

17 2g



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

SR. FRANCISCO ALEJANDRO BELTRAN GUZMAN  
P r e s e n t e .

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor Ing. José Luis Murillo Ba--  
gundo, y que aprobó esta Dirección, para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de ingeniero civil.

ANALISIS ESTRUCTURAL TRIDIMENSIONAL DE MUELLES  
SOBRE PILOTES.

- I.- ANTECEDENTES
- II.- FUERZAS RELACIONADAS CON LA EMBARCACION
- III.- FUERZAS NO RELACIONADAS CON LA EMBARCACION
- IV.- CONSIDERACIONES SOBRE LA ESTRUCTURA
- V.- METODO DE ANALISIS
- VI.- PROGRAMA PARA EL ANALISIS
- VII.- EJEMPLO DE APLICACION
- VIII.-COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se - - -  
imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el título de ésta.

Asimismo le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que se deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de --  
seis meses como requisito para sustentar examen profesional.

Atentamente  
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"  
Ciudad Universitaria, D.F., 2 de mayo de 1990  
EL DIRECTOR

DANIEL RESENDIZ NUÑEZ

FALTA DE ORIGEN

DRN/RAV/ams'



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

	página
<b>INTRODUCCION.....</b>	<b>1</b>
<b>I.ANTECEDENTES.....</b>	<b>4</b>
I.1. ESTRUCTURAS DE ATRAQUE.....	4
I.2. TIPOS DE ANALISIS ESTRUCTURAL.....	6
<b>II.FUERZAS RELACIONADAS CON LA EMBARCACION.....</b>	<b>10</b>
II.1. FUERZA DE ATRAQUE.....	10
II.2. DEFENSAS.....	13
II.3. FUERZAS DE AMARRE.....	14
II.4. FUERZA DEBIDA AL OLEAJE.....	18
II.5. FUERZA DEBIDA A LA CORRIENTE.....	20
II.6. FUERZA DEBIDA AL VIENTO.....	20
<b>III.FUERZAS NO RELACIONADAS CON LA EMBARCACION.....</b>	<b>21</b>
III.1. CARGAS VERTICALES.....	21
III.2. FUERZAS DEBIDAS AL OLEAJE.....	24
III.3. FUERZAS DEBIDAS A LA CORRIENTE.....	29
III.4. FUERZA DEBIDA AL VIENTO.....	31

<b>IV. CONSIDERACIONES SOBRE LA ESTRUCTURA.....</b>	<b>32</b>
IV.1. LOSA.....	32
IV.2. PILOTES.....	33
IV.3. APOYOS.....	33
<b>V. METODO DE ANALISIS.....</b>	<b>35</b>
V.1. MATRIZ DE RIGIDEZ DE LOS PILOTES.....	37
V.2. MATRIZ DE TRANSFORMACION.....	39
V.3. MATRIZ DE ESTATICA.....	47
V.4. MATRIZ DE RIGIDEZ DE LAS TRABES.....	51
V.5. VECTOR DE FUERZAS DE LA ESTRUCTURA.....	55
V.6. MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA.....	57
V.7. SOLUCION.....	58
<b>VI. PROGRAMA PARA EL ANALISIS.....</b>	<b>61</b>
<b>VII. EJEMPLO DE APLICACION.....</b>	<b>82</b>
<b>VIII. COMENTARIOS Y CONCLUSIONES.....</b>	<b>101</b>
<b>BIBLIOGRAFIA.....</b>	<b>103</b>

## INTRODUCCION

La historia de los puertos es un tema de gran interés y amplitud, que data de la historia antigua, posiblemente de el año 3500 a.c. o anterior inclusive. Se dice que los egipcios se lanzaron a la conquista del mar alrededor de el año 2800 a.c., sin tener éxito, pero aportando las bases para el posterior desarrollo de la ingeniería marítima.

Los herederos del movimiento fueron los fenicios, que establecieron el comercio marítimo y alcanzaron por vez primera el atlántico.

Fué en los tiempos de los griegos que se iniciaron las grandes obras relacionadas con la actividad portuaria, con la construcción del primer muelle y del primer rompeolas en Delos, así como las obras de balizamiento e iluminación en Faros.

Hasta la caída del imperio romano, las obras marítimas que se construyeron, como el puerto de Ostia en Italia, fueron hechos con una idea de grandeza y solidez; debido al bajo costo de la mano de obra, los trabajos marítimos recibieron una gran atención, y fueron tan bien construidos que desaparecieron sólo debido a los efectos de la naturaleza y a la falta de mantenimiento, de lo contrario, estarían en condiciones de operar actualmente.

En las excavaciones y exploraciones que han llevado a cabo los arqueólogos, se ha encontrado que algunas de las características de las obras antiguas están resurgiendo en

las modernas; podemos observar diseños de buena calidad en esa época, así como características adecuadas, por ejemplo, en el posicionamiento de los rompeolas.

Fué hasta varios siglos después cuando los imperios europeos, en su afán de conquista, impulsaron los avances en la navegación y en las obras portuarias.

La historia de nuestro país es breve al respecto, ya que en la etapa precolombina no hubo tradición marítima, y a la llegada de los españoles no se fundó una escuela dedicada al desarrollo de este conocimiento.

En el inicio de la independencia hubo una ordenanza náutica, pero debido a razones políticas, se abrogó. En el siglo XIX se mejoraron las instalaciones debido a varios factores, entre ellos: el surgimiento de los ferrocarriles, el aumento de la población y el desarrollo del comercio.

En el gobierno de Porfirio Díaz se le dió atención a los puertos de Mazatlán, Manzanillo y Salina Cruz en el Pacífico, además de Tampico, Veracruz y Coatzacoalcos en el Golfo de México.

En la actualidad se ha visto un renovado interés en el área, que se refleja, por ejemplo, en la construcción de puertos como Lázaro Cárdenas y Altamira. Otra de las acciones que ha demostrado este interés, es el de la creación de la entidad Puertos Mexicanos, que reúne personal y actividades que se venían desarrollando en diversas instituciones, lo cual le impedía la integración de equipo y le restaba importancia a la parte marítima de la ingeniería.

Los puertos son estructuras de gran importancia para el país, ya que impulsan el comercio y el desarrollo del mismo; la construcción y la mejora de puertos en México es en la actualidad, una necesidad impostergable

Dentro de los puertos se encuentran las estructuras que sirven para el cambio de medio de transporte, las estructuras de atraque. Estas son estructuras de gran importancia por lo mismo, y su correcto análisis corresponde al área estructural.

Debido a la poca comunicación que existe entre los profesionales especialistas en las diversas áreas, no se ha tenido una actualización en la ingeniería estructural relacionada con las estructuras de atraque. Considero necesario que, junto con el desarrollo de los puertos, se lleve a cabo una mejora en los métodos utilizados por los ingenieros que trabajan en proyectos portuarios.

En el capítulo siguiente presento una explicación de los diversos tipos de estructuras y de la forma en que se pueden analizar desde el punto de vista estructural, haciendo notar la necesidad de actualización, y en los posteriores capítulos presento un desarrollo más profundo y un programa para el análisis, esperando que resulte adecuado para ser utilizado en el futuro desarrollo de proyectos portuarios.

## I. ANTECEDENTES

### I.1. ESTRUCTURAS DE ATRAQUE.

Las estructuras de atraque juegan un papel principal en los puertos, ya que son el lugar en donde la carga cambia de medio de transporte, del terrestre al marítimo y viceversa.

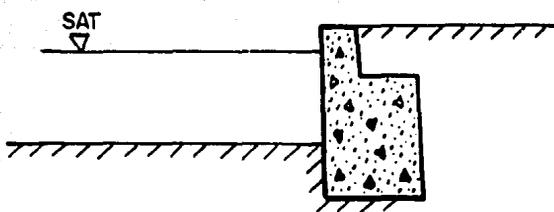
Siempre que se vaya a construir una estructura de atraque, se deberán estudiar los elementos físicos de la zona, tales como el clima a lo largo del año, las características oceanográficas y las posibles vías de acceso, entre otros. Estos factores ayudarán a determinar que tipo de estructura de atraque es más conveniente en cada caso particular.

Podemos clasificar a las estructuras de atraque según diferentes criterios, pero dos de los más comunes y más útiles son los siguientes:

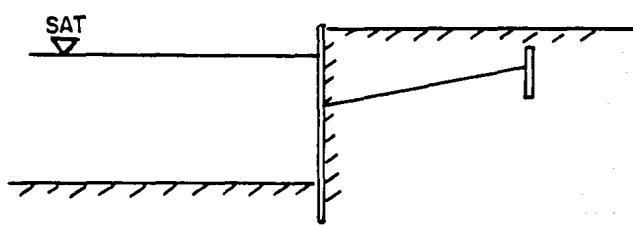
Según su sistema de cimentación, estas estructuras pueden ser:

- a) Estructuras masivas.
  - a.i) Muro de gravedad.
  - a.ii) Sobre paredes de tablestacas.
- b) Estructuras sobre pilotes.
- c) Estructuras sobre pilas.

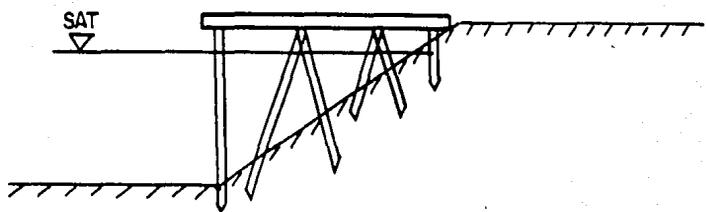
En la figura 1 se muestran cortes de los distintos casos.



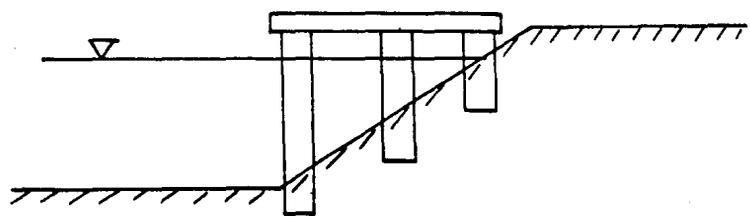
Muro de gravedad



Sobre paredes de tablestacas



Sobre pilotes



Sobre pilas

figura 1

Según su localización, las estructuras serán:

- a) Estructuras marginales o paralelas a la costa (muelles).
- b) Estructuras normales a la costa.
- c) Estructuras en L o T.
- d) Estructuras fuera de las instalaciones portuarias.

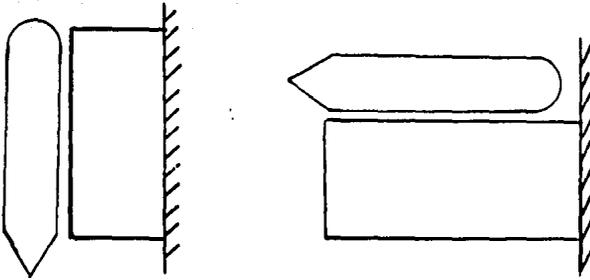
En la figura 2 se muestran esquemas en planta de cada tipo.

Este tipo de clasificación se utiliza para definir el campo de aplicación de los conceptos presentados a lo largo de la presente tesis.

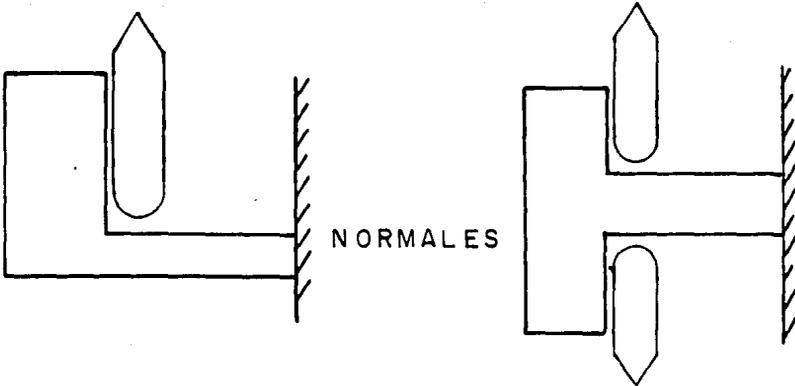
### I.3. TIPOS DE ANALISIS ESTRUCTURAL.

El análisis estructural es un aspecto que juega un papel básico en los estudios que se llevan a cabo para la construcción de los puertos, ya que de él depende la seguridad, tanto del personal que labore en el muelle como de las embarcaciones atracadas en el mismo, además de que también influye directamente en la continuidad de operación, y por lo tanto, en la economía de este sistema de transporte.

Según las hipótesis que se consideren sobre la estructura y sobre los elementos que la constituyen, se tendrá un tipo de análisis, por lo que existe una gran variedad en cuanto a tipos de análisis estructural posibles.

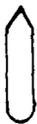


MARGINALES

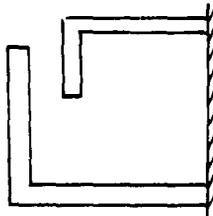


NORMALES

EN L O ENT



Rompeolas



Fuera de las Instalaciones Portuarias.

figura 2

Presentaremos a continuación cuatro de los tipos más usuales de ellos.

a) Se considera a los pilotes como estructuras aisladas, con fuerzas y momentos que resultan de repartir la fuerza y el momento totales entre el número de hileras de pilotes y entre el número de pilotes en cada hilera.

b) Se consideran marcos formados por pilotes y por trabes equivalentes a la losa, resolviéndolos con ayuda del método de rigideces en dos dimensiones.

c) Se considera al sistema como un marco tridimensional en el que la losa se mueve como cuerpo rígido en el plano horizontal (en su plano), y se resuelve el problema por medio de el método de rigideces en tres dimensiones.

d) Se considera a la estructura como medio continuo y se analiza por medio del método del elemento finito.

De acuerdo a la difusión que han tenido los diferentes métodos, han sido utilizados en proyectos por cierto periodo de tiempo.

Considero que nos encontramos en un punto en el cual debemos explotar los conocimientos que tenemos acerca de las estructuras, con la ayuda de las computadoras, sin perder de vista los conceptos básicos de las estructuras.

Podría pensarse que el método más adecuado es el de el elemento finito, pero considero que debido a la complejidad y relativamente poca difusión de el mismo, resultaría difícil transmitir al personal que utilizará el programa los

conocimientos necesarios para que se pueda modificar y aplicar a casos distintos al considerado en esta tesis. Por otra parte, el método del elemento finito requiere de una capacidad de memoria grande, de la que probablemente no se pueda disponer en todos los casos.

Por lo anterior, recomiendo se utilice el tercer método mencionado, que será el que presentaré y utilizaré en este trabajo.

Las fuerzas a las cuales está sometida la estructura son debidas a varios factores de la naturaleza, y se necesita determinar cuales de ellos afectan apreciablemente la estructura; desde luego, es necesario llevar a cabo un análisis de este tipo para cada caso, sin generalizar (excepto en casos muy parecidos, y basandose en la experiencia de un estructurista), ya que algún factor puede no ser de importancia en algún lugar, pero en otro sí, y viceversa.

En los siguientes capítulos trataremos estos factores, y más adelante el método de análisis, así como un programa para llevar a cabo el mismo. Este es útil para determinar en cada caso que elementos mecánicos deberemos considerar en el diseño, con la posibilidad de calcular el efecto de cada factor por separado.

## II. FUERZAS RELACIONADAS CON LA EMBARCACION.

Podemos dividir a estas fuerzas en dos grupos principales, que son:

a) La propia de la embarcación, es decir, la debida al impulso que lleva.

b) Las que actúan sobre la embarcación, es decir las fuerzas externas que causan un efecto sobre ella, y que, en general, son debidas a un fluido (que puede ser agua o aire) que choca contra la nave.

### II.1. FUERZA DE ATRAQUE.

La fuerza de atraque está en función de la cantidad de energía cinética que transmite la embarcación al muelle, la cual dependerá a su vez de:

a) El tipo de maniobra de atraque, la cual puede ser de rotación, de translación, o una combinación de las dos.

b) La velocidad de atraque, teniendo esta componentes que van de acuerdo a la maniobra (de traslación, de rotación o ambas).

c) El ángulo que forma el eje de la embarcación con el muelle en el momento del impacto.

d) La forma y tamaño del barco.

