

01161

6

2ej

ANALISIS DEL COMPORTAMIENTO DE ESTRUCTURAS CON
DISPOSITIVOS QUE INCREMENTAN EL AMORTIGUAMIENTO
Y RIGIDEZ DE LAS MISMAS

ING. ISMAEL VAZQUEZ MARTINEZ

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

	PAG.
I. Introducción.	2
II. Descripción del Elemento Incrementador de Amortiguamiento y Rigidez.	6
III. Modelo Matemático de una Cruzja Añadiendo el EIAR.	14
IV. Modelación Matemática de un Edificio con EIAR.	50
V. Comentarios y Conclusiones.	80
Bibliografía.	84

I.- INTRODUCCION

CAPITULO I

INTRODUCCION:

A raíz de los temblores de septiembre de 1985 en nuestro país un gran número de edificios se derrumbaron y otros tantos resultaron dañados. Muchas de estas estructuras estaban construidas a base de marcos flexibles resistentes a momento, mostrando la vulnerabilidad de este sistema de estructuración. Desde entonces los ingenieros estructuristas mexicanos se han dado a la tarea de buscar formas más efectivas de diseño sismo-resistente.

Para los edificios que no sufrieron colapso pero que resultaron dañados en diferentes grados ha sido necesario elaborar estudios para así poder proporcionar un dictamen de la seguridad estructural de los mismos. Estos estudios se han hecho en base al nuevo Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal en el cual se vieron incrementadas las fuerzas sísmicas de diseño a raíz de los temblores de 1985.

Dependiendo de los resultados de estos estudios, en caso de ser necesario, se propone un reforzamiento del edificio. Generalmente este reforzamiento consiste en aumentar la rigidez de la estructura, ya sea a base de poner contraventeo a los marcos o colocar muros de cortanté. El sistema de marcos contraventeados resulta ser muy rígido y con poco amortiguamiento por lo que las fuerzas sísmicas desarrolladas durante un temblor son muy grandes y deben ser resistidas por marcos fuertes.

Por otra parte el reforzamiento a base de muros de cortante resulta ser laborioso (constructivamente) además de bastante costoso.

Sin embargo existen otros métodos de reforzamiento (no tradicionales) que se han usado poco pero que resultan ser efectivos. Para poder entender en que se basan estos métodos innovadores se hará un análisis sencillo de la ecuación del método energético. La ecuación de la energía para un edificio puede ser expresada como sigue:

$$E_K + E_S + E_H + E_\xi = E_I \quad \dots(1)$$

donde:

E_K es la energía cinética.

E_S es la energía de deformación elástica.

E_H es la energía histerética.

E_ξ es la energía de amortiguamiento viscoso.

E_I es la energía de entrada (por ejemplo la ocasionada por un temblor).

Si nosotros llamamos a $E_K + E_S$ la energía de vibración elástica (E_E) y a $E_H + E_\xi$ la energía disipada (E_D) entonces la ecuación (1) nos queda así:

$$E_E + E_D = E_I \quad \dots(2)$$

Para lograr un eficiente diseño sismo-resistente lo más indicado

es tratar de controlar la energía de entrada (E_I) o bien incrementar la capacidad de disipación de energía (E_D). Lo primero se puede lograr mediante el uso de sistemas de aisladores dinámicos de base. Sin embargo en el caso de la Ciudad de México este método no resulta conveniente. Esto es debido a que con las características del subsuelo del D.F. los aisladores de base en lugar de disminuir la respuesta de la estructura al sismo, la incrementan.

Para aumentar la capacidad de disipación de energía (E_D) se ha estudiado y experimentado con diferentes tipos de dispositivos. Entre ellos se encuentra el elemento disipador de energía que es objeto de esta tesis. De los resultados de los diversos estudios realizados por diversas universidades del extranjero así como del país, se ha podido comprobar la eficacia de este tipo de dispositivos. Esto nos hace pensar que el futuro de la ingeniería en México debe conducirse por este camino innovador del desarrollo de elementos que disipen energía.

En este trabajo se estudiará el comportamiento dinámico de un dispositivo que además de disipar energía proporciona rigidez adicional a la estructura. Para efectos de esta tesis a este elemento se le llamará de ahora en adelante Elemento Incrementador de Amortiguamiento y Rigidez y se abreviará con las iniciales EIAR.

II.- DESCRIPCION DEL ELEMENTO INCREMENTADOR DE

AMORTIGUAMIENTO Y RIGIDEZ

CAPITULO II:

DESCRIPCION DEL ELEMENTO INCREMENTADOR DE AMORTIGUAMIENTO Y RIGIDEZ:

Los Elementos Incrementadores de Amortiguamiento y Rigidez (EIAR) son elementos estructurales que pueden ser instalados en estructuras proporcionando aumento tanto en el amortiguamiento como en la rigidez total del edificio. Estos elementos pueden ser usados para estructuras nuevas o para reforzamiento de edificios existentes.

Los EIAR son ideales para ser instalados en edificios estructurados a base de marcos flexibles resistentes a momento, en donde se presenten grandes desplazamientos relativos de entrepiso, proporcionando en forma económica un sistema estructural con rigidez moderada y alto amortiguamiento. De esta manera, cuando la estructura se ve sometida a un temblor severo, los daños tanto para elementos estructurales como no estructurales son mucho menores ya que las deformaciones y fuerzas ocasionadas por el temblor se ven reducidas gracias a los EIAR.

Cabe hacer ahora las siguientes preguntas: ¿Cómo es el EIAR al que nos hemos referido en este trabajo? y ¿Cómo funciona? Para responder a estas preguntas podemos decir que un EIAR es un dispositivo con cierta rigidez y capacidad de disipación de energía que sirve como elemento de unión entre un par de elementos estructurales (de mayor rigidez) que experimenten un desplazamiento relativo cuando el edificio se ve sometido a los efectos de un temblor.

Este elemento disipador de energía absorbe la mayoría de los desplazamientos relativos y está hecho a base placas de metal que se deforman plásticamente a la flexión. Para determinar la configuración de las placas de metal se estudiaron tres posibilidades: a) forma rectangular; b) forma triangular; c) forma de X (ver fig. 2.1).


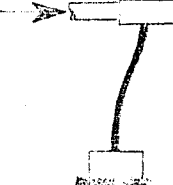


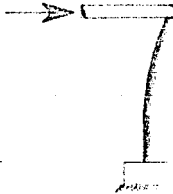




Como se podrá observar en la figura 2.1 las placas en forma rectangular se deforman en doble curvatura pero sólomente fluyen en sus extremos. Para lograr un desplazamiento relativo finito entre los dos extremos de la placa rectangular es necesario aplicar grandes esfuerzos. En cambio para las placas en forma de triángulo y en forma de X se presenta una fluencia uniforme, es decir la deformación plástica se distribuye uniformemente a lo largo de toda su altura provocando que se absorba más energía. Las placas en forma de X se deforman a la flexión en doble curvatura sin que se presente una gran demanda de curvatura y esfuerzos. Es por ésto que se decidió tomar las placas en forma de X para fabricar los EIAR.

Es conveniente ahora mencionar algo acerca de las propiedades de las placas de acero en forma de X. La rigidez (relación fuerza-desplazamiento) en la región elástica está dada por la siguiente fórmula:

$$K = \frac{F}{D} = \frac{E t^3}{12 a^2} \frac{b}{a} \quad \dots (2.1)$$

donde:

F = fuerza aplicada en uno de los extremos de la placa

FORMA DE LA PLACA	PERFIL	DEFORMACION	DISTRIBUCION DE ESFUERZOS	COMENTARIOS
RECTANGULAR				NO PRACTICABLE DEBIDO A FLUENCIA LOCAL SOLAMENTE.
TRIANGULAR				PRACTICABLE
FORMA DE X				PRACTICABLE

TRES CONFIGURACIONES POSIBLES DE PLACAS DE ACERO.

FIGURA 2.1

d = desplazamiento correspondiente a la fuerza F

E = módulo de Young del material

a = semiperalte de la placa (véase fig. 2.2)

b = ancho máximo de la placa (véase fig. 2.2)

t = espesor de la placa (véase fig. 2.2)

La relación entre el desplazamiento (d) y el desplazamiento unitario (E) en el rango elástico se obtiene con:

$$d = 2E \frac{a^2}{t} \dots(2.2)$$

Después de que la placa fluye, la relación fuerza-desplazamiento está dada por la siguiente ecuación:

$$\frac{F}{F_y} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2(E/\epsilon_y)} \dots(2.3)$$

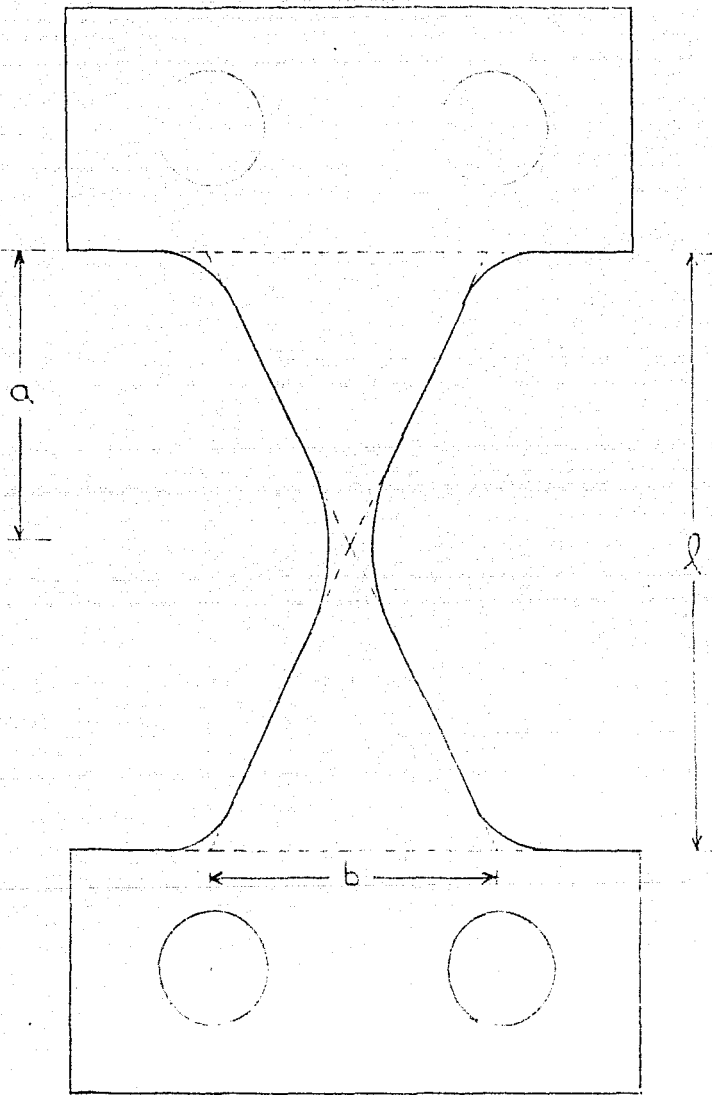
donde:

F_y = fuerza de fluencia

E_y = desplazamiento unitario de fluencia

Cabe hacer notar que las últimas tres formulas fueron obtenidas por las personas que patentaron los EIAR (véase referencia ()). De la ecuación (2.3) se puede observar que la carga última F_u que resiste la placa se aproxima a 1.5 veces F_y.

Un EIAR está formado por varias placas en forma de X separadas entre si por una serie de placas espaciadoras hechas de acero. A ambas se les hace perforaciones circulares por las cuales pasarán los tornillos de sujeción que ensamblan el conjunto de placas formando el

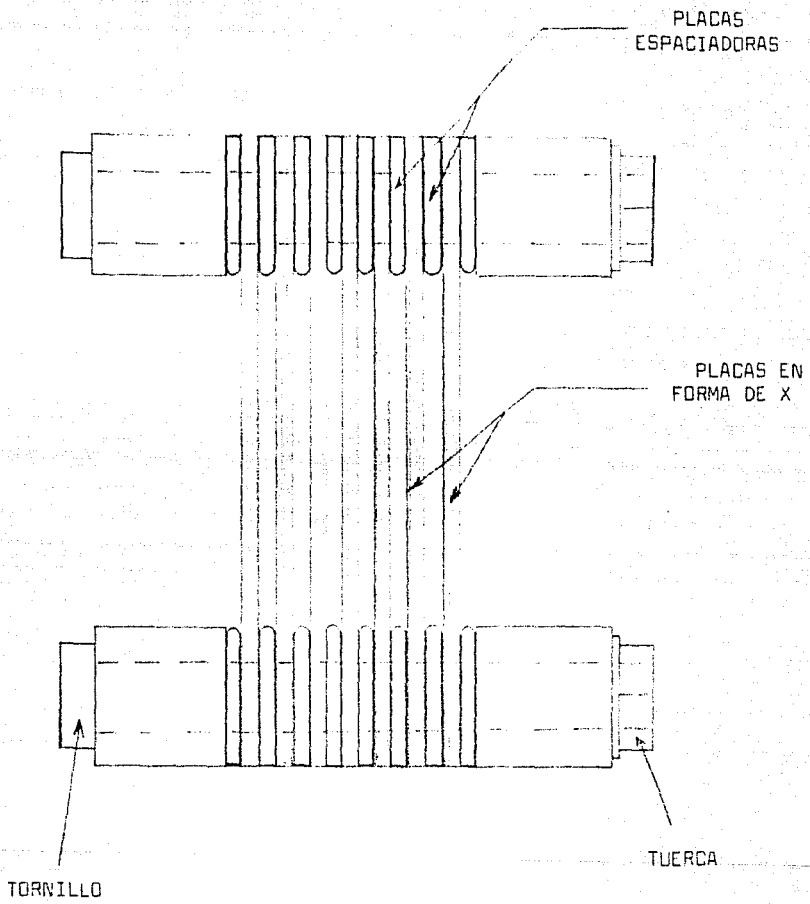


$t =$ espesor de la placa

ELEVACION DE UNA PLACA EN FORMA DE X

FIGURA 2.2

EIAR (vease figura 2.3). Las dimensiones y el número de placas para cada EIAR dependerá de la magnitud de las fuerzas a la que estará sujeta la estructura.



ELEVACION LATERAL DEL EIAR

FIGURA 2.3

III.- MODELO MATEMATICO DE UNA CRUJIA

ANADIENDO EL EIAR

CAPITULO III

MODELO MATEMATICO ANADIENDO EL EIAR:

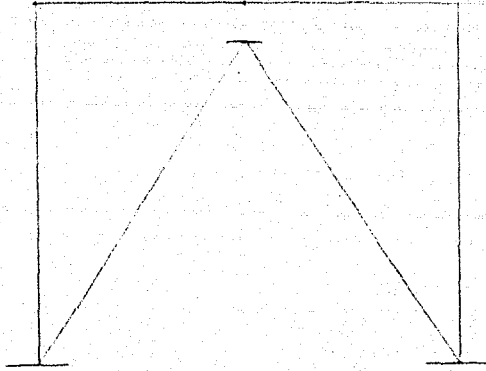
Como se mencionó anteriormente, el EIAR debe de ser colocado de tal manera que sirva como elemento de unión entre un par de elementos estructurales más rígidos, de tal forma que se pueda presentar un desplazamiento relativo entre ellos. Estos elementos rígidos podrían ser los siguientes:

- a) la trabe superior existente y
- b) un par de diagonales que se añaden a la estructura (ver figura 3.1)

Estas diagonales deben estar diseñadas de tal forma que no presenten pandeo ni deformaciones axiales de importancia bajo las cargas actuantes.

