

32  
29



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA INTEGRAL DE FUNCIONES DE  $R$  EN  $R$   
(MATERIAL PARA LOS ESTUDIANTES DE CALCULO)

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

ENRIQUE VEGA RAMIREZ

FALLA DE COPIA

1990



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# I N D I C E

Pág.

## INTRODUCCION.

### CAPITULO I.

Problema (1). Caída libre de los cuerpos pesados.....	1
Problema (2). Determinación del área bajo una curva.....	5
Problema (3). Atracción gravitacional de una barra.....	7
Problema (4). Trabajo realizado por una fuerza.....	10
Problema (5). Momentos y Centro de Masa.....	14

### CAPITULO II.

2.1. Propiedades Básicas del concepto de área que comunmente manejamos.....	18
2.2. Construcción de la integral.....	28
2.2.1. Primera vía de construcción de la integral.....	27
2.2.2. Segunda vía de construcción de la integral.....	57
2.2.3. Tercera vía de construcción de la integral.....	89
2.3. Propiedades básicas de la integral.....	79
2.4. Teorema del Valor Medio y del Valor Medio generalizado para la integral.....	91
2.5. Problemas resueltos.....	99

### CAPITULO III

Continuidad e Integrabilidad.....	108
-----------------------------------	-----

### CAPITULO IV

4.1. Teorema Fundamental del Cálculo.....	149
4.2. Teorema de Cambio de Variable.....	178
4.3. Integral Impropia.....	190
4.4. Problemas resueltos.....	202
BIBLIOGRAFIA.....	209

## INTRODUCCION:

El presente trabajo está dirigido a estudiantes de los primeros semestres de las carreras de Física y Matemáticas. Al exponer la teoría de la integral, se profundiza en la discusión de conceptos y resultados, que generalmente no se desarrolla en la mayoría de los libros de texto dedicados a estos niveles.

Inicialmente se proponen varios problemas cuya discusión plantea la necesidad de realizar un análisis detallado de los conceptos y resultados matemáticos involucrados; posteriormente, al abordar la discusión de los diversos temas se hace tanto de manera intuitiva como formal.

En el primer capítulo se plantea una serie de problemas, desarrollando su solución. Esta, para todas ellas, conduce a la discusión del área bajo la gráfica de una función.

En el segundo capítulo se aborda el concepto de la integral, por tres vías diferentes, a partir del estudio del área bajo la gráfica de una función. Se demuestra la equivalencia de estas tres formas y se concluye con la demostración de algunas propiedades de la integral.

En el tercer capítulo se abordan las condiciones necesarias y suficientes, en términos de la continuidad, para que una función sea integrable.

Para finalizar, en el cuarto capítulo se desarrolla el estudio detallado del Teorema Fundamental del Cálculo; como corolario se abordan el Teorema de Cambio de Variables y el de Integración por partes. Finalmente, se discute el concepto de Integral Impropia.

Con el presente material buscamos recoger la experiencia de diversos profesores que durante varios semestres hemos impartido los cursos de Cálculo Diferencial e Integral; proponiendo una manera particular de afrontar tanto la discusión intuitiva como la discusión formal de la temática expuesta. Es de nuestro interés,

por ello, que dicho material sirva también como material didáctico utilizable por profesores responsables de impartir los cursos de Cálculo, sin menoscabo de la discusión necesaria respecto al peso justo que debe darse a los aspectos formal e intuitivo.

## CAPITULO I

Dedicaremos este primer capítulo al planteamiento y resolución de varios problemas de características muy diversas. Abordándolos directamente, a través de su solución, mostraremos lo común que hay entre ellos.

### Problema (1)

#### Caida libre de los cuerpos pesados

¿Caen más rápido los cuerpos más pesados?

Sobre la caída de los cuerpos, Aristóteles estableció la conjetura de que el cuerpo más pesado es el que cae más rápido. Posteriormente, Galileo demostró la falsedad de tal conjetura mediante el siguiente razonamiento.

Supóngase que dos cuerpos  $W$  y  $w$  (en ausencia de la resistencia del aire) caen libremente partiendo del reposo y que tienen velocidades  $V$  y  $v$  respectivamente, al final de una unidad de tiempo. Entonces, de acuerdo con Aristóteles, dado que  $W$  es más pesado que  $w$ ,  $V$  debe ser mayor que  $v$ .

Pero se preguntó Galileo:

"¿Qué sucede si los dos objetos están unidos?"

Sea  $u$  la velocidad al final de la unidad de tiempo del cuerpo unido  $W + w$ . Dado que  $w$  solo cae más despacio que  $W$ , la parte  $w$  de  $W + w$  debe retardar la caída de la parte  $W$ ; de ahí que  $u$  debe ser menor que  $V$ . Por otro lado, como  $W + w$  es mayor que  $W$ , por la hipótesis de Aristóteles,  $u$  debe ser mayor que  $V$ .

Por lo tanto,  $u$  es a la vez mayor y menor que  $V$ ; o sea,  $W + w$  cae a la vez más lento y más rápido que  $W$ ; lo cual es un absurdo.

¿Qué ha hecho Galileo?

No negó la existencia de una posible ley, sostenida por una observación bastante débil. Sin embargo demostró la inconsistencia de la conjetura de Aristóteles y, por tanto, su inaceptabilidad para la matemática.

Galileo se preguntó ¿cómo caen los cuerpos pesados?. Su pregunta exigía una descripción precisa del fenómeno. Galileo

decía que la caída libre es acelerada tanto, respecto al tiempo, como respecto a la distancia. Entonces, ¿cuál es la ley matemática que relaciona a la velocidad con el tiempo?, ¿cuál es la conjetura más simple: ¿es la velocidad del cuerpo en caída libre directamente proporcional al tiempo?

Esta última resultó ser la pregunta correcta.

¿Cómo verificó experimentalmente su conjetura Galileo?

El problema de Galileo era deducir la ley que relaciona la distancia con el tiempo; la cual es determinada por la conjetura de que la velocidad es directamente proporcional al tiempo. Por verificación directa de la primera ley, lograba verificar de manera indirecta la segunda relación.

¿Cómo dedujo la relación entre la distancia y el tiempo?

Para facilitar la deducción, usaremos diagramas con ejes coordenados.

Supóngase que un cuerpo pesado tiene una velocidad  $v$  después de un tiempo  $t$  de caída libre; entonces, la hipótesis de Galileo es que  $v$  es directamente proporcional al tiempo  $t$ ; lo cual significa que  $v$  es un múltiplo constante de  $t$ , a saber

$$v = \text{constante} \times t \quad \dots(1)$$

El valor numérico de la constante depende de las unidades usadas para medir  $v$  y  $t$ .

Así, expresado algebraicamente, la conjetura es:

$$v = k \times t$$

Por otro lado, la distancia  $S$  recorrida por el cuerpo pesado desde el reposo hasta el tiempo  $t$ , depende de  $t$ . Sea  $S$  una función de  $t$ , aún no especificada.

$$S = f(t) \quad \dots(2)$$

El problema es cómo especificar  $S = f(t)$  partiendo de que  $v = kt$ . ¿Cómo lo resolvió?

De la manera más ingeniosa; concibiendo el movimiento acelerado como el caso límite de los movimientos uniformes no acelerados.

Considerémoslo, primero, como movimiento uniforme. Si durante 5 segundos un cuerpo pesado cae a una razón fija de 10 m/seg, entonces recorrerá una distancia total de 50 m, es decir,

$$10 \times 5 = 50$$

De manera general, tenemos

distancia = velocidad uniforme x tiempo  
expresado algebraicamente, tenemos

$$S = v \times t$$

donde  $v$  es constante.

Considerémoslo ahora como movimiento no uniforme.

La gráfica de la ecuación (1) es una línea recta que pasa por el origen, con pendiente  $k$  fig.(1).

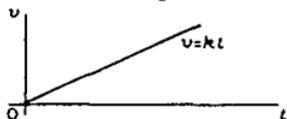


fig.(1)

La caída de un cuerpo pesado no se da de la forma siguiente, por ejemplo

a	0 m/seg	en el primer segundo
"	5 "	" " segundo segundo
"	10 "	" " tercer segundo
"	15 "	" " cuarto segundo
"	20 "	" " quinto segundo etc.

No obstante lo anterior, supongamos provisionalmente, que la velocidad en cada intervalo de un segundo es constante, y al final de cada intervalo se incrementa en una razón fija como se ilustra en la fig.(2)



fig.(2)

En el primer segundo, el cuerpo se mueve a 0 m/seg; después, instantáneamente, con un brusco impulso, lleva una velocidad de 5 m/seg; después de un segundo de caer a esta velocidad constante, hay de nuevo un salto, pasando a una velocidad de 10 m/seg; etc.

Así las distancias cubiertas en los intervalos sucesivos,

utilizando la ecuación (2) son las siguientes:

Para el primer intervalo

$$S_1 = v_1 \times t = 0 \times 1 = 0$$

Para el segundo

$$S_2 = v_2 \times t = 5 \times 1 = 5$$

Para el tercero

$$S_3 = v_3 \times t = 10 \times 1 = 10$$

Para el cuarto

$$S_4 = v_4 \times t = 15 \times 1 = 15$$

Y para el quinto intervalo

$$S_5 = v_5 \times t = 20 \times 1 = 20$$

La suma total dará

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = 50 \text{ m.}$$

Ahora supongamos que los saltos y los intervalos de tiempo son divididos a la mitad. Entonces para los intervalos de medio segundo durante los primeros 5 segundos tenemos lo siguiente:

Para el intervalo  $[0, 1/2]$  la velocidad es 0 m/seg.

" " "  $[1/2, 1]$  " " "  $2\frac{1}{2}$  "

" " "  $[1, 3/2]$  " " " 5 "

⋮

⋮

" " "  $[9/2, 5]$  " " "  $22\frac{1}{2}$  "

Por tanto, la distancia cubierta en los intervalos sucesivos será

$$S = 0(1/2 - 0) + 2\frac{1}{2}(1 - 1/2) + 5(3/2 - 1) + \dots + 22\frac{1}{2}(5 - 9/2) \\ = 56.2 \text{ m}$$

Notemos que ahora los saltos de la velocidad son doblemente frecuentes, pero son de menor longitud. Los incrementos repentinos en la velocidad son de  $5/2$  m/seg. en lugar de 5 m/seg..

Supongamos que de nuevo estos saltos en la velocidad y los intervalos de tiempo son divididos a la mitad. Así los saltos son cuatro veces más frecuentes que en el caso inicial, pero solamente son la cuarta parte en magnitud. Así los incrementos referidos en la velocidad serán ahora de  $5/4$  m/seg. en lugar de 5 m/seg..

En general, cuando los intervalos son de  $1/2^n$  segundos cada

uno, con  $n$  grande, los saltos en la velocidad se vuelven muy pequeños; a saber, de tamaño  $5/2^n$  m /seg.. Mientras más grande tomemos a  $n$ , más cerca estaremos del crecimiento suave de la velocidad.

Así, al hacer  $n$  suficientemente grande, nuestro análisis se convierte en una descripción de la velocidad incrementada en una razón constante, tan cerca a la realidad como queramos. Tal hecho queda ilustrado en la fig.(3).



fig.(3)

A pesar del hecho de que el movimiento no es de velocidad uniforme, la distancia recorrida está representada por el área bajo la curva de velocidad, de manera análoga al caso del movimiento uniforme donde es una constante. Pero en este caso, el área bajo la curva es un área triangular, de base  $t$  y altura  $kt$ . Así

$$S = \frac{1}{2}(t \times kt)$$

$$S = \frac{1}{2} kt^2$$

Así fue como Galileo dedujo la especificación de la ecuación

$$S = f(t)$$

Esta es la ley que relaciona la distancia con el tiempo transcurrido, partiendo de la hipótesis de que la velocidad es directamente proporcional al tiempo.

#### Problema (2)

##### Determinación del área bajo una curva

Consideremos una función continua  $y = f(x)$  definida en el intervalo  $(a,b)$ .

La curva  $y = f(x)$  y las rectas  $x = a$ ,  $x = b$  y  $y = 0$  limitan una región del plano. ¿Cómo determinar el área de esta

región? fig.(4)

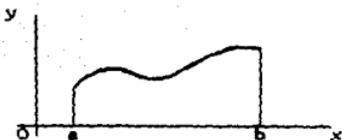


fig.(4)

Ayudados en que conocemos el área de un rectángulo, podemos aproximarnos al área de la región bajo la gráfica de la función a través de ellos, como se ilustra en la fig.(5)

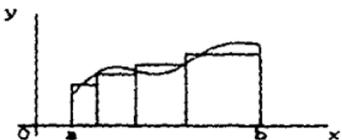


fig.(5)

¿Cómo construir estos rectángulos?

Dividimos el intervalo  $[a, b]$  en pequeños subintervalos y tomamos a éstos como las bases de los rectángulos. Enseguida elegimos un punto arbitrario en cada subintervalo, evaluamos la función ahí, y dicho valor lo tomamos como la altura del rectángulo correspondiente.

Supongamos que el intervalo  $[a, b]$  lo dividimos en  $n$  subintervalos  $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n)$ .

Elegimos  $\xi_i$  con  $i=1, 2, \dots, n$  tal que  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ . Así, el área de cada uno de los rectángulos estará dada por

$$(x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) \quad \text{fig.(6)}$$

y la suma de las áreas de todos los rectángulos será

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) (x_i - x_{i-1})$$

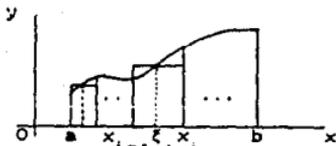


fig. (c)

En la medida en que las bases de todos los rectángulos las tomemos más pequeñas, podemos acercarnos tanto como queramos al área bajo la gráfica de la función  $y = f(x)$ . En el caso límite, obtenemos el valor de ésta.

Problema (3)

Atracción Gravitacional de una barra

Dados cualesquiera dos cuerpos de masas  $M$  y  $m$ , respectivamente, existe una fuerza de atracción entre ellos; esta fuerza de atracción está dada por la ley de la Gravitación Universal; es decir,

$$F = G \frac{M m}{r^2}$$

donde  $r$  es la distancia entre ellos y  $G$  es una constante, llamada la constante de Gravitación, en la dirección de la recta que une los dos cuerpos.

Es importante señalar que la aplicación directa de esta fórmula se hace bajo el supuesto de que la dimensión de los cuerpos es despreciable respecto a la distancia que los separa. Por ejemplo, la distancia entre el Sol y la Tierra (o cualquier otro planeta) es grande en relación a la dimensión de estos cuerpos; en este caso, podemos considerar al Sol y a la Tierra como dos puntos del espacio donde se encuentra concentrada su masa respectivamente; así, la fuerza de atracción está dada por la fórmula anterior.

¿Qué sucede cuando los cuerpos involucrados no pueden considerarse como masas puntuales, debido a que las dimensiones de las mismas no son despreciables respecto a la distancia que los separa?

Tomemos, por ejemplo, una barra de 6 metros de longitud y 18 Kgs. masa distribuidos uniformemente en ella, extendida unidimensionalmente. A tres metros del fin de la barra (considerando la dirección izquierda-derecha) hay un objeto pequeño de dimensión despreciable, con 2 Kgs. masa, ver fig.(7).  
 ¿Qué fuerza gravitacional existe entre estos dos cuerpos?.

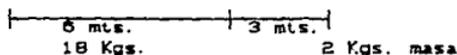


fig.(7)

Introducimos un eje  $r$ , con origen en el inicio de la barra (extremo izquierdo), de tal modo que la barra se extiende desde  $r = 0$  hasta  $r = 6$ , y el cuerpo puntual se localiza en  $r = 9$ , fig.(8).

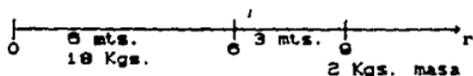


fig.(8)

Dividimos el intervalo  $[0,6]$  en  $n$  subintervalos de igual longitud, denotados por  $[x_{i-1}, x_i]$ ; por tanto, cada subintervalo concentra una masa de  $\frac{18}{n}$  Kgs. masa.

Denotamos por  $r_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, n$  los puntos medios de cada uno de los subintervalos. Supondremos que la masa de cada uno de estos subintervalos se concentra en el punto medio, respectivamente, fig.(9).

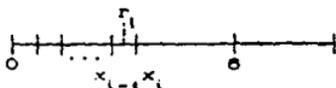


fig.(9)

Según la ley de Gravitación Universal, la atracción gravitacional del  $i$ -ésimo subintervalo sobre el cuerpo puntual de 2 Kgs. masa es

$$F = G \frac{\left(\frac{18}{n}\right)(2)}{(9-r_i)^2} = G \frac{6\left(\frac{6}{n}\right)}{(9-r_i)^2}$$

De ahí que la fuerza de atracción global ejercida por todos los subintervalos es

$$S_n = G \frac{M(\frac{a}{n})}{(9-r_1)^2} + G \frac{M(\frac{2a}{n})}{(9-r_2)^2} + \dots + G \frac{M(\frac{na}{n})}{(9-r_n)^2}$$

Nótese que  $x_i - x_{i-1} = \frac{a}{n}$

Definimos ahora la función  $f: (0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$f(r) = G \left( \frac{M}{(9-r)^2} \right)$$

Por tanto, la suma  $S_n$  puede reescribirse como

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(r_i) \left( \frac{a}{n} \right) = \sum_{i=1}^n f(r_i) (x_i - x_{i-1})$$

Conforme el número de subintervalos crece, nos acercamos tanto como queramos a la atracción que existe entre la barra y la masa puntual. En el caso límite, obtenemos la atracción gravitacional entre dichos cuerpos.

Por otro lado es importante observar que, como

$$f(r) = G \left( \frac{M}{(9-r)^2} \right)$$

entonces  $f(r_i)(x_i - x_{i-1})$ , representa el área de un rectángulo bajo la gráfica de la función  $f$  y por tanto

$$\sum_{i=1}^n f(r_i)(x_i - x_{i-1})$$

representa la suma de las áreas de todos los rectángulos bajo la gráfica de  $f$ , y, en el caso límite obtenemos el área bajo  $f$ ; fig.(10)



fig.(10)

Problema (4).

Trabajo realizado por una fuerza.

(Caso unidimensional y fuerza constante)

Consideremos un cuerpo en movimiento rectilíneo, supongamos que dicho movimiento es el resultado de la acción de una fuerza  $\vec{F}$  sobre él. Si dicha fuerza actúa paralelamente a la trayectoria y además es de magnitud constante, entonces al desplazarse el cuerpo desde  $x_1$  hasta  $x_2$  la fuerza habrá realizado un trabajo, denotado por  $W$ , igual a

$$W = F (x_2 - x_1).$$

donde  $x_2 - x_1$  = desplazamiento, ver fig.(11)

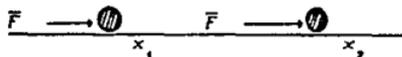


fig.(11)

Tal hecho es consecuencia inmediata de la definición de trabajo realizado por una fuerza constante a lo largo de una línea recta; a saber, como el producto punto del vector fuerza por el vector desplazamiento. De ahí que, para el caso unidimensional, en el que coinciden las direcciones del vector fuerza y la del vector desplazamiento, dicho producto se reduce a un producto de números reales.

Particularmente, cuando los vectores fuerza y desplazamiento en 2 ó 3 dimensiones tienen igual dirección, el producto escalar se reduce al producto de las magnitudes de estos vectores, por uno o menos uno, que es el coseno del ángulo que forman ambos vectores,  $0^\circ$  ó  $180^\circ$ .

Restringiéndonos al caso unidimensional, analicemos, a través de un ejemplo, el caso en que la magnitud de la fuerza es variable.

Un ejemplo clásico de una fuerza de magnitud variable y dirección constante es el caso de la fuerza de resistencia de un resorte.

Tomemos un resorte tal que en su posición de equilibrio natural, la longitud del resorte es  $AB$ , fig.(12). Tomando como origen el punto  $O$  señalado en la fig.(12), podemos verificar

experimentalmente que cuando estiramos el resorte una pequeña longitud  $x$  (esto es, sin deformarlo) el resorte ejerce una fuerza de reacción (dirigida hacia el punto  $O$ ) proporcional a la longitud  $x$ , es decir

$$\text{fuerza de resistencia} = -kx$$

donde  $k > 0$  es llamada constante de elasticidad del resorte. El signo menos se toma debido a que el sentido del vector fuerza siempre es contrario al del vector desplazamiento.

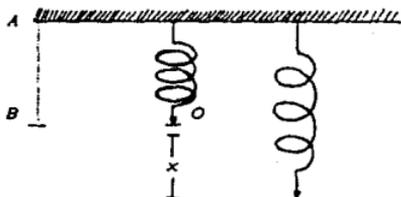


fig.(12)

Por lo tanto, para estirar el resorte una longitud  $x$ , debemos aplicar una fuerza  $F$  que neutralice la fuerza de resistencia; a saber

$$F = kx$$

Hallemos el trabajo realizado por esta fuerza, representada gráficamente en la fig.(13)

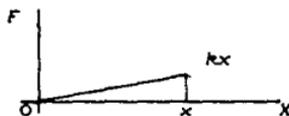


fig.(13)

Dividimos el segmento  $[0, x]$  en  $n$  partes iguales

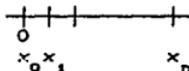


fig.(14)

Sean  $x_0, x_1, \dots, x_n$  con  $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = x$  los puntos en el eje  $X$  que dividen al segmento  $[0, x]$  en  $n$

subintervalos.

Supondremos que para elongar el resorte una longitud que esté entre  $x_{i-1}$  y  $x_i$  tenemos que aplicar una fuerza prácticamente constante denotada por  $F_i$ ; bajo la hipótesis de que la longitud del intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  es pequeña.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la fuerza  $F$  en cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ , donde es prácticamente constante, está determinada por el valor de la fuerza en cualquier punto  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , fig.(15)



fig.(15)

Por tanto, el trabajo realizado en cada subintervalo, será

$$W_{[x_{i-1}, x_i]} = F(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \quad \text{con } \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

y el trabajo total

$$W = F(\xi_1)(x_1 - x_0) + F(\xi_2)(x_2 - x_1) + \dots + F(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$$

$$W = \sum_{i=1}^n F(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Tomando particularmente  $\xi_i = x_{i-1}$

$$W = \sum_{i=1}^n F(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

Dado que la fuerza es proporcional a la longitud  $x$ ; es decir  $F = kx$ , entonces la fuerza en cada subintervalo está dada por

$$F(x_{i-1}) = kx_{i-1}$$

de ahí que el trabajo total es

$$W = \sum_{i=1}^n kx_{i-1}(x_i - x_{i-1})$$

Dado que  $x_i - x_{i-1} = \frac{x}{n} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$ , entonces

$$W = \sum_{i=1}^n k(x_{i-1}) \Delta x$$

$$= k \sum_{i=1}^n (x_{i-1}) \Delta x$$

Tomando en cuenta que

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = \Delta x$$

$$\dots$$

$$x_{i-1} = (i-1)\Delta x$$

$$\dots$$

$$x_n = x$$

tenemos que

$$W = k \sum_{i=1}^n (i-1) \Delta x$$

$$= k \frac{x^2}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1)$$

$$= k \frac{x^2}{n^2} \left( \frac{n(n-1)}{2} \right)$$

$$= \frac{kx^2}{2} - \frac{kx^2}{n}$$

Finalmente, si hacemos  $n$  suficientemente grande, tendremos más subintervalos de menor longitud y, por lo tanto, los saltos en la fuerza son más pequeños. En el caso límite obtenemos el trabajo realizado por la fuerza a lo largo del segmento  $(0, x)$ .

$$\text{Por tanto } W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F(x_{i-1}) (x_i - x_{i-1})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{kx^2}{2} - \frac{kx^2}{2n}$$

$$= \frac{1}{2} kx^2$$

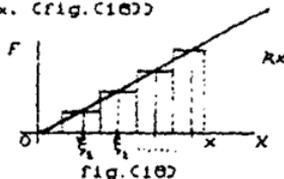
Por tanto, el trabajo realizado por la fuerza del resorte es

$$W = -\frac{1}{2} kx^2$$

De igual manera que en el problema anterior

$$W = \sum_{i=1}^n F(x_i) (x_i - x_{i-1})$$

representa la suma de las áreas de los rectángulos bajo la gráfica de la función  $F = kx$ . (fig. (16))



Y en el caso límite, obtenemos el área bajo la gráfica de  $F$ . Por tanto, también en este problema, su solución coincide con el área bajo la gráfica de la función, en este caso de la función  $F$ .

#### Problema (5)

##### Momentos y Centro de Masa

Cuando tenemos una distribución espacial de objetos, cada uno con cierta masa, puede hablarse de conceptos tales como momento y centro de masa; ambos conceptos fuertemente relacionados entre sí.

Tomemos un conjunto de objetos con masas  $m_1, m_2, \dots, m_n$  respectivamente, situadas en línea recta a lo largo de un eje, llamado  $X$ ; siendo  $x_1, x_2, \dots, x_n$  las posiciones de cada uno de los objetos respecto al origen.

El momento de este sistema de masas respecto al origen se define como

$$x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3 + \dots + x_n m_n = \sum_{k=1}^n x_k m_k \quad \dots (1)$$

Ahora, si supusiéramos que todas las masas del sistema estuvieran concentradas en un sólo punto, denotado por  $\bar{x}$ , tendríamos que la masa total estaría dada por

$$m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n = \sum_{k=1}^n m_k$$

y el momento respecto al mismo origen, por

$$\bar{x} \left( \sum_{k=1}^n m_k \right)$$

El punto  $\bar{x}$  que cumple con la condición de que el momento del sistema, (ecuación (1)) respecto al origen dado coincide con el momento calculado bajo la hipótesis de que toda la masa está concentrada en dicho punto, se llama centro de masa. De ahí que

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k m_k}{\sum_{k=1}^n m_k}, \text{ donde } \bar{x} \text{ es el centro de masa del sistema.}$$

¿Cómo determinar el centro de masa de una barra con distribución de masa no homogénea?

Consideremos una barra unidimensional de longitud  $L$ , cuya distribución de masa es no homogénea.

Fijando nuestro origen de coordenadas en el extremo izquierdo de la barra, podemos considerar que la distribución de masa es función de la posición de  $x$  respecto a este origen, fig.(17)

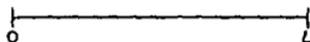


fig.(17)

Dividimos la barra en  $n$  segmentos de igual longitud, denotando sus puntos extremos por  $0 = x_0, x_1, \dots, x_n = L$ , con  $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ .

Para valores grandes de  $n$  podemos suponer que la distribución de masa denotada por  $m_i$  en cada uno de los subintervalos generados es homogénea.

Por otro lado, sabemos que para distribuciones unidimensionales homogéneas de masa, la densidad de dicha distribución, denotada por  $\rho$ , está definida por

$$\rho = \text{masa total} / \text{longitud total}$$

A partir de lo anterior, podemos afirmar que la masa correspondiente en cada uno de los subintervalos cumple con la

siguiente relación

$$m_i = \rho(x_i - x_{i-1})$$

Por tanto, para cada partición el momento, denotado por  $M_n$ , resulta ser

$$M_n = \sum_{i=1}^n \xi_i \rho(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \xi_i \rho \xi_i (x_i - x_{i-1})$$

$$\text{con } \xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$$

La sumatoria anterior se ilustra en la fig.(18)



fig.(18)

En el caso límite obtenemos el momento de una distribución de masa no homogénea, con función de densidad  $\rho(x)$ .

Para obtener el centro de masa, denotado por  $C$ , tenemos, según lo dicho más arriba

$$C_n = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i \rho \xi_i (x_i - x_{i-1})}{\sum_{i=1}^n \rho \xi_i (x_i - x_{i-1})} \dots\dots(1)$$

En el caso límite, el denominador de esta expresión representa la masa total de la barra; y el límite de la expresión completa representa el centro de masa de la barra, con distribución de masa no homogénea de longitud  $L$ , inicialmente considerada.

La solución de este problema, también tiene que ver con el área bajo la gráfica de una función, tanto el numerador como el denominador de la expresión (1) podemos considerarla como la suma de las áreas de los rectángulos correspondientes; los rectángulos del numerador son precisamente los que se ilustran en la fig.(18), y los del denominador, los que se encuentran bajo la gráfica de la función  $\rho$ . Y en el caso límite, corresponden al área

bajo la gráfica de las funciones correspondientes.

Resumiendo, como decíamos al principio de este capítulo, la solución de todos estos problemas tiene algo en común. Y en efecto, lo común en ellos, es que su solución está determinada por el área bajo la gráfica de una función.

Así como hemos mostrado que la solución a estos problemas tiene que ver de manera directa con el área bajo la gráfica de una función, es de esperarse que la solución a muchos otros problemas sea también, el área bajo la gráfica de una función.

En el siguiente capítulo, abordaremos con profundidad este problema (determinar el área bajo la gráfica de una función) mostraremos que la solución a él, nos conducirá a la noción de integral.

## CAPITULO II

2.

En los problemas que hemos planteado en el capítulo anterior, notamos que la solución de ellos radica en poder determinar el área bajo la gráfica de una función.

En este capítulo desarrollaremos el estudio de la integral precisamente a partir de uno de los problemas que involucra este concepto; a saber, el área bajo la gráfica de una función. Sin embargo hay que tener presente que el concepto de la integral nos permite no sólo solucionar el problema del área bajo la curva, sino que con este concepto podemos resolver gran cantidad de problemas relacionados con diversas disciplinas (física, biología, etc.).

### 2.1. *Propiedades básicas del concepto de área que comúnmente manejamos.*

Desde nuestros primeros años de la escuela hemos trabajado con las áreas. Sabemos, por ejemplo, que el área de un cuadrado de lado  $l$  es  $l^2$ , que la de un rectángulo es base por altura, que la de un triángulo es base por altura sobre dos, etc.

Pero si nos preguntan, qué es el área, seguramente no sabríamos qué contestar; ello se debe a que en este nivel no contamos con una definición formal del concepto de área, sino que únicamente sabemos calcular el área de algunas regiones particulares. No obstante lo anterior, antes de resolver el problema del área bajo la gráfica de una función -lo cual ya involucra una generalización de nuestro actual concepto de área- conviene repasar algunas de las propiedades básicas que intuitivamente observamos cumple el concepto de área que comúnmente hemos manejado.

#### *Primera propiedad.*

El área de una región  $R$  siempre está representada por un número mayor o igual a cero.

*Segunda propiedad.*

Dada el área de una región  $R$  y dadas las áreas de cada una de sus partes  $R_1, R_2, \dots, R_n$  se tiene que el área de  $R$  es igual a la suma de las áreas de cada una de sus partes.

*Tercera propiedad.*

El área de una región es invariante bajo transformaciones rígidas (translación, rotación o reflexión, sin alteración de escala).

*Cuarta propiedad.*

Existe una medida básica de área. Por convención, tomamos como tal medida, el área del cuadrado de lado  $l$ , definida como  $l^2$ .

Podemos expresar resumidamente estas cuatro propiedades de la manera siguiente:

Sea  $R$  una región a la que le hemos asignado área  $ACR$ , entonces .

1)  $ACR \geq 0$

2)  $ACR = \sum_{i=1}^n ACR_i$  donde  $R = \bigcup_{i=1}^n R_i$  con  $R_i \cap R_j = \emptyset$   
si  $i \neq j$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$

3)  $ACR = ACR^M$  donde  $R^M$  se obtiene a partir de una transformación rígida de  $R$ .

4)  $ACC = l^2$  donde  $C$  es el cuadrado de lado  $l$

Partiendo de estas cuatro propiedades señaladas, podemos demostrar que; cuando decimos que el área de un rectángulo es base por altura ó que la de un triángulo es base por altura sobre dos, etc., nos estamos refiriendo al mismo concepto. Para tal fin, abordemos los siguientes ejemplos.

*Ejemplo (1)*

Área de un rectángulo.

Si  $R = \begin{array}{|c|} \hline \phantom{a} \\ \hline \end{array} b$   $R$  un rectángulo de lados  $a$  y  $b$  entonces

$$ACR = ab$$

Construimos un cuadrado cuyos lados sean  $a+b$  de la siguiente

manera, (fig. (19)).

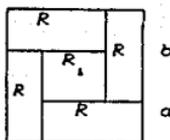


fig. (19)

El área del cuadrado de lado  $(a+b)$  es  $(a+b)^2$  entonces.

$(a+b)^2 = 4 \text{ ACRD} + (a-b)^2$  donde  $\text{ACRD}$  es el área del rectángulo de lados  $a$  y  $b$  y

$(a-b)^2$  es el área de  $R_1$ .

Entonces

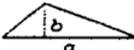
$$4(\text{ACRD}) = (a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 4ab$$

$$\Rightarrow 4(\text{ACRD}) = 4ab$$

$$\Rightarrow \text{ACRD} = \frac{4ab}{4} = ab$$

$$\therefore \text{ACRD} = ab.$$

Ejemplo (2) El área de un triángulo.

Si  $R =$   es un triángulo de base  $a$  y altura  $b$ .

entonces  $\text{ACRD} = \frac{ab}{2}$

El área del triángulo se puede ver como la mitad del área del rectángulo de la siguiente manera

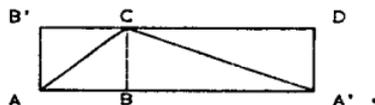


fig. (20)

En la fig. (20) el triángulo  $ACB$  es congruente con el triángulo  $ACB'$  y según la propiedad 3) tienen igual área. El triángulo  $BCA'$  es congruente con el triángulo  $CA'D$ , y por 3) también tienen la misma área. Por tanto concluimos que el área del triángulo  $ACA'$  es la mitad del área del rectángulo cuya base es

a y altura b, en este caso.

*Ejemplo (3).*

El área de un polígono regular.

Sea P un polígono regular de n lados, cada uno de longitud l. Trazando los segmentos de recta que unen a los vértices con el centro, generamos n triángulos congruentes  $T_i$ , de base l y altura a (donde a es el apotema del polígono). (fig.(21)).

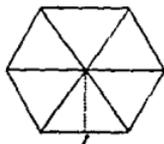


fig.(21)

De ahí que

$$A(P) = n A(T_i) = n \frac{la}{2} = \frac{(nl)a}{2} = \frac{pa}{2}$$

donde p es el perímetro del polígono.

Los ejemplos anteriores, además de demostrar la consistencia conceptual en la definición del área de las figuras mencionadas, nos ilustra el razonamiento a seguir para encontrar el área de figuras irregulares, susceptibles de ser descompuestas en un número finito de regiones de área conocida.

Sin embargo, al momento de considerar regiones acotadas por alguna línea curva, por ejemplo el círculo, sea cual sea la forma en que la seccionemos, necesitamos resolver a su vez el problema del área de una región acotada por una línea curva; problema que aún no tenemos resuelto. Por tanto, necesitamos desarrollar un nuevo procedimiento que, partiendo del conocimiento del área de las figura arriba mencionadas, nos permita resolver este problema.

*Ejemplo (4).*

Área de un círculo.

El área de un círculo será más pequeña que toda región poligonal que contenga al círculo, y más grande que toda región poligonal que este contenida en el círculo.

Usando esta idea; si tomamos una sucesión de polígonos

regulares circunscritos con 4, 8, 16, ... vértices

$$P_4 > P_8 > P_{16} > \dots > P_{2^k} > \dots$$

y una sucesión de polígonos regulares inscritos con el correspondiente número de vértices.

$$p_4 < p_8 < p_{16} < \dots < p_{2^k} < \dots \quad \text{fig. (22)}$$

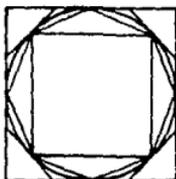


fig. (22)

Según el ejemplo 3) podemos determinar el área de cada uno de estos polígonos, por tanto obtenemos 2 sucesiones monótonas tales que

$$ACP_4 > ACP_8 > \dots > ACP_{2^k} > \dots$$

$$\text{y} \quad ACP_4 < ACP_8 < \dots < ACP_{2^k} < \dots$$

la primera está acotada inferiormente por  $ACP_4$  y la segunda está acotada superiormente por  $ACP_4$ , por tanto ambas sucesiones son convergentes y por tanto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} ACP_{2^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} ACP_{2^k}$$

Supongamos que el radio del círculo es  $r$

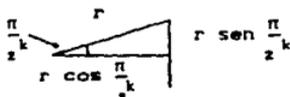


fig. (23)

La fig. (23), ilustra la  $(2^k)$ -ésima parte del área del polígono regular de  $2^k$  lados.

