMITIDO.
2)	60.0000	60.0000	40.0000
3)	50.0000	INFINITO	20.0000
4)	120.0000	40.0000	60.0000

De nueva cuenta encontramos dos secciones, una para variables y la segunda para renglones o restricciones. El número 5 en el renglón de la variable A, del reporte anterior, significa que la contribución a la ganancia de **A** puede decrecer hasta $5/unidad sin afectar la cantidad óptima de **A** y **C** a producir. Esto es admisible, ya que actualmente en la producción de ASTROS se hace un uso más eficiente de la mano de obra, $ 20 por una hora contra $ 30 por dos horas para COSMOS.

Si la contribución a la ganancia de una ASTRO se reduce $ 5 a $ 15 por unidad, entonces en los dos se hace igualmente un uso eficiente de la mano de obra y uno estaría dispuesto a incrementar la producción de COSMO a costa de ASTROS hasta que la holgura del renglón 3 (la restricción $C \leq 50$) se haga cero.

El INFINITY (infinito), en la misma sección del reporte, significa que incrementando la rentabilidad de **A** por cualquier cantidad positiva no tendrá efecto sobre la cantidad óptima a producir de **A** y **C**. Esto es intuitivo, debido a que ya estamos produciendo ASTROS a su límite superior.

El "ALLOWABLE DECREASE" (decremento permitido) de 30 para la variable **C** significa que la rentabilidad de **C** puede reducirse en $ 30/unidad (a llegar a cero) sin que cambie la solución óptima. Esto tiene sentido, ya que en el momento en que se produce COSMO, simplemente se hace rentable el uso de cualquier sobrante de mano de obra en la producción de ASTRO. El 10 en el renglón de C significa que la rentabilidad de C pudo haberse incrementado hasta en \$ 10/unidad (llegaría a \$40/unidad) antes de considerar cambiar los valores de A y C. Note que para \$ 40/unidad para los COSMOS, la ganancia por hora de mano de obra es la misma para A y C.

En general, si el coeficiente de una variable en la función objetivo se cambia dentro del rango especificado en la primera sección del reporte de rangos, entonces los valores óptimos de las variables de decisión, en este caso A y C, no cambiarán. Sin embargo, los precios duales, costo reducido y la ganancia de la solución pueden cambiar.

En un sentido complementario, si el lado derecho de una restricción se cambia dentro del rango especificado en la segunda sección del reporte, entonces los valores óptimos de los precios duales y costos reducidos no cambiarán. Sin embargo, los valores de las variables de decisión y la rentabilidad de la solución pueden cambiar.

Por ejemplo, de la segunda sección podemos observar que si el lado derecho del renglón 3 (restricción $C \leq 50$) se disminuye por más de 20, entonces los precios duales y los costos reducidos cambiarán. La restricción sería entonces $C \leq 30$ y la naturaleza de la solución cambiaría, ya que la restricción de mano de obra ya no sería obligatoria. El lado derecho de esta restricción ($C \leq 50$) puede incrementarse, de acuerdo al reporte, en una cantidad infinita sin afectar los precios duales y los costos reducidos en el óptimo. Esto tiene sentido puesto que ya existe exceso de capacidad sobre la línea COSMO, de tal forma adicionando más capacidad esta no tendría ningún efecto.

Ilustremos algunos de esos conceptos resolviendo el mismo problema pero reduciendo la mano de obra disponible a 59 horas (se reducen 61 horas). La formulación y solución son:

```
MAX     20 A  +  30 C

Sujeto a:

     2)     A  ≤  60
     3)     C  ≤  50
     4)     A  +  2 C  ≤  59
END
:GO
            EL OPTIMO DEL LP SE ENCONTRO EN EL PASO 1

                 VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO.

     1)             1180.0000
```

VARIABLE	VALOR	COSTO REDUCIDO.
A	59.00000	0.00000
C	0.00000	10.00000

RENGLON	HOLGURA	PRECIOS DUALES.
2)	1.00000	0.00000
3)	50.00000	0.00000
4)	0.00000	20.00000

RANGOS EN LOS CUALES LA BASE NO CAMBIA
RANGOS EN LOS COEFICIENTES DE COSTO

VARIABLE	COEFIC ACTUAL	INCREMENTO PERMITIDO.	DECREMENTO PERMITIDO.
A	20.00000	INFINITO.	5.00000
C	30.00000	10.00000	INFINITO.

RANGOS DE LOS LADOS DERECHOS.

RENGLON	LADO DERECHO ACTUAL	INCREMENTO PERMITIDO	DECREMENTO PERMITIDO.
2)	60.00000	INFINITO.	1.00000
3)	50.00000	INFINITO.	50.00000
4)	59.00000	1.00000	59.00000

Primero que todo notamos que con la oferta de mano de obra reducida ya no se deben producir ninguna COSMO. Su costo reducido es ahora de $ 10/unidad, lo que significa que si su rentabilidad se incrementará en $ 10, a llegar a $ 40/unidad, entonces debiéramos empezar considerando su producción otra vez. En $ 40/unidad de COSMOS ambos productos son igualmente eficientes en el empleo de la mano de obra.

También nótece que al haberse reducido el lado derecho de la restricción de la mano de obra por más de 60 horas, la mayoría de los precios duales y costos reducidos han cambiado. En particular, el precio dual o valor marginal de la mano de obra es ahora de $ 20 por hora. Esto se debe a que una hora adicional de mano de obra debe utilizarse para producir $ 20, debido a una ASTRO.

Debe ser capaz de convencerse usted mismo que el valor marginal de la mano de obra se comporta como sigue:

M.O.DISPONIBLE	PRECIO DUAL	RAZON.
DE 0 A 60 HRS.	$ 20/HR.	CADA HORA ADICIONAL SE USARA PARA PRODU-- CIR $ 20 ASTRO.
60 A 160	$ 15/HR.	CADA HORA ADICIONAL SE USARA PARA PRODU- CIR LA MITAD DE $ 30 COSMO.
MAS DE 160 HORAS	$ 0.	NO TIENEN USO.

En general el precio dual sobre cualquier restricción se comportará de manera decreciente al aumentar la disponibilidad del recurso.

I.3.8.Predicción del Efecto a Cambios Simultáneos en la Función Objetivo o en los Lados Derechos.

La información en el reporte de análisis de rango nos expresa el efecto por el cambio en algún costo o algún parámetro de recurso. Para el siguiente análisis volvemos a traer el reporte original del problema de televisores.

RANGOS EN LOS CUALES LA BASE NO CAMBIA.
RANGOS EN LOS COEFICIENTES DE COSTOS

VARIABLE	COEFIC. ACTUAL	INCREMENTO PERMITIDO	DECREMENTO. PERMITIDO
A	20.0000	INFINITO	5.00000
C	30.0000	10.00000	30.00000

RANGOS EN LOS LADOS DERECHOS.

RENGLON	RHS ACTUAL	INCREMENTO PERMITIDO.	DECREMENTO. PERMITIDO.
2)	60.00000	60.00000	40.00000
3)	50.00000	INFINITO	20.00000
4)	120.00000	40.00000	60.00000

El reporte indica que la contribución a la ganancia de una ASTRO puede disminuirse hasta $ 5/unidad sin que cambie la base. En este caso, esto significa que la solución óptima podría ser todavía recomendar producir 60 ASTROS y 30 COSMOS.

Supongamos ahora que para enfrentar a la competencia se considera bajar el precio de la ASTRO en $ 3/unidad y la

COSMO en $ 10/unidad. Sería aún redituable producir lo mismo? Individualmente, cada uno de esos cambios podría no cambiar la solución, ya que 3 ≤ 5 y 10 ≤ 30.

Pero no resulta claro que esos dos cambios puedan hacerse simultaneamente. Qué le sugiere su intuición para establecer una regla que describa esos cambios simultáneos sin que cambie la base (solución)?

LA REGLA.

Se puede pensar de los rangos permitidos como una holgura que puede emplearse para cambiar parámetros. Este es un hecho que establece que cualquier combinación de cambios no modificará la base si la suma de los porcentajes de holgura empleada es menor del 100%. Para los cambios simultáneos propuestos, tenemos:

(3/5) * 100 + (10/30) * 100 = 60% + 33.3% = 93.3% < 100%.

Esto satisface la condición. De esta forma los cambios a título de ejemplo pueden efectuarse sin que cambie la base. Bradley, Hax, y Magnauti (1977) han llamado a esta regla, la "regla del 100%.". Ya que los valores de A y C no cambian, podemos calcular el efecto sobre las ganancias debido a los cambios anteriores como: - 3 * 60 - 10 * 30 = - 480. Así, la ganancia será 2100 - 480 = $ 1620.

La formulación alterada y su solución son:

```
MAX.    17  A  +  20  C
Sujeto a:
          2)  A  ≤  60
          3)  C  ≤  50
          4)  A  +  2 C  ≤  120
END.
```

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO.

1) 1620.0000

VARIABLE	VALUE	COSTO REDUCIDO.
A	60.00000	0.00000
C	30.00000	0.00000

RENGLON	HOLGURA	PRECIOS DUALES.
2)	0.00000	7.00000
3)	20.00000	0.00000
4)	0.00000	10.00000

I.3.9. Análisis de Sensibilidad sobre los Coeficientes de las Restricciones.

El análisis de sensibilidad de los coeficientes de los lados derechos y la función objetivo son un tanto fácil de entender, ya que el valor de la función objetivo varía linealmente con cambios modestos en esos coeficientes. Desafortunadamente el valor de la función objetivo se modifica de manera no lineal con cambios en los coeficientes de una restricción. Sin embargo existe una fórmula muy simple para aproximar el efecto de pequeños cambios en los coeficientes de una restricción. Suponga que deseamos examinar el efecto de disminuir por una pequeña cantidad "e" el coeficiente de la variable j en el renglón i de una formulación de programación lineal. La fórmula es:

(mejoramiento en la función objetivo) aproximadamente igual a (valor de la variable j) * (precio dual del renglón i) * e

Ejemplo:
Considere el problema:
MAX 20 A + 30 C
Sujeto a:
2) A ≤ 65
3) C ≤ 50
4) A + 2 C ≤ 115
END.
Con la solución

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO

1) 2050.00000

VARIABLE	VALOR	COSTO REDUCIDO
A	65.00000	0.00000
C	25.00000	0.00000

RENGLON	HOLGURA	PRECIOS DUALES.
2)	0.00000	5.00000
3)	25.00000	0.00000
4)	0.00000	15.00000

Suponga ahora que se descubre que el coeficiente de C en el renglón 4 debería haber sido 2.01 en vez de 2. La fórmula implica que el valor de la función objetivo debe disminuirse por aproximadamente 25 x 15 x 0.01 = 3.75. El valor de la función objetivo cuando se arregla el coeficiente es de 2046.269 con lo cual el decremento fué de 3.731. La fórmula para medir el efecto de un cambio pequeño en los coeficientes de una restricción tiene sentido. Si el cambio en el coeficiente es pequeño, entonces los valores de todas las variables y precios duales permanecen esencialmente sin cambio. De esta manera, el efecto neto del cambio de 2 a 2.01 en nuestro problema es para efectivamente probar el uso de 25 * .01 horas adicionales de mano de obra. Así, resulta que 25 x 0.1 son pocas horas disponibles. Pero nos damos cuenta que la mano de obra tiene un valor o precio de $ 15 por hora, con lo que el cambio en las ganancias debe ser alrededor de 25 * 0.1 * 15, siendo ésto congruente con la fórmula original.

Este tipo de análisis de sensibilidad proporciona una guía para identificar qué coeficientes deben estimarse con precisión. Si el producto del valor de la variable j y el precio dual del renglón i es relativamente grande, entonces el coeficiente de la variable j en el renglón i debe estimarse con precisión; si lo que se desea es una estimación precisa de la ganancia total.

I.3.10.El Programa Dual y Extensiones.

Siguiendo con nuestro ejemplo de un principio, la compañía fabricante de televisores esta considerando ofrecer en renta horario cualquiera de sus tres recursos, la capacidad en la línea de producción de ASTRO, la de COSMO y la capacidad de mano de obra. Por otra parte, a la compañía EQUS le gustaría rentar la capacidad de los tres recursos. Denote por x, y, z, el precio por unidad que la EQUS ofrecerá por cada uno de los tres recursos. Obviamente, EQUS desea:

Minimizar $60\,x + 50\,y + 120\,z$.

EQUS se da cuenta que si los dos tipos de televisor muestran unas tasas de ganancia a las que en un principio se establecieron, entonces el fabricante preferirá elaborar más bién que rentar sus recursos. De esta manera, EQUS debe ofrecer sus precios de renta lo suficientemente altos para que cada uno de los televisores no sean redituables y, por lo tanto, EQUS rente sus recursos. Lo anterior se establece como:

2) $x + z \geq 20$ La renta de los recursos para ASTRO debe ser mayor o igual a su ganancia.

3) $y + 2z \geq 30$ La renta de los recursos para COSMO debe ser mayor o igual a su ganancia.

El lado izquierdo de la segunda restricción (3), por ejemplo, valora a una COSMO. Una COSMO utiliza una unidad de su capacidad de línea, la cual tiene un costo de oportunidad de y, además emplea dos horas de labor, cuyo costo de oportunidad es de z dólarez por hora. EQUS quiere ofrecer precios lo sufientemente altos de tal forma que el costo de oportunidad de una COSMO, y + 2z, sea mayor o igual a su contribución a la ganancia, que en este caso es de $ 30. Con lo anterior, justamente hemos formulado el problema de Programación Lineal Dual del fabricante de televisores.

Estamos listos para introducir la idea del problema Dual. Para cualquier problema de Programación Lineal con m restricciones y n variables, existe un problema estrechamente relacionado con n restricciones y m variables. Cualquiera de ellos, si tienen solución, se pueden resolver. Con la característica que si alguno de ellos tiene solución óptima, es posible determinar la solución del otro a partir de los datos de solución del primero. Los coeficientes en un renglón de uno aparecen en una columna o variable del otro. En el óptimo ambos problema proporcionan la misma solución. En nuestro ejemplo los dos problemas son:

PROBLEMA PRIMAL

```
MAX.   20 A  +  30 C
Sujeto a:
2)   A  ≤  60
3)   C  ≤  50
4)   A  +  2 C  ≤  120
END.
: GO
              EL OPTIMO SE ENCONTRO EN EL PASO 3.
                 VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO.
     1)                    2100.000
     VARIABLE                   VALOR       COSTO REDUCIDO.
          A                  60.00000           0.00000
          C                  30.00000           0.00000

     RENGLON                  HOLGURA       PRECIOS DUALES.
     2)                       0.00000           5.00000
     3)                      20.00000           0.00000
     4)                       0.00000          15.00000
```

PROBLEMA DUAL

```
MIN.      60 x  +  50 y  +  120 z.
Sujeto a:
2)  x  +  y  ≥  20
3)  y  + 2z  ≥  30
END
: GO
               EL OPTIMO SE ENCONTRO EN EL PASO 2
                  VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO
     1)                    2100.000
     VARIABLE                   VALOR       COSTO REDUCIDO.
          x                   5.00000           0.00000
          y                   0.00000          20.00000
          z                  15.00000           0.00000

     RENGLON                  HOLGURA       PRECIOS DUALES.
     2)                       0.00000        - 60.00000
     3)                       0.00000        - 30.00000
```

Note que los valores de las funciones objetivos son los mismos en ambos problemas. Excepto posiblemente por los signos, los valores de precios duales para un problema son los valores de las variables de decisión para el otro y los valores de la holgura para uno son los costos reducidos para el otro. Por qué el Dual puede ser de interés?

La dificultad computacional de un problema de Programación Lineal aproximadamente es proporcional a m^2n. Donde m = núm. de renglones, n = núm. de columnas. Así, en nuestro problema las dificultades son:

PRIMAL	DUAL
$3^2 * 2 = 18$	$2^2 * 3 = 12.$

Note que el dual fué resuelto en 2 iteraciones mientras que el primal en 3.

Adicionalmente, ciertas restricciones tales como simples cotas superiores, por decir $x \leq 1$, computacionalmente tienen menor gasto que las restricciones arbitrarias. Si el dual contiene sólo un pequeño número de restricciones arbitrarias, entonces puede resultar fácil resolver el problema dual aún cuando éste pueda tener un número grande de restricciones simples.

El término "precio dual" surge porque la información de precio marginal es el valor de una variable de decisión en el problema dual.

Podemos resumir la idea del problema dual como sigue. Si el problema original o primal tiene una función objetivo de MAXIMIZAR con restricciones $\leq$, entonces su correspondiente problema dual tiene una función objetivo de MINIMIZAR con restricciones de $\geq$. El dual tiene una variable por cada restricción en el primal y una restricción por cada variable en el primal. El coeficiente en la función objetivo de la k-enésima restricción en el primal. El lado derecho de la restricción k en el dual es igual al coeficiente en la función objetivo de la variable k en el primal. Simultaneamente, el coeficiente en el renglón i de la variable j en el dual es igual al coeficiente en el renglón j de la variable i en el primal.Para convertir todas las restricciones en un problema al mismo tipo, note las dos transformaciones siguientes:

1.- La restricción $3x - 4y \geq 12$ equivale a $-3x + 4y \leq -12$
2.- La restricción $2x + 3y = 5$ equivale a dos restricciones $2x + 3y \geq 5$ y $2x + 3y \leq 5$

Sea el problema:

MAX $4x - 2y$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} 2x + 6y &\le 12 \\ 3x - 2y &= 1 \\ 4x + 2y &\ge 5 \end{aligned}$$

Usando las transformaciones anteriores.

MAX $4x - 2y$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} 2x + 6y &\le 12 \\ 3x - 2y &\le 1 \\ -3x + 2y &\le -1 \\ -4x - 2y &\le -5 \end{aligned}$$

Introduciendo las variables duales **r, s, t,y m** correspondientes a las cuatro restricciones, podemos escribir el dual como:

MIN. $12r + s - t - 5u$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} 2r + 3s - 3t - 4u &\ge 4 \\ 6r - 2s + 2t - 2u &\ge -2 \end{aligned}$$

I.3.11 Análisis Dimencional y Cómo evitar errores comúnes

Cuando usted desarrolla una primera formulación de un problema real, la formulación puede contener errores. Esos errores pueden caer dentro de las siguientes categorías:

1.- Errores tipográficos.
2.- Errores fundamentales de formulación.
3.- Errores de aproximación.

Los dos primeros tipos de errores son fáciles de corregir, una vez que son identificados. En principio, los errores de tipo 1 son rápidos de identificar porque muchas veces se deben a ayudantes. Sin embargo en un modelo grande puede ser difícil rastrearlos. Los errores de tipo 2 son más fundamentales, ya que involucran una mala interpretación tanto del problema real como de la naturaleza de los modelos de Programación Lineal. Los errores de tipo 3 son más sutíles. Generalmente un modelo de Programación Lineal de una situación real involucra alguna aproximación; por decir algo, muchos productos se agregan para formar un solo macro producto, o los días de una semana se juntan, o los costos que no son totalmente proporcionales a su volumen, no obstante, son tratados como lineales. Para evitar errores de tipo 3 se requiere destreza para identificar aquellas aproximaciones que pueden tolerarse.

Discutamos primero los errores de tipo 1. El mayor problema es su detección. Muchos códigos de paquetes de Programación Lineal contienen módulos para ayudar a detectar errores garrafales. Uno de esos módulos es lo que resulta del comando PICTURE, que es una visión abreviada de los coeficientes de la formulación en forma tabular. Para ilustrar su uso, estudiaremos la siguiente formulación, la cual contiene errores tipográficos que pueden identificarse sin comprender la formulación:

MIN. $5\ A0 + 6\ A1 + 2\ A2 + 4\ B0 + 3\ B1 + 7\ B2 + 2\ C0 +$
$9\ C1 + 8\ C2.$

Sujeto a:

2) $A0 + A1 + A2 \leq 8$
3) $B0 + B1 + B2 \leq 9$
4) $C0 + C1 + C2 \leq 6$
5) $A0 + B0 + CO = 6$
6) $A1 + B1 + C1 = 5$
7) $A2 + B2 + C2 = 9$

END.

La visión (PICTURE) del problema se aprecia como sigue: (los nombres de las variables aparecen en la parte superior en forma vertical)

	A0	A1	A2	B0	B1	B2	C0	C1	C2	CO	
1:	5	6	2	4	3	7	2	9	8		MIN
2:	1	1	1								< 8
3:				1	1	1					< 9
4:							1	1	1		< 6
5:	1			1						1	= 6
6:		1			1			1			= 5
7:			1			1			1		= 9

Precisamente de la observación de la estructura de los unos en las restricciones, uno puede detectar una aberración. El 1 que aparece en la última columna parece estar fuera de lugar, y corresponde a la cuarta restricción (5). Al parecer lo que ha pasado es que la variable llamada C0 (C, cero) fué escrita como CO (C, letra O) en el renglón 5. La computadora es muy literal y las considera como dos variables diferentes. Cuando el error es corregido, la visión que aparece es:

	A_0	A_1	A_2	B_0	B_1	B_2	C_0	C_1	C_2	
1:	5	6	2	4	3	7	2	9	8	MIN.
2:	1	1	1							< 8.
3:				1	1	1				< 9.
4:							1	1	1	< 6.
5:	1			1			1			= 6.
6:		1			1			1		= 5.
7:			1			1			1	= 9

Adicionalmente, si el usuario es afortunado, los errores de tipo 1 se manifestarán por sí mismos, causando soluciones que obviamente son incorrectas.

Por lo que toca a los errores en la formulación, éstos son más difíciles de discutir, ya que son de muchas formas. La clase de errores que frecuentemente comete un novato pueden exponerse haciendo el llamado "análisis dimensional". Cualquiera que haya tomado un curso de Física o Química recordará a ésto como "verificar nuestras unidades". Ilustremos lo anterior considerando un ejemplo:

Un distribuidor de juguetes está analizando su estrategia para armar cierto tipo de juguetes y venderlos en la próxima temporada navideña. Por otra parte, son dos los tamaños del juguete. El conjunto grande está formado por 60 barrotes y 30 conectores, mientras que el conjunto chico está compuesto, de 30 barrotes y 20 conectores. En este caso, un factor importante es que para esta estación, el fabricante dispone de sólo 60,000 conectores y 93,000 barrotes. Asimismo, se sabe que es capaz de vender toda la producción de ambos tamaños. Las ganancias son de \$ 5.5 y \$ 3.5. por conjunto, para los tipos grande y chico, respectivamente. Cuánto debería el fabricante vender de cada conjunto para maximizar su utilidad?

El fabricante desarrolló la siguiente formulación: definiendo

B = No. de conjuntos de tipo grande a ensamblar.

T = No. de conjuntos de tipo pequeño a ensamblar.

S = No. de barrotes que se emplean.

C = No. de conectores que se emplean.

MAX. 5.5. B + 3.5 T
Sujeto a:

$$B - 30\ C - 60\ S = 0$$
$$T - 20\ C - 30\ S = 0$$
$$C \le 60{,}000$$
$$S \le 93{,}000$$

Note que las primeras dos restricciones son equivalentes a:

$$B = 30\ C + 60\ S$$
$$T = 20\ C + 30\ S$$

Está de acuerdo con la formulación? Si es así, analicemos su solución.

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO

1) 54555000.

VARIABLE	VALOR	COSTO REDUCIDO.
B	7380000.00	0.0000
T	3990000.00	0.0000
C	60000.00	0.0000
S	93000.00	0.0000

RENGLON	HOLGURA	PRECIOS DUALES.
2)	0.0000	5.5000
3)	0.0000	3.5000
4)	0.0000	235.0000
5)	0.0000	435.0000

Existe algo en la formulación que es incorrecto, ya que la solución es capaz de producir magicamente cerca de 4 millones de conjuntos chicos con solo casi 100,000 barrotes.

La equivocación que fué cometida es muy común en los recien llegados a la Programación Lineal: describir las caracteristicas de una actividad por una restricción, la cual siempre puede pensarse como una declaración que establece que el empleo de algún insumo debe ser menor o igual a la fuente de ese insumo. Las últimas dos restricciones efectivamente tienen esta característica, pero las dos primeras no.

Si uno analiza las dimensiones de los componentes de las primeras dos restricciones, se puede ver que existe una dificultad. Las dimensiones (o unidades) para la primera restricción son:

TERMINO	UNIDADES.
B	Conjuntos grandes.
30 C	30(conectores/(conjunto grande)) * conectores
60 S	60 (barrotes/ (conjunto grande)) * barrotes.

Evidentemente, cada componente tiene diferentes unidades, por lo que no se puede efectuar la suma de todos. Es clásica la aseveración de que no se pueden sumar manzanas con naranjas. Las unidades de todos los componentes de una restricción deben ser las mismas.

Si primero se formula un problema en palabras y luego se convierte a su forma matemática, con frecuencia se evita el tipo de error anterior. En palabras, deseamos:

Maximizar la ganancia

Sujeto a que:

El número de conectores empleados sea ≤ al número de conectores de que se dispone.

El número de barrotes empleados sea ≤ al número de conectores de que se dispone.

Convertido a forma algebráica es:

MAX 5.5 B + 3.5 T
s.a.

2) 30 B + 20 T ≤ 60000
3) 60 B + 30 T ≤ 93000
END.

Las unidades de la restricción 30 B + 20 T ≤ 60 000 son:

TERMINO	UNIDADES.
30 B	30 (conectores/(conjunto grande)) * (conjuntos grandes) = 30 conectores.
20 T	20 (conectores/(conjunto chico)) * (conjuntos chicos) = 20 conectores.
60 000	60,000 conectores.

De esta manera, todos los términos tienen las mismas unidades, "conectores". Al resolver el problema obtenemos una solución congruente.

VALOR DE FUNCION OBJETIVO

1)	10 550.00	
VARIABLE	VALOR	COSTO REDUCIDO
B	200.0000	0.0000
T	2 700.0000	0.0000

RENGLON	HOLGURA	PRECIOS DUALES.
2)	0.0000	0.150000
3)	0.0000	0.010000

I.3.12. Error por la NO Simultaneidad

Se debe hacer hincapié de que todas las restricciones en un problema de Programación Lineal deben aplicarse simultaneamente. Una combinación de niveles de actividad que se establezca, debe satisfacer al mismo tiempo todas las restricciones. Las restricciones no se hacen aplicar de una u otra manera, aunque queramos que ello sea así interpretado. Como un ejemplo, suponga que denotamos por B el tamaño del lote para una corrida de producción de calzado una política razonable puede ser: si se hace una corrida, ésta debe ser de al menos dos docenas de unidades. Así, B será ya sea cero o algún número mayor o igual a 24. Aquí se tiene una tentación para establecer esta política escribiendo las dos restricciones.

$$B \leq 0$$
$$B \geq 24.$$

El deseo es que exáctamente una de esas restricciones se cumpla. Si dichas restricciones son parte de una formulación de Programación Lineal, la computadora rechazará tal formulación enviando un comentario de que "no existe solución factible". No existe un valor de B que simultaneamente sea menor o igual a cero y mayor o igual a 24.

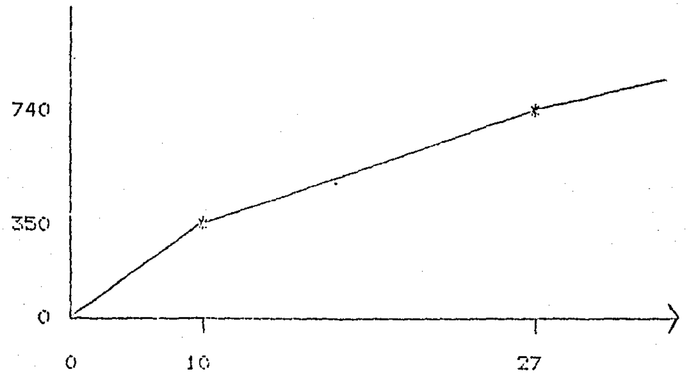
Si restricciones como las anteriores son importantes, se debe recurrir a la Programación Entera.

I.3.13. NO Linearidad y Variables NO Restringidas en Signo.

Superficialmente, el supuesto de linearidad aparece prohibitivamente restrictivo. Existen muchas aplicaciones, sin embargo, donde esta restricción aparente puede burlarse con una hábil formulación. Suponga que un examen minucioso del problema ASTRO/COSMO revela que la ganancia de los COSMOS realmente no es lineal sino más bién no lineal como se muestra en la siguiente tabla:

Para unidades entre	Ganancia por unidad.
0 - 10	35
11 - 27	30
28 en adelante	25

Graficamente, la ganancia es una función del volumen de COSMOS tal como se expresa en la siguiente figura:



VOLUMEN DE COSMOS

Claramente, la ganancia de la producción de COSMOS no es proporcional al volumen y por lo tanto no es lineal. Se puede validamente incorporar esta no linearidad al modelo y si es así, como?

Para resolver esta dificultad de formulación es necesario hurgar de manera más profunda en la causa de la no linearidad. Actualmente, las primeras 10 unidades por día de COSMOS pueden venderse lucrativamente casi a precio de menudeo. Las siguientes 17 unidades por día pueden producirse bajo la marca de una compañía que tenga tiendas que cubran el territorio Nacional y venderselas con $ 5 menos por unidad. Finalmente, cualquier producción en exceso de 27 puede ofrecerse también bajo otra marca e inundar el mercado internacional si el precio permanece bajo.

El tratamiento obvio para este problema es pensar que se tienen tres distintos productos en la línea COSMOS, que llamaremos como C1, C2 y C3. La formulación ampliada es:

$$\text{MAX} \quad 20\,A + 35\,C1 + 30\,C2 + 25\,C3$$

s.a.

$$\begin{array}{llllllll} A & & & & & & \le & 60 \\ & & C1 & + & C2 & + \; C3 & \le & 50 \\ A & + & 2C1 & + & 2C2 & + \; 2C3 & \le & 120 \\ & & C1 & & & & \le & 10 \\ & & & & C2 & & \le & 17 \end{array}$$

Cuando este problema se resuelve, se tiene la solución:

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO.

1) 2135.000

VARIABLE	VALOR	COSTO REDUCIDO.
A	60.0000	0.0000
C1	10.0000	0.0000
C2	17.0000	0.0000
C3	3.0000	0.0000

RENGLON	HOLGURA	PRECIOS DUALES.
2)	0.0000	7.5000
3)	20.0000	0.0000
4)	0.0000	12.5000
5)	0.0000	10.0000
6)	0.0000	5.0000

Note que los niveles de producción de ASTRO y COSMO son los mismos que en la formulación original en la que se hizo caso omiso de las no linearidades.

El artificio para salvar la violación de una actividad o variable en varias actividades o variables, es el método típico para representar los efectos no lineales. Especificamente:

"Cualquier variable que tenga efectos no lineales debe reemplazarse por una secuencia de variables, cada una de las cuales: 1) tiene efectos lineales y 2) tiene una cota superior que limita su rango de valores. El valor de la variable original es la suma de las nuevas variables".

Hemos contestado la pregunta de cómo incorporar la no linearidad, pero la pregunta de validez permanece. El método podría ser incorrecto e inválido si, por ejemplo, obtenemos una solución con C1 = 0 pero C2 = 10. Esto ciertamente es factible para la formulación de Programación Lineal, pero resulta inaceptable por la descripción del problema; ya que no podemos vender las C2 a $ 30 la unidad hasta que vendamos las primeras 10 a $ 35. Esta solución no puede ser óptima. Nótece que siempre es preferible C1 a C2. La observación clave es que las primeras variables, en la secuencia de reemplazo, son más redituables que las últimas. Esta observación puede generalizarse como:

"Las no linearidades pueden ser aproximadamente válidas para un modelo de Programación Lineal si ellas corresponden a rendimientos de escala decrecientes; esto es, unidades adicionales de una actividad no son *más* redituables que aquellas en intervalos anteriores."

De esta manera, las no linearidades correspondientes a cuestiones como tiempo extra por lo general pueden manejarse facilmente con Programación Lineal; mientras que las eficiencias en producción resultantes de grandes volúmenes no pueden representarse de igual manera. Si dichas economías de escala son criticas, entonces se debe recurrir a métodos de modelación tales como la Programación Entera.

Variables No Restringidas en Signo.

Ya que es más la regla que la excepción, la mayor parte de los paquetes de Programación Lineal suponen a las variables como no negativas, aún si el usuario no lo hace explicitamente dando restricciones de la forma $x \geq 0$. Este supuesto no es crítico y facilmente es burlado.

De nueva cuenta veamos una situación práctica con intuición respecto a cómo formular esta ligera restricción. Suponga que una de las variables en su modelo es el cambio en el nivel de la fuerza de trabajo para el siguiente periodo, relativo al período actual que se supone es de 1,100 gentes. Llamaremos a este cambio la variable **D** y el nivel absoluto en el siguiente período como P. Así:

$$D = P - 1,100$$

Si a propuesto que el nivel para el siguiente período sea menor de 1,100, entonces **D** será negativo, por lo que deseamos que **D** no tenga restricción en signo. Si usted piensa respecto al problema, puede decidir que resulta provechoso distinguir entre incrementar y disminuir el nivel de la fuerza de trabajo usando dos variables diferentes. **DU** por ejemplo, para medir el incremento y **DD** para medir la disminución. Si quisiéramos incluir en la formulación lo anterior, escribiríamos:

Si $P \geq 1,100$ entonces $DU = P - 1,100$ y $DD = 0$
pero si $P \leq 1,100$ entonces $DD = 1,100 - P$ y $DU = 0$

Veremos que en la siguiente restricción generalmente se logra el mismo efecto: $DU - DD = P - 1,100$
o en forma estandard:

$$DU - DD - P = - 1,100$$

No existe nada en esta unica restricción que explicitamente restrinja a que **DU** y **DD** sean menor de cero; sin embargo, cuando se resuelve la formulación, la computadora realizará su procedimiento sin que haya nada a conseguirse por el hecho que simultaneamente se incremente (contratando) y se disminuya (despidiendo) el nivel de la fuerza de trabajo.

Del ejemplo anterior intuimos un mecanismo para representar variables no restringidas en signo cuando unicamente podemos usar variables no negativas; de manera formal:

"Una variable x que es irrestricta en signo puede representarse por medio de dos variables no negativas x_1 y x_2 si se reemplaza a x por la diferencia $x_1 - x_2$. Si x_2 es no cero en la solución, entonces $x = -x_2$, de otra manera $x = x_1$.

Algunos paquetes permiten al usuario identificar variables no restringidas, en cuyo caso el artificio anterior es innecesario. Veremos posteriormente que la presencia de variables de este tipo nos proporciona una oportunidad para reducir el tamaño de la formulación de Programación Lineal.

II. MODELOS DE PROGRAMACION LINEAL Y SU FORMULACION

Introducción

La formulación correcta de un modelo de programación lineal significa el 90 % (por decir algo) del éxito de la solución a un problema de la vida real. Generalmente se presentan situaciones difíciles de comprender si no se cuenta con un método que permita abstraer la realidad y plasmarla en un modelo que refleje, en lo posible, el comportamiento bajo estudio. La forma de estructurar los problemas hasta llegar a obtener un modelo matemático satisfactorio se basa en la llamada Metodología de la Investigación de Operaciones. En la cual , a diferencia del Método Científico, la experimentación se realiza a través de modelos generados para este fin. Tal es el caso de un modelo de programación lineal.

Por este motivo, en el subcapítulo II.1 se sintetizan los pasos fundamentales de la metodología antes dicha. Adicionalmente, también se describen algunos problemas que surgen en la vida real como en : producción, asignación de recursos, corte de material, mezclas, planeación etc.. Finalmente, en el subcapítulo II.2 se presenta la formulación de los problemas mencionados ,los comandos de LINDO utilizados , y un análisis de los resultados obtenidos.

II.1. Pasos Generales para la Formulación y Utilización de un Modelo.

Se puede decir que son cinco pasos fundamentales para el empleo de la Programación Lineal en la práctica:

1.- Comprender el problema real.
2.- Formular el modelo de Programación Lineal.
3.- Acopio y generación de los datos del modelo.
4.- Resolver el Programa.
5.- Implantar la solución.

Por supuesto habrá cierto grado de iteración en el proceso anterior, ya que por ejemplo, no siempre se obtiene el modelo más apropiado a la primera, por lo que el último programa será el que resuelva la computadora. Los pasos 1, 3 y 5 son, si no los más difíciles, son los que más tiempo consumen. El éxito en el proceso depende en gran medida del grado de conocimiento que se tenga del comportamiento de la organización o en general de la problemática; por ejemplo, conociendo a los que saben cual es la tasa de producción real de una máquina. El paso 2 requiere de más habilidad.

La formulación de un buen modelo de Programación Lineal es un arte. Es un arte porque involucra la abstracción de la realidad. La capacidad artística consiste en desarrollar modelos sencillos que, no obstante, sean buenas aproximaciones al mundo real. Veremos que existe un número de problemas que fueron una buena aproximación por medio de Programación Lineal.

Con todos los comentarios anteriores en mente se dedicará mayor atención a la formulación de modelos; comenzando con verdades universales que al parecer se aplican a los pasos 3 y 5; y dando una introducción a los mecanismos del paso 4.

II.1.1. Algunas Clases de Problemas.

¿No se sentiría más a gusto si su habilidad para estructurar problemas se enriqueciera con un paquete de problemas típicos o categorías que pueda relacionar con nuevos problemas a los que se enfrente? En la práctica, un modelo demasiado grande puede resultar inconveniente si se formula en una sola categoría, por lo que muchas veces es más adecuado utilizar una combinación de dos o más de ellas. La lista de problemas típicos no es exhaustiva, de manera que se pueden encontrar situaciones que sean inconvenientes con alguno de los modelos propuestos; por lo que en este caso, la modelación será original.

Problemas de Producción.

En este tipo de problemas se tiene una colección de productos a enviar al mercado, y un conjunto finito de recursos a utilizar para la fabricación de los mismos. Asociado con cada producto se tiene una tasa de contribución a la ganancia (ganancia neta, precio neto, utilidad) y un conjunto de coeficientes técnicos sobre el uso de los recursos. El objetivo es encontrar los niveles de producción que maximicen la utilidad, sujetos a no emplear más recursos de los que se tienen disponibles. Estos problemas siempre son de la forma "Maximizar ganancia sujeto a restricciones de menor o igual".

Problemas de Asignación de Servicios y Corte de Material.

Estos problemas son complementarios (en la jerga de programación lineal se llaman duales) a los problemas de producción, y su forma es minimizar un costo sujeto a restricciones de mayor o igual". Las variables en este caso pueden corresponder al número de gente contratada para varios turnos durante el día. Las restricciones surgen del hecho que la mezcla de variables seleccionadas deben cubrir las necesidades durante cada hora del día.

Problemas de Mezclas.

Los problemas de este tipo se presentan en el manejo de alimentos, y en las industrias de refinación de petróleo. El problema es mezclar un conjunto de materias primas, por decir, diferentes tipos de carne, cereal, granos, o petróleos crudos, etc., en productos terminados, como embutidos, alimento para perro, o gasolina; de tal forma que el costo unitario del producto terminado se minimice satisfaciendo ciertas restricciones de calidad y mínimos nutricionales.

Problemas de Planeación Multiperiódica.

Esta clase de problemas tal vez son los más importantes. Dichos modelos toman en cuenta el que las decisiones que se hacen en un período, parcialmente determinan qué decisiones se permitirán en períodos futuros. El submodelo empleado cada período puede ser un problema de producción, de mezcla o de algún otro tipo. Dichos submodelos generalmente estan vinculados por medio de variables de inventario; por ejemplo, el inventario de materia prima, productos terminados, flujo de caja, préstamos, etc., los cuales se llevan de un período a otro.

Modelos de Insumo - Producto

En las grandes compañías, el producto de un proceso puede ser el insumo de otro. La General Motors, por ejemplo, fabrica motores en ciertas plantas; esos motores pueden venderse de manera directa a los clientes o pueden emplearse para sus propias unidades de autos y camiones. Una compañía como la anterior, se dice que está integrada verticalmente. En un modelo integrado de esta manera, en general se tiene una restricción por cada tipo de producto intermedio; en términos matemáticos la restricción hace cumplir la ley de la Física que establece que "la cantidad empleada de un producto intermedio por varios procesos, no puede exceder a la cantidad de este producto elaborado por otros procesos". Generalmente existe una variable de decisión por cada tipo de proceso disponible.

Si el problema se extiende a toda una economía, entonces los modelos considerados tienden a ser similares al modelo de insumo-producto popularizado por Wassily Leontief (1951). Cada industria se describe por los productos de insumo que requiere y los productos que elabora. Dichos productos pueden volverse insumos para otras industrias. El problema es determinar los niveles apropiados a los que cada industria debe operar para satisfacer los requerimientos de un cosumo específico.

Problemas de Redes.

Los modelos de Programación de Redes merecen una mención especial, ya que tienen una forma particularmente simple que hace que se puedan describir facilmente como una gráfica o red. Por lo tanto tienden a ser fáciles de explicar y comprende. Problemas de redes surgen frecuentemente en problemas de distribución de productos. Cualquier empresa que fabrique un producto en varios lugares y lo distribuya a muchos clientes puede encontrar que una red de Programación Lineal es sumamente útil.

Una razón principal para individualizar este tipo de problemas, es que existen procedimientos especializados de solución para ello. En problemas grandes, dichos procedimientos pueden ser marcadamente más veloces que el procedimiento general de solución. Uno de los problemas más sencillos de redes es aquel en el que se trata de encontrar la ruta más corta de un punto a otro. Una ligera variación a este problema, que es la de determinar la ruta más larga, pasa a ser un componente importante del PERT (Programa de evaluación y técnica de control) y el CPM (Método de ruta crítica).

Planeación Estocástica.

Uno de los supuestos fundamentales de la Programación Lineal es que todos los datos son conocidos con certeza. Sin embargo, existen situaciones en donde ciertos datos clave son altamente aleatorios. Por ejemplo, cuando una compañía petrolera efectúa decisiones sobre su producción para el periodo invernal que se avecina, la demanda de combustible es una variable mucho muy aleatoria. No obstante, si la distribución de probabilidades para todas las variables aleatorias se conoce, entonces se puede aplicar una técnica de modelaje para convertir un problema que es de Programación Lineal excepto por los elementos aleatorios en uno equivalente, aunque posiblemente crezca, que sea determinístico.

Teoría de Juegos.

La teoría de juegos tiene que ver con el análisis de situaciones competitivas. En su forma más simple un juego consiste de dos jugadores, cada uno de los cuales tiene a su disposición un conjunto de posibles decisiones. Cada jugador debe seleccionar una estrategia para hacerla efectiva, ignorando la selección que el otro jugador haga. Posteriormente, cada jugador recibe un pago que depende de la combinación de decisiones que se hicieron. En este caso, la determinación de la estrategia óptima de cada jugador puede formularse, también, como un modelo de Programación Lineal.

Aplicación a la Estadística.

Mucho de la teoría estadística se refiere a la predicción basada en un conjunto de datos. Comunmente la predicción se realiza de tal forma que en algún sentido se minimice el error cuadrático del pronóstico. Hablando de manera aproximada, un dato que está dos veces alejado de la media se pondera en cuatro veces el error en la construcción de la predicción. Si lo que se desea es usar otras medidas de bondad del ajuste, tal como el error cuadrático en la predicción, entonces la Programación Lineal proporciona una herramienta poderosa.

II.2. PRODUCCION.

Los problemas de producción frecuentemente constituyen una parte importante de problemas grandes, como los modelos de planeación multiperiódica.

La característica de un problema de producción es que existen productos que pasan por un conjunto de instalaciones. Si existen m recursos y n productos, entonces la llamada tecnología se caracteriza por una tabla con m renglones y n columnas de coeficientes tecnológicos. El coeficiente en el renglón i, columna j, es el número de unidades de recurso i que se usa por cada unidad de producto j. Los números en un renglón de la tabla son simplemente los coeficientes de una restricción en un programa lineal. En un problema simple de producción esos coeficientes son no negativos. Adicionalmente, asociado con cada producto se tiene una contribución a la utilidad por unidad, y asociado con cada recurso se tiene una disponibilidad. El objetivo, en este caso, es encontrar cuánto producir de cada artículo; es decir, determinar la combinación óptima que maximice las utilidades, con la restricción de no usar más de lo que se tiene disponible de recursos.

Un problema de Producción .

Una cierta planta puede manufacturar cinco productos diferentes en cualquier combinación. Cada producto requiere tiempo de cada una de tres máquinas en la siguiente manera (todos los datos en minutos/unidad):

	MAQUINA		
PRODUCTO	1	2	3
A	12	8	5
B	7	9	10
C	8	4	7
D	10	0	3
E	7	11	2

Cada máquina dispone de 128 horas por semana.

Los productos A, B y C son competitivos, y cualquier cantidad hecha puede venderse a los precios de \$5, \$4 y \$5, respectivamente. Las primeras 20 unidades de D y E, producidas por semana, pueden venderse a \$4 cada una, pero lo que se fabrique en exceso de 20 se vende solo en \$3 cada una. Los costos variables de mano de obra son \$4 por hora para las máquinas 1 y 2, y \$3 por hora para la máquina 3. Los costos de material son \$2 para productos A y C y \$1 para productos B, D y E. Se desea maximizar la ganancia de la compañía.

La principal complicación en este problema es que las contribuciones a la ganancia de los productos D y E no son lineales. Para lo anterior, se puede utilizar el siguiente artificio para eliminar la complicación. Defina dos productos adicionales llamados D2 y E2 los cuales se venden a \$3 por unidad. Qué limites superiores deben establecerse sobre la venta de los productos originales D y E?. para ello se define:

	CONTRIBUCION POR UNIDAD
A: No. de unidades de A a producir por semana	5-2=\$3.
B: No. de unidades de B a producir por semana	4-1=\$3.
C: No. de unidades de C a producir por semana	5-2=\$3.
D: No. de unidades de D a producir por semana sin que sobrepase de 20/semana.	\$3.
D2: No. de unidades de D en exceso de las 20/semana. (El total de la producción de producto D es D+D2.)	\$2.
E: No. de unidades de E sin que sobrepase de 20/semana	\$3.
E2: No. de unidades de E producidas en exceso de 20	\$2.
M1: Horas de máquina 1 usadas/semana	-\$4.
M2: Horas de máquina 2 usadas/semana	-\$4.
M3: Horas de máquina 3 usadas/semana	-\$3.

La formulación del problema lineal resultante es:

FUNCION OBJETIVO

MAX 3A + 3B + 3C + 3D +2D2 + 3E + 2E2 -4M1 -4M2 - 4M3

SUJETO A:

```
2)      12A + 7B + 8C + 10D + 10D2 + 7E + 7E2 - 60M1 = 0
3)       8A + 9B + 4C + 11E + 11E2 - 60M2 = 0
4)      5A + 10B +7C + 3D + 3D2 + 2E + 2E2 - 60M3 = 0
5)      D ≤ 20
6)      E ≤ 20
7)      M1 ≤ 128
8)      M2 ≤ 128
9)      M3 ≤ 128
END.
```

Las primeras tres restricciones anteriores tienen unidades en minutos y especifican las horas de tiempo de máquina como una función del número de unidades producidas. Las siguientes dos restricciones (5 y 6) limitan el número de unidades de alta ganancia de D y E. Las tres restricciones finales limitan el tiempo de máquina que puede ser usado.

La restricción número dos puede primero escribirse como:

$$\frac{12A + 7B + 8C + 10D + 10D2 + 7E + 7E2}{60} = M1$$

Multiplicando por 60 y pasando M1 al lado izquierdo se obtiene la restricción dos. La solución del problema con LINDO es:

DESPUES DE LA ITERACION 8

VARIABLE	VALOR	COSTO REDUCIDO
A	0.00000	1.35833
B	0.00000	0.18542
C	942.49999	0.00000
D	0.00000	0.12917
D2	0.00000	0.12917
E	20.00000	0.00000
E2	0.00000	0.91875
M1	128.00000	0.00000
M2	66.49998	0.00000
M3	110.62501	0.00000

FUNCION OBJETIVO 1777.62

RENGLON	HOLGURA	PRECIO TOTAL
2	0	.297917
3	0	.0666667
4	0	.05
5	20	0

6	0	.0812497
7	0	13.875
8	61.5	0
9	17.375	0

La solución es simple. Las unidades de E que pueden venderse a un precio alto son las más redituables y se harán tantas como sea posible (20). De C se harán tantas como sea posible hasta agotar la capacidad de la máquina 1.