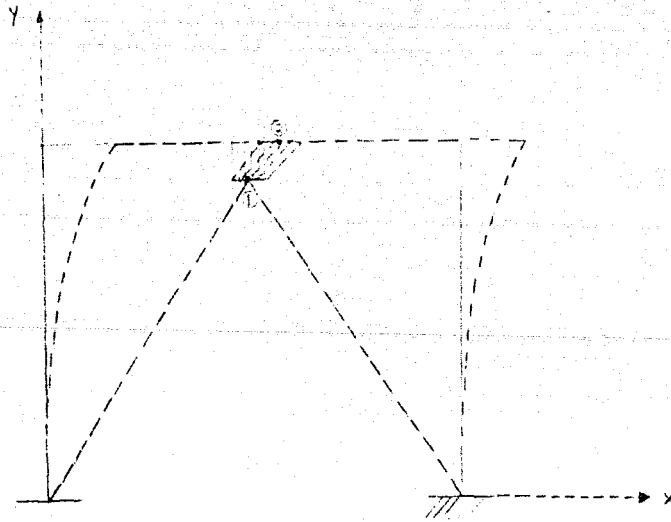
La forma más sencilla de hacer el análisis de la cruzja con el EIAR es tomando un modelo matemático con un solo grado de libertad, que es el desplazamiento horizontal "X" (véase fig 3.2). El hecho de tomar un solo grado de libertad no implica que se pierde una gran precisión en cuanto los resultados que se obtengan del modelo, ya que para conocer el comportamiento del EIAR es suficiente con saber cual es el desplazamiento relativo entre los puntos de conexión (1) y (2) (véase fig 3.2).

Tomando en cuenta lo anterior, la ecuación diferencial del modelo con un solo grado de libertad sería:



MODELO DE CRUJIA CON EIR (SIN DEFORMAR)

FIGURA 3.1



MODELO DE CRUJIA CON EIR (DEFORMADA)

FIGURA 3.2

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F_E(t) \quad \dots (3.1)$$

donde:

$$C = C_1 + C_2 \quad \dots (3.2)$$

C_1 = amortiguamiento viscoso propio de la estructura (parte lineal)

C_2 = amortiguamiento histerético (parte no lineal)

es decir, la ecuación diferencial (3.1) nos queda:

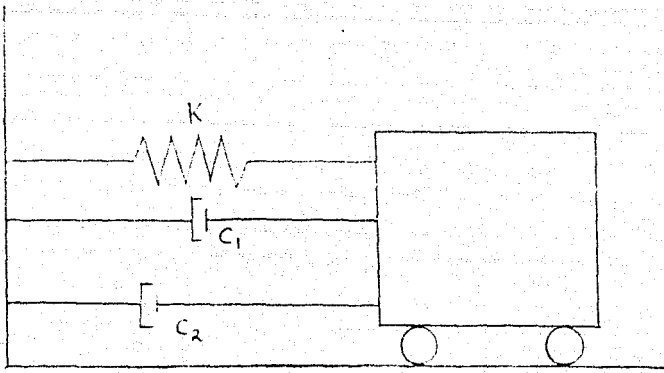
$$M\ddot{x} + (C_1 + C_2)\dot{x} + Kx = F_E(t) \quad \dots (3.3)$$

que equivale al modelo matemático del sistema que se muestra en la figura 3.3.

Resulta muy difícil para el análisis incorporar la parte no lineal al modelo matemático, es por esto que se decidió buscar una forma de linearización equivalente. Para ello vemos primero como es el ciclo histerético del EIAR (vease figura 3.4). En esta figura, el área bajo la curva presenta la energía absorbida en cada ciclo.

Si la cruzía únicamente tuviera amortiguamiento viscoso lineal, la energía absorbida en cada ciclo estaría representada por el área inscrita en una elipse perfecta como se muestra en la figura 3.5.

Si nosotros queremos encontrar un coeficiente equivalente (lineal) del amortiguamiento viscoso, lo más adecuado será tratar de



SISTEMA DINAMICO EQUIVALENTE (CON EIAE)

FIGURA 3.3

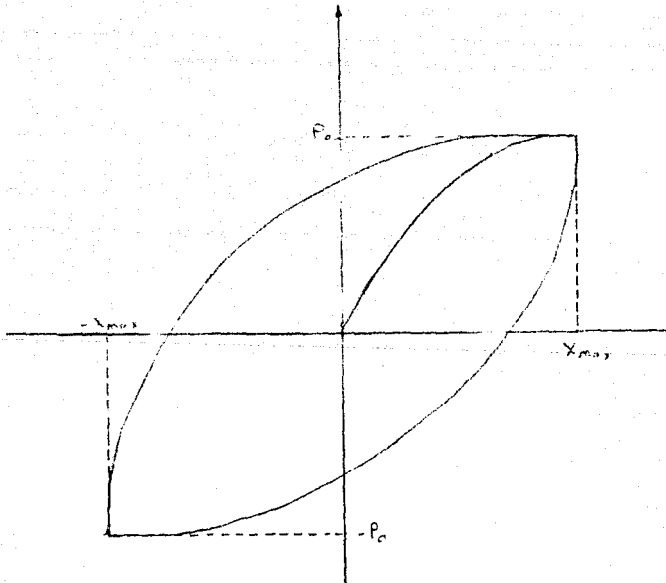


DIAGRAMA DEL CICLO HISTERETICO DEL EIAE

FIGURA 3.4

encontrar una elipse que tenga inscrita la misma área que la inscrita en el ciclo de histéresis. Es decir, que la energía absorbida sea la misma en cada caso. También se deberá respetar que los desplazamientos máximos sean los mismos para ambos casos (véase figura 3.6).

De acuerdo con lo anterior, se debe cumplir que:

$$A_{\text{elipse}} = A_{\text{ciclo histeresis}} \quad \dots (3.4)$$

Llamemos al área inscrita por el ciclo de histéresis como E_a (energía absorbida) y sabemos que el área de una elipse cualquiera está dada por la siguiente ecuación:

$$A_{\text{elipse}} = \pi a b \quad \dots (3.5)$$

donde

a = longitud del semieje mayor

b = longitud del semieje menor.

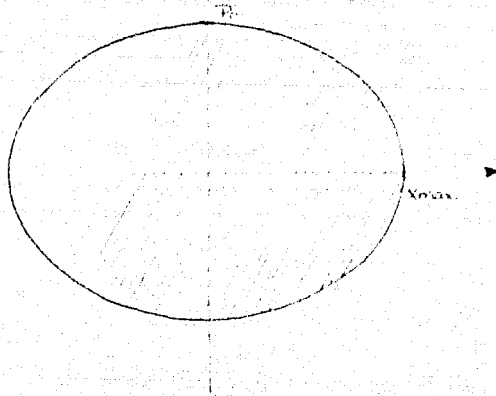
En este caso se debe cumplir que:

$$a = X_{\text{max}} \quad \dots (3.6)$$

$$b = P_0 \quad \dots (3.7)$$

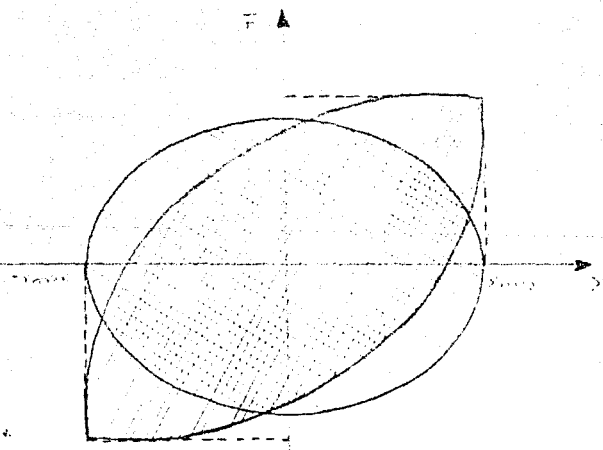
sustituyendo valores en (3.4) se obtiene:

$$\pi X_{\text{max}} P_0 = E_a \quad \dots (3.8)$$



CICLO DE HISTERESIS PARA AMORTIGUAMIENTO VISCOZO LINEAL

FIGURA 3.5



$$A_{\text{elipse}} = A_{\text{ciclo de histéresis}}$$

FIGURA 3.6

de donde:

$$P_0 = \frac{Ea}{\pi X_{max}} \quad \dots (3.9)$$

El coeficiente de amortiguamiento se define normalmente como:

$$C = \frac{f_{max}}{X_{max}} = \frac{P_0}{W X_{max}} \quad \dots (3.10)$$

donde:

W = frecuencia

Si sustituimos (3.9) en (3.10) se obtiene el coeficiente de amortiguamiento equivalente (lineal):

$$C = C_{eq} = \frac{Ea}{2 \pi W X_{max}^2} \quad \dots (3.11)$$

por lo tanto, la ecuación diferencial que nos queda es:

$$m \ddot{x} + (c_1 + c_2) \dot{x} + kx = F(t) \quad \dots (3.12)$$

Para analizar esta ecuación se utilizará el método del espacio de estado, que es un procedimiento moderno que nos permite analizar sistemas dinámicos complejos. Mediante este método es posible expresar una ecuación diferencial de enésimo orden por una ecuación diferencial vectorial-matricial de primer orden a la cual se le denomina ecuación de estado. Para nuestro caso las variables de estado que definen al sistema serían:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \dot{x} \end{aligned}$$

Entonces la ecuación diferencial se podría representar mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -ax_2 - bx_1 + f(t) \end{aligned} \quad \dots (3.13)$$

donde:

$$a = \frac{c_1 + c_2}{m} \quad \dots (3.14)$$

$$b = \frac{k}{m} \quad \dots (3.15)$$

$$f(t) = \frac{F(t)}{m} \quad \dots (3.16)$$

Utilizando notación matricial podemos representar el sistema de ecuaciones mediante la siguiente ecuación matricial:

$$\dot{X} = AX + Bu \quad \dots (3.17)$$

donde:

$$\dot{X} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \quad X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

$$B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad u = f(t)$$

y la ecuación de salida sería:

$$\dot{x} = -CX \quad \dots(3.18)$$

donde:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver la ecuación matricial (3.17) se utilizará el método de la transformada de Laplace para la solución de ecuaciones de estado no homogéneas. Es decir si se tiene la ecuación diferencial matricial:

$$\dot{x} = AX + Eu \quad \dots(3.17)$$

su transformada de Laplace está dada por:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \quad \dots(3.19)$$

de donde se obtiene:

$$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s) \quad \dots(3.20)$$

Premultiplicando ambos miembros de esta última ecuación por

$(sI - A)^{-1}$, se obtiene:

$$\begin{aligned} X(s) &= (sI - A)^{-1} [x(0) + BU(s)] \\ X(s) &= (sI - A)^{-1} x(0) + (sI - A)^{-1} BU(s) \quad \dots(3.21) \end{aligned}$$

se sabe además que la matriz $(sI - A)^{-1}$, se puede desarrollar como una serie de matrices:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \dots \quad \dots (3.22)$$

si a esta expresión le sacamos su transformada inversa de Laplace se obtiene:

$$\mathcal{L}^{-1} [(sI - A)^{-1}] = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots = e^{At} \quad \dots (3.23)$$

por lo tanto, la expresión (3.21) se puede escribir así:

$$x(s) = \mathcal{L} [e^{At}] x(0) + \mathcal{L} [e^{At}] BU(s) \quad \dots (3.24)$$

Obteniendo la transformada inversa de Laplace de esta última expresión y utilizando la integral de convolución se obtiene:

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad \dots (3.25)$$

que es la solución de la ecuación matricial (3.17). Si ahora suponemos que $x(0) = 0$, que es una suposición válida para el caso de análisis sísmico, la solución nos quedaría así:

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad \dots (3.26)$$

Si realizamos el siguiente cambio de variable:

$$v = t - \tau \quad \dots (3.27)$$

de donde se obtiene que:

$$\tau = t - v$$

$$v \quad d\zeta = -dv$$

por lo tanto, la ecuación (3.26) nos queda:

$$x(t) = \int_0^{\infty} e^{-vA} B u(t-v) dv \quad \dots(3.28)$$

y sustituyendo los valores B y u obtenemos finalmente:

$$x(t) = \int_0^{\infty} e^{-vA} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} f(t-v) dv \quad \dots(3.29)$$

que nos da la solución de la ecuación de estado (3.17).

Análisis con el Espectro de Potencia:

Un proceso aleatorio cualquiera $x(t)$ es llamado estacionario si sus estadísticas no se ven afectadas con un incremento pequeño en el tiempo δt . Es decir, un proceso aleatorio es estacionario si $x(t)$ y $x(t + \delta t)$ tienen las mismas estadísticas. Un ejemplo típico de proceso estacionario es el registro de aceleraciones que se obtiene de una excitación sísmica.

Se le llama espectro de potencia $\Phi(\omega)$ de un proceso estacionario $x(t)$ con media cero ($\mu = 0$) a la transformada de Fourier de su función de autocovarianza. La autocovarianza la definimos como:

$$C_{xx}(\zeta) = E [x(t + \zeta) x(t)] \quad \dots(3.30)$$

entonces, el espectro de potencia estará dado por:

$$\phi_{xx}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{xx}(z) e^{-iwz} dz \quad \dots (3.31)$$

y de la teoría de transformadas de Fourier, la relación inversa será:

$$C_{xx}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xx}(w) e^{-iwz} dw \quad \dots (3.32)$$

Si ahora tomamos otro proceso estacionario $Y(t)$ con media cero podemos definir la covarianza cruzada como:

$$C_{xy}(z) = E [X(t+z) Y(t)] \quad \dots (3.33)$$

y el espectro cruzado se obtendrá así:

$$\phi_{xy}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{xy}(z) e^{-iwz} dz \quad \dots (3.34)$$

y su respectiva inversa será:

$$C_{xy}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xy}(w) e^{iwz} dw \quad \dots (3.35)$$

Cabe hacer la aclaración de que por el hecho de que $X(t)$ y $Y(t)$ son procesos estacionarios, entonces no dependen del valor de t , por lo tanto podríamos añadir una constante "u" a t en la ecuación (3.30) y el resultado no cambiaría, es decir:

$$C_{xx}(z) = E [X(t+u+z) X(t+u)] \quad \dots (3.36)$$

que resulta ser lo mismo que:

$$C_{xx}(z) = E [X(t+u) X(t+u+z)] \quad \dots (3.37)$$

Si reemplazamos τ por $-\tau$ en la fórmula (3.37) se obtiene:

$$C_{xx}(-\tau) = E [x(t + u) x(t + u - \tau)] \quad \dots (3.38)$$

Como el valor de u es arbitrario, podemos hacer que $u = \tau$ y la ecuación anterior nos quedaría así:

$$C_{xx}(-\tau) = E [x(t + \tau) x(t + \tau - \tau)]$$

$$C_{xx}(-\tau) = E [x(t + \tau) x(t)] \quad \dots (3.39)$$

Comparando (3.30) con (3.39) se concluye que:

$$C_{xx}(-\tau) = C_{xx}(\tau) \quad \dots (3.40)$$

De forma similar se puede demostrar que:

$$C_{xy}(-\tau) = C_{yx}(\tau)$$

Una vez explicado todo lo anterior se procederá a obtener el espectro de potencia Φ_{xx} que como ya mencionamos anteriormente resulta ser la transformada de Fourier de la función de covarianza C_{xx} . Cabe mencionar aquí que $X(t)$ no es un escalar sino un vector, entonces la función de autocovarianza se calcula así:

$$C_{xx}(\tau) = E [x(t + \tau) (x(t))^*] \quad \dots (3.41)$$

donde el símbolo "*" significa la matriz transpuesta conjugada.