Así que el área del polígono regular inscrito de  $2^k$  lados es:

$$ACP_{2^k} = 2^k r^2 \sin \frac{\pi}{2^k} \cos \frac{\pi}{2^k}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Tomamos } \lim_{k \rightarrow \infty} A(\rho_x^k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\pi r^2 \operatorname{sen}(\pi/2^k) \cos(\pi/2^k)}{\pi/2^k} \\
 &= \pi r^2 \lim_{k \rightarrow \infty} (\cos(\pi/2^k)) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi/2^k)}{\pi/2^k} \\
 &= \pi r^2
 \end{aligned}$$

Por lo tanto el área del círculo de radio  $r$  es

$$A = \pi r^2$$

El procedimiento utilizado en el ejemplo 4, ilustra la posibilidad de encontrar el área de algunas regiones acotadas por líneas curvas, basándonos en figuras de área conocida, y con el uso del concepto de límite. Sin embargo, para regiones como la que se ilustra en la figura 24, es difícil saber cuáles son las figuras de área conocidas que deben utilizarse, siguiendo el método anterior, para encontrar su área.



fig.(24)

Teniendo presente el concepto de función, podemos seccionar la región ilustrada en la fig.(24), de tal manera que cada una de las regiones obtenidas puedan considerarse como regiones bajo la gráfica de una función; no importando que para ello utilicemos localmente distintos sistemas coordenados, fig.(25)

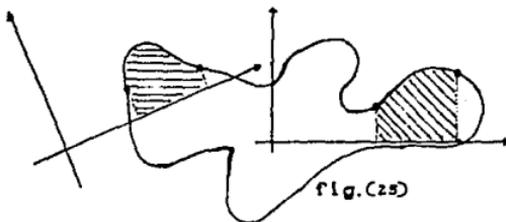


fig.(25)

Por tanto, resolviendo el problema del área bajo la gráfica de una función, involucrado, como ya mencionamos, en todos los problemas del capítulo anterior, resolvemos a su vez el problema del área de regiones en  $\mathbb{R}^2$ , susceptibles de descomponerse seccionalmente en regiones acotadas por curvas, que representan gráficas de funciones, fig.(26) y fig.(27).

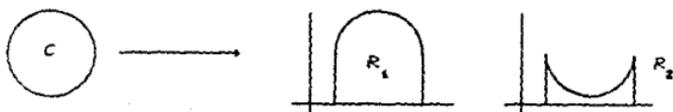


fig.(26)

$$AC(C) = ACR_1 - ACR_2$$

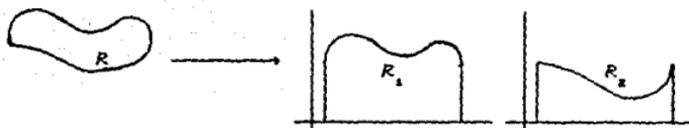


fig.(27)

$$AC(R) = ACR_1 - ACR_2$$

Independientemente del punto de partida, problemas físicos, problemas de área, etc.; considerando lo que hasta aquí hemos discutido, puede valorarse la importancia que tiene, resolver adecuada y detalladamente el problema sintetizado en, encontrar el área bajo la gráfica de una función.

Por último, es importante señalar que; el problema consistente en caracterizar los conjuntos de  $\mathbb{R}^2$  a los cuales, mediante un procedimiento formalmente discutido, se les pueda asignar un número real; el cual coincida, para los casos particulares que conocemos, con el área ya conocida de dichas regiones, no ha sido abordado en esta discusión.

Tal problema es matemáticamente de una complejidad mayor a lo aquí discutido, y trasciende al objetivo del presente trabajo.

Resolver este problema, a manera de ejemplo, saber si puede

asignarse un número tal, a regiones como:

$(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap ([0,1] \times [0,1])$ ,  $(\mathbb{I} \times \mathbb{I}) \cap ([0,1] \times [0,1])$ , etc.

fig.(28) y fig.(29); involucra el concepto de medida de conjuntos; ya sea a través de la formalización de conjuntos *Jordan-Medibles* o *Lebesgue-Medibles*; problemática de una complejidad matemática mayor a la discusión y objetivos del presente trabajo.

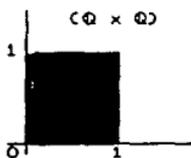


fig.(28)

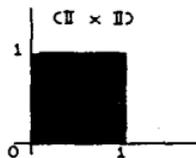


fig.(29)

## 2.2 Construcción de la integral.

Dentro de todas las regiones del plano, vamos a seleccionar aquellas regiones que se encuentren acotadas por: una función  $f$  definida en el intervalo  $[a,b]$ , el eje  $x$  y las rectas  $x = a$  y  $x = b$ . Elegimos estas regiones ya que, de entre todas las del plano, es a ellas a las que se restringe el estudio de la integral.

La discusión sobre la construcción de la integral la desarrollaremos por tres vías diferentes, cada una de ellas nos llevará a establecer una definición del concepto de integral; desde luego que si llegamos a tres definiciones diferentes sobre el mismo concepto, entonces estamos obligados a demostrar la equivalencia entre ellas. De esta manera adoptaremos como definición de integral una de las tres definiciones y dejaremos las otras dos como condición necesaria y suficiente para la existencia de la integral.

En las distintas vías para la construcción de la integral vamos a partir de tres supuestos.

- i) Las funciones son acotadas en  $[a,b]$ .
- ii) El dominio de las funciones va a ser el intervalo cerrado  $[a,b]$ .
- iii) Las funciones son positivas.

Una vez que hayamos desarrollado la construcción de la integral bajo estas condiciones, veremos que estos supuestos se pueden eliminar, cosa que nos va a permitir trabajar con cualquier tipo de funciones en cualquier dominio.

Por el momento no vamos a trabajar con funciones del estilo siguiente (fig.(30)), (fig.(31)).

- a) Funciones no acotadas

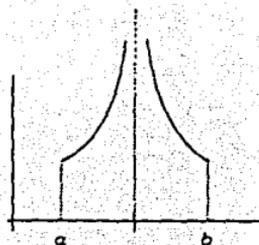


fig.(30)

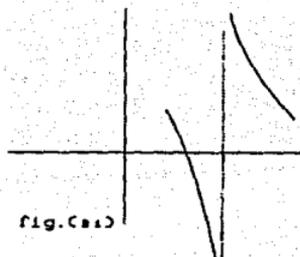


fig.(31)

b) Funciones cuyo dominio sea un intervalo no acotado (fig.(32)).

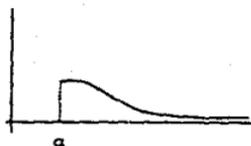


fig.(32)

c) Funciones negativas (fig.(33)).

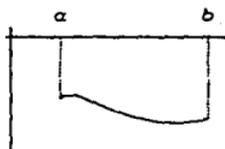


fig.(33)

En los casos donde el dominio de la función sea el intervalo abierto  $(a, b)$ , y la función sea acotada en él, el análisis es esencialmente el mismo que hacemos en el intervalo cerrado  $[a, b]$ , (las rayas no aportan área).

### 2.2.1 Primera vía de construcción de la integral.

La idea que vamos a utilizar en esta primera vía es la misma que desarrollamos para el caso del círculo. Recordemos que el mecanismo consiste en construir sucesiones de polígonos inscritos y circunscritos, de tal manera que el área de estos polígonos se

vaya acercando a la de la región tanto por fuera como por dentro.

Podríamos construir polígonos como los que aparecen en la figura siguiente:

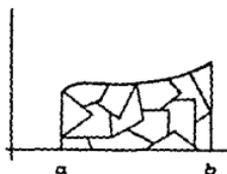


fig.(34)

Claro, esto es válido, pero encontrar el área de los polígonos resulta muy enredado, además de los problemas que encontraríamos si tratáramos de generalizar este procedimiento.

Esto quiere decir que tenemos que buscar otra forma de resolver el problema, y si queremos retomar el procedimiento para el caso del círculo, tenemos que garantizar lo siguiente:

- 1) Construir polígonos inscritos y circunscritos para los cuales sea más fácil encontrar sus áreas.
- 2) Construir sucesiones de polígonos de tal manera que al tomar el límite, las áreas de los polígonos tiendan al área de la región.
- 3) Poder generalizar nuestros resultados, es decir encontrar una regla general para cualquier función.

Una manera sencilla de proceder consiste en construir rectángulos inscritos y circunscritos, sobre el intervalo  $[a,b]$  (fig.(35)).(fig.(36)).

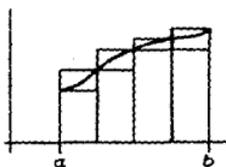


fig.(35)

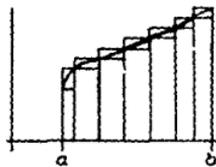


fig.(36)

La unión de los rectángulos circunscritos va a generar el polígono circunscrito y la unión de los rectángulos inscritos

generará el polígono inscrito.

Observemos que, si al conjunto de puntos que divide al intervalo  $[a, b]$ , le vamos agregando más puntos (ver fig.(36)), entonces, al unir los rectángulos, la región que se forma se va pareciendo cada vez más a la región original.

Elegimos esta manera de aproximarnos a la región bajo la gráfica de la función, ya que sabemos cómo determinar el área de rectángulos (ejemplo(s)). En este caso la base de los rectángulos será la longitud de los intervalos que dividen al intervalo  $[a, b]$ , pero, ¿cómo determinar su altura? ¿qué sucede si tenemos funciones cuyo comportamiento es como en la fig.(37).

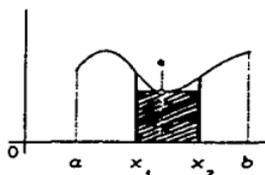


fig.(37)

En el intervalo  $[x_1, x_2]$  la función no tiene mínimo, pero sí tiene ínfimo. Entonces si tomamos el intervalo  $[x_1, x_2]$  como base y el ínfimo de la función en ese intervalo como altura, podemos construir el rectángulo inscrito.

Si tomamos el mínimo de la función, nuestro análisis quedaría restringido a las funciones continuas, y queremos desarrollar nuestro estudio en general para las funciones acotadas, lo cual quiere decir que pueden ser discontinuas. Tanto en las funciones continuas como en las discontinuas, al tomar el ínfimo aseguramos que la altura del rectángulo siempre existe, ya que el ínfimo siempre existe si la función está acotada; en el caso de que la función sea continua el ínfimo coincide con el mínimo (fig.(38)).

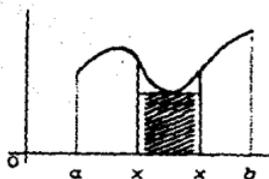


fig.(38)

Por tanto la altura de cada rectángulo será el infimo de la función en cada subintervalo.

Si dividimos el segmento  $[a,b]$  en  $n$  subintervalos podemos construir  $n$  rectángulos inscritos en la región (fig.(39)).



fig.(39)

La intersección de los rectángulos adyacentes, es la recta vertical común a ellos, y estas rectas no aportan área.. así que, podemos obtener el área del polígono con la suma de las áreas de los  $n$  rectángulos.

De manera análoga construimos rectángulos circunscritos, es decir tomamos la misma base, pero en lugar de tomar el infimo de la función en cada intervalo como altura, tomamos el supremo de la función, y así construimos los rectángulos circunscritos como se ilustra en la fig.(40).

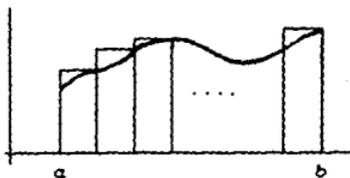


fig.(40)

Para precisar nuestras ideas, introduciremos la siguiente:

**Definición (1)** Una partición del intervalo  $[a,b]$ , es un conjunto finito de puntos

$$x_0, x_1, \dots, x_n \quad \text{tal que} \\ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Veamos algunos ejemplos de particiones:

**Ejemplo (1)** El conjunto  $\langle 0,1 \rangle$  es una partición del intervalo  $(0,1)$ .

**Ejemplo (2)** El conjunto  $\langle 0, 1/2, 1 \rangle$  es una partición del intervalo  $(0,1)$ .

**Ejemplo (3)** El conjunto  $\langle 0, 1/p, 2/p, 3/p, \dots, p/p \rangle$ ;  $p \in \mathbb{N}$  es una partición del intervalo  $(0,1)$ . En particular

para  $p = 8$

el conjunto es  $\langle 0, 1/8, 2/8, \dots, 8/8 \rangle$

**Ejemplo (4)** El conjunto  $\langle 0, 1/2^p, 2/2^p, \dots, 2^p/2^p \rangle$   $p \in \mathbb{N}$ , es una partición del intervalo  $(0,1)$ . En particular

para  $p = 8$

el conjunto es  $\langle 0, 1/2^8, 2/2^8, \dots, 2^8/2^8 \rangle$ .

**Ejemplo (5)** El conjunto  $\langle a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, aq^n \rangle$   $n \in \mathbb{N}$  y  $q = \sqrt[n]{b/a}$ , es una partición del intervalo  $[a,b]$ .

Si las particiones dividen al intervalo  $[a,b]$  en  $n$  partes iguales, las llamaremos homogéneas.

**NOTACION.** Al conjunto de todas las particiones del intervalo  $[a,b]$  lo denotaremos como  $P_{[a,b]}$

**Definición (2)** Sea  $f$  una función acotada en  $[a,b]$  y sea

$P_0 = \langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$  una partición de  $[a,b]$  definimos

$$m_i(f) = \inf \{ f(x); x \in [x_{i-1}, x_i] \} \quad \text{y} \\ M_i(f) = \sup \{ f(x); x \in [x_{i-1}, x_i] \}. \quad \forall i=1, 2, \dots, n.$$

Regresemos a la construcción de los rectángulos inscritos y circunscritos. En particular si

$$P_0 = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

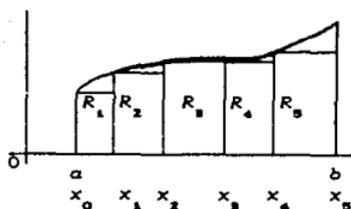


fig.(41)

la suma de las áreas de los rectángulos será

$$\begin{aligned} & (ACR_1) + (ACR_2) + (ACR_3) + (ACR_4) + (ACR_5) = \\ & (x_1 - x_0)m_1(f) + (x_2 - x_1)m_2(f) + (x_3 - x_2)m_3(f) + (x_4 - x_3)m_4(f) \\ & + (x_5 - x_4)m_5(f) = \sum_{i=1}^n m_i(f)(x_i - x_{i-1}). \end{aligned} \quad \text{fig.(41)}$$

si  $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$

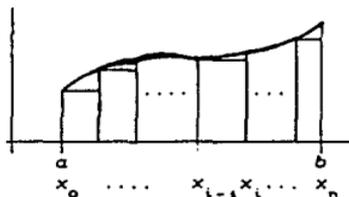


fig.(42)

la suma de las áreas de los rectángulos inscritos será

$$\sum_{i=1}^n m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \quad \text{fig.(42)}$$

y la suma de las áreas de los rectángulos circunscritos será

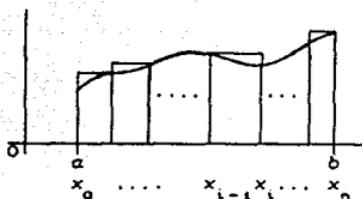


fig. (42)

$$\sum_{i=1}^n M_i(f)(x_i - x_{i-1}) \quad \text{fig. (43)}$$

**Definición (3)** Para cualquier partición  $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$

de  $(a, b)$ ,  $\underline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i(f)(x_i - x_{i-1})$  es

llamada suma inferior de  $f$  en  $(a, b)$  y

$\bar{S}(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i(f)(x_i - x_{i-1})$  es llamada suma superior de  $f$  en  $(a, b)$ .

El procedimiento que seguimos para el caso del círculo consistió en tomar polígonos inscritos y circunscritos, de tal manera que el área que deseábamos medir la fuéramos acotando por "dentro" y por "fuera" con las áreas de los polígonos.

Retomando esa idea, en este caso necesitamos encontrar la manera de aproximarnos al área a través de los rectángulos tanto inscritos como circunscritos, es decir encontrar alguna relación entre la forma en que dividimos el intervalo  $(a, b)$  y la aproximación al área.

Por ejemplo si  $P$  y  $P'$  son dos particiones del intervalo  $(a, b)$  y si el número de elementos de  $P'$  es mayor que el número de elementos de  $P$ , no sucede necesariamente que:

$$\underline{S}(f, P') \geq \underline{S}(f, P)$$

y tampoco sucede que  $\bar{S}(f, P') < \bar{S}(f, P)$

Esto quiere decir que si una partición tiene más puntos que otra no necesariamente aproximamos mejor el área que deseamos

medir (en el caso de que exista dicha área). Lo que sí sucede es que si  $P \subseteq P'$  entonces

$$\underline{S}(f, P') \geq \underline{S}(f, P) \quad \text{y}$$

$$\bar{S}(f, P') \leq \bar{S}(f, P).$$

ilustremos esto con algunos ejemplos

sean  $P = \langle x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$  y  $P' = \langle y_0, y_1, \dots, y_{12} \rangle$  entonces:

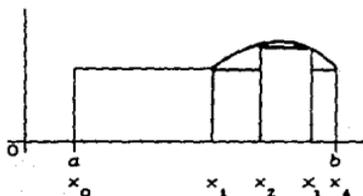


fig.(44)

$\underline{S}(f, P)$  es igual a la suma de las áreas de los rectángulos en la fig (44).

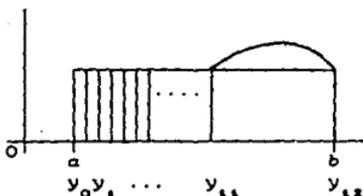


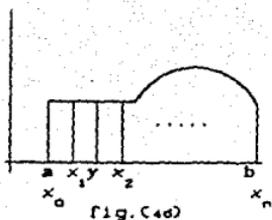
fig.(45)

$\underline{S}(f, P')$  es igual a la suma de las áreas de los rectángulos en la fig.(45).

Claramente  $\underline{S}(f, P) > \underline{S}(f, P')$ .

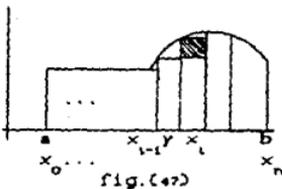
Supongamos ahora que:  $P' \supset P$  y que  $P'$  tiene un elemento más que  $P$

Sean  $P = \langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$  y  $P' = \langle x_0, x_1, y, x_2, \dots, x_n \rangle$



Si  $y$  está como se ilustra en la fig. (46), entonces claramente

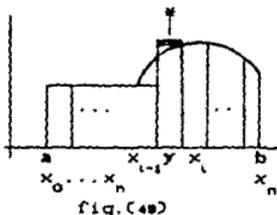
$$\underline{S}(f, P) = \underline{S}(f, P')$$



Si  $y$  está como se ilustra en la fig. (47), claramente sucede que

$$\underline{S}(f, P) < \underline{S}(f, P')$$

De forma análoga, en las sumas superiores observamos que:



Si  $y$  está como se ilustra en la fig. (48). Claramente,

$$\bar{S}(f, P) > \bar{S}(f, P')$$

ya que si la partición  $P'$  contiene a todos los puntos de  $P$  más el punto  $y$ , las  $\bar{S}(f, P)$  incluyen al cuadrado (\*) en la Fig. (48), y las  $\bar{S}(f, P')$  ya no lo incluyen. Es claro que en los intervalos restantes los rectángulos son los mismos.

Antes de enunciar en general el resultado anterior, definamos el concepto de refinamiento de una partición.

**Definición(4).** Decimos que la partición  $P'$  es  $P'_{[a,b]}$  es un refinamiento de la partición  $P \in P_{[a,b]}$  si todo elemento de  $P$  es un elemento de  $P'$  es decir  $P \subseteq P'$

Observemos que  $P$  siempre es un refinamiento de sí misma.

Veamos ejemplos de refinamientos:

Ejemplo 6. - Sean  $P = \langle 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n} \rangle$

$$P' = \langle 0, \frac{1}{2n}, \frac{2}{2n}, \frac{3}{2n}, \dots, \frac{2n}{2n} \rangle$$

dos particiones del intervalo  $[0,1]$ , entonces

$$P' \supseteq P.$$

Si en particular tenemos  $n = 8$

$$P = \langle 0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \dots, \frac{8}{8} \rangle$$

$$P' = \langle 0, \frac{1}{16}, \frac{2}{16}, \dots, \frac{16}{16} \rangle$$

en general todo elemento de  $P$  es un elemento de  $P'$ ; si  $\frac{k}{n} \in P$   
 $\forall k=1,2,\dots,n$ , entonces  $\frac{k}{n} \in P'$  ya que  $\frac{2k}{2n} \in P'$ , (son los  
 elementos que tienen numerador par en  $P'$ ).

Ejemplo 7 Ahora veamos un ejemplo de: dos particiones que no son  
 refinamiento una de la otra y viceversa..

Sea  $P = \langle 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 \rangle$  una partición del intervalo  
 $[0,1]$  y sea  $P' = \langle 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \rangle$  otra partición del intervalo  $[0,1]$ .

Claramente no sucede que  $P \subseteq P'$  ni  $P' \subseteq P$ .

Análogamente, si  $P = \langle 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1 \rangle$  y

$$P' = \langle 0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, 1 \rangle$$

tenemos  $P \not\subseteq P'$ ,  $P' \not\subseteq P$ .

En general, si  $P_n = \langle 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 \rangle$  y

$$P'_{n+1} = \langle 0, \frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \dots, \frac{n}{n+1}, 1 \rangle \text{ con } n \geq 2. \text{ Podemos}$$

observar que

$$P_n \not\subseteq P'_{n+1} \text{ y } P'_{n+1} \not\subseteq P_n$$

Lema (1) Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada en  $[a, b]$  si  $P, P' \in P_{[a, b]}$  y  $P' \geq P$ , entonces:

- i)  $\underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, P')$   
 ii)  $\overline{S}(f, P) \geq \overline{S}(f, P')$ .

Haremos la demostración de i), y dejamos al lector la demostración de ii); ambas demostraciones son similares. Para la demostración i) utilizaremos el siguiente resultado:

Lema (2) Sean A y B dos conjuntos de números reales, si B es acotado y  $A \subseteq B$ , entonces:

- i)  $\inf A \geq \inf B$   
 ii)  $\sup A \leq \sup B$

Demostremos el inciso i) y el inciso ii) lo dejamos como ejercicio para el lector.

Demostración: (Lema (2) i))

Sea  $a \in A$   
 como  $A \subseteq B$  entonces  $\inf B \leq a$ ;  
 es decir  $\inf B$  es cota inferior de A entonces  $\inf A \geq \inf B$

Demostración: (Lema i))

Sea  $P = \langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$ , supongamos que  $P'$  tiene un punto más que P, (lo más que puede llegar a tener  $P'$  es un número finito de puntos adicionales, de esta forma lo que hagamos con un sólo punto lo podemos hacer con los restantes).

Tomemos  $P' = \langle x_0, x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, \xi, x_j, \dots, x_n \rangle$

y comparemos  $\underline{S}(f, P)$  y  $\underline{S}(f, P')$ :

$$\underline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i(f)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{j-1} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) + m_j(f)(x_j - x_{j-1}) + \sum_{i=j+1}^n m_i(f)(x_i - x_{i-1})$$

como  $\xi \in [x_{j-1}, x_j]$ ,  $m_j(f) = \inf \{f(x) ; x \in [x_{j-1}, x_j]\}$  y

además  $(\xi - x_{j-1}) + (x_j - \xi) = (x_j - x_{j-1})$

entonces  $\Sigma(f, P)$  se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \Sigma(f, P) &= \sum_{i=1}^{j-1} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) + [(\xi - x_{j-1}) + (x_j - \xi)] m_j(f) + \\ &\quad \sum_{i=j+1}^n m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) + m_j(f)(\xi - x_{j-1}) + m_j(f)(x_j - \xi) + \\ &\quad \sum_{i=j+1}^n m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

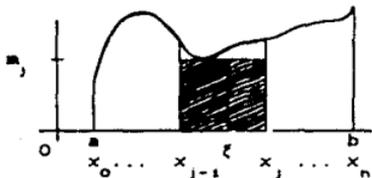


fig. (48)

donde  $m_j(f)(\xi - x_{j-1}) + m_j(f)(x_j - \xi) = m_j(f)(x_j - x_{j-1}) = \text{área del rectángulo } j\text{-ésimo (fig. (49))}$

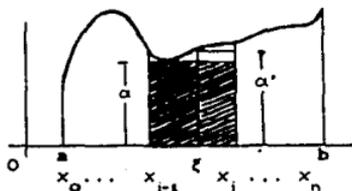


fig. (49)

Ahora sean  $\alpha = \inf \{f(x); x \in [x_{j-1}, \xi]\}$  y

$\alpha' = \inf \{f(x); x \in [\xi, x_j]\}$ . fig. (50).

si llamamos  $A = \{f(x); x \in [x_{j-1}, \xi]\}$

$$A' = \{f(x); x \in [\xi, x_j]\}$$

$$B = \{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\}$$

como  $A \subseteq B$  y  $A' \subseteq B$ , entonces por el lema (2)

$$\alpha = \inf A \geq m_j(f) = \inf B \quad \text{y}$$

$$\alpha' = \inf A' \geq m_j(f) = \inf B$$

y entonces

$$m_j(f)(\xi - x_{j-1}) + m_j(f)(x_j - \xi) \leq \alpha(\xi - x_{j-1}) + \alpha'(x_j - \xi)$$

por tanto

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{j-1} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) + m_j(f)(\xi - x_{j-1}) + m_j(f)(x_j - \xi) + \\ \sum_{i=j+1}^n m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{j-1} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) + \alpha(\xi - x_{j-1}) + \\ + \alpha'(x_j - \xi) + \sum_{i=j+1}^n m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \\ = \underline{S}(f, P'). \end{aligned}$$

$$\therefore \underline{S}(f, P) \leq \bar{S}(f, P')$$

q. e. d.

Como podemos ver, el área de los rectángulos inscritos crece ó se mantiene igual al tomar refinamientos de una partición; mientras que el área de los rectángulos circunscritos decrece ó se mantiene igual cuando se toman dichos refinamientos.

Intuitivamente es claro que para una partición cualquiera, el área de los rectángulos inscritos es menor que el área de los rectángulos circunscritos; la intuición parte de que el ínfimo de la función es menor ó igual que el supremo de la función en cada subintervalo generado por la partición.

Lema (3) Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada en  $[a, b]$ , entonces:

$$m(b-a) \leq \underline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, P) \leq M(b-a)$$

donde  $m = \inf \{f(x); x \in [a, b]\}$

$M = \sup \{f(x); x \in [a, b]\}$



fig. (51)

*Demostración.*

Sea  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  una partición de  $[a, b]$ .

como  $\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\} \subseteq \{f(x); x \in [a, b]\}$ ,

según el lema (2)  $m \leq m_i(f)$  y  $M \leq M_i(f) \quad \forall i=1, 2, \dots, n$

y entonces  $m \leq m_i(f) \leq M_i(f) \leq M \quad \forall i=1, 2, \dots, n$

si multiplicamos por  $(x_i - x_{i-1})$  tenemos que

$$m(x_i - x_{i-1}) \leq m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq M_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq M(x_i - x_{i-1})$$

así que:

$$\sum_{i=1}^n m(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n M_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n M(x_i - x_{i-1})$$

de donde:

$$m \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \leq \underline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, P) \leq M \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})$$

(ver fig. (51))

$$\text{pero } \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \dots + x_{n-1} - x_{n-2} + x_n - x_{n-1}$$

$$= x_n - x_0 = b - a.$$

por tanto  $m(b-a) \leq \underline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, P) \leq M(b-a)$ .

Con este resultado justificamos que  $\underline{S}(f, P)$  es menor o igual que  $\bar{S}(f, P)$ , considerando siempre la misma partición. Ahora podemos preguntarnos ¿qué relación existe entre las sumas superiores e inferiores tomando distintas particiones? Es decir, si P y Q son dos particiones cualesquiera de  $[a, b]$ , ¿se seguirá cumpliendo que  $\underline{S}(f, P) \leq \bar{S}(f, Q)$ ?

Geoméricamente podemos ver que cada suma inferior -es decir la suma de las áreas de los rectángulos inscritos- a lo más que "sube" es al área por debajo de la gráfica, mientras que cada suma superior a lo más que baja es también al área bajo la gráfica de la función.

En efecto, cualquier suma inferior es más pequeña o igual que toda suma superior.

Sean P y Q dos particiones cualesquiera de  $[a, b]$  tales que:

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \text{ ( fig.(52) )}$$

$$Q = \{y_0, y_1, \dots, y_m\} \text{ ( fig.(53) )}$$

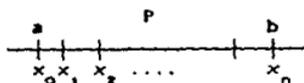


fig.(52)

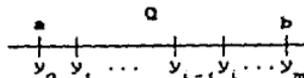


fig.(53)

Construyamos la partición  $P^M$  tal que  $P^M = P \cup Q$ .

Es claro que  $P^M \in P_{[a, b]}$  y

además  $P \subseteq P^M$  y  $Q \subseteq P^M$ ;

esto es,  $P^M$  es refinamiento de P y Q y por el lema (1),

se cumple que:

$$\underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, P^M) \text{ y}$$

$$\bar{S}(f, P^M) \leq \bar{S}(f, Q).$$

Ahora, por el lema (3), concluimos que:

$$\underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, P^M) \leq \bar{S}(f, P^M) \leq \bar{S}(f, Q)$$

$$\therefore \underline{S}(f, P) \leq \bar{S}(f, Q)$$

Es decir hemos demostrado el siguiente resultado:

Lema (4) Si  $P$  y  $Q$  son dos particiones cualesquiera del intervalo  $[a, b]$  entonces

$$\underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, Q)$$

Observemos que para cada partición de  $[a, b]$  podemos construir, con base en esa partición, la suma superior y la suma inferior. Así, si tomamos todas las posibles particiones de  $[a, b]$ , podemos construir todas las posibles sumas inferiores y todas las posibles sumas superiores. Sean  $A$  y  $B$  estos conjuntos, es decir sean

$$A = \{ \underline{S}(f, P); P \in P_{[a, b]} \} \text{ y}$$

$$B = \{ \overline{S}(f, P); P \in P_{[a, b]} \}$$

Observemos que conforme mayor sea  $\underline{S}(f, P)$  en el conjunto  $A$ , mejor será la aproximación al área bajo la gráfica; es decir, para diferentes números en  $A$ , el mayor es mejor aproximación. Esto nos hace pensar que el área bajo la gráfica es el máximo de estos números. Pero, ¿ $A$  siempre tiene máximo?

Si esto fuera cierto, querría decir que hay una suma inferior que coincide exactamente con el área bajo la gráfica de la función; pero en casi todas las funciones, sucede que en cada suma inferior siempre queda un "error", una diferencia con el área bajo la gráfica, por lo cual para muchas funciones no existe un elemento de  $A$  que sea mayor que todos.

Dado que en general no existe el valor máximo de  $A$  (ni el mínimo de  $B$ ) analicemos qué otras propiedades tienen estos conjuntos, para que, con base en ellas, busquemos la manera de determinar el área bajo la gráfica de la función.

A) En primer lugar, observemos que  $A$  y  $B$  son conjuntos de números reales, es decir, sus elementos son números reales.

B) De acuerdo al lema (4), podemos establecer que  $A = \{ \underline{S}(f, P); P \in P_{[a, b]} \}$  está acotado superiormente, pues cualquier suma superior es mayor ó igual que todas las sumas

inferiores. Por otro lado  $B = (\overline{S}(f, P); P \in P_{(a,b)})$  está acotado inferiormente, ya que cualquier suma inferior es menor ó igual que todas las sumas superiores.

C) Tanto A como B son distintos del conjunto vacío: la existencia de las sumas inferiores y las sumas superiores está garantizada por el hecho de que la función es acotada, lo cual asegura la existencia del infimo y el supremo de la función en cada intervalo generado por cualquier partición.

En suma: A es un conjunto de números reales distinto del vacío, acotado superiormente y por tanto tiene supremo. B es también un conjunto de números reales distinto del vacío, acotado inferiormente y por tanto tiene infimo.

Podemos proponer al supremo del conjunto A como el área bajo la gráfica de la función, para que esto sea así debemos garantizar dos cosas:

- (i) Que cualquier número más chico que el supremo no sea el área buscada
- (ii) Que cualquier número mayor que el supremo tampoco lo sea.

Si el supremo del conjunto A fuera menor que el área bajo la curva, podríamos construir una partición suficientemente fina, con la cual la suma inferior resulte ser mayor que el supremo, por lo cual dejaría de ser el supremo. Veamos:

Supongamos que  $\sup A = \sup (\underline{S}(f, P); P \in P_{(a,b)})$  es menor que el área buscada, es decir que el supremo coincide con una región que es un poco menor que el área bajo la curva; supongamos que esa diferencia se concentra en un "chipolito" (fig.(B4)); este "chipolito" lo podemos "desparramar" en una franjita suficientemente delgada, (es claro que "ocupa espacio", de lo contrario su área sería cero).

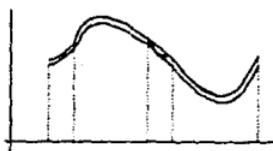


fig. (54)

Con el auxilio de una lupa lo veríamos como en la fig. (54). En esa franja, podemos construir una poligonal, con la cual obtenemos rectángulos inscritos en la región que deseamos medir y, por último, con estos rectángulos podríamos conseguir

una suma inferior, la cual sería mayor que el supremo del conjunto de las sumas inferiores, pero esto no puede suceder. Por tanto el supremo del conjunto A no puede ser menor que el área buscada.

En el otro caso, si el supremo fuera mayor que el área, entonces ya no sería la más chica de las cotas superiores, ya que el área por debajo de la curva en sí ya es una cota superior para las sumas inferiores. Por tanto tampoco puede suceder que el supremo de A sea mayor que el área bajo la gráfica.

Así pues, resulta natural proponer al siguiente conjunto:

$$\sup \{ \underline{S}f, P \}; P \in P_{[a,b]}$$

como el área bajo la curva.

El razonamiento que hemos desarrollado para las sumas inferiores lo podemos seguir para las sumas superiores y entonces, otra forma de definir el área sería a través del siguiente conjunto:

$$\inf \{ \bar{S}f, P \}; P \in P_{[a,b]}$$

De esta manera podemos establecer el acuerdo de que cuando

$$\sup \{ \underline{S}f, P \}; P \in P_{[a,b]} = \inf \{ \bar{S}f, P \}; P \in P_{[a,b]}$$

la región bajo la gráfica de la función tiene área.

**Definición.(5)** Si  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función acotada en  $[a, b]$ . Definimos:

$$\int_a^b f = \sup \langle \underline{S}(f, P); P \in P_{[a, b]} \rangle \text{ y}$$

$$\int_a^b f = \inf \langle \overline{S}(f, P); P \in P_{[a, b]} \rangle$$

Con esta definición nuestro acuerdo quedaría en los siguientes términos:

Si  $\int_a^b f = \int_a^b f$ , entonces la región bajo la gráfica de  $f$  tiene área.

**Ejemplo 8.** La función de Dirichlet (fig.(55))

Sea  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}^c \end{cases}$



fig.(55)

y sea  $P = \langle x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ , tal que  $P \in P_{[0, 1]}$ .

Como  $\underline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i(f)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n 0(x_i - x_{i-1}) = 0$ , entonces

$$\int_0^1 f = \sup \langle 0 \rangle = 0$$

y como  $\sum_{i=1}^n M(f)(x_{i-1}, x_i) = \sum_{i=1}^n 1(x_{i-1}, x_i) = 1$ , entonces

$$\int_0^1 f = \inf \langle 1 \rangle = 1$$

Por tanto, de acuerdo con nuestra convención, aquí no hay área.

Ejemplo 9. - Sea  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$f(x) = c \text{ con } c \geq 0$$

y sea  $P = \langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle \in P_{[0,1]}$  (fig.(56)).

$$\text{Como } \sum_{i=1}^n M(f)(x_{i-1}, x_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^n c(x_i - x_{i-1}) = c \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = c$$

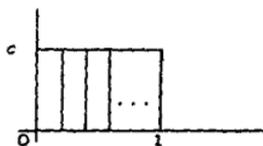


fig.(56)

$$\text{entonces } \int_0^1 f = \inf \langle c \rangle = c$$

En este caso  $\int_a^b f = \int_a^b f$  y por tanto, según nuestra

convención, aquí sí hay área y es igual a  $c$ .

