1 6
24

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ingeniería

Matemáticas Aplicables a la Ingeniería Petrolera

T E S I S

Que para obtener el título de

INGENIERO PETROLERO

P r e s e n t a:

Pedro Pablo Espinosa Hernández

México, D. F. 1990

CAPITULO I

VECTORES

I.1.- VECTORES Y ESCALARES

Un **vector** es una **magnitud** que tiene cantidad y dirección.

Hay cantidades en física que se caracterizan tanto por su magnitud como por su dirección, tales como el desplazamiento, la velocidad la fuerza y la aceleración. para describir tales cantidades se introduce el concepto de vector, que es un segmento de recta dirigido $\overline{PQ}$ desde un punto P llamado origen hasta un punto Q llamado extremo. Los vectores se denotan con letras mayúsculas o con una flecha encima. La magnitud o longitud del vector se denota entonces por $|\overline{PQ}|$ o $|\bar{A}|$.

Hay otras cantidades físicas que se caracterizan solamente por la magnitud, tales como la masa, longitud y temperatura. Tales cantidades se suelen llamar escalares para distinguirlas de las vectoriales. pero ha de tenerse en cuenta que aparte de las unidades (metros, grados, etc.) no són más que números reales. Se las puede denotar como letras corrientes como siempre.

I.2.- ALGEBRA VECTORIAL

Las operaciones de adición, sustracción y multiplicación ordinarias se pueden generalizar al àlgebra vectorial mediante definiciones adecuadas. Las siguientes definiciones son fundamentales.

1.- Dos vectores A y B son iguales si tienen igual magnitud y dirección. Así, A = B como se muestra en la figura (1).

2.- El vector que tiene dirección opuesta a la del vector A, pero de igual magnitud que A, se denota por -A como se muestra en la figura (2).

3.- La suma o resultante de los vectores A y B de la figura (3) es un vector $\bar{C}$, construido haciendo coincidir el origen de B con los extremos de $\bar{A}$ y uniendo luego el origen de $\bar{A}$ con el extremo de $\bar{B}$ figura (4). La suma $\bar{C}$ se escribe $\bar{C} = \bar{A} + \bar{B}$. Esta definición es equivalente a la regla del paralelogramo para la adición vectorial, como se observa en la figura (5).

Son inmediatas las generalizaciones a sumas de màs de dos vectores. Por ejemplo, en las siguientes figuras (6) y (7) se ve como seobtiene la suma o resultante $\bar{E}$ de los vectores A, B, C, y D.

4.- La diferencia de los vectores $\bar{A}$ y $\bar{B}$ representada por A-B es el vector $\bar{C}$, que sumado al $\bar{B}$ da

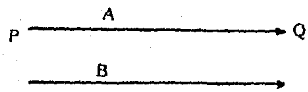


FIGURA (1)

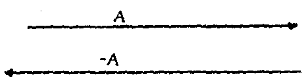


FIGURA (2)

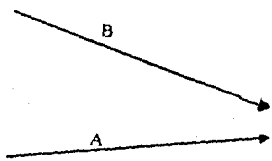


FIGURA (3)

C = A + B

FIGURA (4)

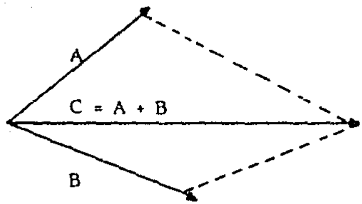


FIGURA (5)

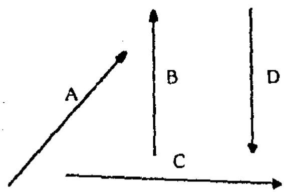


FIGURA (6)

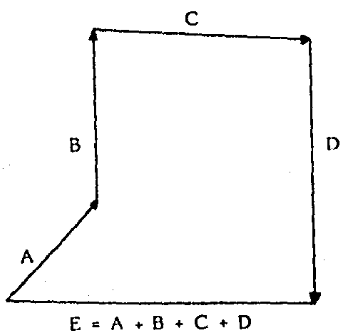


FIGURA (7)

el vector $\bar{A}$. En forma equivalente se puede definir $\bar{A}-\bar{B}$ como $\bar{A}+(-\bar{B})$. Si $\bar{A} = \bar{B}$, entonces $\bar{A}-\bar{B}$ se define como el vector nulo o cero y se representa por el símbolo 0. Este vector tiene magnitud cero, pero su dirección no está definida.

5.- La multiplicación de un vector $\bar{A}$ por un escalar m da un vector $m\bar{A}$ cuya magnitud es m veces la del $|A|$ y cuya dirección es la misma o la opuesta de $\bar{A}$, según que m sea positivo o negativo. Si $m = 0$, $m\bar{A} = 0$ es el vector nulo.

LEYES DEL ALGEBRA VECTORIAL

Si $\bar{A}$, $\bar{B}$, y $\bar{C}$ son vectores y m y n escalares, entonces:

1.- $\bar{A} + \bar{B} = \bar{B} + \bar{A}$	Ley conmutativa de la adición.
2.- $\bar{A} + (\bar{B} + \bar{C}) = (\bar{A} + \bar{B}) + \bar{C}$	Ley asociativa de la adición.
3.- $m(n\bar{A}) = (nm)\bar{A} = n(m\bar{A})$	Ley asociativa de la multiplicación.
4.- $(m + n)\bar{A} = m\bar{A} + n\bar{A}$	Ley distributiva.
5.- $m(\bar{A} + \bar{B}) = m\bar{A} + m\bar{B}$	Ley distributiva.

VECTOR DE POSICION

Sea el punto A en el espacio de tres dimensiones, cuyas coordenadas son (a_1, a_2, a_3); se llama vector de posición de este punto al representado por el segmento dirigido que va del origen del sistema a dicho punto.

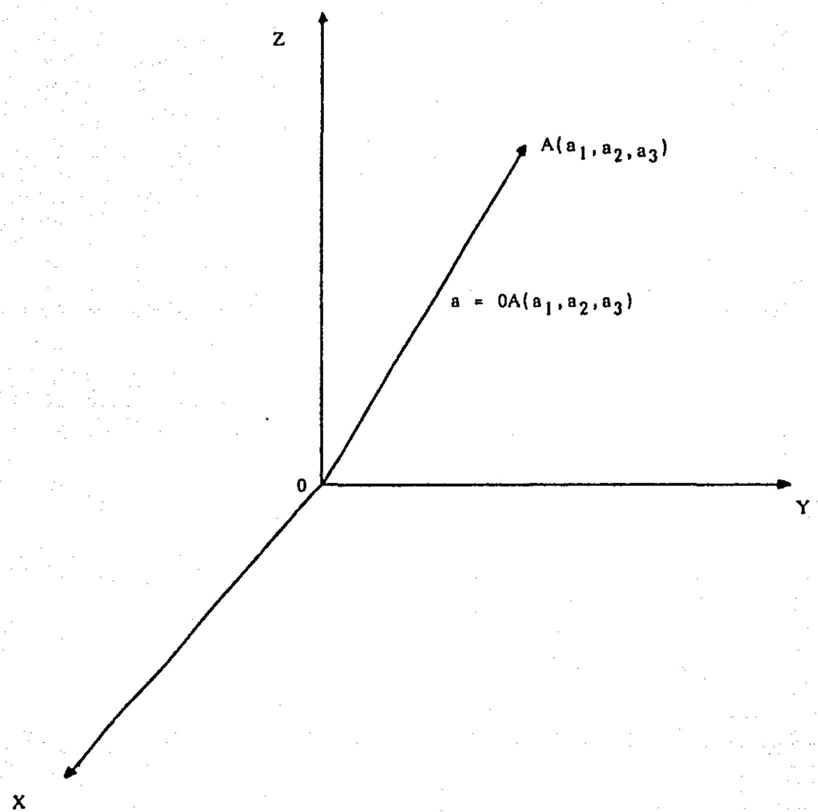
Designando por $\bar{a}$ al vector de posición del punto A sus componentes son: $\bar{a} = \overline{0A} = (a_1 - 0,\ a_2 - 0,\ a_3 - 0) = (a_1, a_2, a_3)$; entonces como se ve, las componentes del vector de posición son siempre iguales a las coordenadas del punto, como se observa en la figura (8).

VECTORES UNITARIOS

Se dice que un vector es unitario cuando su módulo es igual a la unidad. Para cualquier vector $\bar{a} \neq 0$; siempre es posible determinar el vector unitario en su misma dirección.

Por ejemplo: dado un vector en el espacio de tres dimensiones $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ el vector unitario en la misma dirección está dado por:

$$\bar{a}_U = \left(\frac{a_1}{|\bar{a}|} ,\ \frac{a_2}{|\bar{a}|} ,\ \frac{a_3}{|\bar{a}|} \right) = \frac{1}{|\bar{a}|} (a_1, a_2, a_3) \quad \ldots(1)$$



VECTOR DE POSICION DEL PUNTO A

FIGURA (8)

Como se puede observar, $\bar{a}_u$ tiene la misma dirección de $\bar{a}$ ya que :

$$\bar{a}_u = \frac{1}{|\bar{a}|}\,\bar{a} \quad \text{y} \quad \frac{1}{|\bar{a}|}$$ es un escalar mayor que cero.

VECTORES UNITARIOS $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ Y FORMA TRINOMICA DE UN VECTOR

En algunas ocasiones es conveniente expresar un vector $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ en términos de los vectores unitarios i , j , k , como se muestra en la siguiente figura (9), estos vectores tienen la dirección de los ejes coordenados y su módulo es igual a uno.

En términos de sus componentes, los vectores unitarios quedan expresados como:

$$\bar{i} = (1,\ 0,\ 0)$$
$$\bar{j} = (0,\ 1,\ 0)$$
$$\bar{k} = (0,\ 0,\ 1) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

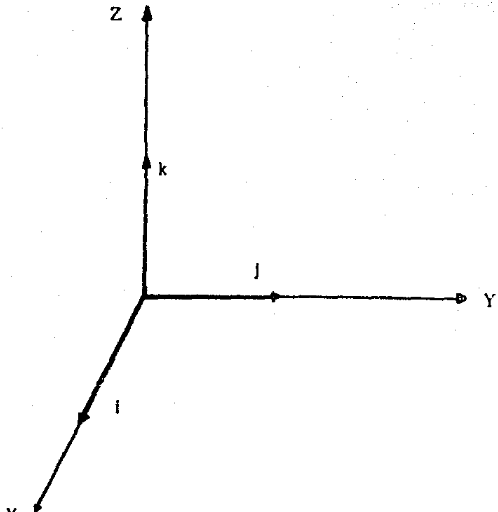
Ahora bien, el vector $\bar{a}$ puede expresarse como:

$$\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

La cual define al vector $\bar{a}$ en la llamada forma trinómica.

