

30  
24



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

## MODELO NUMERICO BIDIMENSIONAL (X-Y) PARA YACIMIENTOS DE GAS

### T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
INGENIERO PETROLERO  
P R E S E N T A :  
ELISEO MARES ROBLES

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

México, D. F.

1990



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

INTRODUCCION .....	C 1)
I. - DEFINICION DEL PROBLEMA .....	C 3)
II. - CARACTERISTICAS Y DESARROLLO DEL MODELO MATEMATICO .....	C 5)
II.1. - DESARROLLO DEL MODELO MATEMATICO .....	C 5)
II.1.1. - ECUACION DE CONTINUIDAD .....	C 5)
II.1.2. - ECUACION DE MOVIMIENTO DEL GAS .....	C 8)
II.1.3. - ECUACION DE ESTADO DEL GAS .....	C 9)
II.1.4. - MODELO MATEMATICO .....	C10)
II.2. - CARACTERISTICAS Y SUPOSICIONES DEL MODELO .....	C14)
III. - DISCRETIZACION EN DIFERENCIAS FINITAS (MODELO NUMERICO) .....	C16)
III.1. - DISCRETIZACION EN DIFERENCIAS FINITAS .....	C16)
III.2. - DISCRETIZACION DEL MODELO MATEMATICO .....	C17)
III.2.1. - CALCULO DE LAS TRANSMISIBILIDADES .....	C19)
III.3. - ESQUEMA DE SOLUCION .....	C22)
III.4. - TRANSFORMACION DE UNIDADES .....	C22)
IV. - METODO DE SOLUCION .....	C26)
IV.1. - METODO DE SOLUCION DEL MODELO NUMERICO .....	C26)
V. - PROGRAMA DE COMPUTO .....	C29)
V.1. - DATOS QUE REQUIERE EL PROGRAMA .....	C29)
V.2. - PROPIEDADES DEL GAS .....	C33)
V.3. - CALCULO DEL VOLUMEN ORIGINAL DE GAS .....	C37)

V.4. - GENERACION DE LAS CONDICIONES INICIAL Y DE FRONTERA .....	(38)
V.5. - GENERACION Y SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES .....	(38)
V.6. - ACTUALIZACION DE LAS CONDICIONES DEL YACIMIENTO .....	(39)
V.7. - ACTUALIZACION DE LAS CONDICIONES DE LOS POZOS .....	(39)
VI. - EJEMPLO DE APLICACION .....	(42)
VI.1. - VALIDACION DEL MODELO .....	(42)
VI.2. - EJEMPLO DE APLICACION .....	(52)
VII. - RESULTADOS Y CONCLUSIONES .....	(67)
NOMENCLATURA .....	(69)
BIBLIOGRAFIA .....	(71)
APENDICE A .....	(73)
APENDICE B .....	(75)

## INTRODUCCION

Los hidrocarburos tienen gran importancia en la economía de nuestro país, ya que actualmente son la principal fuente de ingreso de divisas, además de ser el energético de mayor demanda y materia prima para diversas industrias. Debido a esto, nuestro país tiene una fuerte dependencia de las reservas de hidrocarburos. Como los hidrocarburos son un recurso no renovable y dada la creciente dificultad para descubrir campos nuevos, se hace necesario aplicar técnicas de explotación que permitan obtener una recuperación óptima de los yacimientos que se encuentran actualmente en explotación.

La evaluación de las técnicas de explotación tendientes a optimizar la recuperación de hidrocarburos pueden ser evaluadas mediante el uso de modelos de simulación numérica de yacimientos. Esto se debe a que una recuperación óptima de hidrocarburos sólo se puede obtener con varias predicciones del comportamiento del yacimiento, bajo diferentes esquemas de explotación, a fin de elegir el mejor desde un punto de vista técnico-económico. Sin embargo, es importante señalar que la aplicación de los simuladores numéricos carace de utilidad si en éstos no se representan en forma apropiada los mecanismos de producción del yacimiento; o bien, si no se cuenta con información suficiente y confiable para su aplicación.

En este trabajo se presentan el desarrollo y la operación de un modelo numérico bidimensional (X-Y) para simular el

comportamiento primario de un yacimiento de gas seco. Se presentan en forma detallada los desarrollos de los modelos matemático y numérico. Se presentan también la validación del modelo y un ejemplo de aplicación a un caso real.

Los resultados que arroja el modelo son: la distribución de presiones en el yacimiento, las presiones de fondo fluyendo de los pozos, los gastos acumulativos producidos total y por pozo, la recuperación, la presión media del yacimiento y el error con un balance de materia.

## CAPITULO I

### DEFINICION DEL PROBLEMA

La simulación del comportamiento de los yacimientos, bajo diferentes esquemas de explotación, es la solución que tradicionalmente emplea la Ingeniería Petrolera para resolver el problema de optimización en la recuperación de hidrocarburos. Una de las formas de simular el comportamiento del yacimiento es mediante el empleo de modelos físicos, de los cuales se puede obtener información bastante confiable, pero adolecen de muchas limitaciones, suposiciones e inexactitudes, debido a los problemas de escala que presentan, a la imposibilidad de representar la heterogeneidad del sistema roca-fluidos y a la suposición de regímenes de flujo exclusivamente permanentes. Otra forma de predecir el comportamiento del yacimiento es con la aplicación de la Ecuación de Balance de Materia (que en realidad es una ecuación de balance volumétrico), la cual por sus hipótesis simplificantes no permite representar adecuadamente el movimiento de los fluidos a través del medio poroso. También se han empleado modelos matemáticos para la predicción del comportamiento del yacimiento, pero para resolver estos modelos se tienen que hacer diversas suposiciones para simplificar el problema, dentro de las que destacan la de considerar constantes las propiedades de los fluidos y la que considera despreciables los términos al cuadrado del de los gradientes de presión.

En este trabajo se presenta el desarrollo de un modelo

numérico bidimensional para la predicción de comportamiento primario de yacimientos de gas seco. En este modelo se pretende superar algunos de los problemas que se tiene en los métodos de simulación mencionados anteriormente.



## CAPITULO II

### CARACTERISTICAS Y DESARROLLO DEL MODELO MATEMATICO

En este capítulo se presenta el desarrollo de un modelo matemático para la predicción del comportamiento primario de yacimientos de gas.

#### II.1 DESARROLLO DEL MODELO MATEMATICO

El modelo matemático se encuentra constituido por ecuaciones que representan el principio de conservación de masa, el movimiento del fluido en el medio poroso, en este caso gas, y una ecuación de estado que representa el comportamiento Presión-Volumen-Temperatura (PVT) del fluido. A continuación se presentan las ecuaciones que se utilizarán en el desarrollo del modelo.

##### II.1.1 Ecuación de Continuidad.

La ecuación de continuidad describe el principio de conservación de masa. Esta ecuación establece que:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Masa que entra} \\ \text{al sistema} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{l} \text{Masa que sale} \\ \text{del sistema} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{Masa que se} \\ \text{acumula en} \\ \text{el sistema} \end{array} \right]$$

Para obtener la expresión matemática que representa el principio de conservación de masa se considera un elemento del medio poroso, cuyas dimensiones son  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ , y  $\Delta Z$ ; existiendo flujo

en todas las superficies a través del elemento, como se muestra en la Fig 1.

Realizando un balance de materia para un pequeño intervalo de tiempo,  $\Delta t$ , el flujo de masa por unidad de superficie es igual a la densidad del fluido multiplicada por la por la velocidad,  $(\rho v)$ .

Si se multiplica el flujo de masa por el área transversal al flujo, se obtiene como resultado la siguiente ecuación:

$$\rho v A = \rho q \quad (1)$$

La masa de fluido en el elemento del medio poroso, al tiempo  $t$  es igual a:

$$\Delta X \Delta Y \Delta Z (\phi \rho)_t \quad (2)$$

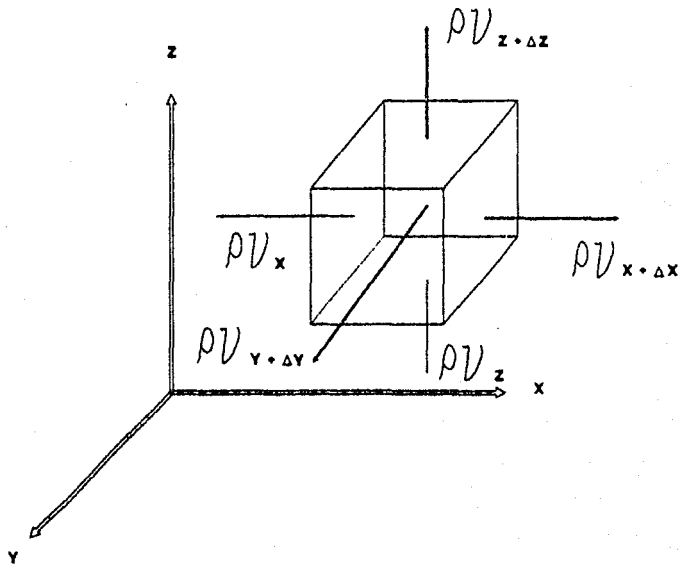
En el tiempo  $t + \Delta t$  la masa de fluido en el elemento de medio poroso será:

$$\Delta X \Delta Y \Delta Z (\phi \rho)_{t+\Delta t} \quad (3)$$

La adición o extracción de masa del elemento se puede representar como  $W(X, Y, Z)$ .

Aplicando el principio de conservación de masa y considerando positiva la entrada de masa al elemento, y negativa la salida de masa del elemento, se tiene:

FIG 1.- BALANCE DE MATERIA



$$\begin{aligned} & \Delta t[(\rho v)_x - (\rho v)_{x+\Delta x}] \Delta Y \Delta Z + \Delta t[(\rho v)_y - (\rho v)_{y+\Delta y}] \Delta X \Delta Z + \\ & + \Delta t[(\rho v)_z - (\rho v)_{z+\Delta z}] \Delta X \Delta Y \pm W(X, Y, Z) \Delta t = \\ & = \Delta X \Delta Y \Delta Z [(\phi \rho)_{t+\Delta t} - (\phi \rho)_t] \end{aligned} \quad (4)$$

Dividiendo la Ec 4 entre  $\Delta X \Delta Y \Delta Z \Delta t$  se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{(\rho v)_{x+\Delta x} - (\rho v)_x}{\Delta x} - \frac{(\rho v)_{y+\Delta y} - (\rho v)_y}{\Delta y} - \\ & - \frac{(\rho v)_{z+\Delta z} - (\rho v)_z}{\Delta z} \pm \frac{W(X, Y, Z)}{\Delta X \Delta Y \Delta Z \Delta t} = \frac{(\phi \rho)_{t+\Delta t} - (\phi \rho)_t}{\Delta t} \end{aligned} \quad (5)$$

Tomando límites cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$ ,  $\Delta z \rightarrow 0$  y  $\Delta t \rightarrow 0$ , y de la definición de la derivada se tiene:

$$-\frac{\partial (\rho v)_x}{\partial x} - \frac{\partial (\rho v)_y}{\partial y} - \frac{\partial (\rho v)_z}{\partial z} \pm W(X, Y, Z) = \frac{\partial (\phi \rho)}{\partial t} \quad (6)$$

La Ec 6 se puede expresar de la siguiente forma:

$$\nabla \cdot (\rho v) \pm \frac{q^* \rho}{\text{vol}} = - \frac{\partial (\phi \rho)}{\partial t} \quad (7)$$

La Ec 7 es la ecuación que representa el principio de conservación de masa.

### II.1.2 Ecuación de Movimiento del Gas.

El movimiento del gas en un medio poroso se puede representar

por medio de la Ec de Darcy<sup>1,1</sup> sin considerar efectos gravitacionales ni capilares:

$$v = - \frac{K}{\mu} \nabla P \quad (8)$$

### II.1.3 Ecuación de Estado del Gas.

En el modelo que se va a desarrollar se considera la ecuación de estado para el comportamiento real del gas, a partir de la cual se obtendrán las ecuaciones para la densidad y la compresibilidad de éste.

Partiendo de

$$PV = ZnRT \quad , \quad (9)$$

donde:

$$n = \frac{m}{M} \quad , \quad (10)$$

sustituyendo la Ec 10 en la Ec 9 se obtiene:

$$PV = Z \frac{m}{M} RT \quad , \quad (11)$$

como:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad , \quad (12)$$

la ecuación de la densidad queda de la siguiente forma:

$$\rho = \frac{PM}{ZRT} \quad , \quad (13)$$

Partiendo de la definición de compresibilidad y con la

<sup>1</sup>Las referencias se presentan en la bibliografía.

ecuación de la densidad del gas, se puede obtener la ecuación para la compresibilidad de éste:

$$C = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dP} \quad (14)$$

sustituyendo la Ec 13 en la Ec 14 se obtiene:

$$C = \frac{ZRT}{PM} \left[ \frac{M}{RT} \frac{dP}{dP} - P \frac{dZ}{dP} \right] = \frac{1}{P} - \frac{1}{Z} \frac{dZ}{dP} \quad (15)$$

Para el caso del gas, las propiedades del fluido y las permeabilidades a éste se consideran como funciones unicamente de la presión, debido a que la temperatura del yacimiento se considera constante.