En la construcción de la integral hemos planteado dos problemas:

1) Encontrar el área bajo la gráfica de la función.

2) Decidir bajo qué condiciones una región tiene área.

Este segundo problema lo hemos abordado en toda la discusión anterior.

Con el ejemplo 8, la función de Dirichlet, vimos que  $\int_a^b f$  no es igual a  $\int_a^b f$ . En particular en este ejemplo se cumple que:

$$\int_a^b f < \int_a^b f.$$

Así que podemos preguntarnos: ¿Qué relación existe, en general

entre  $\int_a^b f$  y  $\int_a^b f$ ? ¿Se cumple siempre que  $\int_a^b f \leq \int_a^b f$ ?

Antes de pasar a responder estas preguntas veremos el siguiente:

**Lema (5)** Sean A y B dos conjuntos de números reales distintos del vacío, tales que

$$x \leq y \quad \forall x \in A \text{ y } \forall y \in B,$$

si  $\alpha = \sup A$  y  $\beta = \inf B$  entonces

$$\alpha \leq \beta$$

**Demostración.** -

Sea  $y \in B$ , como  $y \geq x$ ,  $\forall x \in A$  entonces,  $y$  es cota superior de A y entonces  $y \geq \alpha$ , pues  $\alpha$  es la más chica de las cotas superiores de A. Como esto es así para toda  $y \in B$ , entonces  $\alpha$  es cota inferior de B y por tanto,  $\alpha \leq \beta$ , pues  $\beta$  es la más grande de las cotas inferiores de B.

Ahora, si tomamos

$$A = \langle \mathbb{Q}/P \rangle; P \in P_{[a,b]} \text{ y } B = \langle \overline{\mathbb{Q}}/P \rangle; P \in P_{[a,b]}$$

$$\text{con } \alpha = \int_a^b f \quad \text{y} \quad \beta = \int_a^b f$$

queda demostrado el siguiente lema:

**Lema (6)** Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , una función acotada en  $[a, b]$ , entonces

$$\int_a^b f \leq \int_a^b f.$$

Ahora sí podemos enunciar una definición que nos asegure que regiones (determinadas por gráficas de funciones) tienen área.

**Definición (6)** -Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $f$  acotada en  $[a, b]$ .

Decimos que  $f$  es Riemann-integrable si y solo si

$$\int_a^b f = \int_a^b f$$

En tal caso, definimos la integral de Riemann sobre el intervalo  $[a, b]$  como

$$\int_a^b f = \int_a^b f = \int_a^b f.$$

Al inicio de la discusión establecimos la condición de que  $f$  fuera positiva, ¿qué pasa si la función es negativa?

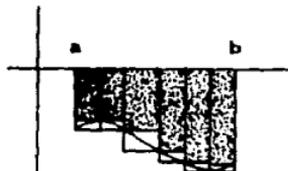


fig.(57)

En tal caso  $\underline{S}(f, P)$  como  $\overline{S}(f, P)$  son menores ó iguales a cero, ya que  $m_i(f)$  y  $M_i(f)$  lo son (fig.(57)), de donde  $\inf\{\overline{S}(f, P); P \in P_{[a,b]}\}$  y  $\sup\{\underline{S}(f, P); P \in P_{[a,b]}\}$  son números menores o iguales a cero, y por tanto

$$\int_a^b f \leq 0$$

De esta manera, el procedimiento que hemos desarrollado para definir la integral asigna números positivos a las regiones que se encuentran encima del eje  $x$ , y números negativos a las regiones que se encuentran debajo del eje  $x$  (fig.(58)).

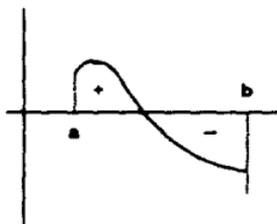


fig.(58)

Muy pronto nos vamos a dar cuenta de que evaluar la integral meramente por medio de la definición, resulta muy problemático.

Es difícil evaluar la integral de funciones, como por ejemplo la idéntica en el intervalo  $[0,1]$  desde el momento mismo de considerar la partición arbitraria. Por ello vamos a ver un criterio que resulta ser una condición suficiente, para determinar la integrabilidad de una función.

Cuando desarrollamos la demostración de que el supremo de las sumas inferiores era el área bajo la gráfica, nos dimos cuenta de que las sumas inferiores se acercaban tanto como queríamos al área bajo la gráfica. De igual manera vimos que las sumas superiores, también se acercaban tanto como queríamos al área bajo la gráfica. De acuerdo con esto, una manera de garantizar que la función sea integrable consistiría en ver si la diferencia entre  $\bar{S}(f,P)$  y  $\underline{S}(f,P)$  la podemos hacer tan chica como queramos, ya que las  $\underline{S}$  y  $\bar{S}$  tienden al área bajo la gráfica, si ésta existe.

De esta manera podemos enunciar el siguiente resultado.

**Teorema (1) (Criterio de Cauchy).**

Sea  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  acotada en  $[a,b]$   
 $f$  es integrable si y solo si

$$\forall \epsilon > 0 \exists P_\epsilon \in P_{[a,b]} \text{ tal que } \bar{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \epsilon.$$

Tomamos una partición del intervalo  $[a,b]$ , nos fijamos en la diferencia entre las sumas superiores e inferiores; obtenemos el área de los rectángulos en la fig.(59).

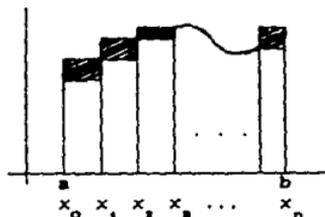


fig.(59)

Entre más fina sea la partición, el área sombreada en la figura anterior es más pequeña. Al refinar la partición las sumas inferiores "suben" y las sumas superiores "bajan", i.e. se pegan entre sí. De esta manera, si el área de las sumas superiores se parece al área de las sumas inferiores, podemos decir que, dada

$\epsilon > 0$  tan pequeña como se quiera, podemos hacer que el área de los rectángulos sombreados sea menor que  $\epsilon$ ; de lo que se trata entonces es que para cada  $\epsilon$  hay que exhibir una partición que garantice que el área de los rectángulos sombreados sea menor que  $\epsilon$ , si esto se logra para cada  $\epsilon > 0$ , entonces la función es integrable.

Este teorema lo podemos ver como un caso particular del siguiente resultado, el cual formulamos para conjuntos de números reales.

**Lema (7).** Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos de números reales distintos del vacío, tales que  
 $x < y \quad \forall x \in A, y \in B$ .  
 Sean  $\alpha = \sup A, \beta = \inf B$   
 entonces

$\alpha = \beta$  si y solo si  $\forall \epsilon > 0 \exists x_\epsilon \in A, y_\epsilon \in B$   
 tales que  $y_\epsilon - x_\epsilon < \epsilon$

*Demostración.*

Sabemos por el lema (6) que  $\alpha < \beta$

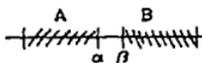


fig. (6a)



fig. (6b)

→) Si  $\alpha = \beta$

sea  $\epsilon > 0$

como  $\alpha = \sup A$  entonces  $\exists x_\epsilon \in A$  tal que  $x_\epsilon > \alpha - \frac{\epsilon}{2}$

como  $\alpha = \beta = \inf B$  entonces  $\exists y_\epsilon \in B$  tal que

$y_\epsilon < \alpha + \frac{\epsilon}{2}$

Por tanto  $y_\epsilon - x_\epsilon < (\alpha + \frac{\epsilon}{2}) - (\alpha - \frac{\epsilon}{2}) = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

$\therefore y_\epsilon - x_\epsilon < \epsilon$

←) P.d.  $\alpha = \beta$ , i.e.  $\forall \epsilon > 0 \beta - \alpha < 0$

sea  $\epsilon > 0$

por hipótesis  $\exists x_\epsilon \in A, y_\epsilon \in B$  tales que  $y_\epsilon - x_\epsilon < \epsilon$

pero  $x_\epsilon \leq \alpha, \beta \leq y_\epsilon$

por tanto  $|\beta - \alpha| = \beta - \alpha < y_\epsilon - x_\epsilon < \epsilon$

entonces  $|\beta - \alpha| < \epsilon \quad \therefore \beta = \alpha.$

La última igualdad se logra si utilizamos el resultado del siguiente lema.

**Lema (8)** Sea  $a \in \mathbb{R}$

$a = 0$  si y solo si  $\forall \epsilon > 0 \quad |a| < \epsilon$

*Demostración.*

$\Rightarrow$

$\Leftarrow$  Supongamos que  $a \neq 0$  entonces  $|a| > 0$

si hacemos  $\epsilon = \frac{|a|}{2}$

por hipótesis  $|a| < \frac{|a|}{2}$

entonces  $\frac{|a|}{2} < 0$  entonces  $|a| < 0$  contradicción

$\therefore a = 0$

Como podemos ver la demostración del teorema (1) queda garantizada con el lema (7).

Veamos la utilidad del teorema (1) en un ejemplo particular.

**Ejemplo (10)** Sea  $f: (0, b) \rightarrow \mathbb{R}$

tal que  $f(x) = x$

Sea  $P_n = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  la partición  $(0, b)$  que se obtiene dividiendo el intervalo  $(0, b)$  en  $n$  partes iguales

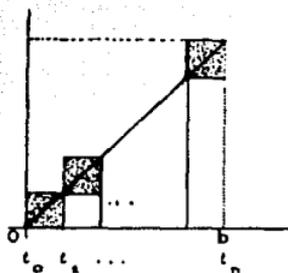


fig.(62)

Entonces:

$$t_0 = 0$$

$$t_1 = 1(b/n)$$

$$t_2 = 2(b/n)$$

...

$$t_i = i(b/n)$$

...

$$t_n = n(b/n)$$

Para usar el teorema (1) es necesario exhibir una partición  $P \in P_{[0, b]}$  para cada  $\epsilon > 0$  tal que  $\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \epsilon$  no importa si los intervalos son ó no de igual magnitud, simplemente se pide una partición para la cual se satisfaga lo anterior.

En este caso particular la función es creciente y continua y por tanto  $m_i(f) = f(t_{i-1}) = t_{i-1}$  y  $M_i(f) = f(t_i) = t_i$  en el intervalo  $[t_{i-1}, t_i]$ .

Veamos cómo son  $\overline{S}(f, P)$  y  $\underline{S}(f, P)$ .

$$\begin{aligned} \text{Por un lado } \overline{S}(f, P) &= \sum_{i=1}^n f(t_i)(t_{i-1} - t_i) = \sum_{i=1}^n i \frac{b}{n} (i \frac{b}{n} - (i-1) \frac{b}{n}) = \\ &= \sum_{i=1}^n i \frac{b}{n} (i \frac{b}{n} - i \frac{b}{n} + \frac{b}{n}) = \sum_{i=1}^n i \frac{b}{n} (\frac{b}{n}) = \frac{b^2}{n^2} \sum_{i=1}^n i = \frac{b^2}{n^2} (n \frac{(n+1)}{2}). \end{aligned}$$

y por otro lado:

$$\begin{aligned} \underline{\Sigma}(f, P_n) &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (\xi_i - \xi_{i-1}) = \sum_{i=1}^n c(\xi_{i-1}) \left( c\left(\frac{b}{n}\right) - (i-1)\frac{b}{n} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( c(i-1)\frac{b}{n} \right) \left( c\left(\frac{b}{n}\right) - (i-1)\frac{b}{n} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (i-1) \frac{b^2}{n^2} = \frac{b^2}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1) = \frac{b^2}{n^2} \left( \frac{n(n-1)}{2} \right) \end{aligned}$$

Tomando la diferencia tenemos que

$$\begin{aligned} \overline{\Sigma}(f, P_n) - \underline{\Sigma}(f, P_n) &= \frac{b^2}{n} \left( \frac{n(n+1)}{2} \right) - \frac{b^2}{n^2} \left( \frac{n(n+1)}{2} \right) - \frac{b^2}{n^2} \left( \frac{n(n-1)}{2} \right) = \\ &= \frac{b^2}{n} \left( \frac{2n}{2} \right) = \frac{b^2}{n} \end{aligned}$$

de donde  $\overline{\Sigma}(f, P_n) - \underline{\Sigma}(f, P_n) < \epsilon$  siempre que  $n > \frac{b^2}{\epsilon}$ .

Así basta con tomar una partición  $P_n$  con  $n > \frac{b^2}{\epsilon}$  para garanti que

$$\overline{\Sigma}(f, P_n) - \underline{\Sigma}(f, P_n) < \epsilon.$$

Para exhibir la partición, simplemente hay que ver qué número natural cumple la desigualdad anterior, y ese número va a determinar el número de elementos de la partición homogénea de  $[a, b]$  que necesitamos.

Observemos que este procedimiento nos ha permitido demostrar que la función es integrable, mas todavía no sabemos cuál es el valor de la integral.

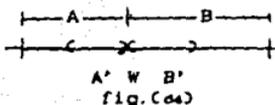
En general, para cualquier función definida en un intervalo cerrado,  $[a, b]$  podemos encontrar el valor de la integral en él, sin necesidad de tomar todas las particiones del

intervalo, lo cual podemos mostrar usando el siguiente lema.

**Lema (9)** Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos de números reales distintos del vacío tales que  $\forall x \in A$  y  $y \in B$  con  $x \leq y$ .

Sean  $A' \subseteq A$  y  $B' \subseteq B$  si  $\sup A' = \inf B' = W$   
entonces  $\sup A = \inf B = W$

*Demostración.* -



Según el lema (2), como  $A' \subseteq A$  y entonces  $\sup A' \leq \sup A$ , y como  $B' \subseteq B$  entonces

$\inf B' \geq \inf B$ .

Ahora, como  $W = \sup A' = \inf B'$  entonces el  $\inf B \leq \inf B' = W = \sup A' \leq \sup A$

De donde  $\inf B \leq W \leq \sup A$

Además, como  $x \leq y$ ,  $\forall x \in A$  y  $y \in B$ , entonces el  $\sup A \leq \inf B$ .

Por tanto  $\inf B = W = \sup A$ .

Ahora bien, si  $A'$  es el conjunto formado por las sumas inferiores correspondientes a un subconjunto de particiones de  $P_{[a,b]}$ , y  $B'$  es el conjunto formado por las sumas superiores correspondientes a un subconjunto de particiones de  $P_{[a,b]}$  y si

$$\sup A' = \inf B'$$

entonces, según el lema anterior

$$\sup A' = \sup \{ \underline{S}(f, P); P \in P_{[a,b]} \} = \inf \{ \overline{S}(f, P); P \in P_{[a,b]} \}$$

Regresemos al ejemplo (10). Para conocer el valor de la integral podemos usar el lema anterior; tanto para las sumas inferiores como para las sumas superiores que hemos construido.

utilizamos particiones homogéneas, así:

$$\underline{S}(f, P_n) = \frac{b^2}{2} \left( \frac{n(n-1)}{2} \right) = \frac{b^2}{n} \left( \frac{n-1}{2} \right) = \frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{2n}$$

$$\underline{S}(f, P_n) = \frac{b^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como  $(1 - \frac{1}{n})$  se acerca por debajo tanto como queramos al 1, el supremo de  $\underline{S}(f, P_n)$  es  $\frac{b^2}{2}$ . Vamos a demostrar que:

$$1) \frac{b^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \leq \frac{b^2}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$2) \forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}, \text{ tal que } \frac{b^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) > \frac{b^2}{2} - \epsilon.$$

*Demostración.* -

$$1) \text{ Como } 1 - \frac{1}{n} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\frac{b^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) < \frac{b^2}{2} (1) = \frac{b^2}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$2) \text{ Sea } \epsilon > 0, \quad \frac{b^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) > \frac{b^2}{2} - \epsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b^2 - \frac{b^2}{n} > b^2 - 2\epsilon \Leftrightarrow 2\epsilon > \frac{b^2}{n}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{b^2}{2\epsilon}.$$

por tanto si  $n > \frac{b^2}{2\epsilon}$ , entonces  $\frac{b^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) > \frac{b^2}{2} - \epsilon$ . q.e.d.

De igual manera podemos hacerlo para  $\overline{S}(f, P_n)$ .

Por tanto  $\sup \{ \underline{S}(f, P_n); P_n \in P_{[a,b]} \} = \inf \{ \overline{S}(f, P_n); P_n \in P_{[a,b]} \}$ .

$$\text{y entonces } \int_a^b x = \frac{b^2}{2}.$$

### 2.2.2. Segunda vía de construcción de la integral.

Esta segunda manera de abordar el problema es casi idéntica a la primera; la única diferencia es que la definición del área bajo la gráfica de una función, no la estableceremos a través del supremo y el ínfimo.

Así que nuestro problema es el de encontrar el área bajo la curva sin considerar el ínfimo de las sumas superiores ni el supremo de las sumas inferiores. La manera de hacerlo será con base en el concepto de límite.

Podríamos analizar el límite de las sumas superiores e inferiores cuando  $n \rightarrow \infty$  (donde  $n$  es el número de puntos de las particiones); pero podría suceder que el número de puntos se vaya a infinito sin que las sumas superiores e inferiores se aproximen al área bajo la gráfica.

Por ejemplo, en la fig.(65), podemos hacer  $n$  suficientemente grande e ir acumulando los puntos de las particiones en el intervalo  $[a,c]$ . Aquí el número de puntos tiende a infinito pero las sumas inferiores o superiores no se aproximan al área.

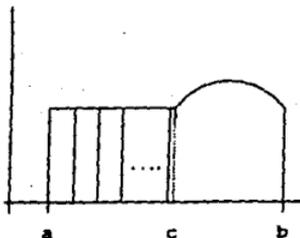


fig.(65).

Sería natural pensar entonces en no tomar cualesquiera particiones, sino aquellas que dividen al

intervalo  $[c, b]$  en  $n$  partes iguales. Así, si  $n \rightarrow \infty$   $\frac{b-a}{n}$  se va haciendo tan chico como queramos y, por tanto, las sumas superiores e inferiores tienden al área (en caso de que ésta exista).

Efectivamente, esta sería una solución, pero tiene un problema: para muchas funciones resulta útil tomar particiones con puntos equidistantes, pero para muchas otras no, así que el problema se vuelve más complicado.

Es por eso que, a pesar de ser una solución para la construcción de la integral, en la práctica resulta ser muy complicado para un gran número de funciones.

Una manera de resolver este problema es pedir que las longitudes de los subintervalos definidos por la partición tiendan a cero. Así pues, pedir que las longitudes se vayan a cero sería pedir que  $n \rightarrow \infty$  (al revés no es válido, como ya se mostró).

Encontrar el límite de las sumas inferiores cuando la longitud de los subintervalos tiende a cero, es lo mismo que encontrar el límite cuando la longitud del intervalo mayor se vaya a cero. Veamos esto:

Sea  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  una partición del intervalo  $[a, b]$  fig.(86).

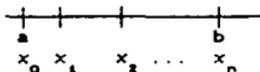


fig.(86)

Esta partición genera  $n$  intervalos, no necesariamente de la misma longitud; elegimos el intervalo de mayor longitud y con base en esta longitud definimos la norma de la partición  $P$ , la cual denotaremos con  $\|P\|$ .

Definición (7). Sea  $P = \langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$ ,  $P \in P_{[a,b]}$ .

Definimos la norma de la partición  $P$  como la longitud del mayor de los subintervalos.

$$\|P\| = \max \langle x_i - x_{i-1} \rangle; i = 1, 2, \dots, n.$$

Hagamos algunas observaciones respecto a esta definición:

- a) Dadas dos particiones  $P$  y  $P^M \in P_{[a,b]}$  tales que  $\|P\| \leq \|P^M\|$  no necesariamente se cumple que  $P$  es refinamiento de  $P^M$ .  
 b) Si  $\|P\| \leq \|P^M\|$ , no necesariamente sucede que

$$\underline{S}(f, P) \geq \underline{S}(f, P^M) \quad \text{y} \quad \bar{S}(f, P) \leq \bar{S}(f, P^M).$$

Ejemplos:

Para a) Sean  $P = \langle x_0, x_1, x_2, x_3 \rangle$  fig.(87)

y  $P^M = \langle y_0, y_1, y_2 \rangle$  fig.(88), dos particiones de  $[a, b]$ .

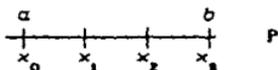


fig.(87)

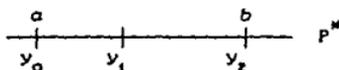


fig.(88).

Claramente  $\|P\| < \|P^M\|$  y sin embargo  $P \not\subseteq P^M$ .

Para b) Sean  $P = (x_0, x_1, \dots, x_6)$  y  $P^M = (y_0, y_1, \dots, y_6)$

dos particiones de  $[a, b]$ .

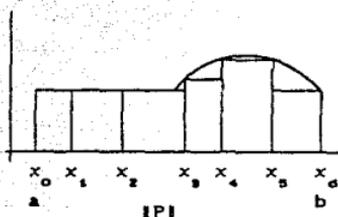


fig.(69)

Claramente (como se ve en las figuras (69) y (70), la suma inferior correspondiente a la partición  $P$ , no es menor que la suma inferior correspondiente a la partición  $P^M$  a pesar de que

$$|P| < |P^M|$$

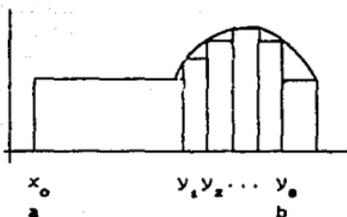


fig.(70)

Ya hemos visto que si una partición tiene norma menor que otra, no necesariamente con ella el área de los rectángulos inscritos se aproxima más al área bajo la curva. Sin embargo si podemos afirmar que si tomamos particiones con norma cada

vez más pequeña, los rectángulos inscritos con esas particiones tienden a cubrir mejor el área que deseamos medir. Pareciera una contradicción, pero no lo es. Cuando decimos "tienden", no nos referimos a un comportamiento creciente; es posible que con una partición cuya norma sea menor que la norma de otra partición, no cubramos mejor (con la suma inferior) el área que deseamos medir. Pero si seguimos adelante haciendo cada vez más pequeña la norma de la partición, las sumas inferiores no tendrán otra posibilidad que irse pareciendo más y más al área bajo la gráfica. (Esto naturalmente cuando dicha área exista).

Este mismo razonamiento lo podemos utilizar en los rectángulos circunscritos; es decir, en la medida en que la norma de la partición tienda a cero, el área de los rectángulos circunscritos se parecerá más a la región que nos proponemos medir.

Por tanto, vamos a poder hablar del área bajo la curva cuando estos dos límites sean iguales, es decir:

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \underline{S}(f, P) = \lim_{|P| \rightarrow 0} \bar{S}(f, P)$$

Así, pues, tenemos la siguiente:

**Definición (B)** Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  acotada en  $[a, b]$ .  $f$  es integrable en  $[a, b]$  si y sólo si

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \underline{S}(f, P) = \lim_{|P| \rightarrow 0} \bar{S}(f, P).$$

$$\text{En tal caso } \int_a^b f = \lim_{|P| \rightarrow 0} \underline{S}(f, P) = \lim_{|P| \rightarrow 0} \bar{S}(f, P)$$

Al principio de esta segunda vía de construcción de la integral comentamos que íbamos a utilizar el concepto de límite y, en efecto, esta definición se basa en dicho concepto; sin embargo conviene hacer la siguiente observación:

La definición de límite de una función dice:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 \text{ tal que } \forall x \in D_f \\ \text{tal que } 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

por tanto, la definición (B), según la definición de límite, quedaría así:

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \underline{\Sigma} f, P = \int_a^b f \Leftrightarrow$$

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0$  tal que  $\forall P \in P_{[a,b]}$  con  $|P| < \delta \Rightarrow$

$$\int_a^b f - \underline{\Sigma} f, P < \epsilon.$$

Para trabajar con este segundo límite con la misma idea que el primero es necesario hacer una pequeña extensión de la definición de límite.

En el primer límite la variable es  $x \in D_f$ , en el segundo es  $P \in P_{[a,b]}$ . En el segundo se tiene siempre  $x_0 = 0$ , y por tanto, la diferencia  $|x - x_0|$  hay que considerarla como  $|P| = 0$ .

Antes de demostrar la equivalencia entre la definición (8) y la definición (8), mostraremos dos resultados que van a ser de gran utilidad para demostrar la equivalencia.

**lema (r0)** Sea  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  acotada en  $[a,b]$ ; entonces

existen  $\lim_{|P| \rightarrow 0} \underline{\Sigma} f, P$  y  $\lim_{|P| \rightarrow 0} \bar{\Sigma} f, P$  y

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \underline{\Sigma} f, P = \int_a^b f = \sup \{ \underline{\Sigma} f, P; P \in P_{[a,b]} \}$$

$$\text{y } \lim_{|P| \rightarrow 0} \bar{\Sigma} f, P = \int_a^b f = \inf \{ \bar{\Sigma} f, P; P \in P_{[a,b]} \}$$

Demostración:

Por ser  $\int_a^b f = \sup \{ \mathcal{S}(f, P); P \in P_{[a,b]} \}$  se tiene que

$$\forall \epsilon > 0 \exists P_1 \in P_{[a,b]} \text{ tal que } \int_a^b f - \frac{\epsilon}{2} < \mathcal{S}(f, P_1) \dots (1)$$

Dada  $\epsilon > 0$ , sea  $P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ; con base en  $P_1$  construimos  $P_2$  de la manera siguiente:

Sea  $P_2$  tal que  $|P_2| = \min \{ (x_i - x_{i-1}); i=1, 2, \dots, n; x_i \in P_1 \}$  donde  $P_2 = \{y_0, y_1, \dots, y_m\}$ , ver fig.(71).

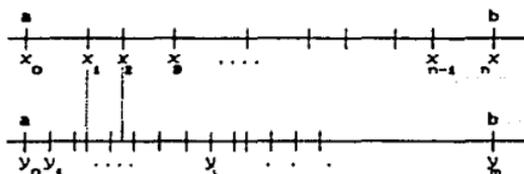


fig.(71).

Observaciones:

- 1) Por la forma en que hemos construido  $P$  aseguramos que cada intervalo generado por ella contiene a lo más un elemento de la partición  $P_1$ .
- 2) Claramente hay un número finito ( $\leq n$ ) de intervalos generados por  $P_2$  que contienen elementos de  $P_1$ .
- 3)  $P_2$  no es refinamiento de  $P_1$ .

Ahora bien, si tomamos  $P = P_1 \cup P_2$ , claramente  $P$  es refinamiento de  $P_1$  y  $P_2$ , es decir

$$P \supseteq P_1, \quad P \supseteq P_2 \text{ y además}$$

$$|P| \leq |P_1|, \quad |P| \leq |P_2|$$

Tomemos un intervalo generado por  $P_2$  que contenga un elemento de  $P_1$  (hay un número finito de estos intervalos). Sea  $(y_{j-1}, y_j)$  tal que  $x_i \in (y_{j-1}, y_j)$ ,  $y_{j-1}, y_j \in P_2$ ,  $x_i \in P_1$ .

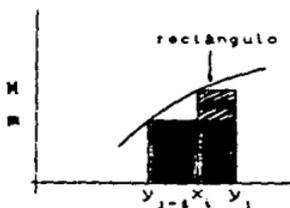


fig.(72)

tipo, ya que el intervalo generado por  $P_2$  es el mismo que el generado por  $P_1$ .

El área de ese rectángulo es menor o igual que  $(M-m)IP_2$ , pues la altura del rectángulo claramente es menor o igual que la diferencia entre el supremo de la función ( $M$ ) y el infimo de la función ( $m$ ), mientras que la base es más pequeña que la norma de  $P_2$ , pues como  $x_i \in (y_{j-1}, y_j)$ , la distancia de  $x_i$  a  $y_{j-1}$  ó a  $y_j$  es menor que la longitud del mayor intervalo generado por  $P_2$ ; y como hay un número finito de intervalos donde sucede esto, entonces

$$\sum(f, P) - \sum(f, P_2) < n(M-m)IP_2,$$

si a  $P_2$  la escogemos de tal manera que además cumpla que

$$IP_2 < \frac{\epsilon}{2n(M-m)}$$

$$\text{entonces } \sum(f, P) - \sum(f, P_2) < n(M-m)IP_2 < \frac{n(M-m)\epsilon}{2n(M-m)} = \frac{\epsilon}{2}$$

$$\text{y por tanto } \sum(f, P) - \sum(f, P_2) < \epsilon. \dots(2)$$

Por otro lado,  $P$  es un refinamiento de  $P_1$ , así que de la desigualdad (1) tenemos que:

$$\int_a^b f - \frac{\epsilon}{2} < \underline{\mathcal{S}}(f, P_1) \leq \underline{\mathcal{S}}(f, P)$$

y por tanto  $\int_a^b f - \underline{\mathcal{S}}(f, P) < \frac{\epsilon}{2} \dots (a)$

Si sumamos (a) y (b) tenemos:

$$\int_a^b f - \underline{\mathcal{S}}(f, P) + \underline{\mathcal{S}}(f, P) - \underline{\mathcal{S}}(f, P_2) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

de donde  $\int_a^b f - \underline{\mathcal{S}}(f, P_2) < \epsilon$

y por tanto  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0$  tal que  $\forall P_2 \in P_{[a,b]}$  con  $|P_2| < \delta$  se cumple que

$$\int_a^b f - \underline{\mathcal{S}}(f, P_2) < \epsilon, \quad \text{donde}$$

$$\delta = \min \left( \frac{\epsilon}{2n(M-m)} ; \min \langle (x_i - x_{i-1}) : i = 1, 2, \dots, n, x_i \in P_i \rangle \right)$$

$$\therefore \lim_{|P| \rightarrow 0} \underline{\mathcal{S}}(f, P) = \int_a^b f$$

Corolario (1).  $f$  es integrable en  $[a, b]$  si y sólo si  $\forall \epsilon > 0$   
 $\exists \delta(\epsilon)$  tal que  $\forall P \in P_{[a,b]}$  con  $|P| < \delta$ , se cumple que

$$\overline{\mathcal{S}}(f, P) - \underline{\mathcal{S}}(f, P) < \epsilon.$$

Demostración.-

$$f \text{ es integrable en } [a, b] \Leftrightarrow \int_a^b f = \int_a^b f$$

$$\Leftrightarrow \lim_{|P| \rightarrow 0} \underline{S}(f, P) = \lim_{|P| \rightarrow 0} \overline{S}(f, P)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{|P| \rightarrow 0} \overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) = 0$$

$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0$  tal que  $\forall P \in P_{[a,b]}$  con  $|P| < \delta$

se cumple que  $\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \epsilon$ .

Observación: El "regreso" es válido porque ambos límites siempre existen, sea  $f$  integrable o no.

Con el lema (9) y el corolario (1), la demostración de la equivalencia entre las definiciones (6) y (8) se convierte en un corolario de estos resultados. Veámoslo.

**Teorema (2)** Una función  $f$  acotada en  $[a, b]$ , es integrable sobre  $[a, b]$  si y sólo si

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \underline{S}(f, P) = \lim_{|P| \rightarrow 0} \overline{S}(f, P).$$

*Demostración:*

$\Rightarrow$  Demostraremos que la definición (6) implica la definición (8).

Por hipótesis  $\int_a^b f = \int_a^b f$  y por el lema (9)

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \underline{S}(f, P) = \int_a^b f \quad \text{y} \quad \lim_{|P| \rightarrow 0} \overline{S}(f, P) = \int_a^b f.$$

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \underline{S}(f, P) = \lim_{|P| \rightarrow 0} \overline{S}(f, P).$$

$\Leftarrow$  Demostraremos que la definición (8) implica la definición (6).

Por hipótesis  $\lim_{|P| \rightarrow 0} \underline{S}(f, P) = \lim_{|P| \rightarrow 0} \overline{S}(f, P)$

y por el lema (10)

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \underline{S}(f, P) = \int_a^b f \quad \text{y} \quad \lim_{|P| \rightarrow 0} \overline{S}(f, P) = \int_a^b f$$

$$\therefore \int_a^b f = \int_a^b f \quad \text{q.e.d.}$$

Con esta nueva herramienta que hemos desarrollado podemos determinar el valor de la integral para cualquier función que sea integrable, de manera un poco más sencilla.

Veamos el ejemplo siguiente.

Ejemplo (11) Sea  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2$ , y sea

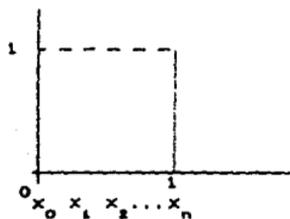


fig. (78).

$P_n = \langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$  una partición del intervalo  $[0,1]$  con  $x_i = \frac{i}{n}$ , es decir

$P_n = \langle 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1 \rangle$  donde  $P_n$  divide al intervalo  $[0,1]$  en  $n$  partes iguales. Ver fig.(78).

Donde  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \frac{1}{n}$ ,  $x_2 = \frac{2}{n}$ , ...

$$x_{i-1} = (i-1) \frac{1}{n}, \quad x_i = i \frac{1}{n}, \dots, \quad x_n = 1.$$

Como la función es creciente en el intervalo  $[0,1]$ , tenemos que

$$m_i(f) = f(x_{i-1}) = \left( (i-1) \frac{1}{n} \right)^2 \quad \text{y}$$

$$M_i(f) = f(x_i) = f\left( \frac{i}{n} \right) = \left( \frac{i}{n} \right)^2.$$

entonces:

$$\begin{aligned}
 \underline{S}(f, P_n) &= \sum_{i=1}^n M_i(f)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \\
 &= \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = \frac{1}{n^3} \left( \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) = \\
 &= \frac{n}{6n^3} (n+1)(2n+1) = \frac{2n^2}{6n^3} + \frac{3n}{6n^3} + \frac{1}{6n^3} = \\
 &= \frac{2}{6} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \\
 \therefore \lim_{|P| \rightarrow 0} \underline{S}(f, P_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{6} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y \quad \overline{S}(f, P_n) &= \sum_{i=1}^n m_i(f)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{(i-1)^2}{n^2} \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2) = \\
 &= \frac{1}{n^3} \left( \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} \right) = \frac{2n^2}{6n^3} - \frac{2}{6n} + \frac{1}{6n^3}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{|P| \rightarrow 0} \overline{S}(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{6} - \frac{2}{6n} + \frac{1}{6n^3} = \frac{1}{3}$$

Es decir  $\lim_{|P| \rightarrow 0} \underline{S}(f, P_n) = \frac{1}{3}$  y  $\lim_{|P| \rightarrow 0} \overline{S}(f, P_n) = \frac{1}{3}$ .

$$\therefore \int_0^1 f = \int_0^1 f = \frac{1}{3}.$$

Como el  $\lim_{|P| \rightarrow 0} \underline{S}(f, P)$  y  $\lim_{|P| \rightarrow 0} \overline{S}(f, P)$  siempre existen,

para obtenerlos basta con tomar una sucesión de particiones tal que  $|P| \rightarrow 0$ . En este caso particular hemos elegido particiones que generan intervalos de la misma longitud, y en la medida que  $n \rightarrow \infty$ , la  $|P| \rightarrow 0$ ; por tanto el límite que obtenemos es el mismo que con

cualquier otra forma de hacer tender a cero la norma de la partición, pues el límite siempre existe.

### 2.2.3. Tercera vía de construcción de la integral.

Hemos basado las definiciones de la integral en la construcción de rectángulos inscritos y circunscritos, y para ello fué necesario tomar el infimo y el supremo de la función en cada intervalo generado por la partición; una vez que logramos esto, consideramos todas las particiones del intervalo y con base en ellas generamos todas las sumas, tanto inferiores como superiores, con las cuales procedimos a desarrollar ambas definiciones: por un lado a través del supremo y del infimo, y por el otro con la norma de la partición y el concepto de límite.

Veamos qué sucede si, ahora, para la construcción de los rectángulos tomamos cualquier valor del intervalo generado por la partición, evaluamos la función en él, y este valor lo tomamos como la altura del rectángulo en cada subintervalo (fig.(74)).

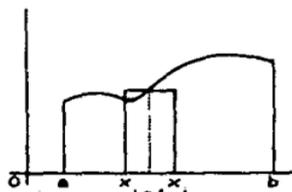


fig.(74)

Claramente estos nuevos rectángulos no serían como los anteriores.

Si queremos aproximarnos al área bajo la gráfica, aquí no nos aproximamos con rectángulos inscritos y circunscritos, aquí no tenemos criterio de comparación.