ANGULOS Y COSENOS DIRECTORES DE UN VECTOR

Para describir la dirección de un vector $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ usualmente se hace considerando tres ángulos



VECTORES UNITARIOS i, j, k

FIGURA (9)

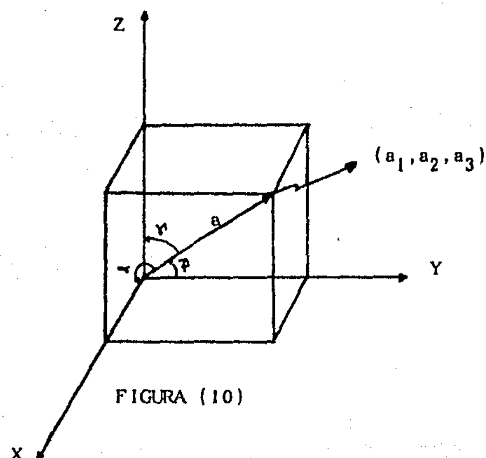


FIGURA (10)

α, β, y ν determinados por el vector $\bar{a}$ y la parte positiva de los ejes X,Y, y Z como se observa en la figura (10).

Algunas veces es màs conveniente trabajar con los cosenos de esos ángulos, pues son proporcionales a sus componentes. En efecto, se tiene que:

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{|\bar{a}|} \quad , \quad \cos \beta = \frac{a_2}{|\bar{a}|} \quad , \quad \cos \nu = \frac{a_3}{|\bar{a}|} \quad .(4)$$

Donde $\bar{a}$ es el módulo o magnitud de $\bar{a}$, es decir :

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

A los tres números $\cos \alpha$, $\cos \beta$, y $\cos \nu$ se les conoce como cosenos directores. Obviamente si se conocen los cosenos directores y el módulo de $|\bar{a}|$, se pueden calcular sus componentes (a_1, a_2, a_3) despejandolas de las ecuaciones anteriores.

Los cosenos directores de un vector no pueden ser arbitrarios; y su relación se puede establecer como sigue:

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 \quad ....(5)$$

Que es la expresión que relaciona a los cosenos directores del vector $\bar{a}$.

I.3.- PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES

El producto escalar de dos vectores en el espacio de n dimensiones $\bar{a} = (a_1, a_2, ..a_n)$ y $\bar{b} = (b_1, b_2, ..b_n)$ denotado por $\bar{a} \cdot \bar{b}$, que se lee $\bar{a}$ punto $\bar{b}$ se define como :

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |a| \; |b| \cos \alpha \qquad 0 \leq \alpha \leq 180°$$

o bién :

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \quad \ldots\ldots\ldots(6)$$

El resultado del producto escalar de dos vectores es precisamente un escalar (número real).

Al producto escalar también se le conoce como producto interno o producto punto.

Propiedades del producto escalar de dos vectores

Dados los vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ en el espacio de n dimensiones y el escalar λ . el producto escalar tiene las siguientes propiedades:

1.- $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$ Propiedad conmutativa.
2.- $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$ Propiedad distributiva.
3.- $(\lambda \bar{a}) \cdot \bar{b} = \lambda \, (\bar{a} \cdot \bar{b})$, $\lambda \in R$
4.- $\bar{a} \cdot \bar{a} > 0$ si $\bar{a} \neq \bar{0}$

I.4.- PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES

Además del producto escalar de dos vectores, cuyo resultado es un escalar, hay otro producto entre vectores que es particularmente útil en las aplicaciones del análisis vectorial. A esta operación se le llama el producto vectorial, y se le aplica a dos vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ en el espacio de tres dimensiones, para obtener un nuevo vector designado por $\bar{a} \times \bar{b}$.

Sean $\bar{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ y $\bar{b} = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ dos vectores en el espacio de tres dimensiones. El producto vectorial $\bar{a} \times \bar{b}$, que se lee "a cruz b", està definido por el vector:

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}|\ |\bar{b}| \text{ sen } \alpha \qquad 0° \le \alpha \le 180°$$

o bién ....(7)

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k$$

Una representación más fácil de recordar el producto vectorial $\bar{a} \times \bar{b}$ es por medio de un determinante de tercer orden

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k \quad \text{...........(8)}$$

En el producto vectorial $\bar{a} \times \bar{b}$ si $\bar{a}$ ó $\bar{b}$, o ambos son igual al vector $\bar{0} = (0,0,0)$ entonces:

$$\bar{a} \times \bar{b} = 0i + 0j + 0k = (0,0,0) = \bar{0}$$

Propiedades del producto vectorial

Si λ es un escalar, y $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son dos vectores en el espacio de tres dimensiones, entonces se cumple que:

1.- $\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$

2.- $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b}) + (\bar{a} \times \bar{c})$

Ley distributiva por la izquierda

$(\bar{b} + \bar{c}) \times \bar{a} = (\bar{b} \times \bar{a}) + (\bar{c} \times \bar{a})$

Ley distributiva por la derecha

3.- $\lambda(\bar{a} \times \bar{b}) = (\lambda\bar{a}) \times \bar{b}$

I.5.- PROBLEMAS RESUELTOS

a) Encontrar el vector unitario en la misma dirección del vector : a = (2,-3,7)

Solución :

$$|\bar{a}| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (7)^2} = \sqrt{4 + 9 + 49}$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{62}$$

Por lo tanto el vector unitario es:

$$\bar{a}_u = \left(\frac{2}{\sqrt{62}} , - \frac{3}{\sqrt{62}} , \frac{7}{\sqrt{62}} \right)$$

b) Encontrar el ángulo y cosenos directores del siguiente vector:

$$\bar{a} = (-6,2,3)$$

Solución; el módulo del vector es:

$$|\bar{a}| = \sqrt{(-6)^2 + (2)^2 + (3)^2} = 7$$

Por lo tanto sus cosenos directores son :

$$\cos \alpha = -\frac{6}{7}, \quad \cos \beta = -\frac{2}{7}, \quad \cos \gamma = \frac{3}{7}$$

Y sus ángulos directores :

$$\alpha = \text{ang cos} -\left(\frac{6}{7}\right) = 149° , \quad \beta = \text{ang cos} \left(\frac{2}{7}\right) = 73°24'$$

$$\gamma = \text{ang cos} \left(\frac{3}{7}\right) = 64°37'$$

$$\alpha = 149° \qquad \beta = 73°24' \qquad \gamma = 64°37'$$

c) Sean los vectores $\bar{a} = (2,1,1)$ y $\bar{b} = (3,-1,-2)$

Encontrar $\bar{a} \cdot \bar{b}$.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (2,1,1) \cdot (3,-1,-2) = 6-1-2 = 3$$

d) encontrar el producto vectorial del ejemplo anterior .

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (-2+1)i + (3+4)j + (-2-3)k$$

$$= -i + 7j - 5k$$

CAPITULO II

FUNCIONES VECTORIALES DE UNA VARIABLE

Si para cada valor de una variable t en un intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$
existe un valor de un vector "u" en el espacio, se dice que "u" está dado como una función vectorial de "t" en ese intervalo .
Por ejemplo, se puede tener :

$$\bar{u} = t\bar{a} + (1 - t)\bar{b} \qquad 0 \leq t \leq 1 \quad ....(9)$$

donde $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son vectores dados o puede tenerse:

$$u = t^2\bar{i} + t^2\bar{j} + \text{sen } t\bar{k} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad ......(10)$$

donde $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ forman una tercia de vectores unitarios perpendiculares entre si como en los casos anteriores.
Si tal función está dada, puede emplearse una notación tal como: $u = F(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$,
o, más simplemente,

$$u = u(t) , \qquad t_1 \leq t \leq t_2$$

Si se elige un sistema de coordenadas cartesianas en el espacio entonces el vector "u" puede siempre expresarse en la forma:

$$\bar{u} = u_x\bar{i} + u_y\bar{j} + u_z\bar{k} \qquad ....(11)$$

donde u_x, u_y, u_z son las componentes correspondientes. Estas componentes serán dependientes de t se supone que los ejes son fijos o independientes de t. Puede entonces escribirse:

$$u_u = f(t), \quad u_y = g(t), \quad u_z = h(t), \qquad t_1 \le t \le t_2 \ldots\ldots (12)$$

Luego, una función vectorial de t determina tres funciones escalares de "t". Recíprocamente, si f(t), g(t), y h(t) son tres funciones escalares de "t" definidas para $t_1 \le t \le t_2$, entonces el vector:

$$u = f(t)i + g(t)j + h(t)k \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

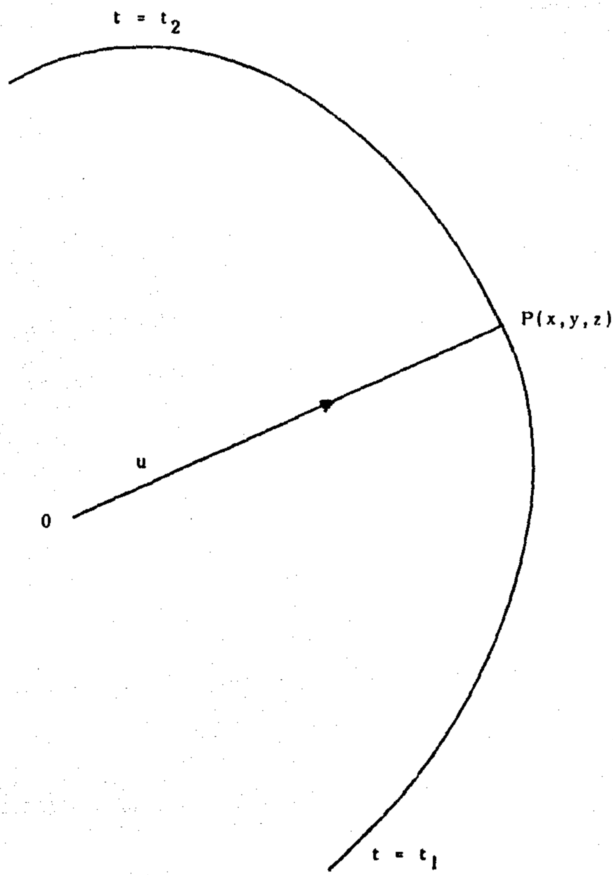
es una función vectorial de "t".

Una función vectorial de "t" puede representarse gráficamente como una curva en el espacio. Así, sea "O" un punto fijo de referencia y sea $\bar{P}$ elegido de manera que $\overline{OP} = u$. Conforme varía "t", P trazará una curva, como se muestra en la figura (11).

Si se eligen los ejes con origen en 0 y u se expresa como en la anterior ecuación, entonces las ecuaciones:

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t).$$

son simplemente ecuaciones paramétricas para la curva trazada por P, el parámetro t puede interpretarse como tiempo.



GRAFICA DE UNA FUNCION VECTORIAL

FIGURA (II)

Aun cuando esta representación de la función vectorial resulta muy útil, puede también presentarse una función vectorial de otra forma; por ejemplo como el vector de velocidad del punto móvil P .