#### II.1.4 Modelo Matemático.

Sustituyendo la Ec 8 en la Ec 7 y tomando en consideración la saturación de gas se obtiene la siguiente ecuación:

$$\nabla \cdot \left( \rho \frac{K}{\mu} \nabla P \right) \pm \frac{q^* \rho}{\text{vol}} = \frac{\partial (\phi S \rho)}{\partial t} \quad (16)$$

Suponiendo que el medio poroso es incompresible y que la saturación del gas se mantiene constante por la expansión del mismo, la Ec 16 se puede escribir de la siguiente forma:

$$\nabla \cdot \left( \rho \frac{K}{\mu} \nabla P \right) \pm \frac{q^* \rho}{\text{vol}} = \phi S \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (17)$$

Sustituyendo la Ec 13 en la Ec 17 se obtiene:

$$\nabla \cdot \left( \frac{PM}{ZRT} \frac{K}{\mu} \nabla P \right) \pm \frac{q^* PM}{\text{vol} ZRT} = \phi S \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{PM}{ZRT} \right) \quad (18)$$

como  $M/(RT)$  es una constante, la Ec 18 queda de la siguiente forma:

$$\nabla \cdot \left( \frac{K}{\mu Z} P \nabla P \right) \pm \frac{q^* P}{\text{vol } Z} = \phi S \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{P}{Z} \right) \quad (19)$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{P}{Z} \right) &= \frac{Z \frac{\partial P}{\partial t} - P \frac{\partial Z}{\partial t}}{Z^2} = \frac{Z \frac{\partial P}{\partial t} - P \frac{\partial Z}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t}}{Z^2} \\ &= \frac{P}{Z} \left[ \frac{1}{P} - \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial P} \right] \frac{\partial P}{\partial t} \quad (20) \end{aligned}$$

sustituyendo la Ec 18 en la Ec 20 se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{P}{Z} \right) = C \frac{P}{Z} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (21)$$

Aplicando la ecuación de estado para el comportamiento real del gas, expresada en función del gasto, a las condiciones del yacimiento y a las condiciones estándar se tiene:

$$n = \frac{P_y q^*}{Z_y R T_y} \quad (22)$$

$$n = \frac{P_{cs} q_{cs}}{Z_{cs} R T_{cs}} \quad (23)$$

Igualando las Ecs 22 y 23 se tiene:

$$\frac{P_y q^*}{Z_y R T_y} = \frac{P_{cs} q_{cs}}{Z_{cs} R T_{cs}}$$

despejando

$$\frac{q^* P_y}{Z_y} = \frac{q_{ca} P_{ca} T_y}{T_{ca}} \quad (24)$$

Sustituyendo las Ecs 21 y 24 en la Ec 19

se obtiene:

$$\nabla \cdot \left( \frac{K}{\mu Z} P \nabla P \right) \pm \frac{q_{ca} P_{ca} T_y}{\text{vol } T_{ca}} = \phi_{SC} \frac{P}{Z} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (25)$$

Definiendo al potencial de los gases reales como<sup>2</sup>:

$$m(P) = 2 \int \frac{P}{\mu Z} dP \quad (26)$$

La derivada del potencial con respecto al tiempo es:

$$\frac{\partial m(P)}{\partial t} = \frac{\partial m(P)}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{2P}{\mu Z} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (27)$$

El gradiente del potencial es:

$$\nabla m(P) = \frac{2P}{\mu Z} \nabla P \quad (28)$$

Sustituyendo las Ecs 27 y 28 en la Ec 25 se obtiene:

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{2} K \nabla m(P) \right) \pm \frac{q_{ca} P_{ca} T_y}{\text{vol } T_{ca}} = \frac{1}{2} \phi_{SC} \mu \frac{\partial m(P)}{\partial t} \quad (29)$$

Multiplicando la Ec 29 por 2 se tiene:

$$\nabla \cdot (K \nabla m(P)) \pm \frac{2q_{ca} P_{ca} T_y}{\text{vol } T_{ca}} = \phi_{SC} \mu \frac{\partial m(P)}{\partial t} \quad (30)$$

La Ec 30 es el modelo matemático que representa el movimiento del gas en un medio poroso.



Las ventajas más importantes de emplear el potencial, en lugar de la presión, para determinar la ecuación de flujo de gas en medios porosos son las siguientes<sup>2</sup>:

- 1) No se desprecian los términos de gradientes de presión de segundo grado, que generalmente son despreciados bajo la suposición de que son siempre pequeños en el sistema de flujo. El despreciar estos términos conduce a errores muy fuertes al calcular la distribución de presiones en el yacimiento. Esto se debe principalmente a que la suposición mencionada genera un error de balance de materia.
- 2) No se supone que las variaciones de las propiedades del gas con la presión son pequeñas, lo cual conduce también a errores bastante fuertes al calcular la distribución de presiones en el yacimiento.

Como se dijo, la permeabilidad es una función de la presión, esta dependencia se puede expresar mediante la expresión de Klinkenberg; sin embargo, la dependencia de la permeabilidad con la presión es generalmente despreciable para las condiciones de presión normalmente asociadas a yacimientos de gas<sup>2</sup>.

La Ec 30 es una ecuación en derivadas parciales que describe el flujo de gas a través de un medio poroso. La ecuación es no lineal, esto se debe a que la compresibilidad y la viscosidad del gas son funciones del potencial. El factor de compresibilidad del gas no aparece en la ecuación debido a que está involucrado en el potencial y en la compresibilidad del gas.

Para resolver la Ec 30 es necesario considerar las condiciones inicial y de frontera en función del potencial.

La condición inicial será la de presión inicial uniforme en el yacimiento, que expresada en función del potencial será de potencial inicial uniforme en el yacimiento, el cual se expresa de la siguiente forma:

$$m(P) (x, y) \Big|_{t=0} = m(P) \quad (31)$$

La condición de frontera será de no flujo en las fronteras del yacimiento, y se expresa de la siguiente forma:

$$\frac{\partial m(P)}{\partial n} = 0 \quad (32)$$

donde:  $n$  es la dirección normal a las fronteras del yacimiento.

## II.2 CARACTERISTICAS Y SUPOSICIONES DEL MODELO MATEMATICO

El modelo elaborado tiene las siguientes características y suposiciones:

- 1) El flujo de gas se representa con la Ec de Darcy.  
No se consideran efectos gravitacionales ni capilares.
- 2) Se supone que la composición de gas es constante.
- 3) Se considera el comportamiento real del gas.
- 4) La saturación del gas en el yacimiento es constante.

- 5) El medio poroso es heterogéneo, anisótropo e incompresible.
- 6) El flujo de gas es en dos direcciones (X-Y). Se supone que el flujo se realiza a temperatura constante.
- 7) La presión inicial es uniforme en todo el yacimiento.
- 8) No existe flujo a través de las fronteras del yacimiento.
- 9) El fluido es homogéneo y existe una sola fase.
- 10) No existen reacciones químicas entre el fluido y el medio poroso.
- 11) No existe efecto de Klinkenberg.
- 12) La permeabilidad no es función de la presión ni de la temperatura.

## CAPITULO III

### DISCRETIZACION EN DIFERENCIAS FINITAS (MODELO NUMERICO)

Como se dijo en el capítulo anterior, la Ec 30 es una ecuación diferencial parcial no lineal que no es posible resolver en forma analítica, debido a esto debe solucionarse empleando la técnica de diferencias finitas<sup>3,4</sup>.

#### III.1 DISCRETIZACION EN DIFERENCIAS FINITAS

La transformación de una ecuación diferencial parcial continua a una discreta se realiza utilizando el método de diferencias finitas, que consiste en sustituir las derivadas de la ecuación por su equivalente en diferencias finitas, las cuales pueden obtenerse al expandir el Polinomio de Taylor. al resolver la ecuación ya discretizada permitirá determinar los valores de las variables dependientes en puntos discretos de espacio y tiempo.

En simulación de yacimiento la discretización en espacio se realiza al dividir al yacimiento en un número determinado de celdas. La discretización en el tiempo se realiza al tomar intervalos del mismo para cada uno de los cuales el problema será resuelto. De esta manera, los valores de la presión se determinan para cada una de las celdas que componen la malla con que se aproxima el yacimiento en intervalos específicos de tiempo.

### III.2 DISCRETIZACION DEL MODELO MATEMATICO

En este caso se utilizarán diferencias regresivas para el caso del tiempo y diferencias centrales para el espacio.

Desarrollando la Ec 30 en las direcciones X y Y se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( K_x \frac{\partial mCP}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( K_y \frac{\partial mCP}{\partial Y} \right) \pm \frac{2qcaPcaTy}{vol Tca} =$$

$$= \phi \mu CS \frac{\partial mCP}{\partial X} \quad (33)$$

haciendo

$$U = K \frac{\partial mCP}{\partial X} \quad (34)$$

tomando diferencias centrales:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{U_{i+1/2,j} - U_{i-1/2,j}}{\Delta X} \quad (35)$$

donde:

$$U_{i+1/2,j} = K_{i+1/2,j} \frac{\partial mCP}{\partial X} \Bigg|_{i+1/2,j} \quad (36)$$

y

$$U_{i-1/2,j} = K_{i-1/2,j} \frac{\partial mCP}{\partial X} \Bigg|_{i-1/2,j} \quad (37)$$

y

$$\frac{\partial mCP}{\partial X} \Bigg|_{i+1/2,j} = \frac{mCP_{i+1,j} - mCP_{i,j}}{\Delta X} \quad (38)$$

$$\frac{\partial mCP}{\partial X} \Big|_{i-1/2, j} = \frac{mCP_{i,j} - mCP_{i-1,j}}{\Delta X} \quad (39)$$

Sustituyendo las Ecs 36, 37, 38 y 39 en la Ec 35 se obtiene:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{1}{\Delta X^2} [K_{i+1/2, j} mCP_{i+1, j} - mCP_{i, j}] + K_{i-1/2, j} [mCP_{i-1, j} - mCP_{i, j}] \quad (40)$$

Siguiendo el mismo desarrollo en la dirección Y se obtiene:

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{1}{\Delta Y^2} [K_{i, j+1/2} mCP_{i, j+1} - mCP_{i, j}] + K_{i, j-1/2} [mCP_{i, j-1} - mCP_{i, j}] \quad (41)$$

La derivada del potencial con respecto al tiempo, en términos de diferencias finitas, queda de la siguiente forma:

$$\frac{\partial mCP}{\partial t} = \frac{mCP_{i, j}^{n+1} - mCP_{i, j}^n}{\Delta t} \quad (42)$$

Sustituyendo las Ecs 40, 41 y 42 en la Ec 33 se tiene:

$$\frac{1}{(\Delta X)^2} [K_{i+1/2, j} mCP_{i+1, j} - mCP_{i, j}] + K_{i-1/2, j} [mCP_{i-1, j} - mCP_{i, j}] + \frac{1}{(\Delta Y)^2} [K_{i, j+1/2} mCP_{i, j+1} - mCP_{i, j}] + K_{i, j-1/2} [mCP_{i, j-1} - mCP_{i, j}] \pm \frac{2q_{ca} P_{ca} T_y}{vol T_{ca}} =$$

$$= \phi \mu CS \left( \frac{m^{n+1}(CP)_{i,j} - m^n(CP)_{i,j}}{\Delta t} \right) \quad (43)$$

Multiplicando la Ec 43 por el volumen de la celda ( $\Delta X \Delta Y h$ ) se obtiene:

$$\frac{h \Delta Y K_x}{\Delta X} \left\{ \begin{array}{l} m^{n+1}(CP)_{i+1,j} - m^n(CP)_{i,j} + \\ (i+1/2, j) \end{array} \right.$$

$$\frac{h \Delta Y K_x}{\Delta X} \left\{ \begin{array}{l} m^{n+1}(CP)_{i-1,j} - m^n(CP)_{i,j} + \\ (i-1/2, j) \end{array} \right.$$

$$\frac{h \Delta X K_y}{\Delta Y} \left\{ \begin{array}{l} m^{n+1}(CP)_{i,j+1} - m^n(CP)_{i,j} + \\ (i, j+1/2) \end{array} \right.$$

$$\frac{h \Delta Y K_x}{\Delta Y} \left\{ \begin{array}{l} m^{n+1}(CP)_{i,j-1} - m^n(CP)_{i,j} \pm \frac{2q_{cs} P_{cs} T_y}{T_{cs}} = \end{array} \right.$$

$$= \Delta X \Delta Y h \phi \mu CS \left( \frac{m^{n+1}(CP)_{i,j} - m^n(CP)_{i,j}}{\Delta t} \right) \quad (44)$$