Para aproximarnos al área bajo la curva usando estos nuevos rectángulos, tenemos la posibilidad de hacer pequeñas las bases de los rectángulos, haciendo tender a cero la norma de la partición, y si el área bajo la curva existe, entonces, al tomar el límite de las sumas construidas de esta manera, cuando la norma de la

partición tiende a cero, vamos a determinar el área bajo la curva.

Esto es de gran utilidad ya que para construir los rectángulos, no hay que recurrir necesariamente al infimo y al supremo de la función, podemos elegir cualquier valor en los intervalos generados por la partición, evaluar en él la función y así obtenemos la altura de cada uno de los rectángulos, lo cual en algunos casos resulta ser muy práctico. Veamos.

Sea  $P = \langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle \in P_{[a,b]}$ .

El área de los rectángulos es igual a

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \quad \text{donde } \xi_i \in (x_{i-1}, x_i). \text{ Ver fig. (75)}$$

El conjunto  $\langle \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \rangle$  es llamado conjunto de valores intermedios para la partición P.

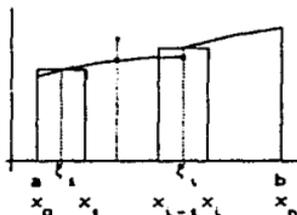


fig. (75).

Usaremos la siguiente notación

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = S(f, P, \Xi).$$

donde  $\Xi = \langle \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \rangle$

Definición (9) Sea  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$   $f$  acotada en  $[a,b]$  sean

$$P = \langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle \in P_{[a,b]} \text{ y}$$

$$\Xi = \langle \xi_i; \xi_i \in (x_{i-1}, x_i), i = 1, 2, \dots, n \rangle$$

Definimos las Sumas de Riemann de  $f$  en  $[a,b]$

como:

$$S(f, P, \Xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Si recurrimos a nuestra definición inicial de la integral podemos demostrar que, si una función es integrable, el límite de las Sumas de Riemann cuando la norma de la partición tiende a cero existe; y viceversa, si este límite existe entonces la función es integrable.

Este resultado nos permite hablar de una condición necesaria y suficiente para que una función sea integrable, o bien de una VIA ALTERNATIVA PARA DEFINIR LA INTEGRAL.

**Teorema (3)** Sea  $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$  acotada en  $(a,b)$ .  
 $f$  es integrable en  $(a,b)$  si y sólo si existe

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \mathcal{S}f, P, \Xi = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

con  $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$

y es el mismo límite para todo conjunto

$\Xi = \langle \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \rangle$  de valores intermedios.

En tal caso

$$\int_a^b f = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

**Demostración:**

a) Por hipótesis  $f$  es integrable en  $(a,b)$ . Demostraremos que

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \mathcal{S}f, P, \Xi = \int_a^b f,$$

es decir:  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  tal que  $\forall P \in \mathcal{P}_{(a,b)}$  con  $|P| < \delta$

se tiene que  $|\mathcal{S}f, P, \Xi - \int_a^b f| < \epsilon$

para todo conjunto  $\Xi$  de valores intermedios de  $P$ .

$\Rightarrow$  Como  $m_i(f) \leq f(\xi_i) \leq M_i(f) \quad \forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$   
 entonces  $m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq M_i(f)(x_i - x_{i-1})$   
 sumando las  $n$  dobles desigualdades obtenemos,

$$\sum_{i=1}^n m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n M_i(f)(x_i - x_{i-1})$$

para cualquier conjunto  $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$  de valores intermedios.

$$\text{Entonces } \underline{S}(f, P) \leq S(f, P, \Xi) \leq \bar{S}(f, P) \quad \forall \Xi.$$

Si restamos  $\int_a^b f$  a cada término de la doble desigualdad tenemos:

$$\underline{S}(f, P) - \int_a^b f \leq S(f, P, \Xi) - \int_a^b f \leq \bar{S}(f, P) - \int_a^b f \quad \dots (*)$$

Sea  $\epsilon > 0$ , como  $f$  es integrable,  $\exists \delta_1, \delta_2 > 0$  tales que

$$\forall P \in P_{[a,b]} \text{ con } |P| < \delta_1 \Rightarrow \left| \underline{S}(f, P) - \int_a^b f \right| < \epsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\epsilon < \underline{S}(f, P) - \int_a^b f < \epsilon$$

$$\forall P \in P_{[a,b]} \text{ con } |P| < \delta_2 \Rightarrow \left| \bar{S}(f, P) - \int_a^b f \right| < \epsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\epsilon < \bar{S}(f, P) - \int_a^b f < \epsilon.$$

Así, si  $|P| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  podemos afirmar que:

$$-\epsilon < \underline{S}(f, P) - \int_a^b f \quad \text{y} \quad \bar{S}(f, P) - \int_a^b f < \epsilon$$

lo cual, considerando la ecuación (\*), nos lleva a que :

$$- \varepsilon < \mathcal{S}f, P, \mathcal{D} - \int_a^b f < \varepsilon$$

$\forall P$  con  $|P| < \delta$  y  $\forall \mathcal{D}$  conjunto de valores intermedios de  $P$   
 $\therefore \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall P \in P_{[a,b]}$  y  $\forall \mathcal{D}$  conjunto de valores  
intermedios de  $P$ ; si  $|P| < \delta \Rightarrow \left| \mathcal{S}f, P, \mathcal{D} - \int_a^b f \right| < \varepsilon.$  q.e.d.

e) Por hipótesis  $\lim_{|P| \rightarrow 0} \mathcal{S}f, P, \mathcal{D}$  existe.,

Demostraremos que la función es integrable.

Supongamos que el límite es  $l$ , es decir

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \mathcal{S}f, P, \mathcal{D} = l$$

entonces, esto significa que:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall P \in P_{[a,b]}, |P| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \mathcal{S}f, P, \mathcal{D} - l \right| < \varepsilon \quad \forall \mathcal{D} \text{ conjunto de valores intermedios.}$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < \mathcal{S}f, P, \mathcal{D} - l < \varepsilon$$

sumando  $l$  en la desigualdad anterior tenemos

$$l - \varepsilon < \mathcal{S}f, P, \mathcal{D} < l + \varepsilon. \dots (**)$$

Sea  $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  tal que  $|P| < \delta$ ; en el intervalo

$[x_{i-1}, x_i]$  elegimos  $\xi_i$  tal que

$$f(\xi_i) > M_i(f) - \frac{\varepsilon}{b-a}$$

(recordemos que  $M_i(f) = \sup \{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ ), entonces

$$\mathcal{S}f, P, \mathcal{D} = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) > \sum_{i=1}^n \left( M_i(f) - \frac{\varepsilon}{b-a} \right) (x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^n M_i(f)(x_i - x_{i-1}) - \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \bar{S}(f, P) - \epsilon.$$

y usando la desigualdad (\*\*), nos queda:

$$\bar{S}(f, P) - \epsilon < S(f, P, \mathcal{D}) < I + \epsilon$$

y como también se cumple que:

$$\bar{S}(f, P) \geq \int_a^b f$$

$$\text{entonces } \bar{S}(f, P) - \epsilon \geq \int_a^b f - \epsilon$$

$$\text{de donde } \int_a^b f - \epsilon \leq \bar{S}(f, P) - \epsilon \leq S(f, P, \mathcal{D}) < I + \epsilon$$

$$\text{es decir } \int_a^b f - \epsilon < I + \epsilon$$

$$\therefore \int_a^b f - I < 2\epsilon \quad \forall \epsilon > 0.$$

$\left( \int_a^b f > I \right)$  no puede suceder, ya que si  $\int_a^b f - I > 0$  entonces

$$\int_a^b f - I = \left| \int_a^b f - I \right| \quad \text{y según el lema (7) si } \left| \int_a^b f - I \right| < 2\epsilon$$

$$\Rightarrow \int_a^b f - I = 0.$$

$$\therefore \int_a^b f \leq I.$$

De igual manera, siguiendo un razonamiento similar para

$$\int_a^b f$$

obtenemos que  $1 \leq \int_a^b f$  y

$$\therefore \int_a^b f \leq 1 \leq \int_a^b f \quad \dots (I)$$

y según el lema (S)  $\int_a^b f \leq \int_a^b f$ , por tanto sólo la igualdad se

cumple en la relación (I), así que  $\int_a^b f = \int_a^b f = 1$ ;

$\therefore f$  es integrable y  $\int_a^b f = 1$ . q.e.d.

**Ejemplo (12).** Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = c$ .



fig. (70).

Sea  $P = (a=x_0, x_1, \dots, x_n=b) \in P_{[a, b]}$

$$\text{entonces } S(f, P, \Xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

donde  $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ ,  $\forall \Xi$  conjunto de valores intermedios.

Como  $f(\xi_i) = c$ , tenemos que

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n c(x_i - x_{i-1}) = c \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = c(b-a).$$

y si tomamos el límite cuando  $|P| \rightarrow 0$ :

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} c(b-a) = c(b-a)$$

$f(x) = c$  es integrable y  $\int_a^b c = c(b-a)$ .

Ejemplo (13) Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \text{sen } x$ ; sea  $P_n = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  una partición de  $[a, b]$  que divide al intervalo  $[a, b]$  en  $n$  partes iguales, es decir, si  $k$  es la longitud de cada uno de los intervalos, entonces  $\frac{b-a}{n} = k$  (y por tanto  $|P_n| = \frac{b-a}{n}$ ). Cada elemento de  $P_n$  lo podemos escribir como:



$$\begin{aligned} x_0 &= a, \quad x_1 = a + k, \quad x_2 = a + 2k, \\ \dots, \quad x_{i-1} &= a + (i-1)k, \quad x_i = a + ik, \\ x_{i+1} &= a + (i+1)k, \dots, \quad x_n = a + nk. \end{aligned}$$

Si nos fijamos en la expresión  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$  con  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ; tomamos  $\xi_i = x_i = a + ik$ , entonces

$$S(f, P, \Xi) = \sum_{i=1}^n \text{sen}(a + ik)k = k \sum_{i=1}^n \text{sen}(a + ik)$$

usando la igualdad siguiente:

$$2 \text{sen } A \text{ sen } B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$$

y multiplicando por  $\frac{2 \text{sen } k/2}{2 \text{sen } k/2}$  (con  $\text{sen } k/2 \neq 0$ )

tenemos:

$$\begin{aligned} k \sum_{i=1}^n \text{sen}(a + ik) &= \frac{k \cdot 2 \text{sen } k/2}{2 \text{sen } k/2} \sum_{i=1}^n \text{sen}(a + ik) = \\ &= \frac{k}{2 \text{sen } k/2} \sum_{i=1}^n 2 \text{sen } k/2 \text{ sen}(a + ik) = \\ &= \frac{k}{2 \text{sen } k/2} \sum_{i=1}^n [\cos(a + ik - \frac{k}{2}) - \cos(a + ik + \frac{k}{2})] \\ &= \frac{k}{2 \text{sen } k/2} \sum_{i=1}^n [\cos(\frac{k(i-1)}{2} + a) - \cos(\frac{k(i+1)}{2} + a)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{k}{2 \operatorname{sen} k/2} \left[ \cos \left( \frac{k}{2} + \alpha \right) - \cos \left( \frac{3}{2} k + \alpha \right) \right. \\
&\quad + \cos \left( \frac{5}{2} k + \alpha \right) - \cos \left( \frac{7}{2} k + \alpha \right) + \dots \\
&\quad \left. + \cos \left( \frac{k(2n-1)}{2} + \alpha \right) - \cos \left( \frac{k(2n+1)}{2} + \alpha \right) \right] = \\
&= \frac{k}{2 \operatorname{sen} k/2} \left( \cos \left( \frac{k}{2} + \alpha \right) - \cos \left( \frac{k(2n+1)}{2} + \alpha \right) \right) = \\
&= \frac{k}{2 \operatorname{sen} k/2} \left( \cos \left( \frac{k}{2} + \alpha \right) - \cos \left( \frac{2nk + k}{2} + \alpha \right) \right) =
\end{aligned}$$

como  $\frac{b-a}{n} = k \Rightarrow b-a = nk$

$$\begin{aligned}
&= \frac{k}{2 \operatorname{sen} k/2} \left( \cos \left( \frac{k}{2} + \alpha \right) - \cos \left( \frac{2(b-a)+k}{2} + \alpha \right) \right) \\
&= \frac{k}{2 \operatorname{sen} k/2} \left( \cos \left( \frac{k}{2} + \alpha \right) - \cos \left( b-a + \frac{k}{2} + \alpha \right) \right) \\
&= \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} k/2}{k/2}} \left( \cos \left( \frac{k}{2} + \alpha \right) - \cos \left( \frac{k}{2} + b \right) \right).
\end{aligned}$$

Cuando  $n \rightarrow \infty$ ,  $|R_n| \rightarrow 0$ , es decir  $\frac{b-a}{n} \rightarrow 0$ ; o bien  $k \rightarrow 0$ .

Así pues, al tomar el límite cuando  $|R_n| \rightarrow 0$  de  $SC(f, P, \mathcal{D})$  tenemos:

$$\lim_{|R_n| \rightarrow 0} SC(f, P, \mathcal{D}) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} k/2}{k/2}} \left( \cos \left( \frac{k}{2} + \alpha \right) - \cos \left( \frac{k}{2} + b \right) \right).$$

El límite de cada uno de los términos existe, los dos últimos por la continuidad de la función coseno, y el primero porque

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \text{ Por tanto:}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{|R_n| \rightarrow 0} SC(f, P, \mathcal{D}) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} k/2}{k/2}} \left[ \lim_{k \rightarrow 0} \cos \left( \frac{k}{2} + \alpha \right) - \lim_{k \rightarrow 0} \cos \left( \frac{k}{2} + b \right) \right] \\
&= 1 [\cos(\alpha) - \cos(b)].
\end{aligned}$$

de donde  $\lim_{|P| \rightarrow 0} S(f, P, \Xi) = \cos a - \cos b$ .

Hagamos las siguientes observaciones:

a) Claramente las  $S(f, P, \Xi)$  no son sumas superiores ni inferiores, fig. (78)).

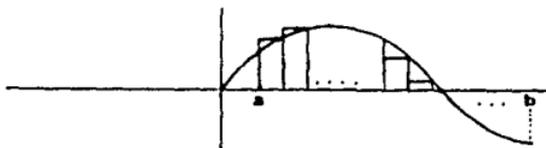


fig. (78)

b) No podemos afirmar que el valor que hemos encontrado al calcular el  $\lim_{|P| \rightarrow 0} S(f, P, \Xi)$  es el valor de la integral.

Sería el valor de la integral si de antemano supiéramos que la función es integrable, o si demostráramos que, al considerar todas las posibles formas en que la norma de la partición tiende a cero y todos los posibles conjuntos  $\Xi$  de valores intermedios, el límite de  $S(f, P, \Xi)$  cuando  $|P| \rightarrow 0$  es el mismo en todos los casos.

En general, con muchas funciones, vamos a enfrentar este tipo de problemas; por ello creemos conveniente, con base en las definiciones que hemos establecido, demostrar algunas propiedades básicas de las funciones integrables, las cuales permitan determinar la solución a este tipo de problemas

Antes de abordar las propiedades básicas de las funciones integrables, conviene hacer la siguiente observación:

Hemos definido de tres maneras distintas el concepto de integral y hemos demostrado que son equivalentes. Por tanto podemos adoptar como definición de integral cualquiera de ellas y dejar a las otras como un criterio (necesario y suficiente) para que una función sea integrable.

### 2.3 Propiedades básicas de la integral.

**Teorema (4)** Sean  $a, b, c \in \mathbb{R}$  con  $a < c < b$ ;  $f$  es integrable sobre  $[a, b]$  si y sólo si  $f$  es integrable sobre  $[a, c]$  y  $[c, b]$ . En tal caso

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

*Demostración*

a) Sea  $\epsilon > 0$ , como  $f$  es integrable en  $[a, b]$   $\Rightarrow \exists P' \in P_{[a, b]}$  tal que  $\bar{S}(f, P') - \underline{S}(f, P') < \epsilon$ .

Sea  $P = P' \cup \langle c \rangle = \langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$ ; es claro que  $P \supseteq P'$  (si  $P'$  ya incluía a  $c$ ,  $P' = P$ ). Ahora, sean

$$P_1 = \langle a = x_0, x_1, \dots, x_j = c \rangle \text{ y } P_2 = \langle x_j = c, x_{j+1}, \dots, x_n = b \rangle$$

entonces:

$P_1$  es una partición de  $[a, c]$  y  $P_2$  es una partición de  $[c, b]$ ,

además

$$\underline{S}(f, P) = \underline{S}(f, P_1) + \underline{S}(f, P_2) \text{ y } \bar{S}(f, P) = \bar{S}(f, P_1) + \bar{S}(f, P_2)$$

de donde:

$$\bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) = (\bar{S}(f, P_1) - \underline{S}(f, P_1)) + (\bar{S}(f, P_2) - \underline{S}(f, P_2))$$

pero

$$\bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) \leq \bar{S}(f, P') - \underline{S}(f, P') < \epsilon$$

por lo que

$$(\bar{S}(f, P_1) - \underline{S}(f, P_1)) + (\bar{S}(f, P_2) - \underline{S}(f, P_2)) < \epsilon$$

Como cada uno de los sumandos es positivo, entonces cada uno de ellos es menor que  $\epsilon$ . Por tanto  $f$  es integrable en  $[a, c]$  y en  $[c, b]$ .

e) Para demostrar el regreso podemos seguir casi pas<sup>o</sup> a pas<sup>o</sup> la misma demostración anterior pero, precisamente, "de regreso".

Veamos.

Como  $f$  es integrable en  $[a, c]$  y en  $[c, b]$  entonces

$\exists P_1 \in P_{[a, c]}$  y  $P_2 \in P_{[c, b]}$ , digamos

$P_1 = \langle a = x_0, x_1, \dots, x_j = c \rangle$ ,  $P_2 = \langle y_0 = c, y_1, \dots, y_k = b \rangle$  tales que

$$\bar{\Sigma}f, P_1 - \underline{\Sigma}f, P_1 < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad \bar{\Sigma}f, P_2 - \underline{\Sigma}f, P_2 < \frac{\epsilon}{2}$$

Sea  $P = P_1 \cup P_2$ ;  $P \in P_{[a, b]}$ , entonces

$$\bar{\Sigma}f, P = \bar{\Sigma}f, P_1 + \bar{\Sigma}f, P_2 \quad \text{y} \quad \underline{\Sigma}f, P = \underline{\Sigma}f, P_1 + \underline{\Sigma}f, P_2$$

así que

$$\bar{\Sigma}f, P - \underline{\Sigma}f, P = (\bar{\Sigma}f, P_1 - \underline{\Sigma}f, P_1) + (\bar{\Sigma}f, P_2 - \underline{\Sigma}f, P_2) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

$\therefore f$  es integrable en  $[a, b]$ .

Finalmente, si  $f$  es integrable en  $[a, b]$ ,  $[a, c]$  y  $[c, b]$ ; tomamos las mismas particiones  $P$ ,  $P_1$ , y  $P_2$  de la demostración anterior y tenemos que:

$$\underline{\Sigma}f, P = \underline{\Sigma}f, P_1 + \underline{\Sigma}f, P_2 \leq \int_a^c f + \int_c^b f \leq \bar{\Sigma}f, P_1 + \bar{\Sigma}f, P_2 = \bar{\Sigma}f, P$$

$$\therefore \underline{\Sigma}f, P \leq \int_a^c f + \int_c^b f \leq \bar{\Sigma}f, P$$

como  $f$  es integrable

$$\underline{\Sigma}f, P \leq \int_a^b f \leq \bar{\Sigma}f, P$$

Como estas dos relaciones se satisfacen para toda partición y  $f$  es integrable tenemos:

$$\sup \{ \underline{\Sigma}f, P; P \in P_{[a, b]} \} = \inf \{ \bar{\Sigma}f, P; P \in P_{[a, b]} \}$$

$$\therefore \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \quad \text{q. e. d.}$$

**Teorema (5)** Si  $f$  y  $g$  son integrables sobre  $[a, b]$  entonces  $f + g$  es integrable sobre  $[a, b]$  y

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

Antes de iniciar la demostración del teorema (5) vamos a establecer un lema que nos será de gran utilidad.

**Lema (11)** Sean  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funciones acotadas en  $[a, b]$ , entonces

$$i) \sup_{[a, b]} (f + g) \leq \sup_{[a, b]} (f) + \sup_{[a, b]} (g)$$

$$ii) \inf_{[a, b]} (f + g) \geq \inf_{[a, b]} (f) + \inf_{[a, b]} (g)$$

Demostremos ii) y dejamos como ejercicio para el lector la demostración de i).

*Demostración:*

$$\inf (f(x)) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\inf (g(x)) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

entonces

$$\inf (f(x)) + \inf (g(x)) \leq f(x) + g(x) = (f + g)_{(x)}$$

eso quiere decir que  $\inf (f(x)) + \inf (g(x))$  es una cota inferior

$\langle (f + g)_{(x)}; x \in [a, b] \rangle$

$$\therefore \inf (f(x)) + \inf (g(x)) \leq \inf \langle (f + g)_{(x)} \rangle$$

Demostración del teorema (5)

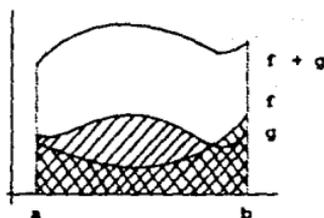


fig. (79).

Sea  $P = \langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle \in P_{[a,b]}$ , por el lema (10)

$$\sup_{[x_{k-1}, x_k]} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f(x) + \sup_{[x_{k-1}, x_k]} g(x), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

$$\inf_{[x_{k-1}, x_k]} (f(x) + g(x)) \leq \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f(x) + \inf_{[x_{k-1}, x_k]} g(x), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

$$\text{Entonces } \overline{S}(f+g, P) \leq \overline{S}(f, P) + \overline{S}(g, P) \dots \text{(I)}$$

$$\text{y } \underline{S}(f+g, P) \geq \underline{S}(f, P) + \underline{S}(g, P) \dots \text{(II)}$$

Ahora, para cada  $\epsilon > 0$  existen particiones  $P_1$  y  $P_2$  tales que

$$\overline{S}(f, P_1) - \frac{\epsilon}{2} < \int_a^b f \quad \text{y} \quad \overline{S}(g, P_2) - \frac{\epsilon}{2} < \int_a^b g$$

sea  $Q = P_1 \cup P_2$ , usando la relación (I) tenemos que

$$\begin{aligned} \int_a^b (f+g) - \epsilon &\leq \overline{S}(f+g, Q) - \epsilon \leq \overline{S}(f, Q) + \overline{S}(g, Q) - \epsilon < \\ &< \int_a^b f + \int_a^b g \end{aligned}$$

entonces

$$\int_a^b (f+g) < \int_a^b f + \int_a^b g + \epsilon$$

Usando la relación (II) obtenemos, por un argumento similar, que:

$$\int_a^b (f + g) > \int_a^b f + \int_a^b g - \epsilon$$

por tanto 
$$\int_a^b f + \int_a^b g - \epsilon < \int_a^b (f + g) < \int_a^b f + \int_a^b g + \epsilon$$

y esto como se cumple para toda  $\epsilon > 0$  entonces

$$\int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b (f + g) \quad \text{q.e.d.}$$

Observaciones:

a) Claramente el recíproco de este teorema no se cumple; por ejemplo si

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{I} \cap [0,1] \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{I} \cap [0,1] \end{cases}$$

$$f(x) + g(x) = f(x) + g(x) = 1$$

En este caso, la función  $f + g$  es integrable, pero ni  $f$  ni  $g$  lo son.

b) ¿Puede suceder que  $f$  sea no integrable,  $g$  si lo sea, y  $f + g$  también? Contestaremos a esta pregunta después de demostrar un corolario del teorema (B), junto con un resultado que enunciaremos más abajo.

c) El teorema anterior se puede extender a cualquier número finito de funciones; esto es, si  $f_1, f_2, \dots, f_n$  son integrables sobre  $[a, b]$  y

$$\int_a^b (f_1 + f_2 + \dots + f_n) = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 + \dots + \int_a^b f_n$$

**Teorema (6)** Si  $f$  es integrable sobre  $[a, b]$  entonces para cualquier número  $c$ , la función  $cf$  es integrable sobre  $[a, b]$  y

$$\int_a^b cf = c \int_a^b f$$

**Demostración:**

Sea  $P$  una partición de  $[a, b]$  dada por

$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  y sea  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$   $i = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} \text{Entonces } S_{cf, P, \Xi} &= \sum_{i=1}^n (cf)(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \\ &= c \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

tomando el límite cuando  $|P| \rightarrow 0$ , tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{|P| \rightarrow 0} S_{cf, P, \Xi} &= \lim_{|P| \rightarrow 0} c \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \\ &= c \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = c \int_a^b f \\ \therefore \int_a^b cf &= c \int_a^b f \end{aligned}$$

Un resultado que se desprende de los teoremas (5) y (6) es el siguiente.

**Corolario (2)** Si  $f$  y  $g$  son integrables en  $[a, b]$  entonces

$f - g$  lo es y

$$\int_a^b (f - g) = \int_a^b f - \int_a^b g$$

$f - g$  la podemos escribir como  $f + (-g)$  y podemos aplicar los teoremas anteriores.

Ahora si podemos contestar la pregunta planteada en la observación (b) del teorema (5):

Si consideramos  $h = f + g$  entonces  $f = h - g$ .

Si suponemos que  $h$  y  $g$  son integrables, según el corolario (2),  $f$  también lo es, por tanto no puede suceder lo planteado en la pregunta anterior.

**Teorema (7)** Si la función  $f$  es no negativa y es integrable sobre el intervalo  $(a,b)$  entonces

$$\int_a^b f \geq 0$$

*Demostración:*

Sea  $P$  una partición cualquiera del  $(a,b)$ , digamos

$$P = \langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle \text{ y sea } \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad i=1, 2, \dots, n$$

Como la función  $f$  es no negativa y  $x_i - x_{i-1} \geq 0$ , entonces cada término de la suma es positivo y por tanto, la suma es positiva para cualquier conjunto  $\Xi$  de valores intermedios. Tomando el límite de  $\Sigma f, P, \Xi$  cuando  $|P| \rightarrow 0$ , tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{|P| \rightarrow 0} \Sigma f, P, \Xi &= \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \geq 0 \\ \therefore \int_a^b f &\geq 0 \end{aligned}$$

**Corolario (3)** Si las funciones  $f$  y  $g$  son integrables sobre  $(a,b)$  y si  $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in (a,b)$  entonces

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g$$

*Demostración:*

Si  $f \geq g$  entonces  $f - g \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$ , así que

$$\int_a^b (f - g) = \int_a^b f - \int_a^b g \geq 0 \text{ de donde } \int_a^b f \geq \int_a^b g$$

En el intervalo  $(a,b)$  sobre el cual hemos construido el

concepto de integral, siempre hemos considerado  $a < b$ . (es decir, hemos trabajado sobre intervalos no degenerados) ¿Qué sucede si  $a = b$ ? (fig. (90)).

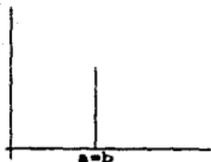


fig. (90)

Si el área abarcada por un segmento de línea es cero, entonces es natural definir el concepto de integral en ese caso como cero.

**Definición (10)** Para cualquier función  $f$  definida en el punto  $a$ , definimos:

$$\int_a^a f = 0$$

¿Qué significado tendría  $\int_b^a f$  cuando  $a < b$ ?

El análisis que haríamos para definir el concepto de integral en este caso, sería esencialmente el mismo que hemos desarrollado cuando  $b < a$ ; nada más que, al tomar los subintervalos generados por la partición, éstos estarían orientados en el sentido negativo del eje de las abscisas.

Por lo cual sería natural establecer que:  $\int_b^a f = - \int_a^b f$ .

**Definición (11)** Si  $f$  es integrable sobre  $(a, b)$ , definimos

$$\int_b^a f = - \int_a^b f ; a < b$$

Con las definiciones (9) y (10), la igualdad en el teorema (4), es decir

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$$

se cumple para todo  $a, c, b$ ; incluso si no se cumple  $a < c < b$ ; (la demostración se deja para el lector).

Dada una función  $f$  definimos  $f^+$  y  $f^-$  como

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \forall x \in D_f \text{ tal que } f(x) \geq 0 \\ 0 & \forall x \in D_f \text{ tal que } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in D_f \text{ tal que } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \forall x \in D_f \text{ tal que } f(x) < 0 \end{cases}$$

Si  $f$  es como en la fig. (a1), entonces  $f^+$  y  $f^-$  son como en las figuras (a2) y (a3) respectivamente.

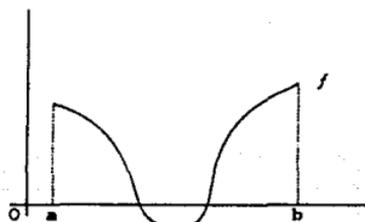


fig. (a1)

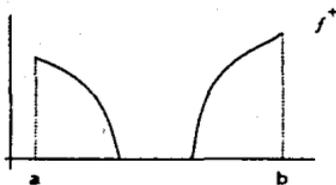


fig. (a2).

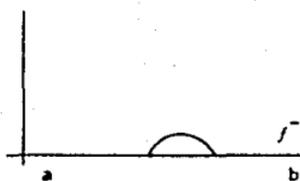


fig. (a3)

Evidentemente  $f^+(x) - f^-(x) = f(x)$  y

$$f^+(x) + f^-(x) = |f(x)|$$

**Teorema (8)** Si  $f$  es integrable sobre  $[a, b]$  entonces  $f^+$  y  $f^-$  son integrables sobre  $[a, b]$ .

**Demostración:** para  $f^+$

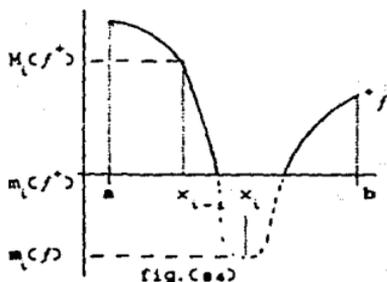
**Hipótesis:**  $f$  es integrable, es decir

$\forall \varepsilon > 0 \exists P \in P_{[a,b]}$  tal que  $\overline{\mathcal{S}(f,P)} - \underline{\mathcal{S}(f,P)} < \varepsilon$

Sea  $P \in P_{[a,b]}$ ,  $P = \langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$

En el intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  se cumple que

$$M_i(f) - m_i(f) \geq M_i(f^*) - m_i(f^*) \quad \forall i=1, 2, \dots, n \quad (\text{fig. C84})$$



1<sup>er</sup> caso: Si  $M_i(f) > 0$  y

$m_i(f) > 0$  entonces

$$M_i(f^*) = M_i(f)$$

$$m_i(f^*) = m_i(f)$$

$$\therefore M_i(f) - m_i(f) = M_i(f^*) - m_i(f^*)$$

2<sup>o</sup> caso: si  $M_i(f) \geq 0$  y  $m_i(f) \leq 0$  entonces

$$M_i(f) = M_i(f^*) \quad \text{y} \quad m_i(f) \leq m_i(f^*) = 0$$

restamos  $M_i(f)$  en el primer término de la desigualdad anterior y  $M_i(f^*)$  en el segundo, y obtenemos

$$m_i(f) - M_i(f) \leq m_i(f^*) - M_i(f^*)$$

multiplicamos por (-1) la desigualdad anterior y obtenemos

$$M_i(f) - m_i(f) \geq M_i(f^*) - m_i(f^*)$$

3<sup>er</sup> caso: Si  $M_i(f) \leq 0$  y  $m_i(f) \leq 0$  entonces

$$M_i(f^*) = m_i(f^*) = 0$$

$$\Rightarrow M_i(f) - m_i(f) \geq 0 = 0 = M_i(f^*) - m_i(f^*)$$

por tanto en todos los casos tenemos que

$$M_i(f) - m_i(f) \geq M_i(f^*) - m_i(f^*)$$

Multiplicamos por  $(x_i - x_{i-1})$  en ambos lados de la desigualdad y sumamos, entonces:

$$\sum_{i=1}^n (M_i(f) - m_i(f))(x_i - x_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^n (M_i(f^+) - m_i(f^+))(x_i - x_{i-1})$$

por tanto,

$$\bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) \geq \bar{S}(f^+, P) - \underline{S}(f^+, P)$$

Como  $f$  es integrable  $\bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \epsilon$

$\therefore f^+$  es integrable. q.e.d.

Para  $f^-$  el razonamiento es similar al anterior (lo dejamos como ejercicio para el lector).

Con base en el resultado del teorema anterior podemos establecer el siguiente teorema.

**Teorema (9)** Si  $f$  es integrable en  $[a, b]$  entonces también lo es  $|f|$  y

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

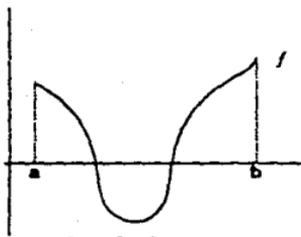


fig. (ca)

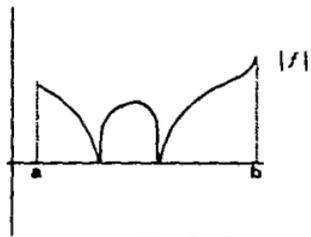


fig. (ca')

**Demostración:**

Es evidente que  $|f| = f^+ + f^-$ . (ver figs. (ca) y (ca')). Por el teorema (8),  $f^+$  y  $f^-$  son integrables y por el teorema (8)  $|f|$  también lo es.

p.d.  $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$  es decir

$$- \int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

sabemos que  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad \forall x \in [a, b]$ .

como  $f$  y  $|f|$  son integrables, entonces por el corolario (3) tenemos que

$$- \int_a^b |f| = \int_a^b -|f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

$$\therefore \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \quad \text{q.e.d.}$$

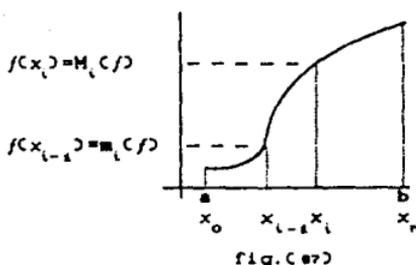
**Teorema (10)** Sea  $f$  una función acotada en  $[a, b]$ , si  $f$  es no decreciente (no creciente) en  $[a, b]$  entonces  $f$  es integrable en  $[a, b]$ .

*Demostración:*

p.d.  $f$  es integrable, es decir

$$\forall \varepsilon > 0 \exists P \in \mathcal{P}_{[a, b]} \text{ tal que } \bar{\Sigma}(f, P) - \underline{\Sigma}(f, P) < \varepsilon$$

Sea  $P \in \mathcal{P}_{[a, b]}$ ,  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ .



Como  $f$  es no decreciente en cada intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$

$$M_i(f) = f(x_i),$$

$$m_i(f) = f(x_{i-1})$$

entonces

$$\bar{\Sigma}(f, P) - \underline{\Sigma}(f, P) = \sum_{i=1}^n (M_i(f) - m_i(f))(x_i - x_{i-1}) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) |P| \\
 & \quad \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) |P| = |P| \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \\
 &= |P| ((f(x_1) - f(x_0)) + (f(x_2) - f(x_1)) + \dots + (f(x_n) - f(x_{n-1}))) \\
 & \quad = |P| (f(x_n) - f(x_0)) = |P| (f(a) - f(b))
 \end{aligned}$$

Tomemos  $|P| < \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)}$  (en el caso en que  $f(a) \neq f(b)$ )  
entonces

$$|\bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P)| < \frac{\epsilon(f(b) - f(a))}{f(b) - f(a)} = \epsilon$$

entonces  $\forall \epsilon > 0 \exists P \in P_{[a,b]}$  tal que

$$|\bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P)| < \epsilon$$

si  $f(a) \neq f(b)$

Si  $f(a) = f(b)$  entonces  $f$  es constante, y según el ejemplo (12) de la sección (2.2.3), es integrable.

$\therefore f$  es integrable q.e.d.

Si  $f$  es no creciente la demostración es similar. (lo dejamos como ejercicio para el lector).

#### 2.4. Teorema del valor medio y del valor medio generalizado para la integral.

Recordemos que si tenemos un número finito de valores  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , el promedio o media aritmética de los mismos, es el número

$$\frac{f_1 + f_2 + \dots + f_n}{n}$$

Si ahora tenemos un número infinito de valores  $f(x)$  correspondientes a  $x$  arbitrarios en el intervalo  $[a,b]$ , ¿como definir la media aritmética para estos valores?