Utilizando la expresión (3.29) obtenemos que:

$$C_{xx}(z) = E \left\{ \begin{matrix} 0 \\ e^{\int_0^{\infty} vA} \\ 1 \end{matrix} f(t+z-v) dv \left[\int_0^{\infty} e^{v'A} \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} f(t-v') dv' \right]^* \right\} \dots (3.42)$$

por propiedades de la traspuesta conjugada, se obtiene:

$$C_{xx}(z) = E \left\{ \begin{matrix} 0 \\ e^{\int_0^{\infty} vA} \\ 1 \end{matrix} f(t+z-v) dv \int_0^{\infty} f(t-v') (0 \ 1) \left(e^{v'A} \right)^* dv dv' \right\}$$

$$C_{xx}(z) = E \left\{ \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{\int_0^{\infty} vA} \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} f(t+z-v) f(t-v') (0 \ 1) \left(e^{v'A} \right)^* dv dv' \right\} \dots (3.43)$$

Aplicando la propiedad de que:

$$E [c g(x)] = c E [g(x)]$$

se obtiene :

$$C_{xx}(z) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{\int_0^{\infty} vA} \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} E \{ f(t+z-v) f(t-v') \} (0 \ 1) \left(e^{v'A} \right)^* dv \dots (3.44)$$

Como la autocovarianza de la señal de entrada está dada por:

$$C_{ff}(z-v+v') = E \{ f(t+z-v) f(t-v') \} \dots (3.45)$$

entonces la ecuación (3.44) nos queda:

$$C_{xx}(z) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{\int_0^{\infty} vA} \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} C_{ff}(z-v+v') (0 \ 1) \left(e^{v'A} \right)^* dv dv' \dots (3.46)$$

por ser $C(\bar{z}-v+v')$ un escalar se puede hacer la siguiente modificación:

$$C_{xx}(\bar{z}) = \iint_{ff} \iint_{ff} C(\bar{z}-v+v') e^{vA} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (0 \ 1) \left(e^{v'A} \right)^* dv dv' \quad \dots (3.47)$$

Haciendo la multiplicación matricial nos queda:

$$C_{xx}(\bar{z}) = \iint_{ff} \iint_{ff} C(\bar{z}-v+v') e^{vA} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(e^{v'A} \right)^* dv dv' \quad \dots (3.48)$$

Además sabemos de la teoría de las transformadas de Fourier que (véase ecuación 3.32):

$$C_{ff}(\bar{z}-v+v') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_{ff}(\omega) e^{i\omega(\bar{z}-v+v')} d\omega \quad \dots (3.49)$$

y que:

$$C_{xx}(\bar{z}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_{xx}(\omega) e^{i\omega\bar{z}} d\omega \quad \dots (3.50)$$

Sustituyendo (3.49) en la parte derecha de la ecuación (3.48) queda:

$$C_{xx}(\bar{z}) = \iint_{ff} \iint_{ff} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_{ff}(\omega) e^{i\omega(\bar{z}-v+v')} d\omega \right\} e^{vA} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(e^{v'A} \right)^* dv dv'$$

$$C_{xx}(\bar{z}) = \frac{1}{2\pi} \iint_{ff} \iint_{ff} \int_{-\infty}^{\infty} C_{ff}(\omega) e^{i\omega(\bar{z}-v+v')} e^{vA} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(e^{v'A} \right)^* dv dv' d\omega$$

$$C_{xx}(\bar{z}) = \frac{1}{2\pi} \iint_{ff} \iint_{ff} \int_{-\infty}^{\infty} C_{ff}(\omega) e^{i\omega\bar{z}} e^{-i\omega v} e^{vA} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^{i\omega v'} \left(e^{v'A} \right)^* dv dv' d\omega$$

$$C_{xx}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ff}(w) e^{iwz} \left[\int_0^{\infty} \begin{matrix} vA & -iwv \\ e & e \end{matrix} dv \right] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\int_0^{\infty} \begin{matrix} v'A & * \\ e & e \end{matrix} i w v' dv' \right] dw \quad \dots (3.51)$$

Sabemos además que:

$$\mathcal{L}[e^{At}] = \int_0^{\infty} e^{At} e^{-st} dt = (sI - A)^{-1} \quad \dots (3.52)$$

por lo tanto se debe cumplir que:

$$\int_0^{\infty} \begin{matrix} Av & -iwv \\ e & e \end{matrix} dv = (iwI - A)^{-1} \quad \dots (3.53)$$

y que:

$$\int_0^{\infty} \begin{matrix} (Av') & * \\ e & e \end{matrix} i w v' dv = \int_0^{\infty} \begin{matrix} A^* v' & i w v' \\ e & e \end{matrix} dv = (-iwI - A)^{-1} \quad \dots (3.54)$$

Sustituyendo (3.53) y (3.54) en (3.51), se obtiene:

$$C_{xx}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ff}(w) e^{iwz} (iwI - A)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (-iwI - A)^{-1} dw \quad \dots (3.55)$$

Si ahora sustituimos (3.50) en la ecuación (3.55) se obtiene:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(w) e^{iwz} dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ff}(w) e^{iwz} (iwI - A)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (-iwI - A)^{-1} dw$$

multiplicando ambos lados de la ecuación por 2π queda:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(w) e^{iwz} dw = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ff}(w) e^{iwz} (iwI - A)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (-iwI - A)^{-1} dw \quad \dots (3.56)$$

Derivando con respecto a w ambos lados de la ecuación se llega a la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi(w)}{\partial w} e^{i w z} &= \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{1}{f} \right) e^{i w z} (i w I - A)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (-i w I - A)^{-1} \\ \frac{\partial \chi(w)}{\partial w} &= \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{1}{f} \right) (i w I - A)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (-i w I - A)^{-1} \quad \dots (3.57) \end{aligned}$$

que es la ecuación que nos va a definir el espectro de potencia.

Analicemos ahora el caso particular que nosotros tenemos donde la matriz A es la siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -\beta \end{bmatrix}$$

Entonces la matriz $(i w I - A)^{-1}$ se obtendría de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (i w I - A) &= i w \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & -\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i w & -1 \\ \alpha & i w + \beta \end{bmatrix} \\ (i w I - A)^{-1} &= \frac{1}{i w(i w + \beta) + \alpha} \begin{bmatrix} i w + \beta & 1 \\ -\alpha & i w \end{bmatrix} \\ (i w I - A)^{-1} &= \frac{1}{-w + i w \beta + \alpha} \begin{bmatrix} i w + \beta & 1 \\ -\alpha & i w \end{bmatrix} \quad \dots (3.58) \end{aligned}$$

y la matriz $(-i w I - A)^{-1}$ se calcularía así:

$$A^* = (\bar{A})^T = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ 1 & -\beta \end{bmatrix}$$

Cabe mencionar aquí que al conjugar la matriz transpuesta, ésta no se afecta, ya que los valores de α y β son reales.

$$(-iwI - A)^* = -iw \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ 1 & -\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -iw & \alpha \\ -1 & -iw + \beta \end{bmatrix}$$

$$(-iwI - A)^{-1} = \frac{1}{-iw(-iw + \beta) + \alpha} \begin{bmatrix} -iw + \beta & -\alpha \\ 1 & -iw \end{bmatrix}$$

$$(-iwI - A)^{-1} = \frac{1}{-w - iw\beta + \alpha} \begin{bmatrix} -iw + \beta & -\alpha \\ 1 & -iw \end{bmatrix} \quad \dots (3.59)$$

Realicemos ahora el siguiente producto de matrices:

$$D = (iwI - A)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (-iwI - A)^{-1}$$

$$D = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} iw + \beta & 1 \\ -\alpha & iw \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{-w - iw\beta + \alpha} \begin{bmatrix} -iw + \beta & -\alpha \\ 1 & -iw \end{bmatrix}$$

$$D = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} iw + \beta & 1 \\ -\alpha & iw \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{(-w + iw\beta + \alpha)(-w - iw\beta + \alpha)} \begin{bmatrix} -iw + \beta & -\alpha \\ 1 & -iw \end{bmatrix}$$

$$D = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & iw \end{bmatrix} \frac{2}{w - 2\alpha w + \beta w + w} \begin{bmatrix} -iw + \beta & -\alpha \\ 1 & -iw \end{bmatrix}$$

$$D = \frac{1}{\begin{matrix} 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ w & -2\alpha w + \beta & w + \alpha & & \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & -iw \\ iw & w \end{bmatrix} \quad \dots (3.60)$$

Sustituyendo el valor del producto matricial D (3.60) en la ecuación del espectro de potencia (3.57) se tiene que:

$$\Phi_{xx}(w) = \frac{\begin{matrix} 0 & (w) \\ ff \end{matrix}}{\begin{matrix} 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ w & -2\alpha w + \beta & w + \alpha & & \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & -iw \\ iw & w \end{bmatrix} \quad \dots (3.61)$$

donde:

$$\Phi_{ff}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} E[ff(t+\tau) f(t)] e^{-i\omega\tau} d\tau$$

Como se podrá observar, el espectro de potencia resulta ser una matriz de orden 2, es decir:

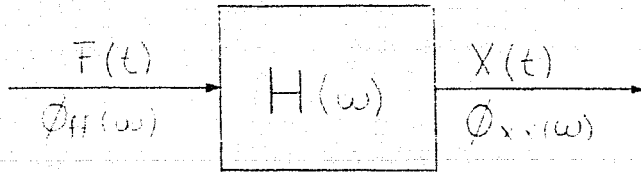
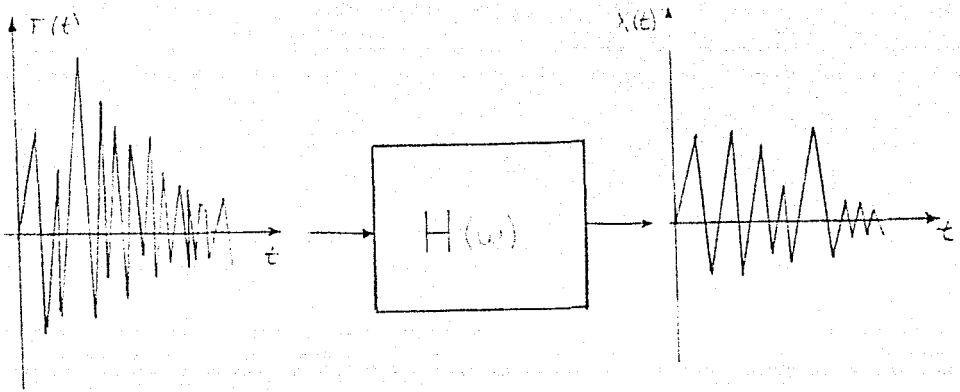
$$\Phi_{xx}(w) = \begin{bmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{xx} \\ 1 & 1 \\ \Phi_{xx} & \Phi_{xx} \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Por igualdad de matrices, se obtienen las siguientes cuatro ecuaciones:

$$\Phi_{xx}(w) = \frac{\begin{matrix} 0 & (w) \\ ff \end{matrix}}{\begin{matrix} 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ w & -2\alpha w + \beta & w + \alpha & & \end{matrix}} \quad \dots (3.62)$$

$$\Phi_{xx}(w) = \frac{\begin{matrix} -iw & 0 & (w) \\ ff \end{matrix}}{\begin{matrix} 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ w & -2\alpha w + \beta & w + \alpha & & \end{matrix}} \quad \dots (3.63)$$

$$\Phi_{xx}(w) = \frac{\begin{matrix} iw & 0 & (w) \\ ff \end{matrix}}{\begin{matrix} 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ w & -2\alpha w + \beta & w + \alpha & & \end{matrix}} \quad \dots (3.64)$$



RELACION ENTRADA-SALIDA DE UN SISTEMA DINAMICO

FIGURA 3.7

$$\Phi_{xx}(\omega) = \frac{\Phi_{ff}(\omega)}{w^4 - 2\alpha w^2 + \beta w^2 + \alpha^2} \dots (3.65)$$

donde

$$x_1 = x \quad (\text{desplazamiento horizontal})$$

$$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x} \quad (\text{velocidad})$$

Conviene hacer aquí una pequeña interpretación de los resultados hasta ahora obtenidos. De las ecuaciones 3.62 a 3.65 se puede observar que existe una relación del tipo entrada-salida. La entrada es una función excitadora aleatoria $F(t)$ cuyo espectro de potencia es $\Phi_{ff}(\omega)$. Cuando esta función $F(t)$ es aplicada al sistema dinámico, ésta se ve afectada por una función de respuesta a la frecuencia llamada $H(\omega)$, obteniéndose una función aleatoria de salida $X(t)$ cuyo espectro de potencia es $\Phi_{xx}(\omega)$. Para ilustrar lo anterior, véase la figura 3.7.

De acuerdo a lo antes mencionado, si nosotros queremos obtener el espectro de potencia de desplazamientos de salida $\Phi_{xx}(\omega)$ para cualquier función excitadora $\Phi_{ff}(\omega)$ y multiplicarlo con la función de respuesta a la frecuencia $H(\omega)$ donde:

$$H(\omega) = \frac{1}{w^4 - 2\alpha w^2 + \beta w^2 + \alpha^2} \dots (3.66)$$

Es decir:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = H(\omega) \ddot{\theta} \quad \dots(3.67)$$

De la misma manera, si se desea saber el espectro de potencia de velocidades \dot{x} , se deberá obtener $\dot{\theta}(\omega)$ y deberá ser multiplicado por:

$$H(\omega) = \frac{1}{\omega^2 - 2\zeta\omega_0\omega + \omega_0^2} \quad \dots(3.68)$$

Es decir:

$$\dot{x} = H(\omega) \dot{\theta} \quad \dots(3.69)$$

Analicemos ahora como es la función de respuesta a la frecuencia

$H(\omega)$:

$$H(\omega) = \frac{1}{\omega^2 - 2\zeta\omega_0\omega + \omega_0^2} \quad \dots(3.66)$$

donde:

$$\zeta = \frac{c + c_0}{2m\omega_0} = 2\zeta_0 \omega_0$$

$$\beta = \frac{k}{m} = \omega_0^2$$

siendo ζ_0 es el porcentaje de amortiguamiento y ω_0 es la frecuencia natural de vibración del sistema sin amortiguamiento.

Sustituyendo valores de α y β en 3.66, se obtiene:

$$H_{11}(w) = \frac{1}{w^2 - 4w + 2 + w^2 + 4w + 2} \dots (3.70)$$

La forma aproximada de la gráfica de $H_{11}(w)$, cuando el amortiguamiento es menor al crítico, se muestra en la figura 3.6. Si el sistema no tiene el EIAR, entonces, $C = 0$ y

$$a = \frac{C}{m} = 2w$$

donde $w_1 > w_2$

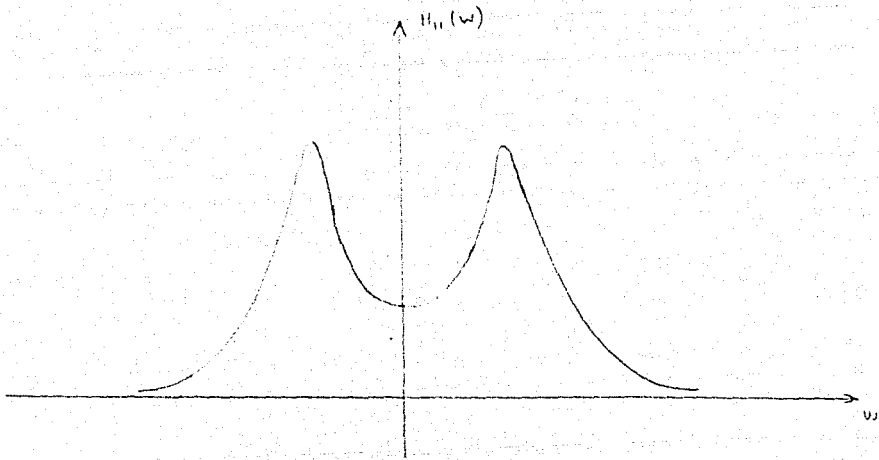
quedándonos la siguiente función de respuesta a la frecuencia $H'_{11}(w)$:

$$H'_{11}(w) = \frac{1}{w^2 - 4w + 2 + w^2 + 4w + 2} \dots (3.71)$$

La gráfica aproximada de $H_{11}(w)$ para el sistema sin EIAR y con amortiguamiento menor al crítico, se muestra en la figura 3.9.

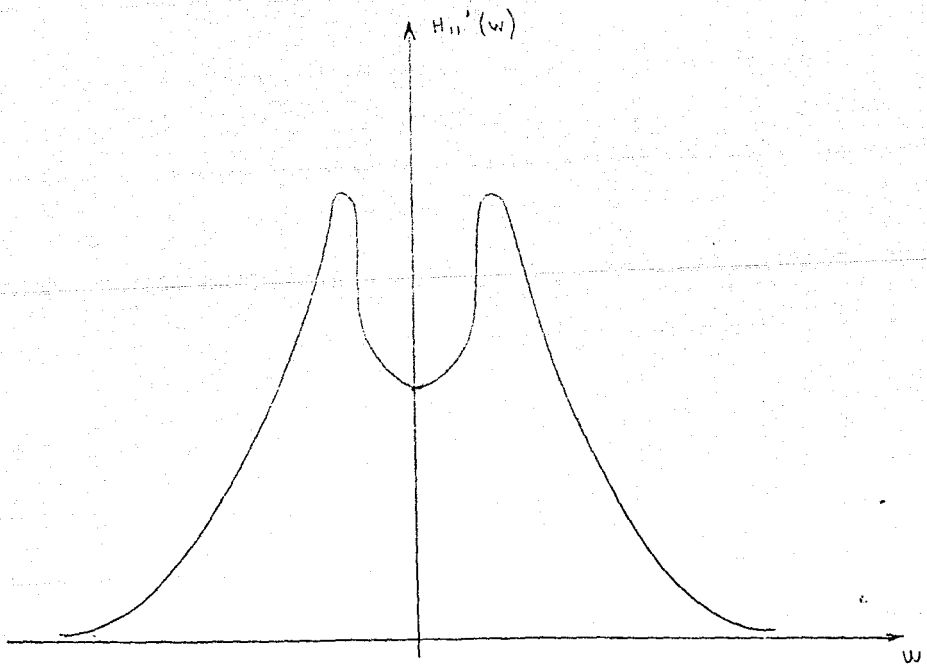
Se podrá observar de estas dos figuras que la función de respuesta a la frecuencia $H_{11}(w)$ es menor cuando la cruzia posee el EIAR. Por lo tanto, el espectro de potencia de salida $\Phi_{ff}(t)$ será también menor para el caso con EIAR, para cualquier función aleatoria de entrada que se quiera.