Este problema es un buen ejemplo en donde es muy fácil desarrollar formulaciones alternas al mismo problema. Esas formulaciones alternas pueden tener más o menos restricciones y variables. Por ejemplo, la restricción:

$$8A + 9B + 4C + 11E + 11E2 - 60M2 = 0$$

puede reescribirse como:

$$M2 = (8A + 9B + 4C + 11E + 11E2)/60$$

La expresión del lado derecho puede sustituirse por M2 donde quiera que esta aparezca. Ya que esta expresión, siempre será no negativa, la restricción de no negatividad sobre M2 automaticamente será satisfecha. De esta forma, M2 y la restricción anterior pueden eliminarse del problema si se está dispuesto a efectuar un esfuerzo aritmético. Cuando se aplican argumentos similares a M1 y M3 se obtiene la formulación:

FUNCION OBJETIVO.

MAX 1.416667A + 1.433333B + 1.85C + 2.183334D + 1.183333D2 + 1.7E + .7E2

SUJETO A:

2) $12A + 7B + 8C + 10D + 10D2 + 7E + 7E2 \leq 7680$
3) $8A + 9B + 4C + 11E + 11E2 \leq 7860$
4) $5A + 10B + 7C + 3D + 3D2 + 2E + 2E2 \leq 7680$
5) $D \leq 20$
6) $E \leq 20$

END.

Esta formulación tiene la presentación de la forma standard de Programación Lineal. Todas las restricciones son de capacidad. Note también que la solución a esta formulación es realmente la misma como la de la formulación anterior.

DESPUES DE LA ITERACION 4

VARIABLE	VALOR	COSTO REDUCIDO
A	0.00000	1.35833
B	0.00000	0.18542
C	941.49999	0.00000
D	0.00000	0.12917
D2	0.00000	1.12917
E	20.00000	0.00000
E2	0.00000	0.91875

FUNCION OBJETIVO 1777.2

RENGLON	HOLGURA	PRECIO DUAL
2	0	.23125
3	3690	0
4	1042.5	0
5	20	0
6	0	0.08125

El formulador perezoso puede dar la primera formulación mientras que otro puede proporcionar la segunda.

Proceso de Selección de Problemas de Producción.

Un hecho poco común en modelos de producción es que dos o más variables distintas en una formulación de Programación Lineal pueden corresponder a métodos alternos para el mejoramiento del mismo producto. En este caso, el programa lineal se usa no sólo para descubrir cuánto deberá fabricarse de un producto, sino también seleccionar el mejor proceso para vender el producto.

Un segundo hecho, que la mayor parte de las veces aparece en problemas de este tipo, es el argumento de que se debe producir cierta cantidad de un producto. Esta condición cae fuera de una formulación simple.

Otro Problema de Producción

La compañía AMFC elabora varios productos a partir de barras de acero. Uno de los pasos iniciales es una operación en donde se da forma a las barras por medio de máquinas con rodillos.

Existen tres máquinas disponibles para este propósito, sean éstas B3, B4 Y B5. Cuyas características son las siguientes:

MAQUINA	VELOCIDAD EN PIES/MIN.	ESPESOR ADBLE. EN PULGS.	HORAS DISP. POR SEMANA	COSTO M.O /HR. OPER
B3	150	3/16 a 3/8	35	$10
B4	100	5/16 a 1/2	35	$15
B5	75	3/8 a 3/4	35	$17

Esta semana se deben fabricar tres productos. AMFC debe producir al menos 218.000 pies de material de 1/4 de pulg., 114 000 pies de 3/8 y 111 000 pies de 1/2. Las ganancias por pie, excluyendo mano de obra para esos tres productos, son .017, .019 y .02. Estos precios se aplican a toda la producción. Por otra parte, el departamento de embarque tiene como límite 600 000 pies por semana, sin importar el espesor.

¿Cuáles son las restricciones y cuáles las variables de decisión de este problema?. Claramente existirán cuatro restricciones correspondientes a las tres máquinas y a la capacidad del departamento de embarque. Así como tres restricciones más correspondientes a los requerimientos de producción de los tres productos.

Las variables de decisión requieren una explicación mayor. Se tiene sólo una forma de producir material en 1/4 de pulgada, tres formas de producir 3/8 y dos maneras de producir de 1/2 pulgada. De este modo, se requiere tener al menos las siguientes variables de decisión. Por conveniencia numérica mediremos la longitud en miles de pies. Sean:

B34 = miles de pies de 1/4 producidas por B3
B38 = miles de pies de 3/8 producidas por B3
B48 = miles de pies de 3/8 producidas por B4
B58 = miles de pies de 3/8 producidos por B5
B42 = miles de pies de 1/2 producidos por B4
B52 = miles de pies de 1/2 producidos por B5

En la función objetivo debemos tener la contribución a la ganancia, incluyendo los costos por mano de obra. La tabla siguiente muestra dicha contribución para cada variable.

VARIABLE	CONTRIBUCION A LA GANANCIA/PIE.	
B34	0.01589	
B38	0.01789	
B48	0.01650	
B58	0.01522	(sigue)
B42	0.0175	
B52	0.01622	

Para las restricciones de la capacidad de máquina, se requiere del número de horas necesarias para procesar 1000 pies. De esta forma para la máquina B3 se tiene: 1000/(60min/hr) X (150 pies/min) = .111111 horas por 1000 pies. De manera similar, para B4 y B5 es .16667 horas por 1000 pies y .22222 horas por 1000 pies.

La formulación se puede escribir como:

MAX 15.89B34 + 17.89B38 + 16.5B48 + 15.22B58 + 17.5B42 + 16.22B52

SUJETO A:

0.11111B34 + 0.11111B38	≤ 35	Capacidad de las
0.16667B48 + 0.16667B42	≤ 35	máquinas(en horas)
0.22222B58 + 0.22222B52	≤ 35	

B34 + B38 + B48 + B58 + B42 + B52 ≤ 600 Capacidad de embarque (en miles de pies)

B34	≥ 218	Requerimientos de producción
B38 + B48 + B58	≥ 114	(en miles de pies)
B42 + B52	≥ 111	

Este es un ejemplo en el que vale la pena esforzarse para deducir la solución óptima a partir de los argumentos sobre los costos. El producto de 1/4" puede elaborarse sólo por la máquina B3, con lo que conocemos que B34 es al menos 218. El producto de 3/8" es más rentable que el de 1/4" en la máquina B3; por lo tanto se puede concluir que B34 = 218 y B38 tomar la holgura. Los productos 1/2" y 3/8" pueden elaborarse ya sea por B4 ó B5. En ambos casos, el de 1/2" es más rentable por pie, por lo que se conoce que B48 y B58 no deben ser más de lo absolutamente necesario. La pregunta es: Qué es lo absolutamente necesario? El de 3/8 es más rentable pasarlo por B3 que por B4 ó B5; así, resulta que la demanda de 3/8" se satisfacerá de B3 y si resulta insuficiente, el resto se obtendrá de B4 y de B5. Específicamente, se procede como sigue:

Hagamos B34 = 218.

Esto deja una holgura de 35 − 218 * .11111 = 10.78 horas en B3. Lo cual es suficiente para producir 97,000 pies de 3/8", con lo que se concluye que:

B38 = 97.

El resto de la demanda de 3/8" debe hacerse en B4 y B5.

Parece ser que debe hacerse en la máquina B4, ya que la contribución a la ganancia para 3/8" es más alta en ésta que en B5. Note, sin embargo, que el de 1/2" es también más rentable bajo B4 que en B5, por exactamente la misma cantidad. De esta manera, nos es indiferente la anterior selección. En forma arbitraria se usa la máquina B4 para completar el resto de la demanda de 3/8"; así:

B48 = 17

Ahora, cualquier capacidad restante se usará para elaborar producto de 1/2". En este caso existen 35- 17*.16667=32.16667 horas de capacidad en B4. En lo que respecta al embarque, actualmente se tiene una capacidad de 600 - 218 - 97 - 17 = 268 000 pies. B42 es más redituable que B52, por lo que B42 se hará lo más grande posible, tanto como:

32.16667/.16667 = 193 entonces.

B42 = 193

El resto de la capacidad de embarque es 268 - 193 = 75 por lo tanto:

B52 = 75

Por otra parte, la solución que se obtiene por medio de LINDO es la misma que la alcanzada anteriormente.

@ LINDO

FUNCION OBJETIVO

1) 10073.000

VARIABLE	VALOR	COSTO REDUCIDO
B34	218.000	0.00
B38	97.000	0.00
B48	17.000	0.00
B58	0.000	0.00
B42	193.000	0.00
B52	75.000	0.00

Nótese que B58 es cero y su costo reducido es también cero, lo que significa que B58 puede ser incremtado (y B48 reducido) sin afectar las ganancias, lo cual es consistente con lo adoptado anteriormente cuando se dijo que era indiferente fabricar B48 ó B58 para satisfacer la demanda de 3/8".

Cualquier programa lineal, en teoría, se puede resolver manualmente por argumentos económicos similares, pero en problemas de cierta magnitud, los cálculos resultan muy tediosos y se puede caer en errores aritméticos y lógicos importantes.

PROBLEMAS PROPUESTOS.

1.- Considere un fabricante que produce dos artículos, sean éstos A1 y A2. Cada producto se elabora con Poliester y Polypropileno. Las cantidades requeridas por cada uno de los dos productos aparece en la siguiente tabla:

Materia prima /unidad de producto terminado

A1	A2	
3	5	Poliester
6	2	Prolipropileno

Debido a las cuotas de importación, la compañía es capaz de obtener sólo 12 y 10 unidades de Poliester y Prolypropileno, respectivamente, cada mes. La compañía está interesada en planear la producción del siguiente mes. Para este propósito es importante conocer la ganancia por cada producto, la cual se ha establecido en $3. y $4. para el producto A1 y A2, respectivamente. Cuáles deben ser las cantidades a producir de A1 y A2 para el siguiente mes?.

2. La compañía de artículos electrónicos MATTEL produce motores para juguetes y pequeñas herramientas. El departamento de ventas, después de algunos estudios, ha hecho un pronóstico de ventas de 6100 unidades del motor Dynamoustruo para el siguiente trimestre. Esta es una meta que pondrá a prueba las capacidades de producción de dicha compañía. Un Dynamoustruo se ensambla a partir de tres componentes: eje, base y tapa. Es claro que algunos de estos componentes pueden ser comprados a proveedores externos, si se agota la capacidad propia. El costo de producción variable por unidad se compara con el costo del proveedor en la tabla siguiente:

COMPONENTE	COSTO PROVEEDOR	COSTO PROPIO
EJE	1.21	.81
BASE	2.50	2.30
TAPA	1.95	1.45

La planta consiste de tres departamentos. Los requerimientos de tiempo en horas de cada componente, en cada departamento, si se manufacturan en planta, se resumen en la siguiente tabla. Las horas disponibles para la producción de Dynomoustruo se listan en el último renglón.

COMPONENTE	DEPARTAMENTO		
	CORTE	FORMADO	FABRICACION
EJE	.04	.06	.04
BASE	.08	.02	.05
TAPA	.07	.09	.06
CAPACIDAD	820	820	820

a. Cuáles son las variables de decisión
b. Formular un programa lineal adecuado
c. Cuantas unidades de cada componente deberán comprarse al provedor?

3. Un rancho en Sonora cultiva tres parcelas cuya superficie y agua disponible aparecen enseguida.

PARCELA	SUPERFICIE (HAS)	AGUA DISPONIBLE (Ha.-30 cm)
1	400	1500
2	600	2000
3	300	900

Se pueden tener tres cosechas; sin embargo, la superficie máxima que puede ser cosechada de cada cultivo está limitada por la cantidad de equipo para regar que este disponible. Las principales características de los tres cultivos aparecen abajo:

CULTIVO	CAPACIDAD TOTAL DE MAQ. SEGADORA	REQUERIMIENTOS DE AGUA(Ha-cm/Ha)	GANANCIA ESPERADA$/Ha
SORGO	700	6	400
ALGODON	800	4	300
TRIGO	300	2	100

Se puede cultivar cualquier combinación sobre cada parcela.

a. Cuáles son las variables de decisión?
b. Formule el modelo de programación lineal

4. La formulación y solución del problema de selección de la producción de la compañía AMFC, visto en el cuerpo de este capitulo, se presenta enseguida. Basados en el reporte de solución conteste las siguientes preguntas:

a. Cuál es el valor de una hora adicional de capacidad de la máquina B4?

b. Cuál es el valor de dos horas adicionales de capacidad de la máquina B3?

MAX 15.89B34 + 17.89B38 + 16.5B48 + 15.22B58 + 17.5B42 + 16.22B52

SUJETO A:

2)	B34 ≥ 218	DEMANDA DE 1/4"
3)	B38 + B48 + B58 ≥ 114	DEMANDA DE 3/8"
4)	B42 + B52 ≥ 111	DEMANDA DE 1/2"
5)	0.11111B34 + 0.11111B38 ≤ 35	CAPACIDAD DE B3
6)	0.16667B48 + 0.16667B42 ≤ 35	CAPACIDAD DE B4
7)	0.22222B58 + 0.22222B52 ≤ 35	CAPACIDAD DE B5
8)	B34 + B38 + B48 + B58 + B42 + B52 ≤ 600	CAPACIDAD DE EMBARQUE

END.

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO

1) 10073.85

VARIABLE	VALOR	COSTO REDUCIDO
B34	218.000	0.00
B38	97.000	0.00
B48	17.000	0.00
B58	0.000	0.00
B42	193.000	0.00
B52	75.000	0.00

RENGLON	HOLGURA	PRECIO DUAL
2)	0.000	-2.9999
3)	0.000	-1.0000
4)	157.000	0.0000
5)	0.000	24.0299
6)	0.000	7.6800
7)	18.333	0.0000
8)	0.000	16.2200

RANGOS EN LOS QUE LA BASE NO CAMBIA

VARIABLE	COEFICIENTE ACTUAL	INCREMENTO PERMISIBLE	DECREMENTO PERMISIBLE
B34	15.8900	2.9999	INFINITY
B38	17.8900	INFINITY	2.6699
B48	16.5000	1.0000	0.0000
B58	15.2200	0.0000	INFINITY
B42	17.5000	0.0000	1.0000
B52	16.2200	1.2800	0.0000

RANGOS EN EL LADO DERECHO (RHS)

RENGLON	ACTUAL RHS	INCREMENTO PERMISIBLE	DECREMENTO PERMISIBLE
2	218.0000	97.000006	16.999994
3	114.0000	157.000055	16.999994
4	111.0000	157.000000	INFINITY
5	35.0000	1.888888	9.166672
6	35.0000	12.499996	13.750003
7	35.0000	INFINITY	18.333338
8	600.0000	82.500023	74.999978

II.3. ASIGNACION DE SERVICIOS Y PROBLEMAS DE CORTE DE MATERIAL.

Problemas de asignación de servicios.

En esta clase de problemas no existe una colección de recursos escasos a ser asignados, sino más bien se tiene una colección de requerimientos tal como el tamaño de un equipo de gentes durante varios periodos de tiempo. Cada actividad o variable contribuye a satisfacer algún subgrupo de requerimientos. El objetivo es seleccionar alguna combinación de niveles de actividad que satisfaga los requerimientos a un costo mínimo.

Ejemplo sobre la ubicación de servicios.

Plane y Hendrick (1977), usaron un modelo de programación lineal como punto de partida para localizar estaciones de bomberos en la ciudad de Denver. Una versión simplificada de su modelo nos proporciona una buena introducción a problemas de ubicación. Considérese a una ciudad como una colección de puntos de demanda de servicios de emergencia. Para lo cual, sobre un plano de la ciudad sobreponemos una cuadricula transparente con cuadros de media milla por lado.

Las estaciones deben ubicarse de tal forma que se minimicen los costos, pero con la restricción de que cada punto de demanda debe estar, por decir algo, a cinco minutos de una estación. Se puede identificar de antemano un conjunto de sitios potenciales para ubicar a las estaciones, esto es, ubicaciones actuales, más otros sitios adicionales. De tal forma que las recomendaciones propuestas pueden incluir algunas ubicaciones existentes. Plane y Hendrick representaron a la ciudad de Denver con 246 puntos de demanda e identificaron 112 lugares potenciales. A manera de ejemplo, suponga que existen 7 puntos de demanda denotados por 1, 2,.....7, y 5 sitios potenciales denotados por A, B,.....,E. Para cada punto de demanda, se ha tabulado los sitios que están dentro de los 5 minutos de recorrido de cada uno de ellos. Una Y en el renglón i, columna j indica que el lugar j esta dentro de los 5 minutos del punto de demanda i.

SITIOS POTENCIALES PARA ESTACION DE BOMBEROS

		A	B	C	D	E
COSTO(MILES)		310	250	260	330	280
PUNTOS DE DEMANDA	1			Y	Y	
	2	Y	Y			
	3	Y				Y
	4	Y			Y	Y
	5	Y	Y	Y	Y	
	6		Y	Y	Y	
	7				Y	Y

En el renglón de costo, se considera el costo anual, incluyendo el costo de capital por el hecho de tener una estación en un lugar en particular.

La clave para formular un modelo adecuado de Programación Lineal es identificar las variables de decisión, para esto definiremos:

$$A = \begin{cases} 1 & \text{si la estación se localiza en el lugar A} \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

$B = |$ etc.

.

.

Como se observa, el problema es realmente entero; ya que se requiere que A puede tomar valor 0 o 1. Un valor fraccional como .45 no tendría sentido. Por lo pronto haremos a un lado dicha consideración y formularemos el problema como si no fuera entero. Claramente, la función objetivo es:

$$\text{Min} \quad 310A + 250B + 260C + 330D + 280E$$

En este punto debemos especificar restricciones que forcen a que cada punto de demanda sea "cubierto". No es sorpresivo que existan tantas restricciones, como puntos de demanda, en donde se establezca que al menos uno de los lugares se encuentra dentro de los 5 minutos de recorrido respecto a una estación.

Por ejemplo,para el punto de demanda 4, el requerimiento es equivalente a la desigualdad:

$$A + D + E \geq 1$$

Ya que A, D y E son los únicos lugares que se encuentran hasta 5 minutos del puntos 4. El modelo completo es:

Min 310A + 250B + 260C + 330D + 280E

Sujeto a:

2) C + D ≥ 1
3) A + B ≥ 1
4) A + E ≥ 1
5) A + D + E ≥ 1
6) A + B + C + D ≥ 1
7) B + C + D ≥ 1
8) D + E ≥ 1

END

La solución es:

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO

1) 640.0000

VARIABLE	VALOR	COSTO REDUCIDO
A	1.0000	0.0000
B	0.0000	150.0000
C	0.0000	0.0000
D	1.0000	0.0000
E	0.0000	0.0000

RENGLON	HOLGURA	PRECIOS DUALES
2)	0.0000	-260.0000
3)	0.0000	-100.0000
4)	0.0000	-210.0000
5)	1.0000	0.0000
6)	1.0000	0.0000
7)	0.0000	0.0000
8)	0.0000	- 70.0000

No. DE ITERACIONES = 6

La solución de costo mínimo es ubicar estaciones en los lugares A y D. El costo reducido de 150 sobre B es sorprendente. Ya que, aunque B tiene el costo más bajo, el costo reducido indica que es el lugar menos atractivo para poner una estación.

Los costos reducidos de cero sobre los lugares C y E, que no fueron escogidos, sugieren que pueden existir soluciones óptimas alternas considerando C y/o E; sin embargo, no existe óptimo alterno.

Ahora es conveniente regresar al punto, que surgió al principio de este problema, sobre la integralidad en la formulación. Al respecto, se puede decir que se tuvo suerte en este ejemplo ya que la solución del problema de Programación Lineal resultó entera.

Problemas de programación de equipos de trabajo.

Una parte del manejo de la mayor parte de las instalaciones de servicio al público es la programación del personal, esto es, decidir cuanta gente emplear. Este problema se presenta en compañías de teléfonos, bancos, hospitales, etc.

El proceso de solución ,para este tipo de problemas, consiste de al menos tres partes: (1) Desarrollar un buen pronóstico sobre el número de personas que se requieren durante cada hora del día o cada día de la semana durante el periodo de programación; (2) Identificar los posibles equipos de trabajo con base en el personal disponible y las regulaciones sindicales; por ejemplo, un equipo en particular puede trabajar de martes a sábado con lo que tendrían dos días libres; (3) Determinar cuanta gente debe trabajar en cada equipo, de tal forma que se minimicen los costos y el número total de gente durante cada periodo de tiempo; con el fin de que satisfagan los requerimientos determinados en (1). De los pasos anteriores, la programación lineal es útil sólo en el paso (3).

Ejemplo sobre la Programación de Equipos de Trabajo.

Una carretera en el norte de Chicago tiene una caseta de cobro con el siguiente cuadro de demandas durante cada periodo de 24 horas.

HORAS	COBRADORES NECESARIOS
12 a.m. a 6 a.m.	2
6 a.m. a 10 a.m.	8
10 a.m. a 1/2 día	4
1/2 día a 4 p.m.	3
4 p.m. a 6 p.m.	6
6 p.m. a 10 p.m.	5
10 p.m. a 12 noche	3

Cada cobrador tiene una jornada de 4 horas, descansa una y luego trabaja otras 4 horas. El cobrador puede comenzar en cualquier hora. Suponiendo que el objetivo es minimizar el número de cobradores a emplear, formular un modelo de programación lineal apropiado.

Formulación y Solución.

Definamos las siguientes variables de decisión.

x_1 = número de cobradores que empiezan a trabajar a la media noche.

x_2 = número de cobradores que empiezan a trabajar a la 1 de la mañana.

.
.
.

x_{24} = número de cobradores que empiezan a trabajar a las 11 de la noche.

Hay que notar que se tiene una restricción por cada hora del día, estableciendo que el número de cobradores en una hora específica debe ser $\geq$ al número requerido en esa hora. El objetivo será minimizar el número de cobradores contratados para el periodo de 24 horas. De manera formal el modelo es:

Min $\quad x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_{24}$

Sujeto a:

$x_1+x_{24}+x_{23}+x_{22}+x_{20}+x_{19}+x_{18}+x_{17} \geq 2$ (12 de la noche a 1 a.m)

$x_2+x_1+x_{24}+x_{23}+x_{21}+x_{20}+x_{19}+x_{10} \geq 2$ (1 a.m. a 2 a.m.)

.
.

$x_7+x_6+x_5+x_4+x_2+x_1+x_{24}+x_{23} \geq 8$ (6 a.m. a 7 a.m.)

.
.

$x_{24}+x_{23}+x_{22}+x_{21}+x_{19}+x_{18}+x_{17}+x_{16} \geq 3$ (11 p.m. a 12 de la noche)

La solución del modelo de programación lineal es:

$x_2 = 5$
$x_3 = 0.75$
$x_4 = 0.75$
$x_5 = 0.75$ Las restantes variables son cero
$x_6 = 0.75$
$x_7 = 0.75$ VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO = 15.75
$x_{11} = 1$
$x_{14} = 1$
$x_{15} = 2$
$x_{16} = 1$
$x_{17} = 1$
$x_{18} = 1$

La respuesta anterior no es directamente útil ya que algunos valores de las variables son fraccionales. El valor de 15.75 implica que debemos contratar al menos a 16 cobradores. Porqué?. Esto resulta fácil si se redondea esta solución de modo que tengamos una respuesta entera. Lo que se logra haciendo $x_3 = x_4 = x_6 = x_7 = 1$ y $X_5 = 0$

Si los turnos no tienen periodos libres o cuentan con pocos descansos, entonces la solución del problema lineal tenderá a ser entero por si solo, sin recurrir a la programación entera.

Problemas de Selección de Patrones (Guias) de Corte.

En algunas industrias tales como la del papel, se fabrican rollos en medidas tanto de ancho como de largo que sean económicas. Esas medidas posteriormente se cortan en una variedad de tamaños mas pequeños que resultan más útiles para el consumidor final. Precisamente la determinación de cómo cortar esos tamaños primarios en más pequeños, a un costo mínimo, es lo que se conoce como el problema de Selección de Patrones de Corte. Un ejemplo de este tipo de problemas es el uso unidimensional. Suponga que el diseño de una máquina impone la manufactura del producto a un ancho de 72 pulgadas. Por otro lado existe una variedad de necesidades de corte en medidas más pequeñas, dos de ellas se muestran en la figura 8.1

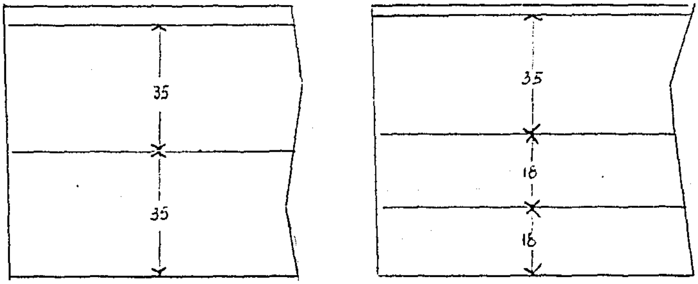


Fig. 8.1 Ejemplo de patrones de corte.

En el primer patrón se tiene una ceja de desperdicio de 2 pulgadas (72-2 X 35 = 2), mientras el segundo tiene sólo una ceja de 1 pulgada (72 - 2 X 18 - 35 = 1). Sin embargo, este último no es muy útil a menos que el número de pies lineales de material de 18 pulgadas de ancho sea alrededor de dos veces el número de pies lineales de material de 35 pulgadas de ancho. De esta manera, se debe valorar el despedicio por dejar una ceja y el desperdicio total.

La solución de un problema de corte puede dividirse en los tres pasos que se anotaron con anterioridad: (1) Pronosticar las necesidades de los anchos finales; (2) Determinar una colección exhaustiva de los posibles patrones de corte; (3) Determinar qué cantidad de cada patrón debe fabricarse de acuerdo a (2) de manera que los requerimientos en (1) se satisfagan a costo mínimo. En este caso, la programación lineal puede emplearse para efectuar el paso (3).

Ejemplo de un Problem de Corte.

Cierta compañía produce una amplia variedad de aparatos domésticos como refrigeradores y estufas. Por otra parte, una porción importante del costo de la materia prima se debe a la compra de láminas de acero. Actualmente, las hojas se compran en rollos en tres diferentes anchos: 72,48 y 36 pulgadas. En el proceso de fabricación se requieren ocho diferentes anchos en las láminas: 60, 56, 42, 38, 34, 24, 15 y 10 pulgadas. Todos los usuarios necesitan tener la misma calidad e igual calibre de la lámina.

El problema que se presenta continuamente es recortar el desperdicio. Por ejemplo, una manera de cortar un rollo de 72 pulgadas de ancho es uno de 38 pulgadas de ancho y dos rollos de 15 pulgadas. De esta forma se tendrá un desperdicio de 4 pulgadas, que se desecha.

Los precios por pie lineal de los tres diferentes anchos de la materia prima son 15 centavos para el rollo de 36 pulgadas de ancho, 19 centavos por el de 48 y 28 centavos para el de 15. Por simple aritmética se revela que los costos por pulgada * pie de los tres diferentes anchos son 15/36 = .416667 centavos/(pulgada * pie), .395833 centavos/ (pulgada * pie), y .388889 centavos/(pulgada * pie) para los anchos de 36, 48 y 72 pulgadas, respectivamente.

Los rollos originales se pueden cortar en cualquier forma factible. Las posibles maneras eficientes de efectuar la actividad, anterior para los 3 rollos originales, están tabulados en las siguientes tablas:

PATRONES PARA EL MATERIAL DE 72"

PATRON	NO. DE CORTES DEL ANCHO REQUERIDO 60"	56"	42"	38"	34"	24"	15"	10"	DESPERDICIO EN "
A1	1	0	0	0	0	0	0	1	2
A2	0	1	0	0	0	0	1	0	1
A3	0	1	0	0	0	0	0	1	6
A4	0	0	1	0	0	1	0	0	6
A5	0	0	1	0	0	0	2	0	0
A6	0	0	1	0	0	0	1	1	5
A7	0	0	1	0	0	0	0	3	0
A8	0	0	0	1	1	0	0	0	0
A9	0	0	0	1	0	1	0	1	0
B0	0	0	0	1	0	0	2	0	4
B1	0	0	0	1	0	0	1	1	9
B2	0	0	0	1	0	0	0	3	4
B3	0	0	0	0	2	0	0	0	4
B4	0	0	0	0	1	1	0	1	4
B5	0	0	0	0	1	0	2	0	8
B6	0	0	0	0	1	0	1	2	3
B7	0	0	0	0	1	0	0	3	8
B8	0	0	0	0	0	3	0	0	0
B9	0	0	0	0	0	2	1	0	9
C0	0	0	0	0	0	2	0	2	4
C1	0	0	0	0	0	1	3	0	3
C2	0	0	0	0	0	1	2	1	8
C3	0	0	0	0	0	1	1	3	3
C4	0	0	0	0	0	1	0	4	8
C5	0	0	0	0	0	0	4	1	2
C6	0	0	0	0	0	0	3	2	7
C7	0	0	0	0	0	0	1	5	2
C8	0	0	0	0	0	0	1	5	7
C9	0	0	0	0	0	0	0	7	2

PATRONES PARA EL MATERIAL DE 48"

PATRON	NO. DE CORTES DEL ANCHO REQUERIDO 60"	56"	42"	38"	34"	24"	15"	10"	DESPERDICIO EN "
D0	0	0	1	0	0	0	0	0	6
D1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
D2	0	0	0	0	1	0	0	1	4
D3	0	0	0	0	0	2	0	0	0
D4	0	0	0	0	0	1	1	0	9
D5	0	0	0	0	0	1	0	2	4
D6	0	0	0	0	0	0	3	0	3
D7	0	0	0	0	0	0	2	1	8
D8	0	0	0	0	0	0	1	3	3
D9	0	0	0	0	0	0	0	4	8

PATRONES PARA EL MATERIAL DE 36"

PATRON	NO. DE CORTES DEL ANCHO REQUERIDO 60"	56"	42"	38"	34"	24"	15"	10"	DESPERDICIO EN "
E0	0	0	0	0	1	0	0	0	2
E1	0	0	0	0	0	1	0	1	2
E2	0	0	0	0	0	0	2	0	6
E3	0	0	0	0	0	0	1	2	1
E4	0	0	0	0	0	0	0	3	6

Por ejemplo, el patrón C4 corresponde a cortar el rollo de 72 pulgadas de ancho en uno de 24 y cuatro de 10 pulgadas de ancho, temiendo un desperdicio de 8 pulgadas.

Las longitudes necesarias, para el periodo de planeación, de los diferentes anchos son:

(EN PULGADAS)

ANCHO	60	56	42	38	54	24	15	10
número de pies necesarios.	500	400	300	450	350	100	800	1000

La disponibilidad de materia prima para el periodo de planeación es: 1600 pies del ancho de 72 pulgadas y 10 000 pies de cada uno de los anchos de 48 y 36 pulgadas.

Se trata de formular un modelo para determinar el número de pies que deberán cortarse de cada patrón ,de tal forma que se minimizen los costos satisfaciendo los requerimientos de los diferentes anchos. Puede predecir de antemano la cantidad que se usará del material de 36 pulgadas.

Formulación

Sean A1, A2,..., E4, que aparecen en la tabla de patrones de corte, el número de pies a cortar del patrón correspondiente.

Para fines contables es útil definir adicionalmente:

T1 = Cantidad de pies del material de 72 pulgadas que se usa para cortar diversos patrones.

T2 = Cantidad de pies del material de 48 pulgadas que se usa para cortar diversos patrones.

T3 = Cantidad de pies del material de 36 pulgadas que se usa para cortar diversos patrones.

W1 = Pulgadas por pie de ceja de desperdicio de los patrones que se cortan del material de 72 pulgadas.

W2 = Pulgadas por pie de ceja de desperdicio de los patrones que se cortan del material de 48 pulgadas.

W3 = Pulgadas por pie de ceja de desperdicio de los patrones que se cortan del material de 36 pulgadas.

X1 = Cantidad de pies en exceso de la demanda del patrón de 60 pulgadas de ancho.

X2 = Cantidad de pies en exceso de la demanda del patrón de 56 pulgadas de ancho.

X3 = Cantidad de pies en exceso de la demanda del patrón de 46 pulgadas de ancho.

. .
. .
. .
. .

X8 = Cantidad de pies en exceso de la demanda del patrón de 10 pulgadas de ancho.

Muchas veces puede no ser fácil establecer la función objetivo. Por ejemplo, se puede estar pensando en calcular el costo de desperdicio por pie de cada patrón que se corta y, entonces, minimizar el costo total de todos los desperdicios, es decir:

$$\text{Min} \quad .388891W1 + .395833W2 + .416667W3$$

Sin embargo, objetivos como éste facilmente puede conducir a soluciones que tengan muy pequeño desperdicio pero con un alto costo. En casos en que el costo por pulgada cuadrada ~~+~~-------no sea el mismo para todos los anchos de material, la formulación anterior puede ser adecuada.

Una función objetivo más razonable es minimizar el costo total esto es:

$$\text{Min} \quad 28T1 + 19T2 + 15T3$$

Las restricciones en ambos casos son:

2) $T1 \leq 1600$
3) $T2 \leq 10000$
4) $T3 \leq 10000$
5) $T1-A1-A2-A3-A4-A5-A6-A7-A8-A9-B0-B1-B2-B3-B4-B5-B6-B7-B8-B9-C0-C1-C2-C3-C4-C5-C6-C7-C8-C9 = 0$
6) $T2-D0-D1-D2-D3-D4-D5-D6-D7-D8-D9 = 0$
7) $T3-E0-E1-E2-E3-E4 = 0$
8) $-2A1-A2-6A3-6A4-5A6-4B0-9B1-4B2-4B3-4B4-8B5-3B6-8B7-9B9-4C0-3C1-8C2-3C3-8C4-2C5-7C6-2C7-7C8-2C9+W1 = 0$
9) $-6D0-4D2-9D4-4D5-3D6-8D7-3D8-8D9+W2 = 0$
10) $-2E0-2E1-6E2-E3-6E4+W3 = 0$
11) $A1-X1 = 500$
12) $A2+A3-X2 = 400$
13) $A4+A5+A6+A7+D0-X3 = 300$
14) $A8+A9+B0+B1+B2+D1-X4 = 450$
15) $A8+2B3+B4+B5+B6+B7+D2+E0-X5 = 350$
16) $A4+A9+B4+3B8+2B9+2C0+C1+C2+C3+C4+2D3+D4+D5+E1-X6 = 100$
17) $A2+2A5+A6+2B0+B1+2B5+B6+B9+3C1+2C2+C3+4C5+3C6+2C7+C8+D4+3D6+2D7+D8+2E2+E3-X7 = 800$
18) $A1+A3+A6+3A7+A9+B1+3B2+B4+2B6+3B7+2C0+C2+3C3+4C4+C5+2C6+4C7+5C8+7C9+D1+D3+2D5+D7+3D8+4D9+E1+2E3+3E4-X8 = 1000$

Las restricciones (2) a la (8) hacen cumplir los limites de disponibilidad de los tres anchos de material. Las restricciones de la 5 a la 7 definen las variables T1, T2 y T3. Las restricciones de la (11) a la (18) forzan a que se cumplan los ocho requerimientos de demanda. Por ejemplo, la (11) forza a que la cantidad del patrón de 60 pulgadas de ancho sea al menos igual a 500 pies, mientras que la (18) forza en forma similar el requerimiento para el de 10 pulgadas de ancho.
Las dos diferentes soluciones que se obtuvieran bajo los dos diferentes objetivos se comparan en la siguiente tabla.

SOLUCIONES AL PROBLEMA DE CORTE

PATRONES	SOLUCION MINIMIZANDO EL DESPERDICIO (pies a cortar)	SOLUCION MINIMIZANDO EL COSTO TOTAL (pies a cortar)
A1	500	500
A2	400	400
A5	200	171.4286
A7	135.5	120.5713
A8	362.5	350
A9	0	3.5713
B2	0	32.1429
C5	0	14.286
D1	87.5	96.4286
D3	50	0
COSTO DEL DESPERDICIO	\$ 5.44	\$ 5.55
COSTO TOTAL	\$474.13	\$466.32
X3	37.5	0
X5	12.5	0
T1	1600	1600
T2	137.5	96.429
T3	0	0

La diferencia clave en las soluciones está en que la de minimización del desperdicio usa más material de 48 pulgadas de ancho. Además, indica que se corte más material del necesario de los patrones de 42 y 34 pulgadas ya que la función objetivo no considera esto como desperdicio.

En ambas resoluciones se tienen respuestas fraccionales, que al ser relativamente pequeñas, en relación con las longitudes, que en la práctica se redondea al entero más cercano.

Generalizaciones al problema de corte.

En problemas grandes de este tipo, puede ser irreal generar todos los posibles patrones. Al respecto existe un método eficiente para generar unicamente aquellos de muy alta probabilidad de aparecer en la solución óptima. Esto está más allá del enfoque de esta sección por lo que no se discutirá dicho procedimiento.

En cambio se puede decir que en problemas complejos de corte, las siguientes consideraciones sobre costos adicionales pueden ser importantes:

1.- Costo fijo de montar un patrón particular. Este costo consiste en la pérdida de tiempo de máquina, mano de obra, etc. Esto motiva soluciones con pocos patrones.

2.- Valor de sobre producción. Puede haber alguna demanda para el exceso de cortes para el siguiente periodo.

3.- Costo de producir la cantidad mínima permisible, medido en las ganancias que dejan de percibir.

4.- Costo por uso de máquina. El costo de operar una máquina es medianamente independiente del material con que comienza el proceso. Esto motiva soluciones en las que se cortan materias primas con más anchura.

5.- Productos de material específico. En algunos casos puede ser imposible trabajar dos productos diferentes en el mismo patrón si requieren materiales diferentes como: distinto calibre, calidad, textura, etc.

6.- Si la demanda de un cierto ancho se satisface a partir de varios patrones, entonces existirán costos de consolidación debido a que se ocasionan lotes diferentes del producto.

7.- Mínima ceja de desperdicio permitida. Para algunos materiales una ceja muy angosta puede ser de difícil manejo. Por lo tanto, se puede desear enfocar la situación a patrones que tengan ya sea cero desperdicio o una ceja que exceda algún mínimo, como por ejemplo 2 centímetros.

Problemas Bidimensionales

En el caso del problema de corte unidimensional, el proceso se realiza con materia prima que viene en rollos. En cambio en el problema bidimensional la materia prima generalmente viene en hojas. En ambos casos la idea básica es la misma, esto es, a partir de un tamaño inicial se cortan diversos patrones en tamaños más reducidos. Por ejemplo, suponga que el triplay que se ofrece en el mercado son hojas rectangulares de 46 X 96 pulgadas y que la demanda de productos finales es para hojas de 36 x 50, 24 x 36, 20 x 60 y 18 x 30, en pulgadas. Una vez que se numeren todos los patrones posibles para cortar la hoja inicial, de acuerdo con las dimensiones anteriores, entonces el problema es el mismo como en el caso unidimensional.

El problema de programar tripulaciones

El manejo de aviones y sus tripulaciones en lineas aéreas importantes involucra complejos problemas de programación. Valiendo la pena poner especial atención a dichos problemas ya que finalmente se puede tener una recompensa significativa.

Un articulo reciente del Wall Street Journal indicó que una mejor programacion, permitió a la United Arilines programar 129 vuelos adicionales que corresponden a 836 millones de asientos-millas. Una pequeña parte de los problemas de una linea aérea es lo que se discute en lo siguiente.

Las grandes compañias aéreas se enfrentan al problema de conjuntar sus equipos de trabajo, el cual es conocido como el problema de programar tripulaciones. Los requerimientos a cubrirse son las necesidades de tripulación de los vuelos que la linea aérea debe ofrecer durante el siguiente periodo de programación, por decir un mes. Una tripulación especifica durante su trabajo diario hará varios vuelos, no necesariamente en el mismo avión. El problema es, entonces, determinar que vuelos deben incluirse en el trabajo diario de una tripulación.

El enfoque que se aplica en estos casos debe considerar:

(1) identificar los requerimientos de demanda, esto es, los vuelos que deben cubrirse; (2) Generar un número grande de colecciones de vuelos factibles que una tripulación puede cubrir en un dia; (3) Seleccionar a costo minimo un subgrupo de vuelos factibles generados en (2).

La programación lineal puede usarse para abordar el paso (3); sin embargo, la mayor parte de las lineas aéreas usan procedimientos computacionales particulares, ya que el programa lineal resultante tiende a ser grande y dificil de resolver. No obstante, Marsten, Muller y Killion describen un modelo de programación lineal que ha sido usado por la Flying Tiger Airlaines. Dicha compañia tiene la flota más pequeña de las grandes compañias transportistas, de tal forma que el programa lineal resultante puede ser resuelto económicamente y proporcionar soluciones de costos más bajos que otros métodos.

En el siguiente ejemplo se da una versión muy simplificada del programa de proyectar tripulaciones.

Ejemplo:

Una compañía aérea opera el siguiente conjunto de vuelos programados:

No. VUELO	ORIGEN	DESTINO	PARTE DEL DIA
101	Chicago	L.A.	Tarde
410	New York	Chicago	Tarde
220	New York	Miami	Noche
17	Miami	Chicago	Mañana
7	L.A.	Chicago	Tarde
13	Chicago	New York	Noche
11	Miami	New York	Mañana
19	Chicago	Miami	Noche
23	L.A.	Miami	Noche
3	Miami	L.A.	Tarde

El departamento de operaciones de vuelo desea asignar sus tripulaciones a bajo costo. Siendo el problema básico determinar el siguiente vuelo que una tripulación debe efectuar después de completar uno. Para mayor comprensión del problema definimos el concepto de "Tour" cuyas características son:

- Un tour consiste de 1 a 3 vuelos conectados

- Un tour tiene un costo de $ 2000 si termina en la ciudad donde se originó

- Un tour que termina en una ciudad diferente del origen cuesta $ 3000

Tours	Costo
17,101, 23	2 000
220, 17,101	3 000
410, 13	2 000

El nivel paso a efectuar la enumeración de todos los tours factibles. En este caso se tiene 10 tours de un vuelo, 14 de dos vuelos y ya sea 37 o 41 tours de tres vuelos dependiendo si se distingue o no la ciudad de origen sobre de un tour cuyo destino no fue el origen.

TOURS

DE UN VUELO	DE DOS VUELOS	COSTO	DE TRES VUELOS	COSTO
1. 101	11. 101,23	3000	25. 101,23,17	2000
2. 410	12. 410,13	2000	26. 101,23,11	3000
3. 220	13. 410,19	3000	27. 410,19,17	3000
4. 17	14. 220,17	3000	28. 410,19,11	2000
5. 7	15. 220,11	2000	29. 220,17,101	3000
6. 13	16. 17,101	3000	30. 220,11,410	3000
7. 11	17. 7,13	3000	25. 17,101,23	2000
8. 19	18. 7,19	3000	31. 7,19,17	3000
9. 23	19. 11,410	3000	32. 7,19,11	3000
10. 3	20. 19,17	2000	33. 11,417,13	3000
	21. 19,17	2000	28. 11,410,19	2000
	22. 23,17	3000	34. 19,17,101	3000
	23. 23,11	3000	28. 19,11,410	2000
	24. 3,23	2000	25. 23,17,101	2000
			35. 23,11,410	3000
			36. 3,23,17	3000
			37. 3,23,11	3000

Se definen las siguientes variables de decisión:

$$T_i = \begin{cases} 1 & \text{si se hace el Tour } i \\ 0 & \text{si no se hace el Tour } i = 1, 2, 3 \ldots 37 \end{cases}$$

No se distingue la ciudad de origen en Tours de tres vuelos cuyo destino no es el origen. La formulación es:

MIN 3T1 + 3T2 + 3T3 + 3T4 + 3T5 + 3T6 + 3T7 + 3T8 + 3T9 + 3T10 + 3T11 + 2T12 + 3T13 + 3T14 + 2T15 + 3T16 + 3T17 + 3T18 + 3T19 + 2T20 + 3T21 + 3T22 + 3T23 + 2T24 + 2T25 + 3T26 + 2T27 + 2T28 + 3T29 + 3T30 + 3T31 + 3T32 + 3T33 + 3T34 + 3T35 + 3T36 + 3T37

SUJETO A:

2) T1 + T11 + T16 + T25 + T26 + T29 + T34 = 1
3) T2 + T12 + T13 + T19 + T27 + T28 + T30 + T33 + T35 = 1
4) T3 + T14 + T15 + T29 + T30 = 1
5) T4 + T16 + T20 + T22 + T25 + T27 + T29 + T31+T34 +T36=1
6) T5 + T17 + T18 + T31 + T32 = 1
7) T6 + T12 + T17 + T33 = 1
8) T7 + T15 + T19 + T21 + T23+T29+T28+T30+T32+T33+T35+T37=1
9) T8 + T13 + T18 + T20 + T21 + T27 + T28 + T31 + T32+T34=1
10) T9 + T11 + T22 + T23 + T24 + T25 + T26 + T35 + T36+T37=1
11) T10 + T24 + T36 + T37 = 1
END.

La primera restricción (renglón 2), por ejemplo, forza exactamente a que uno de los tours que incluye al vuelo 101 sea seleccionado.

Cuando se resuelve con programación lineal, afortunadamente la solución resulta entera con los siguientes tours.

TOUR	VUELO
T17	7,13
T24	3,23
T28	410,19,11
T29	220,17,101

El costo de la solución es $ 10,000 y puede haber soluciones alternas con el mismo costo.

Los precios duales sobre las restricciones son:

RENGLON	HOLGURA	PRECIOS DUALES	(VUELO)
2)	0.00	- 2.00	(101)
3)	0.00	0.00	(410)
4)	0.00	- 2.00	(220)
5)	0.00	1.00	(17)
6)	0.00	- 1.00	(7)
7)	0.00	- 2.00	(13)
8)	0.00	0.00	(11)
9)	0.00	- 2.00	(19)
10)	0.00	- 1.00	(23)
11)	0.00	- 1.00	(3)

Los precios duales sugieren que los vuelos 101,220,13 y 19 son los más costosos mientras que se podrían reducir los costos adicionando otro vuelo 17.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Modifique el problema de localización de estaciones de bomberos para incluir el requerimiento de que cada punto de demanda tenga al menos dos estaciones dentro de 10 minutos de recorrido. La información relevante es que el lugar A está a 10 minutos de todos los puntos exceptuando 1 y 6. B está dentro de los 10 minutos de todos excepto de 3, C está dentro de los 10 minutos menos del puntos 2, D está dentro de los 10 minutos menos del 2, y E de todos menos del punto 1. Cuál es ahora la solución de mínimo costo?

2.- Ciertos tipos de instalaciones operan 7 días a la semane y se enfrentan al problema de asignar la fuerza dr trabajo durante la misma como una función del día de la semana. Esta clase de problemas se encuentran comunmente en servicios públicos y organizaciones de transporte. Tal vez el problema fundamental involucra la asignación de días de descanso para empleadas de tiempo completo. En particular, regularmente a cada empleado se le dr los dos días consecutivos de descanso. Si el número de empleados que se requiere en cada día de la semana es un dato, entonces el problema es encontrar el mínimo tamaño de la fuerza de trabajo que permita satisfacer esas demandas y entonces determinar los días de descanso de la gente.