Lo más natural es considerar un número finito  $n$  de valores de  $f$ , digamos  $f(x_1)$ ,  $f(x_2)$ , ...,  $f(x_n)$  tomar su promedio

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$$

posteriormente tomar el límite cuando  $n$  crece más allá de toda cota. El valor de ese límite, si existe, dependerá de como se encuentren espaciados los puntos  $x_i$  en el intervalo  $(a, b)$ . un valor definido para el promedio de  $f$  se logra si dividimos el intervalo  $(a, b)$  en  $n$  partes iguales, así cuando  $n \rightarrow \infty$ , las longitudes de los intervalos tienden a cero; y así estaríamos considerando el valor medio de  $f$  en el intervalo  $(a, b)$ .

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) / n = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$$

si multiplicamos por  $1 = \frac{b-a}{b-a}$  nos queda

$$\begin{aligned} \frac{(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n))(b-a)}{n(b-a)} &= \frac{\sum_{i=1}^n f(x_i)(b-a)}{n(b-a)} \\ &= \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(x_i) \left(\frac{b-a}{n}\right). \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando  $n$  tiende a infinito:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(x_i) \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

si la función es integrable entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(x_i) \left(\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

es decir que el valor

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

puede ser visualizado como la "media aritmética" o bien el valor medio del conjunto de valores (infinito) de  $f$  en  $[a, b]$ .

Por otro lado sabemos que

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$$

entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$

de donde

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq M$$

Así pues hemos demostrado el siguiente teorema

**Teorema (II)** Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  integrable. Sean  $m$  y  $M$  el infimo y el supremo de  $f$  en  $[a, b]$  respectivamente entonces  $\exists \mu$  entre  $M$  y  $m$  tal que

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

Observemos que si  $f$  es continua en  $[a, b]$  entonces  $f$  alcanza su infimo y su supremo en  $[a, b]$ , de modo que  $\exists \alpha, \beta \in [a, b]$  tales que

$$f(\alpha) = m, \quad f(\beta) = M$$

Como  $f(\alpha) = m \leq \mu \leq M = f(\beta)$ , por el teorema del valor intermedio  $\exists \xi \in (a, b)$  tal que

$$f(\xi) = \mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f.$$

**Teorema (12)** (Del valor medio para la integral).

Si  $f$  es continua en  $[a,b]$  entonces existe un valor  $\xi$  en el intervalo  $[a,b]$  tal que

$$\int_a^b f = f(\xi) (b-a)$$

**Oservaciones:**

- a) En el enunciado del teorema (12) no pedimos adicionalmente que la función sea integrable. No lo hacemos ya que en el capítulo siguiente dedicaremos un amplio espacio para demostrar que si la función es continua entonces es integrable. No demostraremos esta propiedad antes del teorema (12) en virtud de que en el capítulo siguiente hacemos un desarrollo completo sobre la condición suficiente y necesaria para que una función sea integrable, en términos de la continuidad.
- b) El teorema asegura la existencia de por lo menos un valor  $\xi$  en el intervalo  $[a,b]$  para el cual  $f(\xi)$  es igual al valor promedio de  $f$ , aunque no da información sobre la ubicación de  $\xi$ .
- c) Por la desigualdad  $m \leq \mu \leq M$ , y por la continuidad de  $f$ , aseguramos que el valor medio de una función continua en un intervalo, pertenece al rango de la función. (fig. (88)).

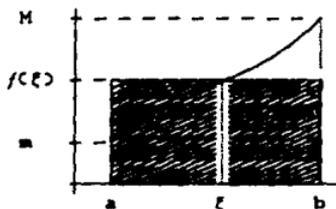


fig. (88)

Consideremos ahora un sistema de  $n$  partículas con masas

$m_1, m_2, \dots, m_n$  distribuidas a lo largo de una recta; pensemos a la recta como una barra cuyo peso podemos despreciar, ¿de qué punto debe suspenderse la barra para que conserve la posición horizontal?. Con el fin de contestar a la pregunta, escojamos un origen de coordenadas sobre la recta, sea  $x_i$  la coordenada de la masa  $m_i$  y denotamos por  $\mu$  el punto de equilibrio que buscamos, cuya coordanda denotamos por  $\bar{x}$  (fig.(89)). Ahora bien, si la barra debe estar en equilibrio cuando se suspende en  $\bar{x}$ , las diversas masas deben ejercer momentos con respecto a  $\mu$ , que sumados se deben compensar. (vease la definición de momento dada en el problema (5) del capítulo I)

Así el momento de  $m_i$  es  $m_i(x_i - \bar{x})$ ; este momento tiende a producir una rotación de la barra en el sentido de las manecillas del reloj si  $m_i$  está a la derecha de  $\mu$  (esto es si  $x_i - \bar{x} > 0$ ); si  $x_i - \bar{x} < 0$ , el momento es negativo, lo que quiere decir que tiende a producir una rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj.

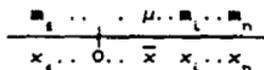


fig. (89)

Vemos entonces que la condición de equilibrio se da cuando la suma algebraica de todos los momentos es nula esto puede escribirse en la forma

$$m_1(x_1 - \bar{x}) + m_2(x_2 - \bar{x}) + \dots + m_n(x_n - \bar{x}) = 0$$

resolviendo para  $\bar{x}$  tenemos:

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

En consecuencia queda determinada la coordenada de  $\mu$ , que es llamado (como ya mencionamos en el capítulo I) centro de masa del

del sistema de  $n$  partículas.

Si en lugar de tener  $n$  partículas con  $n$  masas, tenemos una función  $f$  definida en el intervalo  $[a, b]$ , también podemos tomar la media ponderada de la función  $f$  sobre el intervalo  $[a, b]$ , tomando una función de ponderación  $P$ , es decir una función definida en el intervalo  $[a, b]$  que toma valores positivos y actúa sobre  $f$  a través del producto de  $P$  por  $f$  en cada  $x$  del intervalo.

En este caso tendríamos:

$$\begin{aligned} P(x_1)f(x_1) + P(x_2)f(x_2) + \dots + P(x_n)f(x_n) &= \\ &= \mu (P(x_1) + P(x_2) + \dots + P(x_n)) \end{aligned}$$

Si dividimos el intervalo  $[a, b]$  en  $n$  partes iguales y multiplicamos ambos lados de la igualdad por la longitud de los subintervalos, obtenemos

$$\begin{aligned} (P(x_1)f(x_1) + P(x_2)f(x_2) + \dots + P(x_n)f(x_n)) \left( \frac{b-a}{n} \right) &= \\ \mu (P(x_1) + P(x_2) + \dots + P(x_n)) \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} P(x_1)f(x_1) \left( \frac{b-a}{n} \right) + \dots + P(x_n)f(x_n) \left( \frac{b-a}{n} \right) &= \\ = \mu (P(x_1) \left( \frac{b-a}{n} \right) + \dots + P(x_n) \left( \frac{b-a}{n} \right)) \end{aligned}$$

así que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P(x_i) f(x_i) \left( \frac{b-a}{n} \right) &= \sum_{i=1}^n \mu (P(x_i) \left( \frac{b-a}{n} \right)) = \\ &= \mu \sum_{i=1}^n P(x_i) \left( \frac{b-a}{n} \right) \end{aligned}$$

Al tomar el límite cuando  $n \rightarrow \infty$ , obtenemos la media ponderada para la función  $f$  en el intervalo  $[a, b]$ . Si  $P$  y  $f$  son integrables en  $[a, b]$  entonces  $Pf$  también lo es; y como hemos dividido el intervalo  $[a, b]$  en  $n$  partes iguales, al tomar el límite cuando  $n$  tiende a infinito, hacemos  $\Delta x \rightarrow 0$ ; por lo que:

$$\int_a^b P f = \mu \int_a^b P \quad \text{ó} \quad \mu = \frac{\int_a^b P f}{\int_a^b P}$$

Como  $p$  es positiva entonces  $\int_a^b P$  también lo es; por otro lado:

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in (a,b)$$

$$m P(x) \leq f(x) P(x) \leq M P(x)$$

integrando

$$\int_a^b m P \leq \int_a^b f P \leq \int_a^b M P$$

asi que

$$m \int_a^b P \leq \int_a^b f P \leq M \int_a^b P$$

por tanto

$$m \leq \frac{\int_a^b f P}{\int_a^b P} \leq M$$

En conclusión, si  $m \leq \mu \leq M$ , entonces la media ponderada está situada entre el mínimo valor  $m$  y el máximo valor  $M$  de la función en el intervalo  $[a,b]$  y, como  $f$  es continua (según el teorema del valor intermedio para funciones continuas),  $\mu$  debe ser imagen de algún elemento de  $(a,b)$  bajo la función  $f$ ; es decir existe  $\xi \in (a,b)$  tal que  $f(\xi) = \mu$ . Así hemos demostrado el siguiente teorema.

**Teorema (13) (Valor medio generalizado para la integral)**

Si  $f$  y  $P$  son continuas en el intervalo  $[a,b]$  y además  $P$  es positiva en  $[a,b]$  entonces existe un valor  $\xi \in (a,b)$  tal que

$$\int_a^b P f = f(\xi) \int_a^b P$$

Observaciones:

- 1) Con este resultado, el teorema (12) se convierte en un corolario de este último teorema cuando  $P(x) = 1$ .
- 2) El teorema asegura la existencia de por lo menos un valor  $\xi$  en el intervalo para el cual  $f(\xi)$  es media ponderada de  $f$ , pero no da información adicional sobre la ubicación de  $\xi$ .

Una sugerencia para el lector es que compare este teorema con el problema (5) planteado en el capítulo I.

## 2.5

problemas resueltos.

Problema 1)

Demostrar que:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c) dx.$$

Indicación: Toda partición  $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  de  $[a, b]$  da origen a una partición  $P' = \{t_0+c, t_1+c, \dots, t_n+c\}$  de  $[a+c, b+c]$  y viceversa.

Veamos primero qué significa geoméricamente, supongamos que  $c > 0$  y  $f \geq 0$ , hagamos  $g(x) = f(x-c)$ .

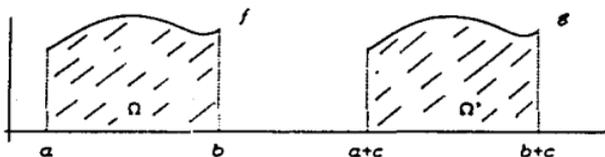


fig. (oo)

La región  $\Omega'$  es el resultado de la aplicación de una traslación horizontal de la región  $\Omega$  (es decir,  $\Omega'$  es el resultado del movimiento rígido). Por lo tanto el área de  $\Omega$  es igual al área de  $\Omega'$ , es decir

$$\int_a^b f = \int_{a+c}^{b+c} g.$$

Sea  $P$  una partición del intervalo  $[a, b]$ ,  $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  entonces tenemos que  $P' = \{t_0+c, t_1+c, \dots, t_n+c\}$  es una partición del intervalo  $[a+c, b+c]$ .

$$\text{Sean } A = \{f(x); x \in [t_{i-1}, t_i]\}$$

$$B = \{g(x); x \in [t_{i-1}+c, t_i+c]\}$$

Si  $x \in [t_{i-1}, t_i]$  y  $x+c \in [t_{i-1}+c, t_i+c]$ , por la forma en que hemos tomado a  $g$ , tenemos que:

$$f(x) = g(x+c) = f(x+c-c) = f(x)$$

$$\text{entonces} \quad A = B$$

de donde

$$\inf A = \inf B, \text{ esto es, } m_1(f) = m_1(g)$$

$$\text{y } \sup A = \sup B, \text{ esto es, } M_1(f) = M_1(g)$$

entonces

$$\underline{S}(f, P) = \underline{S}(g, P') \dots (I)$$

$$\bar{S}(f, P) = \bar{S}(g, P') \dots (II)$$

Si  $f$  es integrable entonces

$$\forall \epsilon > 0 \exists P \in P_{[a,b]} \text{ tal que } \bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \epsilon$$

y según las relaciones (I) y (II) tenemos también

$$\forall \epsilon > 0 \exists P \in P_{[a,b]} \text{ tal que } \bar{S}(g, P') - \underline{S}(g, P') < \epsilon$$

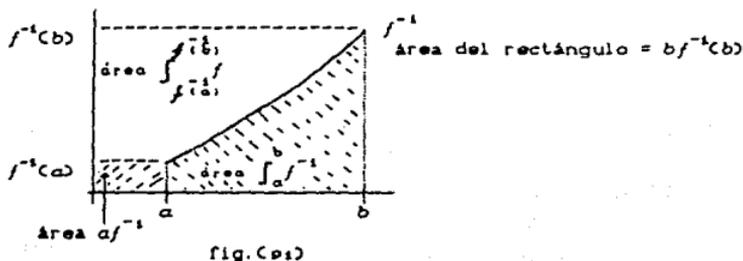
entonces  $g$  es integrable.

Por otro lado

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sup \{ \underline{S}(f, P); P \in P_{[a,b]} \} = \\ &= \sup \{ \underline{S}(g, P'); P' \in P_{[a+c, b+c]} \} = \int_{a+c}^{b+c} g(x) dx \\ &= \int_{a+c}^{b+c} f(x-c) dx. \\ \therefore \int_a^b f dx &= \int_{a+c}^{b+c} f(x-c) dx \end{aligned}$$

Problema 2)

Supongamos que  $f$  es creciente, la fig.(91) sugiere que



$$\int_a^b f^{-1} dx = b f^{-1}(b) - a f^{-1}(a) - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f dx.$$

a) Si  $P = \langle t_0, t_1, \dots, t_n \rangle$  es una partición de  $[a, b]$ , sea

$$P^* = \langle f^{-1}(t_0), f^{-1}(t_1), \dots, f^{-1}(t_n) \rangle$$

por demostrar que:

$$\underline{S}(f^{-1}, P) + \overline{S}(f, P^*) = b f^{-1}(b) - a f^{-1}(a).$$

Si  $f$  es creciente entonces  $f^{-1}$  también lo es, por lo tanto

$$m_i(f^{-1}) = \inf \{ f^{-1}(t); t \in [t_{i-1}, t_i] \}$$

coincide con la función  $f^{-1}$  evaluada en  $t_{i-1}$ , es decir,

$$m_i(f^{-1}) = f^{-1}(t_{i-1})$$

entonces

$$\underline{S}(f^{-1}, P) = \sum_{i=1}^n m_i(f^{-1})(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f^{-1}(t_{i-1})(t_i - t_{i-1})$$

De igual manera dado que  $f$  es creciente,  $M_i(f)$  coincide con la función  $f$  evaluada en  $t_i$ , es decir

$$M_i(f) = f(f^{-1}(t_i)) = t_i$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(f, P') &= \sum_{i=1}^n H_i(f) (f^{-1}(c_{i-1}) - f^{-1}(c_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n t_i (f^{-1}(c_i) - f^{-1}(c_{i-1}))\end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(f^{-1}, P) + \mathcal{S}(f, P') &= \sum_{i=1}^n f^{-1}(c_{i-1})(c_i - c_{i-1}) + \sum_{i=1}^n t_i (f^{-1}(c_i) - f^{-1}(c_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^n [f^{-1}(c_{i-1})(c_i) - f^{-1}(c_{i-1})(c_{i-1}) + f^{-1}(c_i)(c_i) - f^{-1}(c_{i-1})(c_i)] \\ &= \sum_{i=1}^n [f^{-1}(c_i)(c_i) - \sum_{i=1}^n f^{-1}(c_{i-1})(c_{i-1})] \\ &= f^{-1}(c_b)b - f^{-1}(c_a)a.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ya que } \sum_{i=1}^n [f^{-1}(c_i)(c_i) - f^{-1}(c_{i-1})(c_{i-1})] \\ &= f^{-1}(c_1)(c_1) - f^{-1}(c_0)(c_0) + f^{-1}(c_2)(c_2) - f^{-1}(c_1)(c_1) + \dots + \\ &+ f^{-1}(c_{n-1})(c_{n-1}) - f^{-1}(c_{n-2})(c_{n-2}) + f^{-1}(c_n)(c_n) - f^{-1}(c_{n-1})(c_{n-1}) \\ &= f^{-1}(c_n)(c_n) - f^{-1}(c_0)(c_0) \\ &= f^{-1}(c_b)b - f^{-1}(c_a)a.\end{aligned}$$

b) Demostrar la fórmula enunciada arriba, es decir demostrar que:

$$\int_a^b f^{-1} = bf^{-1}(b) - af^{-1}(a) - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f$$

según el inciso (a) tenemos

$$\underline{S}(f^{-1}, P) + \overline{S}(f, P') = bf^{-1}(b) - af^{-1}(a)$$

entonces

$$\underline{S}(f^{-1}, P) = bf^{-1}(b) - af^{-1}(a) - \overline{S}(f, P')$$

tomamos el supremo en ambos lados

$$\begin{aligned} \sup \langle \underline{S}(f^{-1}, P) \rangle &= \sup \langle bf^{-1}(b) - af^{-1}(a) - \overline{S}(f, P') \rangle \\ &= bf^{-1}(b) - af^{-1}(a) - \inf \langle \overline{S}(f, P') \rangle \\ &= bf^{-1}(b) - af^{-1}(a) - \int_a^b f. \end{aligned}$$

Si demostramos el siguiente lema, el resultado anterior queda justificado.

**Lema (12)** Si  $A$  es un conjunto acotado de números reales y  $c$  es un número constante y  $B = \{c-x; x \in A\}$  entonces

$$\sup B = c - \inf A$$

*Demostración.*

i) Primero demostraremos que  $c - \inf A$  es una cota superior de  $B$ .

Sea  $x \in A$ , entonces  $x \geq \inf A$

de donde  $-x \leq -\inf A$

$$c - x \leq c - \inf A$$

$\therefore c - \inf A$  es una cota superior de  $B$

ii) Demostraremos que  $c - \inf A$  es la más chica de las cotas superiores de  $B$ .

Sea  $\epsilon > 0$ ,  $\exists x_\epsilon \in A$  tal que  $x_\epsilon < \inf A + \epsilon$  entonces

$$-x_\epsilon > -\inf A - \epsilon$$

$$-c - x_\epsilon > c - \inf A - \epsilon$$

$$c - x_\epsilon > (c - \inf A) - \epsilon$$

entonces para cada  $\epsilon > 0 \exists c - x_\epsilon \in B$  tal que

$$c - x_\epsilon > (c - \inf A) - \epsilon$$

$$\therefore \sup B = c - \inf A \quad \text{q.e.d.}$$

c) Hallar  $\int_a^b {}^n\sqrt{x} dx$  para  $0 < a < b$ .

Si  $f(x) = x^n$ , entonces  $f^{-1}(x) = {}^n\sqrt{x}$ , así que

$$\begin{aligned}\int_a^b {}^n\sqrt{x} dx &= \int_a^b f^{-1} dx = b {}^n\sqrt{b} - a {}^n\sqrt{a} - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} x^n dx = \\ &= b {}^n\sqrt{b} - a {}^n\sqrt{a} - \left[ \frac{({}^n\sqrt{b})^{n+1}}{n+1} - \frac{({}^n\sqrt{a})^{n+1}}{n+1} \right] \\ &= b^{n+1/n} - a^{n+1/n} - \left[ \frac{b^{n+1/n} - a^{n+1/n}}{n+1} \right] \\ &= b^{n+1/n} \left[ 1 - \frac{1}{n+1} \right] - a^{n+1/n} \left[ 1 - \frac{1}{n+1} \right] \\ &= n \frac{b {}^n\sqrt{b}}{n+1} - n \frac{a {}^n\sqrt{a}}{n+1}.\end{aligned}$$

### Problema (3)

Supóngase que  $f$  es integrable sobre  $[a, b]$ . Demostrar que

existe un número  $x_0 \in [a, b]$  tal que  $\int_a^{x_0} f dx = \int_{x_0}^b f dx$

Demostrar, por ejemplo, que no siempre es posible elegir  $x$  que este en  $(a, b)$ .

Sea  $g(x) = \int_a^x f dx - \int_x^b f dx$ , sabemos que  $\int_a^x f dx = F(x)$  es una

función continua en  $[a, b]$  si  $f$  es integrable en  $[a, b]$ . De la misma

manera  $H(x) = -\int_x^b f dx = \int_b^x f dx$  también lo es. Por tanto  $g$  es

una función continua en  $[a, b]$ .

Ahora bien

$$g(a) = \int_a^a f \, dx - \int_a^b f \, dx = -\int_a^b f \, dx \quad (\text{y } \int_a^a f \, dx = 0)$$

$$g(b) = \int_a^b f \, dx - \int_b^b f \, dx = \int_a^b f \, dx \quad (\text{y } \int_b^b f \, dx = 0)$$

por tanto  $g(a)$  y  $g(b)$  tienen signos distintos

Por el teorema del valor intermedio existe  $x \in [a, b]$  tal que

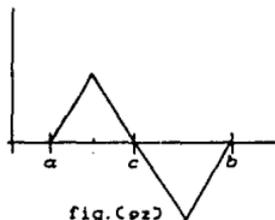
$$g(x_0) = 0;$$

Pero

$$g(x_0) = \int_a^{x_0} f \, dx - \int_{x_0}^b f \, dx$$

$$\therefore \int_a^{x_0} f \, dx = \int_{x_0}^b f \, dx$$

Sea  $f$  como se muestra en la fig.(92).



$f$  es de tal manera que

$$\int_a^c f \, dx = - \int_c^b f \, dx$$

donde los únicos puntos que cumplen el resultado anterior es en

$$x = a \text{ y } x = b.$$

### CAPITULO III

En el capítulo anterior hemos definido un mecanismo para cuantificar el área que hay debajo de la gráfica de una función; dicho mecanismo es de gran importancia ya que, por un lado, resuelve el problema planteado inicialmente, y por el otro trasciende al problema del área en sí; es decir, desde el momento en que trabajamos sobre cualquier función, el tipo de resultados que encontramos tanto en el capítulo II y posteriormente el en el capítulo IV no se restringen al problema del área, arrojan información además sobre las funciones mismas. En matemáticas, en muchas ocasiones sucede esto, al abordar un problema y buscar su solución, se encuentran otros resultados que no se esperaban además de la solución al problema, (o incluso sin lograr esta)..

En este capítulo nos proponemos encontrar una caracterización de las funciones integrables en términos de la continuidad, y con base en ello clasificarlas: por un lado las funciones que son integrables y por el otro las que no lo son.

Veremos que hay funciones discontinuas que son integrables, y otras que no lo son, debemos descubrir entonces "que tan continuas" deben de ser las funciones para que sean integrables; y viceversa; si las funciones son integrables "que tan discontinuas" son. Abordaremos el problema primero tomando funciones continuas y posteriormente funciones discontinuas.

Primera pregunta ¿la continuidad de la función  $f$  en  $(a,b)$  garantiza la integrabilidad de  $f$  en  $(a,b)$ ?

Sea  $f$  continua en  $(a,b)$

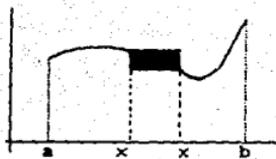


fig. (93)

Al ser  $f$  continua, los valores de la función se pegan entre sí tanto como queramos, al acercarse suficientemente los valores correspondientes de la variable; así para particiones muy finas tenemos que las áreas de los rectángulos (los rectángulos "diferencia" de los circunscritos menos los inscritos correspondientes) van a ser muy pequeñas (ver fig. 93); para demostrar que la función es integrable necesitamos que al sumar todas las áreas de los rectángulos, esta suma la podemos hacer tan chica como queramos.

Es decir, para cada  $\epsilon > 0$  suficientemente chica, hay que exhibir una partición muy fina, de tal manera que la suma de las áreas de los rectángulos "diferencia" sea menor que  $\epsilon$ .

Veamos entonces como construir la partición  $P$  que garantice lo anterior dada una cierta  $\epsilon > 0$ .

Como lo que queremos es que el área sea menor que  $\epsilon$ , podemos tomar  $\frac{\epsilon}{b-a}$ , y escoger qué tan pegados deben estar entre sí  $x_{i-1}$  y  $x_i$  para que el máximo y el mínimo de la función en el intervalo  $(x_{i-1}, x_i)$  disten entre sí menos que  $\frac{\epsilon}{b-a}$  y por tanto el área del rectángulo  $(x_i - x_{i-1}) \frac{\epsilon}{b-a}$  sea menor que  $\epsilon$ , por tanto:

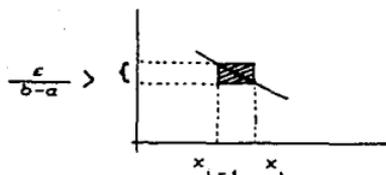


fig.(p4)

Observación: las  $\overline{S}(f, P)$  y  $\underline{S}(f, P)$  las construcciones en base al supremo y al infimo de la función en cada subintervalo generado por la partición. En este caso la función es continua en el intervalo  $[a, b]$  y esto garantiza que  $f$  sea continua en cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n$  y por tanto el infimo y el supremo en cada subintervalo son alcanzados por la función.

El problema es que en unos lugares del intervalo  $[a, b]$  la distancia a la que deben estar  $x_{i-1}$  y  $x_i$  para que el área del rectángulo "diferencia" sea menor que  $\epsilon$ , es una, y en otros lugares la distancia que se requiere para cumplir lo anterior es otra, y puede ocurrir que dicha distancia tienda a cero y no haya una, "la más pequeña", que nos garantice que, si  $x_{i-1}$  y  $x_i$  distan entre sí menos que tal distancia (estén donde estén  $x_{i-1}$  y  $x_i$  en el intervalo), siempre los valores correspondientes de la función disten entre sí menos que la  $\epsilon > 0$  dada (o la  $\epsilon$  multiplicada por una constante positiva que viene a ser lo mismo). Esto nos hace pensar inmediatamente en la idea de CONTINUIDAD UNIFORME.

Si la función fuese uniformemente continua en el intervalo, tendríamos que dada cualquier  $\epsilon > 0$  podríamos encontrar una  $\delta(\epsilon) > 0$  tal que, dados dos cualesquiera dos puntos del intervalo, estén donde estén en él; si distan entre sí menos que  $\delta(\epsilon) > 0$ , los valores de la función disten entre sí menos que la  $\epsilon > 0$  dada. Así bastaría con tomar una partición  $P \in P_{[a, b]}$  tal que la  $IPI < \delta$ , de tal manera que cualesquiera dos valores de la función en dos puntos arbitrarios dentro de un mismo subintervalo generado

por la partición disten entre si menos que la  $\epsilon > 0$  dada; de esta manera podemos tomar una partición del intervalo  $(a,b)$  que cumpla la condición anterior, es decir, que  $IPI < \delta$ . Así tendríamos que la suma de las áreas de los rectángulos "diferencia" sería una suma finita, y como el área de cada rectángulo "diferencia" será tan pequeña como queramos, la suma finita de el área de todos los rectángulos también lo será.

Así pues, parece claro que si suponemos que  $f$  es UNIFORMEMENTE CONTINUA, no hay problema. Observemos que esto queda garantizado con tan solo pedir que  $f$  sea continua en un intervalo cerrado, cosa que estamos asumiendo.

De hecho a quedado esbozada la demostración del siguiente teorema:

**Teorema (14)** Sea  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ , si  $f$  es continua en  $(a,b)$ , entonces  $f$  es integrable en  $[a,b]$ .

Demostración:

Sea  $\epsilon > 0$ , p.d.  $\exists \delta(\epsilon) > 0$  tal que  $\forall P \in P_{(a,b)}$  tal que  $IPI < \delta$

$$\bullet \bar{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \epsilon$$

Por ser  $f$  continua en  $(a,b) \Rightarrow f$  es uniformemente continua en  $(a,b) \Rightarrow \exists \delta(\epsilon) > 0$ , tal que  $\forall x, x' \in (a,b)$  tal que  $|x-x'| < \delta$

$$\bullet |f(x) - f(x')| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

Sea  $P \in P_{(a,b)}$  tal que  $IPI < \delta$

$$P = (x_0, x_1, \dots, x_n) \quad \text{donde}$$

$$M_i(f) = \sup \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$m_i(f) = \inf \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$\text{nos fijamos en } \bar{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^n (M_i(f) - m_i(f))(x_i - x_{i-1})$$

como  $f$  es continua en  $[a, b]$  entonces  $f$  es continua en  $[x_{i-1}, x_i]$   
 $\forall i=1, 2, \dots, n$ , entonces  $f$  alcanza su valor máximo y su valor  
 mínimo en  $[x_{i-1}, x_i]$  en donde

$$f(\xi) = m_i(f) \text{ y } f(\xi'_i) = M_i(f) \quad \forall i=1, 2, \dots, n$$

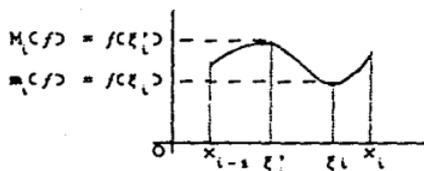


fig. (65)

Sustituyendo  $M_i(f)$  y  $m_i(f)$  en

$$\bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^n (f(\xi'_i) - f(\xi_i))(x_i - x_{i-1})$$

como tomamos  $|P| < \delta \quad \forall i=1, 2, \dots, n$  y  $\xi'_i, \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

entonces  $|\xi'_i - \xi_i| < (x_i - x_{i-1}) < \delta \quad \forall i=1, 2, \dots, n$  y tenemos que

$|f(\xi'_i) - f(\xi_i)|$  es mayor o igual a cero ya que el máximo de la  
 función es mayor o igual al mínimo de la función en cada intervalo  
 $[x_{i-1}, x_i] \quad \forall i=1, 2, \dots, n$ .

$$|f(\xi'_i) - f(\xi_i)| = f(\xi'_i) - f(\xi_i) < \frac{\epsilon}{b-a}$$

$$\therefore \bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^n (f(\xi'_i) - f(\xi_i))(x_i - x_{i-1})$$

$$< \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon}{b-a} (x_i - x_{i-1}) = \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})$$

$$= \frac{\epsilon}{b-a} (b-a) = \epsilon.$$

$\therefore \exists \delta(\epsilon) > 0$  (la misma que garantiza la continuidad uniforme)

tal que  $\forall P \in P_{[a, b]}$  tal que  $|P| < \delta \Rightarrow \bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \epsilon$

q.e.d.

Observaciones:

- a) Para hablar de la integral asumimos que  $f$  está acotada en  $[a, b]$ ; y esto no es necesario pedirlo adicionalmente en el enunciado del teorema, pues ya queda garantizado por el hecho de ser  $f$  continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$ .
- b) Este teorema establece una condición suficiente para que  $f$  sea integrable en el intervalo  $[a, b]$  y no nos dice nada acerca de cuál es el valor de la integral.

Analicemos ahora una función discontinua y veamos si es integrable; si es verdad entonces el teorema anterior resulta ser una condición suficiente mas no necesaria.

Tomamos una función discontinua, que tenga una discontinuidad. Podemos "encerrar" el punto de discontinuidad en un intervalo  $(x_\alpha, x_{\alpha'})$  de tal forma que al construir el rectángulo, (ver fig. (96)) con la longitud del intervalo como base y, la diferencia entre el infimo y el supremo de la función en dicho intervalo, como altura; al área que aporte el intervalito  $(x_\alpha, x_{\alpha'})$  a la diferencia  $\bar{\Sigma}(f, P) - \underline{\Sigma}(f, P)$  sea menor que  $\frac{\epsilon}{2}$ . (escogiendo suficientemente cercanos  $x_\alpha$  y  $x_{\alpha'}$ ).

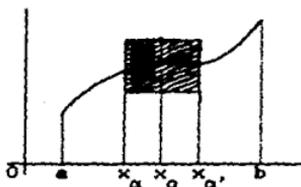


fig. (96)

y

$$M_\alpha = \sup \{f(x) : x \in [x_\alpha, x_{\alpha'}]\}$$

$$m_\alpha = \inf \{f(x) : x \in [x_\alpha, x_{\alpha'}]\}$$

Tomamos  $x_\alpha$  y  $x_{\alpha'}$  tales que

$$x_{\alpha'} - x_\alpha < \frac{\epsilon}{b-a}$$

Sean

$$M = \sup \{f(x) : x \in [a, b]\}$$

$$m = \inf \{f(x) : x \in [a, b]\}$$

como  $M_\alpha - m_\alpha < M - m$  entonces el área del rectángulo que se muestra en la fig.(97) tiene como base  $(x_\alpha - x_\alpha')$  y altura  $(M_\alpha - m_\alpha)$  es menor o igual que el área del rectángulo con la misma base y como altura la longitud del segmento  $(m, M)$ , es decir:

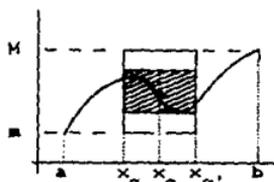


fig.(97)

$$A \left[ \begin{array}{c} M_\alpha \\ x_\alpha \quad x_\alpha' \end{array} \right] < A \left[ \begin{array}{c} M \\ x_\alpha \quad x_\alpha' \end{array} \right]$$

$$< \frac{\epsilon}{1(M-m)}(M-m) = \frac{\epsilon}{1}$$

"afuera" del intervalo  $(x_\alpha, x_\alpha')$  la función es continua, es decir, es continua en  $[a, x_\alpha]$  y  $[x_\alpha', b]$  y también es uniformemente continua y por el teorema anterior en cada uno de esos intervalos, podemos encontrar una partición que haga la diferencia entre sumas superiores e inferiores menor que  $\frac{\epsilon}{4}$ ; así, tomando una partición que incluya los puntos de la partición correspondiente a  $[a, x_\alpha]$  y los puntos de la partición correspondiente a  $[x_\alpha', b]$ , obtenemos una partición de  $[a, b]$  para la cual  $\bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon$  y así  $f$  es integrable.

En el procedimiento anterior no usamos para nada el hecho de que la discontinuidad sea removible, como fue mostrado en la fig.(97), sea como sea la discontinuidad en el punto  $x_0$ , podemos encerrarla en un intervalo  $(x_\alpha, x_\alpha')$  como el anterior,  $M_\alpha$  y  $m_\alpha$  existen siempre -ya que  $f$  es acotada- y  $M_\alpha - m_\alpha$  será siempre menor o igual que  $M - m$ , cumpliéndose entonces todo lo discutido más arriba.

#### Observaciones

- a) Tomamos  $x_0$  en el intervalo abierto  $(x_\alpha, x_\alpha')$  para que  $x_0$  no coincida con los extremos del intervalo, y quede así

garantizada la continuidad de  $f$  en los intervalos cerrados  $[a, x_\alpha]$  y  $[x_\alpha, b]$  y con ello la continuidad uniforme.

- b) Hay un caso que no quedaría entonces cubierto; cuando el punto de discontinuidad  $x_0$  fuese  $a$  ó  $b$ ; pero en realidad esto no sería problema, pues en tal caso el subintervalo a "aislar" sería un subintervalo  $[a, x_\beta]$  (ó  $[x_\beta, b]$ ) que cumpliera la misma propiedad que el intervalo  $[x_\alpha, x_\alpha]$ . (excepto que a la partición correspondiente al intervalo  $[x_\beta, b]$  (ó  $[a, x_\beta]$ ) hay que agregarle el punto  $a$  (ó  $b$ ) según sea el caso) construido más arriba, así en el intervalo  $[x_\beta, b]$  la función sería continua y por tanto uniformemente continua (igual para  $[a, x_\beta]$ ), cumpliéndose entonces lo anterior.

Así pues, hemos de hecho demostrado el siguiente:

**Teorema (15)** Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  acotada en  $[a, b]$ . Si  $f$  es continua en  $[a, b]$ , excepto en un punto, entonces  $f$  es integrable en  $[a, b]$ .

**Demostración:**

Supongamos que  $x_0 \in (a, b)$ ,  $f$  es discontinua en  $x_0$ .