Supongamos ahora, a manera de ejemplo, que la función aleatoria estacionaria $F(t)$ está definida como un seno de periodo w y ángulo de f



$H_{11}(\omega)$ PARA MODELO CON EIAR

FIGURA 3.8



$H_{11}'(\omega)$ PARA MODELO SIN EIAR

FIGURA 3.9

fase θ (Constante), es decir:

$$F(t) = f_0 \sin(\omega t + \theta) \quad \dots (3.72)$$

Si θ fuera el mismo para todas las muestras, $F(t)$ no sería un proceso aleatorio. Es por esto que debemos suponer que el ángulo de fase θ varía entre 0 y 2π con igual probabilidad para cada muestra, entonces podemos decir que la función de probabilidad $p(\theta)$ se define así:

$$p(\theta) = \begin{cases} 1/2\pi & \text{para } 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

por lo tanto, la función de covarianza $C_{ff}(\tau)$ será:

$$C_{ff}(\tau) = E(f(t+\tau) f(t))$$

$$C_{ff}(\tau) = E(f_0 \sin(\omega(t+\tau) + \theta) f_0 \sin(\omega t + \theta))$$

$$C_{ff}(\tau) = E(f_0^2 \sin(\omega t + \omega \tau + \theta) \sin(\omega t + \theta))$$

Aplicando la definición de Esperanza matemática se tiene:

$$C_{ff}(\tau) = \int_0^{2\pi} f_0^2 \sin(\omega t + \omega \tau + \theta) \sin(\omega t + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta \quad \dots (3.73)$$

$$C_{ff}(\tau) = \frac{f_0^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\omega t + \omega \tau + \theta) \sin(\omega t + \theta) d\theta \quad \dots (3.74)$$

Aplicando la siguiente identidad trigonométrica de ángulos:

$$\sin(a + \beta) = \sin a \cos \beta + \cos a \sin \beta$$

y haciendo:

$$a = \omega t + \theta$$

$$\beta = \omega \zeta$$

se puede afirmar que:

$$\sin(\omega t + \omega \zeta + \theta) = \sin(\omega t + \theta) \cos(\omega \zeta) + \cos(\omega t + \theta) \sin(\omega \zeta) \quad \dots (3.75)$$

Sustituyendo (3.75) en (3.74), se obtiene:

$$C(\zeta) = \frac{f_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} [(\sin(\omega t + \theta)) \cos(\omega \zeta) + \cos(\omega t + \theta) \sin(\omega \zeta)] \sin(\omega t + \theta) d\theta$$

$$C(\zeta) = \frac{f_0}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} (\sin(\omega t + \theta))^2 \cos(\omega \zeta) d\theta + \int_0^{2\pi} \cos(\omega t + \theta) \sin(\omega \zeta) \sin(\omega t + \theta) d\theta \right]$$

$$C(\zeta) = \frac{f_0}{2\pi} \left[\cos \omega \zeta \int_0^{2\pi} (\sin(\omega t + \theta))^2 d\theta + \sin \omega \zeta \int_0^{2\pi} \cos(\omega t + \theta) \sin(\omega t + \theta) d\theta \right]$$

$$C(\zeta) = \frac{f_0}{2\pi} \left[\cos \omega \zeta \left\{ \frac{\omega t + \theta}{f} - \frac{1}{4} \sin 2(\omega t + \theta) \right\} \Big|_0^{2\pi} + \frac{(\sin(\omega t + \theta))^2}{2} \Big|_0^{2\pi} \right]$$

... (3.76)

de donde finalmente se obtiene que:

$$C_{ff}(\omega) = \frac{f_0^2}{2f} \cos \omega \zeta \dots (3.77)$$

La gráfica de esta función se puede ver en la figura 3.10.

De acuerdo con lo obtenido anteriormente, el espectro de potencia de la fuerza excitadora será:

$$\begin{aligned} \Phi_{ff}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} C_{ff}(\zeta) e^{-i\omega\zeta} d\zeta \\ \Phi_{ff}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0^2}{2} \cos \omega \zeta e^{-i\omega\zeta} d\zeta \dots (3.78) \end{aligned}$$

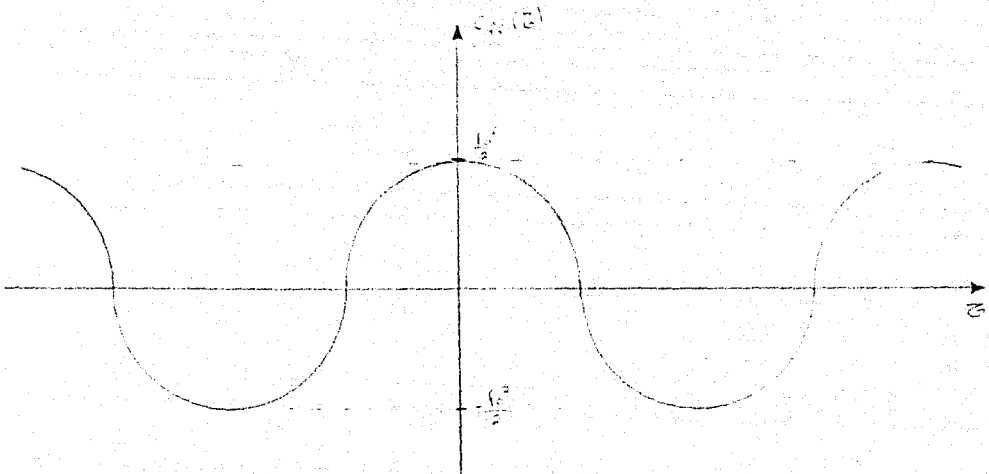
Utilizando la siguiente identidad:

$$e^{-i\omega\zeta} = \cos \omega\zeta - i \sin \omega\zeta$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} \Phi_{ff}(\omega) &= \frac{f_0^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega \zeta (\cos \omega \zeta - i \sin \omega \zeta) d\zeta \\ \Phi_{ff}(\omega) &= \frac{f_0^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2 \omega \zeta d\zeta - i \frac{f_0^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega \zeta \sin \omega \zeta d\zeta \dots (3.79) \end{aligned}$$

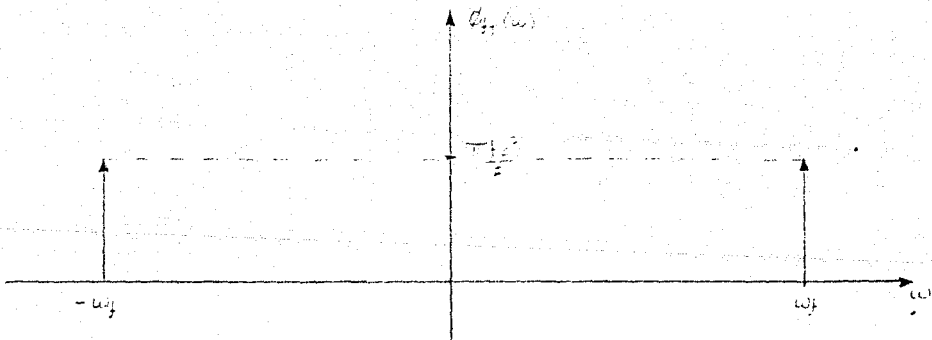
y como la función de autocovarianza $C_{ff}(\zeta)$ es simétrica con respecto al eje vertical, entonces (3.77) queda de la siguiente manera:



FUNCION DE AUTOCOVARIANZA $C_{ff}(\tau)$ PARA

$$F(t) = f_0 \sin(\omega_f t + \theta)$$

FIGURA 3.10



ESPECTRO DE POTENCIA $f_f(\omega)$ PARA

$$F(t) = f_0 \sin(\omega_f t + \theta)$$

FIGURA 3.11

$$\Phi_{ff}(\omega) = \frac{f_0^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega t \cos \omega t dt$$

$$\Phi_{ff}(\omega) = \frac{f_0^2}{2} \delta(\omega - \omega_f) \dots (3.80)$$

donde $\delta(x)$ es la función de Dirac que se define como la función que es cero para cualquier x , excepto para $x=0$, siendo $\delta(0)=1$, de tal manera que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

La gráfica del espectro de potencia de la fuerza excitadora (Φ_{ff}) se puede ver en la figura 3.11.

Por lo tanto, los espectros de potencia cuando:

$$f(t) = f_0 \sin(\omega_f t + \theta)$$

son los siguientes:

$$\Phi_{x_1 x_1}(\omega) = H_{11}(\omega) \frac{f_0^2}{2} \delta(\omega - \omega_f) \dots (3.81)$$

$$\Phi_{x_1 x_2}(\omega) = H_{12}(\omega) \frac{f_0^2}{2} \delta(\omega - \omega_f) \dots (3.82)$$

$$\Phi_{x_2 x_1}(\omega) = H_{21}(\omega) \frac{f_0^2}{2} \delta(\omega - \omega_f) \dots (3.83)$$

$$\Phi_{x_2 x_2}(\omega) = H_{22}(\omega) \frac{f_0^2}{2} \delta(\omega - \omega_f) \dots (3.84)$$

donde:

$$x_1 = x_1 \quad (\text{desplazamiento horizontal})$$

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_1 = x_2 \quad (\text{velocidad})$$

Si tomamos el modelo con EIAR, la gráfica del espectro de potencia de salida de desplazamientos $\Phi_{x_1 x_1}(\omega)$ se obtendría como:

$$\Phi_{x_1 x_1}(\omega) = H_{11}(\omega) \Phi_{ff}(\omega)$$

y se vería como lo muestra la figura 3.12.

Si se analiza el modelo sin EIAR, entonces:

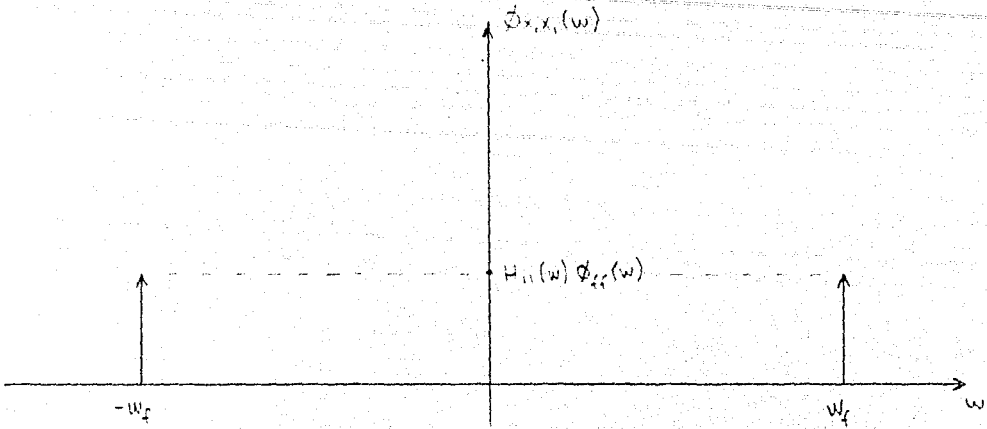
$$\Phi_{x_1 x_1}(\omega) = H_{11}(\omega) \Phi_{ff}(\omega)$$

y el espectro de potencia $\Phi_{x_1 x_1}(\omega)$ se vería como se muestra en la figura 3.13.

Como segundo ejemplo tomemos como función excitadora la función aleatoria conocida como ruido blanco. Se define ruido blanco como un proceso aleatorio cuyo espectro de potencia es constante, es decir, su espectro no depende de la frecuencia, entonces:

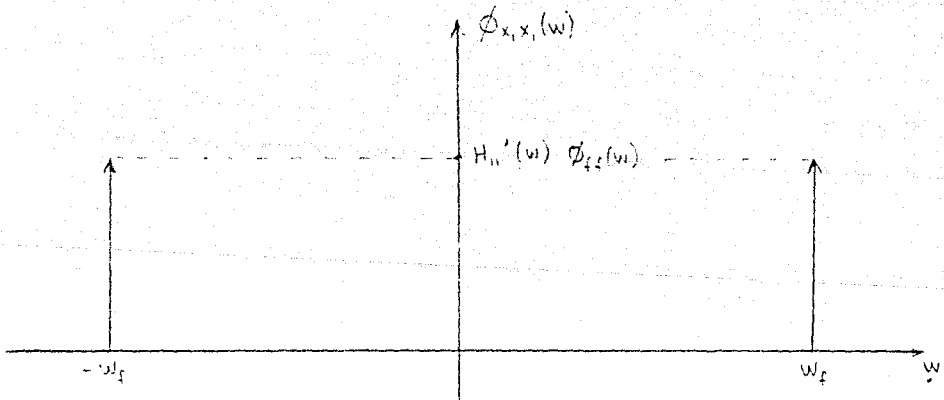
$$\Phi_{ff}(\omega) = \Phi_{ff} = \text{constante}$$

y su función de autocovarianza es un impulso, ya que:



ESPECTRO DE POTENCIA $\Phi_{x,x}(\omega)$ PARA MODELO CON EIAI

FIGURA 3.12



ESPECTRO DE POTENCIA $\Phi_{x,x}(\omega)$ PARA MODELO SIN EIAI

FIGURA 3.13

$$C_{ff}(\tau) = \frac{1}{2n} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_{ff} e^{i\omega\tau} d\omega$$

de donde se obtiene que:

$$C_{ff}(\tau) = \frac{\theta_{ff}}{2n} \delta(\omega)$$

donde $\delta(\omega)$ es la función de Dirac mencionada anteriormente.

La función de autocovarianza $C_{ff}(\tau)$ para ruido blanco se puede ver graficada en la figura 3.14 y su espectro $\theta_{ff}(\omega)$ en la figura 3.15.

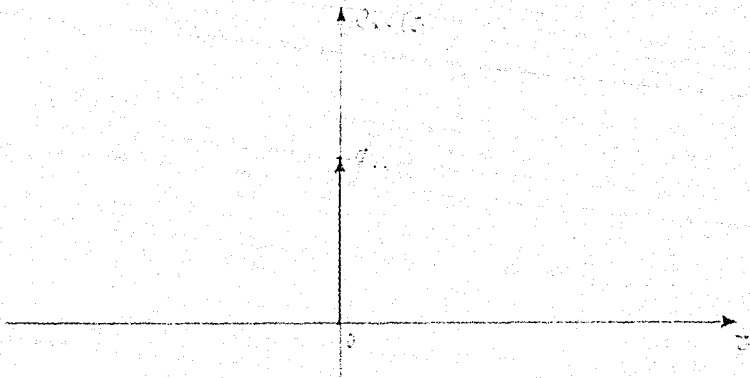
Si ahora multiplicamos el espectro de potencia del ruido blanco $\theta_{ff}(\omega)$ por la función $H_{ff}(\omega)$ obtendremos el espectro de potencia de desplazamientos:

$$\theta_{xx}(\omega) = H_{ff}(\omega) \theta_{ff}(\omega) \quad \dots(3.85)$$

que se encuentra graficada en la figura 3.16.