Para ser especifico, estudiemos el problema al que se enfrenta la compañía FCB. El número de choferes que se requieren en cada día de la semana es como sigue:

L	M	M	J	V	S	D
18	16	15	16	19	14	12

Cuantos choferes deberán programarse, si se comienza el trabajo al quinto día, en cada día de la semana? Formular este problema con programación lineal y encontrar la solución optima.

3. En el problema anterior se omitieron detalles importantes como:

a. El pago diario es de \$ 50 por persona entre semana, \$ 75 en sábado y \$ 90 si es domingo.

b. Se tienen hasta tres gentes que pueden ser empleados para trabajar viernes, sabado y domingo. Siendo su salario de \$ 200 por los tres días.

Modifique apropiadamente la formulación. Es evidente la gente de fin de semana que se empleará?.

II.4. MEZCLAS

Existe un contraste entre un problema en donde se desea determinar los niveles de producción de ciertos artículos (Cap.7. Producción), y aquel en donde se tiene un problema de mezcla y se trata de obtener un producto a partir de varias materias primas. Comunmente, el segundo problema se presenta en la alimentación y en las industrias químicas. Por ejemplo, muchas firmas procesadoras de carne usan modelos de mezcla, en programación lineal (LP), para determinar la combinación de ingredientes que deben llevar sus productos, como embutidos. Por otra parte, varias fábricas usan este modelo para hallar la combinación de combustibles a menor costo para la carga de un horno de fundición. Fields y otros (1978) describieron un LP de mezcla de alimentos para formular raciones de comida para ganado a bajo costo. Este modelo particular es usado actualmente más de 1000 veces al mes por los administradores de dichas empresas.

El primer problema general de Programación Lineal que apareció impreso, fué un problema de la dieta formulado por George Stigler (1945); el cual consistía en establecer una "receta" con cerca de 80 alimentos, de manera que la combinación satisfaciera alrededor de una docena de requerimientos nutricionales; por ejemplo, un porcentaje de proteína mayor que un 5% , de celulosa menos de un 40%, etc. Cuando Stigler formuló este problema, el método Simplex para resolver Lps no existía y no fué realizado extensamente. Sin embargo, Stigler obtuvo una solución a este problema específico usando argumentos ingeniosos. Solución que estaba cerca de la que se determinó cuando el método Simplex fué inventado. Hay que aclarar que la solución de menor costo y la de Stigler no fueron exactamente alta cocina. Ambas consistían de gran cantidad de col, harina y frijoles blancos secos, con un toque de espinaca. Es obvio que ninguna persona quiera sobrevivir con una dieta de este tipo. Esta solución ilustra la importancia de incluir explícitamente en la formulación restricciones, que son tan claras que se olvidan, en este caso, restricciones de buen sabor.

Precisamente es el segundo caso el que abordaremos en este capítulo.

Consideremos un problema simple de mezcla de alimentos. Debemos producir una remesa de 100 "bushels" (1 bushel equivale a 35 litros) de alimento para ganado que tenga un contenido proteínico de al menos 15%. Este alimento es producido combinando maíz (que es 6% proteína) y harina de frijol de soya (que es 35% proteína). Una aritmética simple indica que la mezcla debe contener al menos 15 bushels de proteína.

Si C es el número de buchels de maíz en la me cla y S el de harina de frijol de soya, entonces las restricciones son:

$$.06\,C + .35S \geq 15 \text{ (contenido proteinico)}$$
$$C + S = 100 \text{ (tamaño de la remesa)}$$

Restricciones sobre caracteristicas adicionales tales como grasa, carbohidratos y textura pueden ser manejadas en forma similar.

La formulacion es ligeramente más complicada si la variable de decisión es precisamente el tamaño de la remesa. El segundo ejemplo en esta sección considerará esta complicación. Nótese que en el primer ejemplo el tamaño de la remesa se especifica de antemano.

El problema de mezcla de la Compania de Acero de Pittsburg

La Compania de Acero de Pittsburg (PS) ha sido contratada para producir un nuevo tipo de acero, el cual tiene los siguientes requerimientos de calidad:

	Al menos	No más de
Contenido de carbón	3.0%	3.5%
Contenido de cromo	0.3%	0.45%
Contenido de magneso	1.35%	1.65%
Contenido de silicón	2.7%	3.0%

Ps tiene disponible los siguientes materiales para la mezcla:

MATERIAL	COSTO/ LB.	% DE CARBON	% DE CROMO	% DE MANGANESO	% DE SILICON	CANT. DISP.
Lingote hierro 1	.03	4.0	0	0.9	2.25	*
Lingote hierro 2	.0645	0	10.0	4.5	15.0	*
Ferro-silicón 1	.065	0	0	0	45.0	*
Ferro-silicón 2	.061	0	0	0	42.5	*
Aleación 1	.10	0	0	60.0	18.0	*
Aleación 2	.13	0	20.0	9.0	30.0	*
Aleación 3	.119	0	8.0	33.0	25.0	*
Carburo silicón	.08	15.0	0	0	30.0	20 lb
Acero 1	.021	0.4	0	0.4	0	200 lb
Acero 2	.02	0.1	0	0.3	0	200 lb
Acero 3	.0195	0.1	0	0.3	0	200 lb

* Significa sin limite

Una remesa de una tonelada (2000 lbs) debe ser mezclada de manera que satisfaga los requerimientos establecidos. El problema es, entonces, determinar qué cantidad de cada uno de los 11 materiales deben ser mezclados juntos, de forma que se minimice el costo pero que se satisfagan los requerimientos de calidad. Por otra parte, un hombre experimentado en acero afirma que la mezcla de menor costo no usará más de nueve de los once materiales disponibles. En este problema surgen espontaneamente las siguientes preguntas: Qué es una buena mezcla?. La mayoría de los once precios y los cuatro requerimientos de control de calidad son negociables?. Cuáles precios y requerimientos vale la pena negociar? .

Note que el contenido químico de una mezcla es simplemente el promedio ponderado de los contenidos químicos de sus componentes. Así por ejemplo, si hacemos una mezcla de 40% de la aleación 1 y 60% de la aleación 2, el contenido de manganeso es (.4x60) + (.6x9) = 29.4.

Supongamos que podemos bombear oxigeno dentro del horno. Este oxigeno combina completamente con el carbón para producir el gas CO_2, el cual escape. De esta forma el oxigeno quemará el carbón a una tasa de 12 lbs de carbón quemado por cada 52 lbs. es oxigeno. Siendo que el oxigeno cueste 2 centavos la libra, reformule el problema con esta opción adicional. Esto cambiará las decisiones?.

Formulacion y solución

El problema de mezcla de la compañía PS puede ser formulado como uno de programación lineal con 11 variables y 13 restricciones. Las 11 variables corresponden a las 11 materias primas entre las que se puede escoger. En lo relacionado a las restricciones, cuatro se refieren a los limites inferiores de calidad y cuatro a los superiores. Otras cuatro restricciones tiene que ver con el limite superior para el uso de silicón-carburo y aceros. Por último, la 13a. restricción es el requerimiento de que el peso de todos los materiales usados debe sumar 2000 lbs.

Si denotamos por P_1 el número de libras de lingote de hierro 1 que serán usadas y similar notación para los materiales restantes, el problema de minimizar el costo por tonelada se puede plantear como:

MIN .08C + .021S1 + .02S2 + .0195S3 + .03P1 +
.0645P2 + .13A2 + .119A3 + .1A1 + .065F1 + .061F2

Sujeto a:

2) .15C + .004S1 + .001S2 + 001S3 + .04P1 ≤ 70
3) .1F2 + .2A2 + .08A3 ≤ 9
4) .009S1 + .003S2 + .003S3 + .009P1 + .045P2 + .09A2 + .33A3 + .6A1 ≤ 33

```
5) .3C + .0225P1 + .15P2 + .3A2 + .25A3 + .18A1 + .45F1 +
   .42F2 ≤ 60
6)    C ≤ 20
7)   S1 ≤ 200
8)   S2 ≤ 200
9)   S3 ≤ 200
10) C + S1 + S2 + S3 + P1 + P2 + A2 + A3 + A1 + F1 + F2= 2000
11) .15C + .004S1 + .001S2 + .001S3 + .04P1 ≥ 60
12) .1P2 + .2A2 + .08A3 ≥ 6
13) .009S1 + .003S2 + 003S3 + 009P1 + .045P2 + .09A2 + .33A3
    .6A1 ≥ 27
14) .3C + .0225P1 + .15P2 + .3A2 + .25A3 + .18A1 + .45F1 +
    .42F2 ≥ 54
END
```

Al resolverlo se obtiene:

VARIABLE	VALOR	COSTO REDUCIDO
C	0	.003357
S1	200	0
S2	29.4375	0
S3	200	0
P1	1474.26	0
P2	60	0
A2	0	.020503
A3	0	.019926
A1	14.2388	0
F1	0	.001036
F2	22.0621	0

FUNCION OBJETIVO = 59.5564

RENGLON	HOLGURA	PRECIO DUAL
2	10	0
3	3	0
4	6	0
5	6	0
6	20	0
7	0	.000177
8	170.562	0
9	0	.000500
10	0	- .019503
11	0	- .183328
12	0	- .254731
13	0	- .104521
14	0	- .098802

Note que sólo 7 de los 11 materiales son usados. En la práctica común, este tipo de modelo fué resuelto sobre la base de dos veces al mes. La primera solución, incluyendo los costos reducidos y los precios duales, fué usada por el gerente de compras como una guía para adquirir materiales. La segunda solución posterior en el mes resultó muy útil, ya que permitió hacer una mezcla con la materia prima actualmente a la mano.

La opción de inyección de oxígeno para la quema de carbón es claramente no interesante; ya que en la solución actual, la restricción de cota inferior del carbón es obligatoria y no la cota superior. Así, la quema de carbón, aún si por ella misma resulta no ser cara, puede incrementar el costo total de la solución.

Un problema de mezcla dentro de uno de niveles de producción.

De comienzo se analizará un aspecto adicional en la formulación del problema de mezcla, el cual será ilustrado con un ejemplo en el que el tamaño de la remesa es la variable de decisión. En concordancia con el ejemplo anterior en el que se proporciona el tamaño del lote o remesa.

En el ejemplo siguiente, la cantidad de producto a ser mezclado depende de que tan barata resulta esta actividad. Así, la decisión de cómo mezclar y la del tamaño de la remesa se deben hacer simultaneamente. Este ejemplo es común en problemas de mezcla de gasolina que surgen en una refinería de petróleo. En este caso, se desea mezclar gasolina a partir de tres ingredientes: butano, nafta pesada y reformado catalitico. Por otra parte, sólo cuatro de las características de la gasolina resultante son importantes: costo, octanaje, presión del vapor y volatilidad. Estas características son resumidas en la tabla siguiente.

Característica	Butano (B)	Reformado Catalitico (CR)	Nafta Pesada (HN)	Gasolina Regular (RG)
Costo/Unidad	7.3	18.20	12.50	?
Octanaje	120	100	74	$\geq$ 94
Presión del vapor	60	2.6	4.1	$\leq$ 11
Volatilidad	105	3	12	$\geq$ 17

El octanaje es una medida de la resistencia de la gasolina a pegar o silbar en los motores. La presión del vapor y la volatilidad están estrechamente relacionados. La primera es una medida de la susceptibilidad a que se ahogue un motor, particularmente en un día caluroso de primavera. La volatilidad es una medida de qué tan fácilmente la maquina arranca en un clima frío.

En este periodo de planeacion hay solamente 1,000 unidades de butano disponible. La producción de gasolina compite con el combustible pesado (HF) por las instalaciones de producción. La suma de los volumenes de gasolina y de combustible pesado no puede exceder de 12,000 unidades, en este periodo de planeación. Cualquier problema de mezcla asociado con la producción de combustible pesado se deja a un lado.por lo que dicho combustible es tratado como un producto simple. Por lo tanto, se trata de un problema de mezcla de insumos que involucra dos productos en competencia, gasolina y combustible pesado.

Por otra parte,el beneficio del combustible pesado es de $3.60 por unidad; en cambio el beneficio de la gasolina regular es de $18.40 por unidad.

Una ligera simplificación que se adopta en este ejemplo es que la interacción entre los ingredientes es lineal; es decir, si se hace una mezcla "mitad-mitad" de B y CR, entonces su octaje será (.5x120) + (.5x100) = 110 y su volatibilidad de (.5x105) + (.5x3) = 54. En realidad esta linealidad se viola ligeramente, especialmente si se mezcla gasolina que contiene plomo tetraetilo.

Formulación:

Las restricciones de capacidad y disponibilidad son directas, especificamente:

$$B \leq 1000$$
$$RG + HF \leq 12{,}000$$

Las restricciones de calidad requieren un poco de razonamiento. las fracciones de la remesa que consta de butano, reformado catalitico y nafta pesada son B/RG, CR/RG y HN/RG,respectivamente. Asi,si la bondad de la linealidad nos sonrie, entonces la restricción de octano en la mezcla debe ser:

$$(B/RG)*120 + (CR/RG)*100 + (HN/RG)*74 \geq 94$$

Esta expresión puede ser rechazada ya que una razón de variables como B/RG definitivamente es. Sin embargo,si multiplicamos la expresión anterior por RG, se produce la restriccion lineal.

$$120B + 100CR + 74HN \geq 94RG$$

o en forma estandar

$$120B + 100CR + 74HN - 94RG \geq 0$$

Argumentos similares pueden ser usados para desarrollar las restricciones de vapor y volatilidad. Finalmente, se debe añadir una restricción que establezca que el total es la suma de sus partes, especificamente:

$$RG = B + HN + CR$$

Cuando todas las restricciones son convertidas a la forma estandar y se escribe la expresión de los beneficios, obtenemos la formulación:

Max 18.4 RG + 3.6 HF − 7.3 B − 12.5 HN − 18.2 CR

Sujeto a:

2) − 94 RG + 120 B + 74 HN + 100 CR ≥ 0
3) − 11 RG + 60 B + 4.1 HN + 2.6 CR ≥ 0
4) − 17 RG + 105 B + 12 HN + 3 CR ≥ 0
5) RG − B − HN − CR = 0
6) B ≤ 1000
7) RG + HF ≤ 12000
END

La solucion es:

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO

1) 43328.84

VARIABLE	VALOR	COSTO REDUCIDO
RG	7270.296450	0.00000
HF	4729.703550	0.00000
B	1000.000000	0.00000
HN	2446.991390	0.00000
CR	3823.304840	0.00000

RENGLON	HOLGURA	PRECIOS DUALES
2)	0.00000	−0.204298
3)	0.00000	0.258835
4)	22238.77470	0.000000
5)	0.00000	−1.556829
6)	0.00000	0.128845
7)	0.00000	3.600000

NO. DE ITERACIONES = 5

De antemano no es obvio que la cantidad de gasolina regular a producir deberá ser de 7,270 unidades(valor de RG). Puede usted predecir qué cantidad de gasolina deberá ser producida si no existe la competencia con combustible pesado, en cuanto a la capacidad de producción?

Los modelos de Programación Lineal, en lo que se refiere a mezclas, han sido una herramienta operacional común en refinerías, por años. Aunque recientemente, los modelos de programación lineal han sido reemplazados por modelos de simulación más sofisticados. En estos, se aproxima con más exactitud las no linearidades del proceso de mezcla. Aunque ellos no optimicen tan cabalmente como lo hace el método Simplex.

Seleccion adecuada sobre interpretaciones alternas de los requerimientos de calidad.

Algunos características de calidad pueden establecerse ya sea de acuerdo a alguna medida de bondad o alternativamente de acuerdo con una medida de inconveniencia. Un ejemplo es la eficiencia de un automóvil. la cual puede medirse en millas por galón o alternativamente en galones por milla. Cuando se considera la calidad de una mezcla de ingredientes (o alternativamente la eficiencia de una flota de autos) es importante identificar si la medida de bondad o de maldad es aditiva sobre los componentes de la mezcla. El siguiente ejemplo lo ilustra.

Una norma federal requiere que el promedio de millas por galón, calculadas sobre todos los autos vendidos por una compañía de automóviles en un año específico, sea al menos de 18 millas por galón. Consideremos un caso hipotético de la Compañía de Motores Ford. Suponga que Ford sólo vende los cuatro tipos de autos: Mark V. Ford. Granada y Fiesta. Varios parámetros de estos carros son listados abajo:

CARRO	MILLAS/ GALON	COSTO DE PROD.MARGINAL	PRECIO DE VENTA
Fiesta	30	3,500	4,000
Granada	18	4,100	5,700
Ford	16	4,500	5,300
Mark V	14	5,700	10,000

Existe alguna flexibilidad en las instalaciones de producción de modo que las capacidades pueden aplicarse a pares de tipos de carros. Estas limitaciones son:

Capacidad Anual en Unidades	Tipos de Carros
250,000	Fiesta
2,000,000	Granadas más Fords
1,500,000	Fords más Mark Vs

Existe un límite de capacidad de venta de 3,000,000 en el total de carros. Qué cantidad de cada tipo de carro debe planear la Ford para vender?

Interpretando la restricción de millaje, literalmente resulta la siguiente formulación y solución. Note que la primera restricción es equivalente a:

$$\frac{30\ \text{Fiesta} + 18\ \text{Granada} + 16\ \text{Ford} + 14\ \text{Mark V}}{\text{Fiesta} + \text{Granada} + \text{Ford} + \text{Mark V}} \geq 18$$

```
MAX      500 FIESTA + 1600 GRANADA + 4300 MARK V + 800 FORD

SUJETO A

2)     12 FIESTA - 4 MARK V - 2 FORD ≥ 0
3)     FIESTA ≤ 250
4)     GRANADA + FORD ≤ 2000
5)     MARK V + FORD ≤ 1500
6)     FIESTA + GRANADA + MARK + FORD ≤ 3000
END
```

Automóviles y dólares son medidos en 1000s.

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO

1) 6550000

VARIABLE	VALOR	COSTO REDUCIDO
FIESTA	250.00000	0.00000
GRANADA	2000.00000	0.00000
MARK V	750.00000	0.00000
FORD	0.00000	2750.00000

RENGLON	HOLGURA	PRECIOS DUALES
2)	0.00000	-1075.00000
3)	0.00000	13400.00000
4)	0.00000	1600.00000
5)	750.00000	0.00000
6)	0.00000	0.00000

Suponga que, sin considerar el tipo, cada carro es manejado el mismo número de millas por año. Una pregunta interesante es si la razón del total de millas manejadas, de la flota anterior, dividida por el número de galones de gasolina usada, es al menos igual a 18. Sin pérdida de generalidad, suponga que cada carro es manejado una milla. La gasolina usada por un carro manejado una milla es 1 / (millas por galón). De esta forma, si todos los carros son manejados la misma distancia, entonces la razón de millas a galones de combustible de la flota anterior es (250+2000+750)/ [(250/30+(2000/18)+(750/14)] =17.3 millas por galón - lo cual está considerablemente abajo de las 18 millas por galón que pensamos obtener.

La primera formulación es equivalente a asignar a cada automóvil el mismo número de galones y entonces manejarlos hasta que se agote su dotación. Así, el promedio de 18 mpg se alcanza teniendo menos carros eficientes manejados menos millas. Una forma más sensible de expresar estas cosas es en términos de galones por milla. En este caso la restricción de millaje se escribe:

$$\frac{\text{Fiesta}/30 + \text{Granada}/18 + \text{Ford}/16 + \text{Mark V}/14}{\text{Fiesta} + \text{Granada} + \text{Ford} + \text{Mark V}} \leq 1/18$$

Convertido a la forma estandar se tiene:

$$-.022222\ \text{Fiesta} + .0069444\ \text{Ford} + .015873\ \text{Mark V} \leq 0$$

Cuando este problema es resuelto con esta restricción obtenemos la solución:

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO

1) 4830000

VARIABLE	VALOR	COSTO REDUCIDO
FIESTA	250.00000	0.00000
GRANADA	2000.00000	0.00000
MARK V	350.00000	0.00000
FORD	0.00000	1681.25070

Las normas federales pueden facilmente ser interpretadas de tal forma que sean consistentes con la primera formulación. De cualquier modo, las companías automotrices, sensatamente, han implantado la segunda forma de calcular el millaje de la flota.

Interpretación de los precios duales para las restricciones de una mezcla.

El precio dual para una restricción de una mezcla usualmente requiere una ligera reinterpretación para ser útil. Como un ejemplo, considere la restricción de octano en el problema de mezcla de gasolina:

$$-94\ RG + 120\ B + 74\ HN + 100\ CR \geq 0$$

El precio dual de esta restricción es el aumento en el beneficio si la parte derecha de la restricción se cambia de

9 a 1. Desafortunadamente, este no es un cambio que se pueda considerar ordinariamente. Unos cambios mas tipicos que pueden ser considerados serian sobre el contenido de octano de 94 a 93, o a 95. Una regla muy aproximada para estimar el efecto de un pequeño cambio en el coeficiente, en el renglón i, de la variable RG, es calcular el producto del precio dual del renglón i y el valor de la variable RG. Para la variable RG y la restriccion de octano este valor es: 7270.30*(-.204293)= -1485.31. Lo que sugiere que si el requerimiento de octano se reduce a 93 (o se incrementa a 95), desde 94, el beneficio total aumentará 1485 para llegar a 44814 (o disminuirá 1485 hasta 41843). Para pequeños cambios, esta aproximacion generalmente subestimará el verdadero beneficio después del cambio. Cuando estos cambios se consideran en los correspondientes programas lineales y se resuelven, la contribución a la ganancia cambia a 44825, en el caso de un requerimiento de octano de 93, y a 43200 si el requerimiento es de 95.

Esta aproximación puede resumirse generalmente como sigue: si deseamos cambiar un cierto requerimiento de calidad en una pequeña cantidad "e", el efecto de este cambio en los beneficios es aproximadamente de la magnitud e*(precio dual de la restriccion)*(tamaño de la remesa). Para pequeños cambios la aproximación tiende a subestimar el beneficio después del cambio. Para grandes cambios la aproximación puede errar en ambas las direcciones.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- PEMEX debe decidir acerca de las mezclas a usar en su producción semanaria de gasolina. El problema es que se deben producir dos tipos de gasolinas cuyas caracteristicas se listan abajo.

GASOLINA	PRESION DE VAPOR	NUMERO DE OCTANO	PRECIO DE VENTA (EN $ BARRIL)
Nova	7	80	9.80
Extra	6	100	12.00

Las caracteristicas de los componentes con los que la gasolina puede ser mezclada se muestran abajo:

COMPONENTE	PRESION DE VAPOR	NUMERO DE OCTANO	DISPONIBLIDAD ESTA SEMANA(en barriles)
Gas fraccionado	8	83	2700
Isopentano	20	109	1350
Gas integro	4	74	4100

La presión de vapor y el número de octanos de una mezcla es simplemente el promedio ponderado de las caracteristicas correpondientes a sus componentes. Los ingredientes no usados se pueden vender por fuera a $ 9 por barril.

a. Cuales son las variables de decisión?

b. De la formulacion del modelo

c. Qué tanta EXTRA será mezclada?

2. PEMEX mezcla un producto regular y uno prèmium con dos ingredientes. Heptano y Octano. Cada litro de regular está compuesto de 50% Heptano y 50% Octano , y cada litro de premium de 40% de Heptano y 60% de Octano . Durante este periodo de planeacióon hay exactamente 200,000 litros de Heptano y 310,000 litros de Octano disponibles. Los beneficios por litro de producto regular o premium en este periodo es $.03 y $.04 por litro respectivamente.

a. Formule el problema de determinar las cantidades de productos regular y premium como un programa lineal.

b. Determine las cantidades óptimas a producir sin el uso de una computadora.

3. La Compania Hackensack Blended Whiskey importa tres grados de Whiskey: Primero, escogido y Premium. De acuerdo a estos grados se pueden producir las siguientes dos marcas de whiskey con caracteristicas asociadas:

MARCA	ESPECIFICACIONES	PRECIO DE VENTA POR LITRO
Scottish Club	No menos de 60% de Primero; no mas de 20% de Premium	$ 6.80
Johnny Gold	No mas de 60% de Premium; no menos de 15% de Primero	$ 5.70

Los costos y disponibilidades de los tres whiskies en crudo son:

WHISKEY	DISPONIBILIDAD ESTA SEMANA (N.DE LITROS)	COSTO POR LITRO
Primero	2,000	$ 7.00
Escogido	2,500	$ 5.00
Premium	1,200	$ 4.00

La compañía desea maximizar los beneficios de esta semana y probar si puede usar programacion lineal para hacerlo así.

4. La Refinería EXXON procesa dos clases diferentes de petróleo crudo, venezolano y saudita, para producir dos clases generales de productos, Ligero y Pesado. Cualquiera de los crudos puede ser procesado por alguno de los dos modos de procesamiento, corto o regular. El costo de procesamiento y las cantidades producidas de Ligero o Pesado depende del modo de procesamiento usado y del tipo de crudo empleado. Los costos varían tanto por el origen de los crudos como a través de las formas de procesamiento. Las características relevantes son resumidas en la tabla de abajo. Por ejemplo, el proceso corto convierte cada unidad de crudo venezolano a .45 unidades de producto Ligero, .52 unidades de producto Pesado y .03 unidades de desperdicio

   Por otra parte, el crudo saudita cuesta $20 por unidad mientras que el venezolano vale $19 por unidad. El proceso corto cuesta $2.50 por unidad procesada, mientras que el regular, tiene un valor de $2.10 por unidad. EXXON puede procesar 10,000 unidades de crudo por semana a una tasa regular. En cambio, cuando la refinería trabaja con el proceso corto para toda la semana, puede procesar 13,000 unidades .

   La refinería puede usar cualquier combinación de proceso corto y regular en una semana dada.

   Los valores de mercado respectivos de los productos Ligero y Pesado son $27 y $25 por unidad. Formule el problema de decidir qué cantidad de cada crudo comprar y que proceso utilizar, como un programa lineal. Cuáles son las compras óptimas y las decisiones de operación?.

5. La Compañía Purina manufactura dos productos, comida para pájaros y comida para perros. La misma tiene dos departamentos, de mezclas y empacado. Los requerimientos

en cada departamento para manufacturar una tonelada de cada producto son:

	Tiempo por Ton en Horas MEZCLADO	EMPACADO
Comida para pájaros	.25	.10
Comida para perros	.15	.30

Cada departamento tiene disponible 8 horas al día.

La comida para perro es hecha con los tres ingredientes: carne, harina de pescado y cereal. El alimento para pájaro es hecho con los tres ingredientes: gérmen, piedra molida y cereal. La descripción de estos cinco materiales está como sigue:

DESCRIPCION DE MATERIALES EN PORCENTAJE

	PROTEINA	CARBOHIDRATO	MINERALES	ABRASIVOS	COSTO
Carne	12	10	1	0	600
Harina de trigo	20	8	2	2	900
Cereal	3	30	0	0	200
Gérmen	10	10	2	1	700
Piedra molida	0	0	3	100	100

Los requerimientos de composición de los dos productos son como sigue:

REQUERIMIENTOS MINIMOS EN PORCENTAJES

	PROTEINA	CARBOHIDRATO	MINERALES	ABRASIVOS	GERMEN
Comida p/ pájaro	5	18	1	2	10
Comida p/ perro	11	15	1	0	0

La comida para pájaro se vende a $ 750 la tonelada, mientras que para perro tiene un costo de $ 980 la tonelada. Cuál debe ser la composición de las comidas para pájaro y perro y qué cantidad de cada uno debe ser manufacturada cada día?.

6. Las regulaciones federales recientes fomentan la asignación de estudiantes a escuelas, en una ciudad, de manera que la composición racial de cualquier escuela se aproxime a la composición racial de la ciudad entera. Considere el caso de las escuelas de la ciudad de Greenville, la cual puede ser considerada como compuesta de cinco áreas con las siguientes características:

AREA	FRACCION MINORITARIA	NUM.DE ESTUDIANTES
1	.20	1,200
2	.10	900
3	.85	1,700
4	.60	2,000
5	.90	2,500

La disposición manejada para Greenville es que una escuela puede tener ni más de 75 por ciento ni menos de 30 por ciento de matrícula minoritaria. En Greenville hay tres escuelas con las capacidades siguientes:

ESCUELA	CAPACIDAD
Bond	3,900
Pocahontas	3,100
Pierron	2,100

El objetivo es el de diseñar una asignación de estudiantes a las escuelas de manera que se permanezca dentro de la capacidad de cada escuela y se satisfagan las restricciones de composición mientras que se minimiza la distancia recorrida por los estudiantes. Las distancias y kilómetros entre áreas y escuelas son:

	AREA				
ESCUELA	1	2	3	4	5
Bond	2.7	1.4	2.4	1.1	0.5
Pocahontas	0.5	0.7	2.9	0.8	1.9
Pierron	1.6	2.0	0.1	1.3	2.2

Existe la condicion adicional de que ningún estudiante sea trasnportado mas de 2.6 Kilómetros. Encuentre el número de estudiantes que deben ser asignados a cada escuela desde cada área. Asuma que cualquier grupo de estudiantes de un área tiene la misma mezcla étnica que el área completa.

7. Un granjero está criando cerdos para vender en el mercado y desea determinar la cantidad de los tipos disponibles de alimento que debe dar a cada animal para llenar ciertos requerimientos nutricionales a costo mínimo. Las unidades de cada tipo de ingrediente nutricional básico, contenido en una libra de cada tipo de alimento, es dada en la siguiente tabla junto con los requerimientos nutricionales y los costos de los alimentos.

INGREDIENTE NUTRICIONAL	LB.DE MAIZ	LB.DE GRASAS	LB.DE ALFALFA	UNIDADES REQUERIDAS POR DIA
Carbohidratos	9	2	4	20
Proteína	3	8	6	18
Vitaminas	1	2	6	15
Costo (Centavos/lb)	7	6	5	

Formule y resuelva el programa lineal para este problema.

8. Rico-AG es una compañía fertilizadora germana que justamente ha recibido un contrato para proporcionar 10,000 toneladas de fetilizantes 3-12-12. La composición garantizada de este fertilizante es (por peso) al menos de 3% de nitrógeno, 12% de fósforo y 12% de potasio. Este fertilizante puede ser mezclado con cualquier combinación de las materias primas descritas en la tabla siguiente:

MATERIA PRIMA	%NITROGENO	%FOSFORO	%POTASIO	PRECIO MUNDIAL/ TONELADA
AN	50	0	0	190 DM
SP	1	40	5	180 DM
CP	2	4	35	
BG	1	15	17	215 DM

Rico-AG tiene en almacén 500 ton de SP la cual se compró antes por 220 Dm/Ton. Rico-AG tiene un acuerdo a termino largo con Fledermausguano, S.A., el cual le permite comprar el 3-12-12 ya combinado a 195 Dm/ton.

Formule un modelo para Rico-[illegible] que le permita decidir cuánto comprar, cuánto combinar y cómo combinar, estableciendo además, cuáles supuestos haría con respecto a los costos de inventario.

4. La Compañía Albers Milling compra maíz y trigo y luego los tritura y mezcla en dos productos finales, Fast-Gro y Quik-Gro. Se requiere que Fast-Gro tenga al menos 2.5% de proteína, mientras que el Quick Gro debe tener al menos [illegible]. El maíz y el trigo contienen 1.9% y 3.8% de proteína respectivamente. La firma puede comprar y mezclar en la planta Albers (A) o en la planta Bartelso (B). Los productos mezclados deben entonces ser embarcados a dos bodegas de la firma, uno en Carlyle (C) y el otro en Damiansville (D). Los costos actuales por bushel en las dos plantas son:

	A	B
Maíz	10.0	14.0
Trigo	12.0	11.0

Los costos de transporte por bushel entre las plantas y los depósitos son:

FAST-GRO

		ALMACENES C	ALMACENES D
PLANTAS	A	1.00	2.00
	B	3.00	.75

QUIK-GRO

		ALMACENES C	ALMACENES D
PLANTAS	A	3.00	3.50
	B	4.00	1.90

La firma debe satisfacer las demandas siguientes (en bushels) de las salidas de los depósitos:

DEPOSITO	PRODUCTO FAST-GRO	PRODUCTO QUIK-GRO
C	1,000	3,000
D	4,000	6,000

Formule un modelo de programación lineal para lat determinacıón de las decisiones de adquisición, mezcla y embarque.

II.5. PLANEACION MULTIPERIODICA DETERMINISTICA

Uno de los usos más importantes de la Programación Lineal es la Planeación Multiperiódica. La mayor parte de los problemas hasta aquí vistos son esencialmente de un solo periodo. Las formulaciones tienen una representación como si las decisiones en uno fueran derivadas de decisiones en intervalos futuros. Comunmente, sin embargo, si se produce más de un cierto producto de lo que se requiere, esa producción extra no será inútil siendo empleada probablemente en la siguiente etapa.

Esas interacciones entre periodos pueden fácilmente representarse con modelos de programación lineal. En efecto, los mayores problemas encontrados en la práctica son modelos multiperiódicos. En este capítulo nos referirémos al modelo multiperiódico como modelo dinámico.

Las interacciones interperiódicas generalmente se toman en cuenta, en programación lineal, por medio de la introducción de variables de decisión de inventario. Dichas variables "encadenan" periodos adyacentes. Por ejemplo, suponga que tenemos sólo una posibilidad de decidir en cada uno de ellos, como pudiera ser cuánto producir de un producto. A la variable que representa lo anterior la llamaremos P_j. Además, suponga que se tienen contratos para vender cantidades conocidas d_j, de este producto en el periodo j. Se define la variable de decisión I_j como la cantidad de inventario sobrante al final del periodo j. De acuerdo a esta convensión el inventario inicial en el periodo j es I_{j-1}. La formulación de programación lineal contendrá entonces restricciones de equilibrio en cada periodo del tipo "fuentes de producto = usos de producto". Para un segundo periodo las fuentes del producto son: el inventario inicial I_1, y la producción en el periodo, P_2. Los usos del producto son: la demanda d_2, y el inventario al final del periodo, I_2. Por ejemplo, si d_2=60 y d_3=40, entonces la restrición para el periodo 2 es:

$$I_1 + P_2 = 60 + I_2 \qquad o \qquad I_1 + P_2 - I_2 = 60$$

La restricción para el periodo 3 es:

$$I_2 + P_3 - I_3 = 40$$

note como I_2 encadena, esto es, aparece en las restricciones 2 y 3.

En algunos problemas el flujo neto de salida no es exactamente igual al flujo de entrada para el siguiente periodo. Por ejemplo, si el producto es efectivo, entonces una de las variables de encadenamiento puede ser pedir prestado en el corto plazo. Por cada dolar prestado en el periodo 2, entraremos al periodo 3 con 1.50, si la tasa de interés es de 5% por periodo.

Por otro lado, si el producto mano de obra y se tiene una tasa de deserción de 10% por periodo, entonces, las dos restricciones anteriores pueden escribirse como:

$$.90I_1 + P_2 - I_2 = 60$$

$$.90I_2 + P_3 - I_3 = 40$$

En este caso, P_i es el número de gente contratada en el periodo i.

El siguiente ejemplo proporciona una ilustración simplificada de un solo producto, en una situación de planeación multiperiódica

Un Problema Dinámico de Producción

Consideremos ahora un problema en el que se quiere probar un plan de producción para varios periodos consecutivos. Una compañía produce un articulo cuya demanda para los siguientes cuatro trimestres se prevee que sea:

Primavera	Verano	Otoño	Invierno
20	30	50	60

Suponiendo que toda la demanda se tiene que satisfacer, existen dos politicas extremas que pueden seguirse.

a)- Que la demanda y la producción se equilibren para que no haya inventarios

b)- Que el inventario absorva las variaciones de la demanda y que se produzca a una tasa constante de 40 unidades por periodo

Por otra parte existe un costo asociado con el manejo de inventario y un costo asociado con el nivel de producción, de tal forma que se puede esperar que una politica de costo mínimo es probable que sea una combinación de a) y b).

Para propósitos contables, la compañía estima que el cambio del nivel de producción de un periodo al siguiente tiene un costo de $500 por unidad. Esos costos frecuentemente son llamados de contratación y despido. También se ha estimado que los costos de inventario pueden estimarse con precisión haciendo un cargo de \$800 por cada unidad de inventario al final de un periodo. El inventario inicial es cero y el nivel de producción actual es de 55 unidades por trimestre. Como requisito se pide al final del último trimestre se regrese al nivel de producción inicial.

Se puede ahora calcular que la política de no inventario tiene un costo de \$500*(35 + 10 + 20 + 10 + 5) = \$40,000. El costo de una política de producción constante es \$800*(20 + 30 + 20 + 0) = \$56,000

Finalmente, podemos encontrar una política de mínimo costo formulando el problema en programación lineal, y resolverlo. Para esto, conviene definir a I_i como el inventario a disponer al final del periodo i ,para i=1, 2, 3, 4. P_i la producción en el periodo i, U_i y D_i hacia arriba y hacia abajo en la producción, del periodo i-1 al periodo i. Si se quiere minimizar el costo por año entonces se tiene que minimizar la suma de los costos de inventario:

$\$800\ I_1 + \$800\ I_2 + \$800\ I_3 + \$800\ I_4$

más los costos de cambio de producción:

$\$500\ U_1 + \$500\ U_2 + \$500\ U_3 + \$500\ U_4 +$
$\$500\ D_1 + \$500\ D_2 + \$500\ U_3 + \$500\ U_4.$

a.- Dé la formulación para el caso en que los costos de contratación y despido, cuando hay un cambio de producción, son cero. Puede predecir la respuesta ?

b.- Suponga que sólo se tienen costos por incremento en la producción ,esto es se tienen costos por contratación de personal; dé la formulación.

c.- Dé la formulación y solución cuando todos los costos son como se describieron originalmente.

Formulación y Solución

Todo problema multiperiódico tendrá una restricción de "balance de material" o "fuentes = usos" para cada producto en cada periodo. La forma usual de esas restricciones en palabras es:

inventario inicial + producción - inventario final = demanda

y algebraicamente

$$P_1 - I_1 = 20$$

$$I_1 + P_2 - I_2 = 30$$

$$I_2 + P_3 - I_3 = 50$$

$$I_3 + P_4 = 60$$

Note que I_4 y I_0 no aparecen en la primera y última restricciones, ya que el inventario inicial y final se requieren que sean cero.

Si la formulación se resuelve de esta manera, no existe nada que force a U_1, D_1, etc. a que sean mayores que cero. Por lo tanto, la solución será una política de producción pura con $P_1 = 20$, $P_2 = 30$, $P_3 = 50$, $P_4 = 60$. Esta política implica un incremento de producción al final de cada periodo excepto el último. Esto sugiere que una forma de forzar a U_1, U_2, U_3, U_4 a que tomen valores apropiados es adicionando las siguientes restricciones:

$$U_2 \geq P_2 - P_1$$

$$U_3 \geq P_3 - P_2$$

$$U_4 \geq P_4 - P_3$$

De manera análoga, para los decrementos de producción se tiene el siguiente conjunto de restricciones:

$$D_1 \geq 55 - P_1$$

$$D_2 \geq P_1 - P_2$$

$$D_3 \geq P_2 - P_3$$

$$D_4 \geq P_3 - P_4$$

Para incorporar la condición de que el nivel de producción regrese a 55 al final del trimestre de invierno, adicionaremos las variables U_5 y D_5 para medir los cambios al fin de éste. Lo que se logra con las restricciones:

$$U_5 \geq 55 - P_4$$

$$D_5 \geq P_4 - 55$$

Esto completa la formulación. Cuando se resuelve, nos lleva a una política mixta con

$$P_1 = P_2 = 25; \quad P_3 = P_4 = 55$$

Hay que notar que la formulación puede simplificarse de una con 12 restricciones a una con sólo 8. La observación clave es que dos restricciones como:

$$U_2 \geq P_2 - P_1$$

$$D_2 \geq P_1 - P_2$$

pueden ser reemplazadas por una sola como:

$U_2 - D_2 = P_2 - P_1$

El argumento es más económico que algebráico. El argumento con una u otra formulación es forzar a $U_2 = P_2 - P_1$ si $P_2 - P_1 \geq 0$ y $D_2 = P_1 - P_2$ si $P_1 - P_2 \geq 0$. Con argumentos económicos se puede establecer que en la solución óptima se encontrará que a lo más U_2 y D_2 son > 0, en ambas formulaciones. Si U_2 y D_2 son > 0 en la segunda formulación entonces ambas pueden reducirse por una cantidad igual y así reducir sus costos sin violar ninguna restricción

La formulación completa es:

```
MIN  800 I1 + 800 I2 + 800 I3 + 500 U1 + 500 U2 + 500 U3
+ 500 U4 + 500 D1 + 500 D2 + 500 D3 + 500 D4 + 500 U5 +
500 D5

sujeto a

2)  - I1 + P1 = 20
3)    I1 - I2 + P2 = 30
4)    I2 - I3 + P3 = 50
5)    I3 + P4 = 60
6)    U1 - D1 - P1 = -55
7)    U2 - D2 + P1 - P2 = 0
8)    U3 - D3 + P2 - P3 = 0
9)    U4 - D4 + P3 - P4 = 0
10)   U5 - D5 + P4 = 55

END
```

la solución es:

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO

1) 38 000

VARIABLE	VALOR	COSTO REDUCIDO
I1	5.0000	0.0000
I2	0.0000	700.0000
I3	5.0000	0.0000
U1	0.0000	1 000.0000
U2	0.0000	100.0000
U3	30.0000	0.0000
U4	0.0000	0.0000
D1	30.0000	0.0000
D2	0.0000	900.0000
D3	0.0000	1 000.0000
D4	0.0000	1 000.0000
P1	25.0000	0.0000

P2	25.0000	0.0000
P3	55.0000	0.0000
U5	0.0000	800.0000
D5	0.0000	200.0000
P4	55.0000	0.0000

RENGLON	HOLGURA	PRECIOS DUALES
2)	0.0000	900.0000
3)	0.0000	100.0000
4)	0.0000	0.0000
5)	0.0000	-800.0000
6)	0.0000	500.0000
7)	0.0000	-400.0000
8)	0.0000	-500.0000
9)	0.0000	-500.0000
10)	0.0000	300.0000

La politica mixta establecida por la solución del programa lineal es de $7 000 la cual es más económica que la mejor politica pura.

Problemas multiperiódicos más realistas involucran más de un producto. En el siguiente ejemplo se da un paso dirigido a ser más relista, considerando varios productos.

Problema de Inventario

Los productos principales de la compañía LP son los compuestos químicos Amide y Nitrilo. La demanda para estos dos productos es estacional. Para propósitos de planeación, la compañía utiliza la siguiente información de la demanda trimestral para los siguientes años.

DEMANDA EN MILES DE GALONES

	AMIDE	NITRILE
Primavera	20	20
Verano	30	50
Otoño	50	30
Invierno	60	60

Esencialmente se tienen tres estrategias para satisfacer las fluctuaciones de la demanda:

1.- Producir a una tasa fija y utilizar inventarios para absorver las fluctuaciones de la demanda.

2.- El tiempo extra varía para enfrentar las fluctuaciones de la demanda mientras no se lleva inventario.

3.- La capacidad varía mientras mientras no se lleva un inventario por lo que no se requiere tiempo extra.

La mejor estrategia seguramente es una combinación de ellas

Los costos de inventario, almacenaje y transporte se estiman en $8 por 1 000 galones de Amide al final de cada trimestre y en igual forma de $7 por 1 000 galones de Nitrilo

Cada producto debe procesarse en los dos principales departamentos de la compañía, siendo éstos de Preparación y Terminado. Por 1 000 galones de Amide se requiere una hora de procesamiento en cada uno de los departamentos de Preparación y Terminado. En cambio cada 1000 galones de Nitrilo requieren de una hora en la Preparación y 1.5 horas en el Terminado.

El costo por tiempo regular en los departamentos de Preparación y Terminado son de $3 y $2.50, respectivamente, a diferencia del tiempo extra que es de $4.50 y 3.50, por hora. El tiempo regular siempre se preferirá al tiempo extra ya que su costo es menor; sin embargo, el cambiar el tiempo regular de un periodo a otro resulta indeseable ya que involucra la serios problemas con la contratación y despido de empleados La compañía estima que los costos son de $ 5 por cada cambio (hacia arriba o hacia abajo) de una hora del tiempo regular usado en el Departamento de Preparación durante una estación. De esta manera, por ejemplo, si el tiempo regular utilizado en el Departamento de Preparación es de 120 horas en un periodo y 40 en el siguiente, entonces se tendrá un costo de $ 400 por el hecho de disminuir la capacidad de dicho Departamento en 80 horas. Debido a la experiencia de la compañía al respecto, se establece que el tiempo extra en cualquier periodo no debe exceder el 50 % del tiempo regular.

La pregunta ahora es: "Cuáles deben ser los niveles de tiempo regular, tiempo extra, e inventarios para cada periodo?" En este caso, se debe tratar el problema como cíclico, ésto es los inventarios al final del trimestre de invierno son los inventarios de entrada en el de primavera. Por lo que se deberá pagar por cualquier cambio en los niveles que resulten al final del periodo invernal.

Formulacion y Soluciones.

Definamos las siguientes variables:

Para i = 1 a 4

AP_i: Producción de amide, periodo i.
NP_i: Producción de nitrilo en el periodo i
RP_i: Tiempo regular, departamento de preparación, periodo i.
RF_i: Tiempo regular, departamento determinado, periodo i.
OP_i: Tiempo extra, departamento de preparación, periodo i.
OF_i: Tiempo extra, departamento determinado, periodo i.

IA_i: Inventario de amido, al final del periodo i.
IN_i: Inventario de nitrilo, al final del periodo i.
UP_i: Aumento en la fuerza de trabajo, en el departamento de preparación, en el periodo i.
DP_i: Disminución en la fuerza de trabajo, departamento de preparación, periodo i.
UF_i: Aumento en la fuerza de trabajo, departamento determinado, periodo i.
DF_i: Disminución de la fuerza de trabajo, departamento determinado, periodo i

La función objetivo es:

$$\text{Minimizar: } \sum_{i=1}^{4} (3*RP_i + 2,5*RF_i + 4,5*OP_i + 3.5*OF_i + 8*IA_i + 7*IN_i + 5*UP_i + 5*DP_i + 6*UF_i + 6*DF_i)$$

RESTRICCIONES

Balance de inventario y demanda/material.

Ejemplo: Periodo 1, amido

$IA_1 = AP_1 + IA_4 - 20$

o en forma estandar:

$AP_1 + IA_4 - IA_1 = 20$
etc.

Ejemplo: Periodo 2, nitrilo

$IN_2 = NP_2 + IN_1 - 50$

o en forma estandar:

$NP_2 + IN_1 - IN_2 = 50$
etc.

Capacidad de mano de obra para satisfacer la producción.

Preparación.

$RP_i + OP_i \geq AP_i + NP_i$ $\qquad i=1,2,3,4.$

o en forma estandar:

$AP_i + NP_i - RP_i - OP_i \leq 0$

Terminado

$RF_i + OF_i \geq AP_i + 1.5*NP_i$ $\qquad i=1,2,3,4.$

o en forma estandar:

$AP_i + 1.5*NP_i - RF_i - OF_i \leq 0$

Tiempo extra

Preparación:

$DP_i \leq .5*RP_i$ $\qquad i=1,2,3,4.$

o en forma estandar:

$DP_i - .5*RP_i \leq 0$

Similarmente para terminado

Preparacion $\qquad$ Contratación y despido.

$UP_i - DP_i = RP_i - RP_{i-1}$ $\qquad i=2,3,4.$

o en forma estandar

$UP_i - DP_i - RP_i + RP_{i-1} = 0$ $\qquad i=2,3,4.$

$UP_1 - DP_1 - RP_1 + RP_4 = 0$

Similarmente para terminado.

Todas las variables no negativas.

Resumen.