Sea  $\epsilon > 0$

sean  $x_\alpha, x_\alpha' \in (a, b)$  tal que  $x_0 \in (x_\alpha, x_\alpha')$  y

$$x_\alpha' - x_\alpha < \frac{\epsilon}{2(M-m)}$$

como  $f$  es continua en  $[a, x_\alpha]$  y  $[x_\alpha', b]$ , y como son intervalos cerrados,  $f$  es uniformemente continua en ellos. Por ser  $f$  uniformemente continua en  $[a, x_\alpha]$  y  $[x_\alpha', b]$  entonces existen  $\delta_1$ , y  $\delta_2$  tales que  $\forall x, x' \in [a, x_\alpha]$  con

$$|x - x'| < \delta_1 \Rightarrow |f(x') - f(x)| < \epsilon \text{ y}$$

$\forall x, x' \in [x_\alpha', b]$  con  $|x - x'| < \delta_2$  se tiene que  $|f(x') - f(x)| < \epsilon$  si tomamos  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$\therefore \forall x, x' \in [a, x_\alpha]$  ó  $x, x' \in [x_\alpha', b]$  con

$$|x' - x| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x)| < \frac{\epsilon}{4(b-a)}$$

Sean  $P_1 = \langle x_0, x_1, \dots, x_j \rangle \in P_{[a, x_\alpha]}$

$P_2 = \langle y_0, y_1, \dots, y_k \rangle \in P_{[x_\alpha, b]}$

tales que  $|P_1| < \delta$  y  $|P_2| < \delta$

construimos  $P = \langle x_0, x_1, \dots, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n \rangle$

con  $x_j = x_\alpha$  y  $x_{j+1} = y_0 = x_\alpha$ .

$$x_{j+2} = y_1$$

$\vdots$

$$x_n = y_k \quad (n=j+1+k)$$

nos fijamos en la diferencia entre la suma superior y la suma inferior con la partición  $P$ .

$$\begin{aligned} S(f, P) - s(f, P) &= \sum_{i=1}^n (M_i(f) - m_i(f))(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^j (M_i(f) - m_i(f))(x_i - x_{i-1}) + \\ &\quad (M_\alpha(f) - m_\alpha(f))(x_{j+1} - x_j) + \\ &\quad \sum_{i=j+2}^n (M_i(f) - m_i(f))(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

donde:

$$M_i(f) = \sup \{ f(x); x \in [x_{i-1}, x_i] \}.$$

$$m_i(f) = \inf \{ f(x); x \in [x_{i-1}, x_i] \}. \quad \forall i=1, 2, \dots, n.$$

$$M_\alpha(f) = \sup \{ f(x); x \in [x_j, x_{j+1}] \} = \sup \{ f(x); x \in [x_\alpha, x_\alpha] \}$$

$$m_\alpha(f) = \inf \{ f(x); x \in [x_j, x_{j+1}] \} = \inf \{ f(x); x \in [x_\alpha, x_\alpha] \}$$

veamos los sumandos:

$$\sum_{i=1}^j (M_i(f) - m_i(f))(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^j (f(\xi_i') - f(\xi_i''))(x_i - x_{i-1})$$

con  $\xi_i, \xi'_i \in [x_{i-1}, x_i]$  y  $M_i(f) = f(\xi'_i)$ ,  $m_i(f) = f(\xi_i)$ .

por ser  $f$  uniformemente continua en  $[a, x_\alpha]$ .

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^j (f(\xi'_i) - f(\xi_i))(x_i - x_{i-1}) &< \sum_{i=1}^j \frac{\epsilon}{4(b-a)} (x_i - x_{i-1}) = \\ \frac{\epsilon}{4(b-a)} \sum_{i=1}^j (x_i - x_{i-1}) &= \frac{\epsilon}{4(b-a)} (x_\alpha - a) < \frac{\epsilon}{4(b-a)} (b-a) = \frac{\epsilon}{4} \end{aligned}$$

el segundo sumando:

$$(M_\alpha(f) - m_\alpha(f))(x_\alpha - x_\alpha) < (M-m)(x_\alpha - x_\alpha) < (M-m) \frac{\epsilon}{2(M-m)} = \frac{\epsilon}{2}$$

donde:  $M = \max\{f(x); x \in [a, b]\}$ .

$m = \min\{f(x); x \in [a, b]\}$ .

para el tercer sumando:

$$\sum_{i=j+1}^n (M_i(f) - m_i(f))(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^k (M_{y_i}(f) - m_{y_i}(f))(y_i - y_{i-1}).$$

como  $f$  es uniformemente continua en  $[x_\alpha, b] = [y_0, y_k]$

si  $M_{y_i}(f) = f(\xi'_i)$  y  $m_{y_i}(f) = f(\xi_i)$

con  $\xi'_i, \xi_i \in [y_{i-1}, y_i]$

$$\therefore \sum_{i=1}^k (M_{y_i}(f) - m_{y_i}(f))(y_i - y_{i-1}) = \sum_{i=1}^k (f(\xi'_i) - f(\xi_i))(y_i - y_{i-1}) <$$

$$\sum_{i=1}^k \frac{\epsilon}{4(b-a)} (y_i - y_{i-1}) = \frac{\epsilon}{4(b-a)} \sum_{i=1}^k (y_i - y_{i-1}) < \frac{\epsilon}{4(b-a)} (b-a) = \frac{\epsilon}{4}$$

$$\therefore \overline{\mathcal{S}}(f, P) - \underline{\mathcal{S}}(f, P) < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon$$

(con la partici3n  $P$  construida anteriormente)

q.e.d.

Observaci3n (1). El criterio de integrabilidad que usamos, se basa en la construcci3n de la partici3n  $P$ , que es la uni3n de las

particiones  $P_1$  y  $P_2$ , con la cual,  $\forall \epsilon > 0 \exists P \in P_{[a,b]}$  tal que  $\bar{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \epsilon$ , y no fué el de que  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0$  tal que  $\forall P \in P_{[a,b]}$  cuya  $|P| < \delta \Rightarrow \bar{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \epsilon$ , esto es, no con cualquier partición de  $[a,b]$  con norma menor que el  $\min\{\delta_1, \delta_2, (x_\alpha - x_\alpha)\}$  se garantiza que  $\bar{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \epsilon$ .

Por qué?

Si tomamos  $P$  tal que  $|P| < \min\{\delta_1, \delta_2, (x_\alpha - x_\alpha)\}$  puede suceder que:

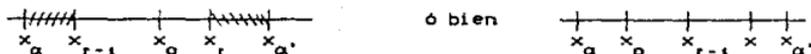


fig. (ps)

esta partición tiene norma menor que  $\delta$ , y puede ocurrir que  $x_0 \in (x_{r-1}, x_r)$ , donde  $x_{r-1}$  y  $x_r \in P$ . Así que no podemos garantizar que la diferencia entre dos valores cualesquiera de la función  $f(x)$  y  $f(x')$  sea menor que  $\frac{\epsilon}{4(b-a)}$  si  $|x - x'| < \delta$ . Esto es válido solo en  $[a, x_\alpha]$  y  $[x_\alpha, b]$  y no en  $[a, x_{r-1}] = [a, x_\alpha] \cup [x_\alpha, x_{r-1}]$  ni en  $[x_r, b] = [x_r, x_\alpha] \cup [x_\alpha, b]$ , es decir el problema está en el intervalo  $[x_\alpha, x_{r-1}]$  y  $[x_r, x_\alpha]$ .

Si  $x_0 \in (x_{r-1}, x_r)$  podemos tomar la  $\delta$  de la continuidad uniforme en  $[a, x_r] \cup [x_{r-1}, b]$ , pero entonces al tomar otra partición con norma menor que esta  $\delta$ , podría ocurrir que los puntos que "encierran" la discontinuidad  $x_0$  se cerrasen más que  $x_{r-1}$  y  $x_r$  y nuevamente habrá dos intervalos, como en el caso anterior, en donde ahí no servirá el criterio, y así indefinidamente. Por esa razón la demostración se basa en exhibir una partición para cada  $\epsilon > 0$ , y no en garantizar que cualquiera con norma menor que alguna  $\delta$  cumpla que:

$$\bar{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \epsilon.$$

Observación (2).

Con base en este análisis podemos afirmar, entonces, que la función puede ser discontinua y ser integrable, lo que muestra que el teorema (14) establece una condición suficiente más no necesaria.

Ya vimos que si la función tiene una discontinuidad, se preserva la integrabilidad, pero, ¿y si tiene 2 discontinuidades? fig.(99).

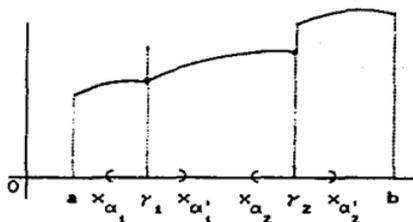


fig.(99)

Podemos seguir un procedimiento similar al anterior.

Sean  $\gamma_1, \gamma_2$  los puntos donde  $f$  es discontinua, supongamos que  $\gamma_1, \gamma_2 \in (a, b)$

tomamos:  $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_1'}$  tales que  $\gamma_1 \in (x_{\alpha_1}, x_{\alpha_1'})$  y

$x_{\alpha_2}, x_{\alpha_2'}$  tales que  $\gamma_2 \in (x_{\alpha_2}, x_{\alpha_2'})$

y tales que:  $(x_{\alpha_1'} - x_{\alpha_1}) < \frac{\epsilon}{4(M-m)}$

$$(x_{\alpha_2'} - x_{\alpha_2}) < \frac{\epsilon}{4(M-m)}$$

de esta manera "afuera" de  $(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_1'})$  y  $(x_{\alpha_2}, x_{\alpha_2'})$  la función es continua, es decir  $f$  es continua en  $[a, x_{\alpha_1}']$ .

$[x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}]$ ,  $[x_{\alpha_2}, b]$  y por tanto, es uniformemente continua en ellos (pues se trata de intervalos cerrados).

De esta manera, la cantidad de área que aportan los rectángulos construidos con base en los intervalos  $[x_{\alpha_1}, x_{\alpha_1}]$  y  $[x_{\alpha_2}, x_{\alpha_2}]$  a la diferencia de las sumas superiores e inferiores será menor que  $\frac{\epsilon}{4}$  cada una. Y en cada intervalo donde  $f$  es uniformemente continua, el área de los rectángulos "diferencia" lo hacemos menor que  $\frac{\epsilon}{6}$ .

Basta entonces construir una partición de  $(a, b)$  que contenga a los puntos de las particiones  $P_1$  de  $(a, x_{\alpha_1})$ ,

$P_2$  de  $[x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}]$  y

$P_3$  de  $[x_{\alpha_2}, b]$

y los subintervalos  $[x_{\alpha_1}, x_{\alpha_1}]$  y  $[x_{\alpha_2}, x_{\alpha_2}]$ .

con  $|P_1| < \delta_1$ ,  $|P_2| < \delta_2$ ,  $|P_3| < \delta_3$ . Siendo  $\delta_1, \delta_2$ , y  $\delta_3$  determinadas por la continuidad uniforme en los respectivos intervalos. Y así garantizamos que  $f$  sea integrable.

Observemos que:

- Podemos usar un argumento similar, si las discontinuidades caen en alguno de los extremos.
- Por cercanos que estén  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  siempre podemos construir los intervalos que los contienen de tal manera que estos no se intersecten.
- Y es claro que, este procedimiento (para el caso en que  $f$  sea discontinua en dos puntos), lo podemos generalizar para el caso en que  $f$  sea discontinua en  $N$  puntos.

Sean  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$  los puntos donde  $f$  es discontinua.

Si  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N \in (a, b)$ , (fig. (100))

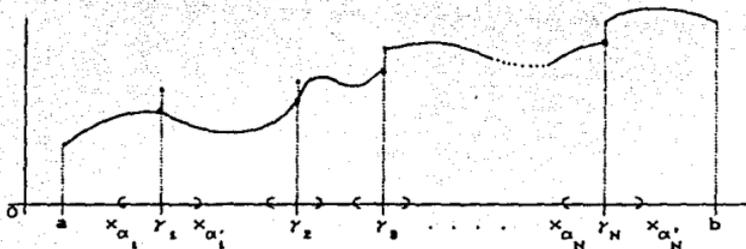


fig. (100)

Escogemos  $x_{\alpha_i}$  y  $x_{\alpha_i}'$  tales que  $\gamma_i \in (x_{\alpha_i}, x_{\alpha_i}')$

$\forall i=1, \dots, N$  y

$$(x_{\alpha_i}' - x_{\alpha_i}) < \frac{\epsilon}{2N(M-m)}$$

así utilizamos  $\frac{\epsilon}{2}$  para todas las áreas de los rectángulos cuya base son los intervalos que encierran las discontinuidades, y dejamos  $\frac{\epsilon}{2}$  para los  $n+1$  rectángulos construidos en los subintervalos en donde  $f$  es continua.

$f$  es continua en:

$[a, x_{\alpha_1}]$ ,  $[x_{\alpha_1}', x_{\alpha_2}]$ ,  $\dots$ ,  $[x_{\alpha_i}', x_{\alpha_{i+1}}]$ ,  $\dots$ ,  $[x_{\alpha_N}', b]$  y

y por tanto  $f$  es uniformemente continua en estos intervalos (pues son cerrados).

Enunciamos entonces, el siguiente teorema.

**Teorema (16)** Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  acotada en  $[a, b]$ , si  $f$  es continua en  $[a, b]$  excepto en un conjunto FINITO de puntos, entonces  $f$  es integrable.

**Demostración:** Sean  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$  los puntos en que  $f$  es discontinua.

supongamos, en principio, que ninguno de ellos coincide ni con  $a$ , ni

con  $b$ , podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que:

$$\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_N$$

sean  $a < x_{\alpha_1} < x_{\alpha_1}' < x_{\alpha_2} < x_{\alpha_2}' < \dots < x_{\alpha_N} < x_{\alpha_N}' < b$  tales que

$\gamma_1 \in (x_{\alpha_1}, x_{\alpha_1}')$ ,  $\gamma_2 \in (x_{\alpha_2}, x_{\alpha_2}')$ , ...,  $\gamma_N \in (x_{\alpha_N}, x_{\alpha_N}')$  y tales que

$$(x_{\alpha_i}' - x_{\alpha_i}) < \frac{\epsilon}{2N(N-m)} \quad \forall i=1,2,\dots,N.$$

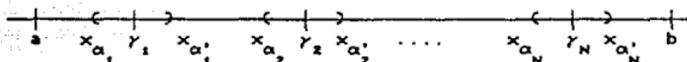


fig. (101)

Así tenemos que  $f$  es continua en los intervalos cerrados,

$$[a, x_{\alpha_1}], [x_{\alpha_1}', x_{\alpha_2}], [x_{\alpha_2}', x_{\alpha_3}], \dots, [x_{\alpha_N}', b]$$

y por tanto  $f$  es uniformemente continua en ellos.

Entonces existen  $\delta_1 > 0$ ,  $\delta_2 > 0$ , ...,  $\delta_{N+1} > 0$  tales que

$$\forall x, x' \in [a, x_{\alpha_1}] \quad |x' - x| < \delta_1 \Rightarrow |f(x') - f(x)| < \frac{\epsilon}{2(N+1)(b-a)}$$

$$\forall x, x' \in [x_{\alpha_1}', x_{\alpha_2}], |x' - x| < \delta_2 \Rightarrow |f(x') - f(x)| < \frac{\epsilon}{2(N+1)(b-a)}$$

$$\vdots$$

$$\forall x, x' \in [x_{\alpha_N}', b], |x' - x| < \delta_{N+1} \Rightarrow |f(x') - f(x)| < \frac{\epsilon}{2(N+1)(b-a)}$$

por tanto sean

$$P_1 \in P_{[a, x_{\alpha_1}]} \text{ tal que } |P_1| < \delta_1, \text{ con } P_1 = (x_0^1, x_1^1, \dots, x_{r_1}^1)$$

$$P_2 \in P_{[x_{\alpha_1}', x_{\alpha_2}]} \text{ tal que } |P_2| < \delta_2, \text{ con } P_2 = (x_0^2, x_1^2, \dots, x_{r_2}^2)$$

$\vdots$

$$P_{N+1} \in P_{[x_{\alpha_N}', b]} \text{ tal que } |P_{N+1}| < \delta_{N+1} \text{ con}$$

$$P_{N+1} = \langle x_0^{N+1}, x_1^{N+1}, \dots, x_{r_{N+1}}^{N+1} \rangle$$

de modo que

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, P_i) - \underline{S}(f, P_i) &= \sum_{k=1}^{r_i} (M_k(f) - m_k(f))(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{r_i} (f(\xi_k^i) - f(\zeta_k^i))(x_k - x_{k-1}) \\ &< \sum_{k=1}^{r_i} \frac{\epsilon}{2(N+1)(b-a)} (x_k - x_{k-1}) \end{aligned}$$

pues  $f$  es continua en todos los subintervalos  $[x_{k-1}^i, x_k^i]$  y

como  $|\xi_k^i - \zeta_k^i| < |P_i| < \delta_i$  entonces

$$\sum_{k=1}^{r_i} \frac{\epsilon}{2(N+1)(b-a)} (x_k - x_{k-1}) = \frac{\epsilon}{2(N+1)(b-a)} (x_{a_i} - x_{a_{i-1}});$$

donde  $x_{a_0} = a, x_{a_{N+1}} = b$

por tanto  $\overline{S}(f, P_i) - \underline{S}(f, P_i) < \frac{\epsilon}{2(N+1)(b-a)} (b-a) = \frac{\epsilon}{2(N+1)}$

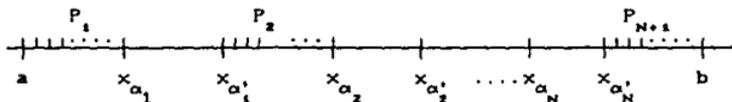


fig. (102)

Sea  $P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_{N+1}$ , claramente  $P \in P_{[a,b]}$  y además:

$$\begin{aligned}
\bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) &= \bar{S}(f, P_1) - \underline{S}(f, P_1) \\
&+ (M_{\alpha_1}(f) - m_{\alpha_1}(f))(x_{\alpha_1}' - x_{\alpha_1}) \\
&+ \bar{S}(f, P_2) - \underline{S}(f, P_2) \\
&+ (M_{\alpha_2}(f) - m_{\alpha_2}(f))(x_{\alpha_2}' - x_{\alpha_2}) \\
&\vdots \\
&+ (M_{\alpha_N}(f) - m_{\alpha_N}(f))(x_{\alpha_N}' - x_{\alpha_N}) \\
&+ \bar{S}(f, P_{N+1}) - \underline{S}(f, P_{N+1}).
\end{aligned}$$

hay  $N+1$  sumatorias generadas por los  $N+1$  intervalos en donde la función es uniformemente continua y en consecuencia cada una es menor que  $\frac{\epsilon}{2(N+1)}$  por lo que

$$\bar{S}(f, P_i) - \underline{S}(f, P_i) < \frac{\epsilon}{2(N+1)} \quad \forall i=1, 2, \dots, (N+1).$$

y  $N$  intervalos con los cuales construimos los  $N$  sumandos que expresan el área de los "rectángulos" en donde cada uno de ellos es menor que  $\frac{\epsilon}{2N}$  así que

$$\begin{aligned}
(M_{\alpha_i}(f) - m_{\alpha_i}(f))(x_{\alpha_i}' - x_{\alpha_i}) &< (M_{\alpha_i}(f) - m_{\alpha_i}(f)) \cdot \frac{\epsilon}{2N(M-m)} \\
&< (M-m) \cdot \frac{\epsilon}{2N(M-m)} = \frac{\epsilon}{2N}
\end{aligned}$$

$$\therefore \bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \frac{\epsilon}{2(N+1)} + \frac{\epsilon}{2N} + \frac{\epsilon}{2(N+1)} + \dots + \frac{\epsilon}{2N} + \frac{\epsilon}{2(N+1)}$$

$$\therefore \bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < (N+1) \cdot \frac{\epsilon}{2(N+1)} + N \cdot \frac{\epsilon}{2N} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Si  $\gamma_1 = a$  o  $\gamma_N = b$ , la demostración es prácticamente idéntica; simplemente se reduce en uno (o dos) los intervalos en que  $f$  es uniformemente continua y todo lo demás es igual. q.e.d.

Cabría entonces la misma pregunta que nos hicimos ante el teorema (14): esta es una condición suficiente para que una función sea integrable: pero, ¿es necesaria?, es decir para que una función sea integrable, ¿tiene que tener no más de un número finito de discontinuidades?

Observemos lo siguiente: de hecho la fuerza del argumento para garantizar la integrabilidad en el caso de un número finito de discontinuidades radica en que estas las podemos encerrar en subintervalos suficientemente pequeños, de tal manera que no importa que en ellos los valores de la función se alejen mucho entre sí -ahí habrá alguna discontinuidad- (Para hacer chica el área de un rectángulo, no necesitamos que tanto la base como la altura sean chicas; si la altura es grande pero acotada basta con hacer suficientemente chica la base para que el área se haga chica).

El que sean un número finito de rectángulos con esta propiedad, la suma de sus áreas, también la podemos hacer tan chica como queramos; de esta manera la suma superior menos la suma inferior es pequeña en la unión de todos esos subintervalos, y "fuera" de ellos, como la función es uniformemente continua, aplicamos el razonamiento del teorema (14) y hacemos chica la diferencia entre la suma superior e inferior.

En resumen: gracias a que las discontinuidades pueden ser encerradas en un número FINITO de intervalos, cada uno con longitud tan pequeña como queramos, y al hecho de que el área de cada "rectángulo diferencia" sea pequeña podemos inferir que la suma de las áreas de los rectángulos es también chica (la suma finita de cantidades tan chica como queramos, la podemos hacer tan chica como queramos). Además en los intervalos cerrados en donde  $f$  es continua son un número finito, así que de la continuidad uniforme en cada uno de ellos podemos concluir la continuidad uniforme en su unión.

Pero entonces, subrayemos, la fuerza del argumento está en que pudimos encerrar las discontinuidades en un número FINITO de intervalos con longitud tan chica como queramos.

Observemos que podemos hacer esto mismo con ciertas funciones cuyos conjunto de discontinuidad es infinito.

Por ejemplo, supongamos que la función es discontinua en una sucesión convergente de puntos en el dominio de la función.

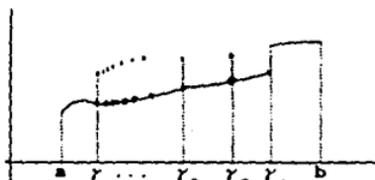


fig.(103)

Sea  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  el conjunto de puntos de discontinuidad de  $f$ , que forma una sucesión convergente a  $\gamma$ , en donde  $\gamma_k \in (a, b)$

$\forall (1, 2, \dots, n)$  como  $\{\gamma_n\} \rightarrow \gamma$ , entonces:

$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall k > N \Rightarrow |\gamma_k - \gamma| < \varepsilon$

Es decir, que una infinidad de términos estaría encerrada en un intervalo tan pequeño como queramos y fuera de él sólo quedaría un número finito de términos de la sucesión; y por tanto todos los puntos en donde la función es discontinua (la sucesión), estarían encerrados en un número finito de subintervalos, a lo más  $N+1$ . (fig.(104)).

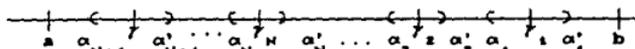


fig.(104)

tomemos  $(\alpha_1, \alpha'_1)$  de tal manera que  $\gamma_1 \in (\alpha_1, \alpha'_1)$

$(\alpha_2, \alpha'_2)$  " " " "  $\gamma_2 \in (\alpha_2, \alpha'_2)$

$(\alpha_N, \alpha'_N)$  " " " "  $\gamma_N \in (\alpha_N, \alpha'_N)$

$(\alpha_{N+1}, \alpha'_{N+1})$  " " " "  $\gamma_{N+1} \in (\alpha_{N+1}, \alpha'_{N+1})$

de esta manera estamos en la misma situación que en el teorema anterior, en el sentido de que con un número finito de intervalos con suma de longitudes tan pequeña como queramos cubrimos las discontinuidades.

Usando la misma idea para la demostración del teorema anterior, podemos considerar:

$$(\alpha'_{N+1} - \alpha_{N+1}) < \frac{\epsilon}{4(M-m)}$$

y tomar  $\alpha'_i, \alpha_i \quad i=1,2,\dots,N$  tales que:

$$(\alpha'_i - \alpha_i) < \frac{\epsilon}{4(M-m)}$$

Así para todos los intervalos que cubren las discontinuidades la diferencia de la suma superior e inferior nos queda  $\frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}$ , y para los intervalos donde  $f$  es continua, a lo más  $N+1$  subintervalos, utilizamos  $\frac{\epsilon}{2}$  y no hay problema.

De esta manera, podemos enunciar un teorema más fuerte que el anterior, en el sentido de que la función puede tener ahora una infinidad de discontinuidades, pero bajo la condición de que las discontinuidades puedan cubrirse con un número finito de intervalos, cuya suma de longitudes sea tan pequeña como queramos. La función será integrable.

*Teorema (17)* Sea  $f; [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  acotada en  $[a,b]$ , si  $f$  es continua en  $[a,b]$ , excepto en un conjunto de discontinuidades que puede ser encerrado en un número finito de intervalos con suma de longitudes tan pequeña como queramos, entonces  $f$  es integrable en  $[a,b]$

**Definición (12)** Se dice que un conjunto  $A \subset \mathbb{R}$  tiene **CONTENIDO CERO** si cumple lo anterior es decir: si  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  intervalos  $I_1, I_2, \dots, I_N$ , tales que  $A \subset \bigcup_{i=1}^N I_i$  y tales que  $\sum_{i=1}^N \lambda(I_i) < \varepsilon$ .

Así el teorema (17) quedará enunciado como sigue:

**Teorema (17)** Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  acotada en  $[a, b]$  si  $f$  es continua en  $[a, b]$ , excepto en un conjunto de contenido cero, entonces  $f$  es integrable en  $[a, b]$ .

No es necesario escribir la demostración, ya que sería calcar la demostración que hicimos para el caso en que la función sea discontinua en un número finito de puntos del dominio. En ambos teoremas, con un número finito de intervalos cuya suma de longitudes sea tan pequeña como queramos, cubrimos las discontinuidades, y "fuera" de ellos la función es continua, por tanto integrable

Ahora bien qué tipo de conjuntos infinitos cumplen con esta propiedad?

Es importante subrayar que esta propiedad abarca muchos casos de conjuntos infinitos, pues de lo que se trata es de cubrir al conjunto con un número finito de intervalos cuya suma de longitudes sea tan pequeña como queramos. No importa tanto "cuántos puntos" tenga el conjunto. Ilustraremos esto con ejemplos de conjuntos infinitos de diversa naturaleza.

Ya vimos que las sucesiones convergentes lo cumplen pero: sólo las convergentes? ¿Qué pasa si una sucesión no es convergente, por ejemplo, si tiene 2 puntos de acumulación?

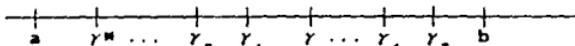


fig.(105)

por ejemplo si la sucesión  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tiene como puntos de acumulación  $\gamma, \gamma^m$ . (fig.(105)).

Tomamos una vecindad con centro en  $\gamma$  y otra con centro en  $\gamma^*$ . Fuera de estas vecindades nos queda un número finito de elementos de la sucesión, y por tanto no hay problema, ya que con un número finito de vecindades cuyas longitudes sean tan pequeñas, como queramos podemos cubrir a la sucesión  $\{\gamma_n\}$ .

¿Y si tiene 3 puntos de acumulación?, y si tiene un número finito  $N$  de puntos de acumulación?. (fig.(106)).

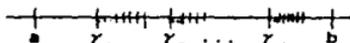


fig.(106)

Tampoco hay problema ya que con  $N$  intervalos se cubren las infinidades de puntos que están cerca de los puntos de acumulación (y los puntos de acumulación mismos), quedando fuera de estos  $N$  intervalos, sólo un número finito de términos de la sucesión, los cuales se pueden cubrir con un número finito de intervalos. Y por lo tanto estaríamos en el caso del teorema anterior, y en consecuencia  $f$  sería integrable.

¿Y si tiene un número infinito de puntos de acumulación?. En este caso podemos construir una sucesión  $\{x_n\}$  con una infinidad de puntos de acumulación, de manera que estos formen a su vez, una sucesión convergente, como se ilustra en la figura siguiente

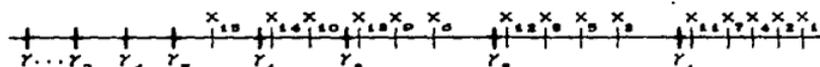


fig.(107)

(Es como construir una infinidad de sucesiones convergentes cuyos límites sean  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .)

Si éste es el conjunto donde la función es discontinua no hay problema: en torno a  $\gamma$  podemos tomar una vecindad tan pequeña como queramos, en esa vecindad estarán una infinidad de términos de

$\{\gamma_n\}$ , y fuera de ella un número finito de términos, los cuales podemos cubrir con un número finito de vecindades tan pequeñas como queramos; es decir en la vecindad en torno a  $\gamma$ , están todos, excepto un número finito de puntos de acumulación, y junto con ellos una infinidad de infinidades de los puntos de discontinuidad y fuera de la vecindad sólo quedan un número finito de puntos de acumulación (un número finito de infinidades de puntos de discontinuidad).

Ahora, si a cada término (un número finito) de la sucesión  $\{\gamma_n\}$ , que se encuentra fuera de la vecindad en torno a  $\gamma$ , le construimos una vecindad tan pequeña como queramos, dentro de esas vecindades hay un número infinito de términos de la sucesión  $\{x_n\}$ , y fuera de estas vecindades hay un número finito de elementos de la sucesión  $\{x_n\}$ , los cuales podemos cubrir con un número finito de vecindades tan pequeñas como queramos; de esta manera, con un número finito de vecindades, tan pequeñas como queramos, podemos cubrir el conjunto de discontinuidades, y ya estaríamos en el caso del teorema anterior.

Se puede jugar con este procedimiento y observar que mientras el conjunto de puntos de acumulación de la infinidad de discontinuidades sea finito; o el conjunto de puntos de acumulación del conjunto de puntos de acumulación, de la infinidad de discontinuidades sea finito; o el conjunto de puntos de acumulación del conjunto de puntos de acumulación, del conjunto de puntos de acumulación de la infinidad de discontinuidades sea finito, ... etc., no habrá problema, la función será integrable.

Ahora bien: no toda sucesión cumple lo anterior: si por ejemplo formamos una sucesión con los números racionales en el  $[0,1]$ , el conjunto de puntos de acumulación del conjunto  $\mathbb{Q} \cap [0,1]$  es todo el intervalo  $[0,1]$ , y el conjunto de puntos de acumulación del  $[0,1]$  vuelve a ser todo el  $[0,1]$  y así sucesivamente, así pues,  $\mathbb{Q} \cap [0,1]$  no es conjunto como el descrito anteriormente. Pero será un conjunto de contenido cero?

Es decir, ¿podrá suceder que este conjunto, a pesar de no comportarse como el anterior, pueda ser cubierto con un número finito de vecindades cuyas longitudes sean tan pequeñas como queramos?; veamos si es posible..

Supongamos que existen  $I_1, I_2, \dots, I_N$

$$\text{con } I_1 = (\alpha_1, \beta_1)$$

$$I_2 = (\alpha_2, \beta_2)$$

$$\vdots$$

$$I_i = (\alpha_i, \beta_i)$$

$$\vdots$$

$$I_N = (\alpha_N, \beta_N)$$

tales que  $\mathbb{Q} \cap (0,1) \subseteq \bigcup_{i=1}^n (\alpha_i, \beta_i)$

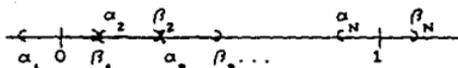


fig.(108)

en el peor de los casos, los intervalos sólo se localarán en los extremos, aunque también puede suceder que se traslapen.(fig.(108)).

Observemos que, lo más que puede quedar entre intervalo e intervalo, es un punto (que sería irracional) es decir a lo más quedarían  $N-1$  puntos fuera y, por tanto  $\sum_{i=1}^N \mathcal{L}(\alpha_i, \beta_i) \geq (1-0)$  es decir no podría ser tan pequeño como queramos, así que este conjunto infinito  $\mathbb{Q}$  no tiene contenido cero; es decir, (no toda sucesión), no todo conjunto numerable tiene contenido cero.

A partir de esto, podríamos pensar que si ni siquiera todos los conjuntos numerables tiene contenido cero, ¡menos aún lo

tendrá un conjunto no numerable!.

Sin embargo, no hay que ir tan rápido: de hecho esta conjetura no tiene razón de ser, como veremos ahora:

Tomemos por ejemplo el conjunto de Cantor, cuya construcción es la siguiente:

Dividamos el intervalo  $[0,1]$ , al que llamaremos  $C_1$ , en 3 partes iguales: los subintervalos así generados son

$$[0, \frac{1}{3}], [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], [\frac{2}{3}, 1] \quad \text{fig. (109)}$$

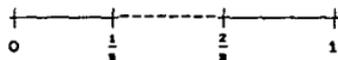


fig. (109)

Quitamos lo que queda en medio y quedémonos con los otros 2 intervalos, es decir los intervalos

$$[0, \frac{1}{3}], [\frac{2}{3}, 1]$$

Con la unión de ellos formemos un segundo conjunto  $C_2$  (al que llamamos  $C_2$ )

$$C_2 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$$

para formar  $C_3$ , tomemos cada intervalo de  $C_2$  y divídámoslo en 3 partes iguales, fig. (110)

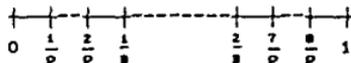


fig. (110)

Otra vez, al igual que en el paso anterior, quitamos las 2 partes de enmedio y con los intervalos que nos quedan formemos  $C_3$ ; es decir:

$$C_3 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$$

Para construir  $C_4$ , procedemos de la misma manera; es decir

dividimos cada intervalo de  $C_3$  en 3 subintervalos, quitamos los de enmedio y con los que quedan construimos  $C_4$ .

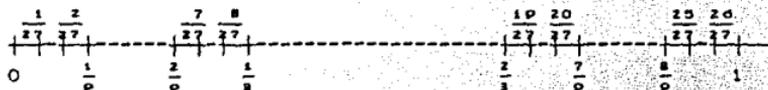


fig.(111)

$$C_4 = [0, \frac{1}{27}] \cup [\frac{2}{27}, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{7}{27}] \cup [\frac{8}{27}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{19}{27}] \cup [\frac{20}{27}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, \frac{25}{27}] \cup [\frac{25}{27}, 1]$$

Continuamos con este procedimiento para definir cada  $C_n$

$$C_1 = [0, 1]$$

$$C_2 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$$

$$C_3 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$$

$$C_4 = [0, \frac{1}{27}] \cup [\frac{2}{27}, \frac{3}{27}] \cup [\frac{6}{27}, \frac{7}{27}] \cup [\frac{8}{27}, \frac{9}{27}] \cup [\frac{18}{27}, \frac{19}{27}] \cup [\frac{20}{27}, \frac{21}{27}] \cup [\frac{24}{27}, \frac{25}{27}] \cup [\frac{26}{27}, 1]$$

Definimos al conjunto de Cantor como la intersección de todos estos conjuntos, es decir:

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

$C_1$  - consta de 1 intervalo ( $2^0$ ) de longitud 1.

$C_2$  - consta de 2 intervalos ( $2^1$ ) de longitud  $\frac{1}{3^{2-1}} = \frac{1}{3}$

$C_3$  - consta de 4 intervalos ( $2^2$ ) de longitud  $\frac{1}{3^{3-1}} = \frac{1}{9}$

$C_4$  - consta de 8 intervalos ( $2^3$ ) de longitud  $\frac{1}{3^{4-1}} = \frac{1}{27}$

$\vdots$   
 $C_n$  - consta de  $2^{n-1}$  intervalos de longitud  $\frac{1}{3^{n-1}}$

No es difícil demostrar que  $C$  tiene contenido cero; por como hemos construido  $C$ , podemos observar que  $C \subseteq C_n \forall n \in \mathbb{N}$ , y por tanto podemos encerrar a  $C$  en un número finito de intervalos (los que conforman  $C_n$ ); si multiplicamos el número de intervalos que contiene  $C_n$  por la longitud de cada uno de ellos, obtenemos que:

$$\lambda(C_n) = 2^{n-1} \frac{1}{3^{n-1}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

Conforme  $n$  crezca,  $\lambda(C_n)$  podrá hacerse tan pequeña como queramos (pues  $(\frac{2}{3})^n \rightarrow 0$  si  $|\frac{2}{3}| < 1$ ).

De donde concluimos que  $C$  tiene contenido cero.

Pero además  $C$  es no numerable, (tiene la cardinalidad de los reales).

En conclusión: una función acotada, continua en todo  $[0,1]$  excepto en  $C$ , sería integrable.