Quando la embarcación se deslaza, el agua que la circunda esta sujeta a una cierta distribución de velocidades, por lo que en el momento del impacto, el agua también sufre una modificación de velocidad y transmite una

cantidad de energía cinética a la embarcación. Con el fin de considerar este fenómeno, podemos simplificarlo, tomando en cuenta que, en vez de que exista una distribución de velocidades tridimensional determinada, existe, hipotéticamente, una masa de agua que se mueve con la embarcación y tiene una velocidad constante igual a la de la embarcación; para calcular esta masa, podemos utilizar tres conceptos principales, que son:

1) Masa adicional.- Generalmente se define como el peso de agua de una forma cilíndrica teniendo un diámetro igual al calado y una longitud igual a la eslora. Se calcula mediante la fórmula:

$$W_a = \gamma L H^2 \pi / 4$$

En donde  $\gamma$  es el peso específico del agua marina (aproximadamente 1.025 ton/m<sup>3</sup>), L es la eslora y H es el calado. El peso total será:

$$W = W_e + W_a$$

En donde  $W_e$  es el peso de la embarcación.

$$CH = 1 + 2D/B$$

En donde D es el calado y B es la manga.

Cuando la embarcación se acerca al muelle, lleva una energía cinética igual a:

$$E_c = Mv^2 / 2$$

Esta energía será disipada en el impacto, pero no sólo transmitiendosela al muelle, sino también al agua circundante y a la embarcación misma.

Existen varias fórmulas para calcular la energía, pero presentaremos una de las más usadas, que fue publicada por el profesor Vasco Costa, y es la siguiente:

$$E = (\text{Mu}^2/2) (1/(1+(a/k)^2))$$

En donde k es el radio de giro de la embarcación, a es la distancia entre el vector de velocidad de la embarcación y el punto de impacto con el muelle, M es la masa total y u es la magnitud de la velocidad de atraque.

El segundo factor es el llamado coeficiente de excentricidad. Si se supone que la embarcación tiene una forma de elipse alargada y angosta, o de rectángulo, el radio de giro de la embarcación es aproximadamente un cuarto de la eslora, y si el atraque se lleva a cabo con el llamado "punto un cuarto", el coeficiente de excentricidad toma un valor de 0.5.

El ingeniero Herrejón de la Torre recomienda que se utilice la mitad de la energía cinética de la embarcación, coincidiendo con las suposiciones anteriores indicando que si se hace esto, se está del lado de la seguridad.

Minikin, en sus experimentos, obtiene que el valor del porcentaje de la energía total que se transmite al muelle,

está entre 0.18 y 0.27, pero en su libro advierte que no es posible dogmatizar a partir de estos resultados.

Para determinar el valor de la energía que debemos considerar para el diseño, es muy conveniente realizar pruebas en laboratorio, simulando las condiciones probables de operación.

## II.2.DEFENSAS.

Con el fin de evitar que el impacto de la embarcación sea dañino al muelle, existen aditamentos que disipan una parte de la energía cinética transmitida. Estos aditamentos se conocen con el nombre de defensas, y existen dos tipos de ellas: las que sirven para el momento de impacto de la embarcación al atracar y las que sirven para proteger al muelle durante el tiempo que está atracada la embarcación; estas últimas no transmiten prácticamente nada de fuerza al muelle, por lo que no hablaremos de ellas, en cambio las primeras son de gran importancia, ya que de ellas dependerá la fuerza de mayor magnitud que transmita la embarcación al muelle.

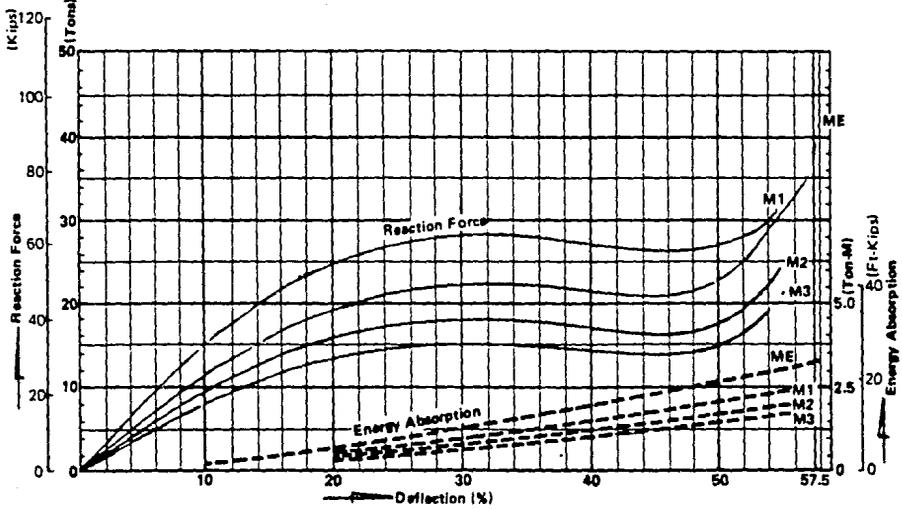
Para escoger que tipo de defensa es la más conveniente en cada caso particular, deberemos determinar la energía cinética que será transmitida, después buscaremos en las gráficas que publican los fabricantes de defensas el valor que determinamos para la energía y encontraremos la fuerza que transmitirá la defensa después de haber tomado una parte de la energía.

Por seguridad, deberemos buscar que el valor de energía que tenemos no produzca más de un 50% o 60% del valor máximo para la defensa, pero sin que baje de un porcentaje razonable, ya que estaríamos utilizando una defensa con demasiada capacidad y por lo tanto no estaríamos optimizando la utilización de recursos. En la figura 3 se muestran dos gráficas para defensas, una tipo cilíndrica y la otra tipo M, en las cuales se puede ver que existe una deformación máxima, y un rango aceptable. La forma de utilizar estas gráficas es la siguiente: se calcula la energía de ataque como ya se explicó, se entra a la gráfica con este valor, y se determina la intersección de la línea para cada material con el valor dado, tomando en cuenta la deformación porcentual que se presenta. Se escoge el material óptimo y se sube verticalmente hasta encontrar la curva de comportamiento para el material escogido, finalmente se localiza el valor de la fuerza prolongando hasta el lado izquierdo. Estas gráficas serán utilizadas en el ejemplo del capítulo VII.

### II.3. FUERZAS DE AMARRE.

Cuando la embarcación está atracada, transmite fuerzas que "empujan" o "jalan" al muelle, dependiendo de la dirección del movimiento. En esta sección trataremos con las fuerzas que "jalan" al muelle, esto es, que actúan en una dirección tierra-mar, separando la embarcación del muelle.

(3) Performance Curve



(4) Performance Curve

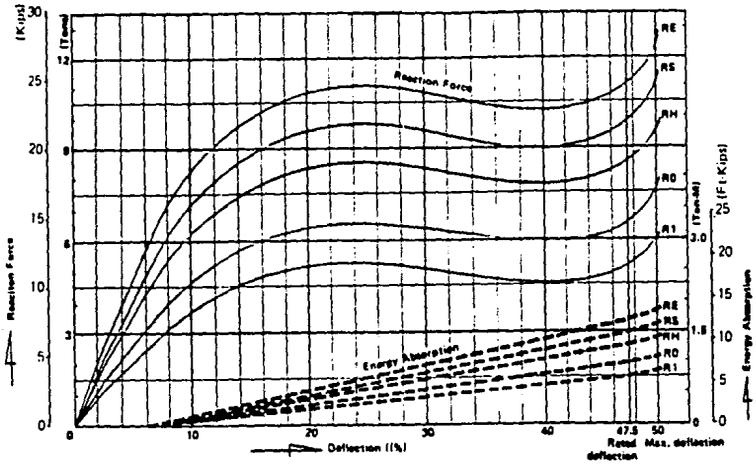


figura 3

La embarcación está sujeta a movimientos producidos por las fuerzas que actúan sobre ella, y que transmite al muelle a través de las amarras. El método más apropiado para determinar estas fuerzas consiste en hacer un modelo físico a escala y colocar dinamómetros en las amarras, reproduciendo las condiciones de diseño. Lo anterior permitirá la lectura de las fuerzas máximas que se presentan al manejarse modelos a escala. En ocasiones esto será difícil de llevar a cabo, por lo que una forma de diseñar, estando del lado de la seguridad, es tomar la fuerza como aquella igual en magnitud a la resistencia última de las amarras. Existen tablas y fórmulas que relacionan el diámetro y material de las amarras con la resistencia última de las mismas.

Cuando se diseñan muelles para embarcaciones pequeñas, no conviene tomar en cuenta la resistencia última de las amarras, ya que la fuerza que podrán ejercer las embarcaciones sobre las amarras no será suficiente para llegar a la resistencia última, estando en condiciones de operación, por lo que es conveniente fijar un porcentaje de la resistencia última, dependiendo de la relación entre el tamaño de la embarcación y el de las amarras.

En la figura 4 se muestra la posición típica de los amarres en un muelle. De esta posición podemos determinar la posición de la fuerza actuante sobre el muelle, aplicada en los bolardos. Desde luego, esta posición puede ser diferente en algunos casos, en los cuales será necesario determinar la

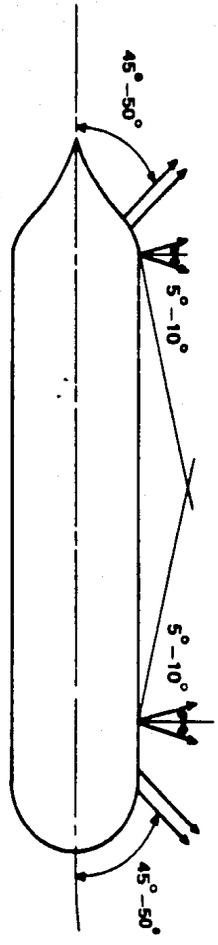


figura 4

L=longitud de la onda

H=altura de la ola

Esta expresión coincide con valores experimentales cuando se cumple que:

$$0.1 < \frac{d}{L} < 0.2$$

Sin embargo, el profesor Nagai considera que esta expresión es insuficiente para resolver problemas prácticos y por lo tanto propone tres expresiones que dependen de las relaciones  $\frac{d}{L}$  y  $\frac{H}{L}$  :

$$P = \frac{1}{2} \gamma H^2 + \frac{\gamma}{k} \tanh(kd) \quad \text{para } 0.135 < \frac{d}{L} < 0.35$$

$$P = \frac{1}{2} \gamma (1.3H)^2 + 0.15 \gamma Hd + \frac{\gamma}{k} \tanh(kd) \quad \text{para } \frac{d}{L} < 0.135$$

$$\text{y } \frac{H}{L} < 0.04$$

$$P = \frac{1}{2} \gamma H^2 + \frac{\gamma}{k} \tanh(k(d+H)) \quad \text{en los demás casos}$$

Independientemente de el método utilizado, para obtener la fuerza será necesario multiplicar la presión obtenida por el área total.

En la mayoría de los casos se presentarán olas no rompientes, pero en el caso de que la profundidad fuera muy reducida y la ola alcanzara a romper, sería necesario utilizar expresiones distintas. Lundgren presenta estas expresiones, distinguiendo entre impacto ventilado e impacto

de compresión. Se puede consultar la obra "Wave Shock Forces and Analysis on Deformation and Forces in the Wave and in the Foundation", Proceedings of the Technical University of Delft, Conference on Waves, 1969.

#### II.5. FUERZA DEBIDA A LA CORRIENTE.

Las corrientes tienen, en general, al igual que las olas, un efecto despreciable o muy pequeño en magnitud, dentro de los puertos, pero en el caso de que se deseen considerar, será necesario determinar la dirección de la corriente, la cual nunca resultará ser perpendicular a el eje de la embarcación, sino todo lo contrario, es decir será paralela al eje, por lo que el efecto será transmitido al muelle a través de las amarras; esto se trata en la sección de amarras.

#### II.6. FUERZA DEBIDA AL VIENTO.

El viento, al soplar, ejerce una fuerza que depende de la viscosidad del aire, de la velocidad y del área expuesta.

Para calcular la fuerza en el momento más desfavorable, tomaremos en cuenta que la embarcación está en lastre, es decir, totalmente descargada, para que el área expuesta sea la máxima, en condiciones de velocidad y densidad iguales.

La fórmula que podemos utilizar para el calculo de esta fuerza es:

$$F = C_M \frac{\rho AV^2}{2}$$

en donde  $C_M$  = coeficiente que depende de la forma de la embarcación y de la dirección del viento.

$\rho$  = densidad del aire.

V = velocidad del viento.

Para determinar la densidad del aire, debemos tomar en cuenta la temperatura y la presión (que será a nivel del mar), utilizando, por ejemplo, la tabla que se presenta en la figura 5.

En ocasiones se utilizará, para calcular la fuerza, la componente debida a la aceleración, es decir, al cambio de velocidad en el tiempo. En realidad, la velocidad del viento no es ni uniforme ni permanente, pero la fórmula que se presentó da resultados que no distan mucho de la realidad.

### III. FUERZAS NO RELACIONADAS CON LA EMBARCACION

#### III.1. CARGAS VERTICALES

Entre las cargas que actúan verticalmente sobre el muelle, se encuentran las siguientes:

A) Cargas Vivas: carga que espera para ser transportada, equipo para mover la carga (grúas viajeras, montacargas, plataformas, etc.), equipo de mantenimiento, personal y otras de menor importancia.

## viscosidad

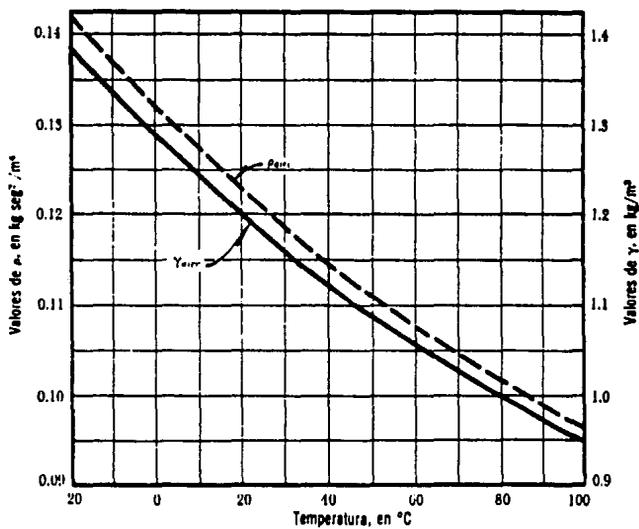


figura 5

Debido a la infinidad de combinaciones posibles de estas cargas, es conveniente determinar una carga por unidad de área, que puede ser determinada de dos formas: haciendo un análisis probabilístico (más preciso), o por medio de la experiencia y de las mediciones en campo (más práctico).

Independientemente de la forma en que se determine la carga, este dato servirá para tener una cierta idea de la carga que debe soportar cada tipo de muelle (pesquero, minero, de contenedores, etc.).

B) Cargas Muertas: peso propio de la estructura, peso de las defensas y peso de las instalaciones que se encuentran sobre el muelle (v.g. vías o estructuras para grúas).

En el caso de las cargas muertas, también es posible encontrar un peso por unidad de área de la losa, ya que las cargas por peso propio de los elementos está distribuida de una forma aproximadamente uniforme. Si existen instalaciones especiales, se podrá hacer un análisis específico de las cargas que implican.

El cálculo de cargas sobre las trabes se hará de la forma tradicional, calculando las áreas tributarias correspondientes y multiplicandolas por la carga unitaria que se haya determinado. Los momentos de empotramiento que deberemos considerar serán los de una barra con carga uniformemente repartida  $w$ . Los momentos y las fuerzas de empotramiento son:

$$M_A = M_B = \frac{w L^2}{12}$$

$$F_A = F_B = \frac{w L}{2}$$

### III.2. FUERZAS DEBIDAS AL OLEAJE.

La fuerza que ejerce un fluido en movimiento sobre un cuerpo sumergido en él, se divide en dos partes: la fuerza de arrastre y la fuerza de sustentación. En nuestro caso, se puede despreciar la fuerza de sustentación, ya que el pilote es simétrico y el flujo no es rotacional, condiciones que son suficientes para que la fuerza de sustentación sea nula.