La función vectorial u = u(t) se dice que tiene un límite v cuando t tiende a to :

$$\lim_{t \to to} u(t) = v$$

si

$$\lim_{t \to to} |u(t) - v| = 0$$

es decir, la diferencia entre u(t) y v puede hacerse arbitrariamente pequeña (como vector) para t suficientemente cercana a **to**. La función **u = u(t)** se dice que es continua para el valor **to** si se tiene

$$\lim_{t \to to} u(t) = u(to)$$

De donde se prueba que **u(t)** es continua para un valor **to** si, y sólo si sus componentes u_x, u_y, u_z, son continuas en **to**. De aquí se desprende que si $u_1(t)$, $u_2(t)$ son dos funciones vectoriales de **t**, ambas definidas y continuas para $t_1 \le t \le t_2$, entonces las funciones:

$$u_1(t) + u_2(t)\ ,\quad u_1(t) \cdot u_2(t)\ ,\quad u_1(t) \times u_2(t)\ ,$$

son funciones continuas de **t** para ese intervalo .

II.1.- DERIVADA DE UNA FUNCION VECTORIAL

La derivada de una función vectorial $u = u(t)$ se define como el límite :

$$\frac{du}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} \quad ....(14)$$

siempre que tal límite exista . Esto se ilustra en la figura (12).

donde u esta representado por el vector $\overline{OP}$, siendo O fijo. El numerador $u(t + \Delta t) - u(t) = \Delta u$ representa al vector $\overline{PP'}$ que es el desplazamiento del punto móvil P en el intervalo t a $t + \Delta t$. La cantidad Δu es un vector y $\Delta u/\Delta t$ es el vector Δu por escalar $1/\Delta t$. Luego, $\Delta u/\Delta t$ es un vector y su límite es un vector du/dt .

En función de sus componentes se tiene :

$$u(t + \Delta t) - u(t) = (f(t + \Delta t) - f(t))i + (g(t + \Delta t) - g(t))j + (h(t + \Delta t) - h(t))k \quad ......(15)$$

Luego, dividiendo por Δt y haciendo que Δt tienda a cero, se encuentra :

$$\frac{du}{dt} = f'(t)i + g'(t)j + h'(t)k = \frac{du_x}{dt} i + \frac{du_y}{dt} j + \frac{du_z}{dt} k \quad ....(16)$$

o sea que, al diferenciar una función vectorial se diferencia cada componente separadamente .

Si se define la tangente a una curva como la

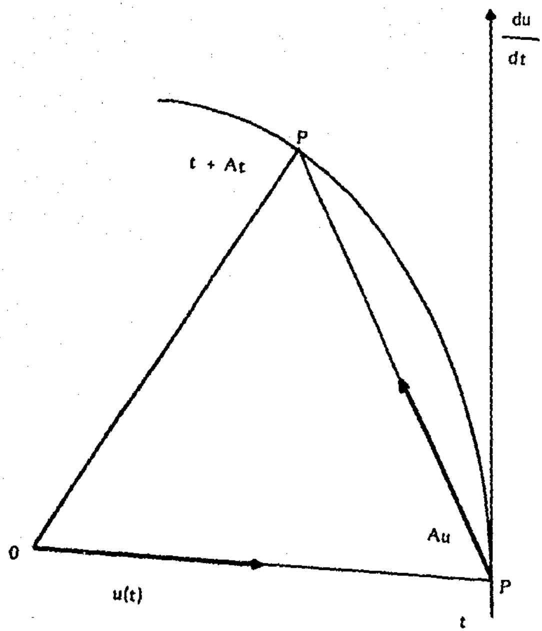


FIGURA (12)

posición límite de una secante (si existe el límite), se puede concluir que. excepto cuando **du/dt** = 0, el vector **du/dt** representa la tangente a la curva trazada por P en el punto P, como se mostro en la figura anterior . Cuando du/dt = 0, puede ser posible obtener el vector tangente por diferenciación repetida .

Puede demostrarse, que si **s** es la distancia recorrida por P desde $t = t_1$ hasta el tiempo t, entonces :

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2 + h'(t)^2}$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \qquad \ldots.(17)$$

o sea que;

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Para curvas en el plano **xy** , **dz** = 0

Así pues, si $u = \overline{OP}$ es el vector de posición del punto móvil P, entonces el vector $v = (d/dt)\overline{OP}$ es tangente a la curva trazada por P y tiene en cada punto una magnitud.

$$|v| = \left|\frac{du}{dt}\right| = \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2 + h'(t)^2} = \frac{ds}{dt} \qquad \ldots.(18)$$

Se concluye que v es precisamente el vector de velocidad del punto móvil P; ya que v es tangente a la trayectoria, tiene la magnitud $v = ds/dt$ (la "velocidad") y, claramente, apunta en la dirección del movimiento . Se tiene pues, la regla;

$$\frac{d}{dt}\overline{OP} = \text{velocidad de } P \text{ ,}$$

cuando 0 es un punto de referencia fijo .

Hay ciertos vectores que son constantes y no tienen variación alguna. Sin embargo, en ciertas cuestiones físicas nos interesan magnitudes vectoriales que cambian con la posición o con el tiempo: por ejemplo, la velocidad de una particula v puede cambiar con el tiempo t, o la intensidad E de un campo eléctrico puede depender de la abscisa x. Tal situación es la del vector análogo a una variable númerica dependiente y que es función de otra variable escalar x, que se representa a menudo por $y = y(x)$. De forma parecida, si un vector F depende de una variable escalar u, esta relación se puede expresar por $F = F(u)$, y esto nos abre el concepto de diferenciación con respecto a u.

La definición de diferenciación respecto de la variable escalar independiente se puede explicar observando la figura (13) en la que :

$$\overline{OP} = F(u) \quad y \quad \overline{OQ} = F(u + \delta u)$$

siendo δu un pequeño incremento de u .

Por definición de sustracción vectorial, y como

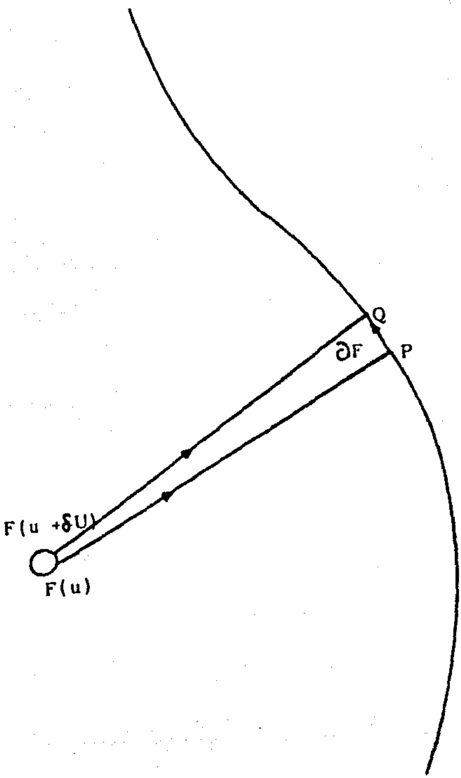


FIGURA (13)

$\delta u \to 0$, de $PQ = \delta F(u + \delta u) - F(u)$ se deduce que

$$\frac{\delta F}{\delta u} = \frac{F(u + \delta u) - F(u)}{\delta u} \qquad \text{.............(19)}$$

tiende a un valor limite expresado por dF/du, que llamamos "derivada de F respecto a u".

$$\frac{dF}{du} = \lim_{\delta u \to 0} \frac{F(u + \delta u) - F(u)}{\delta u} \qquad \text{.............(20)}$$

Por ser PQ una cuerda de la curva descrita por el extremo P de F, está claro que, si $\delta u \to 0$, la dirección de PQ tenderá a la tangente en P, y de aqui que la diferencia de dF/du sea la de la tangente a la curva en P.

Ejemplo; Sea $u = r \cos(wt)i + r \operatorname{sen}(wt)j$, siendo r y w constantes. Luego, el punto P se mueve según las ecuaciones:

$$x = r \cos(wt) \quad , \quad y = r \operatorname{sen}(wt)$$

que representan el circulo $x^2 + y^2 = r^2$ en el plano xy.

El ángulo polar θ, de P para el tiempo t es:

$$\theta = wt$$

de manera que P tiene una velocidad ángular: $\dfrac{d\theta}{dt} = w$

el vector de velocidad es:

$$v = \frac{du}{dt} = \frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j = -rw \operatorname{sen}(wt)i + rw \cos(wt)j$$

La velocidad es :

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{r^2 w^2 \ sen^2(wt) + r^2 w^2 \cos^2(wt)} = rw$$

Siempre que $w \geq 0$.

Propiedades de la derivada vectorial

$$\frac{d}{dt}(u \times v) = u \times \frac{dv}{dt} + \frac{du}{dt} \times v$$

$$\frac{d}{dt}(fu) = f\frac{du}{dt} + \frac{df}{dt}u$$

$$\frac{da}{dt} = 0$$

Que incluye casos especiales , como las reglas :

$$\frac{d}{dt}(a \cdot v) = a \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(a \times v) = a \times \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(cu) = c\frac{du}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(fa) = \frac{df}{dt}a$$

Donde :

a : vector constante .

c : escalar constante .

II.2.- INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DERIVADA VECTORIAL

Si $r = \widetilde{OP}$, donde O es un origen fijo y P un punto cualquiera, entonces $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$, siendo x,y,z las coordenadas cartesianas ya conocidas en tres dimensiones, como indica la figura (14). Si $r = r(u)$, P deberá describir una curva cualquiera obtenida al recibir u todos sus posibles valores, cuya ecuación vectorial es :

$$ix + jy + kz = ix(u) + jy(u) + kz(u) \ ,$$

expresión equivalente a $x = x(u)$, $y = y(u)$, $z = z(u)$, que representa la ecuación cartesiana en forma paramétrica. Como ya vimos anteriormente, todo vector dr/du será paralelo a la tangente en el punto a que se refiere; es decir, la tangente será paralela al vector $i(dx/du) + j(dy/du) + k(dz/du)$.

Supongamos ahora que $u = s$, la longitud de arco de curva medida apartir de un punto fijo de la misma, según indica la figura (14). Entonces dr/ds es paralelo en P a la tangente en este punto, y además:

$$|dr/ds| = \left[(dx/ds)^2 + (dy/ds)^2 + (dz/ds)^2\right]^{1/2} \quad ....(21)$$

por ser $dr/ds = i(dx/ds) + j(dy/ds) + k(dz/ds)$,

por cumplir un elemento de curva δs,

$$(\delta s)^2 = (\delta x)^2 + (\delta y)^2 + (\delta z)^2,$$

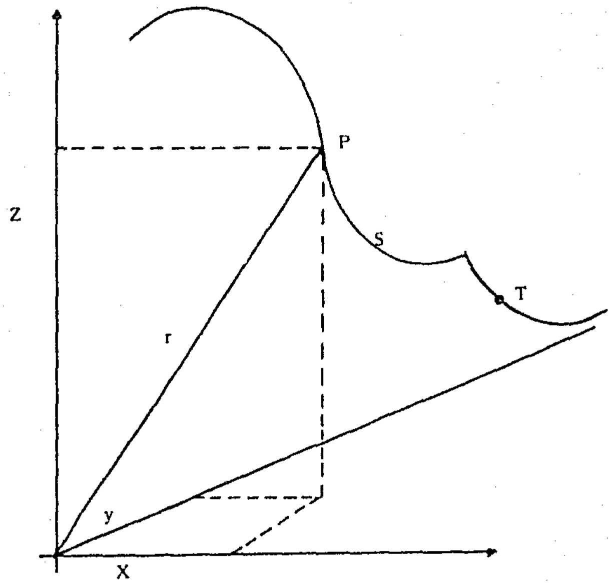


FIGURA (14)

$$(dx/ds)^2 + (dy/ds)^2 + (dz/ds)^2 = 1 \qquad ...(22)$$

por lo que la ecuación (21) da $|dr/ds| = 1$. De donde dr/ds, en cualquier punto es un vector unitario a lo largo de la tangente en ese punto. Si denominamos este vector unitario tangente por T, se tiene que $T \cdot T = 1$, $T \cdot (dT/ds) = 0$, y, por tanto, $dT/ds= (d^2r/ds^2)$ es perpendicular a T.