Variables: 48

Restricciones: 32

	PRODUC. AMIDE. (MILES)	INVENTARIO	PRODUC. NITRILO. (MILES)	INVENTARIO
PRIMAVERA	20	0	21.3	1.3
VERANO	30	0	48.7	0
OTOÑO	50	0	32	2
INVIERNO	60	0	58	0

	DEPTO.PREPARACION		DEPTO.TERMINADO	
	TIEMPO REG.	TIEMPO EXT.	TIEMPO REG.	TIEMPO EXT.
PRIMAVERA	78.7	0	98	0
VERANO	78.7	0	98	5
OTOÑO	78.7	3.33	98	0
INVIERNO	78.7	39.3	98	49
TOTAL	314.8	42.63	392	54

COSTO TOTAL TIEMPO REGULAR	$1,924.4
COSTO TOTAL TIEMPO EXTRA	380.8
COSTO TOTAL INVENTARIO	23.1
COSTO TOTAL CONT. Y DESP.	0.0
COSTOS TOTALES	$2,328.3

Segundo plan. Si la restricción de "capacidad de tiempo regular más tiempo extra debe ser al menos igual a las necesidades de producción" se cambia a "capacidad de tiempo regular más tiempo extra debe ser exactamente igual a las necesidades de producción", se obtiene un plan diferente. De principio se puede pensar ingenuamente que el último planteamiento tendrá un costo bajo ya que no involucra mano de obra ociosa. Sin embargo, el cambio de una desigualdad por una igualdad restringe las posibles acciones de tal manera que dicho cambio no disminuye los costos. Si se prohibe el tiempo ocioso, se puede incrementar la producción a la vez que hay un cambio en el costo; ya que se estará forzado a seguir más estrechamente el patrón de demanda. La siguiente solución corresponde al problema restringido e indica los niveles y su costo total.

	PRODUC. AMIDE. (MILES)	INVENTARIO	PRODUC. NITRILO. (MILES)	INVENTARIO
PRIMAVERA	25	5	42.6	22.6
VERANO	25	0	42.6	15.2
OTOÑO	50	0	25.9	11.1
INVIERNO	60	0	43.9	0

	DEPTO. PREPARACION		DEPTO. TERMINADO	
	TIEMPO REG.	TIEMPO EXT.	TIEMPO REG.	TIEMPO EXT.
PRIMAVERA	67.7	0	88.9	0
VERANO	67.6	0	88.9	0
OTOÑO	72.4	3.33	88.9	0
INVIERNO	76.6	34.3	88.9	44.4

TOTAL: $2,500.00

Modelos Financieros Multiperiódicos

En la mayor parte de los problemas de planeación multiperiódica la administración de los activos circulantes de una empresa es una consideración muy importante. Si usted está dispuesto a considerar el movimiento de caja como un problema de inventario, justamente como si el dinero fuera otro artículo, entonces éste es un paso para incorporar decisiones financieras en un modelo multiperiódico. El hecho clave es que para todo periodo, existe una restricción que establece "Las fuentes de los recursos en caja menos los usos = 0". El siguiente ejemplo ilustra las características principales de dichos modelos.

Construcción de un portafolio satisfaciendo una cadena de requerimientos de flujo de caja.

Suponga que como resultado de un ejercicio de planeación se ha concluido que para enfrentar ciertos compromisos se necesitan las siguientes cantidades para el presente año y los restantes catorce.

Año:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Caja (miles)	10	11	12	14	15	17	19	20	22	24	26	29	31	33	36

Es muy común que cuando se tiene este tipo de compromisos es fácil caer en un pleito legal por incumplimiento. En este caso, ambas partes pueden llegar a un arreglo de tal forma que la parte acreedora reciba un flujo de pagos a valor presente.

Por simplicidad administrativa ambas partes prefieren establecer una suma de pagos que es equivalente a la anterior secuencia de quince erogaciones. La parte que recibe la cantidad argumentará que éste debe ser igual al valor presente de la suma de cada uno de dichos pagos empleando una tasa de interés baja, como lo establecida en inversiones de muy bajo riesgo, tal como una cuenta de ahorros garantizada por el gobierno. Por ejemplo, si se emplea una tasa de 4%, el valor presente del flujo de pagos es de $230,437.00

La parte acreedora, sin embargo, prefiere argumentar el uso de una tasa mucho más alta. Por lo que para que haya un arreglo, tal argumento debe incluir evidencia de que dichas inversiones son factibles y no tienen más riesgo que las cuentas de ahorros. Las inversiones que generalmente se ofrecen son bonos o acciones gubernamentales. Por simplicidad suponga que existen solo dos tipos de inversión con las siguientes características:

BONO TIPO	COSTO ACTUAL	REND. ANUAL	AÑOS DE VENCIMIENTO	PAGO DEL AL VENC.
1	$980,00	$60,00	5	$1,000,00
2	965,00	65,00	12	1,000.00

La parte deudora ofrecerá ahora una suma agregada con una recomendación de cuánto debe invertirse en los bonos tipos 1 y 2, y en cuenta de ahorros, de tal forma que las necesidades anuales se satisfacen con un mínimo pago.

Se definen las siguientes variables de decisión para resolver el problema:

B1 = Cantidad invertida ahora en el bono tipo 1, medida valor nominal

B2 = Cantidad invertida ahora en el bono tipo 2, medida valor nominal

S_i = Cantidad invertida en una cuenta de ahorros en el año i.

L = Suma inicial.

La función objetivo maximizará la suma inicial. Observe que se tiene una restricción por cada año la cual forza a que el flujo neto de caja sea 0. Si suponemos que los fondos inactivos se invierten al 4% en una cuenta de ahorros y todas las cantidades se expresan en miles, entonces la formulación es:

Min. L

Sujeto a:

2) L - 0,98 B1 - 0,965 B2 - S0 = 10
3) 0,06 B1 + 0.065 B2 + 1.04 S0 - S1 = 11
4) 0,06 B1 + 0,065 B2 + 1.04 S1 - S2 = 12
5) 0,06 B1 + 0,065 B2 + 1.04 S2 - S3 = 14
6) 0,06 B1 + 0,065 B2 + 1,04 S3 - S4 = 15
7) 1,06 B1 + 0.065 B2 + 1.04 S4 - S5 = 17
8) 0,065 B2 + 1.04 S5 - S6 = 19
9) 0,065 B2 + 1.04 S6 - S7 = 20
10) 0,065 B2 + 1.04 S7 - S8 = 22
11) 0,065 B2 + 1.04 S8 - S9 = 24
12) 0,065 B2 + 1.04 S9 - S10 = 26
13) 0,065 B2 + 1.04 S10 - S11 = 29

```
14)   1.065 B2 + 1.04 S11 - S12 = 31
15)   1.04 S12 - S13 = 33
16)   1.04 S13 - S14 = 36
END
```

La imagen de los coeficientes de las restricciones proporcionan una mejor apreciación de la estructura del problema.

```
                               S S S S S
       B B S S S S S S S S S S 1 1 1 1 1
     L 1 2 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4

 1:  1                                       MIN
 2:  1-T-T-1                                 = A
 3:    U U A-1                               = B
 4:    U U   A-1                             = B
 5:    U U     A-1                           = B
 6:    U U       A-1                         = B
 7:    A U         A-1                       = B
 8:      U           A-1                     = B
 9:      U             A-1                   = B
10:      U               A-1                 = B
11:      U                 A-1               = B
12:      U                   A-1             = B
13:      U                     A-1           = B
14:      A                       A-1         = B
15:                                A-1       = B
16:                                  A-1     = B
```

Nótese que en el renglón (7) B1 tiene un coeficiente de 1.06. Este representa un pago del principal por $1,000.00 más $60.00 por intereses todo en miles. La variable S14, (inversión de fondos en una cuenta de ahorros después de que se ha hecho un pago), aparece en el problema aún cuando en principio se pueda pensar que es inútil permitir tal opción. S14 efectivamente es un sobrante de caja en el periodo final. Sin embargo, no es extraño que en la solución del problema de minimizar la suma agregada se tenga dinero sobrante en caja al final del problema. Esto es porque un bono puede ser la forma más económica de entregar fondos en periodos intermedios. Lo que puede causar que el pago del capital principal al final del vencimiento de un bono se sobrepague en periodos más distantes. La solución para este problema es:

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO.

```
1)              195.6837

VARIABLE              VALOR              COSTO REDUCIDO
   L               195.683672               0.000000
```

B1	95.795770	0.000000
B2	90.154735	0.000000
S0	4.804497	0.000000
S1	5.604481	0.000000
S2	5.436464	0.000000
S3	3.261727	0.000000
S4	0.000000	0.106979
S5	90.403574	0.000000
S6	80.877774	0.000000
S7	69.975075	0.000000
S8	56.634084	0.000000
S9	40.759504	0.000000
S10	22.249944	0.000000
S11	0.000000	0.141246
S12	65.014792	0.000000
S13	34.615385	0.000000
S14	0.000000	0.379637

RENGLON	HOLGURA	PRECIOS DUALES
2)	0.000000	- 1.0000000
3)	0.000000	- 0.961538
4)	0.000000	- 0.924556
5)	0.000000	- 0.888996
6)	0.000000	- 0.854804
7)	0.000000	- 0.719063
8)	0.000000	- 0.691406
9)	0.000000	- 0.664814
10)	0.000000	- 0.639244
11)	0.000000	- 0.614658
12)	0.000000	- 0.591017
13)	0.000000	- 0.568286
14)	0.000000	- 0.410615
15)	0.000000	- 0.394822
16)	0.000000	- 0.379637

No. DE ITERACIONES = 15

De los \$195,638.00 de pago, \$10,000.00 se van a requerimientos inmediatos, \$4,804.5 se destinan a cuenta de ahorros y .98 * 95,795.77 + .965 * 90,154.74 = \$180,879.20 en bonos a largo plazo. Debido a que se considera un amplio rango de inversiones en vez de cuentas de ahorro, la cantidad a pagar se redujo en \$34,750.00, o sea 15%

Para otras soluciones, se puede pensar en asignar una mayor fracción a invertir en algún tipo de bono en particular. Por ejemplo, limitando la cantidad a invertir en el bono tipo 1 a la mitad del valor inicial de la suma agregada, lo que se logra adicionando la restricción:

$$.98\ B1 - .5\ L \leq 0$$

Tales limitantes comunmente se llaman restricciones de portafolios.

Una complicación adicional puede surgir debido a las necesidades de integralidad sobre las inversiones B1 y B2. Por ejemplo los bonos se pueden comprar sólo en incrementos de $1,000.00 . Generalmente, los valores fraccionales pueden redondearse a valores enteros de tal suerte que no se incremente en gran medida la suma agregada. Por ejemplo, si B1 y B2 son 96 y 90 en el ejemplo previo, el costo total disminuye de $195,726.5 a $195,683.7 . Cuando esta situación se da, S14 resulte diferente de 0; especificamente, en el último periodo hay un pago extra de cerca de $40.00

Modelos de Planeación Financiera considerando impuestos.

El siguiente ejemplo trata de una versión ligeramente más complicada del problema de selección de portafolios e ilustra como incluir y examinar el efecto de impuestos.

Problema de Planeación sobre el Desarrollo de una Compañía.

La gerencia de desarrollo de la Compañía WS está analizando sus planes de inversión para los siguientes 3 años. Actualmente tiene fondos por $2 millones de dólares para invertir. En forma semestral WS espera tener los siguientes ingresos debido a inversiones previas: $500,000.00 (al final del primer semestre), $400,000.00, $380,000.00, $360,000.00, $340,000.00 y $300,000.00 al final del tercer año. Se tienen tres proyectos de desarrollo en los que WS está considerando participar. En el proyecto de desarrollo de la ciudad de Foster se podría tener, si WS participa totalmente, el siguiente flujo de caja (proyectada) semestral en los próximos 3 años (números negativos representan inversiones, positivos ingresos): - $3 millones; - $1 millón; - $1.8 millones; $400,000; $1.8 millones; $1.8 millones; $5.5 millones. La última cifra es el valor estimado al final de los 3 años. El segundo proyecto considerara acondicionar un viejo edificio y emplearlo para oficinas en la construcción de una obra importante, demoliendo el viejo edificio al final de los tres años. El flujo de caja sería: - $2 millones; - $500,000; $1.5 millones; $ 1.5 millones; $1.5 millones; $200,000; - $1 millón.

El tercer proyecto, el hotel D.U., podría tener el siguiente flujo de caja. Otra vez, la última cifra es el valor estimado al final de los tres años: - $2 millones; - $2 millones; - $1.8 millones; $1 millón; $ 1 millón; $ 1 millón; $6 millones.

WS puede pedir dinero prestado al 3.5 % por semestre. Sólo se puede pedir prestado a lo más 2 millones, esto es, el dinero por pagar nunca puede exceder a 2 millones. Por otra parte, WS puede invertir su sobrante de fondos al 3 % por semestre.

Inicialmente haremos a un lado los impuestos. Formularemos el problema maximizando el valor neto al final de los tres años. Si WS participa en un proyecto en menos del 100 %, todos los flujos de caja del proyecto se reducen apropiadamente.

Formulación y solución

Definémos: F = participación porcentual en el problema de la ciudad de Foster; M = participación porcentual en el proyecto de adecuación de oficinas; D = participación en la construcción del hotel; B_i = cantidad de préstamo en el periodo i , en miles, i = 1...6; L_i = cantidad que presta en el periodo i, en miles, i = 1...6; Z = valor neto después de los 6 periodos, en miles. El probllema formalmente es (todos los números están en miles):

MAX Z

SUJETO A

2) 3000 F + 2000 M + 2000 D - B1 + L1 = 2000

3) 1000 F + 500 M + 2000 D + 1.035 B1 - 1.03 L1 - B2 + L2 = 500

4) 1800 F - 1500 M + 1800 D + 1.035 B2 - 1.03 L2 - B3 + L3 = 400

5) - 400 F - 1500 M - 1000 D + 1.035 B3 - 1.03 L3 - B4 + L4 = 380

6) - 1800 F - 1500 M - 1000 D + 1.035 B4 - 1.03 L4 - B5 + L5 = 360

7) - 1800 F - 200 M - 1000 D + 1.035 B5 - 1.03 L5 - B6 + L6 = 340

8) Z - 5500 F + 1000 M - 6000 D + 1.035 B6 - 1.03 L6 = 300

9) B1 ≤ 2000

10) B2 ≤ 2000

11) B3 ≤ 2000

12) $B4 \leq 2000$

13) $B5 \leq 2000$

14) $B6 \leq 2000$

15) $F \leq 1$

16) $M \leq 1$

17) $D \leq 1$

Las expresiones 2 a la 8 son las restricciones de flujo de caja en cada uno de los períodos, los cuales forzan a que se cumpla que los usos - las fuentes de caja = 0. En el período inicial, por ejemplo, L1 es un uso de caja mientras que B1 es una fuente. La solución es :

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO

1) 7665.179

VARIABLE	VALOR	COSTO REDUCIDO
Z	7665.179080	0.000000
F	0.714341	0.000061
M	0.637210	0.000015
D	0.000000	452.381714
B1	1417.443340	0.000000
L1	0.000000	0.008788
B2	2000.000000	0.000000
L2	0.000000	0.334314
B3	2000.000000	0.000000
L3	0.000000	0.250956
B4	448.449000	0.000000
L4	0.000000	0.005305
B5	0.000000	0.005150
L5	2137.484220	0.000000
B6	0.000000	0.000000
L6	3954.865110	0.000000

ROW	HOLGURA	PRECIOS DUALES
2)	0.000000	1.819220
3)	0.000000	1.757701
4)	0.000000	1.381929
5)	0.000000	1.098032
6)	0.000000	1.060900
7)	0.000000	1.030000
8)	0.000000	1.000000
9)	582.556671	0.000000

10)	0.000000	0.327404
11)	0.000000	0.245466
12)	1551.551010	0.000000
13)	2000.000000	0.000000
14)	2000.000000	0.000000
15)	0.285659	0.000000
16)	0.362790	0.000000
17)	1.000000	0.000000

ANALISIS DE SENSIBILIDAD

RANGOS EN LOS CUALES LA BASE NO CAMBIA

RANGOS EN LOS COEFICIENTES DE COSTOS

VARIABLE	COEF. ACTUAL	INCR. PERMITIDO	DECR. PERMITIDO
Z	1.000000	INFINITO	1.000000
F	0.000000	3043.722050	454.594936
M	0.000000	644.819443	583.692337
D	0.000000	457.381714	INFINITO
B1	0.000000	0.008822	0.409697
L1	0.000000	0.008788	INFINITO
B2	0.000000	INFINITO	0.327404
L2	0.000000	0.334314	INFINITO
B3	0.000000	INFINITO	0.245466
L3	0.000000	0.250956	INFINITO
B4	0.000000	0.005305	0.162487
L4	0.000000	0.005305	INFINITO
B5	0.000000	0.005150	INFINITO
L5	0.000000	0.005150	0.222112
B6	0.000000	0.005000	INFINITO
L6	0.000000	0.005000	0.227865

RANGOS EN LOS LADOS DERECHOS

RENGLON	RHS ACTUAL	INCR. PERMITIDO	DECR. PERMITIDO
2	2000.00000	1415.854160	2526.244390
3	500.00000	775.555534	1887.037060
4	400.00000	1198.599240	942.752693
5	380.00000	448.449009	1551.551030
6	360.00000	INFINITO	2137.484220
7	340.00000	INFINITO	3954.865110
8	300.00000	INFINITO	7665.179080
9	2000.00000	INFINITO	582.556671
10	2000.00000	561.718163	1163.009160
11	2000.00000	1027.054430	296.852333
12	2000.00000	INFINITO	1551.551010
13	2000.00000	INFINITO	2000.000000
14	2000.00000	INFINITO	2000.000000
15	1.00000	INFINITO	0.285659
16	1.00000	INFINITO	0.362790
17	1.00000	INFINITO	1.000000

Interpretación de los Precios Duales

El precio dual de cada una de las primeras siete restricciones es el incremento en el valor neto, en el último periodo, que resulta de tener disponible un dolar extra en una etapa anterior. Por ejemplo, 1.819220 indica que un dolar disponible al comienzo del periodo 1 incrementará el valor neto, al final, a cerca de $1.82.

Un dolar extra en el periodo 5 se valora en $1.0609 al final, ya que lo que se puede hacer en los dos últimos es invertir al 3 %. Así, se tendrá 1.03 * 1.03 = 1.0609

Un dolar extra en el periodo 4 nos ahorrará de pedir prestado un dolar; de esta forma, será $1.035 más rico en el periodo 5. Hemos visto ya el valor que se genera teniendo un dolar extra en el periodo 5, de esta forma, el valor de un dolar extra en el 4 es $1.035 * 1.0609 = $1.09803.

Los precios duales sobre las restricciones de las cantidades que se piden prestadas pueden relacionarse con el resto de los precios duales como sigue. Si se es capaz de tener un dolar adicional en el periodo 2 su valor final será de 1.7577. Si este dolar se pidiera prestado, entonces se tendría que pagar $1.035 en el periodo 3 teniendo un costo efectivo de 1.035 * 1.38193. De esta manera, el valor neto en el último periodo si se pide prestado un dolar en el periodo 2 es 1.7577 - 1.035 * 1.38193 = 0.3274, cuyo valor corresponde al precio dual sobre la restricción de pedir prestado en el periodo 2 (ver tabla anterior columna de precios duales).

Las tasa de interés efectiva o costo de capital, i, en cualquier periodo t, puede establecerse a partir de los precios duales derivando la tasa a la cual uno estaría dispuesto a pedir prestado. Si pedimos un dolar en el periodo t aumentaría nuestro capital en $1 pero se tendría que pagar 1 + i dólares en el t + 1. Debemos balancear esas dos consideraciones. Como ejemplo tomémos el periodo 1. Un dolar extra se valora en $1.819220 al final del periodo 6. Con base en lo anterior, si tuviésemos que pagar 1 + i en el periodo 2 costaría (1 + i)*$1.7577 al final. Efectuando el balanceo se tiene:

$$1.819220 = (1+i)\ 1.7577$$

resolviendo se tiene que $i = 0.035$

Esto no es una sorpresa ya que precisamente es la tasa a la que se pide prestado en el primer periodo, pero no es lo mismo en los demás.

Aplicando un análisis similar las siguientes tasas efectivas son:

PERIODO	i
1	0.035
2	0.1719
3	0.25855
4	0.035
5	0.03
6	0.03

Explicación sobre los impuestos gravados

Suponga que tomamos en cuenta los impuestos. Consideremos la siguiente situación simplificada. Se tiene una tasa impositiva del 50 % sobre las ganancias o beneficios en cualquier periodo. Si se tiene una pérdida en alguno de ellos, el 80 % de ella se puede llevar al siguiente periodo. Los ingresos menos los gastos de los tres proyectos en cada periodo aparecen en la siguiente tabla. Los gastos incluyen depreciación

PERIODO	PROYECTO		
	CD DE FOSTER	REMOD. OFICINAS	HOTEL D.U.
1	- 100,000	- 200,000	- 150,000
2	- 300,000	- 400,000	- 200,000
3	- 600,000	- 200,000	- 300,000
4	- 100,000	500,000	- 200,000
5	500,000	1,000,000	500,000
6	1,000,000	100,000	800,000
7	4,000,000	- 1,000,000	5,000,000

Veinte por ciento de los futuros flujos de caja ($500,000; 400,000; etc) serán gravados.

Para la formulación del modelo, en este caso, necesitamos definir adicionalmente:

P_i = ganancia en el período i

C_i = pérdida en el período i

La formulación se ve afectada de dos maneras. Primero, debemos agregar algunas restricciones a que las P_is y C_is se calculen apropiadamente y segundo, se deben adicionar algunos términos en las restricciones de flujo de caja para tomar en cuenta los gastos en el pago de impuestos.

En palabras, una de las ecuaciones del cálculo de impuestos es:

ganancia - pérdida = ingresos - gastos - 0.8(pérdida en el último periodo)

Algebraicamente esta ecuación para el período 2 es:

P2 - C2 = 100 + .03L1 - 300F - 400M - 200D - .035B1 - .8C1

o en forma estandar:

P2 - C2 - .03L1 + 300F + 400M 200D + .035B1 + .8C1 = 100

La formulación entera es:

MAX Z

SUJETO A:

2) 3000F + 2000M + 2000D - B1 + L1 + 0.5P1 = 2000
3) 1000F + 500M + 2000D + 1.035B1 - 1.03L1 - B2 + L2 +0.5P2 = 500
4) 1800F - 1500M + 1800D + 1.035B2 - 1.03L2 - B3 + L3 + 0.5P3 = 400
5) - 400F - 1500M - 1000D + 1.035B3 - 1.03L3 - B4 + L4 + 0.5P4 = 380
6) - 1800F - 1500M -1000D + 1.035B4 - 1.03L4 - B5 + L5 + 0.5P5 = 360
7) - 1800F - 200M - 1000D + 1.035B5 - 1.03L5 - B6 + L6 + 0.5P6 = 340
8) Z - 5500F + 1000M - 6000D + 1.035B6 - 1.03L6 + 0.5P7 = 300
9) B1 ≤ 2000
10) B2 ≤ 2000

11) $B3 \leq 2000$
12) $B4 \leq 2000$
13) $B5 \leq 2000$
14) $B6 \leq 2000$
15) $F \leq 1$
16) $M \leq 1$
17) $D \leq 1$
18) $100F + 200M + 150D + P1 - C1 = 0$
19) $300F + 400M + 200D + 0.035B1 - 0.03L1 + P2 + 0.8C1 - C2 = 100$
20) $600F + 200M + 300D + 0.035B2 - 0.03L2 + P3 + 0.8C2 - C3 = 80$
21) $100F - 500M + 200D + 0.035B3 - 0.03L3 + P4 + 0.8C3 = 76$
22) $-500F - 1000M - 500D + 0.035B4 - 0.03L4 + P5 + 0.8C4 - C5 = 72$
23) $-1000F - 100M - 800D + 0.035B5 - 0.03L5 + P6 + 0.8C5 - C6 = 68$
24) $-4000F + 1000M - 5000D + 0.035B6 - 0.03L6 + P7 + 0.8C6 - C7 = 60$

La solución es :

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO

1) 5899.976

VARIABLE	VALOR	COSTO REDUCIDO
Z	5899.975590	0.000000
F	0.487211	0.000000
M	1.000000	- 0.000019
D	0.000000	945.007523
B1	1461.632140	0.000000
L1	0.000000	0.005112
B2	2000.000020	- 0.000000
L2	0.000000	0.196093
B3	1046.979320	- 0.000000
L3	0.000000	0.003168
B4	0.000000	0.002576
L4	991.260727	0.000000
B5	0.000000	0.002537
L5	3221.649020	0.000000
B6	0.000000	0.002250
L6	4359.347720	- 0.000000
P1	0.000000	0.449947
P2	0.000000	0.379308
P3	0.000000	0.204255
P4	0.000000	0.110749
P5	1072.657820	- 0.000000
P6	751.860207	- 0.000000
P7	1139.623200	0.000000

C1	248.721067	- 0.000000
C2	696.297211	0.000000
C3	1039.364200	0.000000
C4	340.856709	0.000000
C5	0.000000	0.109113
C6	0.000000	0.107500
C7	0.000000	0.500000

RENGLON	HOLGURA	PRECIOS DUALES
2)	0.000000	1.321874
3)	0.000000	1.286092
4)	0.000000	1.067854
5)	0.000000	1.045676
6)	0.000000	1.030225
7)	0.000000	1.015000
8)	0.000000	1.000000
9)	538.367844	0.000000
10)	0.000000	0.192402
11)	953.020706	0.000000
12)	2000.000000	0.000000
13)	2000.000000	0.000000
14)	2000.000000	0.000000
15)	0.512789	0.000000
16)	0.000000	573.561150
17)	1.000000	0.000000
18)	0.000000	- 0.210990
19)	0.000000	- 0.263738
20)	0.000000	- 0.329672
21)	0.000000	- 0.412090
22)	0.000000	- 0.515113
23)	0.000000	- 0.507500
24)	0.000000	- 0.500000

Nótese que las consideraciones sobre los impuestos causan un cambio sustancial en la solución. Con base en la solución anterior se establece dedicar más fondos al proyecto de adecuación de oficinas,M, e invertir menos fondos en el de la Cd. de Foster , F. El proyecto M tiene un flujo de caja que ayuda a que los flujos de las ganancias anuales sean más uniformes.

Resumen sobre la discusión de los modelos multiperiódicos

En los modelos de planeación del tiempo extra se particiona el tiempo en un cierto número de periodos. La porción del modelo que corresponde a un solo periodo puede ser alguna combinación de modelos de producción, mezclas, etc...Esos periodos simples o modelos estáticos se encadenan por:

1. un encadenamiento o variable de inventario para cada artículo y periodo. La variable que encadena representa la cantidad de artículos que se transfieren de un pperiodo al siguiente.

2. una restricción de " balance de material" o "fuentes = usos" por cada artículo y periodo. La forma más simple de esta restricción es "inventario inicial + producción = inventario final + más bienes vendidos"

Los modelos multiperiódicos generalmente se emplean en un formato hasta cierto punto corredizo. En este formato, el modelo se resuelve al comienzo de cada periodo. Las recomendaciones de la solución para el primer periodo se implantan. Como cada etapa que transcurre proporciona una mejor información sobre datos y pronósticos, esto mismo se emplea en el siguiente. De tal forma que el periodo 2 resulta ahora el 1, y así subsecuentemente.

No existe nada que nos oblique a que los periodos sean de la misma longitud. Por ejemplo, cuando una compañía petrolera planea su producción anual es sensible tener periodos correspondientes a las estaciones del año. Una posible partición es considerar el periodo de invierno del 1 de Diciembre al 15 de Marzo; la Primavera del 16 de Marzo al 15 de Mayo; el Verano del 16 de Mayo al 15 de Septiembre; Otoño el 16 de Septiembre al 20 de Noviembre.

Algunas compañías planean como mucho a un horizonte de 50 años. En todo caso se puede tener los primeros dos periodos de un año, el siguiente de dos años, los sigientes tres de tres años cada uno, los dos que siguen de cinco años y finalmente los últimos tres de diez años cada uno.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- La compañía Izza de Tokio ha pronosticado sus necesidades de acero para los siguientes cuatro periodos: 3,000, 6,000, 5,000 y 2,000 toneladas. La fuerza de trabajo actual logra 4,000 toneladas por periodo. En este momento existen 500 toneladas de acero en almacén. Al final del horizonte de planeación Izza requiere que vuelva a tener el mismo stocK o sea las mismas 500 toneladas de un principio. La fuerza de trabajo tiene un costo variable de $100 por ton. El tiempo extra puede ser contratado en cualquier periodo a un costo de $140 por ton. El tamaño de la fuerza de trabajo de tiempo regular puede incrementarse de un periodo a otro a un costo de $300 por ton, al igual que disminuirse a un costo a un costo de $80 por ton. Se tiene un cargo de $5/ton por inventario al final de cada periodo. La compañía preferiría llegar al final de los cuatro periodos con una fuerza de trabajo a un nivel de 3000 ton.

a.- Formule un modelo de programación lineal apropiado

b.- Que supuestos consideraría en el modelo respecto a la fuerza de trabajo ociosa?

2.- Una línea aérea requiere los siguientes pilotos para los próximos cinco trimestres: 80, 90, 110, 120, 110. Actualmente se cuenta con 90 pilotos. La pregunta de mayor importancia se refiere a determinar el número de pilotos a contratar en cada uno de los siguientes cinco trimestres. Un piloto debe dedicar el trimestre en que es contratado para su entrenamiento. Las instalaciones de la compañía sólo permiten entrenar a 15 a la vez. Además, dicho entrenamiento requiere los servicios de pilotos experimentados en una proporción de 5 a 1, esto es, 5 pilotos en entrenamiento por un experimentado. Estos últimos no pueden emplearse en vuelos regulares. El costo de contratar y entrenar a un piloto se estima en $20,000; en cambio un experimentado cuesta $25,000 por trimestre. La política de la compañía no incluye el despido de su personal.

a.- Cuáles son las variables de decisión?
b.- Formule un modelo para determinar cuántos pilotos deben ser contratados en cada periodo?.

II.6. MODELOS DE INSUMO-PRODUCTO

En problemas Multiperiódicos, el aspecto importante es el encadenamiento de los periodos. Así, en problemas integrados verticalmente la situación es relacionar los diferentes niveles, considerando que el producto de un proceso puede ser el insumo de otro.

Por ejemplo, en una firma automotriz las instalaciones de primer nivel pueden tener como productos finales a los motores, transmisiones y carrocerías; mientras que las instalaciones de segundo nivel, pueden producir vehículos ensamblados con las partes producidas en el primer nivel o con componentes que se comprarán a otra planta. De esta forma, la formulación de un problema de integración vertical frecuentemente trata con decisiones de fabricar o comprar.
Las variables en el ejemplo anterior pueden ser los productos intermedios fabricados tal como motores, transmisiones y carrocerías. Para cada uno de esos productos se tiene que las fuentes=usos, o restricción de conservación de flujo. Por ejemplo.

> motores V8 comprados + motores V8 hechos en la planta A + motores V8 hechos en la planta B = vehículos con V8 ensamblados en la planta Y + vehículos ensamblados en la planta Z + motores V8 vendidos.

Los modelos de integración vertical están estrechamente relacionados con los modelos de Insumo-Producto desarrollados por Leontief (1951), para modelar una economía. Un modelo de este tipo especifica para cada industria, qué cantidad de producto de otras industrias se requiere como una función del nivel de actividad de una industria específica. Por ejemplo, la industria del ferrocarril requiere de algunos productos de la industria petrolera y de la del acero. Además de que las relaciones de Insumo-Producto generalmente tienen "Loops". Esto es, la industria del acero aunque le proporciona productos a la del ferrocarril , ella misma requiere de los servicios del ferrocarril para transportar fierro y acero. El problema en este caso es determinar o predecir el mejor nivel de operación de cada industria.

Problema Simple de Insumo-Producto

Cierta compañía opera una granja de 1000 acres en el valle de Arizona. Sus principales actividades incluyen los cultivos de trigo, alfalfa y la producción de carne de res. Las autoridades hidráulicas le han asignado una dotación de agua de 2200 acres-pie para el siguiente año. Se espera que los precios de la carne se mantengan alrededor de $600 por tonelada y los del trigo a $2.60 por bushel. La mejor suposición es que se puede vender la alfalfa a $54 por tonelada , pero si en vez de vender se requiere comprar alfalfa para alimentar a las reses se compraría a $56 por tonelada.
Los rendimientos con base en la tecnología aplicada son: producción de trigo 50 bushels por acre; alfalfa 3 tons por acre. Enseguida aparece la tabla de requerimientos.

ACTIVIDAD	M.O. MAQ.	REQ.AGUA	REQ.TIERRA	REQ.ALFALFA
1 A.Trigo	$6	1.5A-pie	1 Acre	
1 A.Alfalfa	$8	2.5 "	1 Acre	
1 Ton Carne	$100	.2 "	.11 Acre	5 Tons.

En este caso se trata de formular el problema de la planeación de cuánta tierra sembrar de los diferentes cultivos y qué cantidad comprar de los mismos granos, y resolverlo. De tal forma que se puedan contestar preguntas como: Cuáles son los valores marginales de la tierra y el agua?. A qué precios se deberían adquirir (o vender) los artículos que no son comprados (o vendidos), en la solución óptima?
Para efectuar lo anterior, se debe tener precaución en lo siguiente:

1. Identifique las actividades cuyos niveles deberán ser determinados; esto es, identificar las variables de decisión.
2. Identificar los artículos que son producidos o consumidos por las diferentes actividades . Usualmente existirán restricciones de fuentes = usos o balance de material para cada artículo.

Si observamos, las variables de decisión serán entonces:

WHEAT = Numero de acres de trigo cultivadas y vendidas
ALFGRO= Número de toneladas cultivadas de alfalfa
BEEF = Número de toneladas de carne producidas y vendidas
ALFBUY= Número de toneladas de alfalfa compradas
ALFSOLD= Numero de toneladas de alfalfa vendidas

Los artículos pueden identificarse describiendo el efecto de cada actividad, de esta forma :

El cultivo de alfalfa requiere de capital, tierra y agua. Para producir carne se requiere de capital, tierra, agua y alfalfa. Por otro lado, vendiendo el trigo, la alfalfa o la carne de res, se produce capital. De esta manera, los artículos son la tierra, el agua y la alfalfa y el objetivo es maximizar el capital. Por otra parte se tienen restricciones que describen la utilización de la tierra, agua y alfalfa. De modo que la formulación completa es:

```
MAX  124WHEAT - 2.66667ALFGRO + 500BEEF - 56ALFBUY +
54ALFSOLD

Sujeto a:

2) WHEAT + 0.33333ALFGRO + 0.11BEEF < 1000
3) 1.5WHEAT + 0.83333ALFGRO + 0.2BEEF < 2200
4) -ALFGRO + 5BEEF - ALFBUY + ALFSOLD = 0
END
```

Se puede estar interesado en que las restricciones permitan considerar la compra de alfalfa y venderla a un precio más bajo. Una restricción para prevenir lo anterior no se incluyó porque la compra alta - venta baja es una combinación no rentable y por lo tanto no puede ocurrir en la solución óptima.

En este caso la solución es:

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO

1) 2 000 000.0

VARIABLE	VALOR	COSTO REDUCIDO
WHEAT	0.0000	1876.0000
ALFGRO	0.0000	613.3332
BEEF	9090.9092	0.0000
ALFBUY	45454.5460	0.0000
ALFSOLD	0.0000	2.0000

RENGLON	HOLGURA	PRECIO DUAL
2)	0.0000	2000.0000
3)	381.8181	0.0000
4)	0.0000	56.0000

La solución recomienda que toda la granja se convierta en un gran almacén de forraje. Si este modelo es apenas preliminar, entonces sería conveniente plantearse las restricciones que deberían adicionarse. Por ejemplo, ahora puede ser obvio que una restricción de mano de obra es necesaria ya que ésta resulta insuficiente en la comunidad como para soportar una operación intensiva.

Modelo de Insumo - Producto de Islandia

Islandia cuenta con cuatro principales industrias exportadoras, del acero, automotriz, electrónica y del plástico. El ministerio de economía de este país quiere maximizar sus exportaciones - importaciones. La unidad de intercambio es el klutz. Los precios en klutz en el mercado mundial por unidad de acero, automotriz, electrónica y de plástico son, respectivamente: 500, 1500, 300, 1200. Por otra parte, para producir una unidad de acero se requiere .02 unidades de producción automotriz, .01 unidades de plástico, 250 klutz de materia prima comprada en el mercado mundial, más la mitad de un año de obra de un hombre al año. La producción de una unidad automotriz requiere .8 unidades de acero, .15 unidades unidades electrónicas, .11 unidades de plástico, la mano de obra de un hombre al año y 300 klutz de material importado. La producción de una unidad de equipo electrónico requiere .01 unidades de acero, .01 unidades de lo automotriz, .05 unidades de plástico, medio año de trabajo de un hombre y 50 klutz de material importado. La producción automotriz está limitada a 650 000 unidades. La producción de una unidad de plástico requiere .03 unidades de producción automotriz, .2 unidades de acero, .05 unidades de electrónica, dos hombres-año de labor, más 300 klutz de materiales importados. El límite superior en la producción de la industria del plástico es de 60 000 unidades. La mano de obra total disponible en Islandia es de 850 000 hombres por año. No se pueden importar productos de acero, automotrices, electrónicos o plásticos.

La pregunta es, ¿cuánto deberá producirse y ser exportado de los diferentes productos?

La formulación de un modelo de Insumo-Producto deberá seguir los mismos dos pasos para la formulación de cualquier modelo de Programación Lineal, que son: 1) identificar las variables de decisión y 2) identificar las restriciones. La clave para identificar a las variables de decisión, para este problema, es efectuar la distinción entre la cantidad de un artículo producido y la cantidad exportada. Una vez que lo anterior se ha considerado, las variables de decisión pueden definirse como:

S = unidades producidas de la industria del acero
A = " " automotriz
P = " " del plástico
E = " " electrónica

SEX = unidades exportadas por la industria del acero
AEX = " " automotriz
PEX = " " del plástico
EEX = " " electrónica

Los artículos pueden identificarse directamente como acero, automotriz, electrónico, plástico, mano de obra, capacidad automotriz y capacidad del plástico; por lo que se se tienen, entonces, siete restricciones. La formulación y solución del problema anterior es:

MAX 500SEX + 1500AEX + 300EEX + 1200PEX − 250S − 300A − 50E −300P

Sujeto a:

2) SEX − S + .8A + .01E + .2P = 0
3) AEX + .02S − A + .01E + .03P = 0
4) EEX + .15A − E + .05P = 0
5) PEX + .01S + .11A + .05E − P = 0
6) .5S + A + .5E + 2P < 830 000
7) A < 650 000
8) P < 60 000
END

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO

1) 435 431 260

VARIABLE	VALOR	COSTO REDUCIDO
SEX	547.91429	0.0000
AEX	465 410.42000	0.0000
EEX	0.00000	121.87487
PEX	0.00000	2096.87520
S	393 958.33000	0.00000
A	475 833.34000	0.00000
E	74 375.00100	0.00000
P	60 000.00000	0.00000

RANGOS EN LOS QUE LA BASE NO CAMBIA
RANGOS DE LOS COEFICIENTES DE COSTOS

VARIABLE	COEFICIENTE ACTUAL	INCREMENTO PERMITIDO	DECREMENTO PERMITIDO
SEX	500.0000	57.5898	143.0506
AEX	1500.0000	1455.6141	184.1149
EEX	300.0000	121.8748	INFINITO
PEX	1200.0000	2096.8752	INFINITO
S	−250.0000	76.2965	152.8085
A	−300.0000	1795.5000	192.6156
E	−50.0000	129.9998	1245.7010
P	−300.0000	INFINITO	2082.6565

RANGOS DE LOS LADOS DERECHOS (RHS)

RENGLON	RHS ACTUAL	INCREMENTO PERMITIDO	DECREMENTO PERMITIDO
2	0.00	INFINITO	547.9142
3	0.00	INFINITO	465410.4200
4	0.00	2492.8794	1097774.0000
5	0.00	17.8213	42899.0000
6	830000.00	1811082.3000	209.5358
7	650000.00	INFINITO	174166.6600
8	60000.00	15.1509	41144.0940

La solución indica que la mejor manera de vender los productos de Islandia como son los de las industrias automotriz; electrónica, acero, plástica y los recursos de mano de obra es en la forma de automóviles.

El análisis de los coeficientes de costos proporciona una idea de cuánto debe aumentarse la ganancia del acero electrónica o plásticos; o en cuánto debe bajarse la ganancia de la industria automotriz para que la solución cambie. Por ejemplo, si el costo en la producción electrónica pudiera reducirse en 121.88 por unidad, entonces puede valer la pena exportar partes electrónicas e incrementar las ganancias totales.

Este problema podría tomar la forma clásica del modelo de Insumo-Producto de Leontief si en vez de maximizar ganancias el objeto fuera establecer los niveles para las exportaciones (o consumos) de los productos de acero, automotrices y plásticos. El problema sería entonces determinar los niveles necesarios de producción para apoyar los niveles adecuados de exportación/consumo. En este caso la función objetivo es irrelevante.

Una generalización natural es permitir tecnologías alternas para producir varios artículos. Dichas tecnologías pueden corresponder al grado de mecanización o a la forma en que se consume la energía, esto es, con gas, carbón, hidroeléctrica, etc.

Modelos más complejos de sistemas verticalmente integrados y diagramas actividad/recurso.

El ejemplo siguiente involucra varios niveles y un cierto número de artículos. Al final de la descripción nos introduciremos al método de los diagramas actidad/recurso para que gráficamente presentemos las complejidades de los programas lineales que surgen en este ejemplo.

El problema de una granja integrada verticalmente

Un granjero tiene 120 acres que pueden sembrarse de trigo o maiz. Dicho campo tiene un rendimiento de 55 bushels de trigo por acre y por año o 95 bushels de maiz por acre y por año. Se considera que se puede sembrar cualquier fracción de los 120 acres de trigo o de maiz. Los requerimienntos en cuanto a la mano de obra son de 4 horas por acre y por año, más 0.15 horas por bushel de trigo o 0.70 horas por bushel de maiz. el costo de semilla, fertilizante, etc., es de 20 centavos por bushel de trigo producido en cambio son 12 centavos para el maiz. Por otra parte, el trigo se puede vender a $1.75 por bushel y el maiz a $0.95 por bushel. Si el trigo se compra su precio es de $2.50 por bushel y si el maiz se adquiere su precio es de $150 por bushel.

Adicionalmente, el granjero puede criar cerdos y/o aves de corral y venderlos cuando alcanzan un año de edad. Por ejemplo un cerdo se vende en $40 y las aves de corral, cuya medida son jaulas, se venden a $40 por jaula. En su alimentación un cerdo requiere 25 bushels de trigo o 20 bushels de maiz, más 25 horas de mano de obra y 25 pies cuadrados de piso; en cambio una jaula de aves de corral necesita 25 bushels de maiz o 10 bushels de trigo, más 40 horas de labor, y 15 pies cuadrados de espacio.
El granjero cuenta con 10 000 pies cuadrados de piso, 2 000 horas de su propio tiempo y otras 2 000 horas de su familia
En caso de alquilar mano de obra, esto le cuesta $1.50 por hora.

Sin embargo, para cada hora de mano de obra alquilada se requieren 0.15 horas por parte del granjero para su supervisión.

En este problema interesa saber cuánta tierra debe sembrarse de maiz y cuánta de trigo y además, cuántos cerdos y qué cantidad de jaulas deben criarse de tal manera que se maximicen los beneficios del granjero.

Definición de variables

W1 = Trigo cosechado (en bushels)
C1 = Maiz cosechado (en bushels)
P1 = Cerdos criados y vendidos
H1 = Gallinas criadas y vendidas (en jaulas)
LO = Mano de obra alquilada (en horas)
W4 = Trigo vendido (en bushels)
C4 = Maiz vendido (en bushels)
C2 = Maiz usado para alimento de gallina (en bushels)
W2 = Trigo usado para alimento de gallinas (en bushels)
C3 = Maiz usado para alimento de cerdos (en bushels)
W3 = Trigo usado para alimento de cerdos (en bushels)
CO = Maiz comprado (en bushels)
WO = Trigo comprado (en bushels)

Diagrama de flujo Actividad/Recurso

Para problemas grandes puede ser útil visualizar gráficamente los flujos de material. Conviene hacer notar que cualquier problema de Programación Lineal puede ser convertido a un diagrama de flujo en el que el material fluye a través del sistema.

Existen dos tipos de componentes en este modelo de diagramas: 1) actividades, que corresponden a las variables y se denotan por □ y 2) recursos, que corresponden a las restricciones y se denotan por un ○. Cada restricción está asociada a algún producto o artículo y en palabras significa: los usos de los artículos deben ser menores o iguales a sus fuentes. Las flechas que inciden en un □ corresponden a los recursos, artículos o restricciones con los cuales la variable tiene interacción. La flecha que incide en un ○ debe corresponder a las actividades o variables de decisión con las que las restricciones tienen interacción. El diagrama actividad/recurso del problema anterior se presenta en la figura 11.1

Nota: Existe una actividad por cada variable de decisión en el programa lineal; se tiene un recurso por cada restricción. Las tasas que aparecen sobre cada flecha son los coeficientes en las ecuaciones del programa lineal.

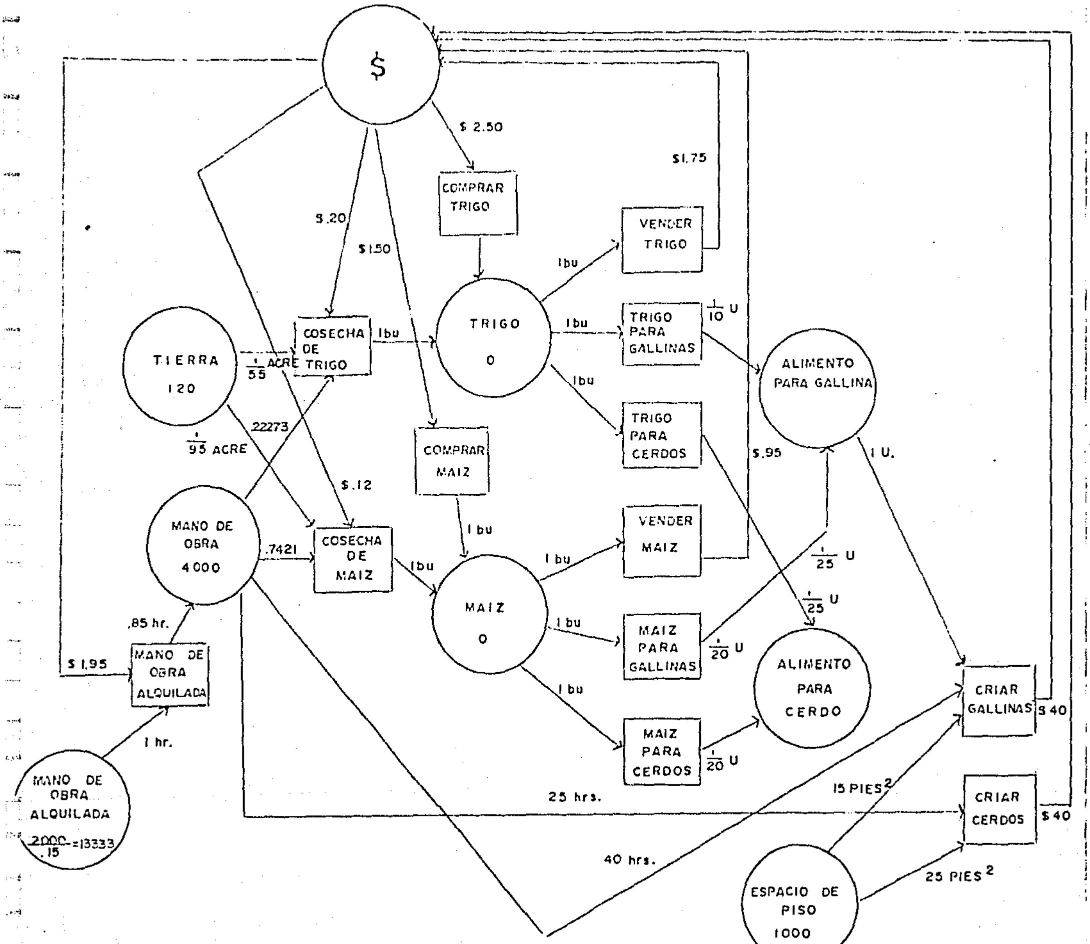


Fig. 11.1 Diagrama Actividad/Recurso

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Un fabricante de semiconductores ha tenido como producto principal un chip que contiene un circuito lógico que se usa en la mayor parte de los componentes electrónicos. Recientemente, dicho fabricante ha adquirido un aparato para fabricar un tipo de máquina calculadora. Cada calculador fabricado por este aparato utiliza 10 chips idénticos a aquellos que normalmente fabrica. Debido a cambios recientes en los precios no se sabe cuál de las dos plantas es más rentable. Los chips pueden comprarse en \$3 y venderse en \$2.50 (el transporte y el manejo hacen la diferencia). La planta que fabrica chips tiene una capacidad para 20 000 unidades por mes. En cambio la que fabrica calculadores tiene una capacidad de 3 000 por mes. El costo variable para producir un chip (incluyendo materia prima) es de \$2. El costo veriable para producir una calculadora es de \$20, que incluye exclusivamente el costo de 10 chips por calculadora, siendo que cada unidad ya terminada se vende en \$45.

a. Defina las variables de decisión y escriba un modelo de Programación Lineal para maximizar las ganancias mensuales.