Podemos descomponer a la fuerza de arrastre en dos partes, que son:

a) Fuerza de presión.- es la ejercida sobre el pilote debido a la presión interna del fluido.

Para calcular esta fuerza, podemos basarnos en la figura 6 y entonces utilizar la fórmula que sigue:

$$F_p = \int p \cos \phi \, ds$$

b) Fuerza de fricción.- es la que se presenta en la capa límite, debido al esfuerzo tangencial que se tiene en esta zona.

Siguiendo la figura 6, la fuerza de fricción se puede calcular con:

$$F_f = \int \tau_{0v} \sin \phi \, ds$$

Entonces, la fuerza total de arrastre será:

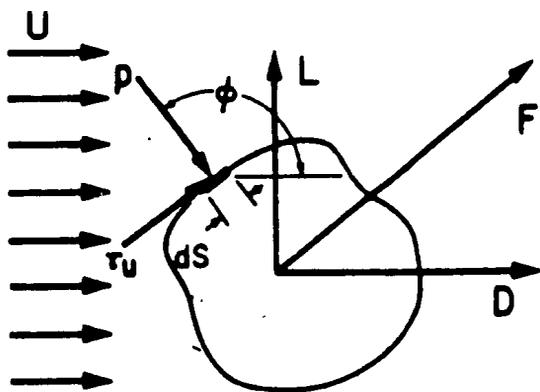


figura 6

$$F_D = F_P + F_F$$

Sin embargo, el cálculo de estas fuerzas es complicado y no es práctico.

$F_D$  depende de la carga de velocidad del flujo, del peso específico del fluido y del área expuesta, por lo que podemos considerar, para valuar  $F_D$ , los factores que intervienen en su determinación, y utilizar la fórmula:

$$F_D = C_D \gamma \frac{A V^2}{2g} = C_D \rho \frac{A V^2}{2}$$

Según Alonso de F. Quinn, la fuerza no sólo depende de la velocidad del flujo, sino que existe una componente adicional debida a la aceleración del flujo, a esta fuerza le denomina fuerza inercial, y podemos calcular esta fuerza de la siguiente forma:

$$F_I = C_M M \dot{V} = C_M \rho A h \dot{V}$$

Para poder evaluar las fuerzas anteriores, es necesario conocer la velocidad y la aceleración del flujo.

El movimiento del flujo en las olas no es horizontal, sino elíptico, pero podemos utilizar las componentes horizontales de la velocidad y de la aceleración, las cuales serán diferentes a medida que cambiamos de posición verticalmente. La distribución de las componentes horizontales dentro de una ola no se conoce con precisión, pero podemos calcularla según la teoría de movimiento que

consideremos más apropiado para el caso. La forma esquemática de esta distribución se muestra en la figura 7.

Para poder calcular la fuerza en los pilotes, es necesario considerar la fuerza en cada punto, con lo que obtendremos una distribución de fuerzas, ya que la velocidad y la aceleración no son constantes. Haciendo esto en la ecuación de la fuerza, tenemos:

$$w(z) = \left( C_D \frac{\rho D}{2} V(z)^2 + C_M \frac{\rho \pi D^2}{4} \dot{V}(z) \right)$$

Como utilizaremos el método de rigideces, es necesario conocer los momentos debidos a esta distribución de carga.

Para calcular los momentos de empotramiento, usaremos las fórmulas generales siguientes:

$$M_A = \int_0^L w(z) z (L-z)^2 dz$$

$$M_B = \int_0^L w(z) z^2 (L-z) dz$$

Estas fórmulas se aplicarán tomando en cuenta que los pilotes están sujetos a diferentes momentos, porque la posición de la ola será diferente para cada uno. En las fórmulas que se usan para determinar la velocidad y aceleración del flujo en cada punto, intervienen las variables  $x$  y  $t$ , que son: la posición a partir de la cresta y el instante  $t$  en el que se analiza el flujo, respectivamente. Para calcular la respuesta máxima suponemos un tiempo dado  $t$  (por ejemplo  $t=0$ ), y se calculan los momentos en cada pilote con la posición  $x$  medida a partir de

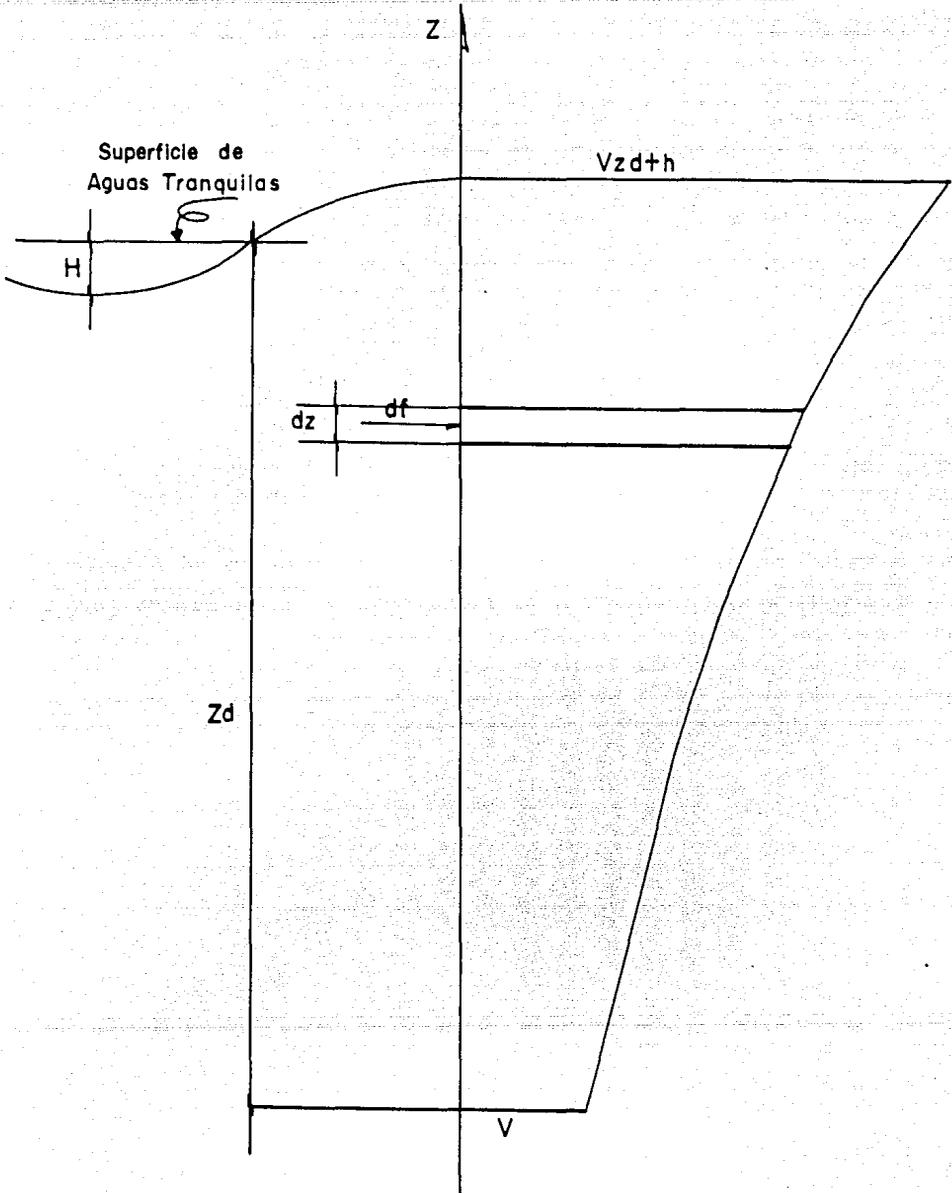


figura 7

un pilote de referencia (usualmente el primero), como se muestra en la figura 8; después variamos la posición de la cresta, la x del pilote de referencia y analizamos para cada condición, obteniendo la más desfavorable.

Cuando el flujo está dentro de régimen turbulento (números de Reynolds elevados), es posible que se formen los llamados vórtices de Von Karman. Este fenómeno se presenta debido a que hay un desprendimiento de la línea de flujo más cercana al pilote, que causa una turbulencia en forma de vórtices. Para calcular esta fuerza, podemos usar la siguiente fórmula:

$$F_K = C_K \frac{\rho A V^2}{2} \text{ sen } 2 \quad f t$$

Conocida la fuerza, podemos calcular los momentos de empotramiento debidos a una fuerza aplicados en un punto de una barra.

Esta fuerza aparece en algunos casos, en los que el régimen es turbulento, por lo que se usará solo si se requiere.

### III.3. FUERZAS DEBIDAS A LA CORRIENTE

Para calcular las fuerzas debidas a la corriente, necesitamos conocer la distribución de velocidades de la misma, con el fin de poder determinar la distribución de aceleraciones, permitiendonos calcular la distribución de carga, al igual que hicimos en el caso de el oleaje.

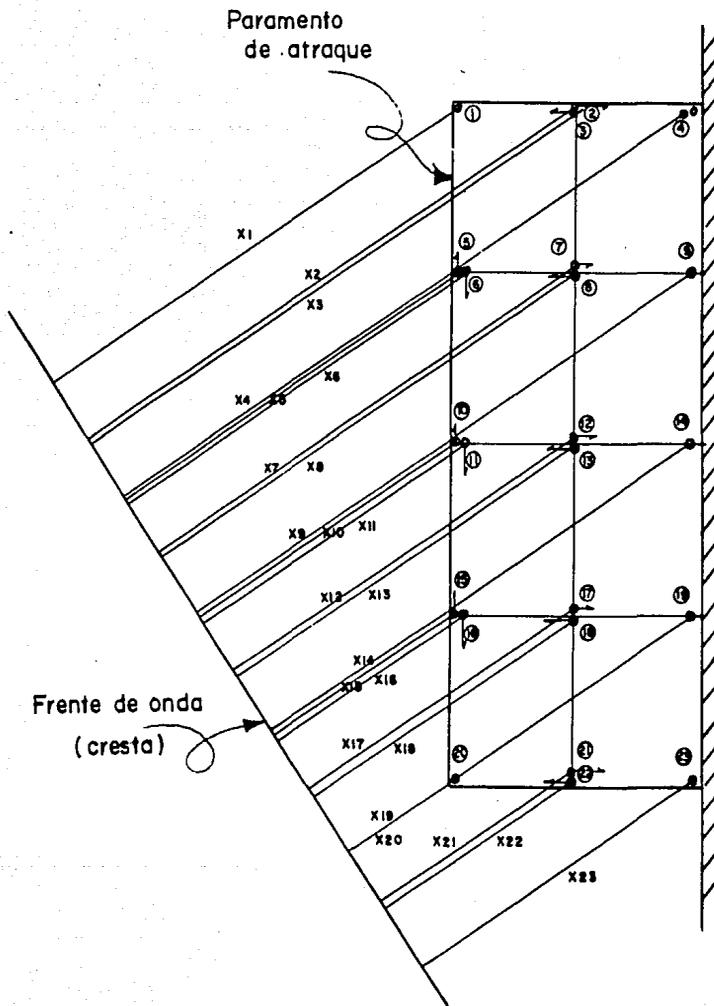


figura 8

Esta fuerza actúa principalmente sobre las defensas y sobre los objetos que se encuentren localizados en el muelle, y no sobre los pilotes, ya que estos presentan una superficie expuesta que es despreciable. El área A que debemos utilizar es el área total expuesta al viento.

Para determinar la densidad, podemos utilizar la gráfica de la figura 5, que está en función de la temperatura.

Será necesario determinar la temperatura de diseño, tomando en cuenta que la condición de carga de viento sobre el muelle se presentará cuando no exista ninguna embarcación atracada, y en el caso más desfavorable, esto será en caso de una tormenta o huracán.

#### **IV. CONSIDERACIONES SOBRE LA ESTRUCTURA.**

En este capítulo, hablaremos sobre las hipótesis que se pueden hacer con respecto a la estructura, con el fin de crear un modelo matemático adecuado para la misma.

##### **IV.1. LOSA.**

La losa es una placa, que se puede considerar flexible en su plano, así como fuera del mismo, pero para esto sería necesario utilizar un método que resuelva problemas en el medio continuo, como es el método del elemento finito. En este trabajo, y para los fines de aplicación de la misma, la losa debe considerarse infinitamente rígida en su plano, y, fuera de su plano, la losa se puede considerar equivalente a

un sistema de traveses ortogonales con anchos determinados por las lineas medias entre ejes de pilotes. Esto se ilustra en la figura 9.

Las traveses supuestas tendran flexion vertical, alrededor de un eje horizontal (x ó y) y torsion, ya que tanto la flexion alrededor del eje z como la deformacion axial estan impedidos por la rigidez infinita en el plano horizontal.

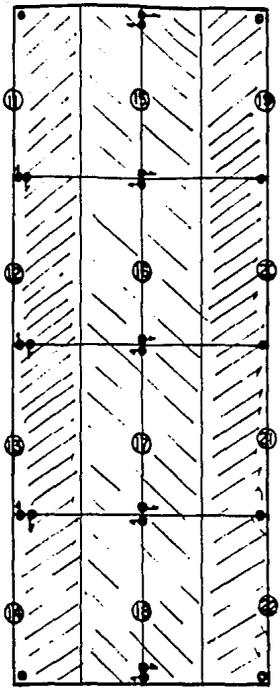
#### IV.2. PILOTES.

Los pilotes son barras de seccion circular y que no estan impedidos en su movimiento por la hipotesis de losa infinitamente rigida, por lo que tendran flexion alrededor de dos ejes, deformacion axial y torsion.

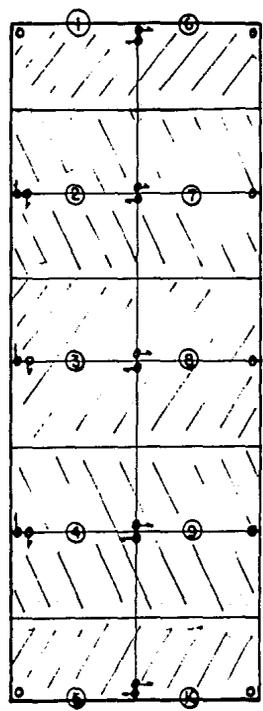
Dentro de los muelles, se colocan pilotes verticales para tomar la carga vertical y pilotes inclinados que ayudan a tomar las cargas horizontales, disminuyendo los efectos de cortante sobre los pilotes verticales.

#### IV.3. APOYOS.

Los pilotes estan apoyados en el terreno sobre el cual fueron hincados, y por lo tanto, podemos decir que la rigidez de los apoyos depende de la rigidez del suelo a la fuerza cortante. En una gran cantidad de casos, podemos considerar que los pilotes estan empotrados, pero en el caso contrario, podemos hacer dos consideraciones:



Trabes Verticales



Trabes Horizontales

a) Los pilotes están empotrados, pero no a la profundidad de desplante de los mismos, sino a una profundidad mayor que deberemos determinar. En este caso será necesario calcular la rigidez de la barra, tomando en cuenta que la rigidez será diferente en la zona debajo del terreno.

b) Los pilotes están articulados y por tanto se permite el giro en el apoyo, el cual estara a una cierta profundidad. En este caso, la rigidez de la barra será la de una barra articulada en un extremo, y con una diferente rigidez en la zona debajo del nivel del terreno.

En este trabajo se considera que los pilotes están empotrados, pero es posible modificar el programa que se presentará en el capítulo VI, para adaptarlo a casos particulares.

Una vez llevado a cabo el análisis será necesario revisar la estabilidad de los apoyos de acuerdo a las características del terreno, y a las fuerzas que obtengamos, para determinar si se está dentro de un rango aceptable de esfuerzos que no pongan en peligro la seguridad de la estructura. Para llevar a cabo este análisis, podemos utilizar diferentes métodos, de acuerdo al tipo de terreno que se tenga. Uno de los métodos que se recomienda para suelos friccionantes, es el de Meyerhoff, que considera la estabilidad del terreno tomando en cuenta que este se encuentra en talud.