### III.2.1 Cálculo de las Transmisibilidades.

Las transmisibilidades se definen como:

$$T_x = \frac{\Delta Y h K_x}{\Delta X} \quad (45)$$

$$T_y = \frac{\Delta X \cdot h \cdot K_y}{\Delta Y} \quad (46)$$

Esta forma de evaluar las transmisibilidades resulta inadecuada cuando existen cambios drásticos de permeabilidad y/o tamaño de las celdas cercanas a la celda en la que se están calculando las transmisibilidades<sup>5</sup>, debido a lo cual es necesario calcular dichas transmisibilidades con un promedio armónico. La forma de obtener este promedio se presenta a continuación:

Para la dirección X se tiene:

$$T_{x,i,j} = \frac{K_{i+1/2,j+1/2} h_{i,j} \Delta Y_{i,j}}{(\Delta X_{i,j} + \Delta X_{i+1,j})/2} \quad (47)$$

donde  $K_{i+1/2,j+1/2}$  es la permeabilidad que se obtiene con un promedio armónico:

$$\frac{\Delta X_{i,j} + \Delta X_{i+1,j}}{K_{i+1/2,j+1/2}} = \frac{\Delta X_{i,j}}{K_{i,j}} + \frac{\Delta X_{i+1,j}}{K_{i+1,j}} \quad (48)$$

Despejando  $K_{i+1/2,j+1/2}$  de la ecuación anterior se tiene:

$$K_{i+1/2,j+1/2} = \frac{(X_{i,j} + X_{i+1,j}) K_{i,j} K_{i+1,j}}{X_{i,j} K_{i+1,j} + X_{i+1,j} K_{i,j}} \quad (49)$$

Sustituyendo la Ec 49 en la Ec 47 se tiene:

$$T_{x,i,j} = \frac{2 K_{i,j} K_{i+1,j} h_{i,j} \Delta Y_{i,j}}{\Delta X_{i,j} K_{i+1,j} + \Delta X_{i+1,j} K_{i,j}} \quad (50)$$



Si guiendo el mismo procedimiento, pero en la dirección Y se obtiene:

$$T_{y i, j} = \frac{2K_{i, j} K_{i, j+1} h_{i, j} \Delta X_{i, j}}{\Delta Y_{i, j} K_{i, j+1} + \Delta Y_{i, j+1} K_{i, j}} \quad (51)$$

La Ec 44 expresada en términos de las transmisibilidades queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & T_{x i+1/2, j} (m(CP)_{i+1, j} - m(CP)_{i, j}) + \\ & + T_{x i-1/2, j} (m(CP)_{i-1, j} - m(CP)_{i, j}) + \\ & + T_{y i, j+1/2} (m(CP)_{i, j+1} - m(CP)_{i, j}) + \\ & + T_{y i, j-1/2} (m(CP)_{i, j-1} - m(CP)_{i, j}) \pm \frac{2q_{ca} P_{ca} T_y}{T_{ca}} = \\ & = \Delta X \Delta Y h \phi_{\mu} CS \left( \frac{m(CP)_{i, j}^{n+1} - m(CP)_{i, j}^n}{\Delta t} \right) \quad (52) \end{aligned}$$

factorizando se obtiene:

$$\begin{aligned} & T_{x i+1/2, j} (m(CP)_{i+1, j}) + T_{x i-1/2, j} (m(CP)_{i-1, j}) + \\ & + T_{y i, j+1/2} (m(CP)_{i, j+1}) + T_{y i, j-1/2} (m(CP)_{i, j-1}) - \\ & - (T_{x i+1/2, j} + T_{x i-1/2, j} + T_{y i, j+1/2} + T_{y i, j-1/2}) (m(CP)_{i, j}) = \\ & = \mp \frac{2q_{ca} P_{ca} T_y}{T_{ca}} + \Delta X \Delta Y h \phi_{\mu} CS \left( \frac{m(CP)_{i, j}^{n+1} - m(CP)_{i, j}^n}{\Delta t} \right) \quad (53) \end{aligned}$$

### III.3 ESQUEMA DE SOLUCION

Definir un esquema de solución consiste en establecer a que nivel de tiempo se van a evaluar los términos de flujo.

El esquema de solución que se emplea en el modelo numérico es el que se conoce en la literatura<sup>4</sup> como mixto; es decir, las presiones se evaluarán al nivel nuevo de tiempo (n+1) y las transmisibilidades se evaluarán al tiempo conocido (n). La Ec 53 expresada con este esquema queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 & T_{xi+1/2,j}^n m(CP)_{i+1,j}^{n+1} + T_{xi-1/2,j}^n m(CP)_{i-1,j}^{n+1} + \\
 & + T_{yi,j+1/2}^n m(CP)_{i,j+1}^{n+1} + T_{yi,j-1/2}^n m(CP)_{i,j-1}^{n+1} - \\
 & - (T_{xi+1/2,j} + T_{xi-1/2,j} + T_{yi,j+1/2} + T_{yi,j-1/2})^n m(CP)_{i,j}^{n+1} = \\
 & = \tau \frac{2q_{cs} P_{cs} T_y}{T_{cs}} + \Delta X \Delta Y h \phi_r C S \left( \frac{m(CP)_{i,j}^{n+1} - m(CP)_{i,j}^n}{\Delta t} \right) \quad (54)
 \end{aligned}$$

### III.4 TRANSFORMACION DE UNIDADES

La Ec 54 se encuentra expresada en unidades de Darcy, por lo que es necesario expresarla en unidades prácticas. La transformación se efectúa de la siguiente forma:

Variable	Unidades de Darcy	Unidades prácticas
h	cm	m
$\Delta X$	cm	m
$\Delta Y$	cm	m
$K_x$	Darcy	mDarcy

Ky	Darcy	mDarcy
m(CP)	atm <sup>2</sup> /cp	(kg/cm <sup>2</sup> ) <sup>2</sup> /cp
q	cm <sup>3</sup> /seg	m <sup>3</sup> /día
Pcs	atm	kg/cm <sup>2</sup>
Ty	°R	°F
Tcs	°R	°F
φ	fracción	fracción
μg	cp	cp
Cg	1/atm	(cm <sup>2</sup> /kg) <sup>-1</sup>
Sg	fracción	fracción
t	seg	días

$$\frac{m \left( \frac{100\text{cm}}{m} \right) m \left( \frac{100\text{cm}}{m} \right) mD \left( \frac{\text{Darcy}}{1000mD} \right) \left( \frac{\text{kg}^2}{\text{cm}^4} \right) \left( \frac{\text{atm}}{1.0333 \text{ kg/cm}^2} \right)^2}{m \left( \frac{100\text{cm}}{m} \right) \text{cp}} \times A =$$

$$= \frac{2m^3 \left( \frac{1000000\text{cm}^3}{m^3} \right) \text{kg} \left( \frac{\text{atm}}{1.0333 \text{ kg/cm}^2} \right)}{\text{día} \left( \frac{86400\text{s}}{\text{día}} \right) \text{cm}} \times B +$$

$$+ \frac{m \left( \frac{100\text{cm}}{m} \right) m \left( \frac{100\text{cm}}{m} \right) m \left( \frac{100\text{cm}}{m} \right)}{\text{día} \left( \frac{86400\text{s}}{\text{día}} \right) \text{cp}} \frac{1}{\text{kg/cm}^2} \frac{1.0333 \text{ kg/cm}^2}{\text{atm}} \times$$

$$\times \frac{(\text{kg/cm}^2)^2 \left( \frac{\text{atm}}{1.0333 \text{ kg/cm}^2} \right)^2}{\text{cp}} \times C ,$$

donde: A es el término que agrupa a las transmisibilidades,  
 B es el término fuente o sumidero y ,  
 C es el término que agrupa a los potenciales.

Realizando operaciones:

$$0.0937A = 2(11.2011)B + 11.2011C ,$$

dividiendo la expresión anterior entre 0.0937 se obtiene:

$$A = 239.1899B + 119.5949C .$$

Utilizando las constantes de conversión de unidades la

Ec 54 queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & T^n x_{i+1/2, j} m(P)_{i+1, j}^{n+1} + T^n x_{i-1/2, j} m(P)_{i-1, j}^{n+1} + \\ & + T^n y_{i, j+1/2} m(P)_{i, j+1}^{n+1} + T^n y_{i, j-1/2} m(P)_{i, j-1}^{n+1} - \\ & - (T x_{i+1/2, j} + T x_{i-1/2, j} + T y_{i, j+1/2} + T y_{i, j-1/2})^n (m(P)_{i+1, j})^{n+1} = \\ & = \bar{r} \frac{239.1898 q_{cs} P_{cs} T_y}{T_{cs}} + \\ & + 119.5949 \Delta X \Delta Y h \phi_{cs} \left( \frac{m(P)_{i, j}^{n+1} - m(P)_{i, j}^n}{\Delta t} \right) \quad (55) \end{aligned}$$

Suponiendo que existen sólo pozos productores y haciendo los siguientes cambios de variables:

$$C_1 = 239.1898 \frac{P_{cs}}{T_{cs}} = 0.8561 ,$$

y

$$C_2 = 119,5949 \Delta X \Delta Y h \phi_{\mu} CS / \Delta t \quad ,$$

la Ec 58 se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & T^n_{xi+1/2, j, k(m(P)_{i+1, j})}^{n+1} + T^n_{xi-1/2, j, k(m(P)_{i-1, j})}^{n+1} + \\ & + T^n_{yi, j+1/2, k(m(P)_{i, j+1})}^{n+1} + T^n_{yi, j-1/2, k(m(P)_{i, j-1})}^{n+1} - \\ & - (T_{xi+1/2, j} + T_{xi-1/2, j} + T_{yi, j+1/2} + T_{yi, j-1/2} + C_2)^n (m(P)_{i+1, j})^{n+1} = \\ & = -C_1(q_{cs} T_y) + C_2(m(P)_{i, j}) \quad . \end{aligned} \quad (59)$$

Al aplicar la Ec 58 a cada una de las celdas en que se divide el yacimiento se genera un sistema de ecuaciones lineales, que al resolverlo proporciona los valores de la presión al siguiente nivel de tiempo.

## METODO DE SOLUCION

Siempre que una ecuación diferencial parcial se expresa en diferencias finitas, al aplicarla a cada una de las celdas que constituyen la malla con la que se aproxima el yacimiento, da como resultado un sistema de ecuaciones lineales. Este sistema de ecuaciones generalmente forma algún tipo especial de matriz, para el caso de flujo de gas en dos direcciones el sistema de ecuaciones forma una matriz pentadiagonal.

Para la generación y solución del sistema de ecuaciones, generalmente se aplica un programa de cómputo, por lo que aplicar algún método convencional, ya sea iterativo o directo, conduce a un gran desperdicio de memoria y además, el programa de cómputo que se utilice requerirá de mucho tiempo para resolver el sistema, esto se debe principalmente a que para la utilización de estos métodos es necesario almacenar valores en todo el arreglo de la matriz, ya que el programa opera con todos los elementos de la misma. Para solucionar este problema se optó por utilizar un método especial para resolver sistemas de ecuaciones que generan matrices pentadiagonales.

## IV.1 METODO DE SOLUCION DEL MODELO NUMERICO

El método de solución que se seleccionó es el método conocido como LSOR (Line Successive Overrelaxation)<sup>6,7</sup>; el cual, es uno de los más eficientes para la solución de sistemas de ecuaciones que generan matrices pentadiagonales. El método opera de la siguiente

forma: a partir de una matriz pentadiagonal se genera una matriz tridiagonal, la cual se resuelve mediante la utilización del Método de Thomas (ver Apéndice A), a los valores que se obtienen se les aplica la relajación para obtener la solución definitiva. Esta solución se compara con la obtenida en el paso anterior, si coinciden con una tolerancia predeterminada, esta será la solución real; en caso contrario se aplica nuevamente el método.

A continuación se muestra la representación esquemática del método mencionado:

sea el siguiente un sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix}
 AO & AE & & & \\
 AW & AO & AE & & \\
 & AW & AO & & \\
 \hline
 AN & & & & \\
 & AN & & & \\
 & & AN & & \\
 \hline
 & & & & \\
 & & & AN & \\
 & & & & AN
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 AS \\
 AS \\
 AS \\
 AS \\
 AS \\
 AS \\
 AS \\
 AS \\
 AS \\
 AS \\
 AS
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 m \\
 m \\
 m \\
 m \\
 m \\
 m \\
 m \\
 m \\
 m \\
 m \\
 m
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 TI \\
 TI \\
 TI \\
 TI \\
 TI \\
 TI \\
 TI \\
 TI \\
 TI \\
 TI \\
 TI
 \end{bmatrix}$$

donde:

AW son los coeficientes en  $(i,j)$  de la matriz de incógnitas,

AE son los coeficientes en  $(i,j)$  de la matriz de incógnitas,

AN son los coeficientes en  $(i,j-1)$  de la matriz de incógnitas,

AS son los coeficientes en  $(i,j+1)$  de la matriz de incógnitas,

AO son los coeficientes en  $(i,j)$  de la matriz de incógnitas,

m es el vector de incógnitas, y

TI es el vector de términos independientes,

el procedimiento LSOR transforma a la matriz de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix}
 A_1 & C_1 \\
 B_1 & A_2 & C_2 \\
 & B_2 & A_3
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 V_1 \\
 V_2 \\
 V_3
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 U_1 \\
 U_2 \\
 U_3
 \end{bmatrix}$$

donde:

$A_1$ ,  $A_2$ , y  $A_3$  son matrices tridiagonales,

$B_1$ ,  $B_2$ ,  $C_1$  y  $C_2$  son matrices diagonales,

$V_1$ ,  $V_2$  y  $V_3$  son vectores de incógnitas,

$U_1$ ,  $U_2$  y  $U_3$  son vectores de términos independientes.