2. La compañía RC fabrica detergente y lo vende en bolsas de tamaño pequeño y mediano. Además, es una de varias compañías que puede originar un nuevo producto no contaminante que lleve el nombre de NPW. RC puede vender NPW a otros fabricantes a \$.80 por galón. El producto NPW puede comprarse por fuera a \$ 1.20 por galón, ya incluye cargos por envio y manejo o frabricarse en la misma planta.Cada galón de detergente producido requiere 0.10 de galón de NPW. Los costos de producción para NPW y el detergente son, respectivamente, \$0.50 y %0.60 por galón. En la producción de detergente no se incluye el costo del .10 del galón de NPW usado en su fabricación. El detergente puede venderse a \$0.70 por galón. Las capacidades de producción de RC son: 10 000 galones por mes de NPW y 120 000 galones por mes de detergente

a. Cuáles son las capacidades o variables de decisión de la compañía RC?

b. Formule el problema de maximizar las ganancias como un modelo de Programación Lineal y resuélvalo.

11.7. REDES

REDES, DISTRIBUCION Y PERT/CPM.

Una subclase de modelos de Programación Lineal son los llamados modelos de Redes. Estos problemas tienen una forma que puede describirse facilmente y presentarse en forma gráfica como una Red. Algunos ejemplos físicos son, por ejemplo, rutas aéreas o lineas de transmisión eléctricas. Cualquier empresa que fabrica un producto en varios localidades y lo distribuye a muchos alamacenes y/o clientes puede encontrar que un modelo de redes sea útil para describir y analizar varias estrategias de embarque.

En la figura 12.1 se ilustra una Red que representa el sistema de distribución de una compañía que utiliza almacenes intermedios para distribuir un producto.

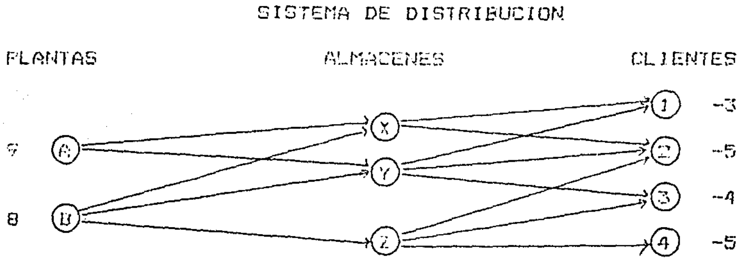


Fig. 12.1 Modelo de una Red

La compañía tiene dos plantas, denotadas por A y B; 3 almacenes, señalados por X, Y y Z; y 4 áreas de clientela, denotadas por 1, 2, 3, 4. Los números adyacentes a cada nodo indican la disponibilidad de material en cada nodo. La planta A, por ejemplo, tiene 9 unidades disponibles a ser embarcadas. La clientela 3, por otro lado, tiene -4 unidades, que significan las cuatro unidades que se demandan en el nodo 3.

El número que aparece encima de cada arco es el costo por unidad enviada a lo largo del arco. Por ejemplo, si de la planta A, que tiene 9 unidades, se envian 5 unidades al almacen Y, entonces se incurrirá en un costo de 5 * 2 = 10 El problema es, entonces, determinar la cantidad a enviar a lo largo de cada arco de tal forma que se minimicen los costos totales y que la demanda de cualquier área de clientela quede satisfecha.

La condición principal para que un programa lineal sea un problema de red es que éste se pueda representar como tal. Se pueden tener mas de 3 niveles de nodos, cualquier número de arcos entre cualesquiera dos nodos y se pueden tener limites sobre la cantidad a enviar sobre un arco dado.

La formulación en la manera general de programación lineal para este problema es:

```
MIN  AX + 2AY + 3BX + BY +2BZ + 5X1 + 7X2
    +9Y1 + 6Y2 + 7Y3 + 8Z2 +7Z3 + 4Z4
```

Sujeto a:

```
      2)    AX + AY = 9
      3)    BX + BY + BZ = 8
      4)   -AX - BX + X1 + X2 = 0
      5)   -AY - BY + Y1 + Y2 + Y3 = 0
      6)   -BZ + Z2 + Z3 + Z4 = 0
      7)   -X1 - Y1 = -3
      8)   -X2 - Y2 -Z2 = -5
      9)   -Y3 - Z3 = -4
     10)   -Z4 = -5
      END
```

Existe una restricción por cada nodo que es de la forma "lo que entra es igual a lo que sale". La restricción 5, por ejemplo, está asociada con el almacén Y y establece que la cantidad que le llega menos la cantidad que se envía es igual a cero.

En la siguiente figura se puede apreciar la estructura del problema de red, del presente ejemplo:

```
:PICTURE

         A A B B B X X Y Y Y Z Z Z
         X Y X Y Z 1 2 1 2 3 2 3 4

   1:    1 2 3 1 2 5 7 9 6 7 8 7 4     MIN
   2:    1 1                       = 9
   3:        1 1 1                 = 8
   4:   -1  -1     1 1             = 0
   5:     -1  -1         1 1 1     = 0
   6:           -1             1 1 1 = 0
   7:             -1  -1           =-3
   8:               -1  -1  -1     =-5
   9:                     -1  -1   =-4
                                -1 =-5
```

Cada columna tiene exactamente dos valores no ceros en la matriz de restricciones, uno de los cuales es un +1 mientras que el otro es -1. De acuerdo a la convención que hemos adoptado el +1 aparece en el renglón del nodo desde el cual el arco toma material, mientras que el -1 aparece en el renglón del nodo desde el cual se libera material. En un problema de este tamaño se debería estar capacitado para deducir la solución óptima manualmente, simplemente examinando la figura 12.1. Se puede checar lo anterior con la solución de la computadora que aparece enseguida:

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO

1) 121.0000

VARIABLE	VALOR	COSTO REDUCIDO
AX	8.0000	0.0000
AY	1.0000	0.0000
BX	0.0000	3.0000
BY	3.0000	0.0000
BZ	5.0000	0.0000
X1	3.0000	0.0000
X2	5.0000	0.0000
Y1	0.0000	5.0000
Y2	0.0000	0.0000
Y3	4.0000	0.0000
Z2	0.0000	3.0000
Z3	0.0000	1.0000
Z4	5.0000	0.0000

RENGLON	HOLGURA	PRECIO DUAL
2)	0.000	-7.0000
3)	0.000	-6.0000
4)	0.000	-6.0000
5)	0.000	-5.0000
6)	0.000	-4.0000
7)	0.000	-1.0000
8)	0.000	1.0000
9)	0.000	2.0000
10)	0.000	0.0000

Esta situación exhibe dos hechos que se establecen en la solución de cualquier problema de redes.

1.- Si los coeficientes del lado derecho (capacidades y requerimientos) son enteros, entonces las variables serán enteras.

2.- Si los coeficientes de la función objetivo son enteros, entonces los precios duales serán enteros.

Podemos sumarizar los programas lineales de redes como:

1.- Asociado con cada nodo se tiene un número que especifica la cantidad de producto disponible en este nodo (negativo implica que se requiere producto).

2.- Asociado con cada arco aparece:

a) un costo por unidad enviada (que puede ser negativo) sobre el arco.

b) una cota inferior en la cantidad enviada sobre el arco (comunmente es cero).

c) una cota superior en la cantidad enviada sobre el arco.

El problema es determinar los flujos que minimizan el costo total sujeto a la satisfacción de la oferta, demanda y las restricciones del flujo.

Variaciones del Problema de Redes.

En orden decreciente de generalidad, existen cinco variaciones en los problemas de redes.

1.- Redes con ganancias o redes generalizadas. Esto es una generalización del problema justamente descrito. La generalización es que puede haber una ganancia o pérdida especifica de material, cuando se envia de un nodo a otro. Estructuralmente, estos problemas son aquellos en que toda columna tiene a lo más dos valores no ceros en la matriz de restricciones; sin embargo, el requerimiento de que esos coeficientes sean +1 y -1 se relaja.

2.- Redes en problemas de envios. El problema de planta/almacén/cliente, de la sección previa, es un ejemplo de un problema de envios.

3.- Problemas de ruta más corta o más larga. Suponga que estamos analizando la red carretera del pais y se desea encontrar la ruta más corta entre dos ciudades. Esto es equivalente a un caso especial de redes de transporte en los cuales una unidad de material está disponible en la ciudad de origen y se requiere una unidad en la ciudad destino. El costo de envio sobre un arco es la longitud del mismo. Existen procedimientos más rápidos para resolver este problema. Un primer familiar de este problema, de la ruta más larga, surge en el análisis del PERT/CPM.

4.- Transportación o Problemas de Distribución. Es un problema de red a dos niveles, donde todos los nodos en un nivel son proveedores mientras que los nodos en el otro nivel son clientes, por lo que se llama problema de transportación o distribución.

5.- Problema de Asignacion. Un problema de transporte en el que el número de proveedores es igual al número de clientes, y además, cada proveedor tiene una unidad disponible y cada cliente requiere una unidad. A este problema se le conoce como asignación. También en este caso existe un procedimiento especial.

Problemas de Rutas como Redes.

En un problema de rutas se tiene una colección de pares de lugares (de: a:) que describen las entregas o repartos a efectuarse. El problema es determinar la forma en que deberán moverse los vehiculos de un punto a otro, de tal forma que se satisfagan los requerimientos de los repartos a costo minimo.
Examinaremos la manera en que una versión a "camión completo" en este problema, puede analizarse como un programa lineal de redes.

Como un ejemplo, considere un problema de 3 ciudades y sean éstas Chicago, Minneapolis y Omaha. Los repartos a efectuarse en una semana se describen en la siguiente tabla. Las ciudades se denotan por su primera letra inicial. Los entregos toman un dia.

PAR		NUMERO REQUERIDO DE VEHICULOS POR ESLABON DIA DE SALIDA.				
DE	A	LUNES	MARTES	MIERCOLES	JUEVES	VIERNES
C	M	1			2	
C	O		1			1
M	C	2	3			
M	O			1	1	
O	C	1				
O	M				1	2

Por ejemplo, se requieren 3 vehiculos cargados para salir de Minneapolis, el jueves, hacia Chicago.

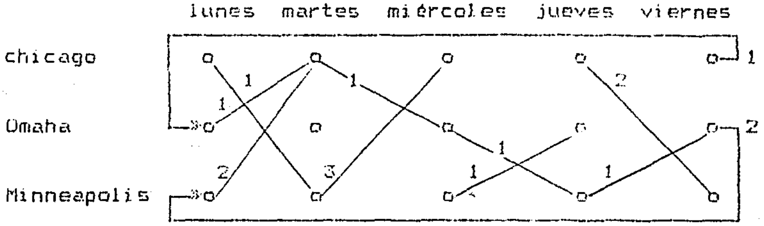
Si esos requerimientos se repiten cada semana, es razonable, considerar que los vehiculos regresen a su punto inicial al final de la misma. La solución de menor costo puede requerir que ocasionalmente un camión viaje vacío o que quede parado vacío un día, en una ciudad en particular.

El costo por día de camión, como una función de su actividad es:

ocioso	$ 400
viaje vacío	500
viaje cargado	600

Este problema puede dibujarse como una red bidimensional si las ciudades aparecen en un plano vertical y los días de la semana en uno horizontal, como en la figura 12.2

En ésta, el número adyacente a cada arco es el número de vehículos requerido. Sólo se han dibujado los arcos correspondientes a los envíos establecidos. Una vez que un vehículo llega a una ciudad, existen tres cosas que el mismo puede hacer al siguiente día: puede permanecer en la ciudad; puede salir vacío; o puede salir cargado.



12.2 Envíos requeridos en el problema de Rutas

En este problema, un vehículo puede salir para cualquiera de otras dos ciudades; así, cada nodo debe tener tres arcos que emanan de este en adición a cualquier arco correspondiente a la salida de vehículos cargados.

Algunos de esos arcos adicionales aparecen en la figura 12.3

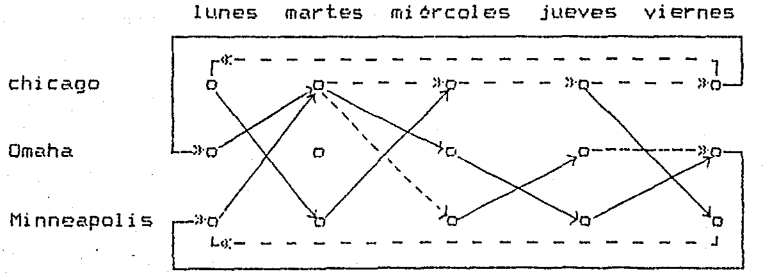


Figura 12.3 Programa Lineal de Rutas con arcos adicionales

En esta figura, las líneas llenas representan movimientos de vehiculos cargados, mientras que las lineas descontinuas representan vehiculos vacios (ya sea ociosos todo el dia o parados en otra ciudad). Todas las posibles lineas descontinuas, conectando dias adyacentes, deberian estar dibujadas en la red, aunque no aparecen para que la figura no se vea saturada. En efecto, los únicos arcos que se dibujaron son aquellos que se usan en la solución óptima.

En este ejemplo se debe notar que, aún cuando se tenga un arco con linea llena entre dos nodos, debería también estar un arco con línea punteada entre los mismos dos nodos para representar la opción de enviar vehiculos vacios entre las dos ciudades, en adición a los vehiculos cargados requeridos. La solución óptima puede requerir vehiculos que viajen vacíos acompañando a vehículos cargados, sobre un tramo en particular; si se necesita un número grande de vehiculos al día siguiente, en una ciudad de destino.

Es fácil ver como un problema de este tipo puede ser muy grande. El número de arcos o variables de decisión puede exceder al producto del número de periodos y el cuadrado del número de ciudades. Para este ejemplo este producto es 5 * 3 * 3 = 45. El número de restricciones puede exceder al producto del número de periodos y el número de ciudades. Un problema real con 40 ciudades y 20 periodos de tiempo puede tener 20 * 40 * 40 = 32,000 variables y 800 restricciones. De esta manera el procedimiento de propósito especial puede ser crucial.

Para nuestro ejemplo usaremos un nombre de cuatro caracteres para cada variable, donde:

- el primer caracter es L, I, o D, dependiendo si el vehículo es cargado , ocioso o viaja vacio.
- el segundo caracter denota la ciudad origen.
- el tercer caracter denota la ciudad destino.
- el cuarto caracter denota el día de la semana, siendo numeradas del 1 al 5, comenzando con lunes.

LOM3, por ejemplo, es el número de vehiculos cargados enviados desde Omaha a Minneapolis el día miércoles. Enseguida aparece la formulación del modelo de programación lineal en formato standard. La función objetivo mide los costos en cientos de dolares.

```
Min     6LCM1 + 4ICC1 + 5DCO1 + 5DCM1 +
      + 6LOC1 + 4IOO1 + 5DOC1 + 5DOM1 +
      + 6LMC1 + 4IMM1 + 5DMO1 + 5DMC1 +
      + 6LCO2 + 4ICC2 + 5DCO2 + 5DCM2 +
                4IOO2 + 5DOC2 + 5DOM2 +
      + 6LMC2 + 4IMM2 + 5DMO2 + 5DMC2 +
              + 4ICC3 + 5DCO3 + 5DCM3 +
      + 6LOM3 + 4IOO3 + 5DOC3 + 5DOM3 +
      + 6LMO3 + 4IMM3 + 5DMC3 + 5DMO3 +
      + 6LMC4 + 4ICC4 + 5DCO4 + 5DCM4 +
              + 4IOO4 + 5DOC4 + 5DOM4 +
      + 6LCO5 + 4ICC5 + 5DCO5 + 5DCM5 +
      + 6LOM5 + 4IOO5 + 5DOC5 + 5DOM5 +
              + 4IMM5 + 5DMC5 + 5DMO5
```

Sujeto a:

```
LCM1 + ICC1 + DCOO1 + DCM1 - ICC5 - DOC5 - DMC5 = 0
LOC1 + IOO1 + DOC1 + DOM1 - LCO5 - IOO5 - DCO5 - DMO5 = 0
LMC1 + IMM1 + DMC1 + DMO1 - LOM5 - IMM5 - DCM5 - DOM5 = 0
                        .
                        .
LOM3 + IOO3 + DOC3 + DOM3 - LCO3 - IOO2 - DMO2 - DCO2 = 0
                        .
                        .
IMM5 + DMC5 + DMO5 - LCM4 - 1MM4 - DCM4 - DOM4 = 0
LCM1 = 1
LOC1 = 1
LMC1 = 2
   .
   .
LCO5 = 1
LOM5 = 2
```

Cuando este problema se resuelve, encontramos que se requieren 6 vehiculos en total. Los vehiculos ociosos se distribuyen en la semana así:

DIA	DISPOSICION
Lunes:	Dos vehiculos permanecen en Minneapolis.
Martes:	Un vehiculo se queda en Chicago y otro viaja solo de Chicado a Minneapolis.
Miércoles:	Cuatro vehiculos permanecen en Chicago.
Jueves:	Dos vehiculos deben quedarse en Chicago. Un vehiculo permanece en Omaha.
Viernes:	Un vehiculo continúa en Chicago. Dos vehiculos siguen en Minneapolis.

Nótese que se requieren al menos 6 transportes, ya que solamente 3 vehiculos cargados llegan a Chicago el lunes por la noche (1 de Omaha y 2 de Minneapolis) y son descargados; y tres vehiculos deben salir cargados de Minneapolis el martes por la mañana.

El problema es como arreglar los embarques para evitar viajes en vacio. Históricamente, el gobierno ha impedido que algunos transportistas llenen tramos vacios llevando carga de otras compañias, que no son a las que regularmente sirven. Una estrategia un poco más complicada que puede utilizarse es determinar el número de vehiculos propios y programarlos, asi como alquilar a algunos transportistas públicos de tal forma que en global se minimicen los costos. Los vehiculos rentados cubren los tramos que pudieran causar viajes en vacio a los transportes privados.

Redes en PERT/CPM y la Programación Lineal.

El PERT (Project Evaluation and Reviw Technique) y CPM (Critical Path Method) son dos técnicas estrechamente relacionadas para la supervisión y control de un proyecto grande. Una parte clave de PERT/CPM es el cálculo del camino critico, que es la identificación de un subconjunto de actividades que deben ser ejecutadas exactamente como se planearon, para que el proyecto termine en el tiempo establecido para este fin.

Veremos que el cálculo del camino critico es un problema de redes muy simple. Posiblemente si este es corto, la solución puede obtenerse sin ninguna complicación. Sin embargo, la observación de un problema de este tipo resulta útil si se trata de examinar una multitud de opciones para acelerar un proyecto, atrasado en tiempo.

En la tabla inferior se listan las actividades principales incolucradas en el proyecto de construcción de una casa. Una actividad no puede comenzar hasta que todas las predecesoras se terminen.

ACTIVIDAD	NEMONICO	TIEMPO ACTIVIDAD	PREDECESORES
- Excavación	DIG	3	---
- Cimentación	FOUND	4	DIG
- Piso de fondo	POURB	2	FOUND
- Contratrabes	JOISTS	3	FOUND
- Desplantar muros	WALLS	5	FOUND
- Cimbrar	RAFTERS	3	WALLS,POURB
- Piso 1er nivel	FLOOR	4	JOISTS
- Aplanado interior	ROUGH	6	FLOOR
- Instalar techo	ROOF	7	RAFTERS
- Acabados interiores	FINISH	5	ROUGH, ROOF
- Embellecimiento exterior.	SCAPE	2	POURB,WALLS

En la figura 12.4 se expresa una red PERT para este proyecto.

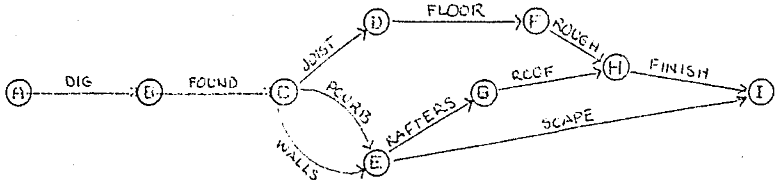


Figura 12.4   Un diagrama PERT.

Se quiere calcular el mínimo tiempo para terminar el proyecto. En relación a la figura anterior, el número de interés es simplemente el camino más largo de izquierda a derecha. El proyecto puede terminarse no antes de la suma de los tiempos de las actividades sucesivas sobre el camino. Verifique que la ruta crítica consiste de las actividades DIG, FOUND, WALLS, RAFTERS, ROOF, y FINISH, y tiene una longitud de 27.

La formulación en Programación Lineal puede plantearse de dos maneras diferentes.

La primera formulación se establece como sigue: Las variables DIG, FOUND, etc pueden tomar los valores 0/1, dependiendo de que dichas actividades estén o no sobre la ruta crítica. Las variables igual a uno definirán la ruta crítica. La función objetivo se relaciona con el hecho de que queremos encontrar la ruta de longitud máxima en el diagrama PERT.

El objetivo es, entonces:

MAX   3DIG + 4FOUND + 2POURB + 3JOISTS + 5WALLS + 3RAFTERS +
      4FLOOR + 6ROUGH + 7ROOF + 5FINISH + 2SCAPE.

Si especificamos las restricciones adecuadas debemos considerar lo siguiente:

1.- DIG debe estar sobre la ruta crítica.

2.- Una actividad puede estar sobre la ruta crítica unicamente si uno de sus predecesores esta sobre la misma. Además, si una actividad está sobre esta, exactamente uno de sus predecesores debe estar sobre la ruta crítica, si tiene sucesores.

3.- Ya sea SCAPE o FINISH deben estar sobre la ruta.

Analizando las siguientes restricciones se comprueba que toman en cuenta las consideraciones anteriores.

- DIG = -1
- FOUND + DIG = 0
- JOISTS - POURB - WALLS + FOUND = 0
- FLOOR + JOISTS = 0
- RAFTERS - SCAPE + POURB + WALLS = 0
- ROUGH + FLOOR = 0
- ROOF + RAFTERS = 0
- FINISH + ROUG + ROOF = 0
+ FINISH + SCAPE = +1

Si se interpreta la longitud de cada arco, en la red, como la belleza escénica del mismo, entonces la formulación corresponde a encontrar la ruta más escénica por la cual enviar una unidad de A a I.

La solución de este problema es:

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO

1) 27.0000

VARIABLE	VALOR	COSTO REDUCIDO
DIG	1.0000	0.0000
FOUND	1.0000	0.0000
POURB	0.0000	3.0000
JOISTS	0.0000	0.0000
WALLS	1.0000	0.0000
RAFTERS	1.0000	0.0000
FLOOR	0.0000	0.0000
ROUGH	0.0000	2.0000
ROOF	1.0000	0.0000
FINISH	1.0000	0.0000
SCAPE	0.0000	13.0000

RENGLON	HOLGURA	PRECIOS DUALES
2)	0.0000	0.0000
3)	0.0000	3.0000
4)	0.0000	7.0000
5)	0.0000	10.0000
6)	0.0000	12.0000
7)	0.0000	14.0000
8)	0.0000	15.0000
9)	0.0000	22.0000
10)	0.0000	27.0000

Note que las variables que corresponden a las actividades sobre la ruta critica tienen valor 1. Cuál es la solución si la primera restricción, - DIG = -1, se omite?

Es instructivo observar la imagen estructural de este problema en la siguiente figura.

	DIG	FOUND	POURB	JO1STS	WALLS	RAFTERS	FLOOR	ROUGH	ROOF	F1N1SH	SCAPE		
1:	3	4	2	3	5	3	4	6	7	5	2	MAX	
2:	-1											=	-1
3:	1	-1										=	0
4:		1	-1	-1	-1							=	0
5:				1			-1					=	0
6:			1		1	-1					-1	=	0
7:							1	-1				=	0
8:						1			-1			=	0
9:								1	1	-1		=	0
10:										1	1	=	0

Note que cada variable tiene a lo más dos coeficientes en las restricciones. Cuando son dos, estos son +1 y -1.

Esta es la característica que distingue a una red para trabajarse en Programación Lineal.

Ahora observemos la segunda formulación posible. La motivación para ésta es minimizar el tiempo transcurrido del proyecto. Para hacer ésto asumimos que cada nodo en la red PERT representa un evento, esto es; A: comienza la excavación; E: termina la cimentación; I: se completa el embellecimiento exterior y se terminan los acabados interiores.

Definamos las variables A, B, C,... H, I como el tiempo en que esos eventos ocurren.

Nuestra función objetivo es entonces:

MIN I - A

Estos tiempos están restringidos, por el hecho de que cada evento ocurre después de cada uno de sus eventos predecesores, al menos por la cantidad de cualquiera actividad que intervenga. De esta forma, se tiene una restricción para cada actividad:

$B - A \geq 3$ DIG
$C - B \geq 4$ FOUND
$E - C \geq 2$ POURB

D − C ≥ 3   JOIST
E − C ≥ 5   WALLS
F − D ≥ 4   FLOOR
G − E ≥ 3   RAFFTERS
H − F ≥ 6   ROUGH
H − G ≥ 7   ROOF
I − H ≥ 5   FINISH
I − E ≥ 2   SCAPE

La solución a este problema es.

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO

1)   27.0000

VARIABLE	VALOR	COSTO REDUCIDO
A	0.0000	0.0000
B	3.0000	0.0000
C	7.0000	0.0000
D	10.0000	0.0000
E	12.0000	0.0000
F	14.0000	0.0000
G	15.0000	0.0000
H	22.0000	0.0000
I	27.0000	0.0000

RENGLON	HOLGURA	PRECIO DUAL
2)	0.0000	-1.0000
3)	0.0000	-1.0000
4)	3.0000	0.0000
5)	0.0000	0.0000
6)	0.0000	-1.0000
7)	0.0000	-1.0000
8)	0.0000	0.0000
9)	2.0000	0.0000
10)	0.0000	-1.0000
11)	0.0000	-1.0000
12)	13.0000	0.0000

Note que el valor de la función objetivo es igual a la longitud de la ruta critica. Podemos identificar indirectamente a las actividades que están sobre la ruta critica atendiendo a las restricciones con precios duales diferentes de cero. Las actividades correspondientes a esas restricciones están sobre la ruta critica. Siendo el lado derecho de una restricción el tiempo de la actividad, si incrementamos éste tiempo en una actividad sobre la ruta critica, se incrementaría la longitud del proyecto y así se tendria un precio dual diferente de cero. Cuál sería la solución si la primera variable, A, es omitida?

La representación de la matriz de coeficientes de este problema aparece enseguida:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
1	-1								1	MIN
2	-1	1								> 3
3		-1	1							> 4
4			-1		1					> 2
5			-1	1						> 3
6			-1		1					> 5
7					-1		1			> 3
8				-1		1				> 4
9						-1		1		> 6
10							-1	1		> 7
11								-1	1	> 5
12					-1				1	> 2

Note que la representación anterior de esta formulación es, esencialmente, la misma que la de la formulación anterior rotada 90º Aunque estas formulaciones aparentemente no tienen ninguna relación entre si, realmente si la tienen, y es lo que en Programación Lineal se llama Dualidad.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- En una compañia petrolera se están planeando los envios, para el siguiente mes, a través de la red de tuberias. La terminal de Los Angeles requerirá 200,000 barriles de petróleo. Este petróleo puede ser proporcionado ya sea de Houston o Casper, Houston puede enviar petróleo a Los Angeles a un costo de transportación de $.25/barril, en cambio Casper lo manda a $.28/barril. La terminal de Sn. Luis requerirá de 120,000 barrilles, los cuales pueden ser proporcionados desde Houston a un costo de $.18/barril, o desde Casper a un costo de $.22/barril. La terminal en Freshair requiere 230,000 barriles. El petróleo puede enviarse a Freshair desde Casper a un costo de $.21/barril, desde Houston a un costo de $.19/barril, o desde Titurville a un costo de $.17/barril. Casper tiene disponible un total de 250,000 barriles para ser enviados. Houston tiene 350,000 barriles disponibles para ser enviados. Por otra parte, debido a la capacidad del oleoducto, no se pueden enviar más de 180,000 barriles desde Casper a Los Angeles y no más de 150,000 barriles de Houston a Los Angeles. La terminal de Newark requerirá 190,000 barriles. Tal demanda unicamente puede cubrirse desde Titusville a un costo de trasportacion de $.14/barril. La terminal Atlanta requiere 150,000 barriles y puede ser abastecida desde Titusville a un costo de $.16/barril, o desde Houston a un costo de $.20/barril. Titusville tiene 300,000 barriles disponibles para ser enviados.

Formular el problema de encontrar el plan de distribución a un costo de transportación mínimo como un programa lineal.

2.- Louis S., propietario del restaurante Le Boulangerie, sabe que necesitará 40, 70 y 60 manteles los días jueves, viernes y sabado, respectivamente, para su programa de banquetes. Louis puede rentar los manteles por 3 días por $ 2. cada uno. Un mantel debe lavarse antes de utilizarlo otra vez. Los manteles pueden lavarse por la noche a un costo de $ 1.50 por cada uno. Por otra parte, se pueden lavar en un servicio regular (esto es, uno usado en jueves puede volverse a ocupar el sábado) a un costo de $ .80 cada uno. Actualmente se tienen 20 manteles limpios a la mano. Los rentados, no necesitan lavarse antes de regresarlos.

a). Cuáles son las variables de decisión?

b). Formule un modelo de Programación lineal para minimizar los costos totales de la renta y lavado de manteles. Para cada día probablemente usted tendrá una restricción requiriendo que el número de manteles limpios disponibles sea al menos igual a la demanda de un día especifico. Para cada día de los primeros dos días, se requerirá restringir el número de manteles enviados a la lavandería. Este problema es una red?

3). Una compañía proveedora utiliza una flota grande de vehiculos los cuales obtiene mediante arrendamiento. El programa de los vehiculos necesarios pronosticado para los próximos 8 meses es:

MES	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO
No. de vehiculos	430	410	440	390	425	450	465	470

Los vehiculos pueden arrendarse de varias compañías a diferentes costos y a distintas longitudes de tiempo. Los mejores planes disponibles son: 3 meses de arrendamiento $ 1700; 4 meses $ 2200, 5 meses $ 2600. Un arrendamiento puede comenzar en cualquier mes. En el 1o. de Enero se tienen arrendados 200 vehículos, cuyos contratos terminan al final de febrero.

a). Formule el problema minimizando los costos para el periodo de 8 meses.

b). Exprese que este problema es uno de redes.

4). Un problema común en la aviación privada es la determinación de cuánto combustible cargar en cada parada. El consumo de combustible se minimiza si, justamente, se toma lo necesario en cada parada antes de volar al siguiente destino. Esta politica, sin embargo, hace a un lado el hecho de que los precios del combustible pueden diferir de un aeropuerto al siguiente. Comprando todo el combustible en la estación más barata puede resultar contraproducente. Ya que se puede requerir llevar grandes cargas del mismo.

Las paradas que un avion debe efectuar son numeradas en orden 1, 2, 3... N. Los parámetros del problema son:

c_t = costo/litro de combustible en el aeropuerto t.
d_t = litros de combustible consumido de t a t+1 si se tiene el suficiente combustible a bordo para llevar el avión de t a t+1.

b_t = litros de combustible adicional quemados por exceso de combustible cargado en t para ir a t+1.

El problema es determinar P_t, t = 1, 2,...N que es la cantidad de combustible a comprar en el aeropuerto t.

Formular un programa linear para resolver el problema.Este es un problema de redes?

5). En la figura 12.5 aparece un diagrama de actividades sobre los arcos, el cual expresa las relaciones de precedencia entre las cinco actividades involucradas en la reparación de un buque. Los tres números sobre cada arco representan (de izquierda a derecha respectivamente) el tiempo normal en días para efectuar la actividad, el tiempo máximo en que se puede reducir la actividad, y el costo adicional en miles por cada día que la actividad se recorta. Escriba la formulación para determinar cuánto se debe reducir de cada actividad?

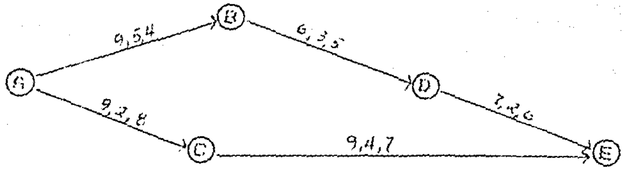


Fig. 12.5 Diagrama PERT.

II.8. PLANEACION ESTOCASTICA

Una de las razones por lo que la Planeación Multiperiódica resulta difícil, es la incertidumbre respecto al futuro. Comunmente alguna acción o decisión que debe tomarse hoy, de algún modo es un compromiso entre las acciones que deberían ser, en retrospectiva, mejores para cada uno de los posibles futuros que pueden ser desarrollados. Por ejemplo, si el año siguiente se prevee un incremento sustancial en la demanda de un producto y el costo de la materia prima se está incrementando marcadamente, entonces el comprar un lote de materia prima hoy posiblemente proporcione un ahorro para el año siguiente. Por otro lado, si el mercado desaparece tanto para el producto como para la materia prima, los accionistas de la compañía no tendrían la bondad de decir que esto fué mala suerte.

Comenzaremos por considerar problemas de planeación de dos periodos. Esas situaciones consisten de la siguiente secuencia de eventos:

1.- Hacemos una decisión en el primer periodo
2.- La naturaleza efectúa una decisión aleatoria
3.- Hacemos una decisión en el segundo periodo lo cual intenta reparar el estrago causado por la naturaleza en (2)

Supondremos que solamente existe un número finito de decisiones que la naturaleza puede hacer. Por ejemplo, en la práctica, la mayoría de la gente queda satisfecha clasificando la demanda de un producto como baja, media y alta; o clasificando un invierno como severo, normal o suave en vez de establecer el promedio diario de la temperatura y la cantidad total de nieve medida hasta con seis puntos decimales. El tipo de modelo que describiremos para representar la incertidumbre, en el contexto de la Programación Lineal, es el llamado "programa estocástico".

En este primer ejemplo se analiza una situación en la cual sólo los pasos (1) y (2) son importantes.

Un granjero puede sembrar su tierra, ya sea de maiz o de sorgo, y clasificar la estación de cultivo que sea húmeda o seca. Si ésta es húmeda, el maiz es más rentable, de la otra manera el sorgo es más rentable. Las consideraciones del problema se muestran en la tabla siguiente.

Ganancia/acre como una función de las decisiones.

NUESTRA DECISION

		TODO MAIZ	TODO SORGO
DECISION DE	HUMEDO	$ 100	$ 70
LA NATURALEZA	SECO	$ -10	$ 40

En el paso (1) el granjero decide cuanto sembrar de cada cultivo. En el paso (2) la naturaleza decide si la estación es húmeda o seca. El paso (3) es trivial; el granjero simplemente disfruta sus ganancias o sufre sus pérdidas.

Una situación en la que existen exactamente dos posibles decisiones que puede efectuar la naturaleza puede ser analizada por medio de una gráfica como la que aparece en la figura 13.1

Las dos líneas especifican la ganancia esperada para una sola política (ya sea todo maíz o todo sorgo) como una función de la probabilidad de que la estación sea húmeda. Si la probabilidad de que se tenga una estación húmeda es "p", entonces la ganancia esperada si se siembra maíz es: p100 + (1-p)(-10); mientras que si se siembra sorgo: p70 + (1-p)40. El valor de "p"para el cual existe indiferencia entre sembrar maíz o sorgo es 5/8. De esta forma, si la probabilidad de una estación humeda es menor que 5/8, entonces se sembrará todo de sorgo, de otra manera se sembrará todo de maíz.

Esto supone que el granjero tiene propención al riesgo y está interezado únicamente en maximizar las ganancias esperadas. Es importante notar que si el granjero tiene esa idea, entonces la estrategia optima es sembrar todo de maíz o todo de sorgo.

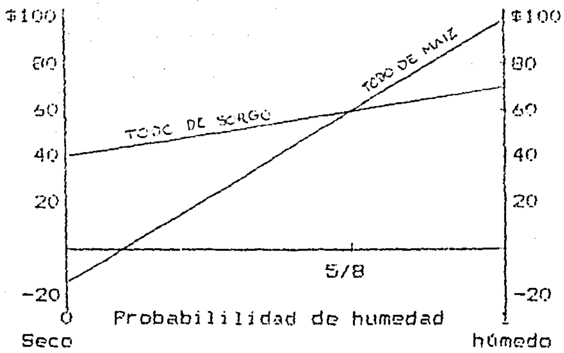


Fig. 13.1 Ganancia como una función de la lluvia

Un enfoque que uno esté tentado a utilizar es optimizar la primera etapa de decisión para cada una de las posibles decisiones de la naturaleza y, entonces, implantar una decisión en la primera etapa, la cual es un promedio ponderado de las decisiones condicionalmente óptimas. Para este ejemplo, la decisión optima, si conocemos que la decisión de la naturaleza es "húmedo", es plantar todo de maiz mientras que sería óptimo sembrar todo el sorgo si conocemos de antemano que la estación será seca. Suponga que la probabilidad de que la estación sea húmeda es 3/8. Entonces la decisión ponderada es plantar 3/8 de la superifice de maíz y 5/8 de sorgo. La ganancia esperada por acre es:

(3/8)[(3/8)100+(5/8)70]+(5/8)[(3/8)(-10)+(5/8)40] = $ 43.75

De la gráfica podemos ver que si la probabilidad de una estación húmeda es menor que 5/8, entonces toda la superficie debería ser sembrada de sorgo. De esta forma, para una probabilidad de una estación húmeda igual a 3/8 la ganancia esperada de cosechar todo el sorgo es:

(3/8)70 + (5/8)40 = $ 51.25 por acre.

La ganancia esperada conduciéndose óptimamente es a lo más 20% mayor que si el comportamiento es solo razonable. La conclusión cualitativa que se obtiene de este pequeño ejemplo es:

La mejor decisión para hoy, cuando se enfrenta con un número de resultados diferentes para el futuro, en general no es igual al "promedio" de las decisiones las cuales deberían ser mejores para cada resultado especifico en el futuro.

Para un problema simple, puede no ser necesario utilizar la Programación Lineal; sin embargo, formularemos el problema anterior en preparación a problemas más complejos. En este caso se tienen dos variables de decisión en la primera etapa:

C = superficie sembrada de maíz
S = superficie sembrada de sorgo

Suponiendo que la probabilidad de la estación húmeda es 3/8, el objetivo es:

Max (3/8)[100C + 70S] + (5/8)[(-10)C + 40S]
Sujeto a:

$$C + S \leq 1$$

La solución es claramente S = 1; es decir, sembrar todo de sorgo. Los coeficientes del maíz y del sorgo en la función objetivo son simplemente las ganancias esperadas de cosechar un acre del respectivo cultivo. Esto ilustra un segundo punto importante respecto a la planeación bajo incertidumbre: Teorema del equivalente bajo certeza: Si la aleatoriedad o impredecibilidad en los datos del problema existe solamente en los coeficientes de la función objetivo, entonces es correcto resolver el programa lineal en forma regular después de usar simplemente los valores esperados para los coeficientes aleatorios en el objetivo.

Si la aleatoriedad existe en un lado derecho o en un coeficiente de una restricción, entonces es incorrecto reemplazar el elemento aleatorio por los valores esperados o promedios.

Problema más complicado de planeación de dos periodos.

En el ejemplo anterior se tuvo una decisión trivial en la segunda etapa. No había decisiones a hacer después de que la naturaleza efectuaba su decisión. El siguiente ejemplo considera algunas decisiones no triviales en la segunda etapa.

Al principio de un verano en una ciudad norteña de U.S.A., el director de obras viales está efectuando un análisis para la compra de combustible y sal para usarse en la tarea de remover la nieve de las calles en el próximo invierno.

Si se compran insuficientes provisiones antes de un invierno severo, podrían pagarse precios sustancialmente altos por lo faltante durante dicho invierno. Existen dos métodos para remover la nieve: arando y salando. Echando sal generalmente resulta más barato, especialmente durante un invierno moderado; sin embargo, el exceso de sal después de un invierno de este tipo sólo puede ser utilizado hasta el siguiente invierno. En cambio el exceso de combustible puede ser rapidamente vendido a otras ciudades y así disminuir la penalidad por almacenar mucho combustible.

El director considera al invierno como moderado o frío, asignándoles las probabilidades de ocurrencia de .4 y .6, respectivamente para estos dos posibles estados de la naturaleza.

Los costos y valores de rescate de la sal y el combustible se describen en la tabla siguiente . Las decisiones hechas antes del invierno se realizan en el periodo 1, mientras que las decisiones que se hacen durante o después del invierno son decisiones del segundo período. Por conveniencia, todas las figuras serán presentadas en camiones - día, esto es, la cantidad consumida por un camión en un día.

COSTO DE PROVISIONES VS. DATOS DE COMPRA

		SAL	COMBUST.
COMPRAR EN PERIODO 1		$ 20	$ 70
COMPRAR EN PERIODO 2	MODERADO	$ 30	$ 73
	FRIO	$ 32	$ 73
VALOR DE RESCATE AL FIN DEL PERIODO 2		$ 15	$ 65

Nótese que el precio de la sal en el segundo período, es una variable aleatoria que depende del tiempo que haga. Si el invierno es frio, esperamos que el precio de la sal sea alto

Así, el costo de operación de un camión por día, sin contar combustible y sal, es de $ 110 en invierno moderado y $ 120 en un invierno frio. La flota de camiones tiene una capacidad de 5.000 camiones-dia durante el invierno. Si únicamente se emplean para arar la nieve, entonces en un invierno moderado se requerirán 3500 camiones-día mientras que en un frio se requerirán 5100. Por otra parte, se sabe que salando resulta una forma más efectiva de usar los camiones, ya que en un invierno moderado, un camión salando es equivalente a 1.2 camiones arando; mientras que en uno frio, la equivalencia se convierte en 1.1. De esta manera, en un invierno frio la capacidad limitada de camiones implica que en algunas calles será necesario echar sal.

En este punto es útil definir variables para las cantidades de combustible y sal a ser compradas o vendidas, en los diferentes períodos.

BF1 = camión-día de combustible comprado en el período 1
BS1 = camión-dia de sal comprada en el período 1
BFW = combustible comprado en el período 2, invierno moderado
BSW = sal comprada en el período 2, invierno moderado

XFW = exceso de combustible al final de un invierno moderado
XSW = exceso de sal al final de un invierno moderado
PW = camión-día arando, invierno moderado
SW = camión-día extendiendo sal, invierno moderado
KW = costos en que se incurre durante un invierno moderado
BFC = combustible comprado en el periodo 2, invierno frio
BSC = sal comprada en el periodo 2, invierno frio
XFC = exceso de combustible al final de un invierno frio
PC = camión-día arando, invierno frio
SC = camión-día extendiendo sal, invierno frio
KC = costos en que se incurre durante un invierno frio

Un aspecto importante a notar es que hemos definido variables de decisión sólo para la segunda etapa, en cada uno de los estados posibles de la naturaleza. La sal en el periodo dos se distingue fácilmente si es comprada en el invierno moderado o si lo es en un invierno severo. Esta es la clave para construir una formulación correcta.

Si se conoce que el invierno es moderado, entonces el programa lineal es:

MIN 70 BF1 + 20 BS1 + KW

Sujeto a:

2) -BF1 -BFW + XFW + PW + SW = 0 (uso de combustible)
3) -BS1 -BSW + SXW + SW = 0 (uso de sal)
4) -PW + SW ≤ 5000 (uso de camión)
5) -PW + 1.25W ≥ 3500 (remover nieve)
6) -KW - 73 BFW - 30 BSW + 65 XFW + 15 XSW - 110 PW-
110 SW = 0 (cálculo de costo)

Cuando se resuelve el problema, la solución es:

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO.

1) 583333.3

VARIABLE	VALOR	COSTO REDUCIDO
BF1	2916.66666	0.00000
BS1	2916.66666	0.00000
KW	380833.33200	0.00000
BFW	0.00000	3.00000
XFW	0.00000	5.00000
PW	0.00000	13.33333
SW	2916.66666	0.00000
BSW	0.00000	10.00000
XSW	0.00000	5.00000

RENGLON	HOLGURA	PRECIOS DUALES.
2)	0.00000	70.00000
3)	0.00000	20.00000
4)	2083.33334	0.00000
5)	0.00000	- 166.66666
6)	0.00000	- 1.00000

La solución resulta como se esperaba si se conoce de antemano que el invierno es moderado: comprar suficiente combustible y sal en el primer período para seguir la estrategia de exclusivamente extender sal en el segundo período.

Por otro lado si conocemos que el invierno es frío, el correspondiente programa lineal es:

MIN. 70 BFI + 20 BSI + KC.

Sujeto a:

2) -BFI - BFC + XFC + PC + SC = 0
3) -BSI + SC - BSC + XSC = 0
4) PC + SC ≤ 5000
5) PC + 1.1SC ≥ 5100
6) KC - 73 BFC + 65 XFC - 120 PC - 120 SC - 32 BSC + 15 XSC = 0

La solución es ligeramente más complicada. En un invierno frío los supuestos son de tal forma que el arar la nieve tiene un costo más efectivo que el salar; sin embargo una política de únicamente arar no puede ser aplicada, ya que se tiene restricción en la utilización de los camiones. Así, sólo se emplea la suficiente sal hasta utilizar la capacidad de los camiones. Esto se ilustra en seguida:

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO.

1) 970000.0

VARIABLE	VALOR	COSTO REDUCIDO.
BFI	5000.0000	0.00000
BSI	1000.0000	0.00000
KC	600000.0000	0.00000
BFC	0.0000	3.00000
XFC	0.0000	5.00000
PC	3999.9999	0.00000
SC	1000.0000	0.00000
BSC	0.0000	12.00000
XSC	0.0000	5.00000

RENGLON	HOLGURA	PRECIOS DUALES
2)	0.0000	70.0000
3)	0.0000	20.0000
4)	0.0000	10.0000
5)	0.0000	− 200.0000
6)	0.0000	− 1.0000

Ninguno de los dos modelos anteriores y sus soluciones son útiles de inmediato, ya que no se conoce de antemano si un invierno va a ser moderado o frío.

Parte del problema es que las dos soluciones recomendadas dependen del conocimiento del tipo de invierno, siendo que en la realidad la decisión en el primer periodo debe ser única. Esta es fácil remediar, si simplemente combinamos los dos modelos en uno; ya que las variables en la primera etapa, BFI y BSI, aparecen en ambos conjuntos de restricciones, esto forza a que la misma decisión se aplique en la primera etapa prescindiendo de la severidad del invierno.