## V. METODO DE ANALISIS.

El método de análisis que utilizaremos será el de rigideces, tomando en cuenta las consideraciones del capítulo anterior.

En resumen, el método consiste en lo siguiente:

a) Se numeran los nudos, los pilotes y las trabes, definiendo su sentido, de acuerdo a los sentidos positivos de los ejes.

b) Se determinan las fuerzas que actúan sobre cada barra, para cada condición de carga.

c) Se obtienen las matrices de rigidez de las barras, en sistema local, así como las fuerzas y momentos de empotramiento.

d) Se obtienen las matrices de transformación para cambiar las matrices de rigidez y las fuerzas de empotramiento a sistema global.

e) Se ensambla la matriz de rigidez de la estructura

f) Se aplican las fuerzas y momentos de empotramiento, sumadas en orden correspondiente en cada nudo, en sistema global, con sentido contrario.

g) Se obtienen los desplazamientos de los nudos.

h) Se obtienen los desplazamientos de los extremos de cada barra, en sistema local, utilizando la matriz de transformación.

i) Se calculan las fuerzas en cada elemento.

j) Se suman las fuerzas de empotramiento con las fuerzas obtenidas y se obtienen las fuerzas totales.

A continuación explicaremos como se obtiene cada matriz y como se resuelve el problema.

### V.1. MATRIZ DE RIGIDEZ DE LOS PILOTES

Para encontrar la matriz de rigidez de los pilotes, es necesario recordar que el pilote tiene 6 grados de libertad en cada extremo, por lo que tendrá 6 desplazamientos.

Las columnas de la matriz de rigidez son las fuerzas que tenemos que aplicar para obtener un desplazamiento unitario. De acuerdo con los esquemas de la figura 10, la matriz de rigidez será:

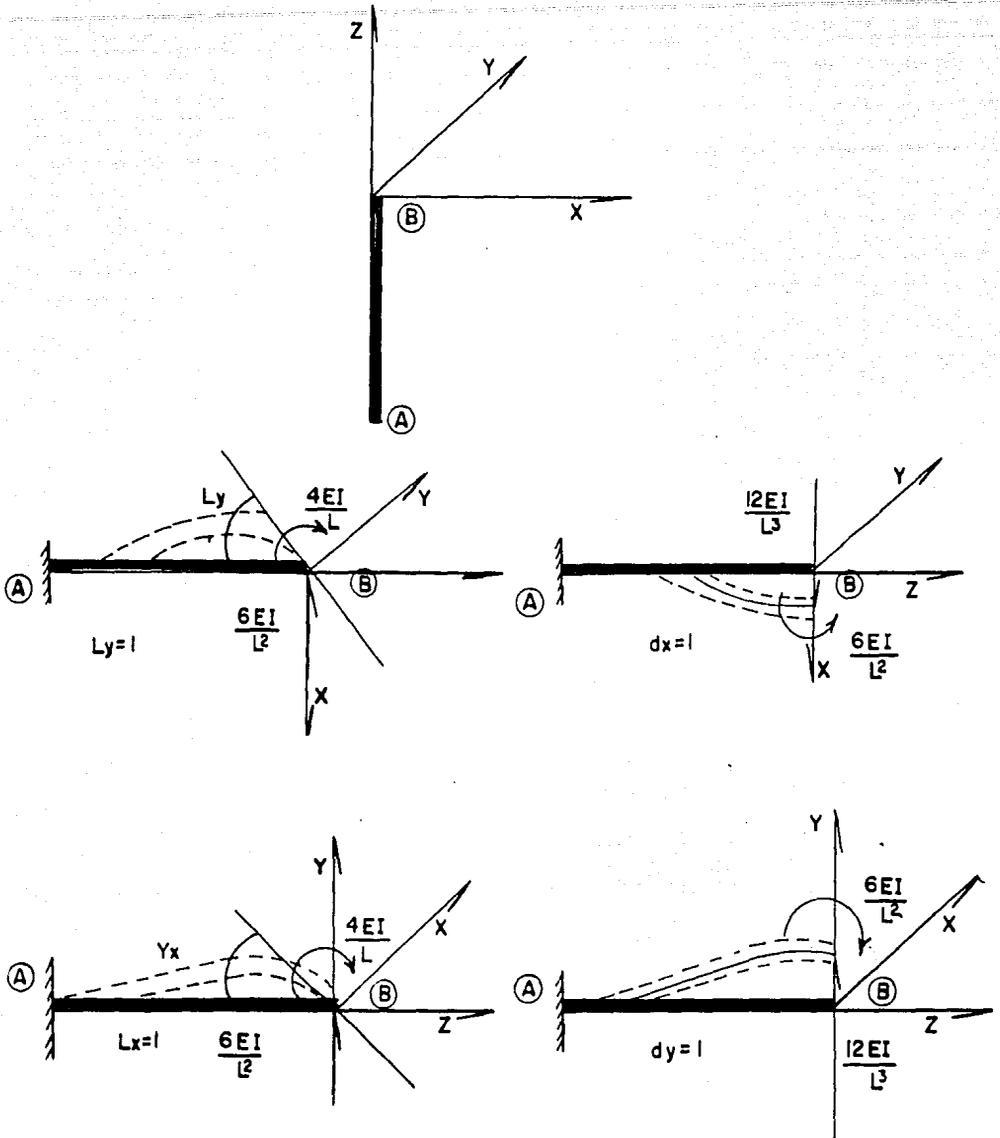


figura 10

$$[K'_{BB}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{L} & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} F_Z \\ M_X \\ M_Y \\ F_X \\ F_Y \\ M_Z \end{matrix}$$

La inercia de los pilotes para flexión en ambos ejes ( $x$  y  $y$ ), es la misma dado que son circulares, por lo que sólo se considera una inercia  $I$ .

## V.2.MATRIZ DE TRANSFORMACION

Como al matriz de rigidez de los pilotes está en coordenadas locales, esto es, relaciona los desplazamientos en coordenadas locales con las fuerzas en coordenadas locales, debemos encontrar una matriz que transforme a la matriz de rigidez para que relacione, en coordenadas globales, los desplazamientos con las fuerzas. Para hacer

$$[K'_{BB}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{L} & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} F_Z \\ M_X \\ M_Y \\ F_X \\ F_Y \\ M_Z \end{matrix}$$

La inercia de los pilotes para flexión en ambos ejes ( $x$  y  $y$ ), es la misma dado que son circulares, por lo que sólo se considera una inercia  $I$ .

## V.2.MATRIZ DE TRANSFORMACION

Como al matriz de rigidez de los pilotes está en coordenadas locales, esto es, relaciona los desplazamientos en coordenadas locales con las fuerzas en coordenadas locales, debemos encontrar una matriz que transforme a la matriz de rigidez para que relacione, en coordenadas globales, los desplazamientos con las fuerzas. Para hacer

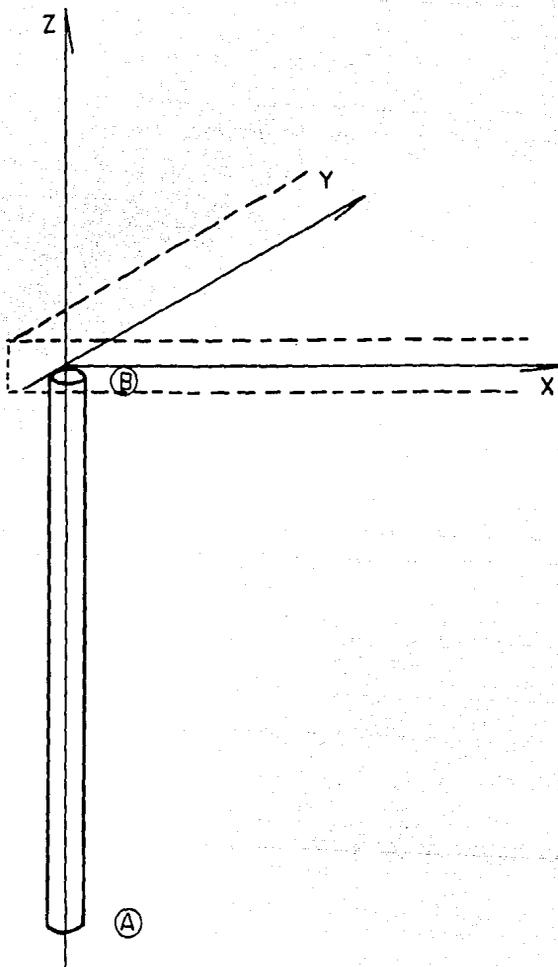


figura 11

$$\psi_{X'} = \psi_X$$

$$\psi_{Y'} = \psi_Y$$

$$d_{X'} = -Y_i \psi_{ZL} + d_{XL}$$

$$d_{Y'} = X_i \psi_{ZL} + d_{YL}$$

$$\psi_{Z'} = \psi_{ZL}$$

La matriz de transformación [T] resulta ser entonces:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -Y_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & X_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para el caso de pilote inclinado en el plano xz, ayudandonos de la figura 12, las ecuaciones serán:

$$d_{Z'} = d_Z \cos \beta_i + d_{XL} \operatorname{sen} \beta_i - \psi_{ZL} Y_i \operatorname{sen} \beta_i$$

$$\psi_{X'} = \psi_X \cos \beta_i - \psi_{ZL} \operatorname{sen} \beta_i$$

$$\psi_{Y'} = \psi_Y$$

$$d_{X'} = -d_Z \operatorname{sen} \beta_i + d_{XL} \cos \beta_i - \psi_{ZL} Y_i \cos \beta_i$$

$$d_{Y'} = d_{YL} + \psi_{ZL} X_i$$

$$\psi_{Z'} = \psi_X \operatorname{sen} \beta_i + \psi_{ZL} \cos \beta_i$$

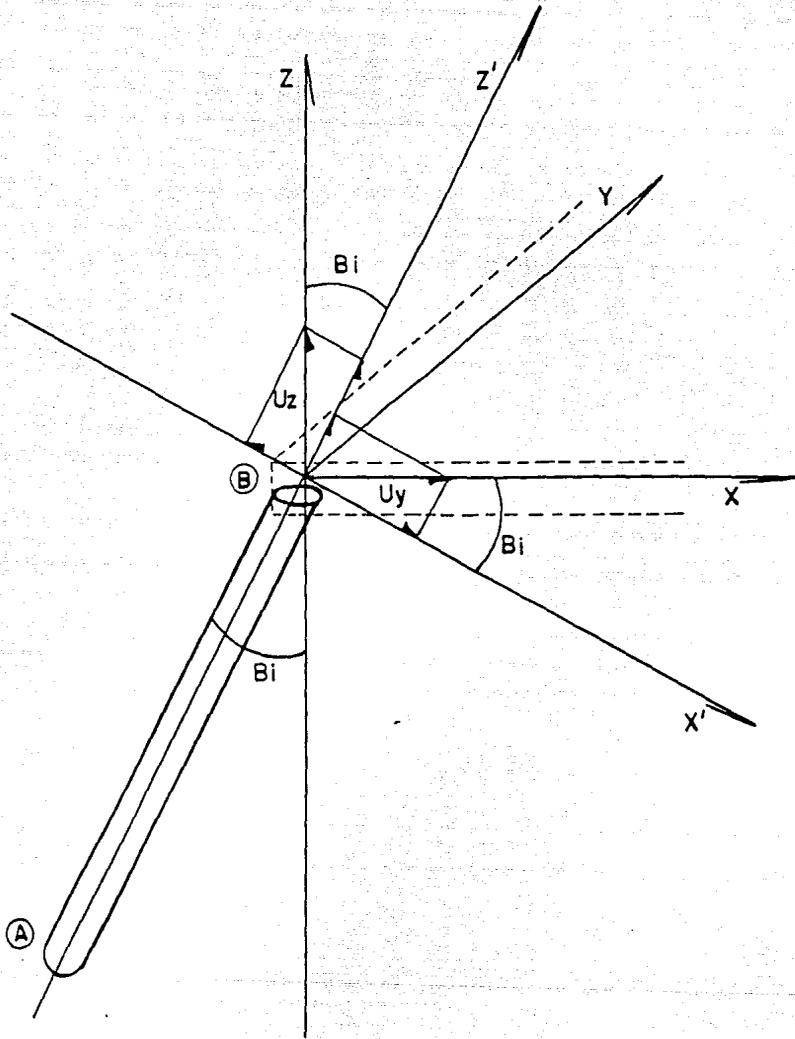


figura 12

Por lo que la matriz de transformación será:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \beta_i & 0 & 0 & \text{sen } \beta_i & 0 & -Y_i \text{ sen } \beta_i \\ 0 & \cos \beta_i & 0 & 0 & 0 & -\text{sen } \beta_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen } \beta_i & 0 & 0 & \cos \beta_i & 0 & -Y_i \cos \beta_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & X_i \\ 0 & \text{sen } \beta_i & 0 & 0 & 0 & \cos \beta_i \end{bmatrix}$$

Para el caso de pilote inclinado en el plano yz, y utilizando la figura 13, las ecuaciones son:

$$d_z' = d_z \cos \beta_i + d_{YL} \text{ sen } \beta_i + \psi_{ZL} X_i \text{ sen } \beta_i$$

$$\psi_{X'} = \psi_X$$

$$\psi_{Y'} = \psi_Y \cos \beta_i - \psi_{ZL} \text{ sen } \beta_i$$

$$d_{X'} = d_{XL} - \psi_{ZL} Y_i$$

$$d_{Y'} = -d_z \text{ sen } \beta_i + d_{YL} \cos \beta_i + \psi_{ZL} X_i \cos \beta_i$$

$$\psi_{Z'} = \psi_Y \text{ sen } \beta_i + \psi_{ZL} \cos \beta_i$$

Por lo que la matriz de transformación será como sigue:

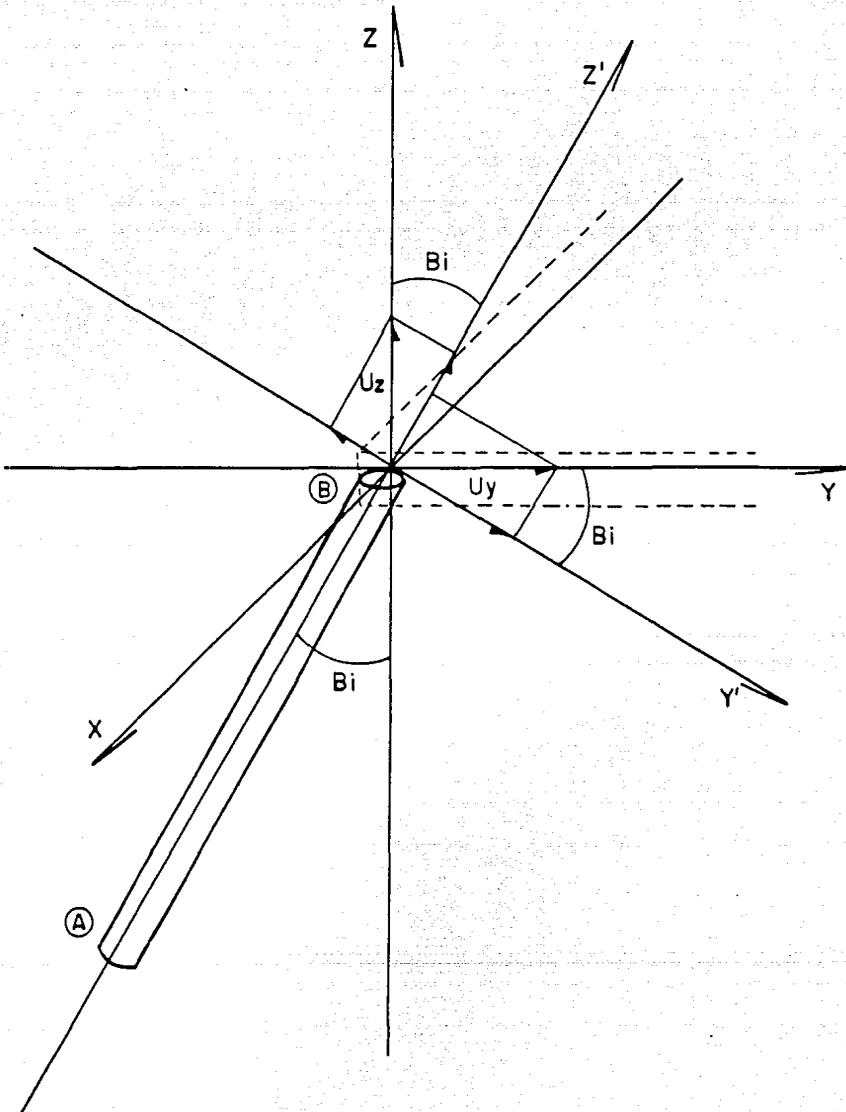


figura 13

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \beta_i & 0 & 0 & 0 & \sin \beta_i & x_i \sin \beta_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \beta_i & 0 & 0 & -\sin \beta_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -y_i \\ -\sin \beta_i & 0 & 0 & 0 & \cos \beta_i & -y_i \cos \beta_i \\ 0 & 0 & \sin \beta_i & 0 & 0 & \cos \beta_i \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez  $[K_{BB}]$ , en sistema global, tendrá la siguiente forma general:

$$[K_{BB}] = \begin{bmatrix} [K_{NN}] & [K_{NL}] \\ [K_{LN}] & [K_{LL}] \end{bmatrix}$$

La matriz  $[K_{NN}]$  relaciona los desplazamientos del nudo N con las fuerzas en el mismo, la matriz  $[K_{NL}]$  relaciona los desplazamientos de la losa con las fuerzas en el nudo N, la matriz  $[K_{LN}]$  relaciona los desplazamientos del nudo N con las fuerzas en la losa y la matriz  $[K_{LL}]$  relaciona los desplazamientos de la losa con las fuerzas en la misma.