Despejando  $V_1$ ,  $V_2$  y  $V_3$ :

$$A_1 V_1^* = -C_1 V_2 + U_1 \quad ,$$

resolviendo por el Método de Thomas y aplicando la relajación se obtiene:

$$V_1^{n+1} = \omega V_1^* + (1-\omega) V_1 \quad ;$$

$$A_2 V_2^* = -B_1 V_1^{n+1} - C_2 V_3 + U_2 \quad ,$$

resolviendo por el Método de Thomas y aplicando la relajación se obtiene:

$$V_2^{n+1} = \omega V_2^* + (1-\omega) V_2 \quad ;$$

$$A_3 V_3^* = -B_2 V_2^{n+1} + U_3 \quad ,$$

resolviendo por el Método de Thomas y aplicando la relajación se obtiene:

$$V_3^{n+1} = \omega V_3^* + (1-\omega) V_3 \quad .$$

Si los valores de  $V_1$ ,  $V_2$  y  $V_3$  coinciden con una tolerancia predeterminada, estos serán la solución real; en caso contrario se hacen las iteraciones necesarias hasta cumplir con la tolerancia. Para este caso en particular se utilizó una tolerancia de  $30 \text{ (kg/cm}^2\text{)}^2/\text{cp}$ , este valor corresponde en forma aproximada a  $0.1 \text{ kg/cm}^2$  a la presión más baja, con potencial diferente de cero en la tabla de presión contra potencial.



## CAPITULO V

### PROGRAMA DE COMPUTO

El programa de cómputo se diseñó siguiendo los principios de la programación estructurada<sup>B</sup> y procurando que fuera portátil; fue elaborado en Lenguaje Pascal (versión 5.5 del compilador Turbo Pascal) por considerarse uno de los más eficientes en el uso de computadoras personales. Las variables utilizadas en el programa son las propuestas por la SPE<sup>P</sup>.

El programa se elaboró en forma conversacional, las unidades en que se deben introducir las variables se indican al momento de pedir su valor. Para el caso en que se tenga que dividir al yacimiento en un número muy grande de celdas es conveniente correr el programa con las opciones para trabajar con archivos de datos y resultados, lo cual facilita su operación.

A continuación se presenta la descripción detallada del programa de cómputo, y en la Fig 2 se muestra un diagrama de bloques de éste..

#### V.1 DATOS QUE REQUIERE EL PROGRAMA

Los datos que requiere el programa son los siguientes:

1) Nombre del yacimiento.

2) Geometría de la malla:

- Número de celdas en la dirección X.
- Número de celdas en la dirección Y.

FIG 2.- DIAGRAMA DE BLOQUES

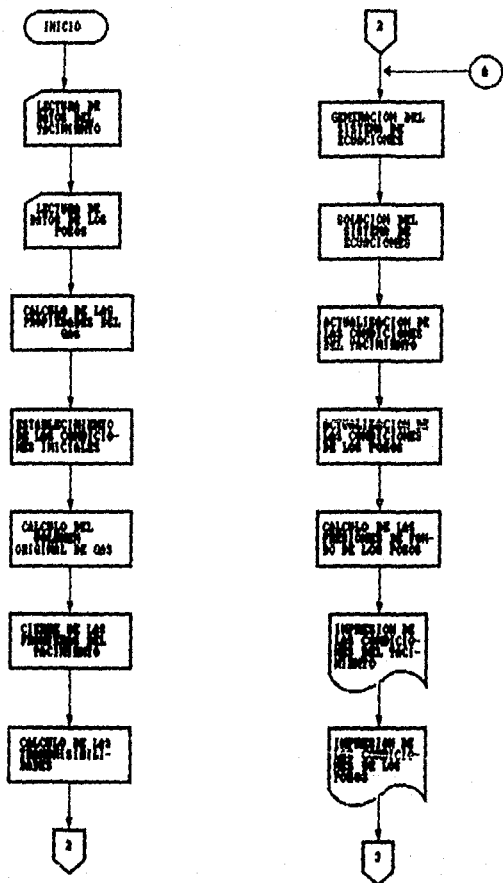
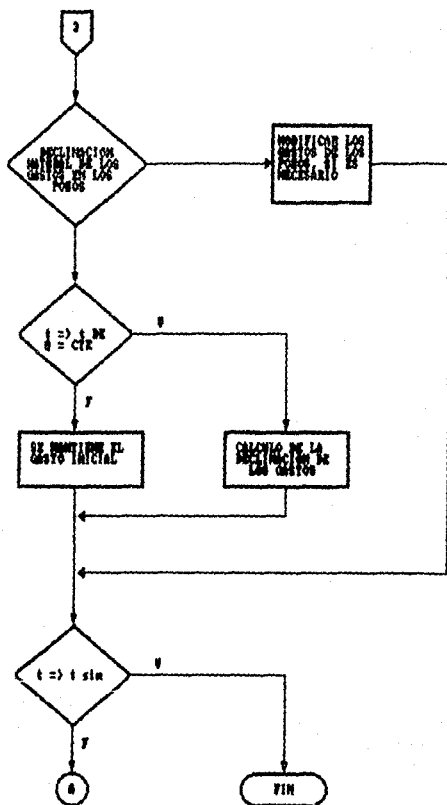


FIG 2.- DIAGRAMA DE BLOQUES  
(CONTINUACION)



- Longitudes de las celdas en la dirección X (m), en caso de ser variables se supone que para una posición en X todas las celdas en Y tienen la misma longitud.
- Longitudes de las celdas en la dirección Y (m), en caso de ser variables se supone que para una posición en Y todas las celdas en X tienen la misma longitud.
- Espesores de las celdas (m).

Para el caso en que el yacimiento presente una geometría irregular, se deben proporcionar valores en todos estos parámetros y a la porosidad en las celdas que no forman parte del yacimiento, y se debe dar valor de cero a las permeabilidades en las dos direcciones, esto controla a la rutina de impresión y la solución del sistema de ecuaciones en las celdas que no forman parte del yacimiento.

### 3) Datos petrofísicos:

- Distribución de porosidades (fracción).
- Distribución de las permeabilidades en la dirección X (mD).
- Distribución de las permeabilidades en la dirección Y (mD).

### 4) Información adicional:

- Presión inicial del yacimiento (se supone uniforme) ( $\text{kg/cm}^2$ ).
- Temperatura del yacimiento (se supone constante) ( $^{\circ}\text{C}$ ).
- Saturación de gas (se supone constante) (fracción).

- Densidad relativa del gas (aire = 1 ) a condiciones estándar.
- Tiempo total de simulación (días).
- Incremento de tiempo (días).
- Número de pozos iniciales en producción, así como sus posiciones, número, gasto de producción ( $m^3/día$ ) a condiciones estándar, radio (m) y el coeficiente de flujo turbulento ( $m^3/día$ )<sup>-1</sup>.
- Número de períodos en los que se va a mantener constante la producción de los pozos ( en caso que se considere la declinación natural de los gastos de producción en los pozos).

## V.2 PROPIEDADES DEL GAS

La obtención de las propiedades PVT del gas se hizo con el empleo de correlaciones. Se optó por manejar las propiedades del gas en forma tabular, ya que el calcular los valores de éstas cada cada que se requieren consume un mayor tiempo de cómputo.

Para obtener la tabla de propiedades del gas, el programa genera un vector que contiene cincuenta valores de presión, entre  $i$  y  $(P_i+50)$   $kg/cm^2$ . El valor de  $i$   $kg/cm^2$  se escogió para utilizar una presión de referencia (en la evaluación del potencial) menor que la presión más baja que llegue a tener el yacimiento; el valor de  $P_i+50$   $kg/cm^2$  se escogió para tener un valor mayor a la presión inicial para las interpolaciones que se requieran al obtener las propiedades del gas a diferentes condiciones de presión.

A continuación se presentan las correlaciones utilizadas para la elaboración del programa de cómputo<sup>10</sup>.

El factor de compresibilidad del gas se calcula mediante el empleo de la siguiente correlación:

$$Z = (A_1 + A_2/T_{pr} + A_3/T_{pr}^3)P_r + (A_4 + A_5/T_{pr})P_r^2 + (A_6 A_7 P_r^3)/T_{pr} + (A_7 P_r^2/T_{pr}^3)(1 + A_8 P_r^2)e^{(-A_9 P_r^2)} + 1 \quad (57)$$

donde:  $A_1=0.31506$ ,  $A_5=-0.6123$ ,  
 $A_2=-1.0467$ ,  $A_6=-0.10489$ ,  
 $A_3=-0.5783$ ,  $A_7=0.68157$ ,  
 $A_4=0.8353$ ,  $A_8=0.68446$ .

$T_{pr}$  es la temperatura pseudo-reducida del gas y se obtiene con la siguiente ecuación:

$$T_{pr} = \frac{T+273.15}{T_{pc}} \quad (58)$$

donde  $T_{pc}$  es la temperatura pseudo-crítica y se calcula por medio de la siguiente correlación:

$$T_{pc} = ((107+316.07\gamma_g)-492)/1.8 + 273.15 \quad (59)$$

donde  $\gamma_g$  es la densidad relativa del gas producido.

$P_{pr}$  es la presión pseudo-reducida del gas y se obtiene con la siguiente ecuación:

$$P_{pr} = \frac{P}{P_{pc}} \quad (60)$$

donde  $P_{pc}$  es la presión pseudo-crítica y se calcula con la siguiente correlación:

$$P_{pc} = (702.8 - 50 \gamma_g) / 14.223 \quad (81)$$

$\rho_r$  se obtiene con la siguiente ecuación:

$$\rho_r = 0.27 P_{pr} / (Z T_{pr}) \quad (82)$$

El procedimiento que se utiliza para calcular el valor de  $Z$  es el siguiente:

- 1) Suponer un valor de  $Z$  (en el programa se asigna un valor inicial de 1).
- 2) Obtener el valor de  $\rho_r$  para el valor de  $Z$  supuesto.
- 3) Calcular el valor de  $Z$  con la 57.
- 4) Comparar los valores de  $Z$  supuesto y de  $Z$  calculado, si no coinciden con una tolerancia de 0.001 ( $|Z_c - Z_s| \leq 0.001$ ) regresar al paso 1 asignando el valor de  $Z$  calculado a  $Z$  supuesto, en caso contrario el valor de  $Z$  es el calculado.

El factor de volumen del gas se obtiene mediante la definición de éste y utilizando la ecuación de estado para el comportamiento real de los gases:

$$B_g = \frac{V_g @ c_y}{V_g @ c_a} \quad (83)$$

sustituyendo la Ec 8 en la Ec 83 se obtiene:

$$B_g = \frac{\frac{Z_{cy} n_{cy} R_{cy} T_{cy}}{P_{cy}}}{\frac{Z_{cs} n_{cs} R_{cs} T_{cs}}{P_{cs}}} \quad (64)$$

como R es constante,  $Z_{cs}$  es uno, la composición del gas es constante ( $n_{cy} = n_{cs}$ ) y utilizando los valores de 288.7 °K (620 °R) para  $T_{cs}$  y 1.0333 kg/cm<sup>2</sup> (14.7 lb/pg<sup>2</sup>) para  $P_{cs}$ , la Ec 64 queda de la siguiente forma:

$$B_g = \frac{0.00352 Z_{cy} (T_{cy} + 273.15)}{P_{cy}} \quad (65)$$

La densidad del gas se calculó con la siguiente ecuación:

$$\rho_g = \frac{1.2250 \gamma_g}{B_g} \quad (66)$$

La viscosidad del gas se calculó con la siguiente correlación:

$$\mu_g = (0.0001) K e^{\alpha(\rho_g/1000)^Y} \quad (67)$$

donde

$$X = 3.5 + \frac{986}{(1.8T + 462)} + 0.2897 \gamma_g \quad (68)$$

$$Y = 2.4 - 0.2X \quad (69)$$



$$K = \frac{(9.4 + 0.5794\gamma_g)(1.8T + 492)^{1.5}}{209 + 550.4\gamma_g + (1.8T + 492)} \quad (70)$$

La compresibilidad del gas se obtiene mediante su definición:

$$C = \frac{1}{P} \frac{1}{Z} \frac{dZ}{dP} \quad (18)$$

El valor de la derivada del factor de compresibilidad con respecto a la presión se calcula utilizando diferencias finitas. Para el primer valor de esta derivada se utilizan diferencias progresivas  $((Z_2 - Z_1)/(P_2 - P_1))$ , para el último valor se utilizan diferencias regresivas  $((Z_n - Z_{n-1})/(P_n - P_{n-1}))$ , y para valores intermedios se utilizan diferencias centrales  $((Z_{n+1} - Z_{n-1})/(P_{n+1} - P_{n-1}))$ .