Si N es un vector unitario paralelo a dT/ds (y perpendicular, por lo tanto, a T), podemos escribir $dT/ds = N/\rho$, donde el escalar ρ es el radio de curvatura; N se llama normal principal. De manera clara se aprecia que $\rho = |dT/ds|^{-1}$.

Ejemplo: Encuéntrese el vector unitario tangente en el punto (3,0,3) de la curva cuyas ecuaciones paramétricas cartesianas son

$$x = 3u, \quad y = u^2 - u, \quad z = 2u^2 + 1,$$

Solución: Si $r = ix + jy + kz$, el vector unitario tangente es

$$\frac{(dr/du)}{|dr/du|}$$

Ahora bien: $r = 3ui + (u^2 - u)j + (2u^2 + 1)k$

de donde: $dr/du = 3i + (2u - 1)j + 4uk$

El punto (3,0,3) corresponde a $u = 1$, y aquí

$$dr/du = 3i + j + 4k$$

y

$$|dr/du| = (3^2 + 1 + 4^2)^{1/2} = \sqrt{26}$$

Por tanto el vector buscado es $Tu = 26^{1/2}(3i + j + 4k)$.

II.3.- DERIVADA DIRECCIONAL

Sea $F(x,y,z)$ dada en un dominio D, en el espacio. Para calcular la derivada parcial $\partial F/\partial x$ en un punto (x,y,z) de este dominio, se considera la rapidez con que se verifica el cambio ΔF en la función F, de (x,y,z) a $(x + \Delta x, y, z)$, con respecto al cambio Δx en x. Luego, sólo se consideran los valores de F a lo largo de una línea paralela al eje x. En forma similar, $\partial F/\partial y$ y $\partial F/\partial z$ presuponen la consideración del cambio de F a lo largo de paralelas a los ejes y y z, respectivamente. Por lo tanto, se define la derivada direccional de F en una dirección dada, como el límite de la relación :

$$\frac{\Delta F}{\Delta s}$$

del cambio en F a la distancia Δs de translado en una dirección dada , cuando Δs tiende a cero .

Sea la dirección en cuestión dada por un vector no cero v . La derivada direccional de F en la dirección v en el punto (x,y,z) se denota por $\nabla_v F(x,y,z)$ o , más concisamente , por $\nabla_v F$. Un desplazamiento de (x,y,z) en la dirección v corresponde con cambios Δx, Δy, Δz, proporcionales a las componentes V_x , V_y , V_z ; esto es ,

$$\Delta x = hv_x, \quad \Delta y = hv_y, \quad \Delta z = hv_z$$

donde h es un escalar positivo . El desplazamiento es pues , simplemente el vector hv y su magnitud Δs es $h|v|$. La derivada direccional es , por definición , el límite :

$$\nabla_v F = \lim_{h \to 0} \frac{F(x + hv_x, y + hv_y, z + hv_z) - F(x,y,z)}{h|v|} \quad \ldots\ldots(23)$$

Si F tiene una diferencial total en (x,y,z) , entonces ,

$$\Delta F = F(x + hv_x, y + hv_y, z + hv_z) - F(x,y,z)$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x} hv_x + \frac{\partial F}{\partial y} hv_y + \frac{\partial F}{\partial z} hv_z + \epsilon_1 hv_x + \epsilon_2 hv_y + \epsilon_3 hv_z$$

De donde

$$\frac{\Delta F}{h|v|} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{V_x}{|v|} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{V_y}{|v|} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{V_z}{|v|} + \epsilon_1 \frac{V_x}{|v|} + \epsilon_2 \frac{V_y}{|v|} + \epsilon_3 \frac{V_x}{|v|}$$

Si h tiende a cero , los últimos tres términos tienden a cero , y el primer miembro a $\nabla_v F$. Se tiene entonces la ecuación :

$$\nabla_v F = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{V_x}{|v|} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{V_y}{|v|} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{V_z}{|v|} \quad \ldots\ldots(24)$$

Ahora bien, $v_x/|V|$, $v_y/|V|$, $v_z/|V|$, son simplemente las componentes de un vector unitario u en la dirección de v y los cosenos directores de v son :

$$u = \frac{1}{|v|}(v_x i + v_y j + v_z k) = \cos\alpha i + \cos\beta j + \cos\gamma k$$

En consecuencia, la ecuación (24) puede expresarse en la siguiente forma .

$$\nabla_v F = \frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma \quad \ldots(25)$$

Se tiene así la regla fundamental :

la derivada direccional de una función $F(x,y,z)$ está dada por :

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma ,$$

donde , α , β , γ , son los ángulos directores de la dirección elegida .

El segundo miembro de (25) puede interpretarse como el producto escalar del vector

$$\text{grad } F = \nabla F = (\partial F/\partial x)i + (\partial F/\partial y)j + (\partial F/\partial z)K .$$

y el vector unitario **u** . Así, la derivada direccional es igual a la componente degrad F en la dirección de v.

$$\nabla_v F = \nabla F \cdot \frac{v}{|v|} = \text{comp}_v \nabla F . \quad \ldots\ldots\ldots(26)$$

Siendo esta la razón por la que se usa la notación $\nabla_v F$ para la derivada direccional . En el caso especial en que $v = i$, en el que la derivada direccional se está calculando en la dirección x, se escribe :

$$\nabla_v F = \nabla_x F = \text{comp}_x \nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots, (27)$$

y, similarmente, las derivadas direccionales en las direcciones y y z :

$$\nabla_y F = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad \nabla_z F = \frac{\partial F}{\partial z}$$

Existen otras situaciones en las que se usa la notación de derivada parcial para la derivada direccional. Una, muy comun, es aquélla en la que se calcula la derivada direccional en un punto (x,y,z) de una superficie S a lo largo de una dirección dada, normal a S . Si n es un vector normal unitario en la dirección elegida, se puede escribir :

$$\nabla_n F = \nabla F \cdot n = \frac{\partial F}{\partial n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

La ecuación (26) arroja más información con respecto al vector ∇F = grad F . Ya que de (26) se concluye que la derivada direccional en un punto dado tiene un máximo cuando se efectúa en la dirección de ∇F ; este valor máximo es simplemente :

$$|\nabla F| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}. \quad \ldots\ldots\ldots (29)$$

Así que el vector gradiente apunta en la dirección en que F aumenta con máxima rapidez y su longitud es la rapidéz de crecimiento en esa dirección . Si v forma un ángulo θ con ∇F, entonces la derivada direccional en la dirección de v es :

$$\nabla_v F = |\nabla F| \cos \theta \qquad \ldots\ldots\ldots(30)$$

Luego, si v es tangente a una superficie de nivel:

$$F(x,y,z) = \text{constante} ,$$

en (x,y,z) , entonces $\nabla_v F = 0$; puesto que ∇F es normal a esa superficie de nivel .

A veces se hace referencia a una "derivada direccional a lo largo de una curva". Por esto se entiende la derivada direccional a lo largo de una dirección tangente a la curva . Sea una curva dada en función a la longitud de arco como parámetro :

$$x = f(s) , \quad y = g(s) , \quad z = h(s) ,$$

y sea la dirección elegida, la de aumento de s. El vector:

$$u = \frac{dx}{ds} i + \frac{dy}{ds} j + \frac{dz}{ds} k$$

es, pues, tangente a la curva y tiene longitud 1.

Luego , la derivada direccional a lo largo de la curva es

$$\nabla_v F = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{ds} = \frac{dF}{ds} \qquad \ldots.(31)$$

esto es, la rapidez de cambio de F con respecto a la longitud de arco sobre la curva .

El significado de la derivada direccional puede aclararse si se visualiza el siguiente experimento :

Un viajero en un globo lleva consigo un termómetro y, a intervalos, anota la temperatura . Si su lectura en una posición A es de 42° y en la posición B es de 44° , habrá de estimar que la derivada direccional de la temperatura en la dirección $\overline{AB}$ es positiva y tiene un valor de aproximadamente 2° + d, donde d es la distancia. $|\overline{AB}|$; si $|\overline{AB}|$ = 5 000 *m*, el cálculo sería 0.0004° por metro . Si continúa viajando en la misma dirección, sería de esperarse que la temperatura siguiera ascendiendo al mismo ritmo . Si el globo se mueve sobre una trayectoria curva con una velocidad constante conocida, el viajero puede calcular la derivada direccional a lo largo de la trayectoria sin asomarse fuera del globo .

La discución anterior se ha dado para tres dimensiones . Puede reducirse a dos dimensiones sin dificultad . Así, pues, se considera una función F(x,y) y su rapidez de cambio a lo largo de una dirección dada **v** en el plano xy . Si **v** forma un ángulo α con el eje positivo x, puede escribirse :

$$\nabla vF = \nabla_{\alpha} F = \frac{\partial F}{\partial x} \cos \alpha \;+\; \frac{\partial F}{\partial y} \operatorname{sen} \alpha \;;$$

ya que **v** tiene los cosenos directores, cos α y cos β =

= cos (1/2π - α) = sen α . Nuevamente, la derivada direccional es la componente de:

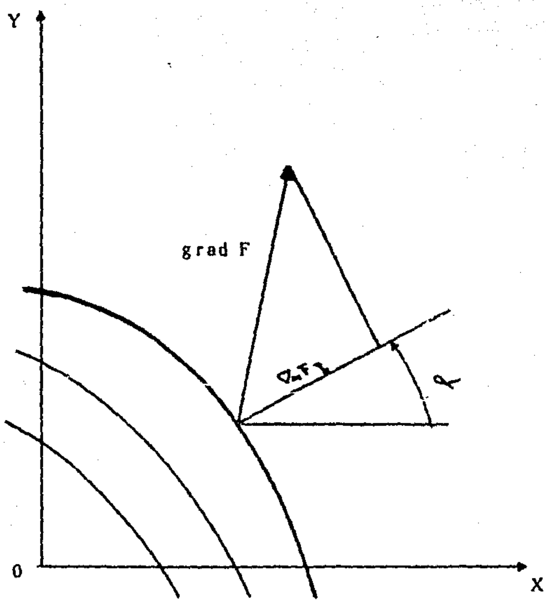
$$\text{grad } F = (\partial F/\partial x)i + (\partial F/\partial y)j$$

en la dirección dada; la derivada direccional en un punto dado presenta su máximo en la dirección de grad F siendo su valor:

$$|\nabla F| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2} \quad .$$

La derivada direccional es cero a lo largo de una curva de nivel, tal como lo sugiere la siguiente figura (15).