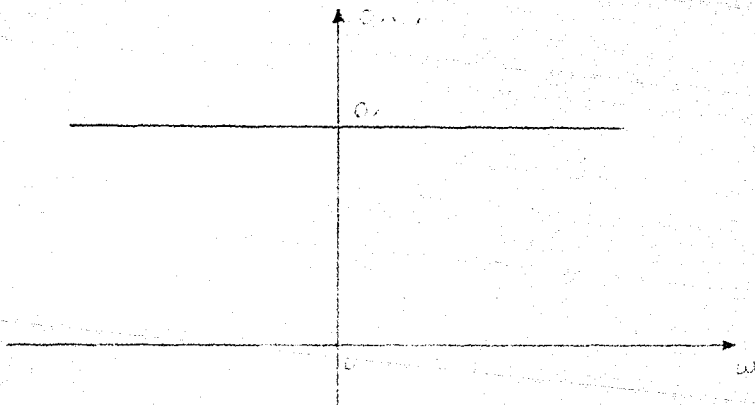
Se podrá observar de esta figura que bajo ruido blanco, el espectro de salida θ_{xx} no es más que la función de respuesta a la frecuencia $H_{ff}(\omega)$ amplificada θ_{ff} veces. De la misma manera podemos graficar el espectro de potencia θ_{xx} para el modelo sin EIAR, (véase figura 3.17) donde:

$$\theta_{xx}(\omega) = H_{ff}(\omega) \theta_{ff}(\omega) \quad \dots(3.86)$$



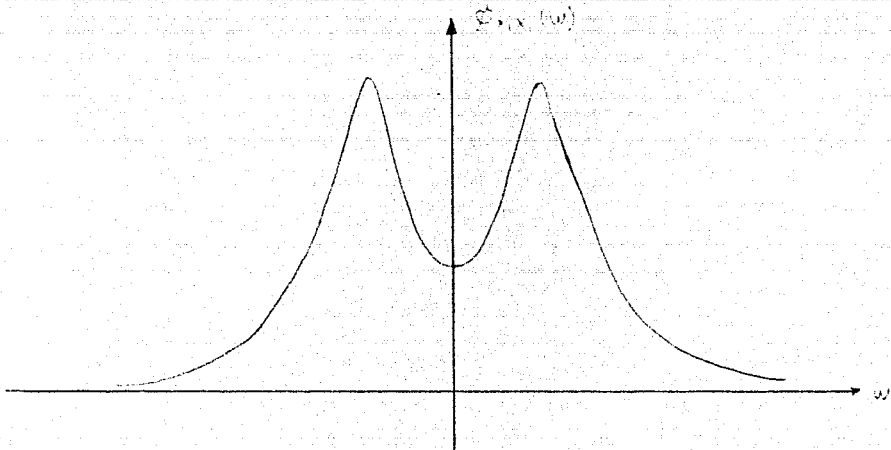
FUNCION DE AUTOCOVARIANZA $C_{ff}(t)$ PARA RUIDO BLANCO

FIGURA 3.14

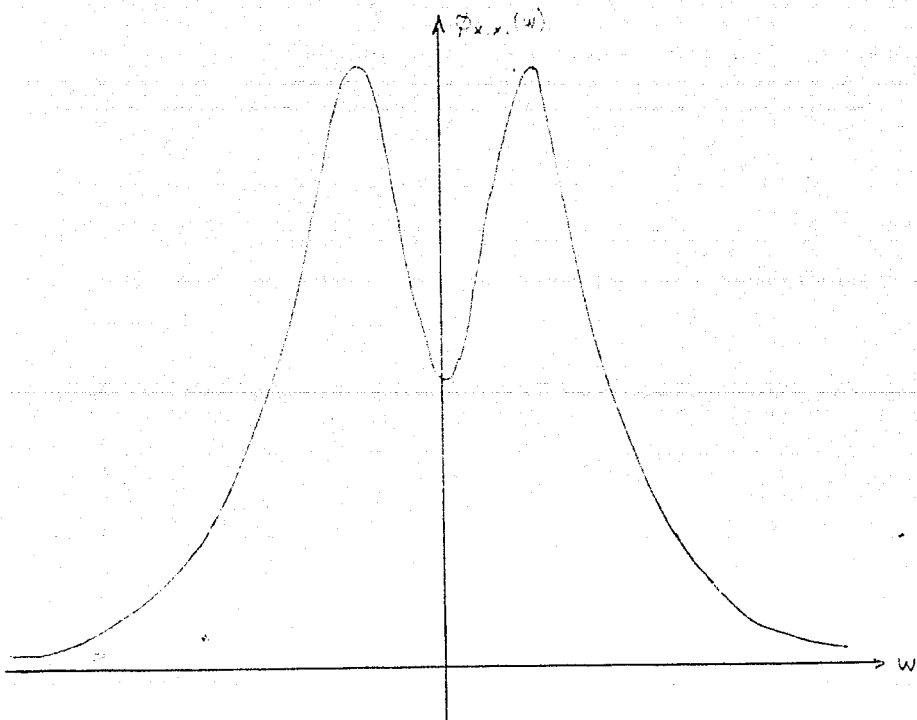


ESPECTRO DE POTENCIA $S_{ff}(\omega)$ PARA RUIDO BLANCO

FIGURA 3.15



ESPECTRO DE POTENCIA $\Phi_{y,x}(\omega)$ PARA RUIDO BLANCO
(MODELO CON EIA)
FIGURA 3.16



ESPECTRO DE POTENCIA $\Phi_{x,x}(\omega)$ PARA RUIDO BLANCO
(MODELO SIN EIA)
FIGURA 3.17

De estas dos últimas figuras se podrá notar nuevamente el efecto del EIAR al reducir el espectro de salida θ_{xx} , beneficiando el comportamiento de la estructura.

Como estos dos ejemplos, podríamos poner muchos otros más, lo único que se necesita es obtener el espectro de potencia de la función aleatoria excitadora y multiplicarlo por la función correspondiente $H(\omega)$, para obtener el espectro de potencia de salida $\theta_{xx}(\omega)$.

IV. - MODELACION MATEMATICA DE UN EDIFICIO

CON EIAE

CAPITULO IV

MODELACION MATEMATICA DE UN EDIFICIO CON EIAR:

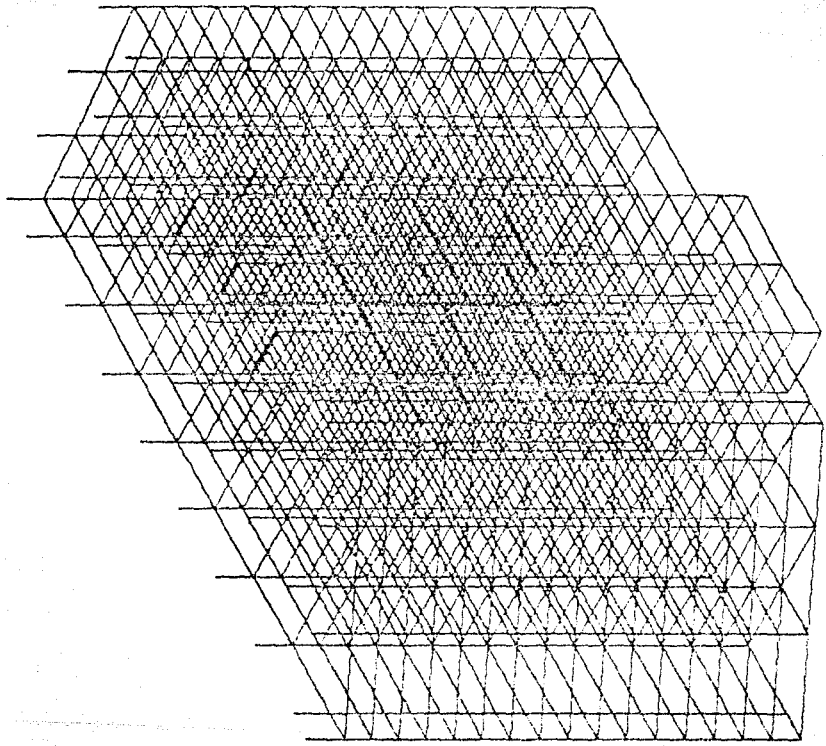
El edificio estudiado con EIAR está ubicado en Av. Diagonal 20 de Noviembre # 275 en el centro de la Ciudad de México. Este es una estructura de planta irregular y alargada que consta de un sótano, planta baja, dos niveles de estacionamiento, doce niveles tipo y azotea. El área por planta es de aproximadamente 1200 m² y la altura total del edificio es de 51.90 m. (véase figura 4.1).

El sistema de estructuración es a base de marcos de concreto reforzado. El sistema de piso es a base de losa reticular apoyada en trabes de concreto.

En la zona de elevadores y escaleras existen tres muros de cortante. Estos muros proporcionan rigidez en el sentido corto del edificio, pero a la vez ocasionan cierta torsión debido a la deficiente localización de los mismos.

Primera mente se realizó un análisis tridimensional del edificio con el programa ETAES (Extended Three-dimensional Analysis of Building Systems), modelando a la estructura como una red de columnas, trabes, losas y muros. El análisis que se hizo mediante este programa es de tipo elástico.

Las dimensiones de las crujeas, las alturas de los entrepisos y las escudrias de los elementos estructurales se tomaron de los planos proporcionados por los dueños del inmueble. Se realizaron, además,



ETABS

FILE : POLI.PST
UNDEFORMED GEOMETRY
TOP LEVEL : CUBIE
BOTTOM LEVEL : EST1

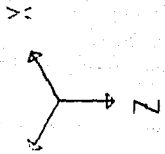


FIGURA 4.1

visitas al edificio para corroborar o corregir en su caso la información dada.

Las cargas muertas se evaluaron considerando los pesos propios de los materiales existentes y las cargas vivas se obtuvieron de acuerdo al uso del inmueble, tomadas éstas, en apego al Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal de 1967 (R.C.D.F.'87), capítulos IV y V, del título sexto.

Para el análisis del edificio se consideró a la estructura como del grupo A, a petición de los propietarios, aunque en realidad está catalogado como del grupo B1, según el R.C.D.F.'87. El inmueble está ubicado en la zona III. El factor de comportamiento sísmico que se tomó fue de $Q = 3$.

El edificio se analizó ante sollicitaciones sísmicas con dos aproximaciones: estática y dinámicamente. Para esto se siguieron los lineamientos marcados en las Normas Técnicas Complementarias por Sismo en las dos formas de análisis sísmico. De estos análisis se obtuvieron los siguientes resultados:

1 ^{er}	periodo (dirección X):	2.1 seg.
2 ^o	periodo (rotación):	1.7 seg.
3 ^{er}	periodo (dirección Y):	1.5 seg.

Los pesos obtenidos por nivel para carga muerta, carga viva y carga viva reducida fueron los que se muestran en la tabla 4.1.

TABLA DE PESOS POR NIVEL

NIVEL	CARGA MUERTA (kg)	CARGA VIVA (kg)	VIVA REDUCIDA (kg)
A20	1,435,374	139,216	88,722
N14	1,232,407	294,626	207,722
N13	1,232,407	294,626	207,722
N12	1,267,686	294,626	207,722
N11	1,297,327	294,626	207,722
N10	1,297,327	294,626	207,722
N9	1,329,871	294,626	207,722
N8	1,329,871	294,626	207,722
N7	1,329,871	294,626	207,722
N6	1,363,828	294,626	207,722
N5	1,363,828	294,626	207,722
N4	1,363,828	294,626	207,722
N3	1,363,828	294,626	207,722
N2	1,388,996	294,626	117,744
N1	1,346,073	291,184	117,744
PB	1,510,287	291,184	207,197
SOT	1,336,397	293,625	118,721
M	22,969,248	4,880,075	3,161,304

TABLA 4.1

Los máximos desplazamientos obtenidos fueron los siguientes:

	ANALISIS ESTATICO	ANALISIS DINAMICO
En la dirección larga(X):	1.34 m	1.11 m
En la dirección corta(Y):	0.88 m	0.70 m

y las deformaciones laterales relativas obtenidas se muestran en la tabla 4.2.

Como se podrá observar, los resultados mostrados indican deformaciones laterales absolutas y relativas bastante mayores a los que limita el R.C.D.F.'87.

El programa ETABS cuenta, además, con diversos programas postprocesadores de diseño. Se hicieron corridas con este tipo de postprocesadores observándose que muchos de los elementos estructurales resultaban escasos. Es decir, que los elementos mecánicos obtenidos del análisis estructural resultaron mayores a los que la estructura puede resistir.

Este análisis que se realizó con el ETABS, hizo ver que el edificio se encuentra en condiciones de franca inseguridad estructural, lo que hace necesario reforzar el mismo. Fue entonces cuando se decidió hacer el estudio de factibilidad para realizar un reforzamiento mediante la adición de amortiguamiento externo y rigidez

TABLA DE DEFORMACIONES LATERALES RELATIVAS

NIVEL	ANALISIS ESTATICO		ANALISIS DINAMICO	
	DIRECCION X	DIRECCION Y	DIRECCION X	DIRECCION Y
AZO	0.00498	0.00832	0.00348	0.00499
N14	0.00735	0.00847	0.00510	0.00501
N13	0.00960	0.00859	0.00659	0.00502
N12	0.00979	0.00864	0.00665	0.00501
N11	0.01094	0.00867	0.00739	0.00496
N10	0.01225	0.00865	0.00822	0.00487
N9	0.01274	0.00850	0.00851	0.00473
N8	0.01367	0.00832	0.00910	0.00456
N7	0.01447	0.00801	0.00959	0.00433
N6	0.01453	0.00758	0.00958	0.00405
N5	0.01469	0.00706	0.00978	0.00373
N4	0.01496	0.00637	0.00978	0.00333
N3	0.01440	0.00553	0.00935	0.00286
N2	0.01270	0.00463	0.00819	0.00237
N1	0.00872	0.00323	0.00560	0.00165
PB	0.00035	0.00093	0.00022	0.00052
SOT	0.00011	0.00043	0.00007	0.00002

TABLA 4.2

con los EIAE.

Hay que recordar que el comportamiento de los EIAE es de tipo no lineal, por lo que no se puede hacer un análisis adecuado mediante el uso del ETABS. Es por esto que fue necesario desarrollar un programa para análisis dinámico inelástico de estructuras en el plano como es el DRAIN2D (Dynamic Response Analysis of Inelastic Plane Structures).

El programa consiste de un cuerpo principal y una serie de subrutinas que llevan a cabo un análisis dinámico paso a paso. Para cada tipo de elemento (columna, trabe, muro o armadura) se tiene una subrutina especial (en la cual se analiza su comportamiento), siendo posible añadir subrutinas para alguna otra clase de elemento estructural.

El DRAIN2D utiliza el método de rigidez directa para el análisis. La estructura se idealiza como un ensamblaje de elementos discretos, y las variables son los desplazamientos en los nudos.

La excitación sísmica se define dando la historia de aceleraciones del suelo, y la respuesta dinámica se obtiene por la integración paso a paso, bajo el supuesto de que la aceleración es constante durante el intervalo de tiempo t . Para cada paso se supone comportamiento lineal y se toma la rigidez tangencial de la estructura. Si en determinado momento, un elemento fluye o es descargado, la información se ajusta en las subrutinas correspondientes, haciendo además, el cambio correspondiente en la matriz de rigidez y volviéndose a resolver el sistema de ecuaciones.

Debido a que el espectro de diseño del Reglamento es en realidad un espectro envolvente para una zona de la Ciudad de México, éste no puede registrar las peculiaridades propias del terreno bajo la estructura. Así pues, se consideró necesario hacer un espectro de sitio que reflejara con mayor veracidad el comportamiento del suelo, y en consecuencia, de la estructura. Este espectro de sitio para diferentes porcentajes de amortiguamiento se muestra en la figura 4.2.

En base al espectro de sitio obtenido, se mandó calcular las posibles historias de aceleraciones del suelo, que fueron posteriormente utilizadas como datos de entrada para las corridas con el DRAIN2D. En las figuras 4.3 y 4.4, se muestran estas historias de aceleraciones.

Para proponer la localización de los EIAR fue necesario realizar una visita al edificio para poder saber en qué crujiás era posible la ubicación de los mismos, de tal manera que no se viera gravemente afectada la funcionalidad del inmueble. La figura 4.5 muestra con flechas la propuesta final de localización de los EIAR en planta.