Lo que resta es entonces, especificar la función objetivo apropiada para el problema combinado. Es obvio que los coeficientes del costo de las variables en la primera etapa son especificos, esto es, son conocidos; sin embargo los costos en la segunda etapa, KW y KC, son realmente variables aleatorias. Para este problema consideramos una probabilidad de .4 para aplicar KW y KC se trata como cero, mientras que si la probabilidad es .6 para aplicar KC, igualmente en la función objetivo, KW se toma como cero. La resolución correcta es aplicar pesos .4 y .6 a KW y KC, respectivamente la función objetivo. De esta manera, la formulación compelta es:

MIN 70 BFI + 20 BSI + 0.4 KW + 0.6 XC

Sujeto a:

2) − BFI − BFW + XFW + PW + SW = 0
3) − BSI + SW − BSW + XSW = 0
4) PW + SW ≤ 5000
5) PW + 1.2 SW ≥ 3500
6) KW − 73 BFW + 65 XFW − 110 PW − 110 SW − 30 BSW + 15 XSW = 0
7) −BFI − BFC + XFC + PC + SC = 0
8) −BSI + SC − BSC + XSC = 0
9) PC + SC ≤ 5000
10) PC + 1.1 SC ≥ 5100
11) KC − 73 BFC + 65 XFC − 120 PC − 120 SC −32BSC + 15XSC=0

END:

Para entender este modelo es valioso observar la tabla siguiente, donde aparecen los coeficientes:

	BF1	BS1	BKW	XFW	FW	PW	SW	BSW	XSW	BKC	XFC	FC	PC	SC	BSC	XSC	
1:	B	B	T							T							MIN
2:	-1			-1	1	1	1										=
3:		-1					1	-1	1								=
4:						1	1										<D
5:						1	A										>D
6:			1	-B	B	-C	-C	-B	B								=
7:	-1										-1	1	1	1			=
8:		-1												1	-1	1	=
9:													1	1			<D
10:													1	A			>D
11:										1	-B	B	-C	-C	-B	B	=0

Las líneas indican que el modelo realmente consiste de dos submodelos, uno para un invierno frio en la parte baja a la derecha, y otro para un invierno moderado en la parte anterior a la izquierda. Dichos modelos podrían separarse excepto por el encadenamiento vía las variables BFI y BSI de la primera etapa que aparecen en la parte superior izquierda. Otra forma de establecer el problema, en palabras es:

Minimizar Costo en la 1a. etapa + .4 (costos 2a.etapa invierno moderado) + .6 (costos 2a. etapa invierno frío)

Sujeto a: a las mismas primeras decisiones sin tomar en cuenta que el invierno sea moderado o frío.

La solución al problema completo es:

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO:

1) 819888.3

VARIABLE	VALOR	COSTO REDUCIDO.
BFI	2916.6666	0.0000
BSI	2916.6666	0.0000
KW	320833.3320	0.0000
BFW	0.0000	3.0000
XFW	0.0000	0.2000
PW	0.0000	4.6833
SW	2916.6666	0.0000
BSW	0.0000	3.5799
XSW	0.0000	2.4200
KC	715091.6720	0.0000
BFC	1891.6667	0.0000
XFC	0.0000	4.8000
PC	1891.6667	0.0000
SC	2916.6666	0.0000
BSC	0.0000	7.6200
XSC	0.0000	2.5799

RENGLON	HOLGURA	PRECIOS DUALES.
2)	0.0000	26.2000
3)	0.0000	8.4200
4)	2083.3333	0.0000
5)	0.0000	- 65.5166
6)	0.0000	- 0.4000
7)	0.0000	43.8000
8)	0.0000	11.5799
9)	191.6666	0.0000
10)	0.0000	- 115.8000
11)	0.0000	- 0.6000

La solución es interesante. Se recomienda comprar en el primer periodo suficiente sal y combustible para seguir una politica única de esparcir sal si el invierno es moderado. Si el invierno es frio se compra combustible extra, en el segundo período, para despejar o arar la nieve únicamente de acuerdo a la capacidad de movimiento. Bajo alguna de estas políticas no hay exceso de combustible o sal en ambos resultados

Ahora estamos en posición de establecer el procedimiento general para desarrollar un modelo de Programación Lineal para el problema de planeación en dos periodos bajo incertidumbre:

1.- Para cada posible estado de la naturaleza formular un modelo apropiado de Programación Lineal.

2.- Combinar esos submodelos en un supermodelo asegurando que:

a) Las variables de la primera etapa sean comunes a todos los submodelos pero que:

b) Las variables en la segunda etapa en un submodelo aparezcan sólo en ese submodelo.

3.- El costo en cada submodelo en la segunda etapa, aparece en la función objetivo ponderado por la probabilidad con que la naturaleza seleccionará el estado correspondiente a ese submodelo.

En la aplicación práctica existirá un debate acerca de los valores apropiados para las probabilidades, y por lo tanto se podría desear la sensibilidad de los resultados a cambios en las probabilidades. El reporte de rangos en la siguiente página indica algunas de esas sensibilidades.

RANGOS EN LOS QUE LA BASE NO CAMBIA.

RANGOS EN LOS COEFICIENTES DE LOS COSTOS.

VARIABLE	COEFIC. ACTUAL.	INCREMENTO PERMITIDO	DECREMENTO PERMITIDO.
BFI	70.0000	3.0000	0.2000
BSI	20.0000	3.5799	2.4200
KW	0.4000	0.0030	0.0410
BFW	0.0000	INFINIDAD	3.0000
XFW	0.0000	INFINIDAD	0.2000
PW	0.0000	INFINIDAD	4.6833
SW	0.0000	5.6199	78.6200
BSW	0.0000	INFINIDAD	3.5799
XSW	0.0000	INFINIDAD	2.4200
KC	0.6000	0.0027	0.0410
BFC	0.0000	0.2000	3.0000
XFC	0.0000	INFINIDAD	4.8000
PC	0.0000	2.2000	2.3454
SC	0.0000	2.5799	2.4200
BSC	0.0000	INFINIDAD	7.6200
XSC	0.0000	INFINIDAD	2.5799

RANGOS DE LOS LADOS DERECHOS (RHS)

RENGLON	RHS ACTUAL	INCREMENTO PERMITIDO	INCREMENTO PERMITIDO
2)	0.0000	2916.6666	[illegible]
3)	[illegible]	1916.6667	[illegible]
4)	5000.0000	INFINIDAD	2083.3333
5)	3500.0000	2063.6363	2299.9997
6)	0.0000	INFINIDAD	320833.3370
7)	0.0000	1891.6666	INFINIDAD
8)	0.0000	1719.6969	1916.6665
9)	5000.0000	INFINIDAD	191.6666
10)	5100.0000	191.6666	1891.6666
11)	0.0000	INFINIDAD	715091.6720

Nótese que los rangos de los coeficientes de KW y KC en la función objetivo son muy pequeños. Lo que significa que modestos cambios en las probabilidades, .4 y .6, pueden producir cambios muy notables en la solución.

VALOR ESPERADO DE LA INFORMACION PERFECTA (EVPI)

La incertidumbre tiene sus costos. Por lo tanto puede ser provechoso invertir en investigar para reducir la incertidumbre. Esta inversión puede mejorar los pronósticos para los problemas que uno esta analizando o en pruebas de mercadeo o análisis de mercado para problemas en que se va a efectuar una inversión para lanzar un nuevo producto. Una cota sobre el valor de mejores pronósticos se obtiene considerando la posibilidad de obtener pronósticos perfectos, a lo que se le da el nombre de información perfecta.

Tenemos suficiente información sobre el problema de remover la nieve para calcular el valor de la información perfecta. Por ejemplo, si se conoce de antemano que el invierno debería ser moderado, podemos ver que la solución del modelo cuando el invierno es templado, tendría un costo total de 583333.3. Por otro lado, el costo total, en el caso del modelo del invierno frío, debería ser de 970000. Teniendo pronósticos perfectos no cambiará la frecuencia de los inviernos, los cuales presumiblemente ocurrirán con probabilidades .4 y .6. De esta forma, si hacemos pronósticos perfectos, el costo esperado por estación deberá ser:

$$.4 * 583333.3 + .6 * 970000 = 815333.3$$

De la solución del modelo completo observamos que el costo esperado por estación, sin ninguna información adicional, es de 819 888.3. Así, el valor esperado de la información perfecta es de 819 880.3 - 815 333.3 = 4555. Por lo tanto, si alguien vendiera el pronóstico se podría ofrecer 4555 por obtenerlo, aunque éste no fuera perfecto.

AVERSION AL RIESGO.

Hasta ahora hemos supuesto que el decisor es extrictamente un maximizador de ganancias esperadas, siendo que puede tener aversión o propención al riesgo. Los apostadores de un casino que juegan, por ejemplo, a la ruleta deben ser propensos al riesgo, si la rueda de la ruleta no está defectuosa, ya que sus ganancias esperadas son negativas. Una persona tiene aversión al riesgo si asigna mayor peso a una pérdida grande

En el contexto del problema de remover la nieve, el Director de Obras Viales puede estar desconcertado por el alto costo de remover la nieve en un invierno frio aunque a la larga la minimización del costo esperado deberia implicar una ocasional pérdida grande.

Analizando la política óptica, podemos darnos cuenta que la suma de los costos del primero y segundo periodos, si el invierno es frio, es:

$$70 * BFI + 20 * BSI + KC = 977\ 591$$

Por otro lado, si conocemos de antemano que el invierno será frío, entonces hemos visto que el costo puede reducirse a 970 591.

Por temor a llamar la atención de un oponente político el Director de Obras Viales puede desear prevenir la posibilidad de un costo más de 5000, mayor que el posible mínimo para el resultado del invierno frío.

El Director puede incorporar su aversión al riesgo al modelo de programación lineal adicionando la restricción.

$$70\ BFI + 20\ BSI + KC \leq 975\ 000$$

Hecho lo anterior, la solución es:

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO.

1) 820 061.1

VARIABLE	VALOR	COSTO REDUCIDO.
BFI	3780.5578	0.0000
BSI	2916.6666	0.0000
KW	264680.4060	0.0000
BFW	0.0000	3.1999
XFW	863.8911	0.0000
PW	0.0000	4.6111
SW	2916.6666	0.0000
BSW	0.0000	3.5300
XSW	0.0000	2.4666
KC	652027.6090	0.0000
BFC	1027.7755	0.0000
XFC	0.0000	5.3333
PC	1891.6666	0.0000
SC	2916.6666	0.0000
BSC	0.0000	8.4666
XSC	0.0000	2.8666

El costo esperado se ha incrementado en 820061 - 819 888 = 173. Un politico puede considerar que vale la pena pagar para quedar bien en el peor caso (invierno frío), hasta un costo de 2600. Nótece, sin embargo, que el evento de un invierno templado no es bien visto, ya que el valor de XFW indica que existirá a lo más 864 unidades de combustible sobrantes al final de un invierno templado.

DECISIONES BAJO INCERTIDUMBRE CON MAS DE DOS PERIODOS.

Las ideas que fueron discutidas en el problema de dos periodos pueden extenderse para un número arbitrario de periodos. La secuencia de eventos en el caso general es:

1.- Hacemos una decisión.
2.- La naturaleza hace una decisión aleatoria.
3.- Hacemos una decisión.
4.- La naturaleza hace una decisión aleatoria.
5.- Etc.

La extensión puede efectuarse trabajando hacia atrás a travéz del tiempo. Por ejemplo, si deseamos analizar un problema de tres periodos debemos empezar con los dos últimos y formular el modelo de programación lineal estocástico considerando éstos. De esta forma , el modelo anterior justamente desarrollado para los dos últimos periodos es tratado como el segundo periodo de un problema de dos periodos en el cual ahora el primer periodo es realmente el primer periodo. Este proceso tiene el inconveniente de que se genera un problema muy grande si el número de periodo aumenta. Si el número de éstos es n y el número de posibles estados de la naturaleza en cada periodo es 3, entonces el tamaño del probleme es proporcional a 3^n. Por lo que no es usual manejar problemas lineales estocásticos con más de tres periodos.

PROGRAMAS DE OPORTUNIDAD RESTRINGIDA.

Una desventaja de los métodos anteriores, es que el tamaño del problema puede crecer demasiado si el número de posibles estados de la naturaleza es grande. Los programas de oportunidad restringida no se aplican exáctamente para el mismo problema, teniendo como resultado que el problema no crece. Los programas estocásticos discutidos hasta ahora, han tenido la característica de que cualquier restricción ha sido satisfecha por alguna combinación de las decisiones del primero y segundo periodo. Los programas de oportunidad restringida, sin embargo, permiten que cada restricción sea violada con una cierta probabilidad especificada. Una ventaja de este enfoque, para considerar incertidumbre, es que el modelo de oportunidad restringida tiene esencialmente el mismo tamaño como uno de programación lineal sin elementos aleatorios.

Ilustraremos la idea con el problema de remover la nieve. Bajo el enfoque de oportunidad restringida no existen variables de decisión para la segunda etapa. Por ejemplo, podemos especificar que con probabilidad de al menos .75 debemos ser capaces de proporcionar la capacidad requerida para remover la nieve por la severidad de el invierno. Para nuestro problema, es muy fácil observar que esto significa que debemos proporcionar 5100 camiones por día de capacidad. Por ejemplo, si sólo se proporciona una capacidad de 4400 camiones por día, entonces, la probabilidad de capacidad suficiente debería ser de .4. Supongamos que el costo de operación de un camión-día es de $116, y un camión-día salando es 1.14 camión-día de arar la nieve; entonces, el programa lineal de oportunidad restringida es simplemente el modelo:

$$\text{min.} \quad 70\,BFI + 20BSI + 116P + 116S$$

Sujeto a"

$$\begin{array}{rcl} -\,BFI + P + S & = & 0 \\ -\,BFI + S & = & 0 \\ P + S & \leq & 5000 \\ P + 1.14S & \geq & 5100 \end{array}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS.

1.- Cuál es el valor esperado de la información perfecta en el problema de sembrar maiz/sorgo?

2.- El granjero, en el problema del maiz/sorgo, está renuente a sembrar todo de sorgo , ya que si la estación es húmeda, él haria $30 menos por acre que si sembrara todo de maiz. Puede usted reaccionar a su riesgo y recomendar sembrar una combinación de cultivos que tenga la caracteristica que la ganancia por acre sea a lo más de $20 que en retrospectiva debería haber sido mejor para su ingreso particular.

3.- Analizar el problema de remover la nieve para la situación donde el costo del combustible en un invierno frio es de $80 por camión-dia, en vez de $73 y el costo de salar en un invierno frio es de $35 en vez de $32. Incluya en su análisis la derivación del valor esperado de la información perfecta.

II.9. TEORIA DE JUEGOS

En la mayor parte de las situaciones en que se tiene que efectuar una decisión, nuestras ganancias (y pérdidas) se determinan no sólo por nuestras decisiones sino también por decisiones que toman fuerzas externas; esto es, nuestros competidores, condiciones climatológicas, etc.. Una clasificación útil es considerar a la fuerza externa ya sea como indiferente o malévola. Clasificaremos al clima, por ejemplo, como indiferente, ya que su decisión es indiferente a nuestras acciones, en rencor de cómo pudiésemos sentir durante un aguacero después de haber lavado el auto y olvidarnos de abrir la sombrilla. Un competidor, sin embargo, generalmente toma en cuenta la posibilidad de que nosotros tomemos varias acciones y como resultado hacer decisiones que son malévolas a nuestro bienestar. En esta sección analizaremos situaciones que involucran una fuerza malévola externa. La terminología común aplicada al problema es la Teoría de Juegos. Algunos problemas de este tipo surgen, por ejemplo, en la solución de una estrategia de mercado o de precios, o en negocios internacionales. En forma específica, la probabilidad de que un competidor efectúe un embargo petrolero contra nosotros probablemente depende de que si hemos elegido una reserva estratégica de petróleo.

Juego de dos personas

Un juego llamado Azul y Oro se juega entre dos personas con movimientos simultáneos simples. Cada jugador debe hacer su movimiento ignorando el movimiento del contrario. Una vez que ambos resultados son conocidos, entonces un jugador paga al otro una cantidad especificada en la tabla de pagos que aparece enseguida.

TABLA DE PAGOS

(+)Azul paga a Dorado, (−)Dorado paga a Azul

		movimiento de Azul	
		a	b
movimiento de Dorado	a	4	−6
	b	−5	8
	c	3	−4

Azul debe seleccionar uno de dos movimientos (a) o (b) mientras que Dorado debe seleccionar entre tres movimientos (a) ,(b) o (c). Por ejemplo, si Dorado selecciona (b) y Azul selecciona (a), entonces Dorado le paga a Azul 5 millones. Si Dorado selecciona (c) y azul selecciona (a), entonces Azul paga a Dorado 3 millones.

Este juego no tiene una estrategia obvia para ambos jugadores. Si Dorado está tentado a hacer el movimiento (b) con la esperanza de ganar 8 millones, entonces Azul igualmente estará tentado a efectuar el movimiento (a) y así ganarle 5 millones a Dorado. Es claro que cada jugador quedrá considerar una estrategia aleatoria. Cualquier jugador que siga una estrategia de siempre hacer el mismo movimiento es facilmente vencido. Por lo tanto definimos:

BMi = probabilidad de que Azul haga el movimiento i, i=a,b
GMi = probabilidad de que Dorado haga el movimiento i i=a,b,c

Cómo debería Azul seleccionar las probabilidades BMi ?
Un criterio conservador, que es totalmente sensible, es el criterio de Minimax. Usando este criterio Azul podria argumentar: si Dorado efectúa el movimiento (a), mi pérdida esperada es:

$$4BMA - 6BMB$$

Si Dorado decide moverse a (a), mi pérdida esperada es:

$$-5BMA + 8BMB$$

Si Dorado selecciona el movimiento (c), mi pérdida esperada es:

$$3BMA - 4BMB$$

De esta manera existen tres posibles pérdidas esperadas, dependiendo de qué decisión haga Dorado. Si Azul es conservador, entonces un criterio razonable es seleccionar el MBi de tal forma que se minimice la máxima pérdida esperada, de ahí el término de Minimax. Otra manera de plantear el problema es que Azul seleccione las probabilidades BMi de tal forma que no importe lo que Dorado haga, Azul minimizaría la máxima pérdida esperada. Si LB es la máxima pérdida esperada para Azul, entonces su problema puede establecerse como un problema de Programación Lineal:

```
Min    LB

sujeto a:

2)        BMA + BMB = 1
3)       4BMA - 6BMB - LB < 0
4)      -5BMA + 8BMB - LB < 0
5)       3BMA - 4BMB - LB < 0
END
```

La primera restricción forza a que la suma de las probabilidades sea igual a 1, y la solución es:

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO

1) 0.2000

VARIABLE	VALOR	COSTO REDUCIDO
LB	0.2000	0.0000
BMA	0.6000	0.0000
BMB	0.4000	0.0000

RENGLON	HOLGURA	PRECIO DUAL
2)	0.0000	-0.2000
3)	0.2000	0.0000
4)	0.0000	0.3500
5)	0.0000	0.6500

La interpretación es que si Azul decide moverse a (a) con probabilidad 0.6, y moverse a (b) con probabilidad 0.4, entonces la pérdida esperada de Azul nunca será mayor de 0.2, sin atender a los movimientos que Dorado haga.
Si Dorado sigue un argumento similar, pero en términos de maximizar la mínima ganancia esperada PG, en vez de minimizar la máxima pérdida esperada, entonces el problema de Dorado es:

```
Max    PG

sujeto a:

2)      GMA + GMB + GMC = 1
3)      -PG + 4GMA - 5GMB + 3GMC > 0
4)      -PG - GMA + 8GMB - 4GMC > 0
END
```

La solución al problema de Dorado es:

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO

1) 0.2000

VARIABLE	VALOR	COSTO REDUCIDO
PO	0.2000	0.0000
GMA	0.0000	0.0000
GMB	0.3500	0.0000
GMC	0.6500	0.0000

RENGLON	HOLGURA	PRECIO DUAL
2)	0.0000	0.2000
3)	0.0000	-0.6000
4)	0.0000	-0.4000

La interpretación es que si Dorado selecciona (b) con probabilidad 0.35, o (c) con probabilidad 0.65 y nunca se mueve a (a), entonces la ganancia esperada de Dorado nunca será menor de 0.2. Note que la menor ganancia esperada de Dorado es igual a la más grande pérdida esperada de Azul. Desde un punto de vista, lo que Azul espera transferir a Dorado es al menos de 0.2. Esto significa que si ambos jugadores siguen las estrategias justamente derivadas, entonces en cualquier tirada del juego existe una transferencia esperada de 0.2 unidades de Azul a Dorado. Por tanto el juego está sesgado en favor de Dorado a una tasa de 0.2 millones por juego.

Si se observan detenidamente las soluciones a los problemas de Azul y luego de Dorado, se notará una sorpresiva similitud . Los precios duales en el primer caso son iguales a las probabilidades de Dorado; y los valores negativos de los precios duales en el segundo caso, son iguales a las probabilidades de Azul en su problema correspondiente

Juegos de suma no constante que involucran dos o más jugadores

El supuesto fundamental más irreal en el juego de dos personas con suma cero, en Teoría de Juegos, es precisamente que la suma de los pagos a todos los jugadores debe ser cero(hasta ahora constante sin pérdida de generalidad). En realidad,los beneficios casi nunca son constantes; generalmente los beneficios totales se incrementan si los jugadores cooperan. En los juegos de suma no constante la dificultad resulta de decidir cómo distribuir los beneficios adicionales entre los jugadores, debido a dicha cooperación.

Supongamos que las personas A, B, C tienen cada uno un terreno, los cuales están ubicados en forma adyacente en la parte frontal de un gran lago. Por experiencia, un terreno que está protegido contra la acción de las olas con un rompeolas tiene un valor más alto. A, B, y C están considerando construir un rompeolas para proteger sus propiedades. Por otra parte, se sabe que el rompeolas sale más barato si una u otra o las dos propiedades a los lados tienen rompeolas. Para nuestro ejemplo, A y C ya han hecho gastos para construir sobre sus propiedades. B no ha efectuado ningún gasto y separa a A de C; es decir, B está entre A y C. Los beneficios netos de un rompeolas para los tres propietarios están resumidos en la tabla siguiente:

PROPIETARIOS COOPERADORES (QUE CONSTRUYEN)	BENEFICIOS NETOS A LOS PROPIETARIOS QUE COOPERAN
A LO LARGO DE :	
A	1.2
B	0
C	1
A y B	4
A y C	3
B y C	4
A, B y C	7

Obviamente, todos los propietarios deberian construir su parte de muro rompeolas ya que sus beneficios totales se maximizarian. Sin embargo, al parecer B deberia ser recompensado de alguna manera ya que él no tiene motivación para construir su muro por si mismo. En este caso la Programación Lineal puede proporcionarnos alguna ayuda para seleccionar una aceptable distribución de beneficios.

Denotemos por v_A , v_B, v_C los beneficios netos a ser distribuidos a los propietarios A, B, C. Ningún propietario o grupo de propietarios aceptará una distribución que sea menor a la que disfrutarian si actuaran solos. De esta manera concluimos:

$$v_A > 1.2$$
$$v_B > 0$$
$$v_C > 1$$
$$v_A + v_B > 4$$
$$v_A + v_C > 3$$
$$v_B + v_C > 4$$
$$v_A + v_B + v_C < 1$$

Las restricciones anteriores describen lo que es llamado la esencia del juego. Por ejemplo, la distribución $v_A=3$, $v_B=1$, $v_C=3$ es la esencia del juego anterior.

El objetivo puede tomar en cuenta consideraciones secundarias; por ejemplo, se puede seleccionar maximizar el mínimo beneficio. El programa lineal en este caso es:

Max Z

sujeto a:

$Z \leq v_A,\ Z \leq v_B,\ Z \leq v_C$
$v_A \geq 1.2$
$v_C \geq 1$
$v_A + v_B \geq 4$
$v_A + v_C \geq 3$
$v_B + v_C \geq 4$
$v_A + v_B + v_C \leq 7$

La solución es : $v_A = v_B = v_C = 2.333$

Note que la esencia puede ser vacia; esto es, no existe solución factible. Esto seria verdad si, por ejemplo, el valor del agrupamiento A, B, C fuera 5.4 en vez de 7. Esta situación es interesante. Los beneficios totales se maximizan; sin embargo, la cooperación total se vuelve inestable cuando los beneficios son de 5.4. Por lo que siempre existirán un par de jugadores que encuentren provechoso formar un subgrupo y mejorar sus beneficios. Como un ejemplo, suponga que las distribuciones para A, B y C, cuando se tiene una cooperación total, son 1.2, 2.1 y 2.1, respectivamente. En este caso A sugeriria a B excluir a C y cooperar entre ellos, teniendo la distribución de 1.8, 2.2 y 1. Lo que resulta consistente con el hecho que A y B pueden lograr un total de 4, cuando ellos se cooperan. Por otra parte, C puede sugerir a A que entre ellos se cooperen y seleccionar una distribución de 1.9, 0 y 1.1. Lo que es consistente con el hecho que A y C pueden lograr un total de 3. También se tendría otra posibilidad si B sugiere a C etc., etc.. Así, cuando la esencia es vacia, puede ser que todos acuerden una cooperacion total que mejore a cada uno de ellos

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Por inspección, encuentre las politicas óptimas para Azul y Dorado en el juego de dos personas, descrito por la siguiente matriz:

Pagos a Azul por parte de Dorado como una función de ambas decisiones

		Decisión de Azul		
		A	B	C
Decisión de Dorado	X	4	8	6
	Y	3	7	4
	Z	5	9	5

2. Formular un modelo de Programación Lineal para encontrar las políticas óptimas para Azul y Dorado cuando se enfrentan en el juego siguiente:

Pagos a Azul por parte de Dorado como una función de ambas decisiones

		Decisión de Azul			
		A	B	C	D
Decisión de Dorado	X	2	-2	1	6
	Y	-1	4	5	-1

Las ciudades de Parched, Cactus y Tombstone se encuentran cerca de un desierto y sus autoridades están analizando sus opciones para el mejoramiento de sus fuentes de abastecimiento de agua. Un acueducto por las montañas satisfacería todas sus necesidades y su costo total sería de $730 000. Alternativamente, Parched y Cactus pueden excavar un pozo artesiano de suficiente capacidad que costaría $580 000. Una opción similar podrían efectuar Cactus y Tombstone a un costo de $500 000. Las tres comunidades pueden tener un pozo poco profundo en cada una de ellas a un costo de $300 000, $350 000 y 250 000, respectivamente.

Formular y resolver un modelo de Programación Lineal para determinar una forma adecuada para distribuir el costo de $730 000 de un acueducto entre las tres comunidades.

II.10. APLICACIONES A LA ESTADISTICA

La programación lineal (P.L.) puede usarse para regresión lineal en forma análoga a como se usa mínimos cuadrados. La estimación clásica por mínimos cuadrados encuentra la fórmula de predicción que minimiza la suma de los cuadrados de las diferencias entre las observaciones y las predicciones. La P.L. puede aplicarse si en lugar de minimizar la suma de los cuadrados de los errores se desea:

a. Minimizar la suma de los errores absolutos.

b. Minimizar el máximo error absoluto.

c. Minimizar el error en predecir el orden de preferencia de artículos, llamado regresión ordinal.

Definimos la notación:

n = número de observaciones.

d_i = valor de la variable dependiente en la observación i, para $i=1,2,\dots,n$,

k = número de variables independientes,

e_{ij} = valor de la j-ésima variable independiente en la observación i, para $i = 1,2,\dots,n$ y $j = 1,2,\dots,k$,

x_j = coeficiente de predicción aplicado a la j-ésima variable independiente,

w_i = error de la fórmula de predicción aplicada a la i-ésima observación.

La regresión en mínimos cuadrados encuentra los valores de las x_j's que resuelven el siguiente problema:

Minimizar $w_1^2 + w_2^2 + \dots + w_n^2$

s.a.

$e_0 + e_{i1}x_1 + e_{i2}x_2 + \dots + e_{ik}x_k + w_i = d_i$ para $i=1,2,\dots,n$.

x_j, w_i no restringidas en signo.

ESTIMACION DEL MINIMO VALOR ABSOLUTO (MVA)

Una función objetivo alternativa puede ser minimizar la suma de los valores absolutos de los errores, esto es:

$$\text{Minimizar } |w_1| + |w_2| + \ldots + |w_n|$$

Una regresión en MVA se ve menos afectada por valores extremos. Así, es apropiado usarla si los datos contienen unos cuantos valores extremos que de otra manera afectaría las predicciones màs drásticamente.

La P.L. puede aplicarse a este problema si se define:

$$u_i - v_i = w_i.$$

La diferencia, $u_i - v_i$, se introduce ya que w_i es no restringida en signo, mientras que la P.L. esta diseñada para variables que no pueden ser negativas. El problema de minimizar la suma de los errores absolutos puede ahora escribirse como:

Min $u_1 + v_1 + u_2 + v_2 + \ldots + u_n + v_n$

s.a.

$e_0 + e_{i1}x_1 + e_{i2}x_2 + \ldots + e_{ik}x_k + u_i - v_i = d_i$ para $i=1,2,..,n$

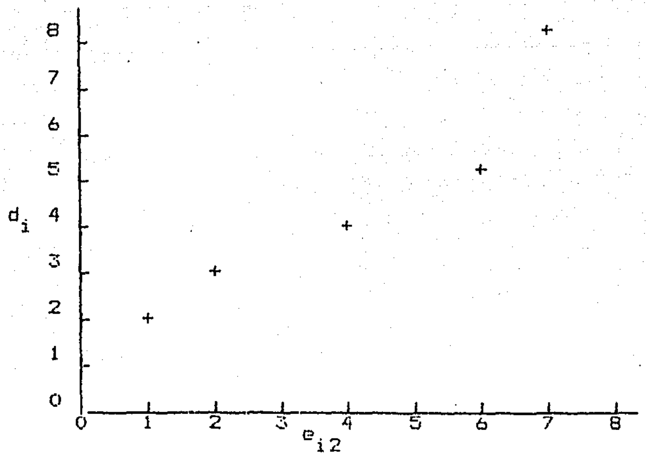
x_j no restringida en signo.

Ejemplo

Si se tienen cinco observaciones de una sola variable independiente. Hay dos variables por considerar.

d_i	e_{i1}	e_{i2}
2	1	1
3	1	2
4	1	4
5	1	6
8	1	7

La gráfica de d_i contra e_{i2} aparece como sigue:



Con la excepción del último punto (8,7), una línea recta da un buen ajuste. El P.L. para este problema es:

```
  MIN      U1 + V1 + U2 + V2 + U3 + V3 + U4 + V4 + U5 + V5
 SUBJECT TO
   2)    U1 - V1 + X0 + X1 =     2
   3)    U2 - V2 + X0 + 2 X1 =     3
   4)    U3 - V3 + X0 + 4 X1 =     4
   5)    U4 - V4 + X0 + 6 X1 =     5
   6)    U5 - V5 + X0 + 7 X1 =     8
 END
```

La matriz asociada a este problema revela su estructura:

```
MATRIZ
         U V U V U V U V U V X X
         1 1 2 2 3 3 4 4 5 5 0 1

     1:  1 1 1 1 1 1 1 1 1 1     MIN
     2:  1-1                 1 1 = 2
     3:      1-1             1 2 = 3
     4:          1-1         1 4 = 4
     5:              1-1     1 6 = 5
     6:                  1-1 1 7 = 8
```

La solución es:

```
 LP OPTIMUM FOUND  AT STEP      6
```

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 2.66666700

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
U1	.000000	1.333333
V1	.000000	.666667
U2	.333333	.000000
V2	.000000	2.000000
U3	.000000	1.666667
V3	.000000	.333333
U4	.000000	2.000000
V4	.333333	.000000
U5	2.000000	.000000
V5	.000000	2.000000
X0	1.333333	.000000
X1	.666667	.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	.000000	.333333
3)	.000000	-1.000000
4)	.000000	.666667
5)	.000000	1.000000
6)	.000000	-1.000000

NO. ITERATIONS= 6

Los valores para X0 y X1 especifican la fórmula de predicción, concretamente:

$$y_i = 1.3333 + .666667\, e_{i2}.$$

MEDIDA DE LA BONDAD DE AJUSTE

La bondad de ajuste para mínimos cuadrados se mide por un estadístico usualmente llamado R^2. Este estadístico es igual a la fracción de la variabilidad en las d_i que explica el modelo de predicción. Un estadístico análogo puede calcularse para la regresión MVA si se define m como la mediana de las d_i, es decir para los datos, m = 4. La R^2 análoga (llamada "ajustada") es:

$$1 - \frac{(u_1 + v_1 + \dots + u_n + v_n)/(n - k - 1)}{(|d_1 - m| + \dots + |d_n - m|)/(n - 1)}.$$

Para el ejemplo, este estadístico es:

$$1 - \frac{(2.66667)/3}{(2 + 1 + 0 + 1 + 4)/4} = .55556.$$

Para referencia, se dará la solución al ejemplo por mínimos cuadrados. Esta es:

$$d_i = 1.015 + .846\ e_{i2}.$$

La R^2 ajustada para esta fórmula es .8374.

REGRESION DE LA MINIMA DESVIACION MAXIMA (MIMAX)

La regresión MIMAX es opuesta a la regresión MVA. MIMAX minimiza el máximo error que ocurre en las observaciones. Un único valor extremo, causará efectos dramáticos en las estimaciones derivadas. La forma general de un modelo de P.L. para una regresión MIMAX es:

Min z

s.a:

$$e_0 + e_{i1}x_1 + e_{i2}x_2 +.+ e_{ik}x_k + u_i - v_i = d_i \quad \text{para } i=1,2,.,n$$

$$z - u_i - v_i \geq 0 \quad \text{para } i=1,2,...,n$$

x_j no restringida en signo.

Esta formulación explica el hecho que en una solución óptima, al menos uno de los u_i y v_i deberá ser diferente de cero. Por lo tanto, $z \geq u_i$ y $z \geq v_i$ o equivalente $z \geq u_i + v_i$.

Para el problema ejemplo, la formulación es:

```
  MIN      Z
SUBJECT TO
   2)   X0 - Y0 + X1 + U1 - V1 =     2
   3)   X0 - Y0 + 2 X1 + U2 - V2 =   3
   4)   X0 - Y0 + 4 X1 + U3 - V3 =   4
   5)   X0 - Y0 + 6 X1 + U4 - V4 =   5
   6)   X0 - Y0 + 7 X1 + U5 - V5 =   8
   7)   Z - U1 - V1 >=   0
   8)   Z - U2 - V2 >=   0
   9)   Z - U3 - V3 >=   0
  10)   Z - U4 - V4 >=   0
  11)   Z - U5 - V5 >=   0
 END
```

Note que la variable XO ha sido reemplazada por la diferencia XO-YO ya que la variable original XO es no restringida en signo.

```
   MATRIZ

           X Y X U V U V U V U V U V
         Z O O 1 1 1 2 2 3 3 4 4 5 5

   1:    1                             MIN
   2:      1-1 1 1-1                   = 2
   3:      1-1 2     1-1               = 3
   4:      1-1 4         1-1           = 4
   5:      1-1 6             1-1       = 5
   6:      1-1 7                 1-1   = 8
   7:    1       -1-1                  >
   8:    1           -1-1              >
   9:    1               -1-1          >
  10:    1                   -1-1      >
  11:    1                       -1-1  >


    LP OPTIMUM FOUND  AT STEP     10

         OBJECTIVE FUNCTION VALUE

      1)          1.00000000

      VARIABLE         VALUE          REDUCED COST
       Z            1.000000           .000000
      XO             .000000           .000000
      YO             .000000           .000000
      X1            1.000000           .000000
      U1            1.000000           .000000
      V1             .000000           .000000
      U2            1.000000           .000000
      V2             .000000           .200000
      U3             .000000           .000000
      V3             .000000           .000000
      U4             .000000          1.000000
      V4            1.000000           .000000
      U5            1.000000           .000000
      V5             .000000           .800000

     ROW   SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
      2)             .000000           .000000
      3)             .000000          -.100000
      4)             .000000           .000000
      5)             .000000           .500000
      6)             .000000          -.400000
      7)             .000000           .000000
```

8)	.000000	-.100000
9)	1.000000	.000000
10)	.000000	-.500000
11)	.000000	-.400000

NO. ITERATIONS= 10

Los valores de XO - YO y X1 revelan que la fórmula de predicción es:

$$y_i = e_{i2}.$$

MEDIDA DE LA BONDAD DE AJUSTE, CASO MIMAX

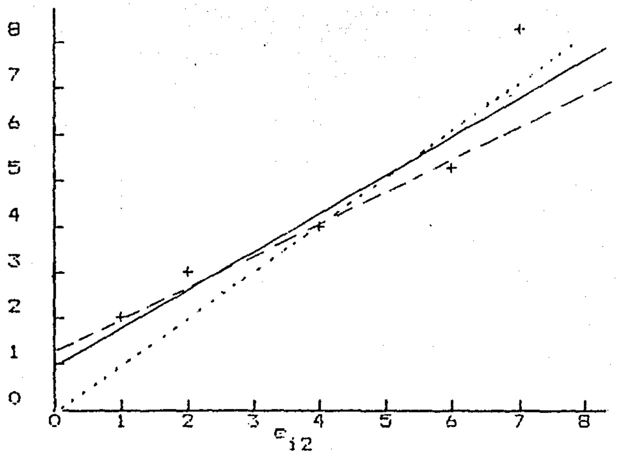
Defina r igual al rango de las d_i's, esto es, $\max\{d_i\} - \min\{d_i\}$. La R^2 anàloga del ajuste es:

$$1 - \frac{\max\ \{u_i + v_i\}/(n - k - 1)}{r/(n - 1)} .$$

Para el ejemplo, este estadístico es igual a:

$$1 - \frac{1/3}{(8 - 2)/4} = .778.$$

Las tres curvas de predicción diferentes que resultan de los tres métodos distintos aplicados a los datos del ejemplo, se presentan en la figura 15.1. Note que la MIMAX desviación es la más afectada por el dato extremo (8,7), mientras que la desviación MVA es la menos afectada por el dato anterior.



– – – – min suma desviac absolutas (y_i = 1.333 + .6667 e_{i2})

——— min suma desviac al cuadr (y_i = 1.015 + .84615 e_{i2})

.... minimax desviac absoluta (y_i = 0 + e_{i2})

EXPLOTACION DEL DUAL PARA OBTENER INFORMACION MAS COMPACTA

La cantidad de trabajo requerida para resolver un P.L. esta mucho más correlacionada con el número de rengiones que de columnas. Como la solución del problema dual provee la misma información que la solución del primal, se puede desear resolver el dual que tiene menos renglones.

DUAL DEL PROBLEMA MVA

Primero se examinará el problema MVA. El problema dual de la formulación previa es:

$$\text{Max} \quad \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 + \ldots + \lambda_n d_n$$

s.a

$$\lambda_1 e_{1j} + \lambda_2 e_{2j} + \ldots + \lambda_n e_{nj} \leq 0 \quad \text{para } j = 0, 1, \ldots, k.$$

$$l_i \leq 1$$

$$l_i \geq -1.$$

Esta formulación se simplifica ligeramente si se define:

$$L_i = \lambda_i + 1 \quad \text{o} \quad \lambda_i = L_i - 1$$

Cuando se hace esta sustitución la formulación resulta:

Max $L_1 d_1 + L_2 d_2 + \ldots + L_n d_n - d_1 - d_2 - \ldots - d_n$

s.a

$L_1 e_{1j} + L_2 e_{2j} + \ldots + L_n e_{nj} \leq e_{1j} + e_{2j} + \ldots + e_{nj}$

para $j = 0, 1, \ldots, k$.

$L_i \leq 2$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Esta formulación tiene $n + k$ renglones comparada con unicamente n en el primal; sin embargo, n de estas restricciones son de la forma simple $L_i \leq 2$. Algunos códigos de P.L. explotan esta forma simple.

Esta formulación y su matriz aparecen abajo. La constante $-d_1 - d_2 - \ldots - d_n$ en la función objetivo no afecta, de modo que no se incluye.

```
MAX      2 L1 + 3 L2 + 4 L3 + 5 L4 + 8 L5
SUBJECT TO
   2)    L1 + L2 + L3 + L4 + L5 <=    5
   3)    L1 + 2 L2 + 4 L3 + 6 L4 + 7 L5 <=   20
   4)    L1 <=   2
   5)    L2 <=   2
   6)    L3 <=   2
   7)    L4 <=   2
   8)    L5 <=   2
 END
```

MATRIZ

```
 1: 2 3 4 5 8 MAX
 2: 1 1 1 1 1 < 5
 3: 1 2 4 6 7 < B
 4: 1         < 2
 5:   1       < 2
 6:     1     < 2
 7:       1   < 2
 8:         1 < 2
```

La solución es:

```
  LP OPTIMUM FOUND  AT STEP      5

     OBJECTIVE FUNCTION VALUE

  1)           24.6666700
```

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
L1	.666667	.000000
L2	2.000000	.000000
L3	.333333	.000000
L4	.000000	.333333
L5	2.000000	.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	.000000	1.333333
3)	.000000	.666667
4)	1.333333	.000000
5)	.000000	.333333
6)	1.666667	.000000
7)	2.000000	.000000
8)	.000000	2.000000

NO. ITERATIONS= 5

Los costos duales en las restricciones (2) y (3), 1.3333 y .6667 corresponden a X0 y X1. Note que solamente se requirieron 5 iteraciones para resolverlo, comparado con seis iteraciones para la formulación primal.

DUAL DE LA FORMULACION DEL MIMAX

El dual de la formulación MIMAX es:

$$\text{Max} \quad \sum_i \lambda_i d_i$$

s.a: (Variable Primal)

$$\sum_i \lambda_i e_{ij} = 0 \qquad (x_j)$$

$$\lambda_i - \alpha_i \leq 0 \qquad (u_i)$$

$$-\lambda_i - \alpha_i \leq 0 \qquad (v_i)$$

$$\sum_i \alpha_i \leq 1$$

λ_i no restringida en signo.

Esta formulación puede arreglarse a una forma más conveniente si definimos las variables g_i y h_i tales que:

$$g_i + h_i = \alpha_i$$

$$g_i - h_i = \lambda_i$$

con g_i y h_i no restringidas en signo.

Sustituyendo para ambas α_i y λ_i la formulación queda:

1. $\text{Max} \quad \sum_i (g_i - h_i) d_i$

s.a.

2. $\sum_i (g_i - h_i)e_{ij} = 0$

3. $g_i - h_i - (g_i - h_i) \leq 0 \quad o \quad -2h_i \leq 0 \quad o \quad h_i \geq 0$

4. $-(g_i - h_i) - (g_i - h_i) \leq 0 \quad o \quad -2g_i \leq 0 \quad o \quad g_i \geq 0$

5. $\sum (g_i + h_i) \leq 1$

Las restricciones de no negatividad $h_i \geq 0$ y $g_i \geq 0$ son supuestas por cualquier código de P.L., de modo que la formulación explícita consiste de (1), (2) y (5).

La formulación y la matriz aplicada a los datos del ejemplo viene dada abajo.

```
MAX  2 G1 - 2 H1 + 3 G2 - 3 H2 + 4 G3 - 4 H3 + 5 G4 - 5 H4 +
    8 G5 - 8 H5



   SUJETO A

   2)    G1 - H1 + G2 - H2 + G3 - H3 + G4 - H4 + G5 - H5 = 0
   3)    G1 - H1 + 2 G2 - 2 H2 + 4 G3 - 4 H3 + 6 G4 - 6 H4
         + 7 G5 - 7 H5 =    0
   4)    G1 + H1 + G2 + H2 + G3 + H3 + G4 + H4 + G5 + H5 <=0
  END

 MATRIZ
        G H G H G H G H G H
        1 1 2 2 3 3 4 4 5 5

    1: 2-2 3-3 4-4 5-5 8-8 MAX
    2: 1-1 1-1 1-1 1-1 1-1 =
    3: 1-1 2-2 4-4 6-6 7-7 =
    4: 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 < 1
```

La solución es:

```
 LP OPTIMUM FOUND  AT STEP      3

     OBJECTIVE FUNCTION VALUE

  1)         1.000000000
```

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
G1	.083333	.000000
H1	.000000	2.000000
G2	.000000	.000000
H2	.000000	2.000000
G3	.000000	1.000000
H3	.000000	1.000000
G4	.000000	2.000000
H4	.500000	.000000
G5	.416667	.000000
H5	.000000	2.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	.000000	.000000
3)	.000000	1.000000
4)	.000000	1.000000

NO. ITERATIONS= 3

Los costos duales para los renglones (2) y (3) son los valores para X0 y X1. Note que esta formulación tiene solamente tres renglones y requiere tres iteraciones comparada con 10 restricciones y 10 iteraciones para la formulación primal.

REGRESION ORDINAL

Los métodos de regresión discutidos en la sección previa se aplican cuando todos los datos están en forma numérica. Algunas veces, los datos se encuentran de una manera más subjetiva o forma cualitativa. Considere, por ejemplo, un estudio de mercado en el que se trata de predecir cuàles son las preferencias de un cierto tipo de consumidor sobre varios productos alimenticios, por ejemplo, comida para el desayuno. Los datos de un consumidor deben consistir simplemente de proposiciones preferenciales de la forma "Prefiero cereal de trigo a cereal de maíz". Hay adicionalmente datos cuantitativos en cada comida para el desayuno que describe sus características, es decir, suavidad, valor nutricional, costo, etc. Se desea determinar la clasificación hechá por los consumidores dependiendo de las características del producto.

Este problema puede atacarse por medio de P.L. Considere el siguiente ejemplo. Cinco automóviles distintos, denotados por B, C, F, L y M han sido evaluados por un conjunto de consumidores. Los resultados son los siguientes:

COMPARACION NO.	AUTOMOVIL MENOS PREFERIDO	AUTOMOVIL MAS PREFERIDO
1.	C	L
2.	M	B
3.	F	L
4.	F	C
5.	B	F
6.	L	M
7.	M	C
8.	M	F

Por ejemplo, la primera comparación indica que algún consumidor prefiere un L a un C, mientras que la última comparación indica que algún consumidor prefiere un F a un B. No se ha requerido que estas comparaciones dos a dos sean consistentes o transitivas (aunque podrían serlo). Es decir, si esta ordenación ha sido obtenida de gente distinta, no hay por que esperar alguna consistencia. Por ejemplo, se puede notar una inconsistencia entre las comparaciones (3), (6), (2) y (5). La comparación (3) dice que F es inferior a L; sin embargo las comparaciones (6), (2) y (5) sugieren que L es inferior a F. Se sospecha que las preferencias de los consumidores se ven afectadas por cuatro características: costo, peso, longitud y mpg. Estas características para los cinco automóviles se encuentran referidas en la siguiente lista:

AUTOMOVIL NO.	COSTO (1 000s)	PESO (1 000s)	LONGITUD (pies)	MPG
B	9	4	15	17
C	6	3	13	21
F	7	2.8	13.5	20
L	10	4.2	15.5	16
M	8	3.9	14	18

¿Puede desarrollar una fórmula basada en estas características tal que valores altos para un automóvil tienda a ser más preferido que uno de valor más bajo? Esta fórmula debe ayudar en la identificación de la importancia relativa de las varias características. En seguida se da una forma para desarrollar una fórmula que tenga estas características.

Se define:

e_{ij} = valor de la característica j para el automóvil i,

x_j = peso que se dará a la característica jpor ejemplo,el automóvil L recibirá una calificación de $x_1e_{i1} + x_2e_{i2} +..+ x_4e_{i4}$

Se desea escojer las x_j's de modo que el valor que resulte concuerde tanto como sea posible con las ocho relaciones de preferencia dadas previamente. Se dice que la calificación concuerda con la primera relación, por ejemplo, si el automovil L recibe un valor mayor al del automóvil C; y concuerda con la última si el automóvil F recibe un valor mayor al automóvil B. Si la calificación no concuerda con el k-ésimo ordenamiento, k = 1,2,...,8, sea z_k = a la diferencia entre los dos calificación. Así, z_k es el error en la calificación en la k-ésima preferencia.