Ejemplo: Sea  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $C$  el conjunto de Cantor

$$\text{Si } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1] - C \\ 1 & \text{si } x \in [0,1] \cap C \end{cases}$$

Veremos que la función  $f$ , así definida es continua en  $[0,1]-C$  y discontinua en el conjunto de Cantor ( $C$ ). Para demostrar que  $f$  es discontinua en el conjunto  $C$  tomemos  $x_0 \in C$  y demostraremos que  $x_0$  es un punto de acumulación de  $[0,1] - C$ . Esto nos va a permitir mostrar que, para alguna forma de aproximarnos a  $x_0$  con elementos de  $[0,1] - C$ , las imágenes no se aproximan a  $f(x_0)$  y por tanto  $f$  no será continua en  $x_0 \in C$ .

Supongamos que  $x_0 \in C$  no es punto de acumulación del conjunto  $[0,1]-C$ , entonces existe una vecindad con centro en  $x_0$  y radio  $r$  ( $\mathcal{V}_r(x_0)$ ), que no contiene ningún elemento de  $[0,1] - C$ ; entonces  $\mathcal{V}_r(x_0)$  estará totalmente contenida en el conjunto de Cantor, es decir  $(x_0 - r, x_0 + r) \subset C$ . Ya demostramos que el conjunto de Cantor tiene contenido cero, de manera que si  $(x_0 - r, x_0 + r) \subset C$ ,

entonces también tendrá contenido cero. Esto es una contradicción, ya que cualquier intervalo  $(\alpha, \beta)$  en los reales no tiene contenido cero. Así que, en cada vecindad  $\mathcal{V}_r(x_0)$  hay elementos de  $[0, 1] - C$ , y por tanto  $x_0$  es un punto de acumulación de  $[0, 1] - C$ .

Nos fijamos en la familia de vecindades  $\mathcal{V}_r(x_0)$  con  $r_n = \frac{1}{n}$   $\forall n \in \mathbb{N}$ , y tomemos  $x_n \in [0, 1] - C$ , de tal manera que:

$$x_n \in \mathcal{V}_{r_n}(x_0) \cap ([0, 1] - C),$$

Esto es posible ya que  $x_0$  es un punto de acumulación de  $[0, 1] - C$ .

Para cada  $n \in \mathbb{N}$  tomamos  $x_n$ , con lo cual construimos una sucesión  $\langle x_n \rangle$  que converge a  $x_0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Fijémonos ahora en la sucesión de imágenes  $\langle f(x_n) \rangle_{n \in \mathbb{N}}$  como  $f(x_n) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\langle f(x_n) \rangle \rightarrow 0 \neq f(x_0) = 1$ .

Así que  $f$  es discontinua en  $x_0 \in C$ , y en consecuencia  $f$  es discontinua en  $C$ .

Antes de pasar a demostrar que  $f$  es continua en  $[0, 1] - C$ , señalamos dos propiedades que hemos utilizado en la demostración anterior. (Ejercicios para el lector).

i) Sean  $A$  y  $B \subset \mathbb{R}$  si  $A \subset B$  y  $B$  tiene contenido cero, entonces  $A$  tiene contenido cero.

ii) Cualquier intervalo  $(\alpha, \beta)$  en los reales no tiene contenido cero.

Ahora demostraremos que  $f$  es continua en el conjunto  $[0, 1] - C$ . Por la forma en que hemos construido el conjunto de Cantor resulta que el conjunto  $[0, 1] - C$ , consiste de la unión de todos los intervalos de "enmedio" que vamos quitando en cada paso, de esta manera los intervalos que vamos quitando son de la forma  $(\alpha, \beta)$ , abierto.

Si tomamos  $x_0 \in [0, 1] - C$ , entonces  $x_0$  está en algún intervalo de los de "enmedio". Sea  $(\alpha_1, \beta_1)$  dicho intervalo

Sea  $r$  el mínimo de las distancias entre  $x_0$  y los extremos  $\alpha_1$  y  $\beta_1$ , es decir

Sea  $r = \min \{d(x_0, \alpha), d(x_0, \beta)\}$  entonces la vecindad de radio  $r$  alrededor de  $x_0$ ,  $\mathcal{V}_r(x_0)$  está totalmente contenida en  $(0,1) - C$  de donde,

$$\forall x \in \mathcal{V}_r(x_0), \quad f(x) = 0.$$

Y en consecuencia

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = r > 0$  tal que  $\forall x \in \mathcal{V}_r(x_0)$  se tiene que

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$(|f(x) - f(x_0)| = |0 - 0| < \varepsilon).$$

Por tanto  $f$  es continua en  $x_0$ .

El que un conjunto tenga o no contenido cero no depende, en lo esencial, de "cuántos puntos tenga", sino de "qué tanto espacio" ocupen dichos puntos. En consecuencia, la INTEGRABILIDAD de una función depende no tanto del número de discontinuidades de ésta, sino de "qué tanto espacio ocupan".

Regresemos a la pregunta anunciada más arriba; es decir, esta es una condición suficiente para que una función sea integrable, pero: ¿es necesaria?: es decir para que una función sea integrable ¿es necesario que su conjunto de discontinuidades tenga contenido cero? ¿o es posible que  $f$  sea integrable pero sus discontinuidades no puedan ser encerradas en un número finito de intervalos con longitud tan pequeña como queramos?.

Nuestro problema consistiría en utilizar cualquier conjunto que no tenga contenido cero en cualquier intervalo  $(a,b)$ , para construir una función que sea continua en el  $(a,b)$  excepto en dicho conjunto, y sea integrable en  $(a,b)$ .

Pues bien; Riemann construyó una función con esta característica; dicha función es conocida, precisamente, como la función de Riemann.

Sea  $f: (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \end{cases} \quad \text{con } (p,q) = 1$$

Observaciones:

1) Notemos que con todos los números en  $(0,1)$  de la forma  $\frac{p}{q}$  irreducible, abarcamos a todos los racionales en  $(0,1)$ .

Por tanto la función de Riemann, asigna a todo punto en  $(0,1)$  un valor.

2) La condición de que  $\frac{p}{q}$  sea "irreducible" es necesaria, pues de otra forma, por ejemplo al  $\frac{1}{2}$  y al  $\frac{2}{4}$ , que son el mismo valor en el dominio, tal regla le asociaría valores diferentes en la imagen y en consecuencia no sería una función.

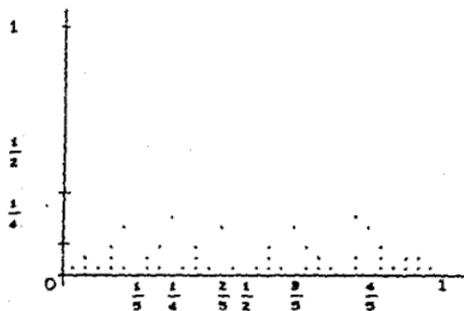


fig.(112)

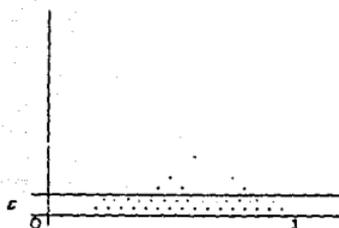
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}, \quad f\left(\frac{2}{4}\right) = \frac{1}{4}, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}, \quad f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}, \quad f\left(\frac{12}{13}\right) = f\left(\frac{1}{13}\right) = \frac{1}{13}$$

La imagen geométrica de la función (fig.(112)) es una especie de "montañita" de puntos que se van desparramando sobre el intervalo  $(0,1)$  en el eje  $x$ . Conforme crece el denominador de un número racional expresado en forma irreducible, se van acercando al eje  $x$  (que es donde caen todos los irracionales bajo la función), y esta es de hecho la característica determinante, fundamental, en extremo ingeniosa, de esta función.

Todos los valores de la función, excepto un número finito de ellos están "más cerca" del eje  $x$  que cualquier distancia dada, o dicho de manera formal:

**Lema (13)** Dada cualquier distancia  $\varepsilon > 0$  se cumple que todos los valores de la función, excepto un número finito, caen dentro de la franja de altura  $\varepsilon$ .

Veamos



Sea  $\varepsilon > 0$ , por el Principio Arquimedeano, sabemos que  $\exists N \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{N} < \varepsilon$ ; así pues, a lo más, hay  $N-1$  valores a saber  $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{N-1}$ , que serán mayores o iguales que  $\varepsilon$ .

Dichos valores provienen de, a lo más  $1+2+\dots+n-1$  puntos del mínimo de la función, (fig.(113)). Veamos por qué:

Con denominador 1 tenemos  $\frac{1}{1}$ ;

con " 2 "  $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}$ ;

" " 3 "  $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}$ ;

" " 4 "  $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}$

⋮

" "  $n-1$  "  $\frac{1}{N-1}, \frac{2}{N-1}, \dots, \frac{N-1}{N-1}$

Dentro de éstos, no todos están en forma "irreducible" así que no todos "cuentan", pero a lo más tenemos:

Con denominador 1, un término

con denominador 2, 2 términos

" " 3, 3 "

" " 4, 4 "

⋮

con denominador  $N-1$ ,  $N-1$  términos;

y el total de estos números será

$$1 + 2 + \dots + (N - 1) = \frac{N(N-1)}{2} = k, \text{ un número finito}$$

Como todos los demás tienen denominador irreducible mayor o igual que  $N$ , entonces su imagen bajo la función de Riemann será

$$\frac{1}{N} < \frac{1}{N} < \epsilon$$

esta propiedad fundamental es, de hecho, la que permite demostrar el siguiente resultado:

**Lema (14)** La función  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  de Riemann es continua en  $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ .

**Demostración.**

Sea  $t_0 \in \mathbb{Q}$  arbitrario.

Queremos demostrar que  $f$  es continua en  $t_0$ ;

es decir, que  $\lim_{x \rightarrow t_0} f(x) = f(x_0) = 0$

Los irracionales son puntos de acumulación del intervalo  $(0,1)$ , así que tiene sentido plantear la existencia del límite.

p.d. que:  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0$  tal que  $\forall x \in V_\delta(t_0) \cap [0,1]$

entonces  $|f(x)| < \epsilon$ .

$V_\delta(t_0)$  = vecindad de radio  $\delta$  con centro en  $t_0$ .

Sea  $\epsilon > 0$ .

sabemos que, para esta  $\epsilon > 0$ , existen un número finito de números racionales que, bajo la función, son mayores o iguales que  $\epsilon$ .

Sean  $x_1, x_2, \dots, x_N$  todos estos números, y sea  $x_r$  el más cercano de dichos puntos a  $t_0$ ,  $x_r$  existe, ya que tenemos un número finito de puntos.

$$\text{Sea } \delta = \frac{|x_r - t_0|}{2} > 0$$

Como  $x_r \in \mathbb{Q}$ ,  $v_0 \in \mathbb{I}$ , entonces  $x_r \neq v_0$

Es claro que en  $V_\delta(v_0) \cap [0,1]$  no hay ninguno de los racional

$$x_1, x_2, \dots, x_N$$

Así que  $f(x) = 0 < \epsilon$ , si  $x \in \mathbb{I} \cap V_\delta(v_0) \cap [0,1]$  y

$f(x) < \epsilon$ , si  $x \in \mathbb{Q} \cap V_\delta(v_0) \cap [0,1]$ .

De donde  $|f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in V_\delta(v_0) \cap [0,1]$ , por lo cual

$f$  es continua en  $v_0$ ,  $\forall v_0 \in \mathbb{I} \cap [0,1]$  y en consecuencia

$f$  es continua en  $\mathbb{I} \cap [0,1]$ .

q.e.d.

**Lema (15)** La función de Riemann es discontinua en  $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ .

**Demostración.**

Sea  $q_0 \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$  arbitrario

Demostraremos que  $\lim_{x \rightarrow q_0} f(x) = 0 \neq f(q_0) > 0 \quad \forall q_0 \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$

Sea  $\epsilon > 0$ . Siguiendo el razonamiento del lema anterior, llegaríamos a que existen unicamente un numero finito,  $x_1, x_2, \dots, x_N$  de racionales tales que  $f(x_i) \geq \epsilon$ ,  $i=1,2,\dots,N$ , y para todos los demás,  $f(x) < \epsilon$ .

Nuevamente tomemos  $\delta = \min \frac{|x_i - q_0|}{2}$ ;  $i=1,2,\dots,N$ ,  $x_i \neq q_0$

Si  $q_0 = x_{i_0}$  para alguna  $i_0$  no hay problema, pues como se trata de demostrar que el limite es cero, basta con tomar la vecindad perforada; así

$f(x) = 0 < \epsilon$ , si  $x \in \mathbb{I} \cap V_\delta(q_0) \cap [0,1]$  y

$f(x) < \epsilon$ , si  $x \in V_\delta^o(q_0) \cap [0,1]$

por tanto  $|f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in V_\delta^o(q_0) \cap [0,1]$  de donde

$$\lim_{x \rightarrow q_0} f(x) = 0 \neq f(q_0) > 0$$

Así, pues,  $f$  es discontinua en  $q_0 \forall q_0 \in \mathbb{Q}$

$\therefore f$  es discontinua en  $\mathbb{Q} \cap [0,1]$

q.e.d.

*Lema (16)* La función de Riemann es integrable en  $[0,1]$ .

*Demostración.*

Sea  $\varepsilon > 0$  Por el lema (13) existen a lo más,  $N$  puntos

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$$

$$\text{tales que } f(\gamma_i) \geq \frac{\varepsilon}{2} \quad (i=1,2,\dots,N).$$

En este caso tenemos que  $\gamma_1 = 0, \gamma_N = 1$ .

Aplicando un razonamiento similar al que aplicamos a las discontinuidades, al principio de este capítulo, podemos "encerrar" a  $\gamma_i$  en un intervalo  $(x_{\alpha_i}, x_{\alpha'_i})$ , donde  $x_{\alpha_i}, x_{\alpha'_i}$  son

$$\text{tales que } (x_{\alpha'_i} - x_{\alpha_i}) < \frac{\varepsilon}{4(N-2)} (N-2), \text{ si } i=2,3,\dots,N-1.$$

A  $\gamma_1 = 0$  y  $\gamma_N = 1$  las podemos "encerrar" en intervalos

$(x_{\alpha_1}, x_{\alpha'_1})$  y  $(x_{\alpha_N}, x_{\alpha'_N})$  tales que

$$(x_{\alpha'_1} - x_{\alpha_1}) < \frac{\varepsilon}{8}$$

$$\text{y } (x_{\alpha'_N} - x_{\alpha_N}) < \frac{\varepsilon}{8}$$

Sea  $P = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$  una partición del intervalo  $[0,1]$ , con

$$\begin{aligned}
 x_0 &= 0 \\
 x_1 &= x_{\alpha_1} \\
 x_2 &= x_{\alpha_2} \\
 x_3 &= x_{\alpha_3} \\
 &\vdots \\
 x_{n-1} &= x_{\alpha_N} \\
 x_n &= 1
 \end{aligned}$$

Entonces 
$$\bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) = \sum_{l=1}^n (M_l(f) - m_l(f))(x_l - x_{l-1})$$

donde  $M_l(f) = \sup\{f(x); x \in [x_{l-1}, x_l]\}$  y

$m_l(f) = \inf\{f(x); x \in [x_{l-1}, x_l]\}$ .

Al igual que en los casos anteriores, separamos la sumatoria en 3 tipos de sumandos.

i) En los que aparecen los subintervalos de la forma

$$[x_{\alpha_l}, x_{\alpha_l}] \quad l=2, 3, \dots, N-1$$

ii) En los que aparecen los subintervalos de la forma

$$[x_{\alpha_l}, x_{\alpha_{l+1}}] \quad l=1, 2, \dots, N.$$

iii) En los que aparecen  $[0, x_{\alpha_1}]$  y  $[x_{\alpha_N}, 1]$ .

En los sumandos del tipo i) se tiene que

$$(M_l(f) - m_l(f)) \leq M - m = 1 - 0 = 1$$

y por tanto  $\sum (M_l(f) - m_l(f))(x_l - x_{l-1}) = \sum (M_l(f) - m_l(f))(x_{\alpha_l} - x_{\alpha_l}) <$

$$1 \sum (x_{\alpha_l} - x_{\alpha_l}) < \frac{\epsilon}{4(N-2)} (N-2)$$

En los del tipo ii) se tiene que

$$M_l(f) - m_l(f) = M_l(f) - 0 \leq \frac{\epsilon}{2}$$

y por tanto  $\sum (M_i(f) - m_i(f))(x_i - x_{i-1}) = \sum (M_i(f) - m_i(f))(x_{\alpha_{i+1}} - x_{\alpha_i}) \leq$

$$\sum \frac{\epsilon}{2} (x_{\alpha_{i+1}} - x_{\alpha_i}) = \frac{\epsilon}{2} \sum (x_{\alpha_{i+1}} - x_{\alpha_i}) < \frac{\epsilon}{2} (1) = \frac{\epsilon}{2}$$

ya que

$$\sum (x_{\alpha_{i+1}} - x_{\alpha_i}) < 1$$

En los del tipo iii), tenemos

$$(M_1(f) - m_1(f))(x_1 - x_0) = (M_1(f) - m_1(f))(x_{\alpha_1} - 0) = (1 - 0)(x_{\alpha_1} - 0) =$$

$$(x_{\alpha_1} - 0) < (x_{\alpha_1} - x_{\alpha_1}) < \frac{\epsilon}{8} \text{ y}$$

$$(M_N(f) - m_N(f))(x_n - x_{n-1}) = (M_N(f) - m_N(f))(1 - x_{\alpha_N}) = (1 - 0)(1 - x_{\alpha_N}) =$$

$$(1 - x_{\alpha_N}) < (x_{\alpha_N} - x_{\alpha_N}) < \frac{\epsilon}{8}$$

$$\text{Entonces } \overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{8} + \frac{\epsilon}{8} = \epsilon.$$

y por tanto  $f$  es integrable en  $[0,1]$  q.e.d.

Hemos probado, pues, (en particular) que las discontinuidades de una función pueden NO ser "encerrables" en un número finito de intervalos con suma de longitudes tan pequeña como queramos, y sin embargo si ser integrable la función. La función de Riemann es un ejemplo de ello: Sus discontinuidades están en todos los racionales y éstos no tienen contenido cero; sin embargo la función sí es integrable. Así pues, el que las discontinuidades de la función tengan contenido cero es una condición SUFICIENTE pero NO NECESARIA.

¿Existirá una condición necesaria y suficiente?

Observación 1: La función de Dirichlet, que manejamos en el capítulo II, nos sirvió para mostrar un ejemplo de una función definida en  $[0,1]$  que no es integrable. Al igual que la

función de Riemann, la de Dirichlet es discontinua en  $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ , la diferencia está en que la de Riemann es continua en  $\mathbb{I} \cap [0,1]$ , y la de Dirichlet no es continua ahí. (es discontinua en todo el intervalo  $[0,1]$ ).

Observacion 2: Las discontinuidades en la función de Riemann son numerables; y si bien no siempre podemos encerrar todo conjunto numerable en un numero finito de intervalos con suma de longitudes tan pequeña como queramos, si podemos encerrarlo en un número numerable de intervalos con suma de longitudes tan pequeña como queramos, veamos esto:

Lema (17) Si  $A \subset \mathbb{R}$  es numerable, entonces existe un conjunto de intervalos abiertos  $I_n$ , tales que

$$A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \quad \text{y además} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon$$

Demostración.

Sea  $A$  un conjunto numerable, entonces  $A$  es de la forma

$$A = \{a_1, a_2, \dots\}$$

sea  $\varepsilon > 0$ , dado y sean  $I_1 = (x_{a_1}, x_{a_1}')$

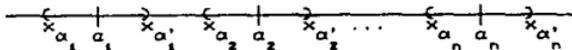
cualquier intervalo en el que caiga  $a_1$ , cuya longitud sea menor que  $\frac{\varepsilon}{2}$

$$I_2 = (x_{a_2}, x_{a_2}') \quad \text{tal que} \quad a_2 \in I_2 \quad \text{y} \quad \ell(I_2) < \frac{\varepsilon}{2^2};$$

$$I_3 = (x_{a_3}, x_{a_3}') \quad \text{tal que} \quad a_3 \in I_3 \quad \text{y} \quad \ell(I_3) < \frac{\varepsilon}{2^3};$$

⋮

$$I_n = (x_{a_n}, x_{a_n}') \quad \text{tal que} \quad a_n \in I_n \quad \text{y} \quad \ell(I_n) < \frac{\varepsilon}{2^n};$$



Como  $a_n \in I_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , entonces

$$A = \{a_1, a_2, \dots\} \subseteq I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

$$\text{y } \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \epsilon,$$

$$\text{ya que } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

**Definición (13)** Decimos que un conjunto  $A \subset \mathbb{R}$  tiene MEDIDA CERO si y sólo si sus elementos pueden ser encerrados en un conjunto NUMERABLE de intervalos cuya suma de longitudes sea tan pequeña como queramos.

Es decir

$$\forall \epsilon > 0 \exists I_1, I_2, \dots, I_n, \dots \text{ tal que } A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \text{ y}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < \epsilon$$

De hecho con la definición anterior el enunciado del lema 17 quedaría así

**Lema (17)** Todo conjunto numerable tiene medida cero

Observemos que el hecho de que los elementos de un conjunto puedan ser encerrados en un número numerable de intervalos con suma de longitudes tan pequeña como queramos, NO IMPLICA que el conjunto sea numerable. (Como el hecho de que un conjunto pudiera ser encerrado en un conjunto finito de intervalos con suma de longitudes tan pequeña como quisieramos, no implicaba que el conjunto fuera finito; vimos que podía ser infinito numerable e incluso no numerable -el conjunto de Cantor-).

Es claro que si un conjunto puede ser encerrado en un número finito de intervalos con suma de longitudes tan pequeña como se quiera, con mayor razón lo podemos hacer en un conjunto numerable de intervalos con tal propiedad. Y entonces es claro

que, si un conjunto tiene contenido cero, ello implica que tiene medida cero (ejercicio para el lector). En consecuencia, como el conjunto de Cantor tiene contenido cero, tiene medida cero y así tenemos un ejemplo de un conjunto infinito NO NUMERABLE, que si puede ser encerrado en un numero numerable de intervalos con suma de longitudes tan pequeña como queramos.

Reiterando entonces lo observado más arriba: nuestro contraejemplo al recíproco del último teorema es una función, la función de Riemann, cuyo conjunto de discontinuidades no tiene contenido cero, pero si tiene medida cero.

Se ocurren dos preguntas:

- i) ¿Toda función cuyo conjunto de discontinuidades cumpla lo anterior es integrable?
- ii) Si una función es integrable entonces ¿necesariamente sus discontinuidades cumplen esa propiedad?

Nótese que, con lo trabajado hasta ahora hemos establecido una relación muy directa entre la continuidad y la integrabilidad de una función; hemos trabajado funciones discontinuas hasta llegar a la función de Riemann, lo cual nos ha servido para motivar el concepto de medida cero. Como esta función es integrable, nos ha permitido plantear la pregunta de si la integrabilidad permite "romper" hasta tal punto la continuidad. De ser afirmativas las respuestas a esas preguntas, tendríamos un resultado todavía más fuerte que los anteriores, resultado que, una vez demostrado incluye a todos. Pues bien, resulta que si es posible demostrar este resultado y, de hecho, constituye uno de los teoremas más fuertes y más útiles para garantizar la integrabilidad de una función:

*Teorema (18)* Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada, entonces  $f$  es integrable si y sólo si sus discontinuidades pueden ser encerradas en un número numerable de intervalos, con suma de longitudes tan pequeña como queramos, es decir, si y sólo si su conjunto de discontinuidades tiene medida cero.

La demostración del teorema no la incluimos aquí dado que requiere del manejo de algunos resultados que trascienden el material que hemos desarrollado.

Finalmente, si alteramos una función  $f$  integrable en un conjunto de contenido cero, la integral no se altera. (Afirmación que demostraremos en el siguiente teorema), pero, si la alteramos en un conjunto de medida cero, no podemos concluir lo mismo. (Ejercicio para el lector. Encontrar una función que sea integrable, de tal manera que al alterarla en un conjunto de medida cero, la función que resulte ya no sea integrable).

**Teorema (19)** Si  $f$  es integrable en  $[a,b]$  y  $f = g$  excepto en un conjunto de contenido cero, entonces  $g$  es integrable en  $[a,b]$  y

$$\int_a^b f = \int_a^b g$$

Antes de pasar a la demostración del teorema anterior, demostraremos el siguiente resultado.

**Lema (18)** Si  $A$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}$  y  $A$  tiene contenido cero, entonces el conjunto de puntos de acumulación de  $A$  tiene contenido cero.

**Demostración.**

Sea  $A'$  el conjunto de puntos de acumulación de  $A$ . Como  $A$  es de contenido cero, entonces  $\forall \epsilon > 0 \exists$  intervalos  $I_1, I_2, \dots, I_n$

$$\text{tales que} \quad A \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n \alpha(I_i) < \epsilon$$

Tomemos el intervalo  $I_i$  cerrado  $i=1, 2, \dots, n$

supongamos que  $A' \not\subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i$

Sea  $x_0 \in A'$  tal que  $x_0 \notin I_i \forall i=1, 2, \dots, n$

Tomemos el mínimo de las distancias de  $x_0$  a los extremos de  $I_i$   $i=1, 2, \dots, n$ ; sea  $r > 0$  tal distancia. Construimos la

vecindad  $\gamma_{r/2}(x_0)$ , entonces

$$\gamma_{r/2}(x_0) \cap I_l = \emptyset \quad \forall l=1,2,\dots,n$$

por tanto  $x_0$  no es punto de acumulación de  $A$ . Contradicción,  $x_0$  lo tomamos en  $A'$ .

$$\text{Por tanto} \quad A' \subseteq \bigcup_{l=1}^n I_n$$

$\therefore A'$  tiene contenido cero.

Ejercicio para el lector: demostrar que si dos conjuntos en los reales tienen contenido cero entonces la unión de ellos también tiene contenido cero.

Demostración del teorema (19)

Sea  $h = f - g$ , queremos demostrar que  $h$  es integrable en  $(a,b)$ .

Sea  $A$  el conjunto de contenido cero en  $(a,b)$ , donde  $f$  y  $g$  difieren, entonces

$$h = 0 \quad \text{si } x \in A \quad \text{y}$$

$$h \neq 0 \quad \text{si } x \in A.$$

Sean,  $A'$  el conjunto de puntos de acumulación de  $A$ , y  $C = A \cup A'$  ( $C$  es de contenido cero).

Sea  $x_0 \in (a,b)$  tal que  $x_0 \in C$ , entonces  $\exists r > 0$  tal que

$$\gamma_r(x_0) \cap C = \emptyset \quad (\text{según el lema anterior})$$

$$\text{Entonces } h(x) = 0 \quad \forall x \in \gamma_r(x_0).$$

Por tanto  $h$  es continua en  $x_0$ , y como  $C$  es de contenido cero, entonces  $h$  es a lo más discontinua en un conjunto de contenido cero.

Por tanto  $h$  es integrable en  $(a,b)$ .

Si  $h = f - g$  y  $f$  y  $h$  son integrables, entonces  $g = f - h$ .

Por tanto  $g$  es integrable.

-Ejercicio para el lector: demostrar que  $\int_a^b h = 0$ .

Para mostrar la fuerza del teorema (18) analicemos algunos ejemplos.

1) En el capítulo II, demostramos que si una función es monótona, es integrable. Según el teorema anterior, si una función es monótona en el intervalo  $[a,b]$ , su conjunto de discontinuidades necesariamente tiene medida cero.

2) Sean  $a < c < b$ ,  $f$  es integrable en  $[a,b]$  si y solo si  $f$  es integrable en  $[a,c]$  y  $[c,b]$ .

Si  $A$  es el conjunto de discontinuidades de  $f$  en  $[a,b]$ ,  
 $B$  " " " " " " " "  $[a,c]$  y  
 $C$  " " " " " " " "  $[c,b]$ ,

entonces, como  $B \subseteq A$ ,  $C \subseteq A$  y  $A$  es cubierto con un número numerable de vecindades con suma de longitudes tan chica como queramos, tanto  $B$  como  $C$  son cubiertos por esas mismas vecindades.

Así que  $B$  y  $C$  tienen medida cero

entonces  $f$  es integrable en  $[a,c]$  y en  $[c,b]$ .

Ahora si  $f$  es integrable en  $[a,c]$  y en  $[c,b]$  entonces  $B$  y  $C$  tienen medida cero, es decir para  $\epsilon > 0$  existen intervalos  $I_1, I_2, \dots$  e  $I'_1, I'_2, \dots$  tales que

$$B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \text{ con } \sum_{i=1}^{\infty} \kappa(I_i) < \frac{\epsilon}{4}$$

$$\text{y } C \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I'_i \text{ con } \sum_{i=1}^{\infty} \kappa(I'_i) < \frac{\epsilon}{4}$$

Llamemos  $T_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$  y  $T_2 = \bigcup_{i=1}^{\infty} I'_i$  así  $\kappa(T_1) < \frac{\epsilon}{4}$  y  $\kappa(T_2) < \frac{\epsilon}{4}$ .

El conjunto de discontinuidades de  $f$  en  $[a,b]$  no necesariamente es igual a la unión de  $B$  y  $C$ , ya que al "pegar" los intervalos  $[a,c]$  y  $[c,b]$ , puede aparecer una nueva discontinuidad en  $C$ .

Supongamos que  $f$  es discontinua en  $c$  (si  $f$  no lo es, no hay nada que hacer). Entonces con una vecindad de radio  $\epsilon/4$  y centro

en  $\mathcal{V}_{\epsilon/4}(c)$  cubrimos a  $c$ . Así, el conjunto de discontinuidad de  $f$  en  $[a, b]$  es cubierto por

$$T_1 \cup T_2 \cup \mathcal{V}_{\epsilon/4}(c) = T \quad \text{y entonces}$$

$$K(f) \leq K(T_1) + K(T_2) + K\mathcal{V}_{\epsilon/4}(c) = \sum_{i=1}^{\infty} K(I_i) + \sum_{i=1}^{\infty} K(I_i) + \frac{\epsilon}{2}$$

así que  $K(f) < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

de donde  $K(f) < \epsilon$ .

Por tanto  $A$  tiene medida cero y, por el teorema anterior,  $f$  es integrable en  $[a, b]$ .

3) Si  $f$  y  $g$  son integrables en  $[a, b]$ , entonces

i)  $(f + g)$

ii)  $(f/g)$

iii)  $(\frac{f}{g})$ ;  $g \neq 0 \forall x \in [a, b]$

son integrables en  $[a, b]$ .

Analizaremos sólo el primer inciso, ya que el razonamiento para los otros casos es similar.

Sean  $A$  el conjunto de discontinuidades de  $f$  en  $[a, b]$ ,

$B$  " " " " "  $g$  en  $[a, b]$ .

y  $C$  " " " " "  $f + g$  en  $[a, b]$

En los puntos donde  $f$  y  $g$  son continuas,  $f + g$  también lo es; pero en los puntos donde  $f$  y  $g$  son discontinuas puede suceder que la suma sea continua, así que

$$C \subseteq A \cup B.$$

Según el teorema anterior, como  $f$  y  $g$  son integrables en  $[a, b]$ , tanto  $A$  como  $B$  tienen medida cero. Así el conjunto  $A \cup B$  es cubierto con un número numerable de vecindades con suma de longitudes tan pequeña como queramos (las que cubren al conjunto  $A$  y las que cubren al conjunto  $B$ ), por tanto  $C$  tiene medida cero y, según el teorema anterior,  $f + g$  es integrable en  $[a, b]$ .

## CAPITULO IV

### TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO.

En este capítulo mostraremos la relación que existe entre el proceso al límite para la derivación y el proceso al límite para la integración, conceptos que aparentemente no están relacionados entre sí, pero resulta que se pueden considerar como procesos inversos.

En la mayoría de los textos de Cálculo, se opta por utilizar este teorema para la resolución de diversos problemas, lo cual es muy importante, pues ello muestra el carácter fundamental que éste tiene; sin embargo, dedican poco espacio al análisis del teorema en sí.

En este capítulo estudiaremos con más detalle el desarrollo a través del cual es enunciado este teorema.

4.1 Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrable.

Con base en la función  $f$ , podemos construir una nueva función  $F$  a través de la siguiente regla de correspondencia:

$$F(x) = \int_a^x f$$

donde  $a$  es una constante fija en  $[a, b]$  y  $x$  es cualquier valor en

$[a, b]$ . Para cada  $x \in [a, b]$ ,  $\int_a^x f$  determina uno y sólo un valor;

de esta forma  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es efectivamente una función. A esta función se le llama "integral con límite superior variable" o "integral indefinida" de la función  $f$ .

Veamos algunos ejemplos

Ejemplo (1)

Sea  $f(x) = c$   $c > 0$

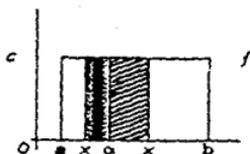


fig.(114)

Si  $x < a$  entonces  $F(x) = \int_a^x f$

es negativa, ya que el área que hay en el rectángulo, cuya base mide  $(x-a)$ , menor que cero y la altura  $c$  positiva, resulta con signo

negativo, fig.(114).

Si  $x > a$  entonces  $F(x)$  es positiva, ya que es el área del rectángulo cuya base mide  $(x-a)$ , y altura  $c$ , (ambas magnitudes con signo positivo).

Así, para cada  $x \in [a,b]$ , podemos calcular  $\int_a^x f$  y obtener  $F(x)$ .

¿Cómo resulta ser  $F(x)$ ?

Si tomamos  $x$  a la derecha de  $a$  obtenemos un rectángulo cuya base mide  $(x-a)$  y de altura  $c$ ; entonces el área de este rectángulo, para cada  $x \in [a,b]$ , estará dada por  $(x-a)c = xc - ac$ , de lo cual podemos concluir entonces que el área es proporcional a la variable  $x$ .

Si  $x$  está a la izquierda de  $a$  obtenemos exactamente la misma expresión excepto que  $(x-a)$  es un valor negativo.

De esta manera, la gráfica de la función  $F(x)$  es una línea

recta; además como, anteriormente vimos,  $\int_a^a f = 0$ , así que dicha recta pasa por  $(a,0)$ . (fig.(115)).

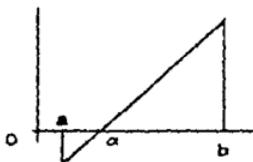


fig.(115)

Ejemplo (2).

Tomemos ahora una función  $f$  positiva y creciente. (fig. (116)).

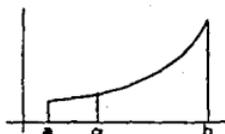


fig. (116)

¿Cómo será el comportamiento de la función  $F(x)$ ?

Sabemos que  $F(a) = 0$ ; en la medida en que  $x$  se aleja de  $a$  hacia la derecha, el área bajo la gráfica de la función se va incrementando, lo cual quiere decir que la función  $F(x)$  crece. Si  $x$  es menor que  $a$  entonces el valor de la integral de la función  $f$  desde  $a$  hasta  $x$  es negativo y entre más a la izquierda de  $a$  esté  $x$ , menor será el valor de la integral.

Concluimos, entonces que, la función  $F(x)$  es creciente en  $[a, b]$ .

Ejemplo (3) Si ahora  $f$  es positiva y decreciente (fig. (117)).

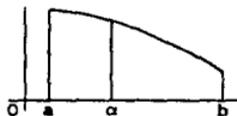


fig. (117)

¿En este caso cómo es  $F(x)$ ?

Como en el ejemplo anterior, al variar  $x$  a la derecha de  $a$ , el área bajo la gráfica de la función  $f$  se va incrementando; si  $x$  está a la izquierda de  $a$  el valor de la integral desde  $a$  hasta  $x$  es negativo, y entre más se aleje de  $a$ , más pequeño será el valor. Lo cual indica que, en este caso, la función  $F(x)$  también es creciente.

¿De qué manera crece  $F$  en uno y otro caso?

¿Podemos determinar el comportamiento de  $F$  a partir del comportamiento de  $f$ ?