Los marcos en que se decidió colocar los EIAR fueron los siguientes:

MARCO	NUMERO DE CRUJIAS CON EIAR:
SENTIDO LARGO (X):	
Marco Eje A	variable con la altura (de 1 a 4)
Marco Eje D	variable con la altura (de 1 a 4)

Espectros de Respuesta - Diagonal 28 de Nov. 275

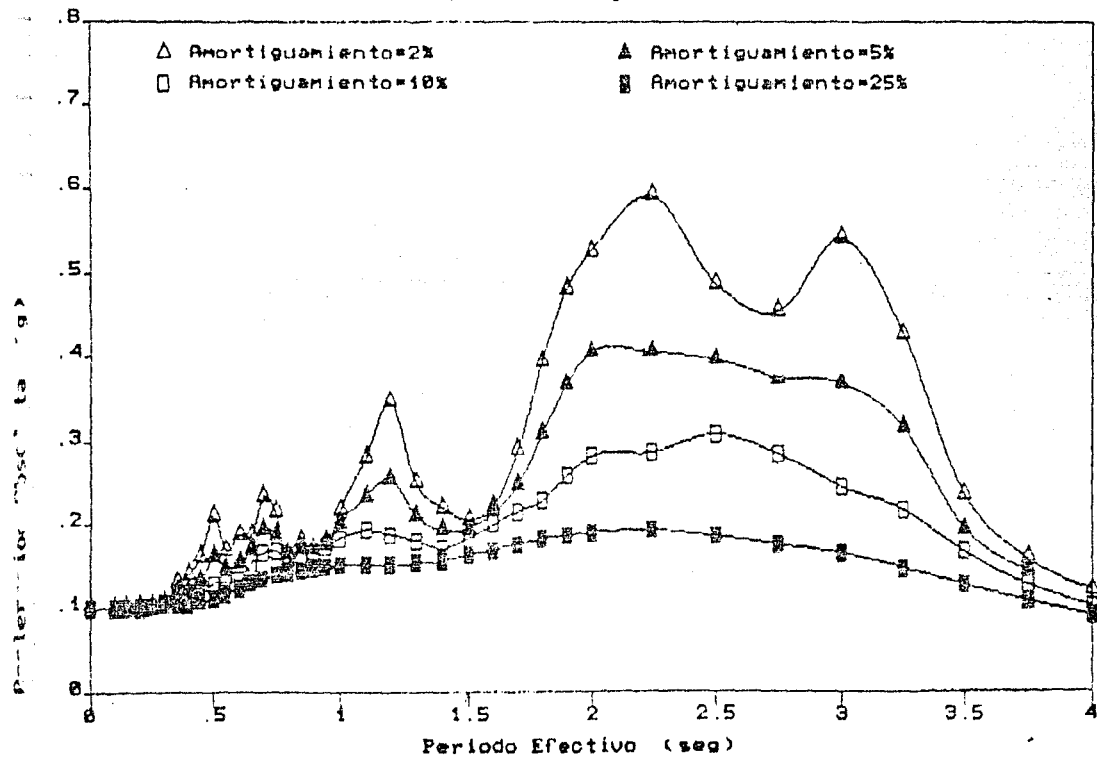


FIGURA 4.2

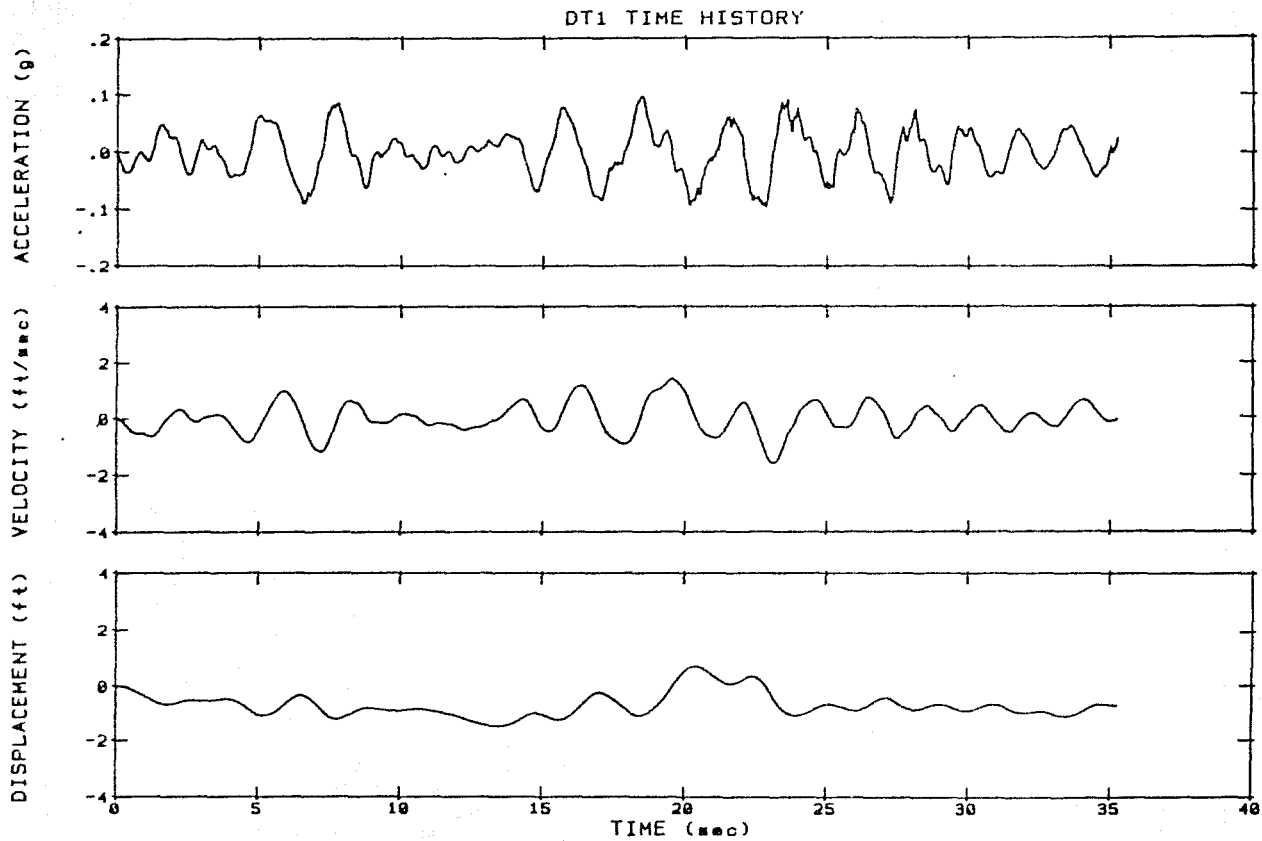


FIGURA 4.3

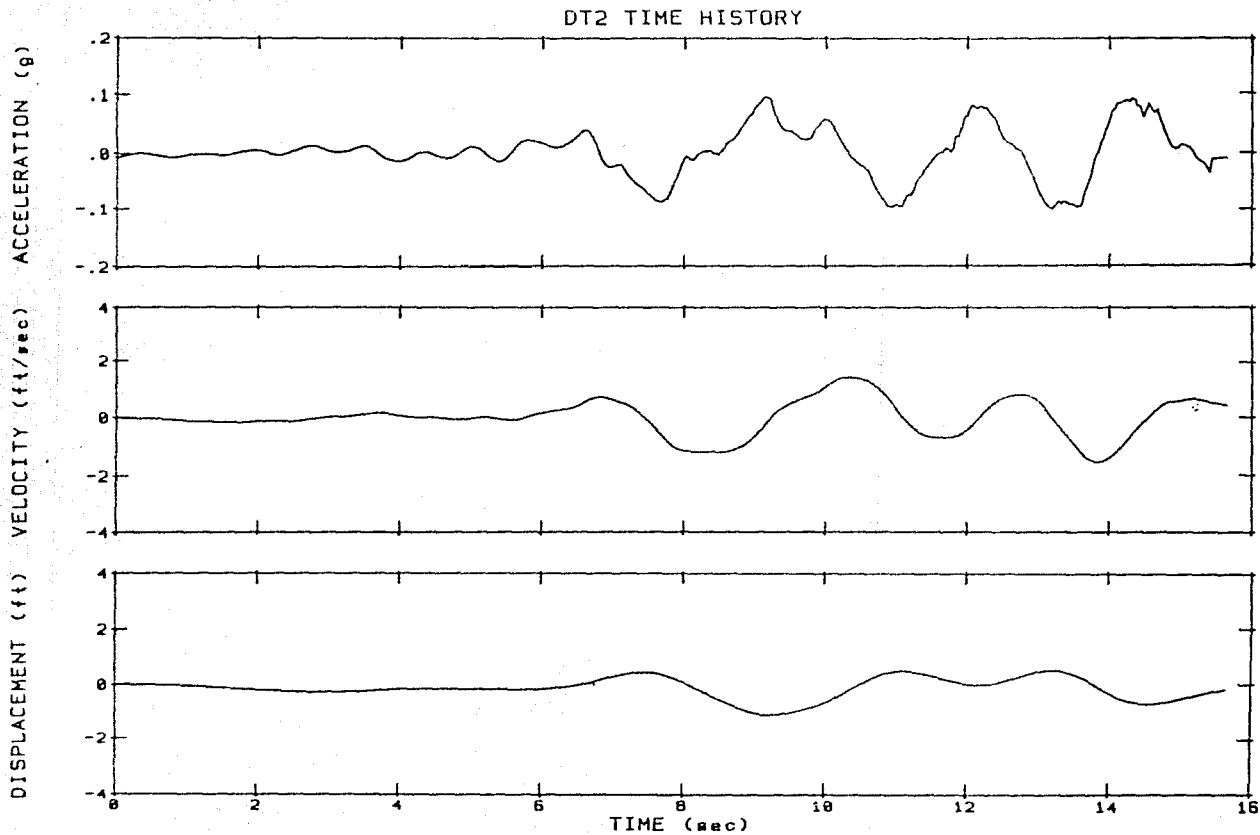


FIGURA 4.4

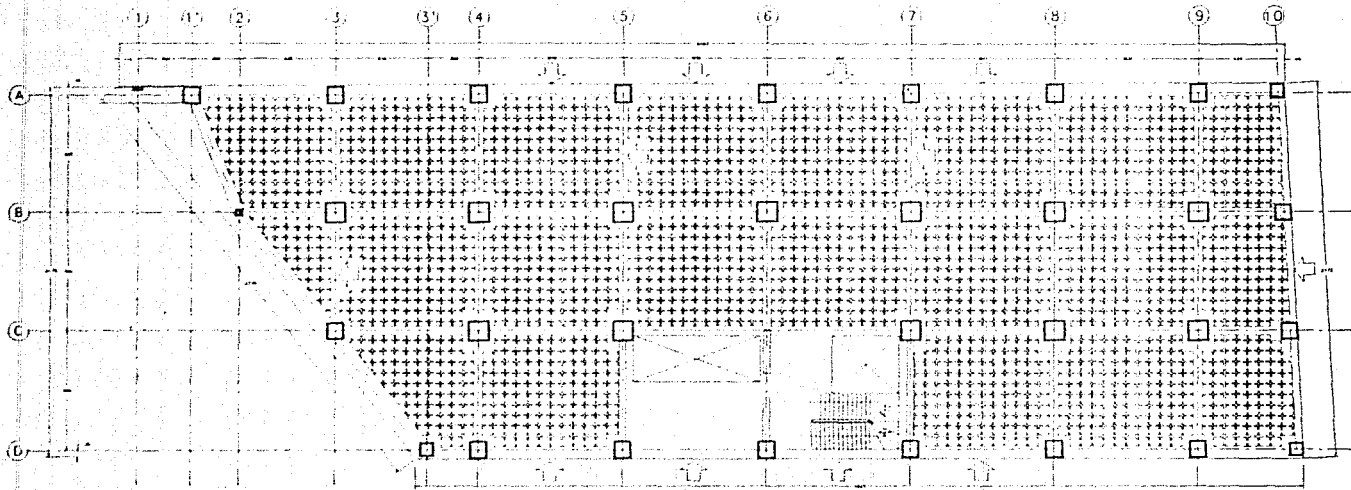


FIGURA 4.5

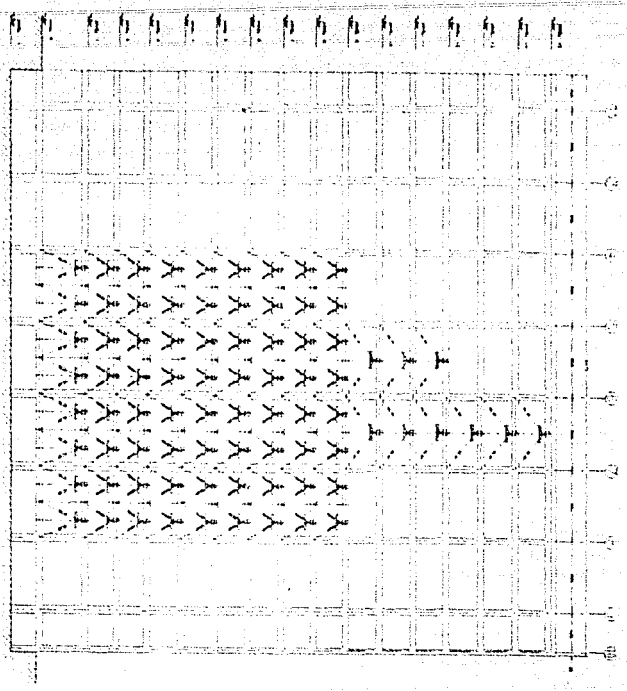
SENTIDO CORRIDO (Y):

Marco Eje 3	1
Marco Eje 5	1
Marco Eje 7	1
Marco Eje 10	1

Estos marcos, junto con los marcos de los ejes 6, 8 y 9 fueron modelados con el programa DRAIN2D. En las figuras 4.6 y 4.7, se pueden observar las elevaciones de los marcos con EIAR.

Para una misma cruzilla pueden existir uno o más EIAR, sin embargo, para su modelación se toma un EIAR equivalente. El elemento amortiguador se modela en el DRAIN2D como un par de elementos "Truss", es decir, aquellos que trabajan exclusivamente a fuerza axial. Estos elementos van adosados a la parte inferior de la trabe y parten del nudo de intersección trabe-columna y llegan a otro nudo, que es la intersección de las diagonales (véase figura 4.8). Para poder definir las características de estos elementos Truss, basta proporcionar al programa, como dato, la carga de fluencia (F_y), el área y la rigidez del amortiguador. Cabe mencionar que este tipo de modelación de los EIAR con el DRAIN2D fue propuesto por el Dr. Roger E. Scholl.