Si se interpretan las curvas de nivel como lineas de contorno topográficas, por ejemplo, de la superficie $z = F(x,y)$, entonces la derivada direccional significa simplemente la pendiente de ascención en una dirección dada. El ritmo de ascenso en la dirección de máxima pendiente es el "gradiente", que es precisamente el término que comúnmente se usa. El ciclista que zigzaguea al ascender una colina, simplemente aprovecha las ventajas de la regla de componentes para reducir la derivada direccional.



GRADIENTE DE F(x,y) y

CURVAS F(x,y) = constante

FIGURA (15)

II.4.- GRADIENTE

El gradiente u operador grad, que para un campo escalar V se define así

$$\text{grad } V = i(\partial V/\partial x) + j(\partial V/\partial y) + k(\partial V/\partial z) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(32)$$

Como consecuencia inmediata deducimos que el efecto consiguiente a la acción del operador gradiente sobre un campo escalar V es la definición de un campo vectorial F cuyas componentes son $F_x = \partial V/\partial x$, $F_y = \partial V/\partial y$, $F_z = \partial V/\partial z$. Si introducimos un operador diferencial ∇ de naturaleza vectorial (que llamaremos "del" o "nabla"), tal que

$$\nabla = i(\partial/\partial x) + j(\partial/\partial y) + k(\partial/\partial z) \quad \ldots\ldots\ldots(33)$$

entonces deducimos de la ecuación (32) que

$$\text{grad } V = \nabla V \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(34)$$

Variaciones infinitesimales de V

Consideremos ahora el caso de la variación que experimenta V si las variables x, y, z sufren un incremento de dx, dy, dz, respectivamente. De la teoría de derivación parcial de funciones sabemos que

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz, \quad \ldots\ldots\ldots(35)$$

Además, el vector desplazamiento que corresponde al incremento de las variables es

$$dr = i dx + j dy + k dz \qquad \ldots\ldots\ldots(36)$$

Por tanto, podemos concluir, a partir de las ecuaciones (33), (35) y (36) que

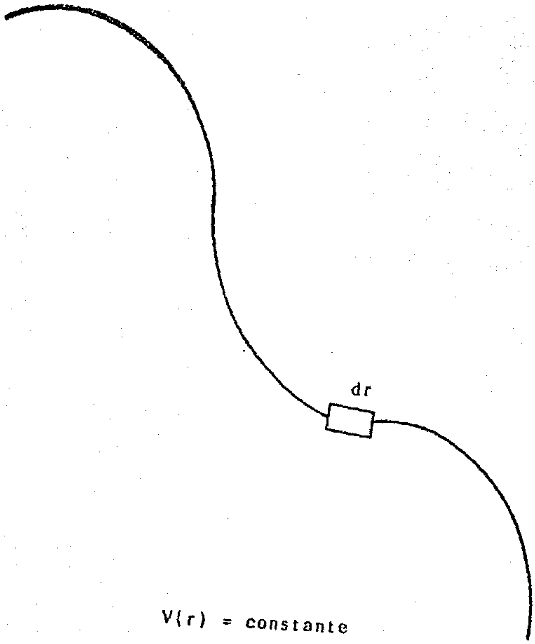
$$dV = \text{grad } V \bullet dr. \qquad \ldots\ldots\ldots(37)$$

Supongamos ahora la ecuación

$$V(r) = V(x,y,z) = \text{constante.}$$

En general, esto representa una superficie en el espacio de tres dimensiones, cuya forma depende de V(r) que, a su vez, depende del valor de la constante.

Por tanto, para un conjunto de valores de la constante queda determinada una familia de superficies. Fijaremos nuestra atención primordial a una superficie especifica de la familia que vendrà, por tanto, engendrada para un valor particular de la constante, y ademàs consideraremos el vector dr de la ecuación (37) como correspondiente a un desplazamiento sobre la superficie como indica la figura (16). En estas condiciones $dV = 0$, porque V es constante sobre la superficie y, por tanto, grad $V \bullet dr = 0$ para cualquier desplazamiento elemental sobre la superficie. Como ademàs ni grad V ni dr son nulos, la expresión quiere decir que ambos son perpendiculares, lo que implica que grad V es perpendicular a la superficie. Por tanto, la dirección de grad V en cualquier punto de la superficie es la de la normal en dicho punto a la superficie V(r) = constante.



$V(r)$ = constante

FIGURA (16)

Variación de $\mathbf{V}$

Si tomamos un desplazamiento arbitrario ds en la dirección de un vector unitario t. al ser $dr = tds$ se deduce de la ecuación (37) que $dV = \text{grad } V \cdot tds$. v por tanto.

$$dV/ds = \text{grad } V \cdot t, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (38)$$

ecuación que nos da la variación de V respecto a la distancia medida en cualquier dirección.

Cuando t sea paralelo a dV entonces dV/ds alcanza el valor màximo. que es $dV/ds = |\text{grad } V|$. Lo cual quiere decir que el vector grad V es un vector en la dirección sobre la cual la magnitud de V varla con màs rapidez. v ademàs que el módulo de grad V es precisamente esta variación màs rápida. Resultado que. comparado con el que obtuvimos al final del pàrrafo anterior. nos permite decir que V varla con la mavor rapidez en la dirección de la normal a la superficie $V(r) = \text{constante}$: conclusión que. sin duda. puede ser obtenida directamente. Si los cosenos directores de la dirección en que se verifica el desplazamiento ds con (l.m.n) entonces $t = li + mj + nk$ (por ser $l^2 + m^2 + n^2 = 1$). y por tanto. se deduce de la ecuación (38) que

$$dV/ds = l(\partial V/\partial x) + m(\partial V/\partial y) + n(\partial V/\partial z) \quad \ldots . (39)$$

Merece hacerse constar el hecho de que ambas notaciones "∇V". "grad V" se utilizan indistintamente. por lo que las ecuaciones (37) v (38) pueden también adoptar la forma

$dV = \nabla V \cdot dr$ y $dV/ds = \nabla V \cdot t$. respectivamente

Suma y producto

Vamos a considerar formas simplificadas que se pueden obtener para los gradientes de sumas y productos. Entonces:

$$\nabla(U + V)=i\left[\partial(U + V)/\partial x\right] + j\left[\partial(U + V)/\partial y\right] + k\left[\partial(U + V)/\partial z\right]$$
$$=\left[i(\partial U/\partial x) + j(\partial U/\partial y) + k(\partial U/\partial z)\right] + \left[i(\partial V/\partial x) + \right.$$
$$\left. + j(\partial V/\partial y) + k(\partial V/\partial z)\right]$$

y por tanto.

$$\nabla(U + V) = \nabla U + \nabla V \qquad \dots\dots\dots\dots\dots(40)$$

$$\nabla(U + V) = i\left[\partial(U \times V)/\partial x\right] + j\left[\partial(U \times V)/\partial y\right] +$$
$$+ k\left[\partial(U \times V)/\partial z\right]$$
$$= i\left[U(\partial V/\partial x) + V(\partial U/\partial x)\right] + j\left[U(\partial V/\partial y) + V(\partial U/\partial y)\right]$$
$$+ k\left[U(\partial V/\partial z) + V(\partial U/\partial z)\right]$$
$$= U\left[i(\partial V/\partial x) + j(\partial V/\partial y) + k(\partial V/\partial z)\right] +$$
$$+ \quad V\left[i(\partial U/\partial x) + j(\partial V/\partial y) + k(\partial U \partial z)\right]$$

y. como conclusión.

$$\nabla(U + V) = \nabla U + \nabla V \qquad \dots\dots\dots\dots(41)$$

Debe observarse que en las ecuaciones (40) y (41) el comportamiento del operador ∇ es formalmente idéntico al del operador d/dx del cálculo elemental.

Ejemplo:

1.- Sea $V = x^2 \text{sen } y + ye^z$: hállense grad V y $|\text{grad } V|$ en el punto (3.2.1).

Solución:

$\partial V/\partial x = 2x \text{ sen } v$. $\partial V/\partial y = x^2 \cos y + e^z$. $\partial V/\partial z = ye^z$.

y por tanto.

$$\text{grad } V = i2x \text{ sen } y + (x^2 \cos y + e^z)j + ye^z k.$$

En el punto (3.2.1).

$$\text{grad } V = i6 \text{ sen } 2 + (9 \cos 2 + e)j + 2ek$$

Y por lo tanto:

$$|\text{grad } V| = (36 \text{ sen}^2 2 + 9 \cos 2 + e^2 + 4e^2)^{1/2}$$

$$|\text{grad } V| = (36 + 45 \cos^2 2 + 18e \cos 2 + 5e^2)^{1/2}$$

II.5.- DIVERGENCIA

Anteriormente estudiamos el operador gradiente que actuaba sobre un campo escalar y daba lugar a un nuevo campo de naturaleza vectorial. Ahora consideramos el operador divergencia o "div" que actúa sobre un campo vectorial para dar lugar a un campo escalar según la siguiente definición:

$$\text{div } F = (\partial F_x/\partial x) + (\partial F_y/\partial y) + (\partial F_z/\partial z) \quad \ldots.(42)$$

Y si introducimos el operador definido en la ecuación (33) sin màs que tener en cuenta el producto escalar de dos vectores en función de sus coordenadas. resulta:

$$\text{div } F = \nabla \circ F \quad \ldots\ldots\ldots\ldots.(43)$$

ya que

$$\nabla \circ F = \left[i(\partial/\partial x) + j(\partial/\partial y) + k(\partial/\partial z)\right] \circ (iF_x + jF_y + kF_z) =$$

$$= (\partial/\partial x)F_x + (\partial/\partial y)F_y + (\partial/\partial z)F_z.$$

Igual que en la sección anterior, el uso de "div" o "∇" es indiferente.

Es inmediato que

$$\nabla \cdot (F + G) = \nabla \cdot F + \nabla \cdot G \quad \ldots\ldots\ldots(44)$$

ya que

$$\nabla \cdot (F + G) = \partial(f + G)_x/\partial x + \partial(F + G)_y/\partial y + \partial(F + G)_z/\partial z$$
$$= (\partial F_x/\partial x + \partial F_y/\partial y + \partial F_z/\partial z) +$$
$$+ (\partial G_x/\partial x + \partial G_y/\partial y + \partial G_z/\partial z) =$$
$$= \nabla \cdot F + \nabla \cdot G.$$

Un vector F, tal que div F = 0 en cualquier punto, es un vector solenoidal.