Un objetivo razonable es:

$$\text{Min} \quad z_1 + z_2 + \dots + z_8$$

Suponga que el carro F es preferido al carro L en la k-ésima preferencia; entonces la siguiente restricción debe causar que z_i tome un valor apropiado:

$$(e_{F1} - e_{L1})x_1 + (e_{F2} - e_{L2})x_2 + \dots + (e_{F4} - e_{L4})x_4 + z_k \geq 0.$$

El lado izquierdo de esta restricción es la calificación de F menos la calificación de L + z_k. Usando ellado derecho igual a cero, unicamente se forza a que el calificaciöön de F sea al menos igual al de L; esto no forza a que el calificación de F sea mayor al de L. Si esto se desea, entonces el cero puede remplazarse por un número positivo pequeño, es decir, .001. Esto se ilustra en el ejemplo posterior.

Se necesita una restricción "normalizada" para prohibir la solución poco útil $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. La normalización más simple es $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$. Esto, sin embargo, ignora el hecho que varias características tienen distintas unidades, es decir, mpg puede estar en el rango 10 a 40 mientras que el costo puede estar en un rango mucho mayor de 2000 a 20000. Así, probablemente se desea usar diferentes pesos en las x's. Una normalización pesada razonable es:

$$\sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{8} (e_{rj} - e_{sj}) x_j = 1.$$

Dese cuenta que las x_j son no restringidas en signo; por lo tanto, en la formulación P.L. las x_j's se reemplazan por la diferencia $x_j - y_j$. La formulación completa y la MATRIZ para el ejemplo viene dada por:

```
MIN     Z1 + Z2 + Z3 + Z4 + Z5 + Z6 + Z7 + Z8
SUBJECT TO
  2) Z1 + 4 X1 - 4 Y1 + 1.2 X2 - 1.2 Y2 + 2.5 X3 - 2.5  Y3
     - 5 X4 + 5 Y4 >=   0
  3) Z2 + X1 - Y1 + .1 X2 - .1 Y2 + X3 - Y3 - X4 - Y4 >= 0
  4) Z3 + 3 X1 - 3 Y1 + 1.4 X2 - 1.4 Y2 + 2 X3 - 2 Y3
      - 4 X4 + 4 Y4 >=   0
  5) Z4 - X1 + Y1 + .2 X2 - .2 Y2 - .5 X3 + .5 Y3 + X4
      - Y4 >=   0
  6) Z5 - 2 X1 + 2 Y1 - 1.2 X2 + 1.2 Y2 - 1.5 X3 + 1.5 Y3
     + 3 X4 - 3 Y4 >=   0
  7) Z6 - 2 X1 + 2 Y1 - .3 X2 + .3 Y2 - 1.5 X3 + 1.5 Y3
     + 2 X4 - 2 Y4 >=   0
  8) Z7 - 2 X1 + 2 Y1 - .9 X2 + .9 Y2 - X3 + Y3 + 3 X4
     - 3 Y4 >=   0
  9) Z8 - X1 + Y1 - 1.1 X2 + 1.1 Y2 - .5 X3 + .5 Y3
     + 2 X4 - 2 Y4 >=   0
 10) - .6 X2 + .6 Y2 + .5 X3 - .5 Y3 + 3 X4 - 3 Y4 =  1
END
```

```
MATRIZ
      Z Z Z Z Z Z Z Z X Y X Y X Y X Y
      1 2 3 4 5 6 7 8 1 1 2 2 3 3 4 4

  1:  1 1 1 1 1 1 1 1                 MIN
  2:  1               4-4 A-A A-A-5 5 >
  3:    1             1-1 U-U 1-1-1-1 >
  4:      1           3-3 A-A 2-2-4 4 >
  5:        1        -1 1 T-T-T T 1-1 >
  6:          1      -2 2-A A-A A 3-3 >
  7:            1    -2 2-T T-A A 2-2 >
  8:              1  -2 2-T T-1 1 3-3 >
  9:                1-1 1-A A-T T 2-2 >
 10:                     -T T T-T 3-3 = 1
```

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 6

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) .769230700E-01

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
Z1	.000000	.576923
Z2	.000000	.307692
Z3	.000000	1.000000
Z4	.000000	1.000000
Z5	.000000	.807692
Z6	.076923	.000000
Z7	.000000	1.000000
Z8	.000000	1.000000
X1	.461538	.000000
Y1	.000000	.000000
X2	.384615	.000000
Y2	.000000	.000000
X3	.000000	.000000
Y3	.076923	.000000
X4	.423077	.000000
Y4	.000000	1.384615

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	.000000	-.423077
3)	.000000	-.692308
4)	.076923	.000000
5)	.076923	.000000
6)	.000000	-.192308
7)	.000000	-1.000000
8)	.076923	.000000
9)	.000000	.000000
10)	.000000	-.076923

NO. ITERATIONS= 6

La implicación del reporte es que la fórmula de la calificación para un automóvil debe ser (para el caso de cero del lado derecho de las restricciones 2 a 9):

Calificación=.461538 Costo + .384615 Peso - .076923 longitud + .423077 MPG.

Mientras que la förmula con un RHS de 0.001 para las restricciones (2)-(9) es:

Calificación=.461385 Costo + .381154 Peso - .076231 longitud + .422269 MPG.

Las calificaciones resultantes para los cinco automóviles son:

AUTOMOVIL	11.73077	CALIFICACION (RHS = 0.001)
B	11.73077	11.71219
C	11.80769	11.78842
F	11.73077	11.71319
L	11.80769	11.78942
M	11.73077	11.71119

Observe que las calificaciones están en el orden correcto para las ocho referencias excepto para la seis, "M es preferido a L."

BONDAD DEL AJUSTE ORDINAL

Si z es el valor óptimo en la función objetivo, n el número de observaciones de preferencia y k el número de parámetros estimados por la regresión ordinal, entonces una medida de la bondad de ajuste, análoga a la R^2 ajustada de la regresión en mínimos cuadrados, es:

$1/[1 + z/(n - k)]$.

Para nuestro ejemplo la bondad de ajuste es:

$1/[1 + .0769/(8 - 4)] = .981$.

USO DEL DUAL PARA REDUCIR EL TAMAÑO DEL PROBLEMA

Como en las otras formulaciones de P.L., el dual tiende a facilitar la solución. La formulación general del primal se dará abajo. En lo que sigue, r es el objeto preferido al objeto s en la i-ésima preferencia:

$$\text{Min} \quad z_1 + z_2 + \ldots + z_8$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{k} (e_{rj} - e_{sj})x_j + z_i \geq 0 \quad \text{donde } r \text{ es preferido a } s \text{ en la } i\text{-ésima observación, } i=1,2,..n,$$

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} (e_{rj} - e_{sj})x_j = 1.$$

x_j no restringida en signo.

El dual es:

$$\text{Max} \quad u$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{n} (e_{rj} - e_{sj})v_i + \sum_{i=1}^{n} (e_{rj} - e_{sj})u = 0 \quad \text{para } j = 1, 2,..,k$$

$$v_i \leq 1 \qquad i = 1, 2,...,n$$

u no restringida en signo

Esta formulación tiene más restricciones, sin embargo, la mayoría de ellas, n de las n + k, son simplemente una cota superior. La formulación dual para el problema ejemplo es la siguiente. Note que la variable no restringida u se reemplaza por la diferencia $u_1 - u_2$.

```
  MAX      U1 - U2
  SUBJECT TO
 2)    4 V1 + V2 + 3 V3 - V4 - 2 V5 - 2 V6 - 2 V7 - V8 =  0
 3) -.6 U1 + .6 U2 + 1.2 V1 + .1 V2 + 1.4 V3 + .2 V4 - 1.2 V5
     - .3 V6 - .9 V7 - 1.1 V8 =     0
 4)    .5 U1 - .5 U2 + 2.5 V1 + V2 + 2 V3 - .5 V4 - 1.5 V5
     - 1.5 V6 - V7 - .5 V8 =     0
 5)    3 U1 - 3 U2 - 5 V1 - V2 - 4 V3 + V4 + 3 V5 + 2 V6
       + 3 V7 + 2 V8 =     0
 6)    V1 <=    1
 7)    V2 <=    1
 8)    V3 <=    1
 9)    V4 <=    1
10)    V5 <=    1
11)    V6 <=    1
12)    V7 <=    1
13)    V8 <=    1
 END
```

Es útil comparar la MATRIZ de esta formulación con la del primal.

```
MATRIZ
          U U V V V V V V V V
          1 2 1 2 3 4 5 6 7 8

     1:   1-1                  MAX
     2:       4 1 3-1-2-2-2-1 =
     3:  -T T A U A T A T T A =
     4:   T-T A 1 2-T-A-A-1-T =
     5:   3-3-5-1-4 1 3 2 3 2 =
     6:       1               < 1
     7:         1             < 1
     8:           1           < 1
     9:             1         < 1
    10:               1       < 1
    11:                 1     < 1
    12:                   1   < 1
    13:                     1 < 1
```

La solución del dual es:

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 6

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) .769230700E-01

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
U1	.076923	.000000
U2	.000000	.000000
V1	.423077	.000000
V2	.692308	.000000
V3	.000000	.076923
V4	.000000	.076923
V5	.192308	.000000
V6	1.000000	.000000
V7	.000000	.076923
V8	.000000	.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	.000000	.461538
3)	.000000	.384615
4)	.000000	-.076923
5)	.000000	.423077
6)	.576923	.000000
7)	.307692	.000000
8)	1.000000	.000000
9)	1.000000	.000000

10)	.807692	.000000
11)	.000000	.076923
12)	1.000000	.000000
13)	1.000000	.000000

NO. ITERATIONS= 6

Note que se llevaron seis iteraciones comparado con siete del primal. Las variables duales en la restricciones (2)-(5) dan los valores para las variables x_J de la formulación primal. La fórmula del calificación es otra vez:

Calificación =.461538 Costo + .384615 Peso - .076923 longitud + .423077 MPG.

Para mayor información de la regresión lineal ordinal, vea Srinivasan (1975).

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- En un modelo de regresión lineal simple la i-ésima observación se escribe en la forma:

$$r_i = a + b s_i + e_i$$

donde r_i, s_i, e_i son respectivamente la variable dependiente, la variable explicatoria, y el término de error. Qué modelo de regresión LAD, LMAX, o mínimos cuadrados es el más apropiado si la e_i tiene distribución normal ?

2.- Considere los siguientes datos en un problema de regresión multiple:

r	s	t
7	3	12
10	4	11
11	7	9
13	8	8

Formular y resolver un modelo de programación lineal para la regresión de la variable dependiente r sobre las dos variables explicatorias s, t usando: LMAX y LAD.

II.11. EQUILIBRIO ECONOMICO

Si alguien está modelando una economía compuesta de dos o más individuos, cada uno actuando en su propio beneficio, no existe una función objetivo común que pueda maximizarse. Roughly dice, una solución o punto de equilibrio para un modelo económico es un conjunto de precios, de igual forma que cuando se tiene abastecimiento igual a la demanda de cada producto.

La metodología ha ser descrita al respecto, es el método de equilibrio usado en el sistema de evaluación de proyectos independientes (Proyect Independence Evaluation System; PIES), modelo desarrollado por el departamento de energía de los Estados Unidos. Este modelo y sus versiones posteriores fueron ampliamente usados de 1974 en adelante para evaluar el efecto de varias políticas sobre energía.

Considérese el siguiente ejemplo. Existe un productor A y un consumidor X, los cuales tienen los siguientes itinerarios de abastecimiento y demanda para un solo producto (p.ej.energía).

PRODUCTOR A		CONSUMIDOR X	
Precio de mercado por unidad	cantidad dispuesta a vender	Precio de mercado	Cantidad dispuesta a comprar
\$ 1	2	\$ 9	2
2	4	4.5	4
3	6	3	6
4	8	2.25	8

Por ejemplo, si el precio es menor a \$ 2 pero mayor que \$ 1, entonces el productor estará produciendo 2 unidades; no obstante, el consumidor podría preferir comprar al menos 8 unidades a ese precio. Por inspección , nótese que el precio de equilibrio es de \$3 y cualquier cantidad de 4 a 6 satisface el equilibrio.

Es fácil encontrar el equilibrio en este mercado utilizando el método de inspección; sin embargo, resulta útil examinar la formulación del modelo de programación lineal (MPL) que podría usarse para para este mismo fin.

Si bien existe un precio real de mercado el cual es útil para interpretar el programa de abastecimientos como si el proveedor estuviese dispuesto a vender las primeras dos unidades a \$ 1, las siguientes dos unidades a \$ 2 cada una, etc. De manera similar, el consumidor está dispuesto a pagar \$ 9 por cada una de las primeras unidades, \$4.5 por las siguientes dos unidades, etc. .Para encontrar el precio real de mercado , de manera que la cantidad producida sea igual a la cantidad consumida , se supone que existe un " corredor " el cual actualmente compra y vende a estos precios marginales y todas las transacciones pasan a traves de él .El corredor maximiza sus utilidades. además, continuará incrementando la cantidad de bienes transferidos tanto tiempo como pueda vender a un precio mayor que su precio de compra. En el punto óptimo del corredor, la cantidad comprada es igual a la cantidad vendida y el precio ofrecido por los compradores es igual al precio demandado por los vendedores. Esto satisface las condiciones de equilibrio de mercado. Gráficamente esta situación se muestra a continuación.

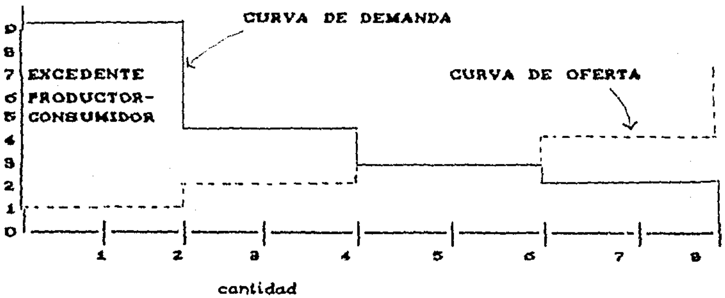


FIGURA 1 CURVAS DE OFERTA Y DEMANDA

El área marcada "excedente productor-consumidor" es el beneficio obtenido por un corredor o agente intermediario hipotético. En realidad, este beneficio es distribuido entre el productor y el consumidor de acuerdo al precio de equilibrio. En el caso donde el precio de equilibrio sea de $ 3, el beneficio del consumidor o utilidad, es la porción del área de excedencias productor-consumidor sobre los $ 3 en la línea horizontal, mientras que el beneficio del productor es la porción por abajo de la línea horizontal de los $ 3 de la misma área de excedencias productor-consumidor.

Los lectores con una inclinación matemática, pueden notar que el enfoque general que se está usando se basa en el hecho de que en la mayor parte de los problemas en donde se trata de encontrar un equilibrio, se puede formular una función objetivo , la cual, cuando se optimiza,produce una solución que satisface las condiciones de equilibrio.

Para los propósitos de formulación del modelo de programación lineal se define:

A1 = unidades vendidas por el productor a \$ 1 por unidad
A2 = " \$ 2 " "
A3 = " \$ 3 " "
A4 = " \$ 4 " "
X1 = unidades compradas por el consumidor a \$ 9 por unidad
X2 = " " \$ 4.5 "
X3 = " " \$3 "
X4 = " " \$ 2.25 "

La formulación es:

MAX (Z) = 9X1 + 4.5X2 + 3X3 + 225X4 - A1 - 2A2 - 3A3 -4A4
(maximizar el ingreso del agente menos el costo)

s.a. A1 + A2 + A3 + A4 - X1 - X2 - X3 - X4 = 0
(oferta igual a demanda)

A1<=2 A2<=2 A3<=2 A4<=2
(pasos en las funciones de oferta y demanda)

La solución es: A1=A2=X1=X2=2 A3=A4=X3=X4=0

El precio dual en la primera restricción es \$ 3 . En general, el precio dual sobre la restricción que hace que la oferta sea igual a la demanda es el precio real de mercado. Ahora compliquemos el problema introduciendo otro proveedor B y otro consumidor Y. Las curvas de oferta y demanda son, respectivamente:

PRODUCTOR B		CONSUMIDOR Y	
precio de - mercado por unidad	cantidad dispuesta a vender	precio de- mercado por unidad	cantidad dispuesta a comprar
2	2	15	2
4	4	8	4
6	6	5	6
8	8	3	8

Una complicación adicional es que cuesta \$ 1.5 por unidad enviada de A a Y, y \$ 2 por unidad enviada de B a X. Cuál será el precio real de mercado si se consideran A, B, X y Y? Cuánto comprará o venderá cada participante?

El modelo de programación lineal correspondiente puede desarrollarse si definimos B1,B2,B3,B4,Y1,Y2,Y3 y Y4 analogamente a A1,X1, etc.. También definimos AX,AY,BX y BY como el número de unidades enviadas de A a X, A a Y, B a X, y B a Y, respectivamente. La formulación del modelo es:

$$MAX(Z)= 9X1+4.5X2+3X3+2.25X4+15Y1+8Y2+5Y3+3Y4-2BX-$$
$$-1.5AY-A1-2A2-3A3-4A4-2B1-4B2-6B3-8B4$$

s.a.

2) $-AY + A1 + A2 + A3 + A4 - AX = 0$ (cantidad enviada de A)

3) $-BX + B1 + B2 + B3 + B4 - BY = 0$ (cantidad enviada de B)

4) $-X1 -X2 - X3 -X4 +BX +AX = 0$ (cantidad enviada hacia X)

5) $-Y1 -Y2 - Y3 -Y4 +AY +BY = 0$ (cantidad enviada hacia Y)

6) $A1<=2$

7) $A2<=2$

8) $A3<=2$

9) $A4<=2$

10) $B1<=2$

11) $B2<=2$

12) $B3<=2$

13) $B4<=2$

14) $X1<=2$

15) $X2<=2$

16) $X3<=2$

17) $X4<=2$

18) $Y1<=2$

19) $Y2<=2$

20) $Y3<=2$

21) $Y4<=2$

De la función objetivo puede notarse que el corredor cobra $ 2 por unidad enviada de B a X, y $ 1.5 por unidad enviada de a Y. La mayoría de las restricciones indican simplemente una cota superior. En problemas reales, muchas de las restricciones de este tipo puden tolerarse sin que ello afecte la dificultad en la computación.

La solución es:

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO

1) 56.0000000

VARIABLE	VALOR	COSTO REDUCIDO
X1	2.000000	0.000000
X2	2.000000	0.000000
X3	0.000000	0.500000
X4	0.000000	1.250000
Y1	2.000000	0.000000
Y2	2.000000	0.000000
Y3	2.000000	0.000000
Y4	0.000000	2.000000
BX	0.000000	3.500000
AY	2.000000	0.000000
A1	2.000000	0.000000
A2	2.000000	0.000000
A3	2.000000	0.000000
A4	0.000000	0.500000
B1	2.000000	0.000000
B2	2.000000	0.000000
B3	0.000000	1.000000
B4	0.000000	3.000000
AX	4.000000	0.000000
BY	4.000000	0.000000

FILA	HOLGURA	PRECIOS DUALES
2)	0.000000	- 3.500000
3)	0.000000	- 5.000000
4)	0.000000	- 3.500000
5)	0.000000	- 5.000000
6)	0.000000	2.500000
7)	0.000000	1.500000
8)	0.000000	0.500000
9)	2.000000	3.000000

10)	0.000000	1.000000
11)	0.000000	0.000000
12)	2.000000	0.000000
13)	2.000000	0.000000
14)	0.000000	5.500000
15)	0.000000	1.000000
16)	2.000000	0.000000
17)	2.000000	0.000000
18)	0.000000	10.000000
19)	0.000000	3.000000
20)	0.000000	0.000000
21)	2.000000	0.000000

De los precios duales de las filas 2 a 5 se puede notar que los precios en el punto de envío de A,B,X y Y son $ 3.5, $ 5, $ 3.5 y $ 5, respectivamente. A estos precios , A y B,están dispuestos a producir 6 y 4 unidades, respectivamente, mientras que X y Y están dispuestos a comprar 4 y 6 unidades, respectivamente. A envía 4 unidades hacia X, donde el $ 1.5 de cargo adicional hace que se vendan a $ 5. A envía 4 unidades a X a un precio de venta de $3.5. B envía 4 unidades a Y a un precio de venta de $5.

SUBASTAS COMO EQUILIBRIO ECONOMICO

El concepto de un corredor que maximiza la utilidad productor-consumidor puede también aplicarse a las subastas. La programación lineal es útil si la subasta secomplica por características que pueden interpretarse como postores con curvas de demanda. El ejemplo aqui presentado se basa en el diseño de R.L. Graves para el sistema de registro- asignatura en la Universidad de Chicago en la cual los estudiantes ofertan sobre las asignaturas.

Suponga que hay N tipos de objetos ha ser vendidos (ej.cursos), y existen M postores (estudiantes). El postor "i" está dispuesto a pagar hasta bij, bij>=0 para una unidad del objeto de tipo "j". Además, un postor está interesado en a lo mucho una unidad de cada tipo de objeto. Sea "Sj" el número de unidades del objeto de tipo "j" disponible para la venta.

Existe una variedad de maneras para celebrar la subasta. Supongamos que es una subasta a oferta cerrada y que se quiere encontrar el precio real en el mercado, "pj", para cada objeto tipo "j", tal que:

a.- a lo más Sj unidades del objeto "j" son vendidas

b.- cualquier oferta para "j" menor que pj no se considera

c.- pj = 0 si menos de Sj unidades del objeto "j" son vendidas

d.- cualquier oferta para el objeto "j" mayor que pj compra una unidad.

Es fácil determinar los precios de equilibrio "pj", simplemente clasificando las ofertas de tal forma que para cada unidad se tenga el primer postor más alto. Sin embargo, para preparar subastas mas complicadas, consideremos como resolver esta dificultad como un problema de optimización. Nuevamente retomamos la visión del corredor que vende lo más caro posible (comprando lo más barato) y maximiza sus utilidades.

Definiendo:

Xij = 1 si el postor "i" compra una cantidad del objeto j; cero en otro caso.

El programa lineal es:

$$MAX\ Z = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} X_{ij}\, b_{ij}$$

$$s.a \qquad \sum_{i=1}^{M} X_{ij} <= S_j \qquad \text{para } j = 1 \text{ hasta } N$$

$$X_{ij} <= 1 \qquad \forall\ i\ y\ j$$

Los precios duales de las primeras N restricciones pueden ser usados, con una modificación mínima,como los precios reales pj. Las posibles modificaciones deben hacerse tomando en cuenta que, con las funciones escalonadas de las curvas de demanda y/o oferta, existe un pequeño rango de precios reales que son aceptables. La solución del problema lineal podrá escoger un precio situado en este rango, generalmente en la parte final de este. Uno puede desear escoger un precio dentro de este rango para romper cualquier posibilidad de "empate".

Ahora complicamos esta subasta ligeramente, agregando la condición de que ningún postor quiere comprar más de tres unidades en total. Considérese la situación específica que se presenta a continuación.

Precio máximo al que se esta dispuesto a pagar

		OBJETOS				
		1	2	3	4	5
	1	9	2	8	6	3
POSTORES	2	6	7	9	1	5
	3	7	8	6	3	4
	4	5	4	3	2	1
		1	2	3	3	4
		CAPACIDAD				

Por ejemplo, el postor 3 está dispuesto a pagar hasta 4, por una unidad del objeto 5. Existen sólo 3 unidades del objeto 4 disponibles a la venta.

Se quiere encontrar un "precio real" de mercado para cada objeto y una ubicación de unidades para los postores, de manera que, cada postor está dispuesto a aceptar las unidades otorgadas a él, al "precio real" de mercado.

Se puede generalizar la condición previa (d) por la condición (d'): un postor está satisfecho con una unidad en particular si no puede encontrar otra con una diferencia mayor entre su máximo precio de oferta y el precio real de mercado.

Lo anterior es equivalente a decir que cada postor maximiza su ganancia como consumidor.

El problema lineal asociado es:

$MAX(Z)=$

$$= 9X_{11} + 2X_{12} + 8X_{13} + 6X_{14} + 3X_{15} + 6X_{21} + 7X_{22} + 9X_{23} +$$

$$+ X_{24} + 5X_{25} + 7X_{31} + 8X_{32} + 6X_{33} + 3X_{34} + 4X_{35} + 5X_{41} +$$

$$+ 4X_{42} + 3X_{43} + 2X_{44} + X_{45}$$

s.a. 2) $X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} <=1$ (u. disponibles del obj. 1)

3) $X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} <=2$ (u. disponibles del obj. 2)

4) $X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} <=3$ (u. disponibles del obj. 3)

5) $X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} <=3$ (u. disponibles del obj. 4)

6) $X_{15} + X_{25} + X_{35} + X_{45} <=4$ (u. disponibles del obj. 5)

7) $X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} <= 3$(demanda comprador 1)

8) $X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} <= 3$.

9) $X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} <= 3$.

10) $X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} + X_{45} <= 3$(demanda comprador 4)

11) $X_{11} <= 1$ (cada comprador quiere a lo más una

12) $X_{21} <= 1$ unidad de cada objeto)

13) $X_{31} <= 1$

14) $X_{41} <= 1$

15) $X_{12} <= 1$

16) $X_{22} <= 1$

17) $X_{32} <= 1$

18) $X_{42} <= 1$

19) $X_{13} <= 1$

20) $X_{23} <= 1$

21) $X_{33} <= 1$

22) $X_{43} <= 1$

23) $X_{14} <= 1$

24) $X_{24} <= 1$

25) $X_{34} <= 1$

26) $X_{44} <= 1$

27) $X_{15} <= 1$

28) $X_{25} <= 1$

29) $X_{35} <= 1$

30) $X_{45} <= 1$

La solucion es:

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO

1) 65.0000000

VARIABLE	VALOR	COSTO REDUCIDO
X_{11}	1.000000	0.000000
X_{12}	0.000000	7.000000
X_{13}	1.000000	0.000000
X_{14}	1.000000	0.000000

X_{15}	0.000000	1.000000
X_{21}	0.000000	1.000000
X_{22}	1.000000	0.000000
X_{23}	1.000000	0.000000
X_{24}	0.000000	1.000000
X_{25}	1.000000	0.000000
X_{31}	0.000000	1.000000
X_{32}	1.000000	0.000000
X_{33}	1.000000	0.000000
X_{34}	0.000000	0.000000
X_{35}	1.000000	0.000000
X_{41}	0.000000	0.000000
X_{42}	0.000000	1.000000
X_{43}	0.000000	0.000000
X_{44}	1.000000	0.000000
X_{45}	1.000000	0.000000

FILA	HOLGURA	PRECIOS DUALUES
2)	0.000000	5.000000
3)	0.000000	5.000000
4)	0.000000	3.000000
5)	1.000000	0.000000
6)	1.000000	0.000000
7)	0.000000	4.000000
8)	0.000000	2.000000
9)	0.000000	3.000000
10)	1.000000	0.000000
11)	0.000000	0.000000
12)	1.000000	0.000000
13)	1.000000	0.000000
14)	1.000000	0.000000
15)	1.000000	0.000000
16)	0.000000	0.000000
17)	0.000000	0.000000

18)	1.000000	0.000000
19)	0.000000	1.000000
20)	0.000000	4.000000
21)	0.000000	0.000000
22)	1.000000	0.000000
23)	0.000000	2.000000
24)	1.000000	0.000000
25)	1.000000	0.000000
26)	0.000000	2.000000
27)	1.000000	0.000000
28)	0.000000	3.000000
29)	0.000000	1.000000
30)	0.000000	1.000000

Los precios duales en las primeras cinco restricciones esencialmente nos dan los precios reales de mercado. Para evitar empates se puede añadir o quitar un número pequeño de cada uno de estos precios. Se pretende que los precios reales aceptables en el mercado para los objetos 1,2,3,4 y 5 sean 5,5,3,0 y 0, respectivamente.

Nótese que a estos precios el mercado se clarifica. Al postor 1 se le asigna una unidad del objeto 1 a un precio de 5.00. Si el precio fuese menor, el postor 4 podría reclamar esa unidad. Si el precio fuese mayor que 6, entonces la utilidad del postor 1 con el objeto 1 podría ser menor que 9 - 6 = 3 , y , por consiguiente, el podría preferir el objeto 5 en lugar del 1, donde su utilidad es 3 - 0 = 3. Si el precio del objeto 2 fuése menor que 4, entonces el postor 4 podría reclamar la unidad.Si el precio resulta mayor que 5,entonces el postor 3 podría preferir dejar su objeto 2 (con utilidad 8-5=3) y tomar el tipo 4,el cual tiene una ganancia de 3 - 0 = 3. Argumentos similares se utilizan en los objetos 3,4 y 5.

EQUILIBRIO EN EL TRANSPORTE

Cuando se esta diseñando una carretera o una calle, los ingenieros en tráfico usualmente utilizan modelos de cierta sofisticación para tratar de predecir el volumen del tráfico y el tiempo esperado de recorrido en cada enlace del sistema. Para cada enlace,los ingenieros especifican el promedio esperado de recorrido como una función (no decreciente) del volumen de tráfico en el enlace.

La determinación del volumen en cada enlace se basa por lo general sobre la regla llamada principio de Wardrup. Si un conjunto de usuarios desea viajar de A a B, ellos tomarán la ruta más corta en el sentido del tiempo de viaje. El efecto de esto es que si existen dos rutas alternas de A a B, los usuarios se distribuirán sobre esas dos rutas si los tiempos de viaje son iguales; de otra forma ningún usuario tomará la alternativa de mayor longitud de tiempo.

Como ejemplo considérese la red mostrada en la figura 2. Seis unidades de tráfico (p.ej. en miles de coches) quieren llegar de A a B. El tiempo de recorrido de cualquier enlace,como una función de volumen de tráfico, está dado en la tab a 1.La diferencia entre las funciones para los diferentes enlaces puede deberse a ciertas características tales como, que el enlace tenga semáforos o señalamientos.

El porcentaje en el cual el tiempo de recorrido sobre los enlaces se incrementa con el volumen , depende en forma crítica de parámetros tales como: número de semáforos contra número de señales de alto. Interesa el hecho de cómo se podrá distribuir el tráfico sobre tres posibles rutas ABC, ACD, Y ABCD, si cada unidad se comporta optimamente de manera individual. Esto es, queremos encontrar los flujos para los cuales un usuario es indiferente entre las tres rutas.

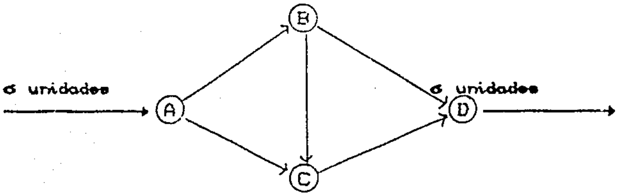


Fig. 16.2 Una Red de Transporte

TABLA 1

Para todos los volumnes de tráfico menores o -- iguales a:	Tiempo de recorrido en el enlace (minutos)				
	AB	AC	BC	BD	CD
2	20	52	12	52	20
3	30	53	13	53	30
4	40	54	14	54	40

Este problema puede formularse como un programa lineal análogo a los problemas de equilibrio, vistos al principio de este capítulo, si los 5 itinerarios de recorrido se interpretan como curvas de oferta.

Definir las variables como sigue. Dos literales (variables) p. ej. AB o CD, denotan el flujo total sobre el arco dado, por ejemplo en el arco AB o CD. Variables con un subíndice denotan el incremento de flujo sobre el enlace, p.ej. AB_2 mide el flujo hasta de 2 unidades sobre el enlace AB; AB_3 mide el incremento de flujo arriba de 2 pero menor a 3.

La formulación es entonces:

$$MIN(Z) = 20\ AB_2 + 30\ AB_3 + 40\ AB_4 + 52\ AC_2 + 53\ AC_3 + 54\ AC_4 + 12\ BC_2 + 13\ BC_3 + 14\ BC_4 + 52\ BD_2 + 53 BD_3 + 54\ BD_4 + 20\ CD_2 + 30\ CD_3 + 40\ CD_4$$

s.a.

2) $- AB_2 - AB_3 - AB_4 + AB = 0$ (definición de AB)

3) $- AC_2 - AC_3 - AC_4 + AC = 0$ (definición de AC)

4) $- BC_2 - BC_3 - BC_4 + BC = 0$ (definición de BC)

5) $- BD_2 - BD_3 - BD_4 + BD = 0$ (definición de BD)

6) $- CD_2 - CD_3 - CD_4 + CD = 0$ (definición de CD)

7) $AB + AC = 6$ (flujo fuera de A)

8) $AB - BC - BD = 0$ (flujo a través de B)

9) $AC + BC - CD = 0$ (flujo a través de C)

10) $BD + CD = 6$ (flujo dentro de D)

11) $AB_2 <= 2$ (definición de los pasos en el itinerario de la

12) $AB_3 <= 1$ curva de oferta)

13) $AB_4 <= 1$

14) $AC_2 <= 2$

15) $AC_3 <= 1$

16) $AC_4 <= 1$

17) $BC_2 <= 2$

18) $BC_3 <= 1$

19) $BC_4 <= 1$

20) BD_2 <= 2

21) BD_3 <= 1

22) BD_4 <= 1

23) CD_2 <= 2

24) CD_3 <= 1

25) CD_4 <= 1

fin

La solución es:

1) 452.0000000

VARIABLE	VALOR	COSTO REDUCIDO
AB_2	2.000000	0.000000
AB_3	1.000000	0.000000
AB_4	1.000000	0.000000
AC_2	2.000000	0.000000
AC_3	0.000000	1.000000
AC_4	0.000000	2.000000
BC_2	2.000000	0.000000
BC_3	0.000000	1.000000
BC_4	0.000000	2.000000
BD_2	2.000000	0.000000
BD_3	0.000000	1.000000
BD_4	0.000000	2.000000
CD_2	2.000000	0.000000
CD_3	1.000000	0.000000
CD_4	1.000000	0.000000
AB	4.000000	0.000000
AC	2.000000	0.000000
BC	2.000000	0.000000
BD	2.000000	0.000000
CD	4.000000	0.000000

FILA	HOLGURA	PRECIOS DUALES

2)	0.000000	40.000000
3)	0.000000	52.000000
4)	0.000000	12.000000
5)	0.000000	52.000000
6)	0.000000	40.000000
7)	0.000000	-92.000000
8)	0.000000	52.000000
9)	0.000000	40.000000
10)	0.000000	0.000000
11)	0.000000	20.000000
12)	0.000000	12.000000
13)	0.000000	0.000000
14)	0.000000	0.000000
15)	1.000000	0.000000
16)	1.000000	0.000000
17)	0.000000	0.000000
18)	1.000000	0.000000
19)	1.000000	0.000000
20)	0.000000	0.000000
21)	1.000000	0.000000
22)	1.000000	0.000000
23)	0.000000	20.000000
24)	0.000000	10.000000
25)	0.000000	0.000000

Nótese que dos unidades de tráfico toman cada una de las tres rutas posibles: ABD, ABCD y ACD. El tiempo de recorrido en cada ruta es de 92 minutos. Esto concuerda con nuestro supuesto de equilibrio, esto es, ningún usuario es motivado a tomar una ruta diferente.

Hay que darse cuenta que el valor de la función objetivo no tiene interpretación práctica para esta propuesta. En este caso la función objetivo es simplemente un artificio para lograr que el principio de Wardrup se cumpla, cuando la función objetivo se optimiza.

La solución aproximada basada en la formulación de un problema de equilibrio de tráfico como un problema lineal fué presentada principalmente por razones de tipo didáctico. Para el estudio de problemas reales existen procedimientos altamente especializados, Florian (1977).

Se podrá ver que para este problema, la solución presentada anteriormente no minimiza el tiempo de recorrido total. Para minimizar este tiempo, es de utilidad preparar una tabla del tiempo de viaje total en el que incurren los usuarios de un enlace, como una función del volumen de tráfico del mismo. La tabla 2 se refiere a lo anterior.

TABLA 2

TIEMPO DE RECORRIDO TOTAL E INCREMENTAL SOBRE EL ENLACE

	AB		AC		BC		BD		CD	
VOL. DE TRAF.	TOT.	TASA POR UNID	TOT.	TASA POR UNID	TOT.	TASA POR UNID	TOT.	TASA POR UNID.	TOT.	TASA POR UNID
2	40	20	104	52	24	12	104	52	40	20
3	90	50	159	55	39	15	159	55	90	50
4	160	70	216	57	56	17	216	57	160	70

La formulación apropiada del problema es:

MIN(Z)=

$$20AB_2 + 50AB_3 + 70AB_4 + 52AC_2 + 55AC_3 + 57AC_4 + 12BC_2 + 15BC_3 + 17BC_4 + 52BD_2 + 55BD_3 + 57BD_4 + 20CD_2 + 50CD_3 + 70CD_4$$

s.a

2) $-AB_2 - AB_3 - AB_4 + AB = 0$

3) $-AC_2 - AC_3 - AC_4 + AC = 0$

4) $-BC_2 - BC_3 - BC_4 + BC = 0$

5) $-BD_2 - BD_3 - BD_4 + BD = 0$

6) $-CD_2 - CD_3 - CD_4 + CD = 0$

7) $AB + AC = 6$

8) $AB - BC - BD = 0$

9) $AC + BC - CD = 0$

10) $BD + CD = 6$

11) $AB_2 <= 2$

12) $AB_3 <= 1$

13) $AB_4 <= 1$

14) $AC_2 <= 2$

15) $AC_3 <= 1$

16) $AC_4 <= 1$

17) $BC_2 <= 2$

18) $BC_3 <= 1$

19) $BC_4 <= 1$

20) $BD_2 <= 2$

21) $BD_3 <= 1$

22) $BD_4 <= 1$

23) $CD_2 <= 2$

24) $CD_3 <= 1$

25) $CD_4 <= 1$

La solución es:

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO

1) 498.0000000

VARIABLE	VALOR	COSTO REDUCIDO
AB_2	2.000000	0.000000
AB_3	1.000000	0.000000
AB_4	0.000000	20.000000
AC_2	2.000000	0.000000
AC_3	1.000000	0.000000
AC_4	0.000000	2.000000
BC_2	0.000000	0.000000
BC_3	0.000000	3.000000
BC_4	0.000000	5.000000
BD_2	2.000000	0.000000
BD_3	1.000000	0.000000
BD_4	0.000000	2.000000

CD_2	2.000000	0.000000
CD_3	1.000000	0.000000
CD_4	0.000000	20.000000
AB	3.000000	0.000000
AC	3.000000	0.000000
BC	0.000000	7.000000
BD	3.000000	0.000000
CD	3.000000	0.000000

FILA	HOLGURA	PRECIOS DUALES
2)	0.000000	50.000000
3)	0.000000	55.000000
4)	0.000000	12.000000
5)	0.000000	55.000000
6)	0.000000	50.000000
7)	0.000000	-105.000000
8)	0.000000	55.000000
9)	0.000000	50.000000
10)	0.000000	0.000000
11)	0.000000	30.000000
12)	0.000000	0.000000
13)	1.000000	0.000000
14)	0.000000	3.000000
15)	0.000000	0.000000
16)	1.000000	0.000000
17)	2.000000	0.000000
18)	1.000000	0.000000
19)	1.000000	0.000000
20)	0.000000	3.000000
21)	0.000000	0.000000
22)	1.000000	0.000000
23)	0.000000	30.000000
24)	0.000000	0.000000
25)	1.000000	0.000000

Un rasgo interesante es que ningún tráfico pasa por el enlace BC. Cada una de las tres unidades toman las rutas ABD y ACD. Aún más interesante es el hecho que el tiempo de recorrido en ambas rutas es de 83 minutos.Lo que es notablemente menorque 92 minutos que era el tiempo para la solución previa. Con esta formulación, la función objetivo mide el tiempo total de recorrido (498/6=83).

Si el enlace BC fuera quitado, esta última solución podría ser también un equilibrio para el usuario ya que ninguno podría ser motivado para cambiar sus rutas. Lo interesante de esta paradoja es que al adicionar capacidad, en este caso en el enlace BC, a una red de transporte , el retraso total puede incrementarse. Esto se conoce como la paradoja de Braess, cf. Braess (1968) o Murchland (1970)> Braess afirma haber observado esta paradoja en una ciudad alemana cuando un nuevo enlace fue añadido a la red carretera de esa ciudad. Cuando el tráfico empeoraba en vez de mejorar con un nuevo enlace, este era quitado.

Para ver el porqué de la ocurrencia de la paradoja, considérese lo que pasa cuando el enlace BC es añadido. Una de las tres unidades tomando la ruta ABD se da cuenta que el tiempo de recorrido en el enlace BC es de 12 y el tiempo en el enlace CD es 30. Este total de 42 minutos es mejor que los 53 minutos, la unidad padece en el enlace BD, entonces ésta reemplaza este enlace con la secuencia BCD. En este punto, una de las unidades que toma el enlace AC se da cuenta de que puede reducir su retraso de ir hacia C substituyendo el enlace AC (retraso de 53 minutos) con los dos enlaces AB y BC (retraso de 30 + 12 = 42). Desafortunadamente (y este es el caso de la paradoja de Braess) ninguna de estas unidades,las cuales cambiaron, tomaron en cuenta el efecto de sus acciones en el resto de los usuarios. Los cambios incrementan la carga en los enlaces AB y CD, dos enlaces para los cuales al incrementar el el volumen , se incrementa el tiempo de recorrido para todos.

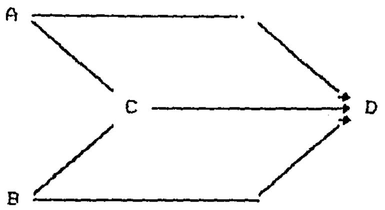
PROBLEMAS PROPUESTOS

Una organización está interesada en vender cinco parcelas, denotadas por A, B, C, D, y E. Para tal fin están dispuestos a aceptar ofertas que incluyan subconjuntos de las cinco parcelas. Tres compradores x, y, z están interesados en proponer sus ofertas. En la privacidad de sus respectivas oficinas cada comprador ha identificado el precio máximo que él estaría dispuesto a pagar por varias combinaciones. Esta información se resume en la siguiente tabla.

COMPRADOR	COMBINACION	PRECIO MAX.
x	A, B, D	95
x	C, D, E	80
y	B, E	60
y	A, D	82
z	B, D, E	90
z	C, E	71

Suponga que cada comprador quiere comprar a lo más combinación y que la organización es un gobierno que quiere maximizar el beneficio social. Cual sería una posible formulación, basada en Programación Lineal, para efectuar esta subasta ?

2.- Algunas unidades desean viajar desde los puntos A, B, y C al punto D, como lo muestra la siguiente red.



Tres unidades desean viajar desde A a D, dos unidades desde B y una unidad desde C. El tiempo de viaje sobre los enlaces como una función del volumen es:

Para todos los volúmenes ≤ a:	Tiempo de viaje en minutos AC	AD	BC	BD	CD
2	21	50	17	40	12
3	31	51	27	41	13
4	41	52	37	42	14

a- Establezca el modelo de programación lineal correspondiente al uso del Principio de Wardrup.
b- Establezca la formulación para determinar la minimización del tiempo de viaje total
c- Cuáles son ambas soluciones ?

II.12. PROGRAMACION ENTERA

En la mayor parte de las aplicaciones de la Programación Lineal realmente se preferiría que los valores de las variables de decisión fueran enteros. Algunas veces se puede tolerar que una solución recomendada sea, por ejemplo: que la General Motors produzca 1,534,326.37 autos Chevrolet y no se tendría ningún problema en recomendar el redondeo de la cifra anterior.

Sin embargo, si en un estudio diferente se recomienda que el número óptimo de aviones comerciales a construir sea de 1.37, entonces un sin número de gentes alrededor del mundo estaría interesado en como debía ser redondeado este número. Por lo tanto, resulta claro que la utilidad de muchos modelos de Programación Lineal (LP) pueden mejorarse marcadamente si se restringen las variables de decisión a que éstas tengan valores enteros.

Un uso frecuente de una variable entera, en un modelo, es que ésta tome valores ero/uno y que generalmente represente una decisión de hacer/no hacer.

Tipos de Programas Enteros.

Por razones computacionales es útil clasificar a los programas enteros en dos diferentes formas:

a) Programas enteros puros y mixtos. En un puramente entero, todas las variables se restringen a valores enteros, mientras que en una formulación mixta sólo ciertas variables son enteras, mientras que el resto pueden ser contínuas.

b) Programas 0/1. En muchas aplicaciones los únicos valores permitidos son 0/1.

Dificultad Computacional en los Programas Enteros

Los Programas Enteros pueden ser difíciles de resolver, en contraste con los problemas lineares en general. El tiempo de solución para un LP es justamente predecible. Para un LP el tiempo se incrementa, aproximadamente, proporcionalmente con el número de variables y aproximadamente con el cuadrado del número de restricciones. En cambio para un problema entero (IP), el tiempo puede, en efecto, disminuirse como el número de restricciones se incremente. Pero si el número de variables enteras se aumenta, el tiempo de solución puede incrementarse dramáticamente. Por decir algo, un problema de

60 restricciones con 60 variables puede ser extremadamente difícil de resolver.

Al igual que con los LP, puede también haber formulaciones alternativas para un IP. Sin embargo, el tiempo de solución generalmente depende, en forma crítica, de la formulación. Producir una buena formulación de un IP requiere destreza. Para muchos de los problemas, que se verán adelante, la diferencia entre una buena y mala formulación puede ser la diferencia entre si el problema se puede resolver o no.

Restricciones para establecer el Tamaño Mínimo de un Lote.

Cuando existen substanciales economias de escala en la actividad de una empresa, sin hacer caso de sus niveles de producción, muchos decisores especifican un "tamaño mínimo de lote" para esa actividad. Suponga, por ejemplo, que si algunos autos Chevrolet son producidos en la planta de San Luis, entonces se deben producir un mínimo de 1000 autos. Una variable cero/uno puede forzar a cumplir esta restricción. Sea

x = Nivel de actividad a ser determinado.
y = Variable cero/uno, uno si y solo si $x > 0$
B = Tamaño del lote mínimo para x (en el ejemplo 1000)
U = Límite superior conocido sobre el valor de x

Las dos restricciones siguientes forzan a que se cumpla la condición de tamaño mínimo de lote.

$x \le Uy$
$By \le x$

Si $y = 0$, entonces la primera restricción forza a que $x = 0$, mientras que si $y = 1$ la segunda restricción forza a que x tome al menos el valor de B. La constante U debe escogerse con cuidado y por razones de eficiencia computacional deberá ser tan pequeño como sea validamente posible.

Problemas con Cargos Fijos.

Una situación estrechamente relacionada al tamaño mínimo de lote, es aquella en donde la función de costo, para una actividad, es del tipo linear con un costo fijo, como la indicada en la siguiente figura 17.1

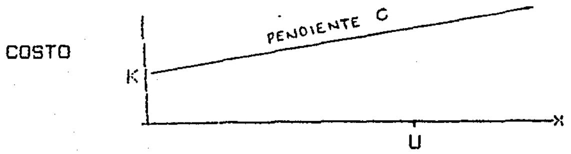


Fig.17.1 Representación típica de una función con costo fijo

Se definen x, y, U con el mismo significado anterior y sea K el costo fijo (ver fig. anterior) si $x > 0$. En este caso se tendría la siguiente formulación:

$$\text{Min} \quad Ky + cx + \ldots\ldots$$

$$\text{s.a.} \quad x \leq Uy$$

.
.

La restricción y el término Ky implican que x no puede ser mayor que cero a menos que se incurra en un costo fijo K. Otra vez, por eficiencia computacional, U debe ser tan pequeño como válidamente sea posible.

