132
29

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

PLACAS AMORTIGUADAS HISTERETICAMENTE, EXCITADAS POR CARGA PUNTUAL ARMONICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

INGENIERO CIVIL

P R E S E N T A:

BERNARDO SANCHEZ VELASCO

DIRECTOR:

DR. JOSE LUIS URRUTIA GALICIA

México, D. F. Octubre 1990

INDICE.

Nomenclatura.

T Periodo.

f Frecuencia circular (hertz).

ω Frecuencia de excitación (rad/seg).

ω_k Frecuencia natural del sistema para el k-ésimo modo de vibrar.

η Factor de Pérdidas.

λ Fracción del amortiguamiento crítico.

ρ Peso volumétrico.

h Espesor.

t Tiempo

E Módulo de Young.

E^* Módulo complejo $E^* = (1 + i\eta)$

F Magnitud de la carga aplicada

a, b Dimensiones de la placa en el plano, en in.

m Masa.

D Rigidez a la flexión.

F_k^* Función de carga para el k-ésimo modo.

$\delta(x-x^*)$

$\delta(y-y^*)$ Función da Dirac.

η_k Factor de participación modal para el k-ésimo modo

U_{3k} Función coordenada(modal) para el k-ésimo modo

$u_{3k}(x,y,t)$ Respuesta dinámica del sistema.

δ_{emax} Deflexión estática máxima.

δ_{max} Deflexión dinámica máxima.

α_1, α_2 Coordenadas curvilíneas.

m, n Números modales.

Λ_k Magnitud de la respuesta.

k Constante del resorte

ϕ_k Ángulo de fase

ft Pies.

in Pulgadas.

lbs Libras.

s Segundos.

INDICE DE FIGURAS

Figuras. *página*

INDICE DE TABLAS.

Tabla. *página.*

Capitulo I.

1. Introducción.

1.1. Consideraciones Generales.

Un caso particular de gran interés en el análisis do vibración forzada de medios continuos se presenta en el estudio del modelo de placas rectagulares simplemente apoyadas en sus cuatro bordes, amortiguadas histeréticamente y excitadas por cargas puntuales armónicas. Este estudio tratará, al ser concluido, de hacer una comparación con un trabajo similar de placas con amortiguamiento viscoso[1].

El estudio del amortiguamiento interno (estructural) o histerético, nos remonta al año de 1784, en el cual dicho amortiguamiento fué investigado por primera vez por C.A. Coulomb[2], quién usando un péndulo torsional, demostró experimentalmente que dicho amortiguamiento era causado por un mecanismo micro-estructural y no exclusivamente por la fricción del aire, como se suponía regularmente. Además Coulomb demostro que el amortiguamiento era una función de la amplitud de la vibración.

En 1960, en el trabajo que presentan R.D. Bishop y D.C. Johnson[3] parten de un modelo con amortiguamiento histerético en el cual se ocupa una rigidez compleja, aplicandole una fuerza de excitacion armónica; para 1972 Willian T. Thomson[4] trabaja por su parte un modelo con amortiguamiento de tipo histerético, con base en una rigidez compleja. Thomson demuestra además la eficacia de este modelo para medir la pérdida de energia disipada por ciclo de un amortiguador y hace una comparación con un modelo con amortiguamiento viscoso.

Posteriormente, otros autores que tratan sobre vibración forzada, escuetamente mencionan en sus libros al amortiguamiento histerético, como es el caso de Ray W. Clough y Joseph Penzien[5].

En 1980, A.W. Leissa y K.M. Iyer[6] aplican el amortiguamiento histerético para el caso de cascarones, usando ahora no una rigidez, sino un *Módulo de Young Complejo*, donde se incluyó el *Factor de pérdidas* (η).

En 1981, Werner Soedel[2] trata un modelo de expansión modal para el amortiguamiento histerético, aplicado a sistemas continuos, y en donde también se ocupa un *Módulo Complejo*, $E^* = E(1 + i\eta)$, el cual se considera una muy buena aproximación al caso real de este amortiguamiento.

En dicho trabajo se planteó un modelo, el cual ,sólo quedó establecido teóricamente, sin llegar a ningún resultado practico.

1.2. Objetivos.

Se desarrollará de manera sencilla un modelo matématico que represente una placa amortiguada histeréticamente, y excitada por una carga puntual armónica. La respuesta dinámica se determinará utilizando el enfoque clásico de análisis por expansión modal, ocupando funciones coordenadas. El objetivo principal es determinar una *Ley General* para la respuesta dinámica de una placa simplemente apoyada, bajo las condiciones antes mencionadas. A partir de esto se pretende hacer una comparación con un caso similar de vibracion forzada de placas rectangulares con amortiguamiento viscoso.

1.3. Conceptos.

Placa[9]. Es una lámina de material elástico en dos dimensiones, la cual se halla en un plano. Las placas tienen rigidez a la flexión D, que es

$$D = \frac{E\,h^3}{12(1-\nu^2)}$$

la cual es el resultado de su espesor h y de la elásticidad del material de la placa E y ν. Durante la vibración transversal, las placas se deforman inicialmente por flexión perpendicular a su propio plano. Ejemplos comunes de placas son las ventanas, los muros, las tarjetas de computadora,etc.

Grados de libertad[4]. Es el número de coordenadas independientes que se requieren para describir el movimiento o configuración de un sistema. La configuración se define como la localización geométrica de todas las masas del sistema.

Vibraciones[7]. Los movimientos que se presentan en un sistema elástico por la presencia de fuerzas excitadoras.

Periodo T[7]. Al tiempo T se le nombra período de la vibración, el cual se define también como

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Donde ω es la frecuencia excitadora.

Vibración libre[4]. Se produce cuando un sistema oscila bajo la acción de fuerzas de inercia y elásticas que son inherentes al mismo y, cuando las fuerzas externamente aplicadas son inexistentes. Las vibraciones libres describen el comportamiento natural de los modos de vibración de un sistema.

Vibración forzada[4]. Es la vibración producida por la excitación provocada por fuerzas externas al sistema. Cuando la excitación es oscilatoria, el sistema es obligado a vibrar a la frecuencia de excitación.

Resonancia[4]. Ocurre cuando la frecuencia de excitación coincide con alguna frecuencia natural, produciéndose oscilaciones peligrosamente grandes. Para un sistema no amortiguado se incrementarán sin límite, pero para uno amortiguado, la entrada de energía se disipa con el amortiguador; por lo tanto, la amplitud de la vibración en resonancia para sistemas con amortiguamiento es finita y está determinada por la magnitud del amortiguamiento en el sistema.

Frecuencia natural[9]. Llamada también *Eigenvalor*; Son las frecuencias a las cuales una estructura elástica lineal tiende a vibrar en sus modos naturales. Una estructura puede tener muchas frecuencias naturales. La mas baja de estas es llamada la frecuencia natural fundamental. Cada frecuencia natural esta asociada con una forma modal de deformación. La frecuencia natural puede ser definida en términos de ciclos por segundo (hertz) o en radianes por segundo (rad/seg).

Elementos de un sistema vibratorio[8]. Los elementos de un sistema vibratorio son idealizados por medio de una masa m, una rigidez k (constante de un resorte), el amortiguamiento η y finalmente con una fuerza de excitación F(t), que es la que proporciona la energía que entra al sistema.

Amortiguamiento[3 y 6]. Características del amortiguamiento. Todos los sistemas estructurales dinámicos tienen amortiguamiento en algún grado. El amortiguamiento será de gran importancia si existe un estado continuo de vibración. De hecho, si se proporciona suficiente amortiguamiento, la vibración se elimina completamente. El amortiguamiento se presenta de diversas formas: Pérdida de energía asociada con deslizamiento de conexiones estructurales entre miembros o entre la estructura y los soportes, en algunos casos el amortiguamiento puede deberse a la resistencia al movimiento producido por el aire u otros fluidos alrededor de la estructura. El efecto de amortiguamiento es de oposición al movimiento producido por la fuerza y por lo tanto, la amplitud de la respuesta decrece.

Amortiguamiento histerético[3]. Para propósitos del análisis realizado, el amortiguamiento estructural se supone de tipo histerético; es decir, la fuerza de amortiguamiento es opuesta e inversamente proporcional con la frecuencia de excitación ω, la cual se denota como sigue

$$\text{Fuerza de amortiguamiento} = -\frac{h}{\omega}\dot{x}$$

donde $\dot{x}$ es la velocidad de la masa, h es el coeficiente de amortiguamiento histerético constante, y ω es la frecuencia de excitación de la fuerza. El signo (-) indica que la fuerza es siempre opuesta a la dirección del movimiento.

Módulo de Elasticidad[9]. Llamado módulo de Young; es la relación del cambio de esfuerzos normales entre las deformaciónes dadas para un material. El módulo de elasticidad tiene unidades de presión.

Para algunos materiales, con límites de elasticidad lineal, el módulo es independiente del signo de los esfuerzos aplicados.

Función Coordenada. Es la representación de las formas modales o modos de vibrar de un sistema dado. Cuya característica principal para este modelo es la ortogonalidad entre las funciones coordenadas, que representan los eigenvectores.

Capitulo II.

2.Revisión Literaria.

El estudio de vibración forzada en medios continuos tomando en cuenta el amortiguamiento estructural (o amortiguamiento histerético mejor conocido), es de importancia práctica en la ingeniería civil, ya que todos los materiales tienen en cierto grado una cantidad de amortiguamiento.

Como se mencionó el estudio de este tipo de amortiguamiento se remonta al año de 1784, del cual se realizó una amplia investigación. Sin embargo en 1960 Bishop y Johnson trataron este tipo de amortiguamiento histerético, introduciendolo en modelos de vibración forzada[13], que sólo proporcionaban información cualitativa a cerca de los efectos del amortiguamiento.

Las ecuaciones de movimiento para este modelo propuesto por Bishop y Johnson tambien siguen una ley lineal y además consideran los diferentes movimientos que pueden ocurrir simultáneamente durante la interacción de los modos y por supuesto consideraron una excitación armónica, sabiendo así de antemano que la respuesta sera armónica.

Comienzan su estudio realizando una comparación entre los amortiguamientos viscoso e histerético, ocupando para ello un modelo de un grado de libertad.

Para el caso viscoso se tiene una fuerza f, la cual se denota así (ver figura 2.1.(a))

$$f = k\,x + b\,\dot{x} \tag{2.1.}$$

Donde k es la constante del resorte y b es el coeficiente de amortiguamiento de tipo viscoso. La extensión del resorte tendrá una variación como sigue

$$x = R \operatorname{sen} \omega t \tag{2.2.}$$

Entonces la fuerza f resulta

$$f = k\,R\,\text{sen}\,\omega t + b\,R\,\omega\,\cos\omega t \qquad (2.3.)$$

Estas expresiones de x y f respectivamente estan en función del tiempo t el cual puede ser eliminado, quedando f como función de x, como sigue

$$f = k\,x \pm b\,\omega\sqrt{(R^2 - x^2)} \qquad (2.4.)$$

De donde al graficar la expresión (2.4.) nos resulta la figura 2.2., que nos representa un lazo cerrado, el cual tiene una distorsión, y de la cual podemos medir la energía disipada por el amortiguador viscoso, con la siguiente expresión

$$E = \int f\,dx = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left[k\,R\,\text{sen}\,\omega t + b\,R\,\omega\cos\omega t\right] R\,\omega\cos\omega t\,dt \qquad (2.5.)$$

La integral nos da

$$\boxed{E = b\,R^2\,\omega\,\pi} \qquad (2.6.)$$

De la expresión podemos ver que la energía dispada por el amortiguador en un ciclo, depende directamente de la frecuencia de excitación, y cuyo valor tiende a cero cuando la frecuencia así lo hace, lo que resulta ser algo falso, porque si hay una pérdida de energía por ciclo en el resorte, debida a la imperfección elástica del material, con lo cual se ve que debe haber una ligera independencia con la frecuencia.

Para conseguir un modelo en el que si se presente independencia con la frecuencia, se da un coeficiente de amortiguamiento que es inversamente proporcional a la frecuencia ω, esto igual a $-h\dot{x}/\omega$, donde h es una constante.

El amortiguamiento que presenta estas caracteristicas es el llamado amortiguador histerético, el cual se ilustra en la figura 2.1.(b). Ahora la energía disipada por el amortiguador en un ciclo se da por

$$\boxed{E = h\, R^2\, \pi} \tag{2.7.}$$

De esta expresión se puede observar la independencia total de la frecuencia, para este modelo con amortiguamiento histerético.

Para este segundo caso, se toma un comportamiento armónico, y de la relación fuerza-desplazamiento, se introduce la rigidez compleja como sigue

$$K = k + \imath\, h \tag{2.8.}$$

que va a representar un sistema amortiguado histeréticamente, dando una fuerza

$$f = K\, x \tag{2.9.}$$

en donde

$$f = (k + \imath h)\, x \tag{2.10.}$$

introduciendo al término adimensional $\mu = h/k$, que es una medida adimensional del amortiguamiento histerético nos queda

$$f = k\,(1 + \imath\mu)\, x \tag{2.11.}$$

Para este caso y como un siguiente paso se eliminó la acción del resorte, con lo cual resulta una curva de f contra x como la ilustrada en la figura 2.3., que es una elipse cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{f^2}{h^2 R^2} = 1 \tag{2.12.}$$

De la cual la energía disipada por el amortiguador será $E = h\, R^2\, \pi$ que es como el de la ecuación (2.7.), pero la diferencia es que ahora la figura no tiene su eje inclinado, lo cual es debido a la distorsión de cortante provocado por el resorte.

Con un procedimiento análogo al del primer caso, obtenemos una expresión de la fuerza f en función de x, eliminando al tiempo t

$$f = k\,x \pm h\sqrt{(R^2 - x^2)} \tag{2.13.}$$

la cual se ilustra en la figura 2.4., que es similar a la 2.2.. Por estas razones para calcular la energía disipada debida a la imperfección elástica, es mejor emplear un modelo histerético.

Tomando lo anterior como base de la teoría de amortiguamiento histerético, se parte de un modelo de un grado de libertad, como el de la figura 2.5., del cual la ecuación que gobierna el desplazamiento x de la masa "M" es

$$M\,\ddot{x} + \frac{h}{\omega}\,\dot{x} + k\,x = F\,e^{i\omega t} \tag{2.14.}$$

La solución a esta ecuación, considerando un movimento armónico simple es

$$x = X\,e^{i\omega t} \tag{2.15.}$$

o

$$x = \alpha\,F\,e^{i\omega t} \tag{2.16.}$$

Lo que nos conduce a

$$\left[-M\,\omega^2 + \left(k + ih\right)\right] X\,e^{i\omega t} = F\,e^{i\omega t} \tag{2.17.}$$

De esta ecuacion (2.17.) se obtiene la receptancia[3] α que es

$$\alpha = \left[\frac{k - M\,\omega^2}{(k - M\,\omega^2)^2 + h^2}\right] - i\left[\frac{h}{(k - M\,\omega^2)^2 + h^2}\right] \tag{2.18.}$$

De donde el ángulo de fase η esta dado por

$$\operatorname{Tan} \eta = \frac{h}{k - M\,\omega^2} \tag{2.19.}$$

La expresión (2.18) se ilustra en la figura 2.6. para el caso particular de un sistema de masa unitaria, una rigidez de 8 y valores de de μ de 0.02, 0.2, y 0.6, en donde a) y b) ilustran la parte real y la imaginaria contra ω, en c) se muestra la parte real e imaginaria en un diagrama de Argand y finalmente en d) se muestra de manera tridimensional.