Se puede ver fácilmente que la ecuación (42) puede formularse en sentido inverso. Es decir, dado un campo escalar V, es siempre posible encontrar un campo vectorial F tal que div F = V. Sin embargo, el campo F no será único, ya que si hacemos $\partial F_x/\partial x = V^{(x)}$, $\partial F_y/\partial y = V^{(y)}$, $\partial F_z/\partial z = V^{(z)}$ se ve que $V^{(x)}$, $V^{(y)}$, $V^{(z)}$ pueden ser cualesquiera números, siempre que su suma sea V. Además, $F_x = \int V^{(x)}dx$, integral que está determinada salvo una función cualquiera de y y z . Análogamente se puede afirmar de F_y y F_z.

Debe hacerse resaltar que $\nabla \cdot F \neq F \cdot \nabla$. El primer miembro es por definición div F, que es un eucalar, mientras que el segundo es:

$$F \circ \nabla = F_x(\partial/\partial x) + F_y(\partial/\partial v) + F_z(\partial/\partial z)$$

es un operador.

Ejemplo:

1.- Siendo:

$$F = (3x^2y - z^3)i \quad + \quad (x^2y^2 + y^3z)j \quad + \quad (xz^3 - yz^2)k$$

Calcúlese div F en el punto (-2.3.2).

Solución:

$\partial F_x/\partial x = 6xy$. $\quad \partial F_y/\partial y = 3y^2z$. $\quad \partial F_z/\partial Z = 3xz^2 - 2yz$.

Por lo tanto.

$$\text{div } F = 6xy \; + \; 3y^2z \; + \; 3xz^2 \; - \; 2yz = -18$$

en el punto (-2.3.2).

II.6.- ROTACIONAL

El operador rotacional actúa sobre un campo vectorial. dando lugar a un nuevo campo vectorial. según la siguiente definición:

$$\text{rot } F = i \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + j \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + k \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

.........(45)

Si utilizamos el operador ∇, podemos escribir

$$\text{rot } F = \nabla \wedge F \qquad \text{...........(46)}$$

ya que

$$\nabla \wedge F = \left[i(\partial/\partial x) + j(\partial/\partial y) + k(\partial/\partial z)\right] \wedge \left[iF_x + jF_y + kF_z\right]$$

$$= i\left[(\partial/\partial y)F_z - (\partial/\partial z)F_y\right] + j\left[(\partial/\partial z)F_x - (\partial/\partial x)F_z\right]$$

$$+ k\left[(\partial/\partial x)F_y - (\partial/\partial y)F_x\right]$$

Las notaciones "rot" o "$\nabla\wedge$" son indistintas.

Otra forma de rot F es la del determinante:

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} i & j & z \\ \partial/\partial_x & \partial/\partial_y & \partial/\partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad \text{........(47)}$$

Que se deduce inmediatamente de las ecuaciones (8), (33) y (46) por lo tanto:

$$\nabla \wedge (F + G) = \nabla \wedge F + \nabla \wedge G$$

que se realiza expresando cada término en función de sus componentes cartesianas.

Un vector F que verifica que rot F = 0 en cualquier punto se dice que es irrotacional.

Por último, nos podemos preguntar si la ecuación (45) es inversible: es decir, si dado un campo vectorial G es posible en todos los casos encontrar un campo vectorial F tal que G = rot F.

Ejemplo:

Sea $F = (x^2 + y^2 + z^2)i + (x^4 - y^2z^2)j + xyzk$: hállese rot F en el punto (2.3.-2).

Solución:

$$\partial F_x/\partial y = 2y, \quad \partial F_x/\partial z = 2z, \quad \partial F_y/\partial x = 4x^3$$
$$\partial F_y/\partial z = -2y^2z, \quad \partial F_z/\partial x = yz, \quad \partial F_z/\partial y = xz$$

De aqui que, según la ecuación (45),

$$\text{rot } F = i(xz + 2y^2z) + j(2z - yz) + k(4x^3 - 2y)$$
$$\text{rot } F = -40i + 2j + 26k$$

en el punto (2.3.-2). 2

CAPITULO III

COORDENADAS CURVILINEAS EN EL ESPACIO

III.1.- COORDENADAS CURVILINEAS.

Supongamos que en una región dada $f_1(x,y,z)$, $f_2(x,y,z)$, $f_3(x,y,z)$ son funciones uniformes de x,y,z, y que las ecuaciones

$$u_1 = f_1(x,y,z) \;, \quad u_2 = f_2(x,y,z), \quad u_3 = f_3(x,y,z) \quad \text{..(48)}$$

pueden resolverse para x,y,z como funciones uniformes

$$x = \phi_1(u_1,\ u_2,\ u_3),$$
$$y = \phi_2(u_1,\ u_2,\ u_3),$$
$$z = \phi_3(u_1,\ u_2,\ u_3), \quad \text{...........(49)}$$

de u_1, u_2, u_3, a cada punto $P(x,y,z)$ corresponde un grupo de valores de u_1, u_2, u_3, y a cada grupo de dichos valores corresponde (entre ciertos limites) un punto. Las funciones u_1, u_2, u_3. se denominan coordenadas curvilineas.

En general suponemos que u_1, u_2, u_3, son funciones continuas y derivables de x, y, z, y que x, y, z, son funciones continuas y derivables de u_1, u_2, u_3. En muchos casos hay puntos particulares en los que no se satisfacen esas condiciones, y es necesario tenerlo presente al aplicar las fórmulas generales a las regiones que los contienen.

Por cada punto P pasan tres superficies

u_1 = constante, u_2 = constante, u_3 = constante,

llamadas superficies coordenadas, que se cortan según tres curvas que se denominan curvas coordenadas. En cada superficie coordenada hay una coordenada constante y dos variables. Se designa la superficie por la coordenada constante, y así se dice: *superficie* u_1, *superficie* u_2, *superficie* u_3. En cada curva coordenada, una coordenada es variable y dos constantes. Se designa la curva por la coordenada variable: *curva* u_1, *curva* u_2, *curva* u_3.

El vector R que va desde el origen al punto variable $P(x,y,z)$ puede expresarse como función de u_1, u_2, u_3. La derivada parcial de esta función con respecto a u_1, se obtiene haciendo variar P, suponiendo u_2 y u_3 *constantes*, esto es, a lo largo de la curva u_1.

Por consiguiente,

$$\frac{\partial R}{\partial u_1}$$

es un vector tangente a la curva u_1 en P. Análogamente,

$$\frac{\partial P}{\partial u_2}, \quad \frac{\partial R}{\partial u_3}$$

son tangentes a las curvas u_2 y u_3, respectivamente.

La derivada parcial de R con respecto a u_1, es la razón de dR a du_1 cuando las variaciones se toman sobre la curva u_1. Ahora bien, en cualquier variación se verifica:

$$dR \cdot \nabla u_1 = du_1 .$$

Por consiguiente,

$$\frac{\partial R}{\partial u_1} \cdot \nabla u_1 = \frac{dR \cdot \nabla u_1}{du_1} = 1.$$

Anàlogamente,

$$\frac{\partial R}{\partial u_1} \cdot \nabla u_2 = \frac{\partial R}{\partial u_3} \cdot \nabla u_3 = 1.$$

En una variación sobre la curva u_1, los valores de u_2 y u_3 son constantes. En consecuencia, ∇u_2 y ∇u_3 son perpendiculares a la tangente y, por lo tanto,

$$\frac{\partial R}{\partial u_1} \cdot \nabla u_2 = \frac{\partial R}{\partial u_1} \cdot \nabla u_3 = 0.$$

de una manera anàloga se obtienen ecuaciones con u_1, u_2, u_3 intercambiadas.

Esas relaciones entre derivadas parciales estàn todas expresadas por las ecuaciones

$$\frac{\partial R}{\partial u_i} \cdot \nabla u_i = 1, \qquad i = 1,2,3 \qquad \ldots\ldots\ldots(50)$$

$$\frac{\partial R}{\partial u_j} \cdot \nabla u_j = 0, \qquad i \neq j. \qquad \ldots\ldots\ldots(51)$$

III.2.- COORDENADAS ORTOGONALES

Se dice que las coordenadas curvilíneas son ortogonales cuando en cada punto $P(x,y,z)$ las curvas coordenadas son perpendiculares entre sí. Las coordenadas ortogonales son las más empleadas a causa de su sencillez.

Supongamos que u_1, u_2, u_3 son coordenadas ortogonales. Sean i_1, i_2, i_3 vectores unitarios tangentes a las curvas coordenadas en $P(x,y,z)$ y que en cada caso se extiende a lo largo de la curva en la dirección en que aumenta la coordenada correspondiente. Suponemos que los subíndices 1,2,3 de las coordenadas se han asignado de tal manera que i_1, i_2, i_3 forman un triedro positivo, como se muestra en la figura (17). En este caso,

$$i_3 = i_1 \times i_2$$

A lo largo de cada curva coordenada la longitud del arco es una función de una sola coordenada curvilínea. Sean s_1, s_2, y s_3 longitudes de arcos medidas sobre las curvas coordenadas en las direcciones positivas de u_1, u_2, u_3, respectivamente, y

$$\frac{ds_1}{du_1} = h_1, \quad \frac{ds_2}{du_2} = h_2, \quad \frac{ds_3}{du_3} = h_3 \quad \ldots\ldots(52)$$

las derivadas en el punto P. El paralelepípedo rectangular de la figura (18), cuyas aristas

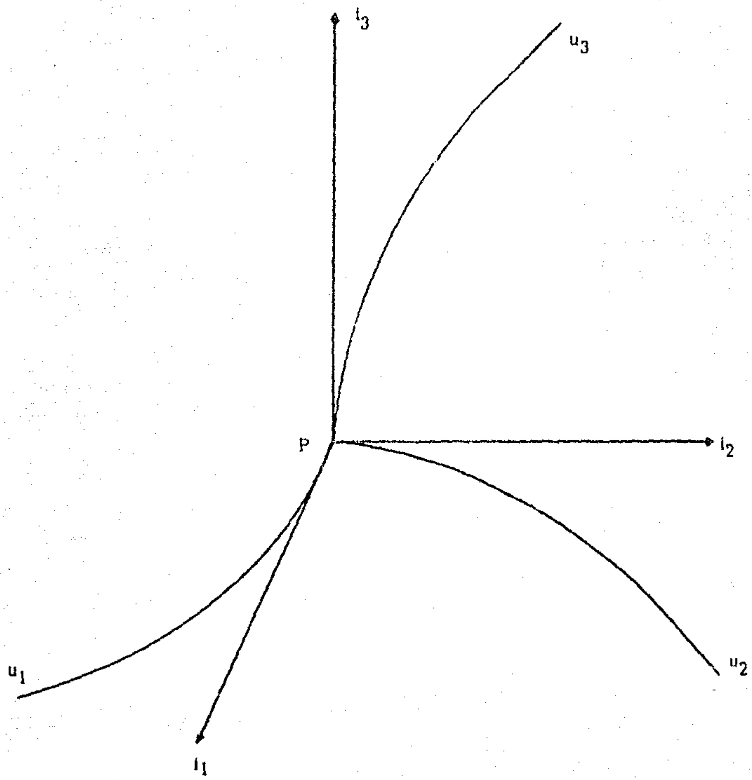


FIGURA (17)