### V.3.MATRIZ DE ESTÁTICA

Las matrices de rigidez  $[K'_{BA}]$ ,  $[K'_{AB}]$  y  $[K'_{AA}]$  no son independientes de la matriz  $[K'_{BB}]$ ; podemos encontrar una matriz  $[H_{BA}]$ , que relacione estas matrices.

Para hacer esto, utilizaremos una matriz que relaciona las fuerzas aplicadas en un extremo con las fuerzas estáticamente equivalentes aplicadas en el otro extremo, basándose en las ecuaciones que se usan para este fin.

Según los conocimientos de estática, dadas las fuerzas en un punto B, las fuerzas equivalentes en un punto A son:

$$\{F_A\} = \{F_B\}$$

$$\{M_A\} = \{r_{AB}\} \times \{F_B\}$$

En donde  $\{r_{AB}\}$  es un vector que va del punto A al punto B, y  $\{F_B\}$  es el vector de fuerzas en el punto B  $(F_{XB}, F_{YB}, F_{ZB})$ .

Por lo tanto, las ecuaciones que podemos utilizar para calcular las fuerzas y momentos en el punto A son:

$$F_{XA} = F_{XB}$$

$$F_{YA} = F_{YB}$$

$$F_{ZA} = F_{ZB}$$

$$M_{XA} = M_{XB} - F_{YB}(Z_B - Z_A) + F_{ZB}(Y_B - Y_A)$$

$$M_{YA} = M_{YB} + F_{XA}(Z_A - Z_B) - F_{ZB}(X_B - X_A)$$

$$M_{ZA} = M_{ZB} - F_{XB}(Y_B - Y_A) + F_{YA}(X_B - X_A)$$

La matriz de estática será entonces:

$$[H_{BA}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (Y_B - Y_A) & 1 & 0 & 0 & -(Z_B - Z_A) & 0 \\ -(X_B - X_A) & 0 & 1 & (Z_B - Z_A) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(Y_B - Y_A) & (X_B - X_A) & 0 \end{bmatrix}$$

Si consideramos que la matriz está en coordenadas locales, las diferencias de coordenadas en x y en y valen cero, y la diferencia de coordenadas en z vale L, por lo que la matriz queda:

$$[H_{BA}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -L & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El orden de los elementos dentro de esta matriz concuerda con el orden de las fuerzas y momentos en la

matriz de rigidez, para poder efectuar las operaciones necesarias.

La obtención de la matriz  $[K'_{AB}]$  es como sigue:

Consideremos que si tenemos un conjunto de fuerzas en el extremo B, podemos encontrar el conjunto estáticamente equivalente usando la matriz de estática:

$$\{F_A\} = [H_{BA}]\{F_B\}$$

Por otra parte, las ecuaciones que relacionan los desplazamientos respectivos con las fuerzas en ambos extremos son :

$$\{F_A\} = [K'_{AA}]\{d_A\} + [K'_{AB}]\{d_B\}$$

$$\{F_B\} = [K'_{BA}]\{d_A\} + [K'_{BB}]\{d_B\}$$

Si multiplicamos la segunda ecuación por la matriz  $[H_{BA}]$ , tenemos:

$$[H_{BA}]\{F_B\} = [H_{BA}][K'_{BA}]\{d_A\} + [H_{BA}][K'_{BB}]\{d_B\}$$

Pero el miembro izquierdo de esta ecuación es el conjunto de fuerzas y momentos estáticamente equivalentes del extremo B aplicadas en A. Como el equilibrio se debe cumplir:

$$[H_{BA}]\{F_B\} + \{F_A\} = \{0\}$$

Si ahora igualamos los segundos términos de ambas ecuaciones, y reagrupamos los términos, tenemos que:

$$[[K'_{AA}] + [H_{BA}][K'_{BA}]](d_A) + [[K'_{AB}] + [H_{BA}][K'_{BB}]](d_B) = (0)$$

Pero esto se debe cumplir para cualquier vector de desplazamientos, por lo que los coeficientes de los vectores de desplazamientos deben valer cero. Utilizaremos el segundo coeficiente:

$$[K'_{AB}] + [H_{BA}][K'_{BB}] = [0]$$

De donde:

$$[K'_{AB}] = -[H_{BA}][K'_{BB}]$$

Sabemos que  $[K'_{BA}]$  es la transpuesta de  $[K'_{AB}]$ , por lo que:

$$[K'_{BA}] = -[K'_{BB}]^T [H_{BA}]^T$$

Como  $[K'_{BB}]$  es simétrica, su transpuesta es idéntica:

$$[K'_{BA}] = -[K'_{BB}][H_{BA}]^T$$

Del segundo coeficiente, obtenemos:

$$[K'_{AA}] + [H_{BA}][K'_{BA}] = [0]$$

Por lo que:

$$[K'_{AA}] = -[H_{BA}][K'_{BA}]$$

Substituyendo  $[K'_{BA}]$

$$[K'_{AA}] = [H_{BA}][K'_{BB}][H_{BA}]^T$$

De esta forma, podemos calcular, a partir de  $[K'_{BB}]$ , las demás matrices.

#### V.4.MATRIZ DE RIGIDEZ DE LAS TRABES.

La matriz de rigidez de las trabes se puede obtener considerando que, debido a la hipótesis de losa infinitamente rígida en su plano, los desplazamientos globales  $d_x, d_y$  y  $d_z$  son iguales en ambos extremos, y por lo tanto no producen fuerzas internas.

De la figura 14, se deduce que la matriz de rigidez para una trabe en el plano xz es:

$$[K'_{AA}] = \begin{matrix} & \begin{matrix} d_z \\ x \\ y \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} & \begin{matrix} F_z \\ M_x \\ M_y \end{matrix} \end{matrix}$$

En este caso, sólo consideramos flexión alrededor de un eje horizontal (x o y), y debemos hacer notar que en este caso, para la rigidez torsional  $GJ/L$ , se calcula  $J$  de acuerdo a la siguiente expresión, para elementos delgados en sección transversal:

$$J = \frac{CH^3}{3}$$

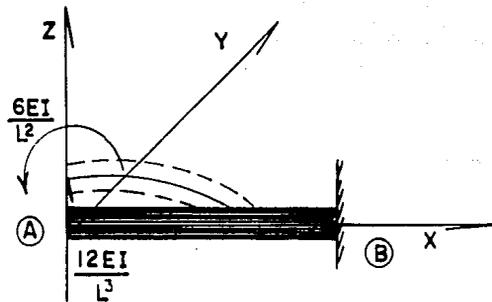
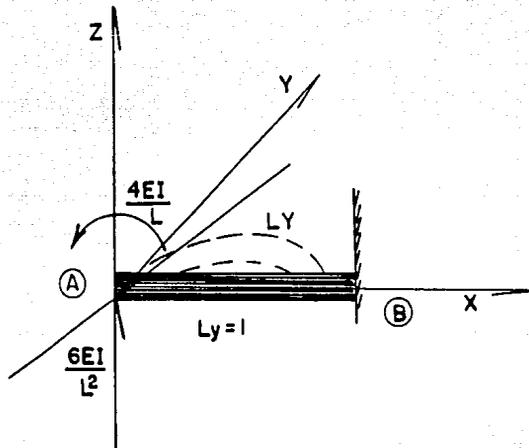
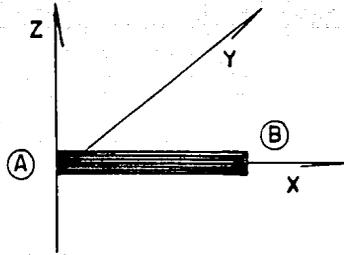


figura 14

La matriz de rigidez de las traveses que están en el plano yz se puede obtener utilizando el concepto de matriz de transformación vista anteriormente. La matriz de transformación se obtiene en este caso, usando la figura 15, según la cual podemos ver que las ecuaciones que relacionan los desplazamientos son:

$$d_{z'} = d_z$$

$$x' = y$$

$$y' = -x$$

por lo que se ve que la matriz es:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

También podemos obtener las matrices  $[K'_{AB}]$ ,  $[K'_{BA}]$  y  $[K'_{BB}]$  utilizando el concepto de matriz de estática. En este caso la matriz de estática en coordenadas locales es:

$$[H_{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ L & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

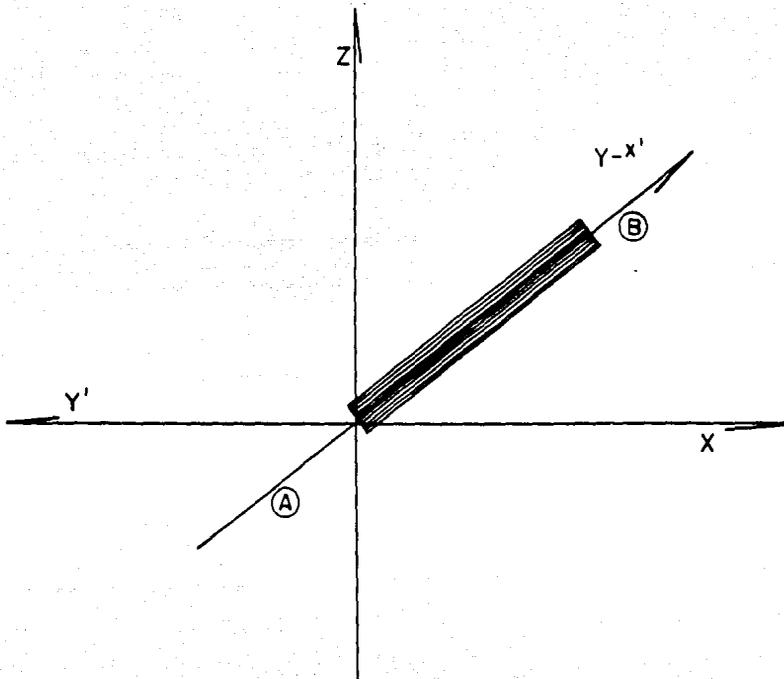


figura 15

De esta forma podemos determinar las matrices necesarias en sistema global o en sistema local, utilizando las siguientes fórmulas:

$$[K_{BA}] = -[H_{AB}][K_{AA}]$$

$$[K_{AB}] = [K_{BA}]^T$$

$$[K_{BB}] = [H_{AB}][K_{AA}][H_{AB}]^T$$

#### V.5. VECTOR DE FUERZAS DE LA ESTRUCTURA.

El vector de fuerzas de la estructura estará compuesto por vectores de fuerzas en los nudos y un vector de fuerzas de la losa.

Los vectores de fuerzas de los nudos tendrán tres componentes:  $F_z$ ,  $M_x$  y  $M_y$ ; estas fuerzas serán la suma de las fuerzas de cada extremo de elemento que coincida con el nudo, ya sean estas fuerzas de empotramiento aplicadas de sentido contrario, es decir las fuerzas efectivas, o fuerzas aplicadas directamente en los nudos.

El vector de fuerzas de la losa tendrá tres componentes también, que serán  $F_x$ ,  $F_y$  y  $M_z$ ; estas fuerzas serán la suma de todas las fuerzas  $F_x$  y  $F_y$  aplicadas en los nudos, como ya explicamos, y la de las fuerzas aplicadas en la losa: siendo la suma de momentos que cada una de estas produzca el  $M_z$ .

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} (F_1) \\ (F_2) \\ (F_3) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (F_{NN}) \\ (F_L) \end{Bmatrix}$$

El vector de desplazamientos estará formado por vectores de desplazamiento correspondientes a los de las fuerzas.

#### V.6.MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA.

Para encontrar la matriz de rigidez de la estructura, tenemos que considerar las contribuciones de rigidez de cada uno de los elementos que constituyen la estructura en cada nudo. Para hacer esto, es necesario "ensamblar" la matriz, lo cual explicaremos a continuación.

El procedimiento a seguir es el siguiente: determinamos que matrices de rigidez de los elementos relacionan los nudos  $i$  y  $j$ , considerando a la losa como nudo  $NN+1$ , sumamos esas matrices y las colocamos en la posición  $i, j$ , ocupando las nueve posiciones de la matriz de la estructura.

Debemos recordar que la matriz tendrá tres veces el número de nudos más tres renglones por el mismo número de columnas.

La forma general de la matriz será como sigue:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & [K_{13}] & \dots & [K_{1NN}] & [K_{1L}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & [K_{23}] & \dots & [K_{2NN}] & [K_{2L}] \\ [K_{31}] & [K_{32}] & [K_{33}] & \dots & [K_{3NN}] & [K_{3L}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ [K_{NN1}] & [K_{NN2}] & [K_{NN3}] & \dots & [K_{NNNN}] & [K_{NNL}] \\ [K_{L1}] & [K_{L2}] & [K_{L3}] & \dots & [K_{LNN}] & [K_{LL}] \end{bmatrix}$$

#### V.7. SOLUCION.

La solución consiste en resolver el sistema de ecuaciones:

$$(F) = [K](d)$$

Para hacer esto, usaremos el método de Cholesky, que será explicado a continuación.

La matriz  $[K]$  de la estructura se puede descomponer en el siguiente producto de tres matrices:

$$[K] = [S]^T [D] [S]$$

En donde [S] es una matriz triangular superior con unos en la diagonal principal, y [D] es una matriz diagonal.

Las matrices [S] y [D] pueden ser calculadas mediante un proceso recursivo usando las siguientes expresiones:

$$D_{11} = K_{11}$$

$$S_{ii} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, 3 \cdot NN + 3$$

$$S_{ij} = \frac{K_{ij}}{D_{11}} \quad j \geq 2$$

$$D_{ii} = K_{ii} - \sum_{l=1}^{i-1} S_{li}^2 D_{ll} \quad i \geq 2$$

$$S_{ij} = \frac{1}{D_{ii}} \left( K_{ij} - \sum_{l=1}^{i-1} S_{li} S_{lj} D_{ll} \right) \quad i \geq 2, j \geq i+1$$

La ecuación se resuelve de la siguiente forma; consideremos la ecuación:

$$[S]^T [D] [S] \{d\} = \{F\}$$

La solución consta de dos pasos, el primero consiste en plantear la siguiente ecuación:

$$[D] [S] \{d\} = \{Z\}$$

y sustituyendo:

$$[S]^T \{Z\} = \{F\}$$

Ahora resolvemos esta ecuación mediante una sustitución hacia adelante:

$$Z_i = F_i - \sum_{l=1}^{i-1} S_{li} Z_l$$

El segundo paso consiste en sustituir (Z) en la ecuación y resolverla por medio de una sustitución hacia atrás:

$$d_i = \frac{Z_i}{D_{ii}} - \sum_{l=i+1}^{3*NN+1} S_{il} F_l$$

Cabe hacer notar que es posible utilizar una sola matriz, que almacena en su diagonal la de la matriz [D], y en su parte superior, la matriz [S].