Introduciendo a la expresión (2.16.) un factor de amplificación adimensional "n" lo que resulta conveniente, y queda

$$x = n \left(\frac{F}{k} \right) e^{i(\omega t - \eta)} \tag{2.20.}$$

donde

$$n = \frac{1}{\sqrt{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \right)^2 + \mu^2 \right]}} \tag{2.21.}$$

además de la ecuación (2.19.), la cual se reescribe así

$$\operatorname{Tan} \eta = \frac{\mu}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}} \tag{2.22.}$$

De la ec.(2.21.) se ve que n da la resonancia cuando ω / ω_1 es igual 1 y μ es igual a cero, y de la ec.(2.22.) η tiende al valor de $\operatorname{Tan}^{-1} \mu$ cuando ω / ω_1 tiende a cero, a diferencia del caso viscoso que cuando ω / ω_1 tiende a cero el valor de η tiende también a cero.

Con lo anterior se define el factor Q como un múltiplo de la relación de la energía almacenada en resonancia con la energía disipada en un ciclo, esto es

$$Q = \frac{k}{h} = \frac{1}{\mu} \qquad (2.23.)$$

Tomando como base este factor de amplificación en resonancia, se define la amplitud de resonancia R_{res} así

$$R_{res} = Q \frac{F}{k} \qquad (2.24.)$$

Ahora, introduciendo en la ecuación (2.19.) el factor Q nos queda

$$\mathrm{Cot}\ \eta = Q \left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \right] \qquad (2.25.)$$

Teniendo esta teoría desarrollada para amortiguamiento histerético pero para un modelo de un grado de libertad, Bishop y Johnson elaboraron un nomograma (ver figura 2.7.) que demostraba la proporcionalidad inversa de la respuesta con el amortiguamiento histerético.

Posteriormente por 1975 Penzien y Clough[5], nos hablan del amortiguamiento histerético de manera muy reducida, de que el modelo con amortiguamiento histerético es una manera muy buena para medir la energía disipada en un ciclo de carga para un sistema de un grado de libertad. Sus resultados experimentales demostraban que el modelo con amortiguamiento histerético presentaba independencia con respecto a la frecuencia, con lo cual realizó una comparación entre un modelo con amortiguamiento viscoso y otro con amortiguamiento histerético. Para el primero encontró una relación de amortiguamiento viscoso que es

$$\zeta = \frac{C}{C_c} \qquad (2.26.)$$

de la cual se veía la dependencia con la frecuencia. y para el segundo caso, del amortiguamiento histerético estaba definido como una fuerza de amortiguamiento en términos de la velocidad pero proporcional a los desplazamientos, la cual es

$$f_D = \zeta\, k\, |v|\, \frac{\dot{v}}{|\dot{v}|} \qquad (2.27.)$$

de donde ζ es el coeficiente de amortiguamiento histerético, el cual define las fuerzas de amortiguamiento como una fracción elástica de la fuerza de rigidez, además se nota su independencia con la frecuencia.

Por el año de 1980 en un artículo elaborado por A.W. Leissa y K.M. Iyer [6] se presenta un modelo de vibración forzada tomando un amortiguamiento de tipo estructural (histeretico), aplicado a cascarones, en el cual ellos introducen en las ecuaciones de movimiento un módulo complejo $E^{*}=(1+\imath\eta)$, en donde $\imath = \sqrt{-1}$, y es η el llamdo factor de pérdidas.

Ocupan un rango de valores para el factor de pérdidas que va de 0.001 a 0.1, que cubren a varios tipos de materiales, como el acero, aluminio, etc.

Dentro de los resultados arrojados por este trabajo, está el que en los espectros de respuesta presentados, los picos se presentaban para las frecuencias de resonancia, y el más alto se daba cuando coincidía con la frecuencia natural más baja del sistema, y de sus resultados se nota que la respuesta tenia una proporcionalidad inversa al valor del factor de pérdidas.

Finalmente en el trabajo presentado en 1981 por Werner Soedel en el cual se emplea un modelo llamado de representación espectral o expansión modal como es mejor conocido, dicho autor parte del hecho de conocer los eigenvalores (frecuencias naturales), con lo que se llega a una solución casi exacta.

Soedel emplea su modelo para el caso de amortiguamiento histerético, primero partiendo de un espécimen sometido a tensión ciclica, obteniendo con ello un lazo histerético, en el que si dividimos la fuerza entre la sección transversal del espécimen y el desplazamiento por la longitud del espécimen, se obtiene una gráfica de esfuerzo-deformación de forma elíptica, de la cual el área nos representa la energía disipada por ciclo y volumen.

Esta forma inicial no fue muy aceptada, pero fue la base, para aplicar el módulo complejo $E^* = E\ (1 + i\eta)$ a las ecuaciones de movimiento del modelo presentado en esta tesis, en la que la respuesta transitoria no será considerada pues tenemos el caso de una fuerza excitadora armónica, para la cual la respuesta establecida es más importante.

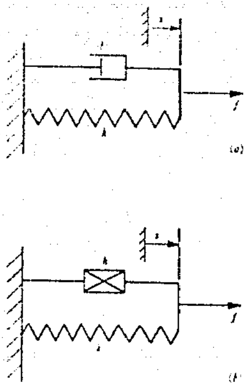


Figura 2.1.

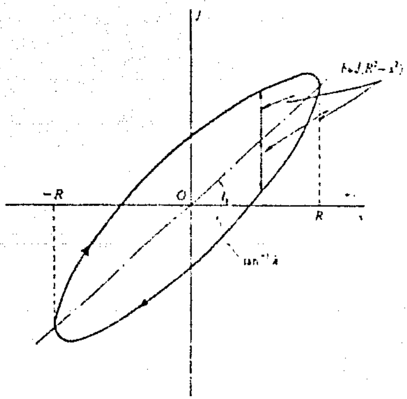


Figura 2.2.

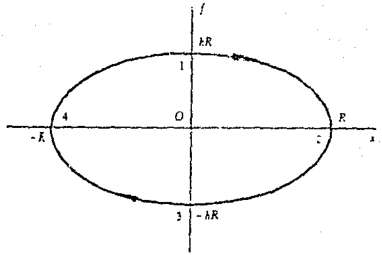


Figura 2.3.

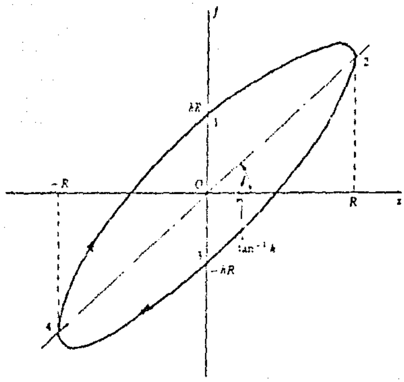


Figura 2.4.

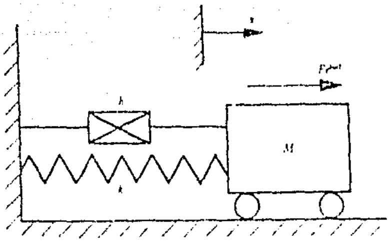


Figura 2.5

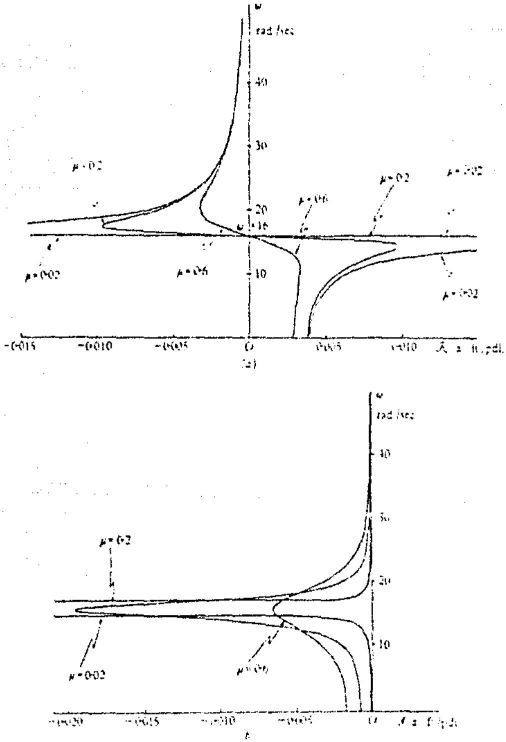
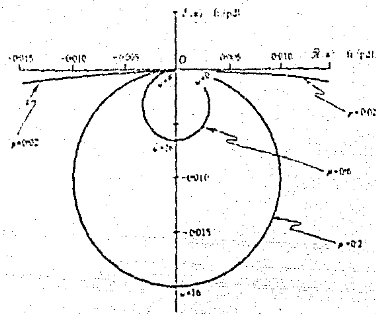
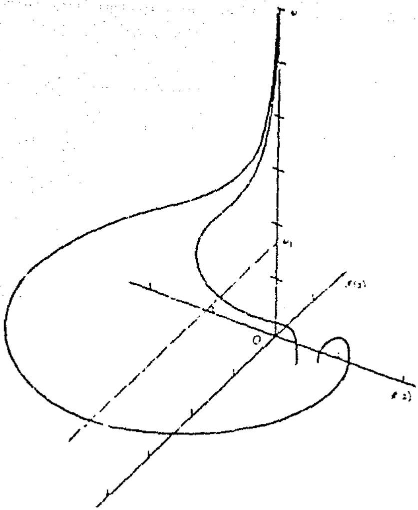


Figura 2.6 a) y b)

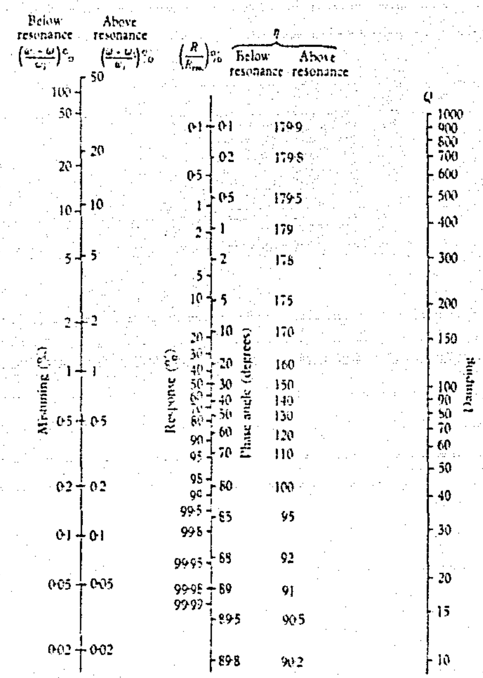


c)



d)

Figura 2.6.c) y d)



Below resonance
Above resonance
Below resonance
Above resonance
Mistuning (%)
Response (%)
Phase angle (degrees)
Q
Damping

Figura 2.7.

Capítulo III.

3.Modelo Matemático.

En este capítulo se presenta el método de operadores con expansión modal aplicado a la vibración forzada de placas y en general de medios continuos. El método se simplifica manejando algunas expresiones del Análisis de Fourier para lo cual se supone que existen las llamadas Series de Fourier Generalizadas con cualquier condición de frontera. Con base en este método se obtiene un modelo matemático que representa entre otros problemas, el de una placa simplemente apoyada en sus bordes, amortiguada histeréticamente y excitada por una carga puntual armónica. Una vez planteado y resuelto dicho problema, nos enfocaremos a determinar la ley que gobierna el problema de placas , para verificar que sea una serie de rectas como en el caso del amortiguamiento viscoso equivalente.[1]

3.1 Vibración Forzada en Medios Continuos.

Reviste gran interés para la ingeniería el estudio de la vibración forzada en medios continuos; conociendo los eigenvalores y los eigenvectores es posible obtener la solución a problemas de vibración forzada en términos de dichos elementos. Este enfoque es conocido como representación espectral o expansión modal y data del trabajo de Bernoulli en 1747 que fué probado por L. Euler en 1753.

Las fuerzas se suponen independientes del movimiento del medio continuo y es por lo tanto aplicable a sistemas conservativos, ésta representa una aproximación aceptable para la gran mayoría de los casos de vibración de medios continuos en ingeniería.

3.1.1. El Factor de Participación Modal.

Una fuerza excitará varios de los modos naturales de un sistema continuo en diferentes cantidades. La magnitud de participación de cada modo en la respuesta dinámica total es definida por el factor de participación modal. Este factor puede resultar nulo para ciertos modos y puede llegar a ser grande para otros, dependiendo de la naturaleza de la excitación.

En un sentido matemático, los modos naturales del sistema continuo representan vectores y de manera más general funciones ortogonales o al menos, linealmente independientes que satisfacen las condiciones de frontera de un sistema; este espacio funcional puede ser usado para representar la respuesta de la estructura. En los casos de sistemas con un número finito de grados de libertad, el espacio funcional es de dimensión finita y el número de vectores o modos naturales es igual al número de grados de libertad. Para sistemas continuos, tales como placas, el número de grados de libertad es infinito. Esto significa que para el problema de equilibrio de sistemas continuos, tridimensionales, la solución general para los desplazamientos será una serie infinita de la forma siguiente :

$$u_i(\alpha_1,\alpha_2,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k(t)\ U_{ik}(\alpha_1,\alpha_2) \qquad (3.1.1.1.)$$

en donde $i = 1,2,3$. Las variables U_{ik} son las componentes modales naturales en las tres direcciones principales. Los factores de participación modal η_k son desconocidos y se determinarán de la manera siguiente.

Las ecuaciones de movimiento son de la forma que sigue, para el caso de amortiguamiento histerético con carga puntual armónica :

$$(1 + j\eta)L_i(u_1,u_2,u_3) - \rho h\ddot{u}_i = - q_i^{*}\ e^{j\omega t} \qquad (3.1.1.2.)$$

La ec.(3.1.1.2.) representa el modelo histerético, que es sólo la ecuación de movimiento, a la cual se le introduce el módulo complejo.

En donde $L_i(u_1,u_2,u_3)$ representa los diversos operadores diferenciales, $E(1 + j\eta)$ es el módulo complejo y sustituye al módulo de Young E, de ahí η sin subíndice es el llamado factor de pérdidas histerético, el cual se considerará igual en las tres direcciones principales; lo que no es necesariamente cierto. Debido a que los valores de amortiguamiento son difíciles de obtener teóricamente y en vista de que se tendrá un mayor valor cualitativo que cuantitativo, (además de que ofrece ventajas en el cálculo) se decidió adoptarlo como uniforme, sin embargo este amortiguamiento en particular, según Soedel[2] tiene una variación tanto con la frecuencia como con la amplitud de las deformaciones.

El término general de fuerza de la ec.(3.1.1.2.) está ahora restringido a excitación armónica, con q_i^* representando la distribución de la carga de presión.