Para diseñar un EIAR es necesario recordar que el comportamiento del mismo es de tipo histerético (véase figura 3.4). Se han realizado varios experimentos en la Universidad de Berkeley (véase referencia 20) para conocer mejor el comportamiento de estos dispositivos. Dentro de estos experimentos se encuentra el haber llevado algunos EIAR a la falla y se vió que el desplazamiento máximo (a la falla) fue de



LIST 0

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES
 Y ESTADÍSTICAS
 DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
 INSTITUTO DE INVESTIGACIONES Y ESTADÍSTICAS

FIGURA 4.6

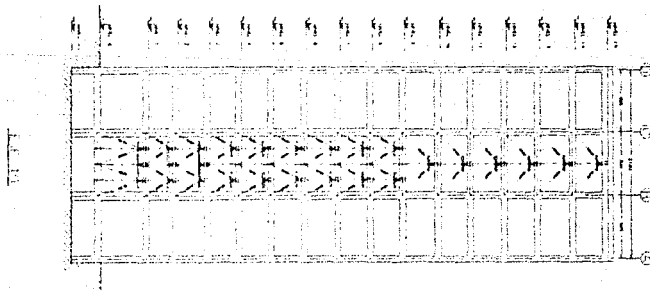
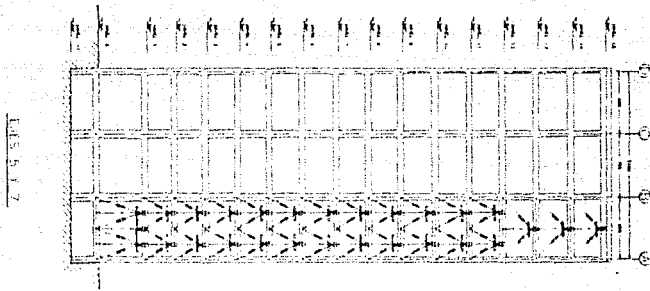
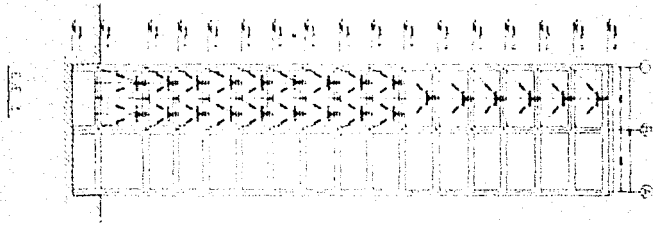


FIGURA 4.7

TIPOS DE ELEMENTOS PARA
MODELACION CON EL DRAIN2D:

- C : COLUMNA (BEAM-COLUMN ELEMENT)
- T : TRABE (BEAM-COLUMN ELEMENT)
- D : DIAGONAL (TRUSS ELEMENT)
- E : EIAR (TRUSS ELEMENT)

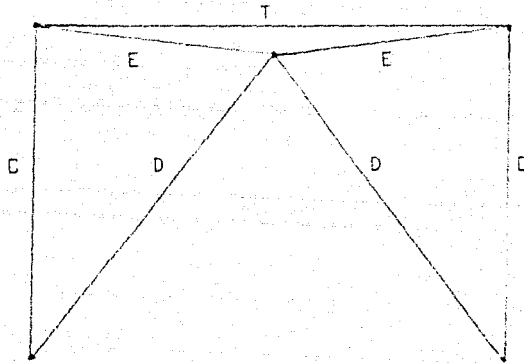


FIGURA 4.8

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

alrededor de catorce veces el desplazamiento de fluencia (Δy). También se ha visto que el nivel adecuado, o recomendable, de funcionamiento se da cuando los desplazamientos del mismo son de alrededor de cinco veces Δy .

Por lo tanto, para saber las dimensiones y el número de placas que necesita cada EIAR, es necesario conocer la magnitud de las fuerzas a las que va a estar sometido y vigilar que los desplazamientos del mismo sean de alrededor de cinco veces Δy . Las tablas 4.3 y 4.4 muestran el número y las características de la propuesta final de los EIAR por marco.

Para la modelación con el DRAIN2D, también se decidió tomar en cuenta la interacción suelo-estructura. Para esto fue necesario añadirle a cada uno de los modelos tres resortes elásticos en la base, uno de ellos horizontal (para restringir el desplazamiento horizontal), y dos en sentido vertical (para restringir la rotación de la base). Fue entonces necesario calcular los valores de K_x y K_r (que son las rigideces respectivas) tal y como lo marcan las Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo en la sección A7 (interacción suelo-estructura).

Después de haber hecho el modelo con el DRAIN2D para cada uno de los marcos antes mencionados (con y sin EIAR), se procedió a calcular las rigideces absolutas y relativas para cada marco en cada dirección. Para lograr esto, se hicieron corridas del DRAIN2D aplicándosele al marco una fuerza estática en un nudo del último nivel. Los resultados de estas corridas se muestran en las tablas 4.5 a 4.11.

MARCO EJE 3

TABLA DE EIARS POR MARCO

NIVEL	P _y (Kg)	y (cm)	PLACAS DEL EIAR			NUMERO DE EIAR POR CRUJIA
			espesor (cm)	longitud (cm)	número de placas	
A20	13,620	0.127	3.175	12.700	2	1
N14	13,620	0.127	3.175	12.700	2	1
N13	13,620	0.127	3.175	12.700	2	1
N12	49,940	0.254	3.810	20.320	5	1
N11	49,940	0.254	3.810	20.320	5	1
N10	50,020	0.254	3.810	20.320	6	1
N9	68,530	0.381	3.810	25.400	4 y 5	2
N8	68,530	0.381	3.810	25.400	4 y 5	2
N7	68,530	0.381	3.810	25.400	4 y 5	2
N6	106,690	0.457	3.810	27.940	5 y 6	2
N5	118,040	0.457	3.810	27.940	6 y 6	2
N4	118,040	0.457	3.810	27.940	6 y 6	2
N3	136,200	0.381	3.810	25.400	7 y 7	2
N2	136,200	0.381	3.810	25.400	7 y 7	2
N1	136,200	0.254	3.810	20.320	7 y 7	2

MARCO EJES 5 Y 7

TABLA DE EIARS POR MARCO

NIVEL	P _y (Kg)	y (cm)	PLACAS DEL EIAR			NUMERO DE EIAR POR CRUJIA
			espesor (cm)	longitud (cm)	número de placas	
A20	65,830	0.457	3.810	27.940	7	1
N14	65,830	0.457	3.810	27.940	7	1
N13	65,830	0.457	3.810	27.940	7	1
N12	64,260	0.457	3.810	27.940	5 y 4	2
N11	64,260	0.457	3.810	27.940	5 y 4	2
N10	64,260	0.457	3.810	27.940	5 y 4	2
N9	118,040	0.457	3.810	27.940	6 y 6	2
N8	118,040	0.457	3.810	27.940	6 y 6	2
N7	127,120	0.457	3.810	27.940	7 y 6	2
N6	127,120	0.457	3.810	27.940	7 y 6	2
N5	127,120	0.457	3.810	27.940	7 y 6	2
N4	127,120	0.457	3.810	27.940	7 y 6	2
N3	136,200	0.381	3.810	25.400	7 y 7	2
N2	136,200	0.381	3.810	25.400	7 y 7	2
N1	158,900	0.305	3.810	22.860	5,5 y 5	3

TABLA 4.3

MARCO EJE 10

TABLA DE EIARS POR MARCO

NIVEL	Py (Kg)	y (cm)	PLACAS DEL EIAR			NUMERO DE EIAR POR CRUJIA
			espesor (cm)	longitud (cm)	número de placas	
A20	13,620	0.127	3.175	12.700	3	1
N14	13,620	0.127	3.175	12.700	3	1
N13	13,620	0.127	3.175	12.700	3	1
N12	49,940	0.254	3.810	20.320	5	1
N11	49,940	0.254	3.810	20.320	5	1
N10	49,940	0.254	3.810	20.320	5	1
N9	106,690	0.457	3.810	27.940	5 y 6	2
N8	106,690	0.457	3.810	27.940	5 y 6	2
N7	106,690	0.457	3.810	27.940	5 y 6	2
N6	136,200	0.559	3.810	30.480	7 y 7	2
N5	136,200	0.559	3.810	30.480	7 y 7	2
N4	136,200	0.559	3.810	30.480	7 y 7	2
N3	145,280	0.457	3.810	27.940	5,5 y 5	3
N2	145,280	0.457	3.810	27.940	5,5 y 5	3
N1	145,280	0.457	3.810	20.320	5,5 y 5	3

MARCO EJES A Y D

TABLA DE EIARS POR MARCO

NIVEL	Py (Kg)	y (cm)	PLACAS DEL EIAR			NUMERO DE EIAR POR CRUJIA
			espesor (cm)	longitud (cm)	número de placas	
A20	68,100	0.254	3.810	20.320	7	1
N14	68,100	0.254	3.810	20.320	7	1
N13	68,100	0.254	3.810	20.320	7	1
N12	68,100	0.381	3.810	25.400	7	1
N11	68,100	0.457	3.810	27.940	7	1
N10	68,100	0.457	3.810	27.940	7	1
N9	95,340	0.457	3.810	27.940	5 y 5	2
N8	95,340	0.457	3.810	27.940	5 y 5	2
N7	95,340	0.457	3.810	27.940	5 y 5	2
N6	106,690	0.457	3.810	27.940	5 y 6	2
N5	106,690	0.457	3.810	27.940	5 y 6	2
N4	106,690	0.457	3.810	27.940	5 y 6	2
N3	106,690	0.305	3.810	22.860	5 y 6	2
N2	106,690	0.305	3.810	22.860	5 y 6	2
N1	106,690	0.254	3.810	20.320	5 y 5	2

TABLA 4.4

MARCO EJE A

SIN EIAR

F=90,800 Kg (200 kips)

NIVEL	NUDO	DESPLAZAM. (cm)	DIFERENCIA (cm)	RIGIDEZ (ton/m)
A20	1	4.354	0.478	25,904.6
N14	14	4.003	0.386	23,518.6
N13	27	3.617	0.396	22,516.2
N12	40	3.221	0.386	23,518.6
N11	53	2.835	0.351	25,904.6
N10	66	2.484	0.287	31,635.2
N9	79	2.197	0.310	29,300.8
N8	92	1.887	0.333	27,499.1
N7	105	1.554	0.338	26,878.9
N6	118	1.217	0.330	27,499.1
N5	131	0.886	0.305	29,790.6
N4	144	0.582	0.254	35,748.0
N3	157	0.328	0.163	55,856.2
N2	170	0.165	0.084	108,327.1
N1	183	0.081	0.074	123,269.8
PB	196	0.005	0.000	17,873,998.2
SOT	205	0.005		

MARCO EJE A

CON EIAR

F=90,800 Kg (200 kips)

NIVEL	NUDO	DESPLAZAM. (cm)	DIFERENCIA (cm)	RIGIDEZ (ton/m)
A20	1	2.433	0.221	41,089.6
N14	14	2.212	0.231	39,283.5
N13	27	1.981	0.234	38,856.5
N12	40	1.748	0.226	40,166.3
N11	53	1.522	0.206	44,133.3
N10	66	1.316	0.173	52,570.6
N9	79	1.143	0.165	54,996.9
N8	92	0.972	0.168	54,163.6
N7	105	0.810	0.165	54,996.9
N6	118	0.645	0.163	55,856.3
N5	131	0.483	0.152	59,580.0
N4	144	0.330	0.132	68,746.2
N3	157	0.198	0.086	105,141.2
N2	170	0.112	0.051	178,740.0
N1	183	0.061	0.053	170,228.6
PB	196	0.007	0.000	∅
SOT	205	0.007		

TABLA 4.5

MARCO EJE B

F=90,800 Kg (200 kips)

SIN EIAR

NIVEL	NUDO	DESPLAZAM. (cm)	DIFERENCIA (cm)	RIGIDEZ (ton/m)
AZ0	1	3.195	0.216	42,055.7
N14	9	2.979	0.251	36,109.0
N13	17	2.728	0.259	35,047.3
N12	25	2.469	0.251	36,109.0
N11	33	2.217	0.249	36,477.2
N10	41	1.969	0.241	37,630.1
N9	49	1.727	0.231	39,283.5
N8	57	1.496	0.226	40,166.4
N7	65	1.270	0.224	40,622.2
N6	73	1.046	0.216	42,055.7
N5	81	0.831	0.206	44,132.7
N4	89	0.625	0.186	46,308.0
N3	97	0.437	0.157	57,657.9
N2	105	0.279	0.137	66,199.9
N1	113	0.142	0.142	63,835.2
PB	121	0.000	0.000	0
SOT	129	0.000		

TABLA 4.6

MARCO EJE D

SIN EIAR

F=90,800 Kg (200 kips)

NIVEL	NUDO	DESPLAZAM. (cm)	DIFERENCIA (cm)	RIGIDEZ (ton/m)
AZ0	1	5.250	0.427	21,278.9
N14	13	4.823	0.457	19,859.9
N13	25	4.366	0.465	19,534.5
N12	37	3.901	0.462	19,641.7
N11	49	3.438	0.457	19,859.9
N10	61	2.982	0.445	20,426.4
N9	73	2.537	0.414	21,931.4
N8	85	2.123	0.404	22,483.7
N7	97	1.720	0.389	23,364.9
N6	109	1.331	0.373	24,317.6
N5	121	0.958	0.335	27,081.8
N4	133	0.622	0.279	32,498.1
N3	145	0.343	0.175	51,809.6
N2	157	0.166	0.086	105,142.0
N1	169	0.061	0.079	115,315.9
PB	181	0.003	0.003	3,574,800.0
SOT	189	0.000		

MARCO EJE D

CON EIAR

F=90,800 Kg (200 kips)

NIVEL	NUDO	DESPLAZAM. (cm)	DIFERENCIA (cm)	RIGIDEZ (ton/m)
AZ0	1	2.741	0.229	39,719.6
N14	13	2.512	0.335	27,288.2
N13	25	2.179	0.336	27,288.2
N12	37	1.847	0.249	36,477.3
N11	49	1.598	0.241	37,630.1
N10	61	1.356	0.257	35,394.1
N9	73	1.100	0.178	51,067.8
N8	85	0.922	0.152	59,579.4
N7	97	0.770	0.142	63,835.2
N6	109	0.627	0.132	66,747.0
N5	121	0.495	0.157	57,657.9
N4	133	0.336	0.142	63,835.2
N3	145	0.196	0.094	96,616.1
N2	157	0.102	0.048	188,147.1
N1	169	0.053	0.053	170,228.4
PB	181	0.000	0.000	b
SOT	189	0.000	0.000	

TABLA 4.7

MARCO EJE 3

SIN EIAR

F=22,700 Kg (50 kips)

NIVEL	NUDO	DESPLAZAM. (cm)	DIFERENCIA (cm)	RIGIDEZ (ton/m)
AZ0	1	3.254	0.257	8,848.5
N14	5	2.997	0.277	8,199.1
N13	9	2.720	0.272	8,352.3
N12	13	2.449	0.257	8,848.5
N11	17	2.192	0.249	9,119.4
N10	21	1.943	0.241	9,407.4
N9	25	1.702	0.231	9,820.9
N8	29	1.471	0.226	10,041.6
N7	33	1.245	0.221	10,272.4
N6	37	1.024	0.216	10,514.1
N5	41	0.806	0.203	11,171.3
N4	45	0.605	0.185	12,242.5
N3	49	0.415	0.150	15,147.5
N2	53	0.269	0.130	17,523.5
N1	57	0.140	0.137	16,550.0
PB	61	0.003	0.003	893,700.0
SOT	64	0.000		

MARCO EJE 3

CON EIAR

F=22,700 Kg (50 kips)

NIVEL	NUDO	DESPLAZAM. (cm)	DIFERENCIA (cm)	RIGIDEZ (ton/m)
AZ0	1	1.562	0.147	15,409.2
N14	5	1.415	0.155	14,651.3
N13	9	1.260	0.145	15,679.1
N12	13	1.115	0.130	17,523.7
N11	17	0.986	0.124	18,238.6
N10	21	0.861	0.117	19,429.0
N9	25	0.744	0.109	20,783.9
N8	29	0.635	0.102	22,342.5
N7	33	0.536	0.095	22,916.5
N6	37	0.434	0.094	24,154.9
N5	41	0.340	0.086	26,285.5
N4	45	0.254	0.079	28,829.0
N3	49	0.175	0.061	37,236.9
N2	53	0.112	0.053	42,558.0
N1	57	0.058	0.058	38,856.3
PB	61	0.000	0.000	0
SOT	64	0.000		

TABLA 4.8

MARCO EJE 6

SIN EIAR

F=45,400 Kg (100 kips)

NIVEL	NUDO	DESPLAZAM. (cm)	DIFERENCIA (cm)	RIGIDEZ (ton/m)
AZO	1	1.905	0.175	25,904.8
N14	5	1.730	0.175	25,904.8
N13	9	1.554	0.173	26,285.5
N12	13	1.382	0.168	27,082.7
N11	17	1.214	0.165	27,499.1
N10	21	1.049	0.157	28,829.0
N9	25	0.892	0.147	30,816.6
N8	29	0.744	0.142	31,917.6
N7	33	0.602	0.130	35,047.3
N6	37	0.472	0.117	38,856.3
N5	41	0.356	0.104	43,594.7
N4	45	0.251	0.089	51,067.8
N3	49	0.163	0.066	68,746.9
N2	53	0.097	0.051	89,370.0
N1	56	0.046	0.041	111,712.5
PB	59	0.005	0.003	1,787,400.0
SOT	62	0.003		

MARCO EJE 8

SIN EIAR

F=45,400 Kg (100 kips)