## VI. PROGRAMA PARA EL ANALISIS.

```
10 KEY OFF
20 CLS
30 CLEAR
40 INPUT"NUMERO DE CASOS DE CARGA:";NC
50 PRINT
60 LPRINT"NUMERO DE CASOS DE CARGA:";NC
70 LPRINT
80 INPUT"NUMERO DE NUDOS:";NN
90 PRINT
100 LPRINT"NUMERO DE NUDOS:";NN
110 LPRINT
120 INPUT"NUMERO DE PILOTES:";NP
130 PRINT
140 LPRINT"NUMERO DE PILOTES:";NP
150 LPRINT
160 INPUT"NUMERO DE TRABES:";NT
170 PRINT
180 LPRINT"NUMERO DE TRABES:";NT
190 LPRINT
200 NB=NP+NT
210 DB=4*NT+2*NP
220 INPUT"MODULO DE ELASTICIDAD:";E
230 PRINT
240 LPRINT"MODULO DE ELASTICIDAD:";E
250 LPRINT
```

```
260 INPUT"MODULO DE POISSON:";MP
270 PRINT
280 LPRINT"MODULO DE POISSON:";MP
290 LPRINT
300 G=E/(2+2*MP)
310 INPUT"ESPESOR DE LA LOSA:";H
320 LPRINT"ESPESOR DE LA LOSA:";H
330 LPRINT
340 LPRINT
350 LPRINT
360 DIM A(NT)
370 DIM B(NB)
380 DIM X(NB)
390 DIM Y(NB)
400 DIM M(4*NB)
410 DIM N(4*NB)
420 DIM R(DB+2*NP,6,6)
430 DIM H(6,6)
440 DIM Q(4*NB,6,6)
450 DIM O(6,6)
460 DIM T(NB,6,6)
470 DIM S(4*NT+NP,6,6)
480 DIM K(3*NN+3,3*NN+3)
490 DIM KC(3*NN+3,3*NN+3)
500 DIM F(NC,3*NN+3)
510 DIM E(2,NB,6)
520 DIM EG(NC,3*NN+3)
```

```
530 DIM ET(NC,NB,6)
540 DIM FUN(3*NN+3)
550 DIM DG(NB,6)
560 DIM DLT(NC,2,NT,3)
570 DIM DLP(NC,NB,6)
580 DIM EL(NC,2,NB,6)
590 FOR B=1 TO NT
600 CLS
610 PRINT"TRABE NUMERO:";B
620 PRINT
630 LPRINT"TRABE NUMERO:";B
640 LPRINT
650 INPUT"DEL NUDO:";A(B)
660 PRINT
670 LPRINT"DEL NUDO:";A(B)
680 LPRINT
690 INPUT"AL NUDO:";B(B)
700 PRINT
710 LPRINT"AL NUDO:";B(B)
720 LPRINT
730 INPUT"LONGITUD:";L
740 PRINT
750 LPRINT"LONGITUD:";L
760 LPRINT
770 INPUT"ANCHO:";C
780 PRINT
790 LPRINT"ANCHO:";C
```

```
800 LPRINT
810 I=C*H^3/12
820 J=C*H^3/3
830 A=C*H
840 H(1,1)=1
850 H(2,2)=1
860 H(3,1)=L
870 H(3,3)=1
880 M(4*B-3)=A(B)
890 N(4*B-3)=A(B)
900 M(4*B-2)=A(B)
910 N(4*B-2)=B(B)
920 M(4*B-1)=B(B)
930 N(4*B-1)=A(B)
940 M(4*B)=B(B)
950 N(4*B)=B(B)
960 Q(4*B-3,1,1)=12*E*I/L^3
970 Q(4*B-3,1,3)=-6*E*I/L^2
980 Q(4*B-3,2,2)=G*J/L
990 Q(4*B-3,3,1)=Q(4*B-3,1,3)
1000 Q(4*B-3,3,3)=4*E*I/L
1010 FOR U=1 TO 3
1020 FOR V=1 TO 3
1030 FOR W=1 TO 3
1040 Q(4*B-1,U,V)=-H(U,W)*Q(4*B-3,W,V)+Q(4*B-1,U,V)
1050 NEXT W
1060 NEXT V
```

```
1070 NEXT U
1080 FOR U=1 TO 3
1090 FOR V=1 TO 3
1100 FOR W=1 TO 3
1110 Q(4*B,U,V)=-Q(4*B-1,U,W)*H(V,W)+Q(4*B,U,V)
1120 NEXT W
1130 Q(4*B-2,V,U)=Q(4*B-1,U,V)
1140 NEXT V
1150 NEXT U
1160 INPUT"PLANO XZ O PLANO YZ:";A$
1170 IF A$="XZ" THEN GOTO 1200
1180 IF A$="YZ" THEN GOTO 1270
1190 GOTO 1160
1200 LPRINT"PLANO:";A$
1210 LPRINT
1220 LPRINT
1230 T(B,1,1)=1
1240 T(B,2,2)=1
1250 T(B,3,3)=1
1260 GOTO 1330
1270 LPRINT"PLANO:";A$
1280 LPRINT
1290 LPRINT
1300 T(B,1,1)=1
1310 T(B,2,3)=1
1320 T(B,3,2)=-1
1330 FOR X=4 TO 1 STEP -1
```

```
1340 FOR U=1 TO 3
1350 FOR V=1 TO 3
1360 FOR W=1 TO 3
1370 S(4*B-X+1,U,V)=Q(4*B-X+1,U,W)*T(B,W,V)+S(4*B-
X+1,U,V)
1380 NEXT W
1390 NEXT V
1400 NEXT U
1410 NEXT X
1420 FOR X=4 TO 1 STEP -1
1430 FOR U=1 TO 3
1440 FOR V=1 TO 3
1450 FOR W=1 TO 3
1460 R(4*B-X+1,U,V)=T(B,W,U)*S(4*B-X+1,W,V)+R(4*B-
X+1,U,V)
1470 NEXT W
1480 NEXT V
1490 NEXT U
1500 NEXT X
1510 NEXT B
1520 H(3,1)=0
1530 FOR B=NT+1 TO NB
1540 CLS
1550 PRINT"PILOTE NUMERO:";B-NT
1560 PRINT
1570 LPRINT"PILOTE NUMERO:";B-NT
1580 LPRINT
```

```
1590 INPUT"NUDO TERMINAL:";B(B)
1600 PRINT
1610 LPRINT"NUDO TERMINAL:";B(B)
1620 LPRINT
1630 INPUT"DIAMETRO:";D
1640 PRINT
1650 LPRINT"DIAMETRO:";D
1660 LPRINT
1670 INPUT"LONGITUD:";L
1680 PRINT
1690 LPRINT"LONGITUD:";L
1700 LPRINT
1710 INPUT"COORDENADA EN X A PARTIR DE 0:";X(B)
1720 PRINT
1730 LPRINT"COORDENADA EN X A PARTIR DE 0:";X(B)
1740 LPRINT
1750 INPUT"COORDENADA EN Y A PARTIR DE 0:";Y(B)
1760 PRINT
1770 LPRINT"COORDENADA EN Y A PARTIR DE 0:";Y(B)
1780 LPRINT
1790  $A=D^2*3.14159/4$ 
1800  $I=D^4*3.14159/64$ 
1810  $J=2*I$ 
1820  $H(1,1)=1$ 
1830  $H(2,2)=1$ 
1840  $H(2,5)=-L$ 
1850  $H(3,3)=1$ 
```

```
1860 H(3,4)=L
1870 H(4,4)=1
1880 H(5,5)=1
1890 H(6,6)=1
1900 CO=2*NT
1910 Q(CO+2*B,1,1)=E*A/L
1920 Q(CO+2*B,2,2)=4*E*I/L
1930 Q(CO+2*B,2,5)=6*E*I/L^2
1940 Q(CO+2*B,5,2)=Q(CO+2*B,2,5)
1950 Q(CO+2*B,3,3)=Q(CO+2*B,2,2)
1960 Q(CO+2*B,3,4)=-6*E*I/L^2
1970 Q(CO+2*B,4,3)=Q(CO+2*B,3,4)
1980 Q(CO+2*B,4,4)=12*E*I/L^3
1990 Q(CO+2*B,5,5)=Q(CO+2*B,4,4)
2000 Q(CO+2*B,6,6)=G*J/L
2010 FOR U=1 TO 6
2020 FOR V=1 TO 6
2030 FOR W=1 TO 6
2040 Q(CO+2*B-1,U,V)=-H(U,W)*Q(CO+2*B,W,V)+Q(CO+2*B-
1,U,V)
2050 NEXT W
2060 NEXT V
2070 NEXT U
2080 INPUT"VERTICAL, PLANO XZ O PLANO YZ (V/XZ/YZ):";B$
2090 PRINT
2100 IF B$="V" THEN GOTO 2140
2110 IF B$="XZ" THEN GOTO 2260
```

```
2120 IF B$="YZ" THEN GOTO 2470
2130 GOTO 2080
2140 LPRINT"POSICION:";B$
2150 LPRINT
2160 LPRINT
2170 T(B,1,1)=1
2180 T(B,2,2)=1
2190 T(B,3,3)=1
2200 T(B,4,4)=1
2210 T(B,5,5)=1
2220 T(B,6,6)=1
2230 T(B,4,6)=-Y(B)
2240 T(B,5,6)=X(B)
2250 GOTO 2660
2260 LPRINT"POSICION:";B$
2270 LPRINT
2280 INPUT"ANGULO DE INCLINACION RESPECTO A Z:";Z
2290 PRINT
2300 LPRINT"ANGULO DE INCLINACION RESPECTO A Z:";Z
2310 LPRINT
2320 LPRINT
2330 T(B,1,1)=COS(Z)
2340 T(B,1,4)=SIN(Z)
2350 T(B,1,6)=-Y(B)*T(B,1,4)
2360 T(B,2,2)=T(B,1,1)
2370 T(B,2,6)=-T(B,1,4)
2380 T(B,3,3)=1
```

```
2390 T(B,4,1)=-T(B,1,4)
2400 T(B,4,4)=T(B,1,1)
2410 T(B,4,6)=-Y(B)*T(B,1,1)
2420 T(B,5,5)=1
2430 T(B,5,6)=X(B)
2440 T(B,6,2)=T(B,1,4)
2450 T(B,6,6)=T(B,1,1)
2460 GOTO 2660
2470 LPRINT"POSICION:";B$
2480 LPRINT
2490 INPUT"ANGULO DE INCLINACION RESPECTO A Z:";Z
2500 LPRINT"ANGULO DE INCLINACION RESPECTO A Z:";Z
2510 LPRINT
2520 LPRINT
2530 T(B,1,1)=COS(Z)
2540 T(B,1,5)=SIN(Z)
2550 T(B,1,6)=X(B)*T(B,1,5)
2560 T(B,2,2)=1
2570 T(B,3,3)=T(B,1,1)
2580 T(B,3,6)=-T(B,1,5)
2590 T(B,4,4)=1
2600 T(B,4,6)=-Y(B)
2610 T(B,5,1)=-T(B,1,5)
2620 T(B,5,5)=T(B,1,1)
2630 T(B,5,6)=X(B)*T(B,1,1)
2640 T(B,6,3)=T(B,1,5)
2650 T(B,6,6)=T(B,1,1)
```

2660 FOR U=1 TO 6

2670 FOR V=1 TO 6

2680 FOR W=1 TO 6

2690

$S(CO+B+NT, U, V) = Q(CO+2*B, U, W) * T(B, W, V) + S(CO+B+NT, U, V)$

2700 NEXT W

2710 NEXT V

2720 NEXT U

2730 FOR U=1 TO 6

2740 FOR V=1 TO 6

2750 FOR W=1 TO 6

2760  $O(U, V) = T(B, W, U) * S(CO+B+NT, W, V) + O(U, V)$

2770 NEXT W

2780 NEXT V

2790 NEXT U

2800 FOR U=1 TO 3

2810 FOR V=1 TO 3

2820  $R(4*B-3, U, V) = O(U, V)$

2830  $O(U, V) = 0$

2840  $R(4*B-2, U, V) = O(U, 3+V)$

2850  $O(U, 3+V) = 0$

2860  $R(4*B-1, U, V) = O(3+U, V)$

2870  $O(3+U, V) = 0$

2880  $R(4*B, U, V) = O(3+U, 3+V)$

2890  $O(3+U, 3+V) = 0$

2900 NEXT V

2910 NEXT U

```
2920 M(4*B-3)=B(B)
2930 N(4*B-3)=B(B)
2940 M(4*B-2)=B(B)
2950 N(4*B-2)=NN+1
2960 M(4*B-1)=NN+1
2970 N(4*B-1)=B(B)
2980 M(4*B)=NN+1
2990 N(4*B)=NN+1
3000 NEXT B
3010 FOR B=1 TO 4*NB
3020 FOR U=1 TO 3
3030 FOR V=1 TO 3
3040 X=3*(M(B)-1)+U
3050 Y=3*(N(B)-1)+V
3060 KC(X,Y)=R(B,U,V)+KC(X,Y)
3070 NEXT V
3080 NEXT U
3090 NEXT B
3100 FOR CA=1 TO NC
3110 FOR B=1 TO NT
3120 CLS
3130 PRINT"          FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO"
3140 PRINT
3150 LPRINT"          FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO"
3160 LPRINT
3170 PRINT"TRABE NUMERO:";B
3180 PRINT
```

```

3190 LPRINT"TRABE NUMERO:";B
3200 LPRINT
3210 INPUT"MA=";E(1,B,3)
3220 LPRINT"MA=";E(1,B,3)
3230 INPUT"MB=";E(2,B,3)
3240 LPRINT"MB=";E(2,B,3)
3250 INPUT"FA=";E(1,B,1)
3260 LPRINT"FA=";E(1,B,1)
3270 INPUT"FB=";E(2,B,1)
3280 LPRINT"FB=";E(2,B,1)
3290 LPRINT
3300 LPRINT
3310 FOR U=1 TO 3
3320 FOR V=1 TO 3
3330 EG(CA,3*A(B)-3+U)=T(B,V,U)*E(1,B,V)+EG(CA,3*A(B)-
3+U)
3340 EG(CA,3*B(B)-3+U)=T(B,V,U)*E(2,B,V)+EG(CA,3*B(B)-
3+U)
3350 NEXT V
3360 NEXT U
3370 CLS
3380 NEXT B
3390 FOR B=NT+1 TO NB
3400 CLS
3410 PRINT"          FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO"
3420 PRINT
3430 LPRINT"          FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO"