Ahora, sustituyendo la ec.(3.1.1.1.) en la ec.(3.1.1.2.) da

$$\sum_{k=1}^{\infty} [(1 + j\eta)\ \eta_k\ L_i(U_{1k},U_{2k},U_{3k}) - \rho h\ddot{\eta}_k U_{ik}] = - q_i^*\ e^{j\omega t} \qquad (3.1.1.3.)$$

Del análisis de valores característicos, donde $\eta = 0$ y $q_i = 0$, se obtiene la identidad

$$L_i(U_{1k},U_{2k},U_{3k}) = - \rho h\omega_k^2\ U_{ik} \qquad (3.1.1.4.)$$

Al sustituir la ec.(3.1.1.4.) en la ec.(3.1.1.3.) obtenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\rho h\ddot{\eta}_k + \rho h(1 + j\eta)\omega_k^2\ \eta_k] U_{ik} = q_i^*\ e^{j\omega t} \qquad (3.1.1.5.)$$

Aprovechando la ortogonalidad de los modos naturales U_{ik}, procedemos a multiplicar ambos miembros de la ec.(3.1.1.5.) por un modo U_{ip}, como en un análisis de Fourier, donde p puede ser igual a k o diferente y se obtiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\rho h\ddot{\eta}_k + \rho h(1 + j\eta)\omega_k^2\ \eta_k] U_{ik}\ U_{ip} = q_i^*\ U_{ip} e^{j\omega t} \qquad (3.1.1.6.)$$

La cual en forma expandida se puede escribir como se muestra a continuación :

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\rho h\ddot{\eta}_k + \rho h(1 + j\eta)\omega_k^2\ \eta_k] U_{ik}\ U_{ip} = q_i^*\ U_{ip} e^{j\omega t} \qquad (3.1.1.7.)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}[\rho h\ddot{\eta}_k + \rho h(1 + j\eta)\omega_k^2\ \eta_k]U_{2k}\ U_{2p} = q_2^{\bullet}\ U_{2p}e^{j\omega t} \qquad (3.1.1.8.)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}[\rho h\ddot{\eta}_k + \rho h(1 + j\eta)\omega_k^2\ \eta_k]U_{3k}\ U_{3p} = q_3^{\bullet}\ U_{3p}e^{j\omega t} \qquad (3.1.1.9.)$$

Sumando las ecuaciones (3.1.1.7.) a (3.1.1.9.) e integrando sobre la superficie del medio continuo y a lo largo de las coordenadas α_1 y α_2, nos quedará la siguiente expresión :

$$\sum_{k=1}^{\infty}[\rho h\ddot{\eta}_k + \rho h(1+j\eta)\omega_k^2\ \eta_k]\int_{\alpha 2}\int_{\alpha 1}[U_{1k}U_{1p} + U_{2k}U_{2p} + U_{3k}U_{3p}]A_1A_2d\alpha_1 d\alpha_2 =$$

$$= \int_{\alpha_2}\int_{\alpha_1}[q_1^{\bullet}\ U_{1p} + q_2^{\bullet}\ U_{2p} + q_3^{\bullet}\ U_{3p}]A_1A_2d\alpha_1 d\alpha_2 \qquad (3.1.1.10.)$$

Utilizando las ecuaciones de ortogonalidad, definidas por la siguientes ecuaciones[2]:

$$\int_{\alpha_2}\int_{\alpha_1}[U_{1k}U_{1p} + U_{2k}U_{2p} + U_{3k}U_{3p}]A_1A_2d\alpha_1 d\alpha_2 = \delta_{kp}N_k \qquad (3.1.1.11.)$$

en donde

$$\delta_{kp} = \begin{cases} 1 \text{ si } p = k \\ 0 \text{ si } p \neq k \end{cases} \qquad (3.1.1.12.)$$

Con esto es posible suprimir la sumatoria ya que todos los términos se eliminan, exceptuando los términos en los cuales p=k, con lo cual la expresión queda reducida a lo siguiente :

$$\ddot{\eta}_k + (1 + j\eta)\, \omega_k^2\, \eta_k = F_k^*\, e^{j\omega t} \qquad (3.1.1.13.)$$

de donde

$$F_k^* = \frac{1}{\rho h\, N_k} \int_{\alpha_2}\int_{\alpha_1} [q_1^*\, U_{1k} + q_2^*\, U_{2k} + q_3^*\, U_{3k}] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \qquad (3.1.1.14.)$$

y

$$N_k = \int_{\alpha_2}\int_{\alpha_1} [U_{1k}^2 + U_{2k}^2 + U_{3k}^2] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \qquad (3.1.1.15.)$$

De este modo, si tomamos k términos de las series de expansión modal como aproximación a un número infinito, se tendrá la solución de la ecuación, definiendo el factor de participación modal para k funciones de participación. Las funciones de fuerza q_1^*, q_2^*, y q_3^* han sido dadas y las componentes modales U_{1k}, U_{2k}, y U_{3k} y las frecuencias naturales ω_k tienen que ser conocidas. Además la densidad de masa por unidad de superficie del sistema continuo ρh es obviamente conocida también y el factor de pérdidas η debe ser dado o estimado.

3.1.2. Condiciones Iniciales

Para obtener la solución completa de la ec.(3.1.1.13.), se requieren dos condiciones iniciales para cada factor de participación modal. Estas son el desplazamiento inicial $u_i(\alpha_1,\alpha_2,0)$ y la velocidad inicial $\dot{u}_i(\alpha_1,\alpha_2,0)$, que se deben especificar para todos los puntos del sistema continuo. En gran cantidad de casos practicos las condiciones iniciales son cero, excepto para los problemas en donde ocurren cambios periódicos de condiciones de frontera.

Cuando se requiere determinar la solución establecida, por ser ésta de mayor importancia que la transitoria, las condiciones iniciales se pueden tomar iguales a cero.

La ec.(3.1.1.1.), puede escribirse así, para las condiciones de frontera

$$u_i(\alpha_1,\alpha_2,0)=\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k(0)\;\; U_{ik}(\alpha_1,\alpha_2) \qquad (3.1.2.1.)$$

$$\dot{u}_i(\alpha_1,\alpha_2,0)=\sum_{k=1}^{\infty}\dot{\eta}_k(0)\;\; U_{ik}(\alpha_1,\alpha_2) \qquad (3.1.2.2.)$$

Estas ecuaciones son resueltas para $\eta_k(0)$ y $\dot{\eta}_k(0)$, y para el instante $t=0$. Multiplicando la ec.(3.1.2.1.) por $U_{ip}(\alpha_1,\alpha_2)$, donde $p=k$ o $p\neq k$, se obtiene

$$u_i(\alpha_1,\alpha_2,0)U_{ip} = \sum_{k=1}^{\infty}\eta_k(0)\;\; U_{ik}U_{ip} \qquad (3.1.2.3.)$$

En forma expandida, para $i=1,2$ y 3, da

$$u_1(\alpha_1,\alpha_2,0)U_{1p} = \sum_{k=1}^{\infty}\eta_k(0)\;\; U_{1k}U_{1p} \qquad (3.1.2.4.)$$

$$u_2(\alpha_1,\alpha_2,0)U_{2p} = \sum_{k=1}^{\infty}\eta_k(0)\;\; U_{2k}U_{2p} \qquad (3.1.2.5.)$$

$$u_3(\alpha_1,\alpha_2,0)U_{3p} = \sum_{k=1}^{\infty}\eta_k(0)\;\; U_{3k}U_{3p} \qquad (3.1.2.6.)$$

Sumando estas ecuaciones e integrando sobre la superficie del sistema continuo, da

$$\int_{\alpha_2}\int_{\alpha_1}[u_1(\alpha_1,\alpha_2,0)U_{1p}+u_2(\alpha_1,\alpha_2,0)U_{2p}+u_3(\alpha_1,\alpha_2,0)U_{3p}]A_1A_2d\alpha_1 d\alpha_2=$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k(0)\;\int_{\alpha_2}\int_{\alpha_1}[U_{1k}U_{1p}+U_{2k}U_{2p}+U_{3k}U_{3p}]A_1A_2d\alpha_1 d\alpha_2 \qquad (3.1.2.7.)$$

Aplicando las condiciones de ortogonalidad de la ec.(3.1.1.11.), eliminamos la sumatoria del lado derecho de la ecuación que es cero para un p excepto cuando p=k. Entonces se obtiene :

$$\eta_k(0) = \frac{1}{N_k}\int_{\alpha_2}\int_{\alpha_1}[u_1(\alpha_1,\alpha_2,0)U_{1k}+u_2(\alpha_1,\alpha_2,0)U_{2k}+$$

$$+\ u_3(\alpha_1,\alpha_2,0)U_{3k}]A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2 \qquad (3.1.2.8.)$$

de donde N_k está dada por la ec.(3.1.1.15.).

De forma semejante, se resuelve la ec.(3.1.2.2.) para la segunda condición inicial, y da :

$$\dot{\eta}_k(0) = \frac{1}{N_k}\int_{\alpha_2}\int_{\alpha_1}[\dot{u}_1(\alpha_1,\alpha_2,0)U_{1k}+\dot{u}_2(\alpha_1,\alpha_2,0)U_{2k}+$$

$$+\ \dot{u}_3(\alpha_1,\alpha_2,0)U_{3k}]A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2 \qquad (3.1.2.9.)$$

3.1.3.Solución de la Ecuación del Factor de Participación Modal.

La ecuación del factor de participación modal es la ecuación de un oscilador simple. Así, podemos interpretar la vibración forzada del sistema continuo considerando a éste como compuesto de oscilaciones simples, donde cada oscilador consiste en el sistema continuo restringido a vibrar en uno de sus modos naturales. Todas estas oscilaciones responden simultáneamente y la vibración total del sistema continuo, es simplemente el resultado de la adición (superposición) de todas la vibraciones individuales.

3.1.3.1.Respuesta Armónica Establecida.

Un caso muy importante de tipo práctico ocurre cuando la carga sobre el sistema continuo varía armónicamente con el tiempo y cuando la generación de vibraciones transitorias no es de interés, debido a que se eliminan rápidamente.

Para dar la solución podríamos utilizar la integral de convolución, pero para este caso será sólo requerida la ec.(3.1.1.13.), para la cual la respuesta estacionaria será de gran interés, y la respuesta tanto,como la carga, serán armónicas, pero el movimiento estará retrasado un ángulo ϕ_k, denominado ángulo de fase, por lo tanto resultará que

$$\eta_k = A_k e^{j(\omega t - \phi_k)} \qquad (3.1.3.1.1.)$$

Sustituyendo en la ec.(3.1.1.13.) nos da

$$A_k e^{-j\phi_k} = \frac{F_k^*}{(\omega_k^2 - \omega^2) + j\eta\omega_k^2} \qquad (3.1.3.1.2.)$$

La magnitud de la respuesta A_k es, por lo tanto

$$A_k = \frac{F_k^*}{\omega_k^2 \sqrt{[1-(\omega/\omega_k)^2]^2 + \eta^2}} \qquad (3.1.3.1.3.)$$

El ángulo de fase es

$$\phi_k = \tan^{-1} \frac{\eta}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_{mn}} \right)^2} \qquad (3.1.3.1.4.)$$

3.1.4.Sistemas Continuos.

3.1.4.1. Vibración Forzada en Placas.

I.)En el caso especial de una placa, el problema esta representado por las ecs. (3.1.3.1.3.) y (3.1.3.1.4.) pero F_k^* se simplificará para el caso de placas con movimiento transversal dominante como sigue :

$$F_k^* = \frac{1}{\rho h \; N_k} \int_{\alpha_2}\int_{\alpha_1} q_3^* \; U_{3k} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \qquad (3.1.4.1.1.)$$

en donde

$$N_k = \int_{\alpha_2}\int_{\alpha_1} U_{3k}^2 A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \qquad (3.1.4.1.2.)$$

II.)La solución para una placa con cargas contenidas en su plano, involucrará la siguiente función F_k^*, de acuerdo a la nomenclatura de la figura 3.1.4.1.1. que a continuación se muestra :

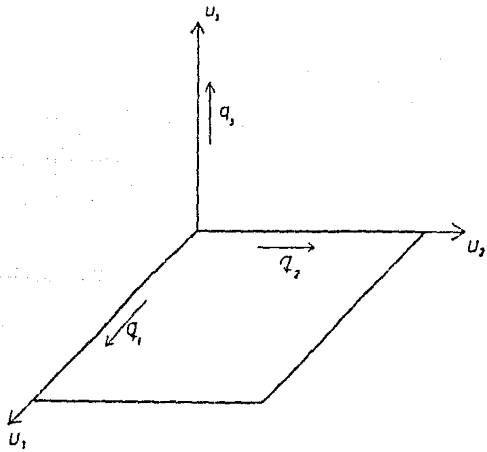


figura 3.1.4.1.1.

$$F_k^* = \frac{1}{\rho h\ N_k} \int_{\alpha_2}\int_{\alpha_1} [q_1^* \ U_{1k} + q_2^{\circ} \ U_{2k}] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \qquad (3.1.4.1.3.)$$

en donde

$$N_k = \int_{\alpha_2}\int_{\alpha_1} [U_{1k}^2 + U_{2k}^2] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \qquad (3.1.4.1.4.)$$

III.)En el caso especial de un anillo obtenemos igualmente F_k^* como sigue :

$$F_k^* = \frac{1}{\rho h\ N_k} \int_{\alpha_2}\int_{\alpha_1} [q_1^* \ U_{1k} + q_3^* \ U_{3k}] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \qquad (3.1.4.1.5.)$$

en donde

$$N_k = \int_{\alpha_2}\int_{\alpha_1} [U_{1k}^2 + U_{3k}^2] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \qquad (3.1.4.1.6.)$$

IV.)Para aproximaciones a un cascarón y placas, cuando los modos transversales son dominantes, las ecs.(3.1.4.1.1.) y (3.1.4.1.2.) se aplican. Esta resulta ser una buena aproximación ya que $|U_{3k}| >>> |U_{1k}|$, $|U_{2k}|$ para modos con movimiento transversal dominante.

3.1.4.2. Vibración Forzada en Vigas.

Para la vibracion transversal de una viga

$$F_k^* = \frac{1}{\rho h\ N_k} \int_{\alpha_2}\int_{\alpha_1} q_3^* \ U_{3k} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \qquad (3.1.4.2.1.)$$

en donde

$$N_k = \int_{\alpha_2}\int_{\alpha_1} U_{3k}^2 A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \qquad (3.1.4.2.2.)$$

3.2. Vibraciones Libres en Placas.

3.2.1. Cálculo de Frecuencias Naturales y Funciones Coordenadas en Placas.

A partir de las ecuaciones operacionales de movimiento se obtiene la ecuación de vibraciones libres para placas.

Se tomarán sólo fuerzas de inercia transversales, pues se supone que el desplazamiento transversal es el dominante en el sistema. Se puede demostrar que para un amortiguamiento y fuerzas externas nulas las ecuaciones de movimiento se reducen a la siguiente expresión :

$$\nabla^2 u_z + \frac{\rho h}{D}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = 0 \qquad (3.2.1.1.)$$

de donde u_z es la deflexión transversal ó perpendicular al plano de la placa.

Para una placa simplemente apoyada $u_z=u_o(\alpha_1,\alpha_2,0)$ y $\partial u_z/\partial t=Vo(\alpha_1,\alpha_2,0)$, siendo u_o, y Vo las condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad. Por otro lado, de la ecuación (3.2.1.1.), se puede demostrar que las frecuencias naturales de oscilación de placa estan dadas por :

$$\omega_k = \omega_{mn} = \pi^2\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right]\sqrt{\frac{D}{\rho h}} \qquad (3.2.1.2.)$$

en donde

ω_{mn} -- Es la frecuencia natural del sistema en el modo (m,n).

a y b -- Las dimensiones de la placa Figura 3.2.1.

m y n -- Los números modales a lo largo de los dominios de longitud a y b .Figura 3.2.2.

D -- Es la rigidez a la flexión para una placa simplemente apoyada.

ρ -- Densidad del material de la placa por unidad de volumen.

h -- Espesor de la placa.

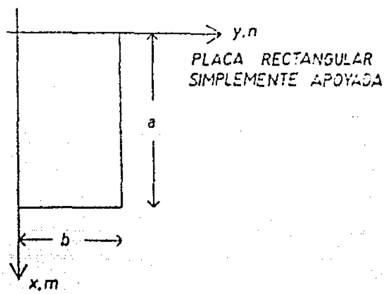
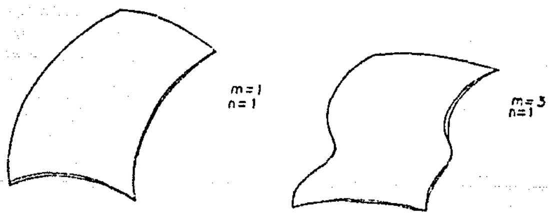


figura 3.2.1.



CONFIGURACION MODAL

figura 3.2.2.