El potencial del gas se obtiene con su definición:

$$m(P) = \int_{P_r}^P \frac{P}{\mu Z} dP \quad (28)$$

El valor de la integral se calcula con la fórmula de integración de Simpson  $1/3^{ii}$ . Los límites de la integral son la presión que se utilizó como referencia (límite inferior) y la presión de interés a la cual se quiere determinar el potencial (límite superior).

### V.3 CALCULO DEL VOLUMEN ORIGINAL DE GAS

El volumen original de gas se calculó con en forma volumétrica con la siguiente ecuación:

#### V.4 GENERACION DE LAS CONDICIONES INICIAL Y DE FRONTERA

La condición inicial que se tiene en el modelo es la de presión inicial uniforme en todo el yacimiento, la cual se representa con potencial uniforme en el yacimiento, y se genera asignando el potencial correspondiente a la presión inicial a todas las celdas.

Para que el programa opere en forma adecuada es necesario inicializar otros parámetros como son los gastos acumulativos producidos de cada pozo y total, así como los gastos iniciales. Todos estos parámetros se inicializan con un valor de cero, esto con el fin de eliminar errores debidos a que algunos valores de estos parámetros se pudieran encontrar almacenados en la memoria de la computadora.

La condición de frontera del modelo es la de no flujo en las fronteras del yacimiento, la cual se generó asignando el valor de cero a las transmisibilidades en las fronteras del yacimiento.

#### V.5 GENERACION Y SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES

La generación del sistema de ecuaciones se realiza calculando los elementos de las bandas de la matriz que forma el sistema de ecuaciones. Para solucionar el sistema de ecuaciones el procedimiento LSOR se programó con una rutina que vectoriza el sistema de ecuaciones.

## V.6 ACTUALIZACION DE LAS CONDICIONES DEL YACIMIENTO

El sistema de ecuaciones está planteado tomando como incógnita el potencial, debido a lo cual se requiere transformar la solución a presiones. Como se tiene una tabla de presión contra potencial, para realizar dicha transformación sólo se requiere de una interpolación (el procedimiento de interpolación se describe en el Apéndice B). Una vez transformados los potenciales a presiones se procede a la asignación de los nuevos valores de presión para cada celda.

## V.7 ACTUALIZACION DE LAS CONDICIONES DE LOS POZOS

El programa cuenta con una rutina que permite abrir y cerrar pozos de producción, así como cambiar gastos de producción.

En este procedimiento se calculan también los gastos acumulativos producidos por pozo y total, la recuperación y el error con un balance de materia, este error se calcula con la siguiente ecuación:

$$\text{Error} = \left| 1 - \frac{G - G_r}{G_p} \right|, \quad (72)$$

donde:

G es el volumen original de gas @ a cs.

G<sub>r</sub> es el volumen remanente de gas en el yacimiento @ cs, y

G<sub>p</sub> es el volumen acumulativo producido @ cs.

En este procedimiento se calculan también las presiones de fondo fluyendo de los pozos. La presión que calcula el modelo para cada una de las celdas, es una presión representativa de esa región del yacimiento. Peaceman<sup>12</sup> propuso una ecuación para calcular una distancia, a partir del nodo central que representa a la celda (malla de nodos centrados), en la cual se considera que se tiene la presión calculada por el modelo (radio equivalente o efectivo de flujo), y a partir de la cual se pueden calcular las presiones de fondo fluyendo de los pozos con una ecuación de flujo radial que considere los efectos de flujo turbulento. A continuación se presentan las ecuaciones para calcular el radio equivalente de flujo y la presión de fondo fluyendo de los pozos:

Radio equivalente (o efectivo) de flujo de la celda que contiene al pozo:

$$r_o = 0.28 \frac{((K_y/K_x)^{1/2} \Delta X^2 + (K_x/K_y)^{1/2} \Delta Y^2)}{(K_y/K_x)^{1/4} + (K_x/K_y)^{1/4}} \quad (73)$$

Presión de fondo fluyendo del pozo:

$$P_{wf} = (P_{LJ} - 0.1362518 \frac{q\mu ZT(\ln(r_o/r_w) + Dq)}{Kh})^{0.5} \quad (74)$$

Kh

La declinación natural de la producción en los pozos se calcula por medio de la siguiente ecuación:

$$q_{ca} = C_D(m(P) - m(P_w)) \quad (75)$$

donde  $m(P)$  es el potencial a la presión media del yacimiento y  $m(P_v)$  es el potencial a la presión del pozo.

La  $C_D$  es una constante que se calcula en el último período en que se mantiene constante la producción de los pozos. Se supone que en este período ya se alcanzó el régimen semi-permanente de flujo. El valor de  $C_D$  se calcula cuando se alcanza el régimen semi-permanente debido a que la diferencia entre el potencial promedio del yacimiento y el potencial del pozo es constante. Una vez calculado el valor de  $C_D$  se puede calcular el valor del gasto correspondiente a una caída de potencial. El valor de  $C_D$  depende de la geometría, temperatura y permeabilidad del yacimiento, de la distribución de los pozos, de la longitud y posición del intervalo de explotación de los mismos, de las características del gas y del sistema de unidades que se utilice.

## CAPITULO VI

### EJEMPLO DE APLICACION

En este capítulo se presenta un ejemplo de aplicación para validar el modelo desarrollado (el modelo que se utilizó para comparar los resultados es un modelo analítico, se presenta en la Referencia 13); así como la aplicación del modelo a un caso real.

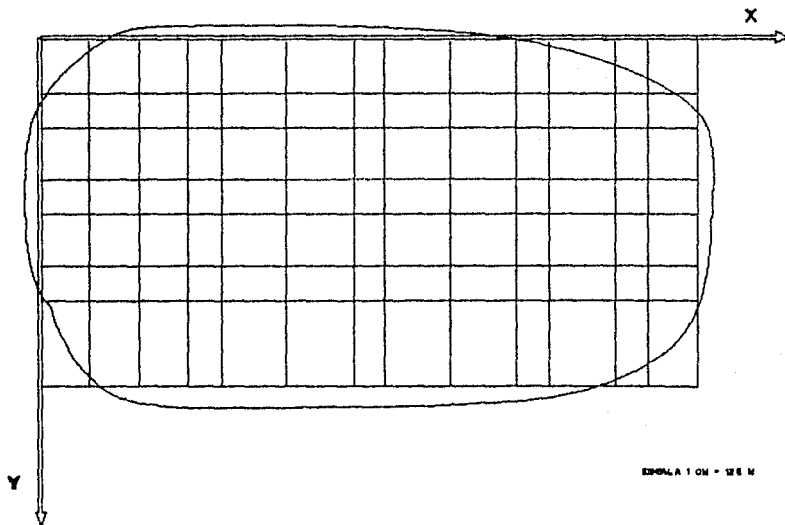
#### VI.1 VALIDACION DEL MODELO

En la Fig 3 se presenta la malla con la que se aproximó el yacimiento. La malla se calculó para que los pozos existentes en el yacimiento quedaran en el centro de la celdas que los contienen.

La información que se utilizó para correr el modelo es la siguiente:

- Yacimiento con 150 (m) de espesor.
- Yacimiento homogéneo con porosidad de 0.1 (fracción).
- Yacimiento isotrópico con permeabilidad de 10 (mD).
- Presión inicial del yacimiento 300.000001 (kg/cm<sup>2</sup> abs).
- Temperatura del yacimiento 70.85 (°C).
- Viscosidad inicial del gas 0.02 (cp).
- Compresibilidad inicial del gas 0.00453 (kg/cm<sup>3</sup>)<sup>-1</sup>.
- Factor de compresibilidad inicial del gas 0.855 (adimensional).
- 990 días de simulación, con incrementos de 30 días.
- Saturación de gas de 0.9 (adimensional).

FIG 3.- DESCRIPCION FISICA DEL YACIMIENTO



ESCALA 1 CM = 125 M

-Densidad del gas producido de 0.6 (aire=1).

-El gasto en los pozos se mantendra constante durante 12 periodos de simulación. La demás información de los pozos se presenta en la siguiente tabla.

Pozo	Q (mm m <sup>3</sup> )	Posición		Radio del pozo (m)	Dw10 <sup>4</sup> (m <sup>3</sup> /día) <sup>-1</sup>
		X	Y		
2	0.3	4	2	0.2	1.8218
2	0.35	4	6	0.2	1.8288
3	0.45	7	4	0.2	1.0246
4	0.2	10	4	0.2	4.1174
5	0.38	12	4	0.2	1.8126

donde D es el coeficiente de flujo turbulento.

Las correlaciones que se utilizaron para calcular las propiedades de los fluidos se calibraron con los valores iniciales de éstas, ya que se desconocen los demás datos PVT.

Las comparaciones de los resultados que se obtuvieron con el modelo propuesto y con el modelo que se utilizó como referencia se muestran en las Figs 4 a 9. La Fig 4 muestra la comparación de las presiones medias calculadas por ambos modelos. Las Figs 5 a 9 muestran las comparaciones entre los gastos y las presiones de los pozos calculadas por ambos modelos.

En la historia de presión de cada pozo se logró un buen ajuste; sin embargo, el ajuste en los gastos de los pozos no fue



tan satisfactorio, ya que en los últimos periodos de la simulación las diferencias en los gastos son bastante fuertes; aunque el error máximo en los gastos calculados fue de 7.9 %. Se aclara que el modelo aquí propuesto se corrió con los mismos datos que el modelo que se utiliza para la validación, sin cambiar el valor de los parámetros del yacimiento.

FIG 4.- PRESION MEDIA DEL YACIMIENTO

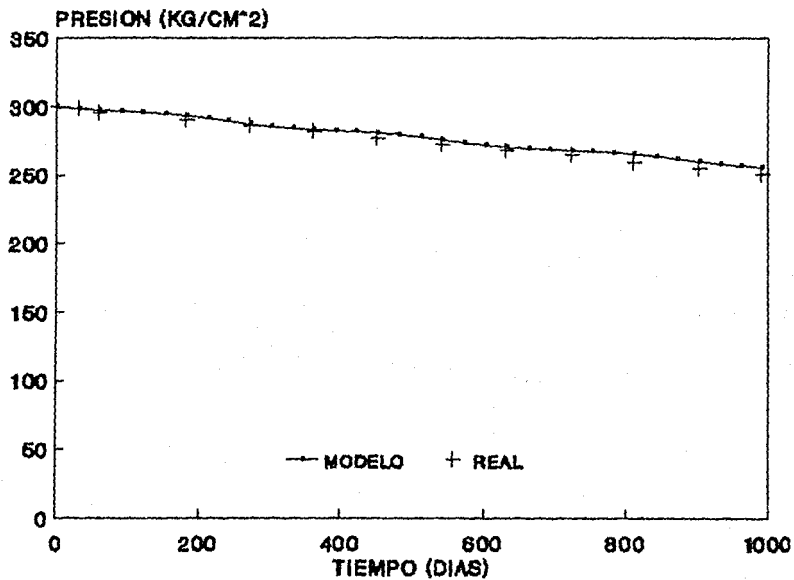


FIG 5.- POZO 1

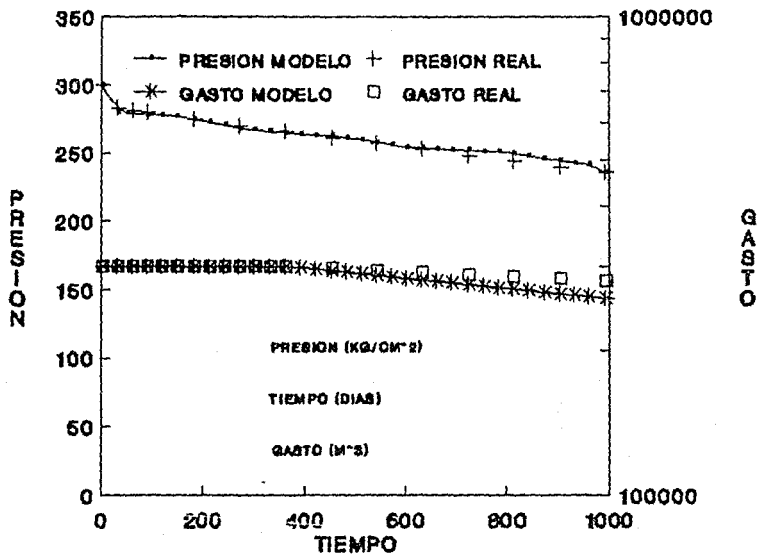
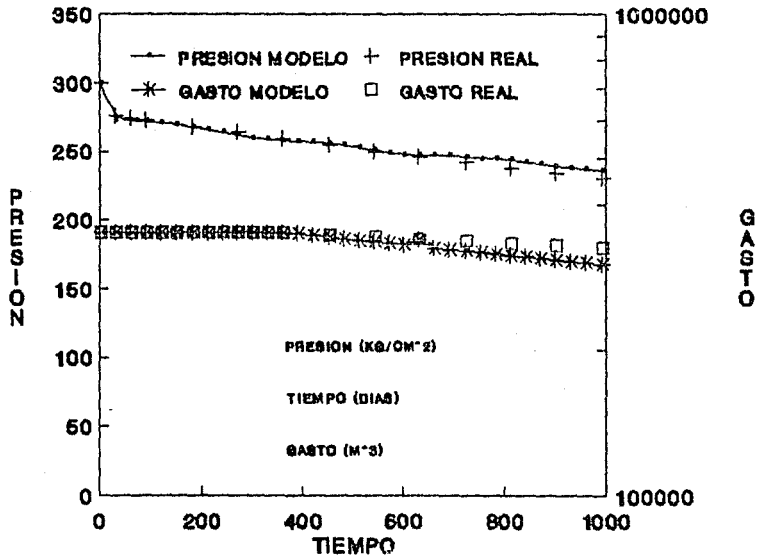