```

```
3440 LPRINT
3450 PRINT"PILOTE NUMERO:";B-NT
3460 PRINT
3470 LPRINT"PILOTE NUMERO:";B-NT
3480 LPRINT
3490 INPUT"MX(A)=";E(1,B,2)
3500 LPRINT"MX(A)=";E(1,B,2)
3510 INPUT"MY(A)=";E(1,B,3)
3520 LPRINT"MY(A)=";E(1,B,3)
3530 INPUT"FX(A)=";E(1,B,4)
3540 LPRINT"FX(A)=";E(1,B,4)
3550 INPUT"FY(A)=";E(1,B,5)
3560 LPRINT"FY(A)=";E(1,B,5)
3570 INPUT"MX(B)=";E(2,B,2)
3580 LPRINT"MX(B)=";E(2,B,2)
3590 INPUT"MY(B)=";E(2,B,3)
3600 LPRINT"MY(B)=";E(2,B,3)
3610 INPUT"FX(B)=";E(2,B,4)
3620 LPRINT"FX(B)=";E(2,B,4)
3630 INPUT"FY(B)=";E(2,B,5)
3640 LPRINT"FY(B)=";E(2,B,5)
3650 LPRINT
3660 LPRINT
3670 FOR U=1 TO 6
3680 FOR V=1 TO 6
3690 ET(CA,B,U)=T(B,V,U)*E(2,B,V)+ET(CA,B,U)
3700 NEXT V
```

```
3710 NEXT U
3720 FOR U=1 TO 3
3730 EG(CA,3*B(B)-3+U)=ET(CA,B,U)+EG(CA,3*B(B)-3+U)
3740 NEXT U
3750 FOR U=4 TO 6
3760 EG(CA,3*NN-3+U)=ET(CA,B,U)+EG(CA,3*NN-3+U)
3770 NEXT U
3780 NEXT B
3790 FOR B=1 TO NN+1
3800 FOR U=1 TO 3
3810 F(CA,3*B-3+U)=-EG(CA,3*B-3+U)+F(CA,3*B-3+U)
3820 NEXT U
3830 NEXT B
3840 CLS
3850 PRINT"          FUERZAS EN LOS NUDOS"
3860 PRINT
3870 LPRINT"          FUERZAS EN LOS NUDOS"
3880 LPRINT
3890 INPUT"NUDO:";X
3900 IF X=0 THEN GOTO 4080
3910 LPRINT"NUDO:";X
3920 LPRINT
3930 PRINT"FZ(";X;")=";
3940 INPUT FUN(3*(X-1)+1)
3950 LPRINT"FZ(";X;")=";FUN(3*(X-1)+1)
3960 F(CA,3*(X-1)+1)=FUN(3*(X-1)+1)+F(CA,3*(X-1)+1)
3970 PRINT"MX(";X;")=";
```

```
3980 INPUT FUN(3*(X-1)+2)
3990 LPRINT"MX(";X;)"=";FUN(3*(X-1)+2)
4000 F(CA,3*(X-1)+2)=FUN(3*(X-1)+2)+F(CA,3*(X-1)+2)
4010 PRINT"MY(";X;)"=";
4020 INPUT FUN(3*(X-1)+3)
4030 LPRINT"MY(";X;)"=";FUN(3*(X-1)+3)
4040 LPRINT
4050 LPRINT
4060 F(CA,3*(X-1)+3)=FUN(3*(X-1)+3)+F(CA,3*(X-1)+3)
4070 GOTO 3840
4080 CLS
4090 PRINT"          FUERZAS EN LA LOSA"
4100 PRINT
4110 LPRINT"          FUERZAS EN LA LOSA"
4120 LPRINT
4130 INPUT"FX=";FUN(3*NN+1)
4140 LPRINT"FX=";FUN(3*NN+1)
4150 F(CA,3*NN+1)=FUN(3*NN+1)+F(CA,3*NN+1)
4160 INPUT"FY=";FUN(3*NN+2)
4170 LPRINT"FY=";FUN(3*NN+2)
4180 F(CA,3*NN+2)=FUN(3*NN+2)+F(CA,3*NN+2)
4190 INPUT"MZ=";FUN(3*NN+3)
4200 LPRINT"MZ=";FUN(3*NN+3)
4210 LPRINT
4220 LPRINT
4230 LPRINT
4240 LPRINT
```

```
4250 F(CA,3*NN+3)=FUN(3*NN+3)+F(CA,3*NN+3)
4260 CLS
4270 FOR U=1 TO 3*(NN+1)
4280 FOR V=1 TO 3*(NN+1)-U+1
4290 K(U,V)=KC(U,U+V-1)
4300 NEXT V
4310 NEXT U
4320 FOR U=2 TO 3*NN+3
4330 FOR V=3*NN+3 TO 3*NN+3-U+2 STEP -1
4340 NEXT V
4350 NEXT U
4360 FOR U=2 TO 3*(NN+1)
4370 FOR V=1 TO U
4380 IF V=1 THEN GOTO 4420
4390 FOR W=1 TO V-1
4400 K(V,U-V+1)=K(V,U-V+1)-K(W,1)*K(W,U-W+1)*K(W,V-W+1)
4410 NEXT W
4420 IF U<>V THEN K(V,U-V+1)=K(V,U-V+1)/K(V,1)
4430 NEXT V
4440 NEXT U
4450 FOR U=2 TO 3*(NN+1)
4460 FOR V=1 TO U-1
4470 F(CA,U)=F(CA,U)-K(V,U-V+1)*F(CA,V)
4480 NEXT V
4490 NEXT U
4500 FOR U=1 TO 3*(NN+1)
4510 F(CA,U)=F(CA,U)/K(U,1)
```

```
4520 NEXT U
4530 FOR U=3*(NN+1)-1 TO 1 STEP -1
4540 FOR V=U+1 TO 3*(NN+1)
4550 F(CA,U)=F(CA,U)-K(U,V-U+1)*F(CA,V)
4560 NEXT V
4570 NEXT U
4580 FOR U=1 TO 3*NN
4590 V=1+INT((U-1)/3)
4600 W=U-3*INT((U-1)/3)
4610 DG(V,W)=F(CA,U)
4620 NEXT U
4630 FOR U=1 TO NN
4640 FOR V=4 TO 6
4650 DG(U,V)=F(CA,3*NN+V-3)
4660 NEXT V
4670 NEXT U
4680 FOR B=1 TO NT
4690 FOR U=1 TO 3
4700 FOR V=1 TO 3
4710 DLT(CA,1,B,U)=T(B,U,V)*DG(A(B),V)+DLT(CA,1,B,U)
4720 DLT(CA,2,B,U)=T(B,U,V)*DG(B(B),V)+DLT(CA,2,B,U)
4730 NEXT V
4740 NEXT U
4750 FOR U=1 TO 3
4760 FOR V=1 TO 3
4770 EL(CA,1,B,U)=Q(4*B-
```

3,U,V)\*DLT(CA,1,B,V)+EL(CA,1,B,U)

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

```

4780 EL(CA,1,B,U)=Q(4*B-
2,U,V)*DLT(CA,2,B,V)+EL(CA,1,B,U)
4790 EL(CA,2,B,U)=Q(4*B-
1,U,V)*DLT(CA,1,B,V)+EL(CA,2,B,U)
4800 EL(CA,2,B,U)=Q(4*B,U,V)*DLT(CA,2,B,V)+EL(CA,2,B,U)
4810 NEXT V
4820 EL(CA,1,B,U)=EL(CA,1,B,U)+E(1,B,U)
4830 EL(CA,2,B,U)=EL(CA,2,B,U)+E(2,B,U)
4840 NEXT U
4850 NEXT B
4860 FOR B=NT+1 TO NB
4870 FOR U=1 TO 6
4880 FOR V=1 TO 6
4890 DLP(CA,B,U)=T(B,U,V)*DG(B(B),V)+DLP(CA,B,U)
4900 NEXT V
4910 NEXT U
4920 NEXT B
4930 FOR B=NT+1 TO NB
4940 FOR U=1 TO 6
4950 FOR V=1 TO 6
4960 EL(CA,1,B,U)=Q(CO+2*B-
1,U,V)*DLP(CA,B,V)+EL(CA,1,B,U)
4970 EL(CA,2,B,U)=Q(CO+2*B,U,V)*DLP(CA,B,V)+EL(CA,2,B,U)
4980 NEXT V
4990 EL(CA,1,B,U)=EL(CA,1,B,U)+E(1,B,U)
5000 EL(CA,2,B,U)=EL(CA,2,B,U)+E(2,B,U)
5010 NEXT U

```

```
5020 NEXT B
5030 LPRINT" CASO NUMERO:";CA
5040 LPRINT" _____ "
5050 LPRINT
5060 LPRINT
5070 LPRINT"FUERZAS TOTALES EN TRABES"
5080 LPRINT
5090 LPRINT
5100 LPRINT
5110 FOR B=1 TO NT
5120 LPRINT"TRABE:";B
5130 LPRINT
5140 LPRINT"FZ(A)=";EL(CA,1,B,1)
5150 LPRINT"MT(A)=";EL(CA,1,B,2)
5160 LPRINT"M(A)=";EL(CA,1,B,3)
5170 LPRINT
5180 LPRINT"FZ(B)=";EL(CA,2,B,1)
5190 LPRINT"MT(B)=";EL(CA,2,B,2)
5200 LPRINT"M(B)=";EL(CA,2,B,3)
5210 LPRINT
5220 LPRINT
5230 NEXT B
5240 LPRINT
5250 LPRINT
5260 LPRINT"FUERZAS TOTALES EN PILOTES"
5270 LPRINT
5280 LPRINT
```

```
5290 LPRINT
5300 FOR B=NT+1 TO NB
5310 LPRINT"PILOTE:";B-NT
5320 LPRINT
5330 LPRINT"FA(A)=";EL(CA,1,B,1)
5340 LPRINT"MX(A)=";EL(CA,1,B,2)
5350 LPRINT"MY(A)=";EL(CA,1,B,3)
5360 LPRINT"FX(A)=";EL(CA,1,B,4)
5370 LPRINT"FY(A)=";EL(CA,1,B,5)
5380 LPRINT"MT(A)=";EL(CA,1,B,6)
5390 LPRINT
5400 LPRINT"FA(B)=";EL(CA,2,B,1)
5410 LPRINT"MX(B)=";EL(CA,2,B,2)
5420 LPRINT"MY(B)=";EL(CA,2,B,3)
5430 LPRINT"FX(B)=";EL(CA,2,B,4)
5440 LPRINT"FY(B)=";EL(CA,2,B,5)
5450 LPRINT"MT(B)=";EL(CA,2,B,6)
5460 LPRINT
5470 LPRINT
5480 NEXT B
5490 NEXT CA
5500 END
```

## VII.EJEMPLO DE APLICACION.

El siguiente ejemplo es con el fin de presentar la forma general de aplicación del programa, sin tener una gran cantidad de datos, por lo que puede pensarse que no es un caso real, ya que tomaremos un muelle pequeño, que probablemente se pudiera presentar sólo en algún lugar de menor importancia.

Con el fin de evitar un ejemplo demasiado amplio, consideraremos únicamente algunos de los factores (los más importantes) que influyen en el diseño. En este ejemplo consideraremos que se puede aplicar la teoría lineal para el oleaje y las siguientes condiciones de diseño:

a) oleaje no rompiente en condición de tormenta con:

$H=1m$  y  $L=40m$ .

b) embarcación con DWT de: 500 Ton.

c) velocidad de atraque: 15 cm/seg.

d) carga muerta:  $0.48 T/m^2$ .

e) carga viva:  $0.6 T/m^2$ .

f) temperatura en condición de tormenta:  $5^{\circ}C$

Supondremos que la densidad del agua del mar para la temperatura presentada es de 1.05.

En la figura 16 se presenta un esquema con las dimensiones del muelle.

El primer paso consiste en calcular las fuerzas de empotramiento en cada barra y las fuerzas en los nudos.

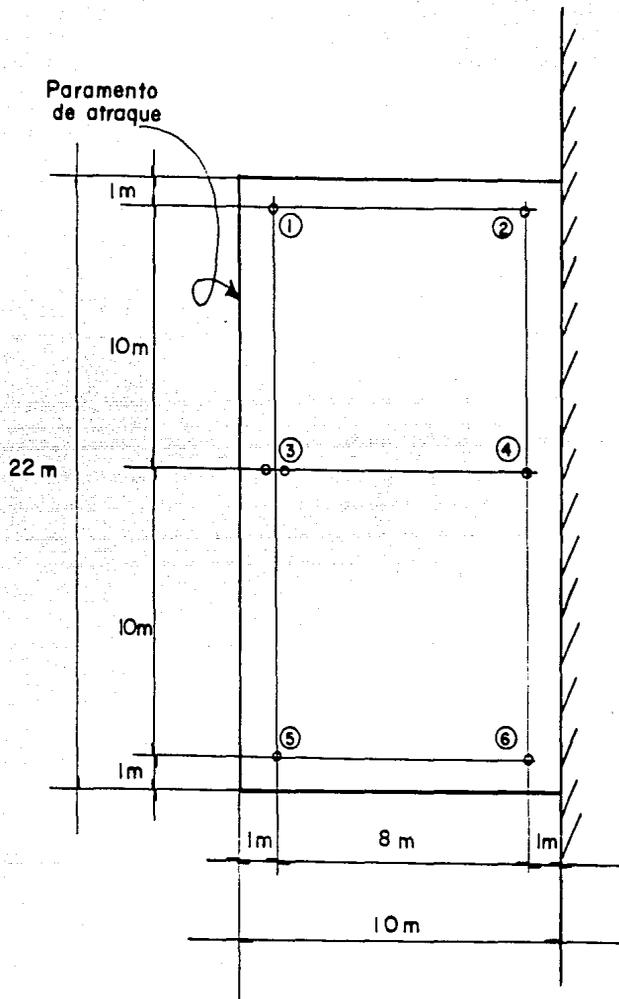


figura 16

Utilizaremos la integración numérica, aplicandola para cada pilote. Se aceptará el hecho de que las fuerzas calculadas para pilote vertical se apliquen para pilotes inclinados, ya que la inclinación es pequeña.

Para calcular las fuerzas de empotramiento en los pilotes, tomaremos en cuenta la posición y la longitud de los pilotes mostrada en la figura 17, de lo cual resulta:

pilote	$M_A$	$M_B$
1	0.0048	0.0143
2	0	0
3	0.0049	0.0143
4	0.0049	0.0143
5	0	0
6	0.0048	0.0143
7	0	0

Como podemos observar, los valores de los momentos son muy pequeños, por lo que no consideraremos el caso de tormenta. Sin embargo, cabe hacer notar que en otros casos, con valores de H y D más grandes, estos momentos pueden ser de magnitud considerable.

En el caso de las trabes, debemos calcular las áreas tributarias según el diagrama de la figura 18. El área calculada multiplicada por la carga unitaria (muerta más viva), y dividida entre la longitud, nos dará la carga  $w$  por unidad de longitud. Los momentos serán:

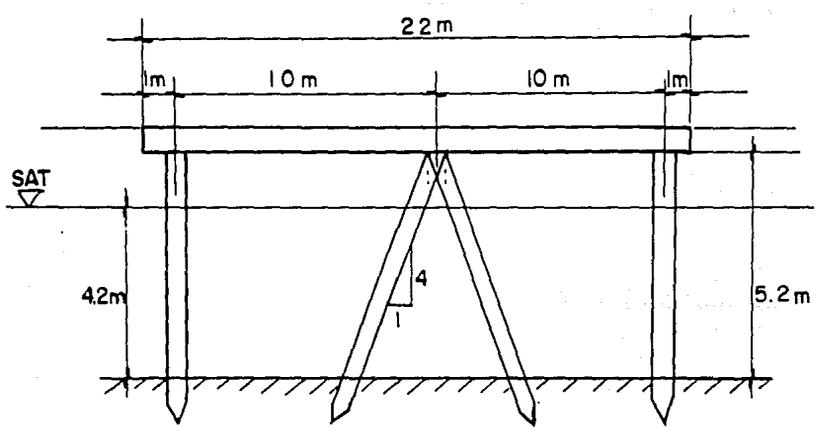
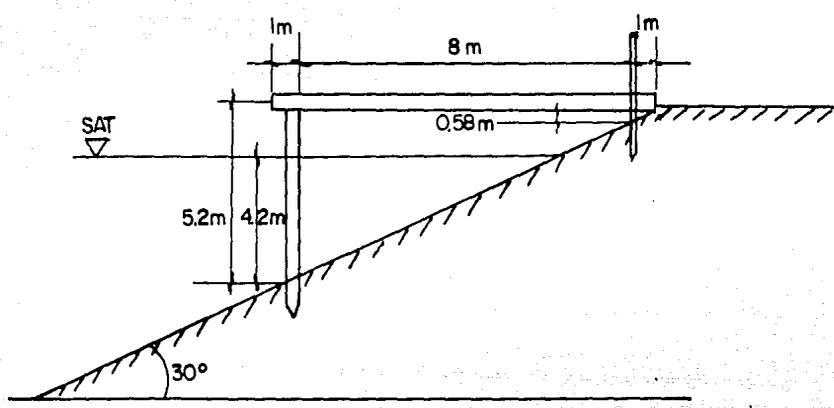
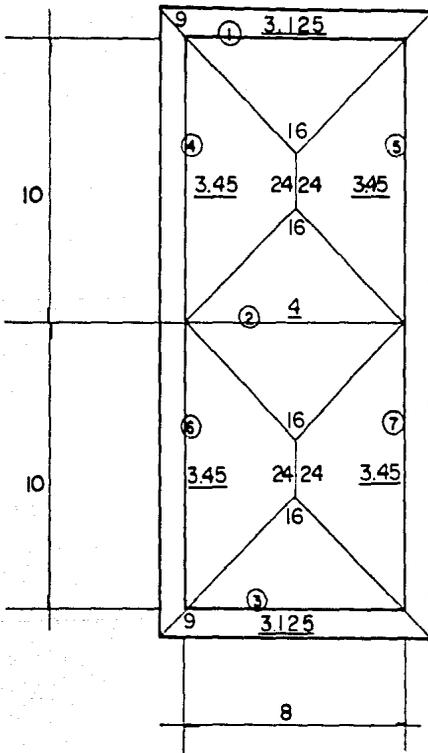


figura 17



Las cantidades subrayadas son las áreas para cada trabe entre su longitud.