V.G.Rekarch [11] investigó las oscilaciones propias de una placa rectangular, con sus cuatro lados articulados, figura 3.2.3.. La función coordenada que satisface dichas condiciones de frontera es :

$$U_{mn} = \text{Sen}\ \frac{m\pi\alpha_1}{a}\ .\ \text{Sen}\ \frac{n\pi\alpha_2}{b} \qquad (3.2.1.3.)$$

Cuya forma general es :

$$\phi(\alpha_1,\alpha_2) = A\ \text{sen}\ B\alpha_1\ \text{sen}\ C\alpha_2 \qquad (3.2.1.4.)$$

en donde $B = \frac{m\pi}{a}$ y $C = \frac{n\pi}{b}$

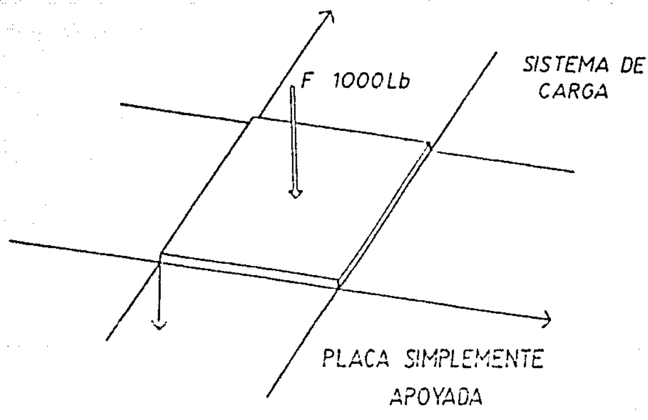


figura 3.2.3.

3.3. Amortiguamiento Histerético.

El amortiguamiento estructural es caracterizado por el hecho de que si tenemos un espécimen sometido a pruebas cíclicas en tensión y en compresión, obtenemos un lazo histerético como el mostrado en la figura 3.3.1., en la cual el área sombreada del lazo es la energía total disipada por ciclo. Si ahora dividimos la fuerza por la sección transversal del espécimen y el desplazamiento por la longitud del espécimen, llegamos a una gráfica de esfuerzo-deformación de este fenómeno en la forma indicada en la figura 3.3.1.. El área es ahora igual a la energía disipada por ciclo y por unidad de volumen.

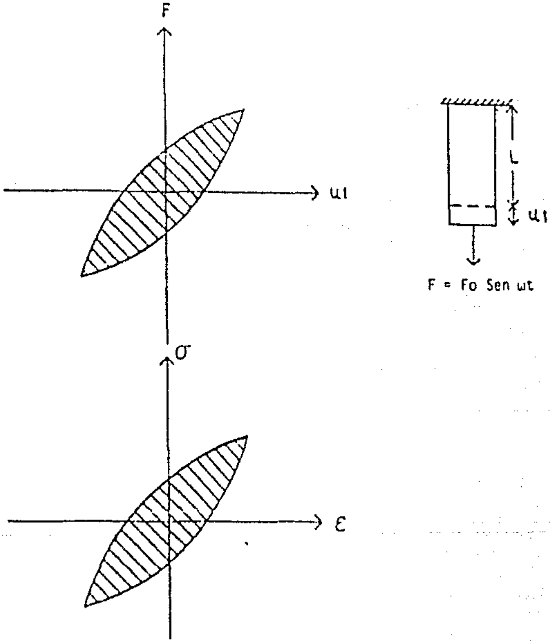


figura 3.3.1.

Desafortunadamente, este camino no es totalmente aceptado, sin embargo es una buena aproximación por medio de la aplicación del llamado módulo complejo que es igual a $E(1+j\eta)$.

Para comenzar tenemos, de la ley de *HOOK*, lo siguiente

$$\sigma = E\varepsilon \tag{3.3.1.}$$

Ahora para un movimiento armónico

$$\sigma = \sigma_{max} \text{ sen } \omega t \tag{3.3.2.}$$

en donde

$$\sigma_{max} = \frac{F_0}{A}$$

y de la cual obtenemos

$$\varepsilon = \frac{\sigma_{max}}{E} \text{ sen } \omega t \tag{3.3.3.}$$

Ahora graficando σ como una función ε dada, como era de esperarse resulta una recta, y cuando la línea describe una elipse que adquiere amplitud como una resemblanza a un lazo histerético, remplazamos el valor E por $E(1+j\eta)$ llamado módulo complejo, donde η es el denominado factor de pérdidas histerético. Ahora sustituimos el módulo complejo en la ec.(3.3.3.), obteniéndose

$$\varepsilon = \frac{\sigma_{max}}{E(1+j\eta)} \text{ sen } \omega t \tag{3.3.4.}$$

multiplicando por su conjugado

$$\varepsilon = \frac{\sigma_{max}}{E(1+j\eta)} \text{ sen } \omega t \; \frac{(1-j\eta)}{(1-j\eta)}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_{max}}{E(1+\eta^2)} \text{ sen } \omega t \; (1-j\eta)$$

Teniendo que $(1+\eta^2) = \sqrt{1+\eta^2} \; \sqrt{1+\eta^2}$

$$\epsilon = \frac{\sigma_{max}}{E\sqrt{1+\eta^2}} \text{ sen } \omega t \frac{(1-j\eta)}{\sqrt{1+\eta^2}} \qquad (3.3.5.)$$

$$\phi = \tan^{-1}\eta \qquad ó \qquad \eta = \tan\phi$$

De la figura 3.3.2. tenemos :

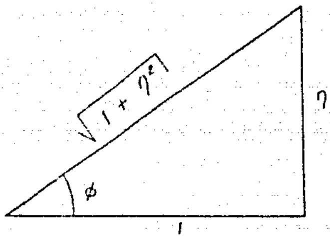


figura 3.3.2.

$$\text{sen } \phi = \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} \qquad \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}$$

Sustituyéndolas en la ec.(3.3.5.)

$$\epsilon = \frac{\sigma_{max}}{E\sqrt{1+\eta^2}} (\cos\phi - j \text{ sen } \phi) \text{ sen } \omega t$$

de donde, para valores típicos de η [6] que son pequeños, tenemos que

$$\phi \approx \eta \qquad \text{y por lo tanto } \sqrt{1+\eta^2} \approx 1$$

Finalmente obtenemos que

$$\varepsilon = \frac{\sigma_{max}}{E} \operatorname{sen} (\omega t - \eta) \qquad (3.3.6.)$$

Graficando σ como función de ε en la figura 3.3.3. da una elipse con semiejes dados por las siguientes expresiones :

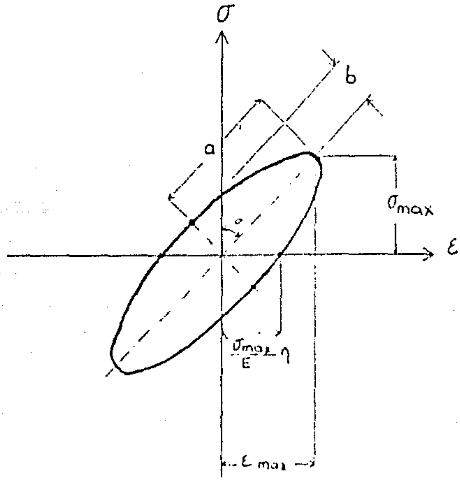


figura 3.3.3.

$$a = \frac{\sigma_{max}}{\cos \alpha} \qquad (3.3.7.)$$

$$b = \frac{\sigma_{max}}{E} \eta \cos \alpha \qquad (3.3.8.)$$

Entonces el área de la elipse es la energía disipada por ciclo y por unidad de volumen y nos da

$$E_I = \frac{\pi}{E} \sigma_{max}^2 \eta = \pi E \varepsilon_{max}^2 \eta \qquad (3.3.9.)$$

Ahora la energía total disipada por ciclo en el espécimen es :

$$E_T = L\, b\, h\, \pi\, E\, \varepsilon_{max}^2\, \eta \qquad (3.3.10.)$$

Por lo cual la energía máxima de deformación en el espécimen de prueba será

$$U_{max} = \frac{L\, b\, h}{2} \sigma_{max}\, \varepsilon_{max} = \frac{L\, b\, h}{2} E\, \varepsilon_{max}^2 \qquad (3.3.11.)$$

encontramos que

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \frac{E_T}{U_{max}} \qquad (3.3.12.)$$

Lo que significa que $2\pi\eta$ define la relación de la energía disipada por ciclo a la energía de deformación de la máxima amplitud. De este modo, en el caso de un cascarón, podemos argumentar que

$$E_T = 2\pi\eta\, U_{max} \qquad (3.3.13.)$$

Donde U_{max} es la energía de deformación del cascarón en la amplitud máxima. La energía disipada por ciclo y por unidad de superficie es entonces

$$E_d = \frac{2\pi\eta}{A} U_{max} \qquad (3.3.14.)$$

En donde A es el área de la superficie de referencia del cascarón, placa o viga. De este modo, el coeficiente de amortiguamiento viscoso equivalente λ es

$$\lambda = \frac{2\, U_{max}}{\omega \int\int_A (U_1^2 + U_2^2 + U_3^2)\, dA} \eta \qquad (3.3.15.)$$

Utilizando el método de Rayleigh, en la referencia [1] se estableció que

$$\omega_k^2 = \frac{2\, U_{max}}{\rho h \int\int_A (U_1^2 + U_2^2 + U_3^2)\, dA} \qquad (3.3.16.)$$

De lo cual podemos establecer una relación directa entre el coeficiente de amortiguamiento viscoso equivalente y el amortiguamiento histerético, como sigue

$$\lambda = \frac{\rho h\, \omega_k^2}{\omega}\, \eta \qquad (3.3.17.)$$

o

$$\eta = \frac{\omega}{\rho h\, \omega_k^2}\, \lambda \qquad (3.3.18.)$$

En donde ω : Es la frecuencia de excitación.
ω_k : Es la frecuencia natural del sistema.

Esta expresión siempre es válida cuando se obtiene la máxima amplitud del sistema y cuando forzamos éste a un movimiento armónico, sabiendo de antemano que η no es constante con la frecuencia, como ya se había mencionado anteriormente.

3.4 Análisis Dinámico de una Placa Amortiguada Histeréticamente y Excitada por una Carga Puntual Armónica.

La respuesta del sistema se calculará por medio de la deflexión máxima de la placa considerando un modelo con amortiguamiento del tipo histerético. Para este caso se tiene una placa simplemente apoyada sujeta a una carga puntual de 1000 Lbs. y de variación armónica en el tiempo, colocada al centro de la placa y considerando un amortiguamiento denominado histerético o estructural.

Se puede demostrar que para sistemas coordenados cartesianos rectilineos, como en el caso de placas, $A_1 = A_2 = 1, d\alpha_1 = dx$ y $d\alpha_2 = dy$.

Ya que la carga es puntual $q^*_1=0$, $q^*_2=0$ y $q^*_3 = F\,\delta\,(x-x^*)\,\delta(y-y^*)$.

Tomando la función coordenada para una placa simplemente apoyada en sus bordes

$$U_{3mn} = \text{sen}\,\frac{m\pi x}{a}\,\text{sen}\,\frac{n\pi y}{b} \qquad (3.4.1.)$$

Resolviendo la integral de las ec. (3.1.4.1.1.) y (3.1.4.1.2.)

$$F^*_k = \frac{1}{\rho h\, N_{mn}} \int_{-b}^{b} \int_{-a}^{a} q^*_3\, U_{3mn}\, dx\, dy$$

$$N_{mn} = \int_{-b}^{b} \int_{-a}^{a} U^2_{3mn}\, dx\, dy$$

$$N_{mn} = \int_{-b}^{b} \int_{-a}^{a} \left(\text{sen}\,\frac{m\pi x}{a}\,\text{sen}\,\frac{n\pi y}{b}\right)^2 dx\, dy$$

$$N_{mn} = \left[\frac{1}{2}\,y - \frac{1}{2}\,\frac{b}{n\pi}\,\text{sen}\,\frac{n\pi y}{b}\,\cos\frac{n\pi y}{b}\right]_{-b}^{b}$$

$$\cdot \left[\frac{1}{2}\,x - \frac{1}{2}\,\frac{a}{m\pi}\,\text{sen}\,\frac{m\pi x}{a}\,\cos\frac{m\pi x}{a}\right]_{-a}^{a}$$

$$F^*_{mn} = \frac{1}{\rho h\, ab} \int_{-b}^{b} \int_{-a}^{a} \left[F\,\delta\,(x-x^*)\,\delta(y-y^*)\right] \left[\text{sen}\,\frac{m\pi x}{a}\,\text{sen}\,\frac{n\pi y}{b}\right] dx\, dy$$

Aplicando las propiedades de la delta de Dirac

$$F^{*}_{mn} = \frac{4F}{\rho h\ ab} \text{ sen } \frac{m\pi x^{*}}{a} \text{ sen } \frac{n\pi y^{*}}{b} \qquad (3.4.2.)$$

de donde $A(x^{*},y^{*})$ es la posición de la carga sobre la placa, y cuya ubicación más desfavorable es al centro de la placa, o sea $A(a/2,b/2)$, por lo tanto

$$F^{*}_{mn} = \frac{4F}{\rho h\ ab} \text{ sen } \frac{m\pi}{2} \quad \text{sen } \frac{n\pi}{2}$$

para "m" y "n" impares $\qquad F^{*}_{mn} = \frac{4F}{\rho h\ ab} \text{ sen } \frac{m\pi}{2} \quad \text{sen } \frac{n\pi}{2}$

para "m" y "n" pares $\qquad F^{*}_{mn} = 0$

Finalmente, para placas en las que las oscilaciones transversales son dominantes, y la respuesta establecida es de mayor importancia que la transitoria, se obtiene la siguiente expresión para el cálculo de los desplazamientos

$$u_{3mn}(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4F}{\rho h\ ab} \frac{\text{Sen } \frac{m\pi}{2} \quad \text{Sen } \frac{n\pi}{2} \text{ Sen } \frac{m\pi x}{a} \quad \text{Sen } \frac{n\pi y}{b}}{\omega^{2}_{mn} \sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_{mn}}\right)^{2}\right]^{2} + \eta^{2}}} \cdot$$

$$\cdot \ e^{j(\omega t - \phi_{mn})} \qquad (3.4.3.)$$

Para nuestro caso sólo se tomará en cuenta la parte real de la ec.(3.4.3.), por lo que las expresiones finales a ocuparse serán, las siguientes.

$$u_{3mn}(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4F}{\rho h\, ab}\;\frac{\text{Sen}\,\frac{m\pi}{2}\quad\text{Sen}\,\frac{n\pi}{2}\quad\text{Sen}\,\frac{m\pi x}{a}\quad\text{Sen}\,\frac{n\pi y}{b}}{\omega_{mn}^{2}\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_{mn}}\right)^{2}\right]^{2}+\eta^{2}}}\;.$$

$$.\text{Cos}(\omega t-\phi_{mn}) \qquad (3.4.4.)$$

$$\omega_{mn}=\pi^{2}\left[\left(\frac{m}{a}\right)^{2}+\left(\frac{n}{b}\right)^{2}\right]\sqrt{\frac{D}{\rho h}} \qquad (3.4.5.)$$

$$D=\frac{E\,h^{3}}{12(1-\nu^{2})} \qquad (3.4.6.)$$

$$\phi_{k}=\tan^{-1}\frac{\eta}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_{mn}}\right)^{2}} \qquad (3.4.7.)$$

Estas expresiones finales son muy sencillas de programar, para realizar el cálculo de los desplazamientos dinámicos al centro de la placa, cuya aplicación se verá en el siguiente capitulo.

Capitulo IV.

4. Análisis Numérico.

El análisis que a continuación se presenta, consistió en analizar un gran número de placas, de diferentes dimensiones con el modelo matemático propuesto por Werner Soedel, revisado en el capitulo III: aplicando las expresiones (3.4.4.), (3.4.5.), (3.4.6.)y (3.4.7.),que representan el Desplazamiento máximo, la Frecuencia natural para la placa, la Rigidez a la flexión , y finalmente el ángulo de fase.

Los parámetros usados, y que varian son los siguientes :

a)El amortiguamiento histerético
b)El espesor de las placas
c)Las relaciones a/b y h/b

Para los cálculos se ocuparon placas de acero con módulo de elasticidad de E=29 000 000 (Lb/in^2), amortiguamiento histerético η experimentalmente determinado[16] en un rango que va de 0.001 a 0.02 como se observa en las tablas (4.1.1.2) a la (4.1.1.5.), y también de las tablas (4.1.1.6.) a la (4.1.1.9.) para otra placa distinta a la del primer grupo de tablas ya mencionadas, además tomando una carga concentrada de magnitud F=1000 Lbs, un módulo de poisson ν = 0.30 y finalmente una densidad de masa de ρ=0.000734$Lb\text{-}sec^2/in^4$ que es típico del acero.