Curvas de Costo no Continuas

La curva de costo linear más un costo fijo es un caso especial de una curva de costo más general, como la que aparece en la figura 17.2

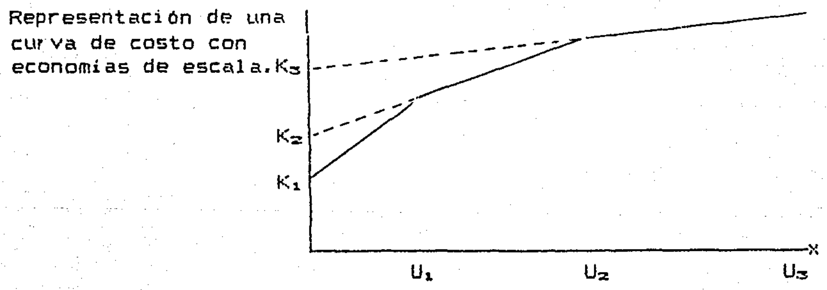


Fig. 17.2 Curva de costo lineal por tramos.

Los pendientes de los tres segmentos son c_1, c_2, c_3. Las intersecciones K_2 y K_3 se determinan de la fórmula $K_{i+1} = K_i + c_i U_i - c_{i+1} U_i$

Si $c_{i+1} \leq c_i$, la curva de costo representa una actividad con economías de escala. Para resolver este problema uno de los métodos es utilizar programación entera. Para esto definamos:

$$y_i = \begin{cases} 1 \text{ si } U_{i-1} < x \leq U_i \\ 0 \text{ de otra forma} \end{cases}$$

$$x_i = \begin{cases} x \text{ si } U_{i-1} < x \leq U_i \\ 0 \text{ de otra forma} \end{cases}$$

La formulación entonces será:

$$\text{MIN} \quad K_1y_1 + K_2y_2 + K_3y_3 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots\ldots\ldots$$

sujeto a:

$$x_1 \leq U_1y_1$$
$$x_2 \leq U_2y_1$$
$$x_3 \leq U_3y_3$$

$$y_1 + y_2 + y_3 \leq 1$$
$$\vdots$$

En cualquier parte donde aparece x en el resto de la formulación deberá reemplazarse por $x_1+x_2+x_3$. Si y_i sólo puede tomar valores 0/1, entonces causará que la función de costo quede representada correctamente. La última restricción, $y_1+y_2+y_3$, generalmente no es necesaria.

Ejemplo.

Una parte de un gran problema involucra la determinación de la cantidad que debe surtir un provedor, cuando su función de costo es descontinua. Esto es, a mayor cantidad requerida disminuyen los costos. Los hechos relevantes son: Se tiene un costo fijo de \$ 150 por correr una orden; los primeros 1,000 galones de producto se pueden comprar a \$ 2 por galón; el precio baja a \$ 1.9 por galón para cualquier cantidad en exceso de 1,000 galones: a lo más pueden ser comprados 5,000 galones.

Los parámetros pueden establecerse como sigue:

K_1 = 150

U_1 = 1,000

K_1 = 150 + 1,000 * 2 - 1,000 * 1.9 = 250

U_2 = 5,000

Se definen las variables:

y_1 = 1 Si se compran más de cero pero no más de 1,000 galones, de otra forma cero
y_2 = 1 Si se compran más de 1,000 galones, cero de otra forma.
x_1 = Galones comprados si éstos no son más de 1,000 galones

x_2 = Galones comprados si éstos son más de 1,000 galones

La formulación incluye

$$\text{Min} \quad 150\, y_1 + 250\, y_2 + 2x_1 + 1.9\, x_2 + \ldots$$

sujeto a:

$x_1 \leq 1{,}000y_1$

$x_2 \leq 5{,}000y_2$

$y_1 + y_2 \leq 1$

y_1, y_2 enteros

El requerimiento del tanaño mínimo de lote es un ejemplo del tipo de restricciones como $x \leq 0$ o $x \geq B$. Una variable cero/uno se puede usar para que estas restricciones se cumplan.

Por ejemplo suponga, como parte de un gran problema de programación, dos operaciones i y j .

Sea

p_i = tiempo de proceso de i (conocido)
p_j = tiempo de proceso de j (conocido)
s_i = tiempo de comienzo de i (a determinarse)
s_j = tiempo de comienzo de j (a determinarse)

De esta forma, el tiempo final de i será $s_i + p_i$. Además si i y j no pueden traslaparse, entonces debemos tener:

$$s_i + p_i \leq s_j$$

o $$s_j + p_j \leq s_i$$

esto es, i termina antes que j comience o j termina antes que i comience. En ambos casos se puede hacer cumplir alguna condición, si se introduce la variable y_{ij} del tipo 0/1 con la interpretación:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si i precede a j} \\ 0 & \text{si j precede a i} \end{cases}$$

Soluciones enteras naturales

Si la constante U es suficientemente grande, entonces trabajarán las siguientes dos restricciones:

$$s_i + p_i \leq s_j + U(1-y_{ij})$$

$$s_j + p_j \leq s_i + Uy_{ij}$$

Si $y_{ij} = 1$, la primera restricción forza a que i termine antes que j empiece; mientras que la segunda restricción se satisface necesariamente ya que el término Uy_{ij} es muy grande. Por otro lado, si $y_{ij} = 0$, entonces la segunda restricción forza a que j termine antes de que i comience, mientras que la primera restricción se satisface necesariamente ya que el término $U(1-y_{ij})$ es muy grande. Note, sin embargo, que los problemas que contienen cerca de una docena de este tipo de restricciones pueden ser difíciles de resolver.

Representación general para variables cero/uno

Si una variable, por decir x, en nuestro problema puede tomar cualquiera de los valores enteros $0,1,2,3,\ldots,U$ y sólo podemos utilizar un programa entero con capacidad unicamente para manejar valores cero/uno, se puede usar la siguiente transformación. Sea k un entero tal que $2^k > U$ pero $2^{k-1} \leq U$. Se definen variables, cero/uno, x_1, x_2, $x_3,\ldots.x_k$. Suponga que el término cx aparece en alguna parte del modelo. Reemplacemos este término por:

$cx_1 + 2cx_2 + 4cxs_3 +\ldots+ 2^{k-1}cx_k \leq U$.. Se repite esta sustitución en donde aparesca x; esto es, x se reemplaza por: $x_1 + 2x^2 + 4x_3 + \ldots\ldots.$. Por ejemplo, si $U=11$ y $c=3$, entonces el término $3x$ podría reemplazarce por: $3x_1 + 6x_2 + 12x_3 + 24x_4$. Si fuése necesario, se debería también adicionar $x_1 + 2x_2 + \ldots..+ 2^{k-1} x_k \leq U$, y en nuestro ejemplo: $x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 \leq 11$. Observe que cualquier valor entre 0 y 11 se puede obtener dando al lado derecho alguna combinación de variables cero/uno. Esta sustitución puede ser razonable si se tiene sólo un pequeño número de variables enteras.

Problemas que tienen Soluciones Enteras en Forma Natural

Los algoritmos de solución para un problema entero generalmente están basados en que primero se resuelve éste como si fuera uno de programación lineal (problema con variables continuas) haciendo a un lado los requerimientos de integralidad. Por ejemplo, si se requiere que x tome valores 0/1 el problema primero se resuelve reemplazando estos requerimientos por una restricción tal que $0\leq x \geq 1$. Cuando se inicia el análisis de un problema en el que la solución entera es importante, es útil conocer de antemano si dicho problema será fácil resolver. Generalmente se observa que el problema entero fué fácil de resolver si el valor óptimo de la función objetivo del programa lineal y del programa entero, son muy cercanos. Por tanto, la única forma de predecir si las soluciones óptimas de ambos problemas estarán cercanas, es si conocemos de antemano que la solución del problema lineal será casi completemente entera. De esta manera, el interés está en conocer que clase de programas lineales tienen soluciones enteras que se dan en forma natural.

Una clase de problemas de este tipo, de los que se tiene algún conocimiento al respecto, son los problemas en que los coeficientes son 1, 0, o −1 y los lados derechos son todos enteros. Para estos problemas, el conocimiento está resumido en la siguiente tabla:

CONDICION	COMENTARIO
Dejando a un lado las restricciones de cota superior tal como x≤3, cada columna tiene a lo más dos elementos no-ceros y si son dos entonces son +1 y -1.	Este es un problema de red y tendrá una solución al problema lineal completamente entera. De esta forma no se requiere formular un programa entero.
Dejando a un lado las variables de holgura, cada restricción tiene a lo más dos elementos no-ceros y si son dos estos son +1 y -1.	Este es el problema dual de una red y tendrá una solución totalmente entera.
Los valores no-ceros en cada columna (renglón) aparecen en un grupo contiguo de renglones (columnas) y son del mismo signo.	Por sustracción de renglones (columnas) este problema puede convertirse (el dual de) un problema de redes. Por lo tanto, el problema original debe tener también una solución entera Si algunas columnas tienen a lo más dos grupos de valores diferentes de ceros con una zona de ceros entre ellos , la solución será casi entera.
Cada columna (renglón) tiene a lo más dos valores no ceros	La solución del programa lineal tenderá a ser entero pero no necesariamente.

Actualmente, se han propuesto una amplia variedad de métodos para resolver problemas enteros. Indudablemente, se continúa mejorando en todos ellos para tratar de hacerlos más eficientes. Sin embargo, existe un método llamado de acotar y ramificar (Branch and Bound) que hasta ahora a demostrado ser el más confiable. En la actualidad, todos los paquetes comerciales usan este método y en términos generales realmente es unna forma inteligente de enumerar.

Más específicamente, B y B resuelve primero el problema como si fuera uno de programación lineal. Si la solución al problema anterior es entera en las variables que se establecieron a ser enteras, entonces el problema termina. De otra forma, B y B recurre a una búsqueda inteligente de todas las posibles formas de redondeo de las variables fraccionales.

Se ilustrará la aplicación del método en el siguiente problema.

Max $75x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 33x_4$

sujeto a:

2) $774x_1 + 76x_2 + 22x_3 + 42x_4 \leq 875$

3) $67x_1 + 27x_2 + 794x_3 + 53x_4 \leq 875$

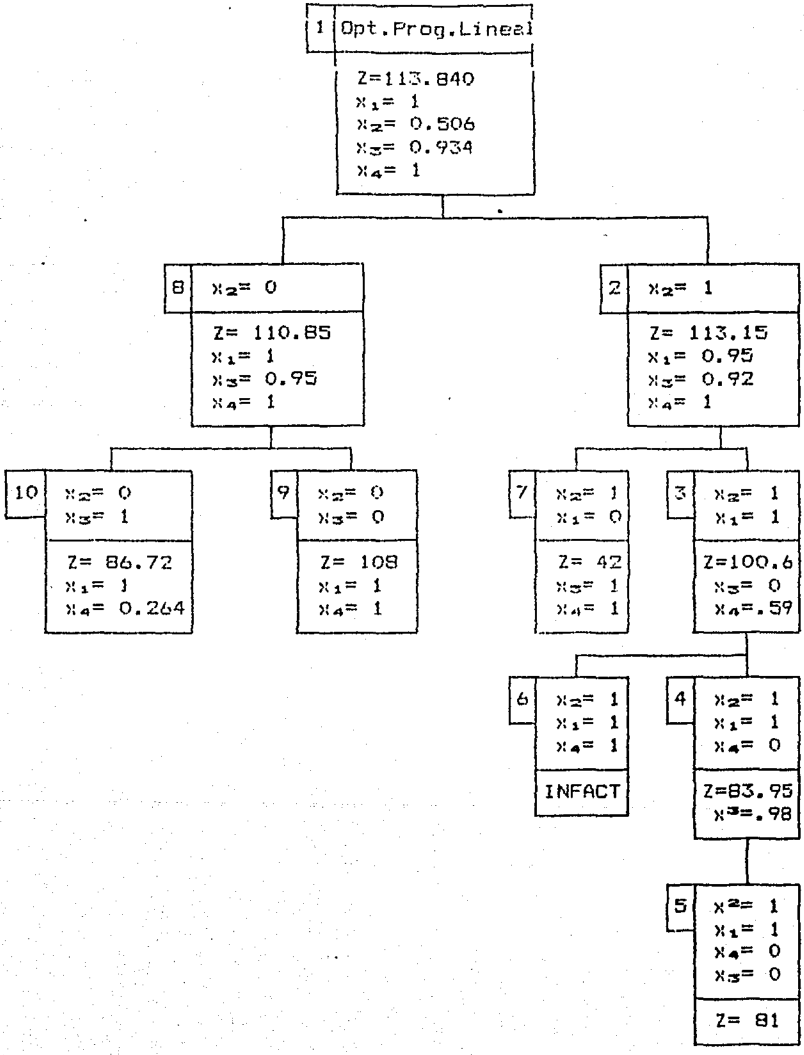
$x_1, x_2, x_3, x_4,$ restringidos a 0,1

El proceso de búsqueda que la computadora realiza tiene como fin obtener un óptimo entero, tal como se muestra en la figura 17.3. El primer problema se resuelve como uno de Programación Lineal con las restricciones $x_1,x_2,x_3,x_4 \leq 1$. Esta solución se resume en el rectángulo número 1. La solución tiene valores fraccionales para x_2 y x_3 y, por lo tanto, es inaceptable. En este punto, x_2 se selecciona arbitrariamente y se aplica el siguiente razonamiento:

El valor óptimo entero para x_2 debe ser 1 o 0. Por lo tanto, se debe reemplazar el problema original a dos nuevos subproblemas, uno con $x_2=1$ (rectángulo 2) y el otro con $x_2=0$ (rectángulo 8). Si se resuelven ambos problemas enteros, entonces la mejor solución debe ser la mejor solución del problema original. Este razonamiento es la motivación para usar el término **ramificar**(Branch). Cada subproblema creado corresponde a una rama en un árbol de ramificación. Los números arriba y a la izquierda de cada rectángulo o nodo, indican el orden en que los nodos(o los problemas) son examinados. La variable Z es el valor de la función objetivo. Cuando el subproblema con $x_2=1$ (nodo 2) se resuelve como un problema lineal, encontramos que x_1 y x_3 toman valores fraccionales. Con el mismo argumento, pero ahora con la varible x_1 , se crean dos nuevos subproblemas: uno con $x_1=0$ (nodo 7) y otro con $x_1=1$ (nodo 3). Este proceso se repite con x^4 y x_3 hasta el nodo 5. En este punto se establece una solución entera con Z= 81, pero no podemos establecer si esta es la solución óptima entera ya que debemos analizar los subproblemas 6 al 10.

El subproblema 6 resulta infactible, por lo que esa rama ahí queda. El subproblema 7 no se necesita seguir ya que Z= 42 y es peor que la solución ya establecida.
En el nodo 9 se tiene una mejor solución con Z= 108, cuando $x_3=0$. El nodo 10 ilustra el origen de la parte de **acotar** del Branch and Bound. La solución es fraccional; sin embargo, ya no se examinará puesto que Z= 86.72 y es menor que 108, que es el valor asociado con la solución entera ya establecida. El valor de Z, para cualquier otro nodo, es una cota sobre el valor de Z para cualquier otro nodo descendente. Esto resulta cierto ya que un nodo descendente o subproblema se obtiene colgando una restricción al problema padre; por lo que colgar una restricción puede sólo perjudicar. Interpretado de otra

manera, significa que los valores de Z no pueden mejorarse si el movimiento es hacia abajo del árbol.



El árbol de la página anterior es sólo una ilustración de cómo éste puede ser investigado. Otros árboles pueden ser desarrollados para el mismo problema, jugando con los siguientes dos grados de libertad.

a).- Seleccionar el siguiente nodo a examinar.

b).- Seleccionar la variable a ramificar cuando se despega un nodo.

Por ejemplo, si los nodos 8 y 9 fueron examinados inmediatamente después del nodo 1, entonces la solución con Z = 108 debería haberse establecido inmediatamente. Además, los nodos 4, 5 y 6 pueden entonces haber sido omitidos ya que el valor de Z en el nodo 3 (100.64) es peor que la solución entera ya conocida de 108 y por lo tanto no se ramificaría el nodo 3.

En el árbol de ejemplo, el primer nodo se divide ramificando los posibles valores de x_2; sin embargo, se pudo haber seleccionado x_3 o aún x_1 como primer variable ramificada.

La eficiencia de la investigación esta estrechamente relacionada a la manera inteligente en que se efectuaron a) y b). En b) uno quiere seleccionar variables que sean decisivas. En general, la computadora hará esas selecciones inteligentes y el usuario no necesita estar vigilante de los detalles del proceso de investigación.

Sin embargo, el usuario debería tener en mente el proceso general del Branch and Bound cuando formule un modelo. Si el usuario tiene un conocimiento a priori de que una variable entera "x" es decisiva, entonces, para el programa LINDO es útil ubicar a "x" con anterioridad y así indicar su importancia. Por otra parte, resulta igualmente importante establecer una formulación fuerte del programa lineal inicial. Una formulación de este tipo es aquella que,cuando se resuelve,tiene un valor en la función objetivo muy cercana a la solución óptima de un problema entero . Las soluciones a los programas lineales, de los subproblemas, se usan como cotas para acortar la búsqueda. Si las cotas son malas, muchos nodos del principio del árbol pueden ser falsamente examinados; ya que sus cotas, aunque aparentemente sean buenas,originan nodos que no tendrán buenos descendientes.

El significado de los Precios Duales en Problemas Enteros.

El proceso de solución de los programas enteros es diferente al de los problemas lineales LPs. En el primero no se producen precios duales como resultado de los cálculos, aunque el reporte de solución puede contener tanto precios duales como costos reducidos, ya que se utiliza un LP como un subrutina en el proceso de solución de un programa entero (IP). Sin embargo, la interpretación del significado de esos precios es complejo y depende del tipo del proceso de solución utilizado. De esta forma, en general los precios duales y los costos reducidos en un reporte de salida de un IP deberá ser ignorado.

En las siguientes páginas se darán descripciones más commprensivas de cómo formular programas enteros en aplicaciones específicas.

El Problema Simple de Localización de Planta (SPL)

El problema de localización (SPL) se especifica comos sigue:

n = El número de lugares en los cuales una planta puede ubicarse o abrirse.

m = El número de clientes o puntos de demanda, cada uno de los que deben asignarse a una planta.

k = El número de plantas que pueden ser abiertas.

f_i = El costo fijo (por ejemplo por año) de tener una planta en el lugar i, para $i = 1, 2, \ldots, n$.

c_{ij} = El costo (por ejemplo por año) de asignar puntos de demanda j a la planta en el lugar i, para $i = 1, 2, \ldots, n$, $j=1, 2, \ldots, m$.

La meta es determinar el conjunto de lugares en los cuales deben ser localizadas las plantas, y a que lugar se debe servir a cada cliente o punto de demanda.

Un problema de este tipo surge en la localización de un buzón cuando se tiene clientes esparcidos sobre una área amplia.

Los lugares para ubicación de planta, en este caso corresponden a aquellos en los que se puede localizar un buzón postal que es manejado por un banco en la ciudad. Un cliente haría su pago y enviaría su correspondencia por medio del correo. La razón para acudir a multiples buzones (con seguridad), más bién que enviar todos los pagos a un solo lugar es que se pueden ahorrar varios días de tiempo de correo. Suponga que una compañía recibe $ 600 millones por año a través del correo, el costo anual del capital para la compañía es 10% y esto podría reducir el tiempo de correo por dos días. Esta reducción tiene un valor anual de cerca de $ 3,000,000.00

La f_i (costo fijo por tener una planta en el lugar i), podría igualar el costo anual de tener un buzón en el sitio i sin hacer caso del volumen procesado a través de dicho sitio. El término del costo c_{ij} pueden ser aproximadamente igual al producto (costo diario de capital) * (tiempo de correo en días entre i-j) * (volumen anual por dolar enviado desde el área j).

Se definen las variables de decisión.

y_i = 1 si la planta se localiza en el sitio i, 0 de otra forma.
x_{ij} = 1 si la clientela j se asigna a la planta ubicada en el sitio i, 0 de otra forma.

Una formulación compacta de este problema entero (IP) es:

$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^{n} f_i\, y_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\, x_{ij} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \text{para } j=1..a..m \ \ldots\ldots\ldots\ldots 2$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq m y_i \qquad \text{para } i=1 \ \text{a} \ n \ \ldots\ldots\ldots\ldots 3$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = k \qquad \text{para } i=1 \ \text{a} \ n \ldots\ldots\ldots\ldots 4$$

$$y_i = 0,\ 1 \quad \text{para } i=1 \ \text{a} \ n \ \ldots\ldots\ldots\ldots 5$$

$$x_{ij} = 0,\ 1 \quad \text{para } i=1 \ \text{a} \ n, \quad j=1 \ \text{a} \ m \ldots\ldots\ldots\ldots 6$$

Las restricciones 2) forzan a cada clientela j a ser asignada a exactamente un sitio. Las restricciones 3) forzan a una planta a ser localizada en el sitio i si alguna clientela es asignada al sitio i.

Cabe decir que se debe tener precaución si se resuelve un problema formulado de esta manera ya que el proceso de solución requerirá mucho tiempo de computadora así sea un problema pequeño. La dificultad surge porque cuando el problema se resuelve como uno de programación lineal, esto es sin las restricciones 5) y 6). la solución tiende a ser altamente fraccional y con escasa similitud a la solución entera óptima. La mayor parte de los procesos de solución para un problema entero tienden a ser poco eficientes bajo tales condiciones.

Una formulación **ajustada** que frecuentemente produce una solución entera natural, cuando se resuelve con programación lineal, se obtiene reemplazando las restricciones 3) por las siguientes:

$$x_{ij} \leq y_i \quad \text{para } i = 1 \text{ a } n$$
$$j = 1 \text{ a } m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3')$$

En un primer vistazo, reemplazando 3) por 3') puede parecer contra producente. Si existen 20 posibles ubicaciones de plantas y 60 lugares de clientela, entonces el conjunto 3) contendría 20 restricciones mientras que en 3') contendría 20 * 60 = 1200 restricciones. Empiricamente, sin embargo, esto parece ser la regla más bién que la excepción que cuando el problema se resuelve con programación lineal con 3') en vez de 3), la solución es entera en forma natural.

El problema de localización de planta con restricción de capacidad (CPL).

El problema (CPL) surge a partir del problema anterior (SPL) si el volumen de demanda procesada, a través de una planta en particular, es una consideración importante. En particular, el problema CPL supone que cada clientela tiene un volumen conocido, y cada planta tiene también un volumen conocido que limita al volumen total asignado a éste. Los parámetros adicionales a definir son:

D_j = volumen o demanda asociada a la clientela j

K_i = capacidad de una planta localizada en i

La formulación entera IP es:

$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^{n} f_i\, y_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}\, x_{ij} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 7$$

$$\text{S.A:} \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \text{para } j = 1 \text{ a } m \ldots\ldots\ldots\ldots 8$$

$$\sum_{j=1}^{m} D_j\, x_{ij} \leq K_i\, y_i \quad \text{para } i = 1 \text{ a } n \ldots\ldots\ldots\ldots 9$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = k \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4$$

$$x_{ij} \leq y_i \qquad \text{para } i = 1 \text{ a } \;\ldots\ldots\ldots\ldots 10$$
$$j = 1 \text{ a } m$$

$$y_i = 0,\ 1 \qquad \text{para } i = 1 \text{ a } n \ldots\ldots\ldots\ldots 11$$

$$x_{ij} = 0,\ 1 \qquad \text{para } i = 1 \text{ a } n \ldots\ldots\ldots\ldots 12$$
$$j = 1 \text{ a } m$$

en esta formulación, las x_{ij} están restringidas a 0 o 1; esto es, cada clientela puede contener o no todo el volumen asignado a su planta en particular. Si se permite el reparto, entonces las x_{ij} pueden ser fraccionales. Con la interpretación de que x_{ij} es la fracción del volumen (demanda) de la clientela j asignado a la ubicación de la planta i; con lo que la condición 12) desaparece.

Ejemplo de un problema de localización de planta.

Algunos de los puntos antes mencionados serán ilustrados en el siguiente ejemplo.

La Compañía ZYX en California, tiene actualmente un almacén en cada una de las siguientes ciudades:

A) Baltimore, B) Cheyenne, C) Salk Lake City, D) Memphis y E) Wichita. Dichos almacenes abastecen a diversas regiones a través de los Estados Unidos. Por lo que se ve la conveniencia de agregar otras regiones y considerar que la clientela sea localizada en las siguientes ciudades:

1) Atlanta, 2) Boston, 3) Chicago, 4) Denver, 5) Omaha y 6) Portland, Oregon. Por otra parte, existe la sensación de que la compañía esté sobresaturada, por lo que puede haber un ahorro sustancial en los costos fijos cerrando algunos

almacenes sin incrementar los costos de transportación y de servicio. Los datos relevantes aparecen en el siguiente cuadro.

Matríz del Costo Mensual por tonelada.

	Demanda de la Ciudad						Capacidad Oferta Mensual en Tons	Costo Fijo Mensual
	1	2	3	4	5	6		
Oferta de la Ciudad A	1675	400	685	1630	1160	2800	18	7,650
B	1460	1940	970	100	495	1200	24	3,500
C	1925	2400	1425	500	950	800	27	5,000
D	380	1355	543	1045	665	2321	22	4,100
E	992	1646	700	508	311	1797	31	2,200
Demanda Mensual en Toneladas	10	8	12	5	7	11		

Por ejemplo, cerrando el almacén en A (Baltimore) resultaría un ahorro mensual de costos fijos de $ 7,650. Si 5 (Omaha) trae toda su demanda mensual desde E (Wichita), entonces el costo asociado de transportación es 7 * 311 = $ 2,177 por mes. Un cliente no necesita traer todo desde una sola fuente. Cada diversificación de fuentes de oferta puede resultar de la capacidad limitada de cada uno de los almacenes; Cheyenne unicamente puede procesar 24 toneladas por mes. Debería la Compañía cerrar alguno de los almacenes y, si esto fuera así, cuáles serían?

Compararemos la ejecución de cuatro diferentes métodos para resolver este problema.

1.- Formulación holgada del problema entero

2.- Formulación ajustada del problema entero

3.- Método heuristico,abriendo : comenzar con todas las plantas cerradas y secuencialmente abrir una planta dando la mayor reducción en el costo hasta que sea inútil abrir más plantas.

4.- Método heurístico, cerrando : comenzar con todas las plantas abiertas y secuencialmente cerrar una planta ahorrando la mayor cantidad de dinero hasta que sea inútil cerrar más plantas.

La ventaja de los métodos heurísticos 3 y 4 es que son fáciles de aplicar. La ejecución de los cuatro métodos es como sigue:

METODO	MEJOR SOLUCION	TIEMPO DE COMPUTO EN SEG	ABRIR PLANTAS EN:	COSTO EN LA SOLUCION DEL LP.
IP holgado	46031	3.38	A,B,D	35,662
IP ajustado	46031	1.67	A,B,D	46,031
Heurist (a)	46943		A,B,D,E	
Heurist (b)	46443		A,B,D,E	

Note que aunque el IP holgado encuentra el mismo óptimo que el IP ajustado, el primero toma el doble de tiempo de cómputo que el segundo. Para problemas grandes esta diferencia resulta mucho más dramática.

Problema de Oferta de Bonos Municipales.

Cada año muchos millones de dolares en bonos se venden por parte de los Municipios de los U.S. En muchas ocasiones la municipalidad vende estos bonos a través de un proceso de oferta por medio de intermediarios financieros. En este tipo de transacciones se establecen al menos los siguientes parámetros:

- La cantidad de dinero en bonos, por ejemplo 50 millones.
- El número de vencimientos, por ejemplo 4.
- Las fechas de vencimiento y las cantidades que se pagarán en cada vencimiento, por ejemplo 10 millones en 1988, 10 millones en 1995, 10 millones en 2005 y 20 millones en 2010.
- Restricciones sobre las tasas de interés, por ejemplo las tasas que corresponden al pago de los cupones deben ser multiplos de 1/8.

Puede haber otras restricciones pero se considerarán después de describir el modelo básico. Este modelo fue introducido por Weingartner (1962), y elaborado por Nauss y Keeler (1978).

En la selección de las ofertas o cantidades de cupones, el corredor se pregunta como se deben vender los bonos en el mercado. Una vez que se ha ganado la subasta, las cantidades se fijan y otros inversionistas compran los bonos ofreciendo un pago inicial para un bono el cual no necesita tener el mismo valor nominal.

Se tienen dos objetivos en conflicto: querer hacer un bono económico (en términos del costo por interés) para incrementar las oportunidades de ganar pero, por otro lado, el bono debería ser lo bastante alto de tal forma que si se gana, se tenga una ganancia razonable. El enfoque usualmente tomado, es incorporar las ganancias deseadas (por ejemplo 8 por 1000 del valor del bono) como una restricción, y entonces minimizar el costo neto por interés, maximizando así las oportunidades de ganar.

Los parámetros del problema pueden especificarse como:

N = Número de vencimientos en la emisión de bonos.

M = Número de posibles niveles de los cupones. Esto se determina por las tasas de interés que son multiplos de 1/8, y el mínimo y máximo de tasas permitidas.

K = Número de tasas permitidas, ($K \leq M$).

c_{ij} = Cantidad total de intereses que paga la municipalidad sobre los bonos de vencimiento i, si la j-ésima tasa se selecciona para este vencimiento.

w_{ij} = Precio de venta total, estimado para bonos de vencimiento i usando la j-ésima tasa.

B = Ganancias requeridas por el emisor más la utilidad del corredor.

Las variables de decisión son:

x_{ij} = 1 si el vencimiento i se asigna a la tasa j, de otra forma es cero.

y_j = si la tasa j se usa para cualquier vencimiento, o de otra forma.

p = premio en exceso del valor nominal. El corredor puede ofrecer al emisor una cantidad **p** y hacer mas atractivo el bono. Por convención los emisores consioeran a p como una reducción en el costo por interés.

La formulación es:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} c_{ij} x_{ij} - p \ldots\ldots 1$$

SUJETO A

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} w_{ij} x_{ij} - p = B \ldots\ldots 2$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad \text{para } i=1 \text{ a } N \ldots\ldots 3$$

$$x_{ij} \leq y_j \quad \text{para } j=1 \text{ a } M\text{, } i=1 \text{ a } N \ldots\ldots 4$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j \leq K \quad \ldots\ldots 5$$

$$x_{ij} = 0 \text{ o } 1 \quad \text{para } j=1 \text{ a } M \quad i=1 \text{ a } N$$

$$y_j = 0 \text{ o } 1 \quad \text{para } j=1 \text{ a } M$$

La restrricción (2) establece que las ganancias esperadas por las ventas al público menos cualquier premio, debe ser igual a la cantidad que produce una utilidad razonable. La restricción (3) ajusta la condición de que exactamente se debe seleccionar una tasa por cada vencimiento. La restricción (4) forza a la variable indicador, para la j-ésima tasa, y_j a ser 1, si esta tasa se usa para cualquier vencimiento i. La restricción (5) limita el número de las distintas tasas que pueden seleccionarse.

Un problema típico puede tener de 10 a 40 vencimientos y de 3 a 25 tipos de cupones permitidos. El tamaño del problema se determina esencialmente por el número de variables x_{ij} que se requieren. Nauss y Keller (1978) encontraron que en problemas del mundo real surgen entre 150 a 3200 variables x_{ij}. Estos mismos autores describen un algoritmo de proposito especial que parece trabajar satisfactoriamente en problemas de mundo real.

Restricciones adicionales al problema de los Bonos

Algunas veces la demanda de bonos pueden incluir restriciones adicionales, como por ejemplo:

1.- Las tasas de los cupones deben ser no decrecientes con el vencimiento. Esto se puede considerar con el siguiente conjunto de restricciones:

$$\sum_{j=1}^{M} j x_{ij} \leq \sum_{j=1}^{M} j\, x_{i+1,j} \qquad \text{para } i=1 \text{ a } N-1$$

2.- Máxima diferencia permitida entre la mayor y la menor tasa de los cupones, por ejemplo 2 por ciento. Esto puede mejorarse introduciendo la variable de desición z_j con la interpretación:

$z_j=1$ si el cupón j es la menor tasa usada, de otra forma es cero. Lo que adiciona la siguiente restric ción:

$$\sum_{j=1}^{M} z_j = 1$$

junto con el conjunto de restricciones:

$$y_j \leq \sum_{k=j-r}^{j} z_k \qquad \text{para } j = 1 \text{ a } M$$

donde r es el rango de las tasas permitidas.

3.- Si una tasa con vencimiento i se repite en el vencimiento t, donde t>i,y si aparece una tasa diferente en algún vencimiento s, donde i< s >t, entonces la tasa en t se considera como una tasa distinta en el conteo del número de tasas.

EJEMPLO:

Lo siguiente es una abstracción de los hechos relevantes en una nota reciente sobre la venta de bonos municipales.

Las ofertas de bonos serán recibidas hasta las 10 a.m. del 18 de junio de 1973 por un monto de 5 000 000. Los bonos están fechados el 1 de julio del mismo año, con interés pagadero el 1 de septiembre de 1974 y en forma semestral a partir de ahí el 1 de marzo de los años y en las cantidades que siguen:

AÑO	CANTIDAD (miles)
1975	250
1976	425
1977	450
1978	450
1979	500
1980	500
1981	575
1982	600
1983	600
1984	650

Los bonos serán otorgados al oferente sobre la base del menor costo de interés, pero ninguna oferta será considerada por menos del valor nominal o presentando una tasa de interés mayor de 6% por año. Los oferentes especificarían la tasa de interés en múltiplos de 1/8 de 1% ó 1/10 de 1% por año.

No se considerarán más de 3 diferentes tasas de interés. Una tasa de interés repetida no se considerará como diferente, y la misma tasa debe aplicarse a todos los bonos del mismo vencimiento. La mayor tasa no deberá exceder la menor tasa por más de 1% por año.

En la determinación de la mejor oferta, el costo de interés se calculará determinando el interés a partir de la fecha de emisión de los bonos hasta su vencimiento, a la tasa o tasas especificadas después de deducir cualquier premio ofrecido.

Aproximación de funciones no lineares separables con programas enteros.

Suponga que queremos incluir en un modelo una función como la que aparece en la figura 17.4.

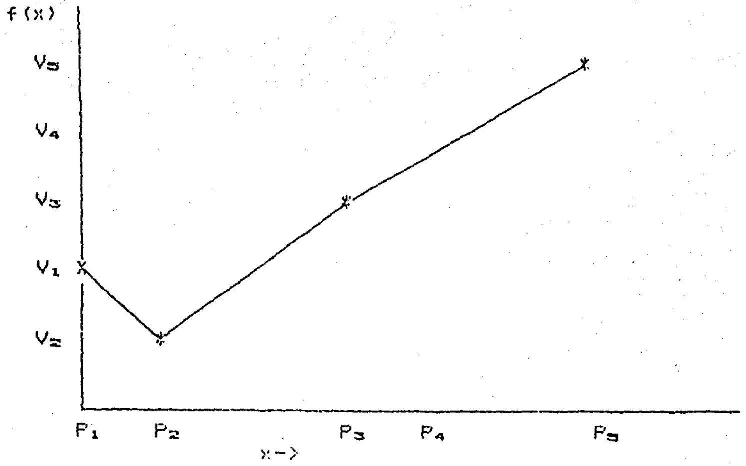


Fig. 17.4 Función Lineal por tramos.

La función se supone lineal entre los puntos $x=P_1$, $x=P_2$,etc. El valor de la función para el i-ésima punto se denota por V_i, esto es $V_i=f(P_i)$.

Cada función con n puntos puede representarse por medio de un programa lineal entero.

1.- Haciendo $W_1 + W_2 +......+ W_n = 1$

2.- Reemplazando cada ocurrencia de x por la expresión
$$W_1P_1 + W_2P_2 +......+ W_nP_n$$

3.- Reemplazando cada ocurrencia de f(x) por la expresión.
$$W_1V_1 + W_2V_2 +......+ W_nV_n$$

4.- Permitir a lo más dos W_is a que sean no ceros en el caso de que sean adyacentes.

La nueva variable W_i especifica el peso que le corresponde al punto P_i. Si la función f(x) es lineal entre los dos puntos adyacentes $x=P_i$ y $x=P_{i+1}$ y $x=W_ip_i+W_{i+1}P_{i+1}$ con $W_i+W_{i+1}=1$ entonces $f(x)=W_if(P_i) + W_{i+1}f(P_{i+1})=W_iV_i+W_{i+1}V_{i+1}$.

La restricción (4) puede hacerse cumplir en varias formas. Un número de códigos de programación enteros permite a las restricciones como (1) a identificarse como los llamados "Conjuntos Especiales Ordenados de Tipo 2", o simplemente SOS2. El código de programación entera garantizará que la restricción (4) se satisfaga para cada restricción identificada como SOS2.

Si tenemos un código de programacion entera pero sin la caracteristica SOS2, entonces la restricción (4) puede satisfacerse adicionando las siguientes restricciones.

$$
\begin{aligned}
&W_1 \leq Z_1 \\
&W_2 \leq Z_1 + Z_2 \\
&W_3 \leq Z_2 + Z_3 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&W_n \leq Z_{n-2} + Z_{n-1} \\
&W_n \leq Z_{n-1}
\end{aligned}
$$

$$Z_1 + Z_2 + \ldots\ldots Z_{n-1} = 1 \qquad Zi = 0 \text{ ó } 1.$$

Sumarizando, cada término no lineal produce al menos una restricción y n variables. Si la caracteristica SOS2 no se tiene disponible, entonces se debe además adicionar n restricciones y n-1 variables.

El enfoque general descrito, algunas veces se le llama método Landa.

Expresiones para convertir formas separables.

El método descrito para aproximar una función no-lineal $f(x)$ tiene la restricción de que puede aplicarse a una función de varias variables sólo si ésta es separable. Esto es, una función $g(x,y)$ puede aproximarse si se puede escribir como $g(x,y) = f_1(x) + f_2(y)$.

Si la función $g(x,y)$ es un producto de x y y, entonces se puede utilizar el siguiente artificio para convertir a g en una forma separable:

1.- Anexar la restricción lineal $u=x-y$

2.- Reemplazar el producto xy por la función separable

$$x^2/2 + y^2/2 - u^2/2$$

El artificio trabaja porque $u^2 = (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$, resolviendo para xy nos da $xy = (x^2 + y^2 - u^2)/2$

Resumiendo, cada término de producto resulta en la adición de una nueva variable y una nueva restricción. Si los términos x^2 y y^2 ya aparecen en otra parte en el modelo, entonces el único término no lineal es u^2. Para usar los métodos de esta sección la función no lineal separable resultante debe aproximarse, usando interpolación lineal para cada término cuadrático.

Representacion de los efectos no - lineares en programas enteros.

Suponga que x y y son variables 0/1 y existe un efecto indeseable (por ejemplo costo, uso de recursos, etc.) de cantidad D, si x y y son usados (que sean 1). Debemos igualmente incluir el término Dxy en el renglón en que este efecto ocurre; sin embargo, es un término no lineal y así prevenimos el uso de la programación lineal como el método Branch and Bound requiere. El hecho que x y y sean 0/1 puede explotarse definiendo la variable z y anexando las restricciones.

$z \geq x + y - 1$ y entonces insertar el término Dz en el renglón en que ocurre el efecto indeseable. Note que en este caso z será naturalmente 0 ó 1 si x y y son 0/1. Un efecto indeseable de cantidad D puede considerarse; reemplazando la restricción sobre z por:

$z \leq .5\,x + .5\,y$

PROBLEMAS PROPUESTOS.

1.- El problema siguiente se conoce como el problema del almacén.

Un procesador de forraje tiene varias cantidades de cuatro productos que deben ser almacenados en siete diferentes silos. Cada silo puede contener no más de un artículo. Asociado con cada producto y combinación de silo se tiene un costo de llenado. Cada silo tiene una capacidad finita de tal forma que algunos productos pueden ubicarse sobre varios silos. La siguiente tabla contiene los datos para este problema.

COSTO DE LLENADO

		1	2	3	4	5	6	7	CANTIDAD DE PRODUCTO A SER GUARDADA (TONS
PRODUCTO	A	1	2	2	3	4	5	5	75
	B	2	3	3	3	1	5	5	50
	C	4	4	3	2	1	5	5	25
	D	1	1	2	2	3	5	5	80
CAPACIDAD DEL SILO (TONS)		25	25	40	60	80	100	100	

A) Presente una formulación para resolver esta clase de problemas.

B) Encuentre la solución de mínimo costo para este ejemplo.

C) Cómo formularía si adicionalmente existe un costo fijo asociado con cada silo en el que se incurre si se almacena alguna cantidad en el silo?

2.- Supongamos que usted es el coordinador de vuelos de una pequeña pero en crecimiento línea aérea. Se debe programar exáctamente un vuelo de Chicago a cada una de las siguientes ciudades: Atlanta, Los Angeles, New York, y Peoria. Las salidas disponibles son a las 8 a.m., 10 a.m. y 12 del día. Su línea aérea tiene únicamente dos salas de última espera. Los datos de demanda sugieren la siguiente ganancia esperada por vuelo como una función del tiempo de salida.

CONTRIBUCION ESPERADA EN MILES.

DESTINO	TIEMPO 8	10	12
ATLANTA	10	9	8.5
LOS ANGELES	11	10.5	9.5
NEW YORK	17	16	15
PEORIA	6.4	2.5	- 1

Formule un modelo para resolver este problema.

3.- Un problema que se tiene en una central eléctrica cada día es decidir que generadores arrancar. La estación en cuestión tiene 3 generadores con las siguientes características:

GENERADOR	C.FIJO/ ARRANCAR	C.FIJO/ PERIODO DE OPER.	C/PERIODO/ MEGAWATT. UTILIZADO.	CAPACIDAD MAX. EN MEGAWATT CADA PERIODO.
A	3000	700	5	2100
B	2000	800	4	1800
C	1000	900	7	3000

Existen dos periodos en un día y el número de megawatts necesarios en el primer periodo es 2900. El segundo periodo requiere 3900 megawatts. Un generador arrancado en el primer periodo puede ser usado en el segundo periodo sin incurrir en un costo de arranque adicional. Todos los A, B, C se paran al fin de cada día.

a.- Suponga primero que los costos fijos son cero y así pueden ser omitidos. Cuáles son las variables de decisión

b.- Dar una formulación de programación lineal para el caso donde los costos fijos son cero.

c.- Ahora tome en cuenta los costos fijos. Cuáles son las variables adicionales (0/1) a definir.

d.- Qué términos deberán adicionarse a la función objetivo? Qué restricciones adicionales se debe incluir?

III. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se dispone de un paquete de computadora que resuelve problemas de programación lineal, entera y cuadrática, aunque ésta última no se abordo en el presente documento por ser un poco más complicada su formulación. Por supuesto si se logra establecer un problema de esta clase, el paquete está en disposición para resolver problemas cuadráticos. En el manual de usuario aparece una descripción más detallada de los comandos necesarios para resolver los tres tipos de problemas.

Dentro de las grandes ventajas del paquete LINDO podemos citar el manejo hasta de 4500 variables de decisión y 800 restricciones; la forma sencilla para capturar la información; la posibilidad de programar en FORTRAN cualquier entrada de datos e impresión de resultados.

No se requiere ser un experto en computación, simplemente tener los conocimientos básicos del manejo de PC. (computadoras personales) incluyendo el sistema operativo para correr cualquier problema de programación lineal, entera e incluso cuadrática. Obviamente, se reuieren conocimientos mínimos de álgebra lineal y programación lineal para una aplicación eficiente de estas notas.

La recomendación principal es que éstas notas sólo son de apoyo, sin pretender que se tomen como texto. Otra sería que en el desarrollo de un curso de programación lineal, los estudiantes se esforcen para que realicen analogías con los problemas presentados y situaciones reales.

Finalmente, cualquier sugerencia, corrección o aclaración dirigirse a Ing. Francisco Martínez Allende, Jefe del Departamento de Análisis de Flujo en Redes de la Dirección de Investigación de Operaciones de la Dirección Gral. de Organización y Sistemas de la Secretaría de Marina, teléfono 6-84-81-88 ext. 4226.

B I B L I O G R A F I A

Arnold, L., and D. Botkin. "Portafolios to Satisfy Damage Judgement: A Linear Programming Approach," Interfaces, Volumen 8, no. 2 (feb. 1978).

Bradley, S. P., A. C. Hax and T . L. Magnanti. Applied Mathematical Programming. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, (1977).

Braess, D. "Uber ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung, "Unternehmensforschung. Volumen 12, (1963), pp. 258-268.

Brearley, A. L., G. Mitra, and H. P. Williams. "Analysis of Mathematical Programming Prior to Applying thhe Simplex Algorithm," Math. Prog., Volumen 8 (1975), pp. 54-83.

Dantzig, G. B. Linear Programming and Extensions. Princeton: Princeton University Press, (1963)

Dutton, R., G. Hinman aand C. B. Millham. "The Optimal Location of Nuclear Power Facilities in the Pacific Northwest, "Operatios Research, Volumen 22, no.3 (May-jun 1974), pp. 478-487.

Fields, C., J. F. Hourican and E. A. McGee. "Developing a MMinimum Cost Feed Blending System for Intensive Use" Joint National TIMS/ORSA Meeting, New York, (1978).

Florian, M. "An Improved Linear Approximation Agorithm for the Network Equilibrium (Packet Switching) Problem" Proceedings 1977 IEEE Conference Decision and Control, 1977.

Hadley, G. Linear Programming, Addison-Wesley, (1962).

Jenkins, L. "Parametric Mixed Integer Programming" Management Science, Volumen 28, no. 11 (Nov. 1982), pp. 1270-1284.

Karmarkar, N. "A New Polynomial Time Algorithm for Linear Programming" Combinatorica, Volumen 4, no. 4 (1984), pp. 373-395.

Leontief, W. "The Structure of American Economy, 1919-1931. New York: Oxfoord University Press, (1951).

Levy, F. K. "Portafolios to Satisfy Damage Judgements: A simple Approach" Interfaces, Volumen 9, no. 1 (Nov. 1978), pp. 106-107.

Markowitz H. M. Portafolio Sellection, Efficient Diversification of Investments. John Wiley & Sons, Inc. (1959).

Marston, R. E., M. F. Muller and C. L. Killion. "Crew Planning at Flying Tiger: A Successful Application of Integer Programming, Management Science. Volumen 25, no. 12 (Dic. 1979), pp. 1175-1183.

Murchland, J. D. "Braess's Paradox of Traffic Flow," Transportation Research. Volumen 4, (1970), pp. 391-394.

Nauss, R. M. and B. R. Keeler. "Minimizing Net Interest Cost in Municipal Bond Bidding" Management Science, Volumen 27, no. 4 (Abr. 1981), pp. 365-376.

Plane, D. R. and T. E. Hendrick, "Mathematical Programming and the Location of Fire Companies for the Denver Fire Department" Oreration Research. Volumen 25, no. 4 (jul.-ago 1977), pp. 563-578.

Sharpe, W.F. "A Simplified Model for Portafolio Analysis" Management Science, Volumen 9, (ene 1963), pp. 277-293.

Schrage, L. and L. L. Wolsey. "Sensitivity Analysis for Branch and Bound Integer Programming" Operations Research, Volumen 33, no. 5 (Sep-Oct 1985), pp. 1008-1023.

Srinivasan, V. "Linear Programming Computational Procedures for Ordinal Regression" Journal of ACM, Volumen 23, no. 3 (Jul 1976).

Stigler, G. J. "The Cost of Subsistence" Journal of Farm Economics. Volumen 27, no. 2 (May 1945), pp. 303-314.

Wall Street Journal, "UAL's United Alters Schedule, Cuts Cost, Boosts Flights in Face of Discount Fares"(19 Jun. 1978), p. 8.

Weingartner, H. M. "Municipal Bond Coupon Schedules with Limitations on the Number of Coupons" Management Science. Volumen 19, no. 4 (Dic. 1972), pp. 369-378.