FIG 6.- POZO No. 2



48

MRE

FIG 7.- POZO No. 3

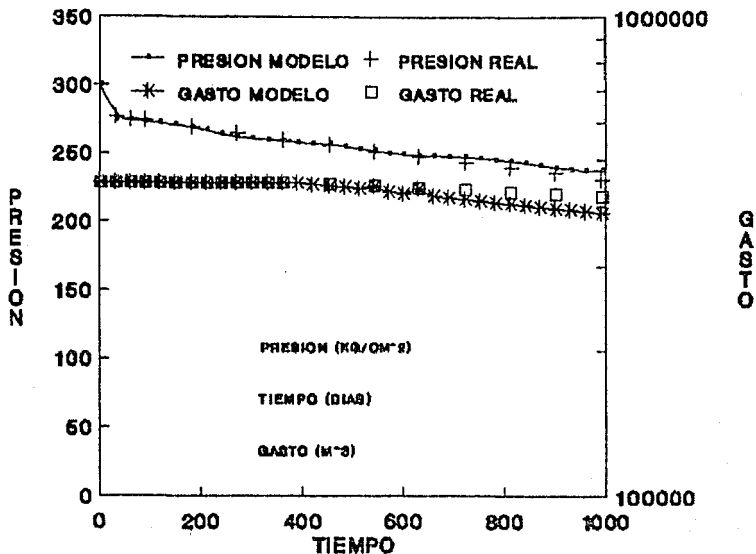


FIG 8.- POZO No. 4

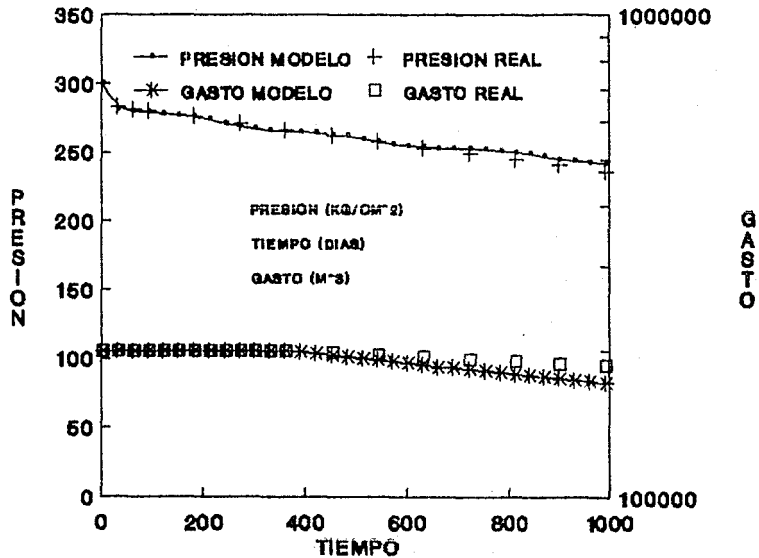
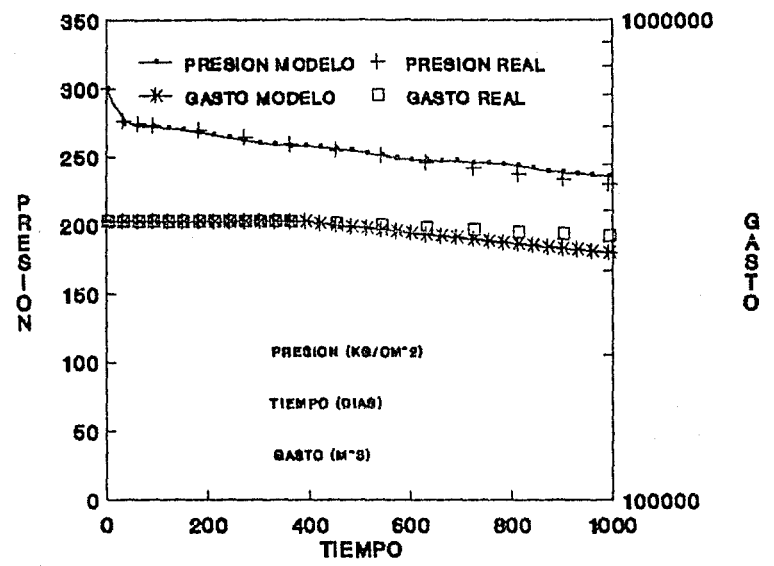


FIG 9.- POZO No. 5



51

MRE

## VI.2 EJEMPLO DE APLICACION

Con el objetivo de aplicar el modelo a un caso real, se compararon los resultados del modelo con los resultados presentados en la Referencia 17 para la predicción del comportamiento primario de la arena W4 del Campo Arcabuz, localizado en el Distrito Frontera Noreste de Petróleos Mexicanos.

En la Fig 10 se presenta la comparación entre la presión media del yacimiento calculada por el modelo y la reportada en la Referencia 17. En las Figs 11 a 18 se presentan las comparaciones entre las presiones de las celdas que contienen pozos. En este caso no se compararon las presiones de fondo de los pozos debido a que estos resultados no se presentan en la referencia antes citada.

A continuación se presenta la información que se utilizó en la corrida del modelo:

Nombre del yacimiento: Arena W4, Campo Arcabuz.

### Geometría de la malla

Número de celdas en la dirección X = 12

Número de celdas en la dirección y = 13

Longitud de las celda en la dirección X = 500.0000 (m)

Longitud de las celdas en la dirección Y = 500.0000 (m)

Temperatura del yacimiento = 119.57 (°C)

Saturación de gas = 0.5400

Densidad relativa del gas (aire = 1) = 0.6500

Tiempo total de simulación = 2798 (días)

Incremento de tiempo: variable



Distribución de espesores de las celdas

	26	26	26									
	26	26	26	26	25							
	27	25	26	27	24	22	21					
19	22	23	24	24	22	20	20	20	20			
17	19	21	23	22	20	18	18	20	21	21	21	
11	17	20	25	21	18	13	17	19	22	21	21	
14	16	18	20	19	17	16	17	18	20	21		
15	16	17	18	18	17	16	16	16				
16	15	15	16	19	17	16	16	16				
14	13	13	14	15	15	15	15	15				
13	12	11	10	12	13	14	14	14				
	10	8	4	9	12	13	14	14				
					12	13	13	14				

Distribución de porosidades de las celdas

	0.12	0.12	0.13										
	0.11	0.12	0.13	0.15	0.15								
	0.10	0.12	0.14	0.15	0.16	0.16	0.17						
0.12	0.12	0.14	0.15	0.16	0.16	0.17	0.17	0.18	0.18				
0.12	0.13	0.15	0.16	0.17	0.17	0.17	0.18	0.18	0.19	0.19	0.19		
0.19	0.10	0.13	0.16	0.19	0.18	0.17	0.18	0.18	0.18	0.19	0.19		
0.19	0.13	0.15	0.16	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18			
0.10	0.15	0.16	0.17	0.17	0.18	0.18	0.18	0.18					
0.10	0.17	0.17	0.17	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18					
0.10	0.17	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18					
0.10	0.18	0.18	0.18	0.19	0.19	0.19	0.19	0.19					
	0.10	0.18	0.19	0.20	0.19	0.19	0.18	0.18					
					1.10	0.19	0.18	0.18					

Distribución de permeabilidades en las celdas ( $K_x = K_y$ )

		3	3	3																
		2	3	4	5	6														
		1	3	4	5	6	7	8												
2	2	3	5	6	7	8	8	8	7											
1	2	4	5	7	8	10	9	8	8	8	8									
2	2	4	5	7	10	15	10	7	5	8	8									
2	3	4	5	7	8	10	9	7	8	8										
4	4	4	5	6	7	8	7	6												
8	8	8	8	4	5	6	7	6												
8	8	8	6	5	5	6	6	6												
8	9	5	5	5	5	5	6	6												
	8	8	5	5	5	6	6	6												
					6	6	6	6												

Distribución inicial de presiones

	459	459	459										
	459	459	459	459	459								
	459	459	459	459	460	460	461						
460	460	460	459	459	460	460	461	463	464				
460	460	460	460	459	459	460	461	463	465	466	466		
460	460	460	460	460	459	458	461	463	467	466	466		
460	460	460	460	460	460	460	461	463	463	463			
460	460	460	460	460	460	460	461	461					
460	460	460	460	460	460	460	461	461					
460	460	460	460	460	460	460	460	461					
460	460	460	460	460	460	460	460	460					
	460	460	460	460	460	460	460	460					
					460	460	460	460					

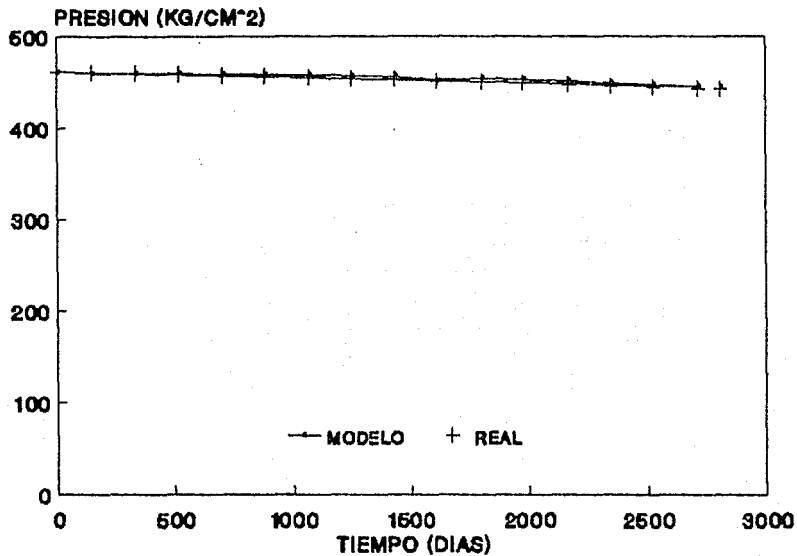
Propiedades del gas

P	Z	B <sub>g</sub>	μ <sub>g</sub>	C <sub>g</sub>	m(P)
(kg/cm <sup>2</sup> )			(cp)	(kg/cm <sup>2</sup> ) <sup>-1</sup>	(kg/cm <sup>2</sup> ) <sup>2</sup> /cp
11.5300	0.9959	0.1093	0.0057	0.087189	15492.4538
53.6531	0.9813	0.0227	0.0061	0.019007	439414.8953
106.3061	0.9330	0.0111	0.0069	0.009597	1860185.8319
158.9592	0.9248	0.0074	0.0080	0.006271	3731848.0424
201.0916	0.9321	0.0059	0.0089	0.004806	5644874.8985
253.7347	0.9563	0.0048	0.0103	0.003835	8453981.5871
306.3878	0.9923	0.0041	0.0116	0.002885	11031477.1620
359.0408	1.0361	0.0037	0.0130	0.002354	14018454.4070
401.1633	1.0754	0.0034	0.0142	0.002043	16245307.8410
453.8163	1.1296	0.0031	0.0155	0.001747	18818624.6680
506.4694	1.1831	0.0030	0.0169	0.001505	21702118.9410

Información de los pozos

Pozo	Posición		Radio (m)
	X	Y	
2	10	6	0.07
3	7	6	0.07
4	6	3	0.07
11	4	6	0.07
12	5	9	0.07
13	2	3	0.07
16	1	6	0.07
17	4	12	0.07