El fin principal de este trabajo de tesis es la determinación de la respuesta dinámica del sistema (placa), teniendo cambios en el valor del amortiguamiento histerético. Finalmente se determinará la ley global del comportamiento del modelo presentado.

4.1. Análisis Dinámico de Placas Amortiguadas Histeréticamente, Excitadas por una Carga Puntual Armonica.

4.1.1. Desplazamiento Dinámico Máximo.

Para la obtención del desplazamiento dinámico máximo, se toma como punto de partida , la determinación del desplazamiento estático máximo para el caso concreto de una carga concentrada actuando en la posición más desfavorable, al centro de la placa, la que se calculará a partir de la expresión dada por Timoshenko[10] que es :

$$\delta_{emax} = \frac{4F}{\pi^4 a\, b\, D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^2} \qquad (4.1.1.1.)$$

en donde m = 1, 3, 5, 7, etc. y n = 1, 3, 5, 7, etc.

De la ecuación (4.1.1.1.) tenemos que F es la magnitud de la carga aplicada al sistema, cuyo valor se dio arbitrariamente, a y b son las dimensiones de la placa, D es la rigidez a la flexión (ec.(3.4.6.)), m y n son los números modales en las direcciones a lo largo de los ejes X y Y (ver figura 3.2.1. y figura 3.2.2.).

Para nuestro análisis, tenemos una placa simplemente apoyada a lo largo de sus bordes (figura 3.2.3.), y ocupando una función coordenada[1] que es :

$$u_{3mn} = \operatorname{Sen} \frac{m\pi x}{a} \quad \operatorname{Sen} \frac{n\pi y}{b}$$

que nos representa una función del tipo antisimétrica, y como la posición de la carga es al centro de la placa (posición más desfavorable),se concluye que los modos que contribuirán a la magnitud del desplazamiento son simplemente los impares.

Para principiar el cálculo de los desplazamientos dinámicos con este modelo, para el caso aquí presentado, de 2 placas cuyas dimensiones serán b=16.5 in constante, a=52 in y de a=26 in , con 3 distintos espesores,que son de 3/8", 5/8" y 7/8", aplicandole una carga concentrada de 1000 Lbs.,y con 4 amortiguamientos histeréticos distintos que son 0.0, 0.001, 0.01 y 0.02.

Se calcula como primer paso el desplazamiento máximo estático ocupando la ec.(4.1.1.1.), para los 6 casos mencionados anteriormente, y cuyos resultados son presentados en la tabla 4.1.1.1..

Placa		b=16.5 in	
a=52 in		a=26 in	
h (in)	δ_{max} (in)	h (in)	δ_{max} (in)
0.375	0.0327735	0.375	0.0303171
0.625	0.0070791	0.625	0.0065485
0.875	0.0025798	0.875	0.0023864

tabla 4.1.1.1.

con cuyos datos se compararon los obtenidos con el modelo de la ecuación 3.4.4.,tomando un amortiguamiento η=0.0 y una frecuencia de excitación ω = 0.0, resultando ser iguales.

Sabiendo que el tiempo t en el cual se obtiene la máxima respuesta para cualquier frecuencia de excitación ω es :

$$t = \frac{\phi_{11}}{\omega}$$

Y sabiendo además que :

$$\delta_{emax} = \frac{F_k^*}{\omega_k^2}$$

En donde tenemos que F_k^* es la función de carga, que para nuestro caso es la ecuación (3.1.4.2.1.), y ω_k es la frecuencia natural del sistema (placa), dada por la ecuación (3.4.5.).

A continuación presentamos la tabla 4.1.1.10. donde se muestran las frecuencias naturales más bajas, que es según la literatura en donde se produciría las máximas respuestas, cuando la frecuencia de excitación coincide con ellas. De la figura (4.1.1.2.) con η=0.0, se grafican los valores máximos para diferentes frecuencias y se observa que hay un máximo de esos máximos.

Placa		b=16.5 in	
a=52 in		a=26 in	
h (in)	ω_{11} (rad/sec)	h (in)	ω_{11} (rad/sec)
0.375	900.0476	0.375	1147.0410
0.625	1500.0794	0.625	1911.7350
0.875	2100.1112	0.875	2676.4289

tabla 4.1.1.10.

Para las figuras (4.1.1.3.) a la (4.1.1.9.), para amortiguamientos histeréticos η de 0.0, 0.001, 0.01, y 0.02, cuyos datos se presentan en las tablas 4.1.1.2. a la 4.1.1.9., para las 24 placas analizadas se pudo determinar que la posición exacta del máximo de máximos coincide con la frecuencia natural más baja. La posición del máximo de máximos con amortiguamiento histerético difiere del caso con amortiguamiento viscoso equivalente en el cual se presentó la máxima antes de que la frecuencia de excitación coincidiera con la frecuencia natural del sistema como en la referencia [1].

Finalmente, en las figuras (4.1.1.2.) a la (4.1.1.9.) se puede observar que el máximo desplazamiento dinámico producido por la carga concentrada, excitada armónicamente se da como se vió antes cuando coinciden la frecuencia de excitación con la frecuencia natural más baja del sistema (placa), dichos valores se resumen en las tablas 4.1.1.11. y 4.1.1.12..

Con un procedimiento analogo al presentado en la referencia [1], con la cual se pretendia comparar los resultados; se graficaron $\omega_0 b$ (ω_0 es la frecuencia natural más baja para dicha placa) contra la relación de aspecto a/b y para varias h/b, así como graficando $\omega_0 b$ contra δ_{max}/b (desplazamiento dinámico máximo entre la dimensión b) , esto nos llevó a

ESPESORES h_i (i = 1, 2, y 3) en In.					
0.375		0.625		0.875	
ω rad/sec	δ_{max} In	ω rad/sec	δ_{max} In	ω rad/sec	δ_{max} In
0.00	0.0328	0.00	0.0070	0.00	0.00257
50.00	0.0328	50.00	0.0071	50.00	0.00258
200.00	0.0340	200.00	0.0072	200.00	0.00260
300.00	0.0357	300.00	0.0073	400.00	0.00265
400.00	0.0385	400.00	0.0075	600.00	0.00274
500.00	0.0430	500.00	0.0077	800.00	0.00289
600.00	0.0508	600.00	0.0080	1000.00	0.00311
700.00	0.0667	700.00	0.0085	1200.00	0.00345
800.00	0.1141	800.00	0.0090	1300.00	0.00369
850.00	0.2084	900.00	0.0098	1400.00	0.00400
860.00	0.2555	1000.00	0.0110	1500.00	0.00442
870.00	0.3337	1100.00	0.0127	1600.00	0.00500
880.00	0.4900	1200.00	0.0155	1700.00	0.00587
883.00	0.5726	1300.00	0.0212	1800.00	0.00733
886.00	0.6905	1400.00	0.0352	1900.00	0.01022
889.00	0.8724	1450.00	0.0721	2000.00	0.01887
890.00	0.9572	1490.00	0.3405	2020.00	0.02318
892.00	1.1899	1492.00	0.4217	2040.00	0.03017
894.00	1.5766	1494.00	0.5617	2060.00	0.04471
896.00	2.3453	1496.00	0.8348	2080.00	0.08756
898.00	4.6156	1498.00	1.6333	2090.00	0.17255
899.00	9.0010	1499.00	3.1442	2095.00	0.33973
900.00	196.8615	1500.00	42.5699	2100.00	15.49638
900.05	87694.8700	1500.05	12628.0668	2100.11	3451.54800
902.00	4.8302	1501.00	3.6825	2110.00	0.17559
904.00	2.3912	1502.00	1.7661	2112.00	0.14619
906.00	1.5913	1504.00	0.8663	2114.00	0.12526
908.00	1.1937	1506.00	0.5744	2116.00	0.10960
910.00	0.9560	1508.00	0.4299	2118.00	0.09744
920.00	0.4823	1510.00	0.3137	2120.00	0.08772
930.00	0.3250	1520.00	0.1721	2130.00	0.05866
940.00	0.2465	1530.00	0.1155	2140.00	0.04417
950.00	0.1996	1540.00	0.0872	2145.00	0.03934
960.00	0.1683	1550.00	0.0702	2150.00	0.03548
970.00	0.1461	1560.00	0.0589	2160.00	0.02971
980.00	0.1294	1570.00	0.0508	2180.00	0.02493
990.00	0.1165	1590.00	0.0401	2200.00	0.01817
1000.00	0.1063	1600.00	0.0364	2250.00	0.01243
1100.00	0.0655	1700.00	0.0197	2300.00	0.00957
1200.00	0.0494	1800.00	0.0143	2400.00	0.00676

Tabla 4.1.1.2. Desplazamiento Dinámico de placas de acero de 3 distintos espesores todas con dimensiones de 52 x 16.5 y con η = 0.0

ESPESORES h_i (i = 1, 2, y 3) en In.					
0.375		0.625		0.875	
ω rad/sec	δ_{max} In	ω rad/sec	δ_{max} In	ω rad/sec	δ_{max} In
0.00	0.0327735	0.00	0.0070791	0.00	0.0025798
50.00	0.0328462	50.00	0.0070847	50.00	0.0025808
200.00	0.0339882	200.00	0.0071707	200.00	0.0025967
300.00	0.0356821	300.00	0.0072897	400.00	0.0026492
400.00	0.0384596	400.00	0.0074651	600.00	0.0027430
500.00	0.0429825	500.00	0.0077073	800.00	0.0028899
600.00	0.0508214	600.00	0.0080325	1000.00	0.0031117
700.00	0.0666964	700.00	0.0084657	1200.00	0.0034511
800.00	0.1141440	800.00	0.0090471	1300.00	0.0036902
850.00	0.2084215	900.00	0.0098438	1400.00	0.0040005
860.00	0.2554346	1000.00	0.0109774	1500.00	0.0044165
870.00	0.3336841	1100.00	0.0126907	1600.00	0.0050000
880.00	0.49[illegible]	1200.00	0.0155492	1700.00	0.0058747
883.00	0.5724303	1300.00	0.0212472	1800.00	0.0073256
886.00	0.6901607	1400.00	0.0352414	1900.00	0.0102249
889.00	0.8717009	1450.00	0.0720759	2000.00	0.0188739
890.00	0.9562404	1490.00	0.3396093	2020.00	0.0231[illegible]
892.00	1.1890720	1492.00	0.4219241	2040.00	0.0[illegible]681
894.00	1.5722500	1494.00	0.5574407	2060.00	0.0446985
896.00	2.3309930	1496.00	0.8210520	2080.00	0.0674471
898.00	4.5061120	1498.00	1.5364940	2090.00	0.1716[illegible]
899.00	8.2709050	1499.00	2.5508140	2095.00	0.3327940
900.00	20.8067300	1500.00	4.4943120	2100.00	1.6378490
900.05	20.9[illegible]	1500.08	4.5195170	2100.11	1.6470540
902.00	4.7074180	1501.00	2.5557860	2110.00	0.1746235
904.00	2.3760069	1502.00	1.6454390	2112.00	0.1456329
906.00	1.5567970	1504.00	0.8509533	2114.00	0.1249104
908.00	1.1913570	1506.00	0.5698739	2116.00	0.1093640
910.00	0.9550288	1508.00	0.4280339	2118.00	0.0972732
920.00	0.4821693	1510.00	0.3127494	2120.00	0.0876040
930.00	0.3249671	1520.00	0.1722076	2130.00	0.0586297
940.00	0.2465239	1530.00	0.1154803	2140.00	0.0441582
950.00	0.1995540	1540.00	0.0871621	2145.00	0.0393313
960.00	0.1683135	1550.00	0.0701929	2150.00	0.0354782
970.00	0.1460568	1560.00	0.0588934	2160.00	0.0297024
980.00	0.1294210	1570.00	0.0508316	2180.00	0.0224916
990.00	0.1165290	1590.00	0.0401025	2200.00	0.0181774
1000.00	0.1062605	1600.00	0.0363556	2250.00	0.0124310
1100.00	0.0655051	1700.00	0.0196509	2300.00	0.0095782
1200.00	0.0494081	1800.00	0.0143070	2400.00	0.0067641

Tabla 4.1.1.3. Desplazamiento Dinámico de placas de acero de 3 distintos espesores todas con dimensiones de 52 x 16.5 y con η = 0.001

ESPESORES h_i (i = 1, 2, y 3) en In.					
0.375		0.625		0.875	
ω rad/sec	δmax In	ω rad/sec	δmax In	ω rad/sec	δmax In
0.00	0.0327735	0.00	0.0070791	0.00	0.0025798
50.00	0.0328445	50.00	0.0070843	50.00	0.0025807
200.00	0.0339864	200.00	0.0071703	200.00	0.0025966
300.00	0.0356800	300.00	0.0072893	400.00	0.0026490
400.00	0.0384569	400.00	0.0074646	600.00	0.0027428
500.00	0.0429786	500.00	0.0077065	800.00	0.0028897
600.00	0.0508145	600.00	0.0080320	1000.00	0.0031141
700.00	0.0666784	700.00	0.0084651	1200.00	0.0034508
800.00	0.1140313	800.00	0.0090467	1300.00	0.0036897
850.00	0.2076066	900.00	0.0094428	1400.00	0.0039999
860.00	0.2508777	1000.00	0.0109759	1500.00	0.0044157
870.00	0.3300889	1100.00	0.0126882	1600.00	0.0049989
880.00	0.4762241	1200.00	0.0155442	1700.00	0.0058726
883.00	0.5538252	1300.00	0.0212325	1800.00	0.0073241
886.00	0.6578566	1400.00	0.0381374	1900.00	0.0102112
889.00	0.8084037	1450.00	0.0712991	2000.00	0.0187736
890.00	0.9741212	1490.00	0.2735141	2020.00	0.0229961
892.00	1.0394520	1492.00	0.3110615	2040.00	0.0299251
894.00	1.2664010	1494.00	0.3544829	2060.00	0.0432694
896.00	1.5716340	1496.00	0.4002168	2080.00	0.0776870
898.00	1.9190070	1498.00	0.4385873	2090.00	0.1199149
899.00	2.0520080	1499.00	0.4503832	2095.00	0.1492420
900.00	2.1063070	1500.00	0.4549626	2100.00	0.1658026
900.05	2.1064260	1500.05	0.4549891	2100.11	0.1658119
902.00	1.9334190	1501.00	0.4516251	2110.00	0.1209183
904.00	1.5851500	1502.00	0.4408608	2112.00	0.1100149
906.00	1.2739520	1504.00	0.4035073	2114.00	0.1002854
908.00	1.0420320	1506.00	0.3575985	2116.00	0.0917422
910.00	0.8732584	1508.00	0.3134501	2118.00	0.0842879
920.00	0.4710948	1510.00	0.2751800	2120.00	0.0777964
930.00	0.3216792	1520.00	0.1616202	2130.00	0.0554517
940.00	0.2151501	1530.00	0.1122135	2140.00	0.0427759
950.00	0.1988532	1540.00	0.0857729	2145.00	0.0383603
960.00	0.1679165	1550.00	0.0694827	2150.00	0.0347681
970.00	0.1458119	1560.00	0.0594645	2160.00	0.0242907
980.00	0.1292575	1570.00	0.0505759	2180.00	0.0223188
990.00	0.1164157	1590.00	0.0399640	2200.00	0.0160847
1000.00	0.1061783	1600.00	0.0362699	2250.00	0.0124057
1100.00	0.0615168	1700.00	0.0196407	2300.00	0.0095678
1200.00	0.0454905	1800.00	0.0143038	2400.00	0.0067611

Tabla 4.1.1.4 Desplazamiento Dinámico de placas de acero de 3 distintos espesores todas con dimensiones de 52 x 16.5 y con η = 0.010