Las cantidades sin subrayar son la areas considerada.

figura 18

$$M = \frac{wL^2}{12}$$

y las fuerzas serán:

$$F = \frac{wL}{2}$$

Con estas fórmulas, y utilizando las áreas tributarias, se obtienen las siguientes fuerzas de empotramiento:

Trabe	$M_A = M_B$ (Ton-m)	$F_A = F_B$ (Ton)
1	18	50
2	23.04	17.28
3	18	50
4	31.05	13.50
5	31.05	13.50
6	31.05	13.50
7	31.05	13.50

La energía de atraque se calculará suponiendo el atraque llamado "a un cuarto", y considerando que el peso aproximado de una embarcación de 500 Ton. cargado es de 1000 Ton., con lo que la energía de atraque será:

$$E = \frac{0.5Wv^2}{g} = \frac{0.5(1000)(0.15)^2}{9.81} = 1.15 \text{ Ton-m}$$

Utilizando las gráficas de la figura 3, determinaremos la fuerza de atraque. Utilizando la gráfica de la defensa tipo C (cilíndrica), obtenemos que:

$F = 8 \text{ Ton}$  (deformación=43%) material RH

Utilizando la gráfica de la defensa tipo M, obtenemos que:

$F = 14 \text{ Ton}$  (deformación=41%) material M3

Por lo tanto, escogeremos la defensa cilíndrica, ya que presenta una fuerza considerablemente menor y con una deformación que es prácticamente la misma.

Los datos obtenidos se alimentan al programa, y la impresión de los resultados del mismo se presentan en las siguientes páginas.

NUMERO DE CASOS DE CARGA: 1

NUMERO DE NUDOS: 6

NUMERO DE PILOTES: 7

NUMERO DE TRABES: 7

MODULO DE ELASTICIDAD: 200000

MODULO DE POISSON: .2

ESPESOR DE LA LOSA: .25

TRABE NUMERO: 1

DEL NUDO: 1

AL NUDO: 2

LONGITUD: 8

ANCHO: 6

PLANO: YZ

TRABE NUMERO: 2

DEL NUDO: 3

AL NUDO: 4

LONGITUD: 8

ANCHO: 10

PLANO: YZ

TRABE NUMERO: 3

DEL NUDO: 5

AL NUDO: 6

LONGITUD: 8

ANCHO: 6

PLANO: YZ

TRABE NUMERO: 4

DEL NUDO: 1

AL NUDO: 3

LONGITUD: 10

ANCHO: 5

PLANO: XZ

TRABE NUMERO: 5

DEL NUDO: 2

AL NUDO: 4

LONGITUD: 10

ANCHO: 5

PLANO: XZ

TRABE NUMERO: 6

DEL NUDO: 3

AL NUDO: 5

LONGITUD: 10

ANCHO: 5

PLANO: XZ

TRABE NUMERO: 7

DEL NUDO: 4

AL NUDO: 6

LONGITUD: 10

ANCHO: 5

PLANO: XZ

PILOTE NUMERO: 1

NUDO TERMINAL: 1

DIAMETRO: .3

LONGITUD: 5.2

COORDENADA EN X A PARTIR DE 0: 0

COORDENADA EN Y A PARTIR DE 0: 0

POSICION: V

PILOTE NUMERO: 2

NUDO TERMINAL: 2

DIAMETRO: .3

LONGITUD: .58

COORDENADA EN X A PARTIR DE 0: 0

COORDENADA EN Y A PARTIR DE 0: 8

POSICION: V

PILOTE NUMERO: 3

NUDO TERMINAL: 3

DIAMETRO: .3

LONGITUD: 5.36

COORDENADA EN X A PARTIR DE 0: 10

COORDENADA EN Y A PARTIR DE 0: 0

POSICION: XZ

ANGULO DE INCLINACION RESPECTO A Z: 14.04

PILOTE NUMERO: 4

NUDO TERMINAL: 3

DIAMETRO: .3

LONGITUD: 5.36

COORDENADA EN X A PARTIR DE 0: 10  
COORDENADA EN Y A PARTIR DE 0: 0  
POSICION: XZ  
ANGULO DE INCLINACION RESPECTO A Z: -14.04

PILOTE NUMERO: 5  
NUDO TERMINAL: 4  
DIAMETRO: .3  
LONGITUD: .58

COORDENADA EN X A PARTIR DE 0: 10  
COORDENADA EN Y A PARTIR DE 0: 8  
POSICION: V

PILOTE NUMERO: 6  
NUDO TERMINAL: 5  
DIAMETRO: .3  
LONGITUD: 5.2

COORDENADA EN X A PARTIR DE 0: 20  
COORDENADA EN Y A PARTIR DE 0: 0  
POSICION: V

PILOTE NUMERO: 7  
NUDO TERMINAL: 6  
DIAMETRO: .3  
LONGITUD: .58

COORDENADA EN X A PARTIR DE 0: 20  
COORDENADA EN Y A PARTIR DE 0: 8  
POSICION: V

## FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO

TRABE NUMERO: 1

MA= 18  
MB=-18  
FA= 13.5  
FB= 13.5

## FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO

TRABE NUMERO: 2

MA= 23.04  
MB=-23.04  
FA= 17.28  
FB= 17.28

## FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO

TRABE NUMERO: 3

MA= 18  
MB=-18  
FA= 13.5  
FB= 13.5

## FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO

TRABE NUMERO: 4

MA=-31.05  
MB= 31.05  
FA= 18.63  
FB= 18.63

## FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO

TRABE NUMERO: 5

MA=-31.05  
MB= 31.05  
FA= 18.63  
FB= 18.63

## FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO

TRABE NUMERO: 6

MA=-31.05  
MB= 31.05  
FA= 18.63  
FB= 18.63

### FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO

TRABE NUMERO: 7

MA=-31.05  
MB= 31.05  
FA= 18.63  
FB= 18.63

### FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO

PILOTE NUMERO: 1

MX(A)=0  
MY(A)=0  
FX(A)=0  
FY(A)=0  
MX(B)=0  
MY(B)=0  
FX(B)=0  
FY(B)=0

### FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO

PILOTE NUMERO: 2

MX(A)=0  
MY(A)=0  
FX(A)=0  
FY(A)=0  
MX(B)=0  
MY(B)=0  
FX(B)=0  
FY(B)=0

### FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO

PILOTE NUMERO: 3

MX(A)=0  
MY(A)=0  
FX(A)=0  
FY(A)=0  
MX(B)=0

MY (B)=0  
FX (B)=0  
FY (B)=0

#### FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO

PILOTE NUMERO: 4

MX (A)=0  
MY (A)=0  
FX (A)=0  
FY (A)=0  
MX (B)=0  
MY (B)=0  
FX (B)=0  
FY (B)=0

#### FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO

PILOTE NUMERO: 5

MX (A)=0  
MY (A)=0  
FX (A)=0  
FY (A)=0  
MX (B)=0  
MY (B)=0  
FX (B)=0  
FY (B)=0

#### FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO

PILOTE NUMERO: 6

MX (A)=0  
MY (A)=0  
FX (A)=0  
FY (A)=0  
MX (B)=0  
MY (B)=0  
FX (B)=0  
FY (B)=0

#### FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO

PILOTE NUMERO: 7

MX (A)=0  
MY (A)=0  
FX (A)=0

FY (A)=0  
MX (B)=0  
MY (B)=0  
FX (B)=0  
FY (B)=0

FUERZAS EN LOS NUDOS

FUERZAS EN LA LOSA

FX=0  
FY=8  
MZ=160

CASO NUMERO: 1

---

FUERZAS TOTALES EN TRABES

TRABE: 1

FZ (A)= 13.81347  
MT (A)= 4.281857  
M (A)= 3.20359

FZ (B)= 13.18654  
MT (B)=-4.281857  
M (B)=-5.711316

TRABE: 2

FZ (A)= 17.22842  
MT (A)= 9.661509E-03  
M (A)= 2.329296

FZ (B)= 17.33158  
MT (B)=-9.661509E-03  
M (B)=-1.916664

TRABE: 3

FZ (A)= 13.60083  
MT (A)=-4.265109  
M (A)= 3.46074

FZ(B) = 13.39917  
MT(B) = 4.265109  
M(B) = -4.267355

TRABE: 4

FZ(A) = 15.04359  
MT(A) = .7914143  
M(A) = -7.096098

FZ(B) = 22.21461  
MT(B) = -.7914143  
M(B) = 42.96021

TRABE: 5

FZ(A) = 16.06399  
MT(A) = -.3111739  
M(A) = -13.90851

FZ(B) = 21.19601  
MT(B) = .3111739  
M(B) = 39.56865

TRABE: 6

FZ(A) = 22.21333  
MT(A) = -.9612512  
M(A) = -42.94299

FZ(B) = 15.04667  
MT(B) = .9612512  
M(B) = 7.109711

TRABE: 7

FZ(A) = 21.20107  
MT(A) = .8006764  
M(A) = -39.59007

FZ(B) = 16.05893  
MT(B) = -.8006764  
M(B) = 13.87936

FUERZAS TOTALES EN PILOTES

## PILOTE: 1

FA(A) = 28.85705  
MX(A) = 1.283103  
MY(A) = 1.399454  
FX(A) = .810326  
FY(A) = -.7106304  
MT(A) = -1.424353E-03  
FA(B) = -28.85705  
MX(B) = 2.412175  
MY(B) = 2.814241  
FX(B) = -.810326  
FY(B) = .7106304  
MT(B) = 1.424353E-03

## PILOTE: 2

FA(A) = 29.25052  
MX(A) = 3.490408  
MY(A) = 9.113012  
FX(A) = 47.07479  
FY(A) = 3.292641  
MT(A) = -1.277006E-02  
FA(B) = -29.25052  
MX(B) = -5.400142  
MY(B) = 18.19036  
FX(B) = -47.07479  
FY(B) = -3.292641  
MT(B) = 1.277006E-02

## PILOTE: 3

FA(A) = 31.2177  
MX(A) = 1.120398  
MY(A) = -6.375083E-02  
FX(A) = -2.373521E-02  
FY(A) = -.5965786  
MT(A) = -.1011255  
FA(B) = -31.2177  
MX(B) = 2.077263  
MY(B) = -6.346989E-02  
FX(B) = 2.373521E-02  
FY(B) = .5965786  
MT(B) = .1011255

## PILOTE: 4

FA(A) = 32.32978  
MX(A) = 1.122007

MY(A) = .0363109  
FX(A) = 1.360125E-02  
FY(A) = -.5974792  
MT(A) = 9.844442E-02  
FA(B) = -32.32978  
MX(B) = 2.080481  
MY(B) = 3.659182E-02  
FX(B) = -1.360125E-02  
FY(B) = .5974792  
MT(B) = -9.844442E-02

PILOTE: 5

FA(A) = 59.72866  
MX(A) = 5.468847  
MY(A) = 3.337287E-02  
FX(A) = .1111357  
FY(A) = -4.207474  
MT(A) = -1.277006E-02  
FA(B) = -59.72866  
MX(B) = -3.028513  
MY(B) = 3.108582E-02  
FX(B) = -.1111357  
FY(B) = 4.207474  
MT(B) = 1.277006E-02

PILOTE: 6

FA(A) = 28.64749  
MX(A) = 1.346482  
MY(A) = -1.429965  
FX(A) = -.8220311  
FY(A) = -.7396104  
MT(A) = -1.424353E-03  
FA(B) = -28.64749  
MX(B) = 2.499492  
MY(B) = -2.844597  
FX(B) = .8220311  
FY(B) = .7396104  
MT(B) = 1.424353E-03

PILOTE: 7

FA(A) = 29.4581  
MX(A) = 6.042387  
MY(A) = -9.054401  
FX(A) = -46.89459  
FY(A) = -4.440872  
MT(A) = -1.277006E-02  
FA(B) = -29.4581  
MX(B) = -3.466683

**MY(B) = -18.14446**  
**FX(B) = 46.89459**  
**FY(B) = 4.440872**  
**MT(B) = 1.277006E-02**

### VIII.COMENTARIOS Y CONCLUSIONES.

Debemos comentar las limitaciones de el programa que se presenta, así como del modelo matemático. El considerar a la losa como un sistema de trabes no es una aproximación muy exacta, por lo que el comportamiento real de la estructura será distinta del considerado, ya que la losa es una placa, y para determinar su comportamiento, se debe considerar como tal. Este aspecto es determinante, pero sacrificamos un poco de precisión por facilidad de modelar y de trabajar con el programa en una aplicación práctica.

Para la operación correcta del programa, debemos considerar un sistema global de referencia y las trabes deberán de ir orientadas en el sentido positivo de el eje correspondiente.

Si se hacen las correcciones necesarias, se puede aplicar a estructuras como plataformas marinas, o estructuras fuera de las instalaciones portuarias.

Las fuerzas totales obtenidas se pueden modificar para obtener los elementos mecánicos de acuerdo a la convención de signos que se desee.

El hecho de que no se pide la geometría de la estructura, permite que demos valores diferentes a las longitudes de las trabes con el fin de permitir ajustar el modelo a los resultados experimentales.

En general, podemos decir que el presente trabajo pueda ser de gran utilidad a los ingenieros que llevan a

cabo el análisis estructural de los muelles, y de las estructuras marítimas en general, ya que contiene los elementos necesarios para poder evaluar los factores actuantes sobre las mismas y la forma de incluirlos en el programa para llevar a cabo un análisis más cercano a las condiciones reales de comportamiento.

**BIBLIOGRAFIA**

Quinn, Alonzo de F., DESIGN AND CONSTRUCTION OF PORTS AND MARITIME STRUCTURES., Mc Graw Hill, 1972

Wiegel, Robert L., OCEANOGRAPHICAL ENGINEERING.  
Prentice Hall, Engelwood, 1965

Bruun, Per, PORT ENGINEERING  
Houston, 1980

Herrejón de la Torre, Luis, ESTRUCTURAS MARITIMAS  
Limusa, México, 1982

Levi, Enzo, COMPLEMENTOS DE MECANICA DE FLUIDOS  
Series del Instituto de Ingenieria, México, 1980

Sotelo, Gilberto, HIDRAULICA GENERAL  
Limusa, México, 1987

Rubinstein, Moshe F., STRUCTURAL SYSTEMS-STATICS, DYNAMICS AND STABILITY, Prentice Hall, New Jersey, 1970

Damy, Julio Ernesto, APUNTES DE LA CLASE DE TEORIA GENERAL DE LAS ESTRUCTURAS I

Damy, Julio Ernesto, APUNTES DE LA CLASE DE TOPICOS ESTRUCTURALES