**FIG 10.- PRESION MEDIA DEL YACIMIENTO  
ARENA W4 CAMPO ARCABUZ**



**FIG 11.- POZO 2  
ARENA W4 CAMPO ARCABUZ**

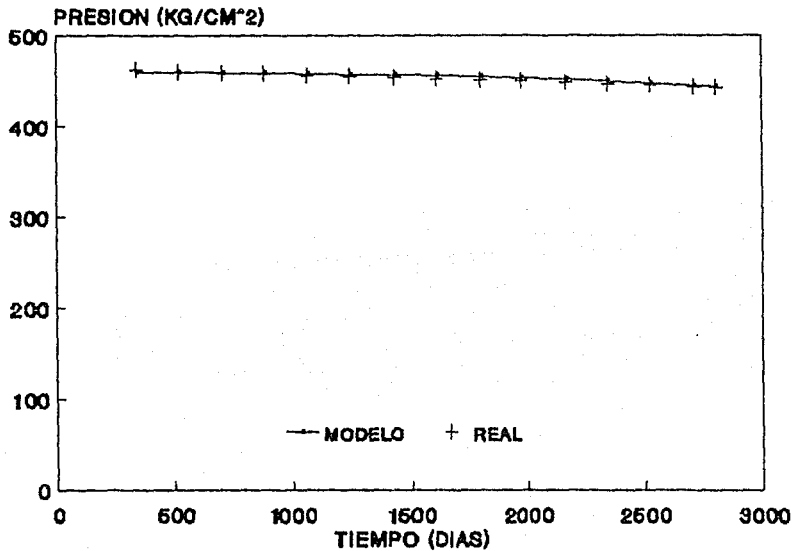
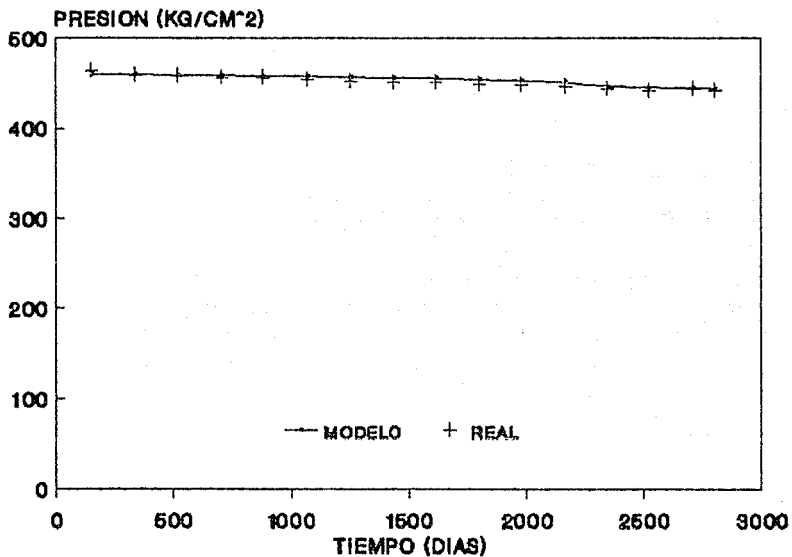


FIG 12.- POZO 3  
ARENA W4 CAMPO ARCABUZ



09

MRE



FIG 13.- POZO 4  
ARENA W4 CAMPO ARCABUZ

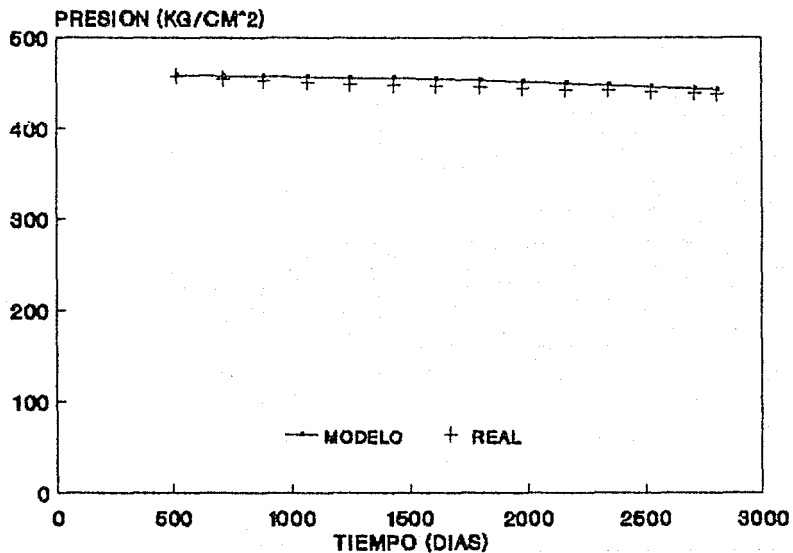
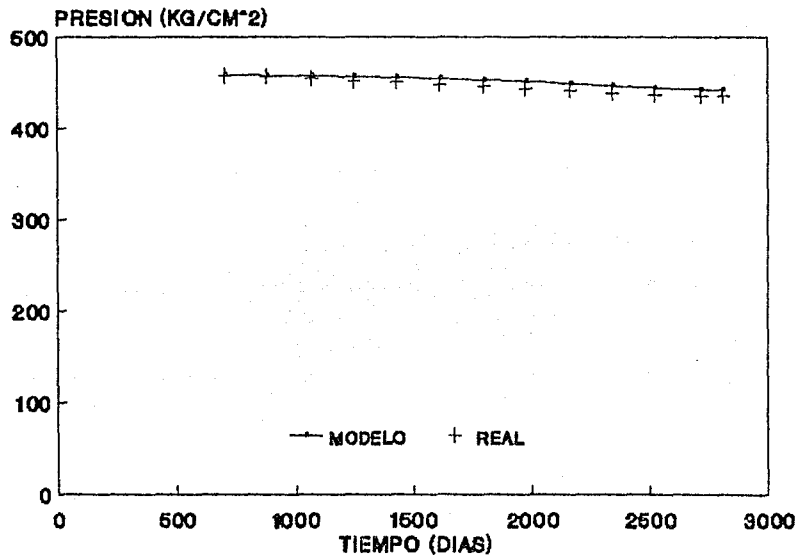


FIG 14.- POZO 11  
ARENA W4 CAMPO ARCABUZ



MRE

FIG 15.- POZO 12  
ARENA W4 CAMPO ARCABUZ

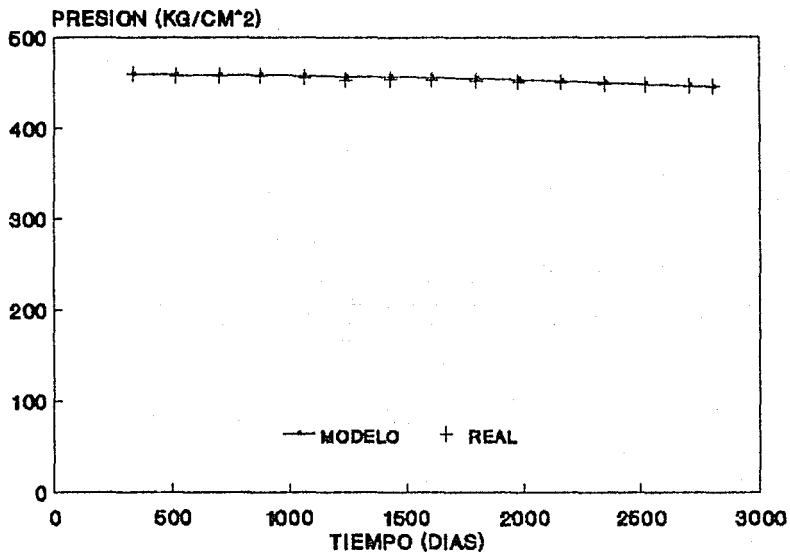
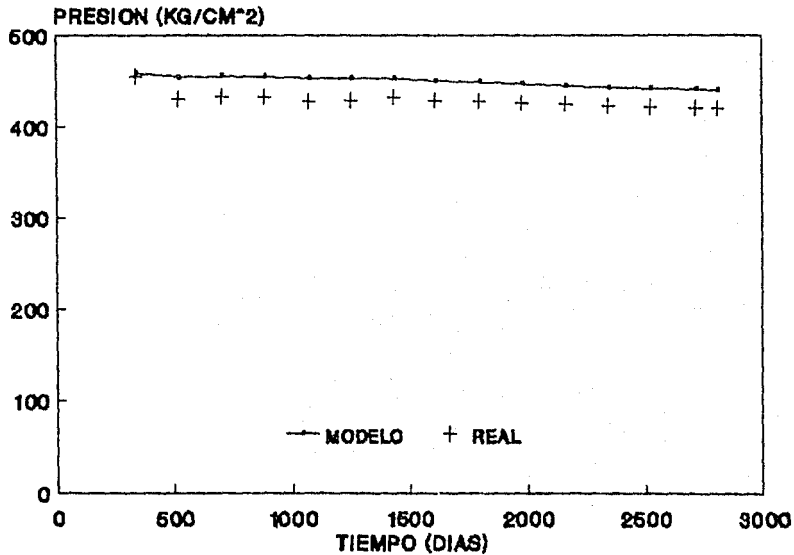


FIG 16.- POZO 13  
ARENA W4 CAMPO ARCABUZ



**FIG 17.- POZO 16  
ARENA W4 CAMPO ARCABUZ**

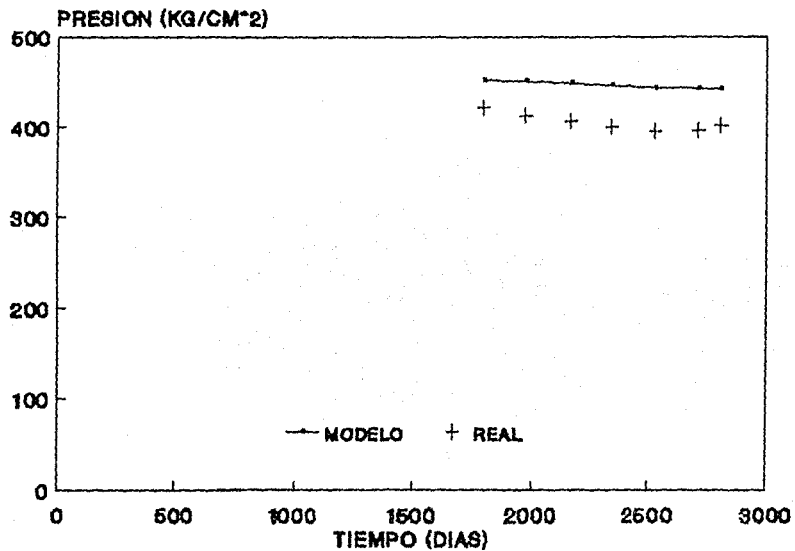
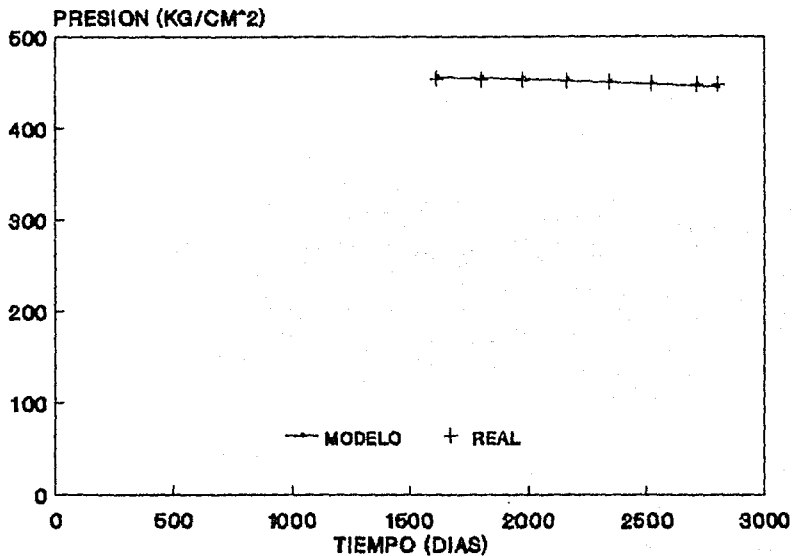


FIG 18.- POZO 17  
ARENA W4 CAMPO ARCABUZ



## CAPITULO VII

### RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Al analizar los resultados obtenidos por el simulador en los ejemplos de validación y aplicación se tienen los siguientes comentarios:

En las Fig 4 se puede observar que se logró un buen ajuste para la presión media del yacimiento. En las Figs 4 a 9 se observa que se logró un ajuste casi perfecto en la historia de presiones. La diferencias en los gastos calculados por el modelo propuesto y por el modelo que se utilizó en la validación se deben a que ambos emplean diferentes métodos de solución; lo que conduce a diferencias en las presiones calculadas por ambos modelos, y consecuentemente conduce también a diferencias en el cálculo de la constante de declinación de la producción de los pozos. Se hace notar que pequeños cambios en la constante de declinación conducen a grandes diferencias en los gastos calculados.