ESPESORES h_i (i = 1, 2, y 3) en In.					
0.375		0.625		0.875	
ω rad/sec	δmax In	ω rad/sec	δmax In	ω rad/sec	δmax In
0.00	0.0327735	0.00	0.0070791	0.00	0.0025793
50.00	0.0328396	50.00	0.0070833	50.00	0.0025803
200.00	0.0339809	200.00	0.0071692	200.00	0.0025962
300.00	0.0356736	300.00	0.0072881	400.00	0.0026486
400.00	0.0384488	400.00	0.0074634	600.00	0.0027424
500.00	0.0429669	500.00	0.0077655	800.00	0.0028921
600.00	0.0507935	600.00	0.0080304	1000.00	0.0031107
700.00	0.0666248	700.00	0.0084632	1200.00	0.0034476
800.00	0.1136919	800.00	0.0090449	1300.00	0.0036885
850.00	0.2051296	900.00	0.0098397	1400.00	0.0039953
860.00	0.2493362	1000.00	0.0109714	1500.00	0.0044134
870.00	0.3198919	1100.00	0.0126808	1600.00	0.0049951
880.00	0.4475412	1200.00	0.0155291	1700.00	0.0058664
883.00	0.5071267	1300.00	0.0211982	1800.00	0.0073107
886.00	0.5825461	1400.00	0.0379279	1900.00	0.0101701
889.00	0.6782113	1450.00	0.0690974	2000.00	0.0164793
890.00	0.7151715	1490.00	0.1909751	2020.00	0.0224479
892.00	0.7963679	1492.00	0.2022513	2040.00	0.0286967
894.00	0.8841556	1494.00	0.2126960	2060.00	0.0396706
896.00	0.9693462	1496.00	0.2212794	2080.00	0.0607906
898.00	1.0349970	1498.00	0.2270400	2090.00	0.0756073
899.00	1.0539990	1499.00	0.2285957	2095.00	0.0811972
900.00	1.0610010	1500.00	0.2291762	2100.00	0.0835190
900.05	1.0610160	1500.05	0.2291796	2100.11	0.0835202
902.00	1.0372350	1501.00	0.2287569	2110.00	0.0756521
904.00	0.9725093	1502.00	0.2273523	2112.00	0.0727976
906.00	0.8867806	1504.00	0.2218301	2114.00	0.0695052
908.00	0.7976198	1506.00	0.2130657	2116.00	0.0667713
910.00	0.7148169	1508.00	0.2029519	2118.00	0.0637699
920.00	0.4418068	1510.00	0.1915446	2120.00	0.0608535
930.00	0.3123212	1520.00	0.1386656	2130.00	0.0483277
940.00	0.2411319	1530.00	0.1038235	2140.00	0.0392998
950.00	0.1968010	1540.00	0.0819505	2145.00	0.0356169
960.00	0.1667323	1550.00	0.0674614	2150.00	0.0326590
970.00	0.1450722	1560.00	0.0572935	2160.00	0.0281441
980.00	0.1287663	1570.00	0.0499254	2180.00	0.0218199
990.00	0.1160731	1590.00	0.0396317	2200.00	0.0178273
1000.00	0.1059305	1600.00	0.0360141	2250.00	0.0123302
1100.00	0.0615036	1700.00	0.0196100	2300.00	0.0095365
1200.00	0.0473774	1800.00	0.0142940	2400.00	0.0067520

Tabla 4.1.1.5 Desplazamiento Dinamico de placas de acero de 3 distintos espesores todas con dimensiones de 52 x 16.5 y con η = 0.020

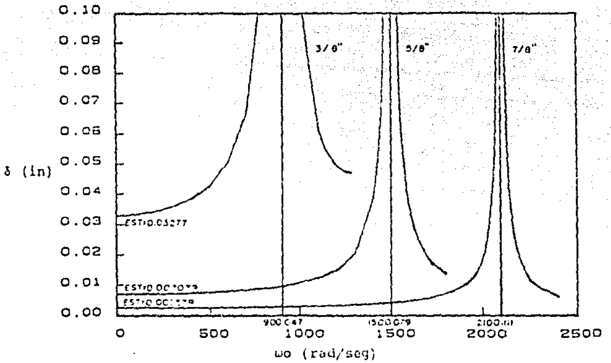


Figura 4.1.1.2. Desplazamiento Dinámico de placas de acero de 3 distintos espesores todas con dimensiones de 52 x 16.5 y con η = 0.0

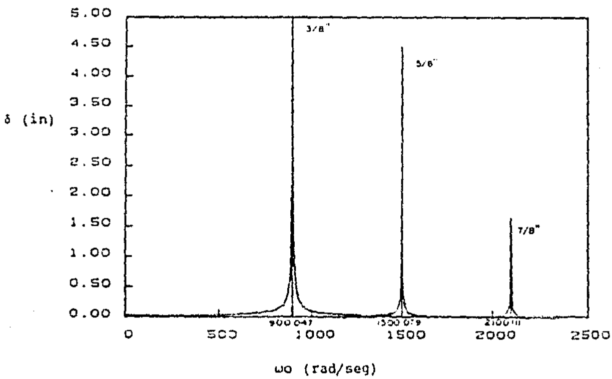


Figura 4.1.1.3. Desplazamiento Dinámico de placas de acero de 3 distintos espesores todas con dimensiones de 52 x 16.5 y con η = 0.001

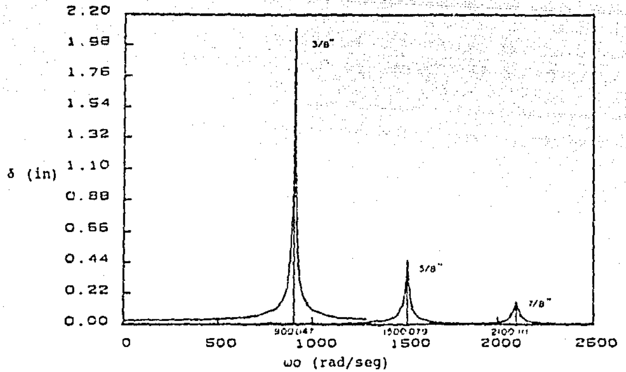


Figura 4.1.1.4. Desplazamiento Dinámico de placas de acero de 3 distintos espesores todas con dimensiones de 52 x 16.5 y con η = 0.010

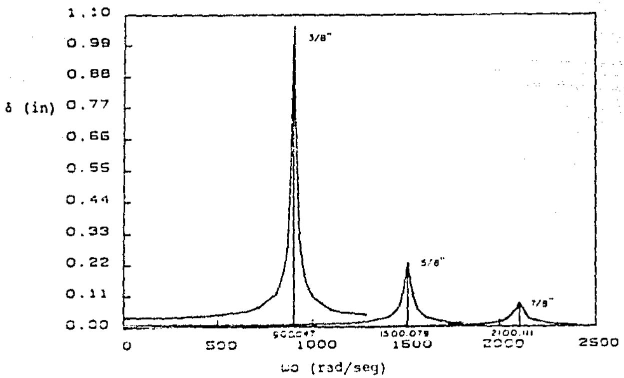


Figura 4.1.1.5. Desplazamiento Dinámico de placas de acero de 3 distintos espesores todas con dimensiones de 52 x 16.5 y con η = 0.020

ESPESORES h_i (i = 1, 2, y 3) en in.					
0.375		0.625		0.875	
ω rad/sec	δ_{max} in	ω rad/sec	δ_{max} in	ω rad/sec	δ_{max} in
0.00	0.030	0.00	0.0065	0.00	0.00238
50.00	0.030	50.00	0.0066	50.00	0.00239
200.00	0.031	500.00	0.0069	200.00	0.00240
300.00	0.032	700.00	0.0074	400.00	0.00243
400.00	0.033	1000.00	0.0096	600.00	0.00249
500.00	0.036	1600.00	0.0195	800.00	0.00251
600.00	0.040	1650.00	0.0228	1000.00	0.00271
700.00	0.045	1700.00	0.0276	1200.00	0.00290
800.00	0.054	1800.00	0.0500	1400.00	0.00315
900.00	0.071	1860.00	0.1052	1600.00	0.00352
1000.00	0.112	1870.00	0.1298	1800.00	0.00406
1100.00	0.325	1880.00	0.1699	2000.00	0.00496
1110.00	0.410	1890.00	0.2470	2200.00	0.00662
1120.00	0.557	1892.00	0.2717	2400.00	0.01072
1130.00	0.877	1894.00	0.3021	2500.00	0.01627
1135.00	1.237	1896.00	0.3402	2550.00	0.02234
1140.00	2.108	1898.00	0.3894	2600.00	0.03637
1142.00	2.940	1900.00	0.5454	2650.00	0.10350
1143.00	3.665	1902.00	0.5454	2660.00	0.16596
1144.00	4.566	1904.00	0.6896	2662.00	0.18884
1145.00	7.245	1906.00	0.9233	2666.00	0.26073
1146.00	14.194	1908.00	1.4255	2670.00	0.42272
1147.00	358.770	1911.00	7.2376	2676.00	6.31579
1147.04	107988.400	1911.74	23325.5000	2676.43	5667.03200
1148.00	15.333	1912.00	20.0746	2677.00	4.75459
1149.00	7.536	1914.00	2.3467	2678.00	1.72655
1150.00	4.928	1916.00	1.2460	2680.00	0.75945
1152.00	2.976	1918.00	0.8481	2690.00	0.19972
1154.00	2.120	1920.00	0.6428	2700.00	0.11494
1156.00	1.646	1930.00	0.2907	2750.00	0.03674
1158.00	1.315	1940.00	0.1877	2800.00	0.02171
1160.00	1.137	1950.00	0.1385	2850.00	0.01551
1170.00	0.641	2000.00	0.0599	2900.00	0.01202
1180.00	0.446	2050.00	0.0381	2950.00	0.00981
1190.00	0.312	2100.00	0.0279	3000.00	0.00829
1200.00	0.277	2150.00	0.0220	3050.00	0.00717
1300.00	0.095	2200.00	0.0182	3100.00	0.00632
1400.00	0.057	2250.00	0.0155	3200.00	0.00510
1700.00	0.026	2300.00	0.0135	3300.00	0.00428
2200.00	0.015	2400.00	0.0107	3400.00	0.00363

Tabla 4.1.1.6. Desplazamiento Dinámico de placas de acero de 3 distintos espesores todas con dimensiones de 26 x 16.5 y con η = 0.0.

ESPESORES h_i (i = 1, 2, y 3) en in.					
0.375		0.625		0.875	
ω rad/sec	δ_{max} in	ω rad/sec	δ_{max} in	ω rad/sec	δ_{max} in
0.00	0.030317	0.00	0.0065485	0.00	0.0023864
50.00	0.030366	50.00	0.0065523	50.00	0.0023871
200.00	0.031131	500.00	0.0069601	200.00	0.0023979
300.00	0.032224	700.00	0.0074166	400.00	0.0024332
400.00	0.033911	1000.00	0.0086580	600.00	0.0024946
500.00	0.036403	1600.00	0.0195923	800.00	0.0025870
600.00	0.040083	1650.00	0.0228312	1000.00	0.0027180
700.00	0.045639	1700.00	0.0276092	1200.00	0.0029003
800.00	0.054526	1800.00	0.0500419	1400.00	0.0031552
900.00	0.071713	1860.00	0.1051926	1600.00	0.0035206
1000.00	0.112066	1870.00	0.1297327	1800.00	0.0040692
1100.00	0.325257	1880.00	0.1698713	2000.00	0.0049604
1110.00	0.409951	1890.00	0.2467730	2200.00	0.0066223
1120.00	0.557270	1892.00	0.2714762	2400.00	0.0107217
1130.00	0.877311	1894.00	0.3017309	2500.00	0.0162737
1135.00	1.236619	1896.00	0.3396387	2550.00	0.0223481
1140.00	2.101429	1898.00	0.3885150	2600.00	0.0363773
1142.00	2.921522	1900.00	0.4539055	2650.00	0.1033746
1143.00	3.625770	1902.00	0.5156153	2660.00	0.1654169
1144.00	4.782335	1904.00	0.6844168	2662.00	0.1860383
1145.00	6.975069	1906.00	0.9166359	2666.00	0.2555030
1146.00	12.431920	1908.00	1.3810340	2670.00	0.4138390
1147.00	25.685230	1911.00	4.4094610	2676.00	1.9301340
1147.04	25.751270	1911.74	5.5622700	2676.43	2.0270670
1148.00	13.217220	1912.00	5.3601930	2677.00	1.9647340
1149.00	7.233518	1914.00	2.1623400	2678.00	1.3145030
1150.00	4.898006	1916.00	1.2159940	2680.00	0.7112356
1152.00	2.956575	1918.00	0.8355072	2690.00	0.1987701
1154.00	2.113226	1920.00	0.6386204	2700.00	0.1147586
1156.00	1.643324	1930.00	0.2903109	2750.00	0.0367408
1158.00	1.344032	1940.00	0.1876322	2800.00	0.0217110
1160.00	1.136801	1950.00	0.1335502	2850.00	0.0155182
1170.00	0.641436	2000.00	0.0599140	2900.00	0.0120292
1180.00	0.446459	2050.00	0.0381581	2950.00	0.0098174
1190.00	0.342238	2100.00	0.0279683	3000.00	0.0082908
1200.00	0.277379	2150.00	0.0220613	3050.00	0.0071741
1300.00	0.095423	2200.00	0.0182134	3100.00	0.0063223
1400.00	0.057561	2250.00	0.0155073	3200.00	0.0051095
1700.00	0.026746	2300.00	0.0135030	3300.00	0.0042398
2200.00	0.015494	2400.00	0.0107371	3400.00	0.0036975

Tabla 4.1.1.7. Desplazamiento Dinámico de placas de acero de 3 distintos espesores todas con dimensiones de 26 x 16.5 y con η = 0.001

ESPESORES h_i (i = 1, 2, y 3) en in.					
0.375		0.625		0.875	
ω rad/sec	δ_{max} in	ω rad/sec	δ_{max} in	ω rad/sec	δ_{max} in
0.00	0.0303171	0.00	0.0065485	0.00	0.0023864
50.00	0.0303650	50.00	0.0065520	50.00	0.0023870
200.00	0.0311301	500.00	0.0069600	200.00	0.0023978
300.00	0.0322225	700.00	0.0074162	400.00	0.0024330
400.00	0.0339093	1000.00	0.0086572	600.00	0.0024945
500.00	0.0364012	1600.00	0.0195820	800.00	0.0025964
600.00	0.0400900	1650.00	0.0225145	1000.00	0.0027178
700.00	0.0456840	1700.00	0.0275791	1200.00	0.0029001
800.00	0.0548168	1800.00	0.0495555	1400.00	0.0031547
900.00	0.0716911	1860.00	0.1034205	1600.00	0.0035202
1000.00	0.1119741	1870.00	0.1264976	1800.00	0.0040655
1100.00	0.3225[illegible]	1880.00	0.1626659	2000.00	0.0049592
1110.00	0.4050750	1890.00	0.2259926	2200.00	[illegible]
1120.00	0.5450340	1892.00	0.2444755	2400.00	0.0107094
1130.00	0.8315302	1894.00	0.2658479	2500.00	0.0162254
1135.00	1.1167210	1896.00	0.2906435	2550.00	0.0222213
1140.00	1.6338290	1898.00	0.3194797	2600.00	0.0358242
1142.00	1.9404876	1900.00	0.3529067	2650.00	0.0922927
1143.00	2.1107140	1902.00	0.3911742	2660.00	0.1286096
1144.00	2.2801140	1904.00	0.4336944	2662.00	0.1393343
1145.00	2.4396920	1906.00	0.4781043	2666.00	0.1607532
1146.00	2.5381160	1908.00	0.5190912	2670.00	0.1831904
1147.00	2.5794150	1911.00	0.5555305	2676.00	0.2029452
1147.04	2.5794820	1911.74	0.5571678	2676.43	0.2030495
1148.00	2.5442100	1912.00	0.5569545	2677.00	0.2028656
1149.00	2.4410650	1914.00	0.5421678	2678.00	0.2015669
1150.00	2.2922980	1916.00	0.5048149	2680.00	0.1961965
1152.00	1.9506310	1918.00	0.4659403	2690.00	0.1425001
1154.00	1.6393490	1920.00	0.4213367	2700.00	0.1001113
1156.00	1.3991450	1930.00	0.2579151	2750.00	0.0361750
1158.00	1.1941900	1940.00	0.1780309	2800.00	0.0215950
1160.00	1.0419120	1950.00	0.1345690	2850.00	0.0154766
1170.00	0.6230046	2000.00	0.0595902	2900.00	0.0120102
1180.00	0.4401650	2050.00	0.0350766	2950.00	0.0098073
1190.00	0.3391071	2100.00	0.0279371	3000.00	0.0082848
1200.00	0.2758807	2150.00	0.0220184	3050.00	0.0071703
1300.00	0.0953676	2200.00	0.0182053	3100.00	0.0063197
1400.00	0.0575509	2250.00	0.0155024	3200.00	0.0051091
1700.00	0.0267450	2300.00	0.0134779	3300.00	0.0042890
2200.00	0.0154938	2400.00	0.0107156	3400.00	0.0036971