NIVEL	NUDO	DESPLAZAM. (cm)	DIFERENCIA (cm)	RIGIDEZ (ton/m)
AZO	1	4.087	0.318	14,299.2
N14	5	3.769	0.348	13,046.2
N13	9	3.421	0.335	13,541.3
N12	13	3.086	0.320	14,186.6
N11	17	2.766	0.312	14,531.5
N10	21	2.454	0.302	15,019.5
N9	25	2.151	0.290	15,679.0
N8	29	1.862	0.287	15,816.7
N7	33	1.575	0.279	16,249.2
N6	37	1.295	0.272	16,705.0
N5	41	1.024	0.259	17,523.7
N4	45	0.765	0.236	19,219.9
N3	49	0.528	0.193	23,518.6
N2	53	0.335	0.160	28,371.4
N1	57	0.175	0.173	26,285.5
PB	61	0.003	0.003	1,787,400.0
SOT	65	0.000		

TABLA 4.9

MARCO EJE 7

SIN EIAR

F=45,400 Kg (100 kips)

NIVEL	NUDO	DESPLAZAM. (cm)	DIFERENCIA (cm)	RIGIDEZ (ton/m)
AZ0	1	1.427	0.135	33,724.6
N14	5	1.293	0.135	33,724.6
N13	9	1.158	0.132	34,374.5
N12	13	1.026	0.130	35,047.3
N11	17	0.897	0.122	37,236.9
N10	21	0.775	0.117	36,856.3
N9	25	0.658	0.112	40,622.2
N8	29	0.546	0.104	43,594.7
N7	33	0.442	0.097	47,037.2
N6	37	0.345	0.086	52,571.0
N5	41	0.259	0.076	59,579.4
N4	45	0.183	0.064	71,496.0
N3	49	0.119	0.048	94,072.6
N2	53	0.071	0.036	127,670.4
N1	56	0.036	0.030	148,949.4
PB	59	0.005	0.003	1,787,400.0
SOT	62	0.003		

MARCO EJE 7

CON EIAR

F=45,400 Kg (100 kips)

NIVEL	NUDO	DESPLAZAM. (cm)	DIFERENCIA (cm)	RIGIDEZ (ton/m)
AZ0	1	0.960	0.091	49,650.4
N14	5	0.869	0.089	51,067.8
N13	9	0.780	0.086	52,571.0
N12	13	0.693	0.084	54,163.6
N11	17	0.610	0.081	55,856.3
N10	21	0.526	0.079	57,657.9
N9	25	0.450	0.074	61,634.9
N8	29	0.376	0.071	63,835.2
N7	33	0.305	0.064	71,496.0
N6	37	0.241	0.058	77,712.6
N5	41	0.183	0.051	89,370.0
N4	45	0.132	0.046	99,300.8
N3	49	0.086	0.033	137,492.2
N2	53	0.053	0.025	178,740.0
N1	56	0.028	0.023	198,599.8
PB	59	0.003	0.001	1,787,400.0
SOT	62	0.003		

TABLA 4.10

MARCO EJE 10

SIN EIAR

F=22,700 Kg (50 kips)

NIVEL	NUDO	DESPLAZAM. (cm)	DIFERENCIA (cm)	RIGIDEZ (ton/m)
AZO	1	3.274	0.226	10,041.6
N14	6	3.048	0.249	9,119.4
N13	11	2.799	0.254	8,937.0
N12	16	2.545	0.254	8,937.0
N11	21	2.291	0.251	9,027.3
N10	26	2.040	0.246	9,214.0
N9	31	1.793	0.231	9,820.9
N8	36	1.562	0.226	10,041.6
N7	41	1.336	0.221	10,272.4
N6	46	1.115	0.218	10,391.9
N5	51	0.897	0.211	10,767.5
N4	56	0.686	0.193	11,759.2
N3	61	0.493	0.165	13,749.2
N2	66	0.328	0.152	14,895.0
N1	71	0.175	0.173	13,142.7
PB	76	0.003	0.000	∅
SOT	80	0.003		

MARCO EJE 10

CON EIAR

F=22,700 Kg (50 kips)

NIVEL	NUDO	DESPLAZAM. (cm)	DIFERENCIA (cm)	RIGIDEZ (ton/m)
AZO	1	1.448	0.127	17,874.0
N14	6	1.321	0.135	16,862.3
N13	11	1.186	0.130	17,523.7
N12	16	1.057	0.119	19,014.4
N11	21	0.937	0.112	20,312.0
N10	26	0.826	0.112	20,312.0
N9	31	0.714	0.099	22,916.3
N8	36	0.615	0.099	22,916.3
N7	41	0.516	0.094	24,154.9
N6	46	0.422	0.086	26,285.5
N5	51	0.335	0.084	27,082.7
N4	56	0.251	0.074	30,816.6
N3	61	0.178	0.061	37,236.9
N2	66	0.117	0.056	40,622.2
N1	71	0.061	0.058	38,856.3
PB	76	0.003	0.000	∅
SOT	80	0.003		

TABLA 4.11

Las rigideces absolutas y relativas tanto para el modelo sin EIAR como para el modelo con EIAR se muestran en las tablas 4.12 y 4.13 respectivamente. De estas tablas se podrá observar el aumento de rigidez que se obtuvo al colocar los EIAR a los marcos A, D, 3, 5, 7 y 10.

Teniendo las rigideces absolutas y las masas correspondientes, se procedió a obtener los periodos para ambas direcciones:

PARA EL MODELO SIN EIAR:

DIRECCION	PERIODO
X (sentido largo)	2.0 seg
Y (sentido corto)	1.6 seg

PARA EL MODELO CON EIAR:

DIRECCION	PERIODO
X (sentido largo)	1.5 seg
Y (sentido corto)	1.4 seg

Como se podrá observar en la figura 4.2, el periodo de 2.0 seg para el modelo sin EIAR está cercano al periodo correspondiente a la aceleración más grande del espectro. Al colocar los EIAR, además de disiparse energía, el periodo se verá reducido a 1.5 seg, alejando del pico del espectro a la estructura, con el consecuente incremento de la seguridad de la misma.

De los datos antes mencionados se demuestra que, efectivamente, al colocar los EIAR se presenta un aumento de rigidez en los marcos

TABLA DE RIGIDECES ABSOLUTAS Y RELATIVAS

MODELO SIN EIAR:

DIRECCION-X		
MARCO EJE	K (RIGIDEZ EFECTIVA) (T_{cr}/α)	%
A sin EIAR	6340.4	23.04
B sin EIAR	7911.2	28.75
C (igual a B)	7911.2	28.75
D sin EIAR	5357.9	19.47
-----		-----
	E=27,520.7	100.00%

DIRECCION-Y		
MARCO EJE	K (RIGIDEZ EFECTIVA) (T_{cr}/α)	%
3 sin EIAR	2003.3	4.84
4 (igual a 8)	3174.8	7.66
5 (igual a 7)	10202.1	24.62
6 sin EIAR	7601.5	18.35
7 sin EIAR	10202.1	24.62
8 sin EIAR	3174.8	7.66
9 (igual a 8)	3174.8	7.66
10 sin EIAR	1899.8	4.59
-----		-----
	E=41,433.2	100.00%

TABLA 4.12

TABLA DE RIGIDECES ABSOLUTAS Y RELATIVAS

MODELO CON EIAR1

MARCO EJE	DIRECCION-X RIGIDEZ EFECTIVA <small>10⁶ / m</small>	%
A con EIAR	11866.2	30.35
B sin EIAR	7911.2	20.23
C (igual a B)	7911.2	20.23
D con	11414.2	29.19
	-----	-----
	E=39,102.8	100.00

MARCO EJE	DIRECCION-Y RIGIDEZ EFECTIVA <small>10⁶ / m</small>	%
3 con EIAR	4523.4	8.0
4 (igual a 8)	3174.8	5.6
5 (igual a 7)	15106.4	26.7
6 sin EIAR	7601.5	13.4
7 con EIAR	15106.4	26.7
8 sin EIAR	3174.8	5.6
9 (igual a 8)	3174.8	5.6
10 con EIAR	4728.6	8.4
	-----	-----
	E=56,590.7	100.0

TABLA 4.13

correspondientes.

Los resultados de los análisis dinámicos con la propuesta final de EIAR muestran resultados satisfactorios. Por ejemplo: los desplazamientos máximos encontrados fueron los siguientes:

DIRECCION	DESPLAZAMIENTO
X (sentido largo)	0.30 m
Y (sentido corto)	0.55 m

que resultan ser mucho menores a los antes reportados.

De todo lo mencionado anteriormente se puede concluir que el sistema de reforzamiento a base de EIAR resulta ser efectivo ya que la estructura se vuelve menos vulnerable ante excitaciones sísmicas violentas eliminando en lo posible los daños estructurales. Esto se logra gracias a que los EIAR disipan energía antes de que se presente otra forma de disipación como es la ductilidad de la estructura, evitando en esta forma la formación de articulaciones plásticas en trabes y columnas que pueden causar la inestabilidad de la misma.

V. - COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

CAPITULO V

COMENTARIOS Y CONCLUSIONES.

El análisis del comportamiento de estructuras con los EIAR que se han desarrollado en esta tesina, constituye en sí mismo un ejemplo de aplicación del conocimiento en una de las ramas más importantes de la ingeniería, que es la dinámica estructural.

Como se mencionó anteriormente, el sistema de disipación de energía para edificios mediante los EIAR resulta ser innovador a nivel mundial. En nuestro país, por ejemplo, no existe actualmente algún edificio que tenga este tipo de dispositivos, o alguno similar, instalado. Sin embargo, ya se han propuesto dos edificios (entre los que se encuentra el estudiado en este trabajo) para que se les implante este sistema como medio de reforzamiento.

Cabe hacer la aclaración que todos los estudios realizados en cuanto a este tema son muy recientes. Varias universidades de los Estados Unidos, como la Universidad de Berkeley en California y la Universidad de Michigan, se han dado a la tarea de estudiar estos dispositivos disipadores de energía. Sin embargo, estos estudios generalmente son a nivel experimentación y poco existe en cuanto a modelación matemática. Es por esto, que en el capítulo III se trató de formular un modelo matemático que en cierta forma explique el comportamiento de una estructura con EIAR.

Es evidente que el hecho de que los EIAR presenten un comportamiento no lineal dificulta, en gran medida, el análisis

estructuras. Al tener que usar programas de análisis inelástico en el plano, como es el DRAIN2D, el trabajo del ingeniero se vuelve ineficiente en cuanto a consumo de tiempo. Considero que es necesario desarrollar programas más eficaces que nos permitan el uso de modelos tridimensionales, para así poder tener un conocimiento más realista de la distribución de esfuerzos y deflexiones que se presentan en los diferentes elementos estructurales (incluyendo al EIAR) y poder tomar en cuenta efectos como el de la torsión.

El hecho de dotar a un edificio cualquiera de un amortiguamiento suplementario con rigidez, le permite ser menos vulnerable a los sismos, al reducirse sensiblemente la respuesta de la estructura a la excitación sísmica. Se puede decir que los EIAR actúan como una "primera línea de defensa" a los sismos, ya que logran disipar una gran cantidad de energía antes de que la estructura se vea afectada, quedando la capacidad de la estructura actual como una reserva de resistencia, o "segunda línea de defensa".

Como se mencionó anteriormente, el sistema de los EIAR puede ser aplicado tanto en estructuras nuevas como en estructuras que necesitan reforzamiento. Una gran ventaja que ofrecen los EIAR en este último caso, es que no es necesario desalojar el edificio durante la colocación de los mismos. Además, su colocación resulta ser mucho más sencilla y rápida que otros métodos de reforzamiento, como es el de añadir muros de cortante a la estructura.

Aunque el sistema de los EIAR aparentemente resulta ser muy eficiente, también tiene ciertas desventajas. Una de ellas es el

hecho de que en las crujeas en donde se colocan los EIAR, los esfuerzos se ven incrementados, tanto en columnas, como en trabes, con las consecuentes necesidades de reforzarlas o aumentar su sección para incrementar su rigidez. Estos esfuerzos obviamente se transmiten a la cimentación, que también será necesario reforzar.

Hay que tomar en cuenta que el sistema de los EIAR no es aplicable para cualquier tipo de estructura. Solo es conveniente implantarlo en edificios flexibles donde se presenten grandes desplazamientos relativos de entrepiso, porque únicamente de esta manera trabajan eficientemente los EIAR disipando energía.

No resta más que mencionar que resulta halagador saber que la ingeniería en México continúa evolucionando a la par de otros países desarrollados. En un país como el nuestro, con zonas de alto grado de sismicidad, se están implantando sistemas innovadores, como es el caso de los EIAR y los llamados aisladores de base, que forman el estado del arte en cuanto a ingeniería estructural se refiere. Todo esto permite a los ingenieros mexicanos realizar mejor su función social de lograr proyectos, que además de seguros, sean económicos.

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA:

- 1.- Ashour Samir A., Hanson Robert D., Elastic Seismic Response of Buildings With Supplemental Damping, Report UNCE 87-1 January 1987, The University of Michigan, Department of Civil Engineering, E.U.A., 1987, p.p. 334.
- 2.- Biggs John M., Introduction to Structural Dynamics, McGraw-Hill Book Company, E.U.A., 1964, p.p. 341.
- 3.- Clough Ray W., Penzien Joseph., Dynamics of Structures, McGraw-Hill Kogakusha, LTD., Japan, 1975, p.p. 634.
- 4.- Fertis Demeter G., Dynamics and Vibration of Structures, John Wiley and Sons, E.U.A., 1973, p.p. 485.
- 5.- Hanson Robert D., Basic Concepts and Potential Applications of Supplemental Mechanical Damping For Improved Earthquake Resistance, National Science Foundation, Grant No. ECE8512726, E.U.A., 1989, p.p. 39-49.
- 6.- Hurty Walter C., Rubinstein Moshe F., Dynamics of Structures, Prentice-Hall, Inc., E.U.A., 1964, p.p. 455.
- 7.- Kanaan Amin E., Powell Graham H., General Purpose Computer Program for Dynamic Analysis of Inelastic Plane Structures, Earthquake Engineering Research Center, College of Engineering, University of California, Berkeley California, E.U.A., 1973, p.p. 153.

8.- Ku Y. H., *Analysis and Control of Nonlinear Systems*, The Ronald Press Company, E.U.A., 1958, p.p. 360.

9.- Mortensen Richard E., *Random Signals and Systems*, John Wiley and Sons, E.U.A., 1987, p.p. 231.

10.- Netushil A., *Theory of Automatic Control*, Mir Publishers Moscow, U.R.S.S., 1973, p.p. 806.

11.- Newland D. E., *Random Vibrations and Spectral Analysis*, Longman Group Limited, Inglaterra, 1975, p.p. 285.

12.- Newmark Nathan M., Rosenblueth Emilio, *Fundamentals of Earthquake Engineering*, Prentice-Hall, Inc., E.U.A., 1971, p.p. 640.

13.- Ogata Katsuhiko, *Ingenieria de Control Moderna*, Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A., México, 1989, p.p. 902.

14.- Scholl Roger E., *Added Damping and Stiffness (ADAS) Structural Elements*, CounterQuake Corporation, E.U.A., 1989, p.p. 9.

15.- Scholl Roger E., *Improve the Earthquake Performance of Structures with Added Damping and Stiffness Elements*, Conferencia presentada en el "Fourth U.S. National Conference on Earthquake Engineering, Palm Springs, California, May 20-24, 1990", E.U.A., 1990, p.p. 10.

16.- Scholl Roger E., Martinez Romero Enrique, Earthquake Retrofit Design of a 12-Story Building Using Structural Dampers, Proceedings of the Second International Engineering and Technology Conference, Mexico, agosto 20-22, 1986, p.p. 5.

17.- Siljak Dragoslav, Nonlinear Systems, The Parameter Analysis and Design, John Wiley and Sons Inc., E.U.A. 1969, p.p. 618.

18.- Su Yung-Feng, Hanson Robert D., Comparison of Effective Supplemental Damping Equivalent Viscous and Hysteretic, National Science Foundation, Grant Nos. ECE8512726 and CES8821735, E.U.A., 1989, p.p. 10.

19.- Vidyasagar M., Nonlinear Systems Analysis, Prentice Hall Inc., E.U.A., 1978, p.p. 302.

20.- Whittaker A., Bertero V., Alonso J., Thompson C., Earthquake Simulator Testing of Steel Plate Added Damping and Stiffness Elements, Report No. UCB/EERC-89/02 January 1989, Earthquake Engineering Research Center, College of Engineering, University of California at Berkeley, E.U.A., 1989, p.p. 208.