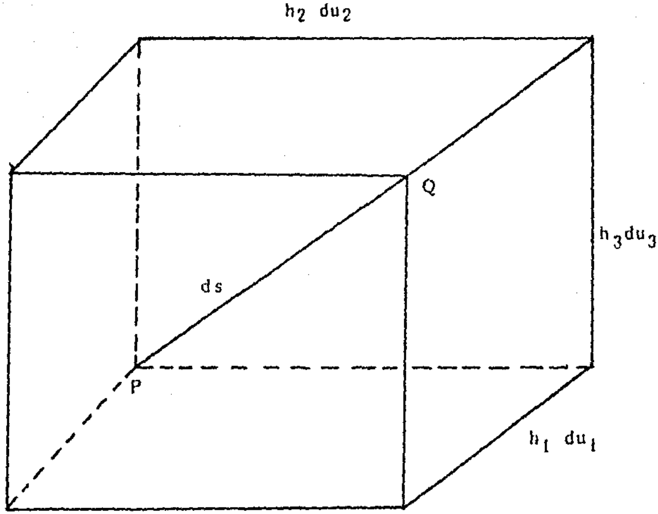


FIGURA (18)

$$ds_1 = h_1 du_1, \quad ds_2 = h_2 du_2, \quad ds_3 = h_3 du_3 \quad \ldots\ldots(53)$$

se extienden a lo largo de i_1, i_2, i_3 se denominan elementos de volumen. Es aproximadamente igual al recinto infinitesimal limitado por las superficies:

$$u_1,\ u_2,\ u_3;\quad u_1+du_1,\ \ u_2+du_2,\ \ u_3+du_3,$$

Su volumen es

$$dv = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(54)$$

y su diagonal $ds = PQ$, determinada por la ecuación

$$ds^2 = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2, \quad \ldots\ldots\ldots(55)$$

es igual al elemento de arco a lo largo de cualquier curva tangente a PQ en P.

III.3.- COORDENADAS CILINDRICAS

Si M es la proyección del punto $P(x,y,z)$ en el plano xy y r,θ son las coordenadas polares de M en este plano, las variables $u_1 = r$, $u_2 = \theta$, $u_3 = z$ se denominan coordenadas cilíndricas de P.

Las ecuaciones que relacionan las coordenadas cilíndricas y las rectangulares se deducen fácilmente de la figura (19);
y son las siguientes:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\text{sen}\,\theta, \quad z = z \quad .....(56)$$

En un punto dado el ángulo θ puede tener un número infinito de valores que difieren en multiplos de 2π. Pero en una región que no se extiende alrededor del eje de las z, o no contienen puntos sobre este eje, pueden asignarse valores a las coordenadas cilíndricas, de modo que son funciones uniformes, continuas y derivables de x, y, z, como lo muestra la figura (20).

Las superficies coordenadas

$$r = \text{constante}, \quad \theta = \text{constante}, \quad z = \text{constante}$$

son cilíndros de eje OZ, planos que pasan por OZ, y planos perpendiculares a OZ. Puesto que esas superficies se cortan en ángulo recto, las coordenadas son ortogonales. Ver figura (19).

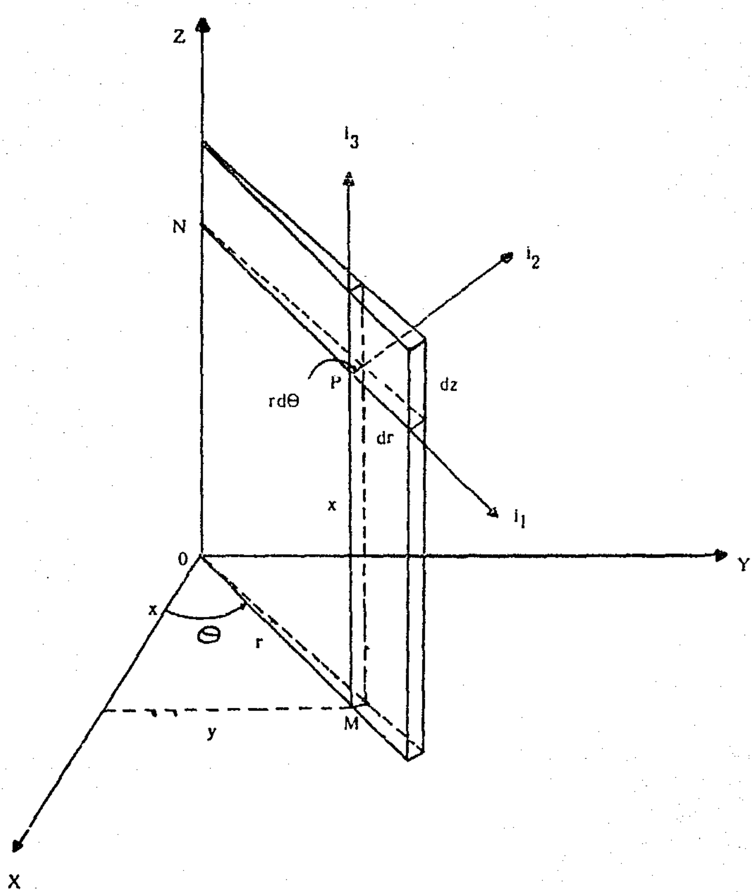


FIGURA (19)

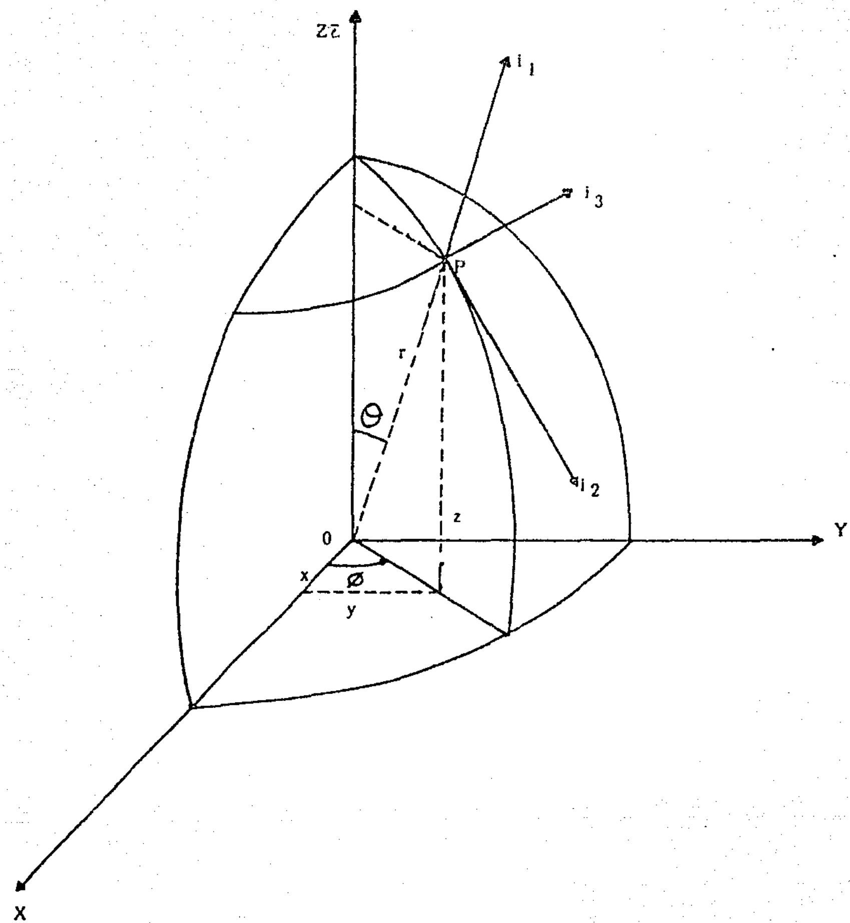


FIGURA (20)

Los vectores unitarios i_1, i_2, i_3 se extienden, respectivamente, en la dirección NP (hacia afuera), sobre la perpendicular al plano ONP (en el sentido que aumenta θ), y en la dirección positiva del eje Z. Ver figura (19).

Los elementos de arco en esa dirección son

$$ds_1 = dr, \quad ds_2 = r\, d\theta, \quad ds_3 = dz. \quad \ldots\ldots(57)$$

Las cantidades h_1, h_2, h_3 de la ecuación (52) tienen, en este caso, los valores siguientes:

$$h_1 = 1, \quad h_2 = 2, \quad h_3 = 1, \quad \ldots\ldots\ldots(58)$$

y el elemento volumen es

$$dv = r\, dr\, d\theta\, dz. \quad \ldots\ldots\ldots(59)$$

III.4.-COORDENADAS ESFERICAS

Las coordenadas esféricas o polares de un punto P son: su distancia $r = OP$ al origen, el ángulo θ formado por OP y el eje de las z, y el ángulo ϕ en el plano xy formado por el plano xz y el plano OPZ. Sus relaciones con las coordenadas rectangulares vienen dadas por las ecuaciones

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, \quad y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \quad z = r \cos \theta \qquad \ldots\ldots.(60)$$

La dirección positiva de ϕ es la de una rotación a la derecha alrededor de OZ. El ángulo θ se encuentra positivamente desde OZ a OP. A cada punto del espacio corresponden infinitos valores de estos ángulos; pero en una región que no incluya a puntos del eje de las z se les puede asignar valores tales que las funciones x, y, z, sean uniformes, continuas y derivables.

Los sistemas de elementos que determinan los puntos del espacio en las coordenadas esféricas son: esferas concéntricas de centro O, que tienen por radio los valores sucesivos de r; planos meridianos que pasan por el eje de las z correspondientes a diversos valores de ϕ; conos de revolución de eje z correspondientes a los diversos valores de θ. Puesto que los elementos de estos sistemas que pasan por un mismo punto P se cortan en àngulo recto, las coordenadas son ortogonales.