Tabla 4.1.1.8. Desplazamiento Dinámico de placas de acero de 3 distintos espesores todas con dimensiones de 26 x 16.5 y con η = 0.010

ESPESORES h_i (i = 1, 2, y 3) en in.					
0.375		0.625		0.875	
ω rad/sec	δ_{max} in	ω rad/sec	δ_{max} in	ω rad/sec	δ_{max} in
0.00	0.0303171	0.00	0.0065485	0.00	0.0023864
50.00	0.0303605	50.00	0.0065510	50.00	0.0023867
200.00	0.0311252	500.00	0.0059588	200.00	0.0023974
300.00	0.0322170	700.00	0.0074147	400.00	0.0024327
400.00	0.0339029	1000.00	0.0086549	600.00	0.0024941
500.00	0.0363932	1600.00	0.0195509	800.00	0.0025864
600.00	0.0400692	1650.00	0.0227644	1000.00	0.0027173
700.00	0.0456677	1700.00	0.0274287	1200.00	0.0028994
800.00	0.0547876	1800.00	0.0493007	1400.00	0.0031541
900.00	0.0716225	1860.00	0.0955817	1600.00	0.0035190
1000.00	0.1116956	1870.00	0.1178941	1800.00	0.0040666
1100.00	0.3157904	1880.00	0.1454023	2000.00	0.0049557
1110.00	0.3913087	1890.00	0.1552763	2200.00	0.0066104
1120.00	0.5125941	1892.00	0.1950270	2400.00	0.0106683
1130.00	0.7273459	1894.00	0.2053311	2500.00	0.0160820
1135.00	0.8951932	1896.00	0.2160916	2550.00	0.0218504
1140.00	1.1025670	1898.00	0.2271401	2600.00	0.0343019
1142.00	1.1837800	1900.00	0.2392185	2650.00	0.0726601
1143.00	1.2197420	1902.00	0.2459579	2660.00	0.0868140
1144.00	1.2492740	1904.00	0.2538786	2662.00	0.0896317
1145.00	1.2722510	1906.00	0.2674118	2666.00	0.0945237
1146.00	1.2868920	1908.00	0.2733556	2670.00	0.0959183
1147.00	1.2921500	1911.00	0.2789009	2676.00	0.1017020
1147.04	1.2921580	1911.74	0.2791063	2676.43	0.1017151
1148.00	1.2876810	1912.00	0.2790796	2677.00	0.1016921
1149.00	1.2737570	1914.00	0.2771731	2678.00	0.1015409
1150.00	1.2512540	1916.00	0.2721203	2680.00	0.1003241
1152.00	1.1860650	1918.00	0.2652392	2690.00	0.0907140
1154.00	1.1045530	1920.00	0.2561901	2700.00	0.0762826
1156.00	1.0175860	1930.00	0.2016391	2750.00	0.0346093
1158.00	0.9305138	1940.00	0.1560411	2800.00	0.0212548
1160.00	0.8553713	1950.00	0.1213331	2850.00	0.0153525
1170.00	0.5756177	2000.00	0.0536407	2900.00	0.0119532
1180.00	0.4226187	2050.00	0.0378327	2950.00	0.0097769
1190.00	0.3312421	2100.00	0.0279432	3000.00	0.0082666
1200.00	0.2714846	2150.00	0.0220035	3050.00	0.0071589
1300.00	0.0951998	2200.00	0.0181808	3100.00	0.0063120
1400.00	0.0575170	2250.00	0.0154877	3200.00	0.0051043
1700.00	0.0267416	2300.00	0.0134304	3300.00	0.0042656
2200.00	0.0154019	2400.00	0.0107311	3400.00	0.0036957

Tabla 4.1.1.9. Desplazamiento Dinámico de placas de acero de 3 distintos espesores todas con dimensiones de 26 x 16.5 y con η = 0.020

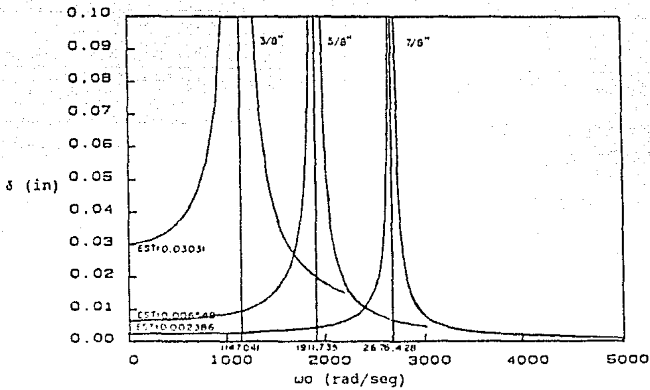


Figura 4.1.1.6. Desplazamiento Dinámico de placas de acero de 3 distintos espesores todas con dimensiones de 26 x 16.5 y con $\eta = 0.0$

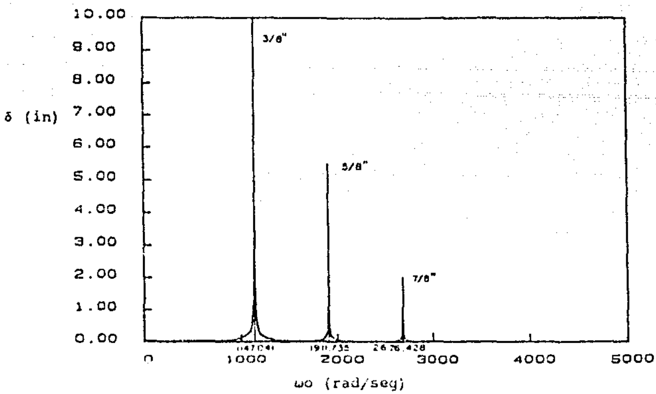


Figura 4.1.1.7. Desplazamiento Dinámico de placas de acero de 3 distintos espesores todas con dimensiones de 26 x 16.5 y con $\eta = 0.001$

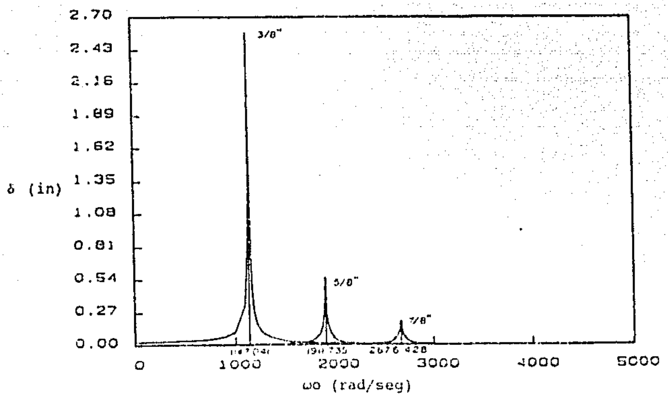


Figura 4.1.1.8. Desplazamiento Dinámico de placas de acero de 3 distintos espesores todas con dimensiones de 26 x 16.5 y con η = 0.010

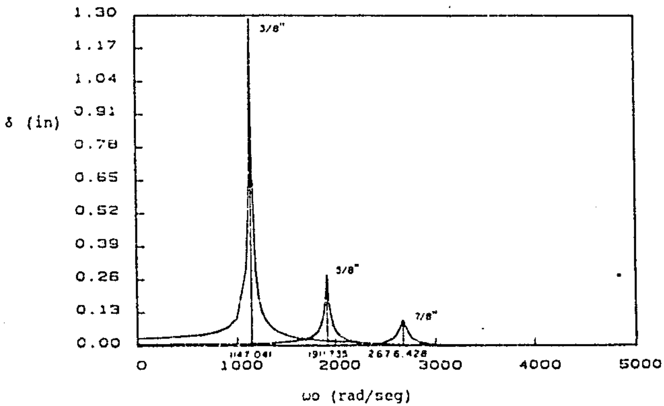


Figura 4.1.1.9. Desplazamiento Dinámico de placas de acero de 3 distintos espesores todas con dimensiones de 52 x 16.5 y con η = 0.020

a=52 in		b=16.5 in			
h (in)	ω_{11} (rad/sec)	δ_{max} (in)			
		η=0.0	η=0.001	η=0.01	η=0.02
0.375	900.04764	87694.87	20.9236*	2.1064	1.0610
0.625	1500.07940	12612.06	4.5195	0.4549	0.2291
0.875	2100.11120	3451.54	1.6470	0.1658	0.0835

tabla 4.1.1.11.

a=26 in		b=16.5 in			
h (in)	ω_{11} (rad/sec)	δ_{max} (in)			
		η=0.0	η=0.001	η=0.01	η=0.02
0.375	1147.0410	107988.40	25.7512**	2.5794	1.2921
0.625	1911.7350	23325.50	5.5622	0.5571	0.2791
0.875	2676.4289	5667.03	2.0270	0.2030	0.1017

*,** ver apendice A.

tabla 4.1.1.12.

obtener unas curvas paralelas en escala doble logaritmica cuyos datos se presentan en la tabla (4.1.1.13.) y cuya figura 4.1.1.10. a) representa a ese conjunto de valores, y además en la segunda,se obtuvo una serie de rectas paralelas en escala doble logaritmica, cuyos datos son los que contiene la tabla (4.1.1.14.) que se representan graficamente en la figura 4.1.1.10. b) y formando con ambas figuras un nomograma de diseño para placas amortiguadas histeréticamente bajo carga puntual armónica, la cual es una clase de carga de uso práctico en ingeniería, con el cual de manera sencilla se determina el desplazamiento dinámico máximo para infinidad de placas, con distintos amortiguamientos histeréticos cuyo rango va de izquierda a derecha de forma descendente en cuanto a su valor, o sea de 0.1, 0.09, 0.08, 0.07, 0.06, 0.05, 0.04, 0.03, 0.02, 0.01, 0.009, ... y así sucesivamente hasta llegar a 0.000001, como se observa en la figura 4.1.1.10. b), las rectas de esta figura tienen una pendiente constante y una separación entre ellas de forma semilogaritmica, concluyendo que este nomograma representa en realidad un ESPECTRO DE ESPECTROS.

A in	B in	H in	A/B	H/B	ω_o rad/sec	$\omega_o B$ rad-in/sec
90	10	0.040	9	0.004	240.396	2403.96
80	10	0.040	8	0.004	241.175	2411.75
70	10	0.040	7	0.004	242.311	2423.11
60	10	0.040	6	0.004	244.061	2440.61
50	10	0.040	5	0.004	246.963	2469.63
40	10	0.040	4	0.004	252.306	2523.06
30	10	0.040	3	0.004	263.850	2638.50
20	10	0.040	2	0.004	269.831	2698.31
10	10	0.040	1	0.004	474.930	4749.30
90	10	0.050	9	0.005	300.496	3004.96
70	10	0.050	7	0.005	302.889	3028.89
40	10	0.050	4	0.005	315.383	3153.83
10	10	0.050	1	0.005	593.662	5936.62
90	10	0.060	9	0.006	360.595	3605.95
70	10	0.060	7	0.006	363.467	3634.67
40	10	0.060	4	0.006	378.460	3784.60
10	10	0.060	1	0.006	712.395	7123.95
90	10	0.070	9	0.007	420.694	4206.94
70	10	0.070	7	0.007	424.044	4240.44
40	10	0.070	4	0.007	441.536	4415.36
10	10	0.070	1	0.007	831.127	8311.27
90	10	0.080	9	0.008	480.793	4807.93
70	10	0.080	7	0.008	484.622	4846.22
40	10	0.080	4	0.008	504.613	5046.13
10	10	0.080	1	0.008	949.860	9498.60
90	10	0.090	9	0.009	540.892	5408.92
70	10	0.090	7	0.009	545.200	5452.00
40	10	0.090	4	0.009	567.689	5676.89
10	10	0.090	1	0.009	1068.592	10685.92
90	10	0.100	9	0.010	600.991	6009.91
70	10	0.100	7	0.010	605.778	6057.78
40	10	0.100	4	0.010	630.766	6307.66
10	10	0.100	1	0.010	1187.324	11873.24

Tabla 4.1.1.13.

a in	b in	h in	$\frac{a}{b}$	$\frac{h}{b}$	$\frac{\delta_{max}}{b}$	ω_0 b rad/sec	η
52	26	0.04	2	0.0015	2010150.000000000	1141.658	0.000001
52	26	0.10	2	0.0038	128649.600000000	2854.146	0.000001
52	26	3.00	2	0.1154	4.764800000	85624.380	0.000001
52	26	0.04	2	0.0015	402030.500000000	1141.658	0.000005
52	26	0.10	2	0.0038	25729.950000000	2854.146	0.000005
52	26	3.00	2	0.1154	0.952961000	85624.380	0.000005
52	26	0.04	2	0.0015	201015.500000000	1141.658	0.000010
52	26	0.10	2	0.0038	12864.990000000	2854.146	0.000010
52	26	3.00	2	0.1154	0.476481100	85624.380	0.000010
52	26	0.04	2	0.0015	40203.540000000	1141.658	0.000050
52	26	0.10	2	0.0038	2573.026000000	2854.146	0.000050
52	26	3.00	2	0.1154	0.095297270	85624.380	0.000050
52	26	0.04	2	0.0015	20102.050000000	1141.658	0.000100
52	26	0.10	2	0.0038	1286.531000000	2854.146	0.000100
52	26	3.00	2	0.1154	0.047649300	85624.380	0.000100
52	26	0.04	2	0.0015	4020.864000000	1141.658	0.000500
52	26	0.10	2	0.0038	257.335400000	2854.146	0.000500
52	26	3.00	2	0.1154	0.009530936	85624.380	0.000500
52	26	0.04	2	0.0015	2010.716000000	1141.658	0.001000
52	26	0.10	2	0.0038	128.685900000	2854.146	0.001000
52	26	3.00	2	0.1154	0.004766144	85624.380	0.001000
52	26	0.04	2	0.0015	402.599400000	1141.658	0.005000
52	26	0.10	2	0.0038	25.766390000	2854.146	0.005000
52	26	3.00	2	0.1154	0.000954311	85624.380	0.005000
52	26	0.04	2	0.0015	201.585400000	1141.658	0.010000
52	26	0.10	2	0.0038	12.901480000	2854.146	0.010000
52	26	3.00	2	0.1154	0.000477832	85624.380	0.010000
52	26	0.04	2	0.0015	101.078300000	1141.658	0.020000
52	26	0.10	2	0.0038	6.469021000	2854.146	0.020000
52	26	3.00	2	0.1154	0.000239593	85624.380	0.020000
52	26	0.04	2	0.0015	40.773670000	1141.658	0.050000
52	26	0.10	2	0.0038	2.609508000	2854.146	0.050000
52	26	3.00	2	0.1154	0.000096648	85624.380	0.050000
52	26	0.04	2	0.0015	22.903810000	1141.658	0.090000
52	26	0.10	2	0.0038	1.465837000	2854.146	0.090000
52	26	3.00	2	0.1154	0.000054290	85624.380	0.090000
52	26	0.04	2	0.0015	20.669650000	1141.658	0.100000
52	26	0.10	2	0.0038	1.322852000	2854.146	0.100000
52	26	3.00	2	0.1154	0.000048994	85624.380	0.100000

Tabla 4.1.1.14.