En la Fig 10 se observa el ajuste que se logró en la aplicación del modelo a la arena W4 del Campo Arcabuz. En las Figs 11 a 18 se puede observar un ajuste bastante bueno para las presiones calculadas en las celdas de los pozos; a excepción de los pozos 13 y 16, en donde probablemente existe algún efecto que no fue representado en forma adecuada en el modelo.

## CONCLUSIONES

Los resultados que se obtuvieron en los ejemplos de validación y aplicación son bastante satisfactorios, por lo que se considera que el modelo es confiable para el estudio del comportamiento primario de yacimientos de gas.

Por lo expuesto anteriormente se considera que se cumplió con el objetivo planteado en la definición del problema.

El modelo desarrollado en el presente trabajo se puede utilizar para:

- Calcular el volumen original de gas seco.
- Predecir el comportamiento primario de yacimientos de gas seco.
- Evaluar el efecto del ritmo de explotación sobre la recuperación.
- Predecir el comportamiento de yacimientos de gas bajo diferentes alternativas de explotación.
- Fines didácticos, ya que se presenta el desarrollo detallado del modelo.
- Modelar el almacenamiento de gas.

El simulador puede mejorarse si se le adaptan rutinas para:

- Configurar en forma estricta el yacimiento al discretizarlo.
- Graficación de resultados finales de la simulación.
- Representar el flujo de gas en tuberías verticales, lo que permitirá determinar la presión en la cabeza del pozo.



## NOMENCLATURA

A	Area.
B <sub>g</sub>	Factor de volumen del gas.
C	Compresibilidad del gas.
C <sub>D</sub>	Constante de declinación del pozo.
D	Coefficiente de flujo turbulento.
h	Espesor.
K	Permeabilidad.
m	masa.
M	Peso molecular.
m(CP)	Potencial.
n	Número de moles.
P	Presión.
q	gasto.
q <sup>*</sup>	gasto a condiciones de yacimiento.
R	Constante universal de los gases.
S	Saturación de gas.
t	tiempo.
T	Temperatura.
V	Volumen.
T <sub>x</sub>	Transmisibilidad en la dirección X.
T <sub>y</sub>	transmisibilidad en la dirección Y.
vol	volumen.
w	Término de adición o extracción de masa por unidad de volumen.
W	Término de adición o extracción de masa.
Z	Factor de Compresibilidad del gas.

## SIMBOLOGIA GRIEGA

$\rho$	Densidad.
$v$	Velocidad.
$\Delta$	Incremento.
$\phi$	Porosidad.
$\mu$	Viscosidad.
$\rho_r$	Densidad relativa.
$\gamma_g$	Densidad del gas.
$\omega$	Coefficiente de relajación.

## SUPERINDICES Y SUBINDICES

ce	Condiciones estándar.
g	gas.
nes	Siguiente intervalo de tiempo.
y	Condiciones de yacimiento.

## OPERADORES

d	Derivada.
$\partial$	Derivada parcial.
$\nabla$	Gradiente.
$\int$	Integral.

- 1) Apuntes de Principios de Mecánica de Yacimientos.  
Rodríguez Nieto Rafael.  
Facultad de Ingeniería, UNAM.
- 2) The Flow of Real Gases Through Porous Media.  
R. Al-Hussainy, H. J. Ramey Jr., P. B. Crawford.  
JPT, May 1968.
- 3) Notas de la Cátedra de Simulación Matemática de Yacimientos.  
Osorno Manzo Jorge A.  
Facultad de Ingeniería, UNAM.
- 4) Apuntes de Simulación Matemática de Yacimientos.  
Miguel A. Hernández G. y Domínguez Vargas Guillermo C.  
Facultad de Ingeniería, UNAM.
- 5) Representing Wells in Numerical Reservoir: Part 1-Theory.  
Alexander S. Williamson and Jhon E. Chappellear.  
SPEJ, June 1983.
- 6) Petroleum Reservoir Simulation  
Azis, K. and Settari, A.  
Applied Science Publishers
- 7) Modern Reservoir Engineering: A Simulation Approach.  
Crichlow, H. B.  
Prentice Hall Inc.
- 8) Ingeniería de Software.  
Fairley Richar.  
Mc Graw Hill.
- 9) Variables para Programas de Cómputo y Símbología Aplicables en  
la Ingeniería de Explotación del Petróleo.  
Garaicochea Petríreña Francisco y R. Angel Castro F.  
Facultad de Ingeniería, UNAM.

- 10) Apuntes de Transporte de Hidrocarburos.  
Garaicochea Petrirena Francisco.  
Facultad de Ingeniería, UNAM.
  
- 11) Apuntes de Métodos Numéricos.  
Iriarte V. Balderrama Rafael, Borrás García Hugo y Durán  
Cuevas Rissynela.  
Facultad de Ingeniería, UNAM.
  
- 12) Interpretation of Well-Block Pressures in Numerical Reservoir  
Simulation with Nonsquare Grid Blocks and Anisotropic  
Permeability.  
Donal W. Peaceman.  
SPEJ, June 1983.
  
- 13) Modelo Tridimensional para Predecir el Comportamiento de  
Yacimientos de Gas Considerando Anisotropía en la Formación,  
Interferencia entre Pozos e Intervalos de Producción  
Restringidos.  
Rodríguez Nieto Rafael.  
Instituto Mexicano del Petróleo (publicación No. 72 BH/097).
  
- 14) Apuntes de Computación Aplicada a la Ingeniería Petrolera.  
Berlanga Juan M.  
Facultad de Ingeniería, UNAM.
  
- 15) Análisis Numérico.  
Richard L. Borden y J. Douglas Fairres.  
Iberoamericana.
  
- 16) Computer Methods for Mathematical Computations.  
George E. Forsythe, Cleve B. Moler and Michael A. Malcolm.  
Prentice-Hall, Inc.
  
- 17) Reporte Interno de la Simulación de la Arena W4 del Campo  
Arcabuz.  
Instituto Mexicano del Petróleo.





## APENDICE B

### APROXIMACION POLINOMICA SEGMENTARIA<sup>15,16</sup>

Uno de los métodos más utilizados para la representación o aproximación de una función es el ajuste de un polinomio a dicha función. La naturaleza oscilatoria de polinomios de grado alto puede producir fluctuaciones severas en los valores de la función; por lo cual la aplicación de los polinomios es de uso restringido cuando se aproximan muchas de las funciones que surgen en situaciones físicas reales.

Una alternativa para la aproximación de funciones consiste en dividir el intervalo de interpolación en una colección de subintervalos y construir un polinomio en cada uno de ellos. A este procedimiento se le conoce como aproximación polinómica segmentaria. La aproximación polinomial que se utiliza en este trabajo se basa en el ajuste de polinomios cúbicos entre parejas sucesivas de nodos (Spline Cúbico).

Un polinomio cúbico general involucra cuatro constantes, por lo que el procedimiento del spline cúbico puede garantizar que la función interpolante es continuamente diferenciable en el intervalo y que tiene también una segunda derivada continua; sin embargo, no supone que las derivadas de la interpolante coinciden con la función, ni aún en los nodos.

#### CONSTRUCCION DEL SPLINE CUBICO

Dada una función  $f$  definida en  $(a,b)$  y un conjunto de números, llamados nodos,  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , (ver Fig B-1)

un spline cúbico,  $S$ , para  $f$  es una función que satisface las siguientes condiciones :

- a)  $S$  es un polinomio cúbico, denotado por  $S_j$  en el subintervalo  $[X_j, X_{j+1}]$  para cada  $j = 0, 1, \dots, n$ ;
- b)  $S(X_j) = f(X_j)$  para cada  $j = 0, 1, \dots, n$ ;
- c)  $S_{j+1}(X_{j+1}) = S_j(X_{j+1})$  para cada  $j = 0, 1, \dots, n-2$ ;
- d)  $S'(X_{j+1}) = S'(X_{j+1})$  para cada  $j = 0, 1, \dots, n-2$ ;
- e)  $S''_{j+1}(X_{j+1}) = S''_j(X_{j+1})$  para cada  $j = 0, 1, \dots, n-2$ ;
- f) se satisface una del siguiente conjunto de condiciones de frontera :
  - i)  $S'(X_0) = S'(X_n) = 0$  (frontera libre);
  - ii)  $S'(X_0) = f'(X_0)$  y  $S'(X_n) = f'(X_n)$  (frontera sujeta).

En general, las condiciones de frontera sujeta conducen a aproximaciones más exactas, ya que incluyen más información de la función; sin embargo, para que esta condición de frontera se implemente es necesario contar con los valores de la derivada en los extremos del intervalo, o una aproximación precisa de estos valores.

Cuando se satisfacen las condiciones de frontera libre el spline se conoce como spline natural (este es el que se utiliza en este trabajo) y su gráfica se aproxima a la forma que tomaría una varilla larga flexible si se forzara a pasar por cada uno de los nodos dato  $\{(X_0, f(X_0)), (X_1, f(X_1)), \dots, (X_n, f(X_n))\}$ .

Para construir el spline cúbico para una función, se pueden aplicar las condiciones de la definición de los polinomios cúbicos:

$$S_j(X) = a_j + b_j(X-X_j) + c_j(X-X_j)^2 + d_j(X-X_j)^3, \quad (B-1)$$

para cada  $j = 0, 1, \dots, n-1$ .



Se puede observar que :

$$S_j(X_j) = a_j = f(X_j) \quad , \quad (B-2)$$

aplicando la condición (c) :

$$a_j = S_{j+1}(X_{j+1}) = S_j(X_{j+1}) = a_j + b_j(X_{j+1}-X_j) + c_j(X_{j+1}-X_j)^2 + d_j(X_{j+1}-X_j)^3 \quad , \quad (B-3)$$

para cada  $j = 0, 1, \dots, n-2$ .

Haciendo :

$$h_j = X_{j+1} - X_j \quad , \quad (B-4)$$

para cada  $j = 0, 1, \dots, n-1$ , y definiendo  $a_n = f(X_n)$ , se puede ver que esto implica que la ecuación:

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3 \quad (B-5)$$

se satisface para cada  $j = 0, 1, \dots, n-1$ .

Definiendo  $b_n = S'(X_n)$ , observamos que:

$$S'_j(X_j) = b_j + 2c_j(X-X_j) + 3d_j(X-X_j)^2 \quad , \quad (B-6)$$

implica que  $S'_j(X_j) = b_j$  para cada  $j = 0, 1, \dots, n-1$ . Aplicando la condición (d):

$$b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2 \quad , \quad (B-7)$$

para cada  $j = 0, 1, \dots, n-1$ .

Otra relación entre los coeficientes de  $S_j$  se puede obtener definiendo  $c_n = S''(X_n)/2$  y aplicando la condición (e). En este caso:

$$c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j \quad , \quad (B-8)$$

para cada  $j = 0, 1, \dots, n-1$ .

Despejando  $d_j$  de la Ec B-8 y sustituyendo este valor en las Ecs B-5 y B-7 se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + (1/3)h_j^2(2c_j + c_{j+1}) \quad , \quad (B-9)$$

y

$$b_{j+1} = b_j + h_j(c_j + c_{j+1}) \quad (B-10)$$

para cada  $j = 0, 1, \dots, n-1$ .

La relación final que involucra a los coeficientes se puede obtener resolviendo la ecuación apropiada en la forma de la Ec B-9, primero para  $b_j$ :

$$b_j = (1/h_j)(a_{j+1} - a_j) - (h_j/3)(2c_j + c_{j+1}) \quad (B-11)$$

y luego, con una reducción del índice, para  $b_{j-1}$ :

$$b_{j-1} = (1/h_{j-1})(a_j - a_{j-1}) - (h_{j-1}/3)(2c_{j-1} + c_j) \quad (B-12)$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación derivada de la Ec B-10, cuando el índice se reduce en uno, se obtiene el siguiente sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{aligned} h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1} - h_j)c_j + h_jc_{j+1} &= (3/h_j)(a_{j+1}) - \\ &- (3/h_{j-1})(a_j - a_{j-1}) \end{aligned} \quad (B-13)$$

para cada  $j = 1, 2, \dots, n-1$ .

Este sistema tiene como incógnitas sólo a  $(c_j)_{j=0}^n$ , ya que los valores de  $(h_j)_{j=0}^{n-1}$  y  $(a_j)_{j=0}^n$  están dados por el espacio entre los nodos  $(X_j)_{j=0}^n$  y los valores de la función en los nodos.

Nótese que una vez que se conocen los valores de  $(c_j)_{j=0}^n$  encontrar las constantes restantes  $(b_j)_{j=0}^{n-1}$  de la Ec B-11,  $(d_j)_{j=0}^{n-1}$  de la Ec B-8 y construir los polinomios cúbicos  $(S_j)_{j=0}^{n-1}$  es una cuestión sencilla.

FIG B1- SPLINE