Tomando

$$u_1 = r, \qquad u_2 = \theta, \qquad u_3 = \phi$$

los vectores unitarios i_1, i_2, i_3 son: la normal a la esfera r = constante, y las tangentes a los dos círculos coordenados, trazadas en cada caso en la dirección en la que aumenta la coordenada correspondiente. Los elementos de arco en esas direcciónes son

$$ds_1 = dr, \quad ds_2 = r\, d\theta, \quad ds_3 = r \operatorname{sen} \theta\, d\phi \quad \ldots\ldots(61)$$

Las cantidades h_1, h_2, h_3 de la ecuación (52) tienen, en este caso, los valores siguientes:

$$h_1 = 1, \qquad h_2 = r, \qquad h_3 = r \operatorname{sen} \theta, \quad \ldots\ldots(62)$$

y el elemento de volumen es

$$dv = r^2 \operatorname{sen} \theta \; dr\, d\theta\, d\phi. \qquad \ldots\ldots(63)$$

APENDICE

Aplicación del Gradiente:

La distribución de presiones en un yacimientp es una función escalar. Para un tiempo t dado $p = p(x,y,z)$, entonces

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x} i + \frac{\partial p}{\partial y} j + \frac{\partial p}{\partial z} k$$

El vector velocidad de un fluido incompresible en un medio poroso y permeable, en régimen láminar, y despreciando los efectos gravitacionales, está dado por la ley de Darcy:

$$\vec{\upsilon} = -\frac{k}{\mu} \nabla p = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} i + \frac{\partial p}{\partial y} j + \frac{\partial p}{\partial z} k \right)$$

$$= \upsilon_x i + \upsilon_y j + \upsilon_z k \ .$$

en donde υ_x, υ_y, υ_z son las componentes del vector $\vec{\upsilon}$ en las direcciones x, y, z, respectivamente. Obviamente

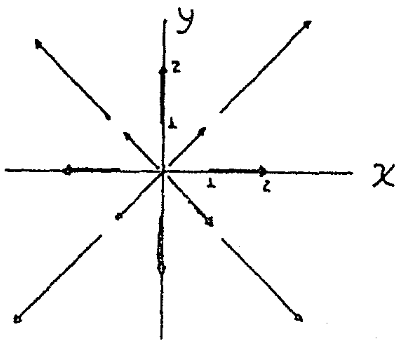
$$\upsilon_x = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\upsilon_y = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\upsilon_z = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}$$

Aplicación de la Divergencia:

Representar el campo vectorial en el plano xy dado por la siguiente función vectorial $\vec{v} = xi + yj$



La divergencia de este campo vectorial es $\nabla \cdot \vec{v} = 2$. Obsèrvese que para cada par de valores (x,y) se tiene un vector del campo $\vec{v}\,(x,y)$.

ECUACIONES DE FLUJO EN DIFERENTES

SISTEMAS DE COORDENADAS

Dada la ecuación de Laplace de la forma:

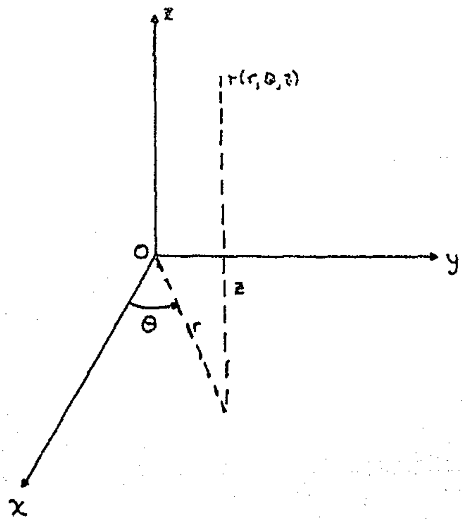
$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

para transformarla de coordenadas cartesianas a cilindricas como muestra la siguiente figura, se hace lo siguiente:

$x = r \cos \theta$

$y = r \operatorname{sen} \theta$

$z = z$



Derivando con respecto a x:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x) = r(-\operatorname{sen}\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial r}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(y) = r(\cos\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta\frac{\partial r}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(z) = \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

De las tres últimas ecuaciones se tiene:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1 + r\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}}{\cos\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{-\operatorname{sen}\theta\frac{\partial r}{\partial x}}{r\cos\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Sustituyendo (3) en (2):

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1 + r\operatorname{sen}\theta(-\operatorname{sen}\theta\,\partial r/\partial x/r\cos\theta)}{\cos\theta}$$

$$= \frac{1 - \operatorname{sen}^2\theta\,\partial r/\partial x/\cos\theta}{\cos\theta}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1 - \operatorname{sen}^2\theta/\cos\theta\frac{\partial r}{\partial x}}{\cos\theta} = \cos\theta$$

Sustituyendo este último valor en (3):

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-\ \text{sen}\ \theta\ \cos\ \theta}{r\ \cos\ \theta} = -\ \frac{\text{sen}\ \theta}{r}$$

Análogamente, derivando con respecto a y :

$$\frac{\partial}{\partial y}(x) = r\ (-\ \text{sen}\ \theta)\ \frac{\partial \theta}{\partial y} + \cos\ \theta\ \frac{\partial r}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(y) = r\ \cos\ \theta\ \frac{\partial \theta}{\partial y} + \text{sen}\ \theta\ \ \partial r/\partial r = 1$$

Resolviendo simultaneamente:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{r\ \text{sen}\ \theta\ \ \frac{\partial \theta}{\partial y}}{\cos\ \theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)'$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{r\ -\ \text{sen}\ \theta\ \frac{\partial r}{\partial y}}{r\ \cos\ \theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)'$$

Sustituyendo (2)' en (3)' :

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1\ -\ \text{sen}\ \left(\frac{r\ \text{sen}\ \theta\ \ \partial \theta/\partial y}{\cos\ \theta}\right)}{r\ \cos\ \theta}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1\ -\ r\ \left(\frac{\text{sen}^2\ \theta}{\cos\ \theta}\right)\ \frac{\partial \theta}{\partial y}}{r\ \cos\ \theta}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta - r\,\text{sen}^2\theta \,\dfrac{\partial \theta}{\partial y}}{r\cos^2\theta}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y}(r\cos^2\theta + r\,\text{sen}^2\theta) = \cos\theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}$$

Sustituyendo este último valor en (2)':

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{r\,\text{sen}\,\theta\,\dfrac{\cos\theta}{r}}{\cos\theta} = \text{sen}\,\theta$$

Además utilizando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} \qquad \text{...........(2)''}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} \qquad \text{...........(3)''}$$

Con lo anterior se puede determinar:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial r}\cos\theta + \frac{\partial p}{\partial \theta}\left[-\frac{\text{sen}\theta}{r}\right] \qquad \text{.............(2)'''}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial r}\text{sen}\,\theta + \frac{\partial p}{\partial \theta}\left[\frac{\cos\theta}{r}\right] \qquad \text{.............(3)'''}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial p}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial p}{\partial x}\right]\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{\partial p}{\partial x}\right]\frac{\partial \theta}{\partial x} \qquad \text{...(4)}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\frac{\partial \theta}{\partial y} \quad .....(5)$$

Ademas de (4):

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\cos\theta-\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)\frac{\partial r}{\partial x}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\cos\theta-\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=\left(\cos\theta\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}-\operatorname{sen}\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 p}{\partial r\partial\theta}+\frac{\partial p}{\partial \theta}\left(\frac{-1}{r^2}\right)\right)\right)\cos\theta+$$

$$+\left(\cos\theta\left(\frac{\partial^2 p}{\partial\theta\partial r}\right)+\frac{\partial p}{\partial r}\left(-\operatorname{sen}\theta\right)-\frac{-1}{r}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2}+\frac{\partial p}{\partial \theta}\cos\theta\right)\right)$$

$$o\left(\frac{-\operatorname{sen}\theta}{r}\right)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=\left(\cos^2\theta\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{\partial^2 p}{\partial r\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)+$$

$$+\left(-\frac{1}{r}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{\partial^2 p}{\partial r\partial\theta}+\frac{1}{r}\operatorname{sen}^2\theta\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\operatorname{sen}^2\theta\frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r^2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=\cos^2\theta\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{2}{r^2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{\partial p}{\partial \theta}+\frac{1}{r}\operatorname{sen}^2\theta\frac{\partial p}{r}+$$

$$+\frac{1}{r^2}\operatorname{sen}^2\theta\ o\ \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2}-\frac{2}{r}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{\partial^2 p}{\partial r\partial\theta}\right)$$

De (5)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\operatorname{sen}\theta+\frac{\partial p}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\operatorname{sen}\theta+\right.$$

$$+ \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\cos\theta}{r}\bigg] \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \left[\operatorname{sen}\theta \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \cos\theta\left[(1/r)\frac{\partial^2 p}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial p}{\partial \theta}(-1/r^2)\right]\right]\operatorname{sen}\theta +$$

$$+\left[\frac{\partial p}{\partial r}\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\frac{\partial^2 p}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r}\left[\cos\theta\frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial p}{\partial \theta}(-\operatorname{sen}\theta)\right]\right]\frac{\cos\theta}{r}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \operatorname{sen}^2\theta\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\operatorname{sen}\theta \cos\theta\frac{\partial^2 p}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2}\operatorname{sen}\theta \cos\theta\frac{\partial p}{\partial \theta} +$$

$$+ \frac{1}{r}\cos^2\theta\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r}\operatorname{sen}\theta \cos\theta\frac{\partial^2 p}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2}\cos^2\theta\frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} -$$

$$- \frac{1}{r^2}\operatorname{sen}\theta \cos\theta \quad o \quad \frac{\partial p}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \operatorname{sen}\theta\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2}\operatorname{sen}\theta \cos\theta\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{2}{r}\operatorname{sen}\theta \cos\theta\frac{\partial^2 p}{\partial r \partial \theta}$$

$$+ \frac{1}{r}\cos^2\theta\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cos^2\theta\frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2}$$

Ademas como:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \; ; \quad \text{ya que} \quad z = z$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \left[\cos^2\theta\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r^2}\operatorname{sen}\theta \cos\theta\frac{\partial p}{\partial \theta} +\right.$$

$$\left.+ \frac{1}{r}\operatorname{sen}^2\theta\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\operatorname{sen}^2\theta\frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r}\operatorname{sen}\theta \cos\theta\frac{\partial^2 p}{\partial r \partial \theta}\right] +$$

$$+\left[\operatorname{sen}^2\theta\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2}\operatorname{sen}\theta \cos\theta\frac{\partial p}{\partial} + \frac{2}{r}\operatorname{sen}\theta \cos\theta\frac{\partial^2 p}{\partial r \partial \theta} +\right.$$

$$+ \frac{1}{r} \cos^2\theta \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cos^2\theta \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2}\Bigg] + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2}\left(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta\right) +$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r}\left(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2}\left(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta\right) + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$$

Como: $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

FINALMENTE:

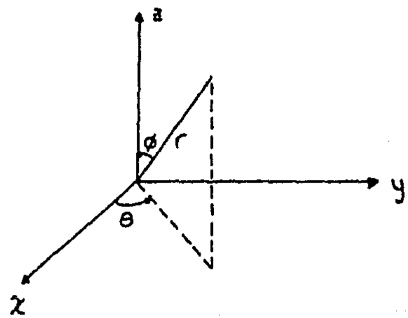
$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \; \ldots\ldots (6)$$

Para el caso de pasar la ecuación de Laplace de coordenadas cartesianas a ésfericas como lo muestra la siguiente figura, las relaciones son:

$x = r \cos \theta \operatorname{sen} \phi$

$y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi$

$z = r \cos \phi$



SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANO Y ESFERICO

BIBLIOGRAFIA

- Apuntes de geometria analitica.

  Editados por la Facultad de Ingenieria U.N.A.M.

- Càlculo avanzado.

  Kaplan Wilfred.

  Editorial Continental.

- Variable compleja y aplicaciones.

  Ruel V. Churchill.

  Editorial McGraw Hill.

- Anàlisis vectorial

  S. Simons.

  Editorial Alhambra.

- Anàlisis vectorial.

  H. B. Phillips.

  Editorial Hispano-Americana.

- Flujo de fluidos en medios porosos

  RAFAEL RODRIGUEZ NIETO

  Editados por la Facultad de Ingenieria U.N.A.M.