Los parámetros a/b, h/b, δ_{max}/b y $\omega_o b$, fueron importantes para la realización del nomograma, con este es posible determinar una gran cantidad de información para infinidad de placas de acero, para nuestro caso, debido a lo cual es importante determinar una expresión matemática que represente todo el nomograma.

Para determinar la ecuación de las rectas de la figura 4.1.1.10. b) que son rectas que representan el comportamiento del modelo para el caso de placas, la pendiente se calculará con la siguiente expresión:

$$\text{Tan } \theta = m = B = \frac{\text{Ln } y_{i+1} - \text{Ln } y_i}{\text{Ln } x_{i+1} - \text{Ln } x_i}$$

de donde x_{i+1} representa el valor de la abscisa y la y_{i+1} es el correspondiente valor de la ordenada para un punto $p(x_{i+1}, y_{i+1})$ de la recta.

Ahora sustituyendo los datos de una de las rectas de la figura 4.1.1.10. b) en la ecuación anterior para el cálculo de la pendiente, obtenemos que el valor de la pendiente para todas las rectas es de -3.0, y corresponde a $\theta = -71^\circ\ 34'$, lo cual lo comprobamos para otras rectas y si cumplían con esa misma pendiente.

Ahora ocupando la ecuación punto-pendiente, de la forma :

$$\text{Ln } (\delta_{max}/b) = m \text{ Ln } (\omega_o\ b) + B$$

y sustituyendo la pendiente m=-3.0 en la ecuación anterior tenemos ahora :

$$\text{Ln } (\delta_{max}/b) = -3.0 \text{ Ln } (\omega_o\ b) + B \qquad (4.1.1.2.)$$

La ecuación (4.1.1.2.) representa la ecuación de una recta de pendiente igual a -3.0 pero con una ordenada al origen variable (B), la cual variará con el valor del amortiguamiento histerético, y así tomando los datos presentados en la tabla 4.1.1.15. se graficaron en ejes semi-logarítmicos (en x el valor de B y en y el valor logarítmico de η) como se puede observar en la figura 4.1.1.15. tiende a ser una recta pero como no es exactamente una recta se realiza un ajuste por medio de mínimos cuadrados, para lo cual se ocuparon los datos de la tabla 4.1.1.15. y llegamos a la ecuación de una recta que es :

$$Ln\ (\eta) = -1.012281404\ B + 22.19937090$$

de donde tenemos que despejando a B nos queda así :

$$B = 21.930038 - 0.9878676\ Ln\ (\eta) \qquad (4.1.1.3.)$$

y sustituyendo (4.1.1.3.) en (4.1.1.2.) llegamos a la siguiente expresión :

$$Ln\ (\delta_{max}/b) = -3.0\ (\omega_o\ b) - 0.9878676\ Ln\ (\eta) + 21.930038$$

Finalmente la expresión que aproximadamente representará al modelo histerético (o sea al nomograma de la figura 4.1.1.10.) será :

$$\delta_{max}/b = e^{-3Ln(\omega_o b) - 0.9878676 Ln(\eta) + 21.930038} \qquad (4.1.1.4.)$$

La ecuación (4.1.1.4.) es la expresión que representa a todo el nomograma de la figura 4.1.1.10. que se utilizará para calcular el desplazamiento dinámico máximo en vibración forzada para cualquier placa simplemente apoyada en sus bordes, en función del coeficiente de amortiguamiento (factor de pérdidas) η y del parámetro $\omega_o b$, que involucra a ω_o que es la frecuencia natural más baja del sistema (Placa) por la dimensión b en la dirección y (ver figura 3.2.1.).

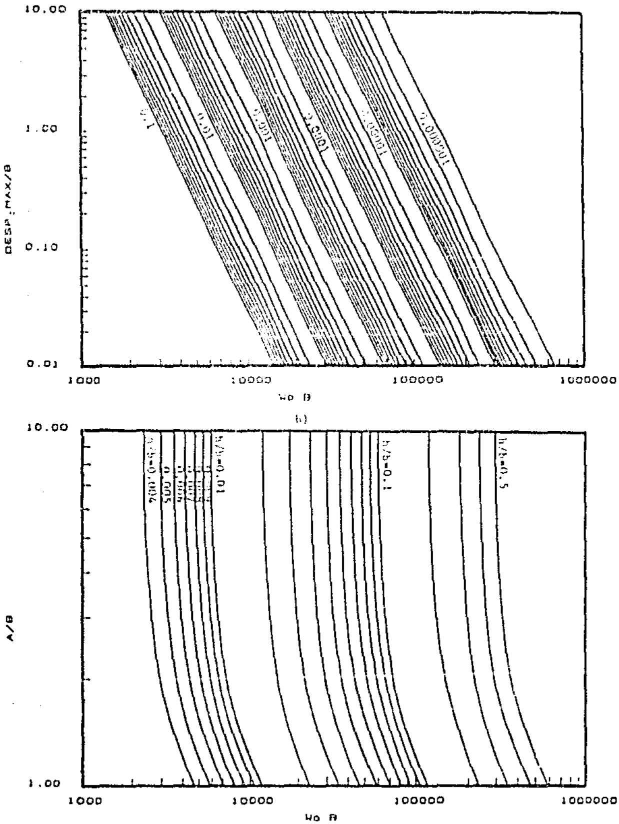


Figura 4.1.1.10.

X B	Y η
35.634429	0.000001
34.535818	0.000003
34.024993	0.000005
33.688521	0.000007
33.437207	0.000009
33.331847	0.000010
32.233240	0.000030
31.722420	0.000050
31.385959	0.000070
31.134644	0.000090
31.029286	0.000100
29.930730	0.000300
29.419962	0.000500
29.083547	0.000700
28.832289	0.000900
28.726956	0.001000
27.628910	0.003000
27.118650	0.005000
26.782751	0.007000
26.531999	0.009000
26.426922	0.010000
25.333967	0.030000
24.828745	0.050000
24.497823	0.070000
24.252010	0.090000
24.149374	0.100000

Tabla 4.1.1.15.

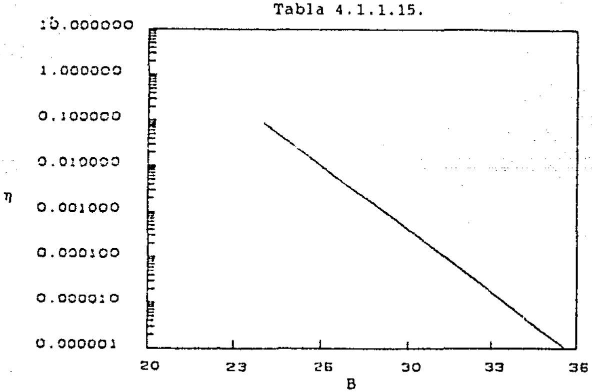


figura 4.1.1.15.

Esta ecuación se ocupó para un rango de amortiguamiento histerético que es : $0.1 \leq \eta \leq 0.000001$, y los valores calculados con el modelo histerético comparados con los obtenidos con la ecuación (4.1.1.4.), resultan tener una sobre o subestimación máxima del 10%, dicha diferencia no es importante en ingeniería y se acepta.

Además este nomograma o la ecuación (4.1.1.4.) se pueden ocupar además de con amortiguamiento histerético, también para amortiguamiento viscoso equivalente, utilizando la ecuación (3.3.17.) la cual relaciona a ambos amortiguamientos.

Capítulo V.

5. Conclusiones.

De esta tesis podemos concluir para comenzar, que este modelo histerético (modelo con amortiguamiento de tipo histerético) presentado, con base en la teoría de Werner Soedel, (ocupando las funciones Coordenadas) sigue una ley lineal sobre un sistema de ejes doble-logarítmicos, para los desplazamientos dinámicos máximos.

Segundo, se concluyó que el desplazamiento máximo dinámico se da cuando la frecuencia natural más baja coincide con la frecuencia de excitación (*RESONANCIA*) y no un poco antes como sucede en el caso de la referencia [1], y tercero, resulta que la respuesta es inversamente proporcional al valor del amortiguamiento histerético para η pequeños, como se puede ver en la tabla 4.1.1.14..

Cuarto, la principal contribución de esta tesis para el caso del modelo histerético es haber construido un nomograma como el que se presenta en la figura 4.1.1.10., el cual da una gran agilidad en el cálculo del desplazamiento dinámico máximo para cualquier placa con esta clase de amortiguamiento, y como el cuál no se encontró nada parecido en la literatura consultada, y mucho menos una expresión matemática como la determinada en este trabajo, que es la ecuación (4.1.1.4.), y esto se realizó para el caso de una placa simplemente apoyada, pero esto mismo se puede realizar para otras condiciones de apoyo (empotrada-empotrada, etc.), para los cuales podemos asegurar que se presentará un comportamiento lineal, quedando por ampliar todavía más este tema.

Además se podrían probar diferentes condiciones de carga; en trabajos posteriores se buscará tomar en cuenta en el modelo histerético otros aspectos, y así poder llegar a un modelo mucho más completo para, si es posible, realizar ensayes finalmente en laboratorio, para así hacer una comparación más real entre el modelo matemático y un modelo experimental.

Quinto, a lo largo del desarrollo de la tesis pudimos verificar que la respuesta máxima estática podía determinarse contando con sólo la función de carga arbitraria que se quiera probar, y la frecuencia natural más baja, y se calcula con la expresión siguiente :

$$\delta_{emax} = \frac{F_k^*}{\omega_k^2}$$

Lo que ,ocupado para el caso de vigas resulta algo muy importante, pues con solo proponer una función de carga cualquiera, conociendo la frecuencia natural más baja, se podrá determinar la δ_{emax}, y ésta multiplicada por el factor de amplificación dinámica para las condiciones de apoyo, ya sea simplemente apoyada, empotrada-empotrada, o cualquier otra condición de apoyo, podremos calcular el desplazamiento máximo dinámico de la viga.

REFERENCIAS.

1)Aviña-Lemus, Norma, "Vibraciones Libres y Forzadas en Estructuras de Pared Delgada", Tesis profesional,Facultad de Ingenieria, UNAM, México, D.F., 1987.

2)Soedel, Werner, "Vibrations of Shells and Plates", Marcel Dekker, Inc., New York, 1981.

3)R.E.D., Bishop and D.C. Johnson, "The Mechanics of Vibration", Cambridge University Press, 1960.

4)Thomson, Willam T., "Teoría de Vibraciones con Aplicaciones", Prentice-Hall Internacional, Englewood Cliffs, New York 07632, 1981.

5)Clough, Ray W. y Penzien, Joseph, "Dynamics of Structures", Mc. Graw-Hill Kogakusha, Inc., 1975.

6)A.W. Leissa and K.M. Iyer, "Modal Response of Circular Cylindrical Shells with Structural Damping, Journal of Sound and Vibration, Vol. 77(1), pp 1-10, 1981.

7)Volterra,Enrico and Zachmanoglou, E.C., "Dynamics of Vibrations", Charles E. Merril Brooks, Inc., Columbus, Ohio, 1965.

8)Hinkle, Rolland T., Morse, Ivan E. and Tse, Francis S., "Mechanical Vibrations,Theory and Applications", Allyn and Bacon, Inc., Boston, Massachusetts, 2a. Ed., 1978.

9)Blevings, Robert D., "Formulas for Natural Frequency and Mode Shape", Robert Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 1979.

10)Timoshenko, Stephen, "Teory of Plates and Shells", Mc. Graw-Hill Kogakusha, Inc. Copyright, 1940, by the United Engineering Trustees.

11)V.G. Rekarch, "Problemas de la Teoría de la Elasticidad", Editorial Mir., Moscú, Traducción al español 1978.

Apéndice A.

Cálculo de la Energía Disipada por una Carga, en una Placa con *Amortiguamiento Histerético* (η).

Partiendo de la teoría de Soedel, se determina que la *Energía Disipada* por una placa simplemente apoyada en sus cuatro bordes, se calcula como:

$$Ed = \dot{\eta}_k \, U_{3r} \tag{1}$$

de donde

$$\eta_k = \Lambda_k \, e^{j(\omega t - \phi_k)} \tag{2}$$

Derivando la ec.(2) con respecto al tiempo, nos queda

$$\dot{\eta}_k = \Lambda_k \, j\omega \, e^{j(\omega t - \phi_k)} \tag{3}$$

Ahora tomando sólo la parte real de la ec.(3)

$$\dot{\eta}_k = \Lambda_k \, \omega \, \mathrm{Sen} \, (\omega t - \phi_k) \tag{4}$$

Además sabiendo que

$$\Lambda_k = \frac{F_k^{*}}{\omega_k^2 \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_k} \right)^2 \right]^2 + \eta^2}} \tag{5}$$

Finalmente sustituyendo (4) y (5) en (1) e integrando nos queda

$$Ed = \frac{16\ F\ \omega}{\rho\ h\ m\ n\ \pi^2} \frac{\text{Sen}\ (\omega t - \phi_k)}{\omega_h^2 \sqrt{\left[1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_k} \right)^2 \right]^2 + \eta^2}} \tag{6}$$

La ec.(6) sólo tendrá valor para $m = 1, 3, 5, 7, \ldots.$ y $n = 1, 3, 5, 7, \ldots.$ pues para modos pares la contribución es nula.

Ya con esta expresión (6) se calcula la energía disipada para el caso de dos placas, cuyos datos se presentan a continuación :

Placa de : b = 16.5 in, h = 0.375 in η = 0.001	
Caso # 1 a = 52 in	Caso # 2 a = 26 in

Realizando el calculo de la energía disipada para los dos casos, se obtuvieron los siguientes resultados, que son presentados en la siguiente tabla 1A y ilustrados en la figura 1A.

Caso # 1		Caso # 2	
t	Ed	t	Ed
0.003490	6543757.00	0.002738	5134685.00
0.004188	5294597.00	0.003286	4154161.00
0.004886	2023078.00	0.003834	1586885.00
0.005584	-2021187.00	0.004381	-1586522.00
0.006282	-5293424.00	0.004929	-4153937.00
0.006980	-6543757.00	0.005477	-5134685.00
0.007678	-5294595.00	0.006025	-4154160.00
0.008376	-2023082.00	0.006573	-1586884.00
0.009074	2021187.00	0.007120	1586523.00
0.009773	5293424.00	0.007668	4153934.00
0.010471	6543757.00	0.008216	5134685.00

Table 1A.

Concluyendose finalmente, que la energía disipada para el primer caso es mucho mayor, que la del segundo caso, por lo cual será más difícil desplazar a la placa del caso 1 que la del caso 2.

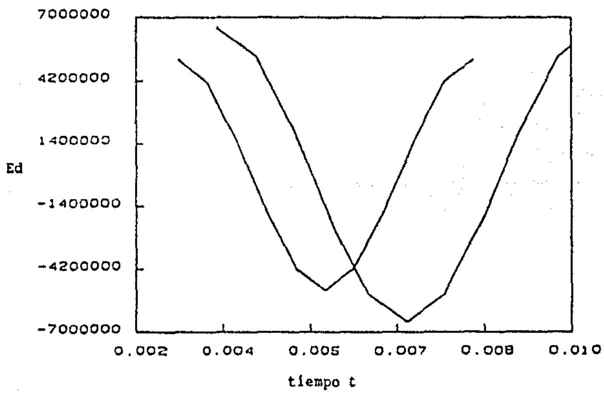


Figura 1A.