Retornemos al ejemplo (2)

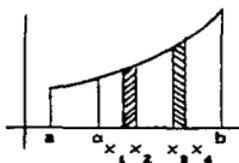


fig.(118)

Tenemos los intervalos  $(x_1, x_2)$  y  $(x_3, x_4)$  de igual longitud (fig.(118)) como la función  $f$  es creciente, las diferencias

$FC(x_4) - FC(x_3)$  y  $FC(x_2) - FC(x_1)$  son tales que:

$$FC(x_4) - FC(x_3) > FC(x_2) - FC(x_1)$$

Como  $FC(x_4) - FC(x_3)$  es el área bajo la gráfica de la función  $f$  desde  $x_3$  hasta  $x_4$  y  $FC(x_2) - FC(x_1)$  es el área bajo la gráfica desde  $x_1$  hasta  $x_2$ ; podemos decir, entonces, que para intervalos de la misma longitud, por pequeños que sean, el que está más a la derecha determina mayor área bajo la gráfica de la función  $f$ .

Esto quiere decir, no sólo, que  $F$  es creciente -lo cual queda garantizado por el simple hecho de que  $f$  sea positiva- sino que  $F$  crece más rápido conforme  $x$  se aleja más de  $a$ , es decir que su gráfica es como en la fig.(119) y no como en la fig.(120).

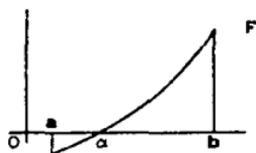


fig.(119)

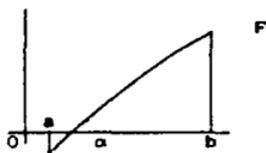


fig.(120)

Si  $f$  es como en el ejemplo (2), usando un razonamiento análogo al anterior, llegamos a que el intervalo que está más a la

derecha determina menos área bajo la gráfica de la función  $f$ ; esto quiere decir que  $F$  crece más lento conforme  $x$  se aleja de  $a$ , por lo cual la gráfica de  $F$  es como se ilustra en la fig.(120).

Ejemplo (4) Tomemos ahora  $f$  negativa y creciente (fig.(121)).

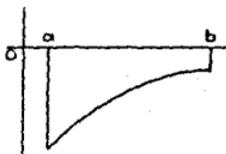


fig.(121)

¿Cómo resulta ser  $F$ ?

La integral desde  $a$  hasta  $x$  determina un valor negativo para cada  $x$  en el intervalo  $[a, b]$ ; esto quiere decir, entonces, que la función  $F$  es negativa.

Conforme  $x$  se aleja de  $a$ , el área bajo la gráfica de  $f$  se incrementa; pero como  $f$  es negativa, el área que resulta desde  $a$  hasta  $x$  tendrá asignado un valor negativo. Esto quiere decir que entre más se aleje  $x$  de  $a$ , más pequeño será el valor de la integral; esto indica que la función  $F$  es decreciente.

Ejemplo (5) Consideremos una función  $f$  negativa y decreciente (fig.(122)).

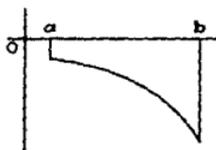


fig.(122)

Si retomamos un razonamiento análogo al del ejemplo anterior, aquí la función  $F$  también resulta decreciente.

Igual que en los casos anteriores ¿de qué manera decrece  $F$  en uno y otro caso?

Retomemos el razonamiento que utilizamos para diferenciar el comportamiento de  $F$  en los ejemplos (2) y (3); si la función es como la del ejemplo (4), sucede que el intervalo que está más a la derecha determinar menor área (con signo negativo). Lo cual quiere decir que la función  $F$ , conforme  $x$  se aleje de  $a$ , decrezca más lentamente, esto indica que su gráfica es como en la fig.(123) y no como en la fig.(124).

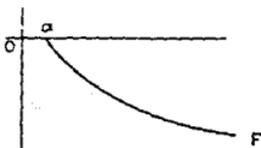


fig.(123)

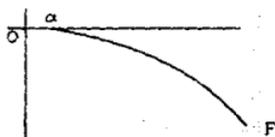


fig.(124)

Si  $f$  es como en el ejemplo (5), el intervalo que está más a la derecha determinará mayor área (también con signo negativo); lo cual quiere decir que la función  $F$ , conforme  $x$  se aleje de  $a$ , irá decreciendo más rápido, y su gráfica será como en la fig.(124)

Ejemplo (6) Si  $f$  crece de cualquiera de las dos maneras ilustradas en las figuras.(125) y (126),

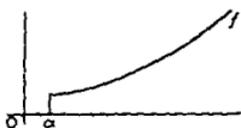


fig.(125)

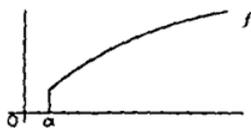


fig.(126)

$F$  crece como en la figura 127, de modo que ahí no se refleja la manera de crecer de  $f$ .

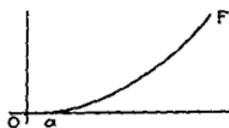
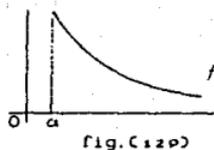
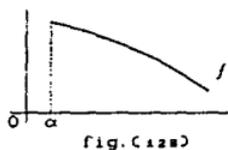
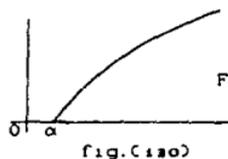


fig.(127)

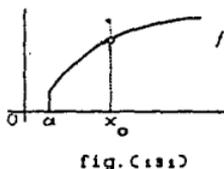
O bien, si  $f$  decrece de alguna de las dos maneras descritas por las figuras 128 o 129



estas formas en que  $f$  decrece, no se reflejan en la gráfica de  $F$ , pues en ambos casos su gráfica resultara como en la fig. (130)



Ejemplo (7) Si  $f$  es discontinua en un punto e integrable (fig. (131))



¿Cómo resulta ser  $F$ ?

Recordemos que un segmento de recta no aporta área; así que como la función  $f$  es discontinua sólo en  $x_0$ , el comportamiento de la correspondiente función  $F$  será exactamente igual al comportamiento de la función  $F_1$  que resultaría si  $f$  fuese continua en  $x_0$ . Y de acuerdo a los ejemplos anteriores, podemos conocer su comportamiento.

Si  $f$  tiene una discontinuidad esencial, como se ilustra en la fig. (132). ¿cómo es  $F$ ?

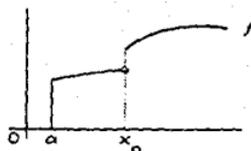


fig. (132)

Podemos conocer el comportamiento de  $F$  a la izquierda y a la derecha de  $x_0$ , retomando los ejemplos anteriores. El problema estaría en todo caso, en  $x_0$ . Si tomamos una vecindad con centro en  $x_0$ , el segmento de vecindad que está a la derecha de  $x_0$ , determina mayor área bajo la gráfica de la función  $f$  que el segmento a la izquierda.

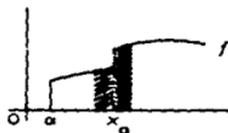


fig. (133)

También sucede que, en la medida en que el radio de la vecindad tienda a cero, ambas áreas, la del lado derecho y la del izquierdo, tienden a cero; de aquí que podamos concluir dos cosas: i) La función  $F$  es continua en  $x_0$ , e ii) en  $x_0$  hay un cambio brusco en la rapidez de crecimiento del área. Por lo tanto es de esperarse que la función  $F$  tenga un "pico" en  $x_0$ , de donde podemos concluir que  $F$  es como en la fig. (134).

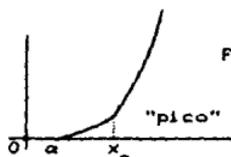


fig. (134)

En todos los ejemplos en que hemos analizado el comportamiento de la función  $F$ , podemos observar que, la variación del área bajo la gráfica de  $f$  siempre puede hacerse tan pequeña como queramos, con tan sólo hacer suficientemente pequeña la variación de  $x$ ; dicho de otra manera, si hacemos una variación muy pequeña de  $x$ , el área bajo la gráfica de  $f$  sufre también una pequeña variación; esto quiere decir, intuitivamente, que la función  $F$  es continua, independientemente de cómo sea la función  $f$ , basta con que esta última sea integrable.

Así si  $f$  fuese una función de la forma:

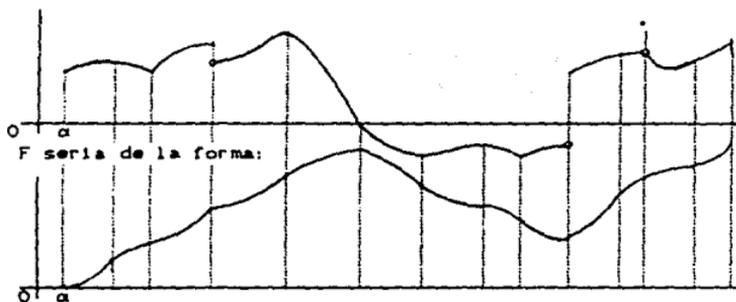


fig.(139)

Una observación más sobre la interpretación geométrica de  $F$ .  
 ¿Qué pasa si tomamos  $a_1$  y  $a_2$  distintos, para la misma función  $f$ ?  
 es decir ¿qué relación guardan

$$F_{a_1}(x) = \int_{a_1}^x f \quad \text{y} \quad F_{a_2}(x) = \int_{a_2}^x f ?$$



fig.(140)

$F_{\alpha_1}$  y  $F_{\alpha_2}$  son esencialmente iguales, sólo que una está trasladada respecto a la otra, es decir, difieren en una constante. ¿Cuál es esa constante?

De la fig.(136) se observa que la constante en la cual difieren las funciones  $F_{\alpha_1}$  y  $F_{\alpha_2}$  es precisamente el área que hay bajo de la función  $f$  entre  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ .

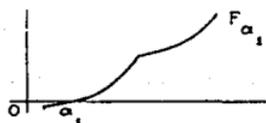


fig.(137)

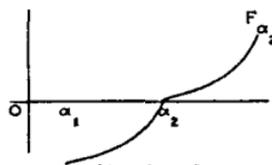


fig.(138)

La razón de crecimiento del área bajo  $f$ , en cada punto, es independiente de la elección de  $\alpha$ , por lo tanto el comportamiento de  $F$  es el mismo, excepto por la traslación.

Formalmente:

$$F_{\alpha_1}(x) = \int_{\alpha_1}^x f = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f + \int_{\alpha_2}^x f = C + F_{\alpha_2}(x)$$

De esta manera, no es determinante si se elige una u otra para definir  $F$ ; lo usual es tomar  $\alpha = a$ .

**Teorema (20)** Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrable, entonces la función  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(x) = \int_a^x f \text{ es continua en } [a, b].$$

**Demostración.**

Queremos demostrar que  $F$  es continua en  $x_0 \forall x_0 \in [a, b]$ ; es decir que

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0$  tal que,  $\forall x \in [a, b]$ , si  $|x - x_0| < \delta$ , entonces  $|F(x) - F(x_0)| < \epsilon$

Sea  $\epsilon > 0$ .

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_a^x f - \int_a^{x_0} f \right| = \left| \int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^x f - \int_a^{x_0} f \right| = \left| \int_{x_0}^x f \right|$$

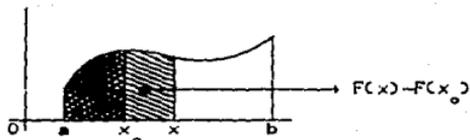


fig. (139)

Como estamos trabajando con la función  $f$  integrable, partimos de que la función es acotada, entonces  $|f|$  también lo es.

Es decir,  $\exists M > 0$  tal que  $|f| \leq M \quad \forall x \in [a, b]$

entonces  $\left| \int_{x_0}^x f \right| \leq \int_{x_0}^x |f| \leq \int_{x_0}^x M = M(x - x_0) \quad \text{si } x > x_0$

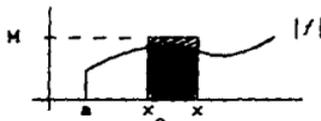


fig. (140)

El área del rectángulo, de base  $(x_0, x)$  y altura  $M$ , es mayor que el área bajo la gráfica de  $f$  desde  $x_0$  hasta  $x$ .

Si  $x < x_0$  sucede que,

$$\left| \int_x^{x_0} f \right| \leq \int_x^{x_0} |f| \leq \int_x^{x_0} M = M(x_0 - x)$$

Así que  $\left| \int_{x_0}^x f \right| = \left| \int_x^{x_0} f \right| \leq M|x - x_0|$

y entonces  $|F(x) - F(x_0)| \leq M|x - x_0|$

Si elegimos  $\delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{M} > 0$  entonces  $\forall x \in [a, b]$  si

$$|x - x_0| < \delta \quad \text{entonces} \quad |F(x) - F(x_0)| \leq M|x - x_0| < M \frac{\epsilon}{M} = \epsilon$$

De modo que  $|F(x) - F(x_0)| < \epsilon$  y por tanto

$F$  es continua en  $x_0$ .

Hemos demostrado que  $F$  siempre es continua con tan solo pedir que la función  $f$  sea integrable. Sin embargo, observemos que si  $f$  es integrable pero discontinua en algun punto  $x_0 \in [a, b]$ , por ejemplo con discontinuidad de brinco (figura 141)

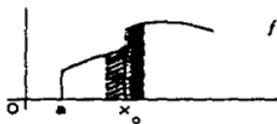


fig.(141)

La rapidez con la que crece el área bajo  $f$  sufre un cambio brusco en  $x_0$ ; esto quiere decir que, la derivada de  $F$  por la izquierda es distinta a la derivada de  $F$  por la derecha en  $x_0$ ; es decir,  $F$  no es derivable en  $x_0$  y por tanto su gráfica tiene un "pico" en  $x_0$ . fig.(142)



fig.(142)

Veamos ahora qué sucede si el tipo de discontinuidad de  $f$  es removible. (figura 143)

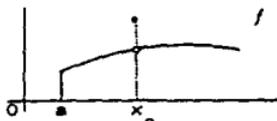


fig.(143)

La rapidez de crecimiento del área bajo la función  $f$  no se altera bruscamente en  $x_0$ , esto quiere decir que la derivada de  $F$  existe en  $x_0$ , (figura 144)

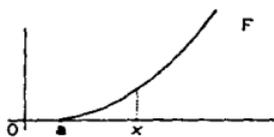


fig.(144)

Es de esperarse, entonces, que si  $f$  es continua en  $x_0$ ,  $F$  sea derivable en  $x_0$ ; es decir, si no hay cambios bruscos en la variación de la función  $f$  no habrá cambios bruscos en la rapidez de variación del área.

Veamos, entonces, qué relación guardan  $f$  y  $F$

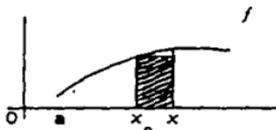


fig.(145)

Si  $x$  y  $x_0$  están en el dominio de  $f$ , y  $x_0 < x$ , la diferencia  $F(x) - F(x_0)$  será precisamente el área bajo la gráfica de  $f$ , entre  $x_0$  y  $x$ . (fig.(145)).

Si  $x$  y  $x_0$  están suficientemente cercanos, el área bajo la curva es casi igual al área del rectángulo cuya base mide  $(x - x_0)$  y altura  $f(x_0)$ ; esto es:

$$F(x) - F(x_0) \approx f(x_0)(x - x_0)$$

Así que 
$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \approx f(x_0) \dots\dots\dots (1)$$

Veamos ahora en la gráfica de  $F$ , (figura 148)

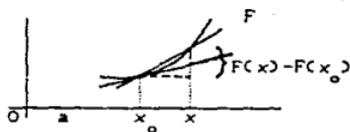


fig. (148)

La pendiente de la recta secante que pasa por  $(x_0, F(x_0))$  y  $(x, F(x))$  es casi igual a la pendiente de la recta tangente en  $(x_0, F(x_0))$ . Así  $x$  y  $x_0$  están suficientemente cerca.

Así que 
$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \approx F'(x_0) \dots \dots \dots (II)$$

Tanto en la relación (I) como en la (II) la igualdad se logra en el límite cuando  $x$  tiende a  $x_0$ , por lo tanto es de esperarse que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$

Por tanto 
$$F'(x_0) = f(x_0)$$

La rapidez con que la función  $F$  crece, vista en su propia gráfica, corresponde a la inclinación de la recta tangente; pero vista en la gráfica de  $f$ , corresponde a qué tan rápido se incrementa el área bajo  $f$ , y esto depende de los valores de  $f(x)$ .

Pues bien, éste es el 1er Teorema Fundamental del Cálculo

**Teorema (21) (1er. Teorema Fundamental del Cálculo)**

Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , integrable en  $(a, b)$  y continua en  $x_0$ , entonces la función  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

definida por  $F(x) = \int_a^x f$  es derivable en  $x_0$  y

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Antes de pasar a la demostración de este teorema es

conveniente hacer la siguiente observación: Hemos definido  $F(x)$  como  $\int_a^x f$ , la "x" indica el límite superior de integración. Y, por tanto, la variable de integración debe variar desde a hasta x. En consecuencia, necesitamos introducir otra literal para referirnos a ella, y un símbolo que nos indique que estamos integrando respecto a esa variable. Elegiremos t como la literal que representa la variable de integración, obteniendo

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

(En este caso dt es el símbolo que indica que estamos integrando respecto de t).

Demostración.

Sea  $x_0 \in (a, b)$ , consideremos primero el caso en que  $x \geq x_0$ ,  $x \in (a, b)$ .

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

sean:  $m_h(f) = \inf\{f(t); t \in [x_0, x] = [x_0, x_0 + h]\}$  y

$$M_h(f) = \sup\{f(t); t \in [x_0, x] = [x_0, x_0 + h]\}$$

entonces  $m_h(f)(x - x_0) \leq \int_{x_0}^x f(t) dt \leq M_h(f)(x - x_0)$



fig. (147)

$$y \quad m_h(f) \leq \frac{\int_{x_0}^x f}{x - x_0} \leq M_h(f)$$

como f es continua en  $x_0$  entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} M_h(f) = \lim_{x \rightarrow x_0} m_h(f) = f(x_0)$$

(Este resultado lo demostraremos en un siguiente lema).

Haciendo un análisis similar para el caso en que  $x < x_0$ , tenemos que

$$m_h(f) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq M_h(f)$$

por lo tanto, existe  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

de donde concluimos que  $f'(x_0) = f'(x_0)$

**Lema (19)** Sea  $f$  una función acotada en  $\mathcal{I}_\alpha(x_0)$ , sean

$$m_h(f) = \inf\{f(x); x \in [x_0 - h, x_0 + h]\} \text{ y}$$

$$M_h(f) = \sup\{f(x); x \in [x_0 - h, x_0 + h]\}, \text{ con } 0 < h < \alpha.$$

Si  $f$  es continua en  $x_0$ , entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} m_h(f) = \lim_{h \rightarrow 0} M_h(f) = f(x_0)$$

Demostraremos solamente que  $\lim_{h \rightarrow 0} m_h(f) = f(x_0)$ , ya que la

demostración de que  $\lim_{h \rightarrow 0} M_h(f) = f(x_0)$  es análoga

Supongamos que  $\lim_{h \rightarrow 0} m_h(f)$  no existe o  $\lim_{h \rightarrow 0} m_h(f) \neq f(x_0)$ ,

entonces en cualquiera de los dos casos podemos afirmar que:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \text{ tal que } \forall \delta > 0 \exists h_\delta < \delta \text{ tal que } m_{h_\delta}(f) \leq f(x_0) - \varepsilon_0.$$

(Pues de otra forma el  $\lim_{h \rightarrow 0} m_h(f)$  existiría y sería igual a  $f(x_0)$ )

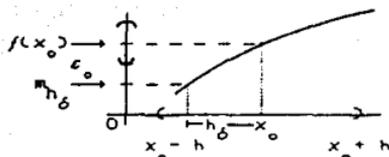


fig. (148)

Si  $\delta_1 = 1$  entonces  $\exists h_1 < \delta_1 = 1$  tal que  $m_{h_1}(f) \leq f(x_0) - \epsilon_0$   
 si  $\delta_2 = \frac{1}{2}$  "  $\exists h_2 < \delta_2 = \frac{1}{2}$  "  $m_{h_2}(f) \leq f(x_0) - \epsilon_0$   
 $\vdots$   
 y si  $\delta_n = \frac{1}{n}$  "  $\exists h_n < \delta_n = \frac{1}{n}$  "  $m_{h_n}(f) \leq f(x_0) - \epsilon_0$

mas como:  $m_{h_n}(f) = \inf\{f(x); x \in [x_0 - h_n, x_0 + h_n]\} \forall n \in \mathbb{N}$

entonces para  $\frac{\epsilon_0}{2} \exists x_n \in [x_0 - h_n, x_0 + h_n]$  tal que

$$m_{h_n}(f) \leq f(x_n) < m_{h_n}(f) + \frac{\epsilon_0}{2}$$

Como  $h_n < \delta_n = \frac{1}{n}$ , entonces  $\langle h_n \rangle_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$  y

entonces  $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow x_0$

de donde  $f(x_n) < m_{h_n}(f) + \frac{\epsilon_0}{2} \leq f(x_0) - \epsilon_0 + \frac{\epsilon_0}{2} = f(x_0) - \frac{\epsilon_0}{2}$  y

esto implica que  $\langle f(x_n) \rangle \rightarrow f(x_0)$  pues  $f$  es continua en  $x_0$ .

Una vez demostrado este lema, queda completamente demostrado el primer Teorema Fundamental del Cálculo. Ahora podemos establecer el siguiente corolario del teorema.

Corolario (4) Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , continua en  $[a, b]$ .

Entonces  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ es derivable en } [a, b] \text{ y}$$

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

El siguiente ejemplo, muestra que la continuidad de la función  $f$  es una condición SUFICIENTE, pero no necesaria para garantizar la derivabilidad de la función  $F$  en  $x_0$ . (Cosa que ya discutimos ampliamente).

Ejemplo (8)

Sea  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

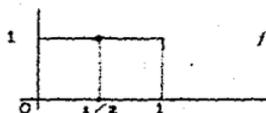


fig. (149)

En tal caso

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = x \quad \forall x \in (0,1), \text{ fig. (150) así que}$$

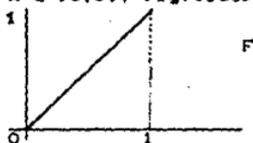


fig. (150)

$F$  es derivable  $\forall x \in (0,1)$ .

Sin embargo, no se cumple la segunda conclusión del T.F.C.-1a. parte, pues como  $F'(x) = 1 \quad \forall x \in (0,1)$ , esto implica en particular que:  $F'(1/2) = 1$ , mientras que  $f(1/2) = 0$ .

$$\text{Por tanto} \quad F'(1/2) \neq f(1/2)$$

Así pues, el 1er. Teorema Fundamental del Cálculo establece que, si tomamos una función continua y la integramos, al derivar la función resultante regresamos a la función original. ¿Ocurrirá lo mismo si primero derivamos una función y luego la integramos?, ¿volvemos a la función original también?, veamos.

Sea  $g$  una función derivable. fig.(152)

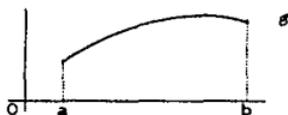


fig.(151)

la derivada de  $g$  será de la forma siguiente.

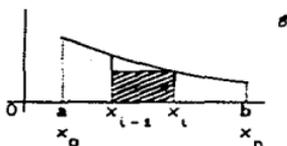


fig.(152)

Tomemos una partición de  $(a,b)$ , si  $g'$  es integrable (por ejemplo, si es continua) tenemos que. (fig.(152)).

$$\int_a^b g' \approx \sum_{i=1}^n g'(x_i) (x_i - x_{i-1})$$

donde la igualdad se cumple en el límite.

Pero, ¿qué refleja esta sumatoria en la gráfica de la función  $g$  original?

$g'(x_i)$  es la pendiente de la recta tangente en  $x_i$ . Si  $g'$  es una función continua, y el intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  es pequeño, esta pendiente será muy parecida a la pendiente de la secante a la gráfica en los puntos  $(x_{i-1}, g(x_{i-1}))$ ,  $(x_i, g(x_i))$ . (fig.(154)).

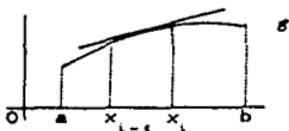


fig.(153)

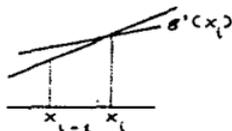


fig.(154)

de ahí que

$$g'(x_i) \approx \frac{g(x_i) - g(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

por lo tanto  $g'(x_i)(x_i - x_{i-1}) \approx g(x_i) - g(x_{i-1})$

$$\therefore \sum_{i=1}^n g'(x_i)(x_i - x_{i-1}) \approx \sum_{i=1}^n (g(x_i) - g(x_{i-1}))$$



fig. (135)

$$\therefore \int_a^b g' \approx g(b) - g(a)$$

(Usualmente se denota  $g(b) - g(a) = g(x) \Big|_a^b$ )

Más adelante, demostraremos que se cumple la igualdad en la relación anterior.

Si ahora, en lugar de tomar  $b$  tomamos cualquier punto  $x \in [a, b]$ , tendríamos que

$$\int_a^x g' = g(x) - g(a)$$

$$\text{i. e. } g(x) = \int_a^x g' + g(a).$$

Es decir que, efectivamente, si tenemos una función (derivable y cuya derivada sea continua) y la derivamos, si luego la integramos otra vez regresamos a la función original esencialmente (sumándole una constante, si  $g(a)$  vale cero, se obtiene la igualdad sin sumar nada).

Pues bien; esta es la idea del segundo Teorema Fundamental del Cálculo.

Si revisamos con cuidado lo que acabamos de hacer, nos daremos

cuenta que si la función  $g'$  es continua, entonces este resultado se convierte en un corolario de la 1a. parte del Teorema Fundamental del Cálculo. El cual enunciaremos de la siguiente manera.

**Corolario (5)** Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $[a, b]$ ,  
 si  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es cualquier función derivable, tal que  $g'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$   
 entonces  $\int_a^b f = g(b) - g(a)$ .

**Demostración.**

Usando la 1a. parte del Teorema Fundamental del Cálculo (1a. T.F.C.), tenemos que  $F'(x) = f(x)$ , y por hipótesis  $g'(x) = f(x)$ , entonces  $F'(x) = g'(x) \quad \forall x \in [a, b]$ .

Sabemos que, si dos funciones tienen igual su derivada entonces dichas funciones difieren por una constante, de ahí que,

$$F(x) = g(x) + C, \quad C \text{ constante}$$

si evaluamos  $F$  en  $a$ ;

por un lado

$$F(a) = \int_a^a f = 0$$

y por otro

$$F(a) = g(a) + C$$

por tanto

$$C = -g(a)$$

así

$$F(x) = g(x) - g(a)$$

Si evaluamos ahora la función  $F$  en  $b$  obtenemos

$$F(b) = \int_a^b f = g(b) - g(a)$$

Por tanto

$$\int_a^b f = g(b) - g(a).$$

$$F(b) = \int_a^b f = g(b) - g(a)$$

$$\therefore \int_a^b f = g(b) - g(a).$$

Regresemos a la idea que hemos desarrollado para establecer el segundo Teorema Fundamental del Cálculo (2do. T.F.C.).

Hemos pedido que la función  $g'$  sea continua, sin embargo, el resultado anterior se cumple con tan solo pedir que  $g'$  sea integrable, cuestión que se puede mostrar con el siguiente razonamiento.

Si en lugar de seguir el razonamiento anterior, hacemos uso del Teorema del Valor Medio para la Derivada (T.V.M.-D.) en el intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ ; en la gráfica de  $g$  veríamos lo siguiente. (fig.(156)).

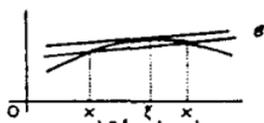


fig.(156)

y según este teorema (T.V.M.-D)

$$g'(\xi_i) = \frac{g(x_i) - g(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

de donde  $g'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = g(x_i) - g(x_{i-1})$ .

Por otro lado, en la gráfica de  $g'$  veríamos lo siguiente (fig.(157)).

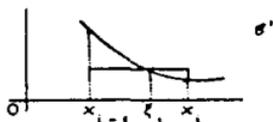


fig.(157)

de donde

$$\int_a^b g' \approx \sum_{i=1}^n g'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

y según la igualdad anterior

$$\int_a^b g' \approx \sum_{i=1}^n (g(x_i) - g(x_{i-1})) = g(b) - g(a)$$

$$\therefore \int_a^b g' \approx g(b) - g(a)$$

Así, llegamos al mismo resultado que en el caso anterior; sólo que aquí requerimos de que  $g'$  sea integrable, además de las hipótesis del (T.V.M.-D.), para lo cual se necesita que  $g$  sea derivable en el intervalo  $(x_{i-1}, x_i)$  y continua en  $[x_{i-1}, x_i]$ . Tomando en cuenta estas hipótesis el 2do. T.F.C. quedaría enunciado de la siguiente manera.

*Teorema (22)* (2do. Teorema Fundamental del Cálculo).

Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrable en  $[a, b]$

sea  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivable en  $[a, b]$ , una función tal que

$$g'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

entonces

$$\int_a^b f = g(x) \Big|_a^b = g(b) - g(a).$$

*Demostración.*

Sea  $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$   $P \in P_{[a, b]}$

en cada intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  aplicamos el (T.V.M.-D.), entonces

$\exists \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$  tal que

$$g'(\xi_i) = \frac{g(x_i) - g(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

de donde  $g'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = g(x_i) - g(x_{i-1}) \dots \dots \dots (I)$

Por otro lado si  $f$  es integrable en  $[a, b]$  entonces

$$\int_a^b f = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Para cualquier familia de valores intermedios; elegimos  $\xi_i$  para la cual  $g$  satisface el T.V.M.-D., entonces

$$\int_a^b g' = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Usando la relación (I) tenemos que

$$\begin{aligned} \int_a^b g' &= \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (g(x_i) - g(x_{i-1})) \\ &= \lim_{|P| \rightarrow 0} (g(b) - g(a)) = g(b) - g(a) \end{aligned}$$

$$\therefore \int_a^b f = g(x) \Big|_a^b = g(b) - g(a)$$

En las hipótesis del 2do. T.F.C., ¿por que pedir que  $f$  sea integrable?, si  $g$  es derivable en  $(a,b)$ , ¿no es  $g'$  integrable en  $(a,b)$  automáticamente?

La respuesta es no, pues ni siquiera tiene por que ser acotada, por ejemplo.

Ejemplo (9)

Sea  $g: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x^2); & x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

$g$  es derivable en 0 y  $g'(0) = 0$ .

En efecto

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \operatorname{sen}(1/h^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \operatorname{sen}(1/h^2) = 0$$

la tangente a la gráfica de  $g$  en  $(0,0)$  es, por tanto el eje horizontal.

$$g'(x) = \begin{cases} x^2(-2/x^3) \cos(1/x^2) + 2x \operatorname{sen}(1/x^2); & x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

$$g'(x) = \begin{cases} (-2/x) \cos(1/x^2) + 2x \sin(1/x^2) & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

∴  $g'(x)$  no es acotada en  $[-1, 1]$ .

La función  $1/x^2$  por ser el argumento de la función seno, hace que las oscilaciones se hagan con mayor frecuencia cerca de cero, de hecho dada cualquier vecindad con centro en el origen, hay una infinidad de oscilaciones de la función  $\sin(1/x^2)$ ; por otro lado la variable  $x^2$  hace que la altura de dichas oscilaciones sea cada vez más pequeña, aunque las pendientes de las rectas tangentes, cerca de cero varían mucho, tanto que entre más cerca del cero tomemos a  $x$ , la variación de las pendientes es mayor, esto hace que en muchos puntos de la gráfica, la recta tangente se parezca cada vez más al eje  $y$ , lo cual provoca que la función derivada tenga una discontinuidad infinita en cero. (fig. (158)).

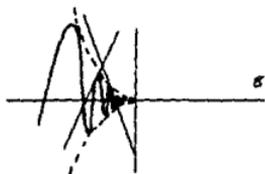


fig. (158)

Analicemos este ejemplo, de manera general.

$$g(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(1/x^\beta) & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

¿Para qué valores de  $\alpha$  y  $\beta$  la derivada de la función  $g$  tiene una discontinuidad en 0?

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^\alpha \sin(1/h^\beta)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{\alpha-1} \sin(1/h^\beta)$$

este límite existe y es cero cuando  $\alpha > 1$  y  $\beta \in \mathbb{R}$ , o es  $\sin(1)$  cuando  $\alpha = 1$  y  $\beta = 0$ .

Si  $x \neq 0$

$$\begin{aligned}g'(x) &= x^\alpha \cos(1/x^\beta) (-\beta x^{-\beta-1}) + \alpha x^{\alpha-1} \operatorname{sen}(1/x^\beta) \\ &= -\beta x^{\alpha-\beta-1} \cos(1/x^\beta) + \alpha x^{\alpha-1} \operatorname{sen}(1/x^\beta) \\ &= -\beta x^{\alpha-\beta-1} \cos(1/x^\beta) + \alpha x^{\alpha-1} \operatorname{sen}(1/x^\beta)\end{aligned}$$

Por tanto, el límite cuando  $x \rightarrow 0$  de  $g'$  existe si

$$\alpha > 1 \quad \text{y} \quad \beta < \alpha - 1$$

Esto quiere decir que la función  $x^\alpha$  con  $\alpha > 1$  "aplasta" a la función  $\operatorname{sen}(1/x^\beta)$ , antes que esta oscile muy rápido.

En el caso anterior cuando  $\alpha = 2$  y  $\beta = 2$  "ganan" las oscilaciones de la función  $\operatorname{sen}(1/x^2)$ , al factor  $x^2$ .

Por tanto  $g'$  es continua si  $\alpha > 1$  y  $\beta < \alpha - 1$

y  $g'$  es discontinua si  $\beta \geq \alpha - 1$ .

Si revisamos con cuidado la propia demostración que hicimos del 2do. T.F.C., podemos observar que, tan sólo requerimos que la función  $g$  fuese tal que  $g' = f$  en el intervalo abierto  $(a, b)$ ; pues lo que hacemos es aplicar el T.V.M.-D. en los intervalos  $[x_{i-1}, x_i]$  de la partición, siendo variables todos los puntos  $x_i$  (al variar la partición) excepto  $x_0 = a$  y  $x_n = b$ , y para aplicar el T.V.M.-D. tan sólo requerimos que  $f$  sea derivable en el intervalo abierto  $(x_{i-1}, x_i)$  y continua en el intervalo cerrado  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n$ .

Es decir globalmente, bastaría con que  $g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  fuera continua en el intervalo  $(a, b)$  y derivable en  $(a, b)$ , requiriendo entonces sólo que  $f = g'$  en  $(a, b)$ .

Sin embargo no enunciamos con estas hipótesis el teorema, con el fin de resaltar la fuerza que éste tiene, y no desviar la atención en estos aspectos, que son secundarios en relación al aspecto central.

Observaciones al Teorema Fundamental del Cálculo.

Globalmente podemos resumir lo analizado hasta ahora de la

siguiente manera.

El 1er. T.F.C. establece que; si tenemos una función continua y la integramos, al derivar la función resultante regresamos a la función original.

El 2do. T.F.C. establece lo contrario, es decir, si primero derivamos una función y luego la integramos volvemos (excepto por una constante) a la función original también.

-Siempre que 2 funciones  $f$  y  $g: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  estén relacionadas entre sí a través de  $g'(x) = f(x) \quad \forall x \in D$ , se dice que  $g$  es una antiderivada o primitiva de la función  $f$  en  $D$ .

-De hecho, lo que establecen los teoremas, es la relación que existe entre las primitivas de una función y la integral con límite de integración variable.

-El primer T.F.C. plantea que si  $f$  es continua en  $[a, b]$  la(s) integral(es) (para cada  $a$ ) con límite de integración variable, es una primitiva de  $f$ .

-El segundo T.F.C. plantea que si  $F$  es continua, derivable y  $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$  entonces

$$\int_a^b f = F(x) \Big|_a^b$$

es decir que bajo estas hipótesis, la primitiva coincide con la integral, con límite de integración variable.

Ahora bien:

-No siempre la integral con límite de integración variable de una función integrable cualquiera es la antiderivada de esa función,  $(F(x) = \int_a^x f)$  puede no ser siquiera derivable, por ejemplo.

Ejemplo (10).

$$\text{Sea } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{para } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

fig.(fig.(159))

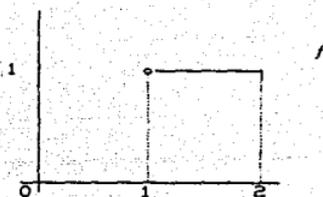


fig.(159)

$f$  es integrable y

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq x < 1 \\ x - 1 & \text{para } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

(fig.(160))

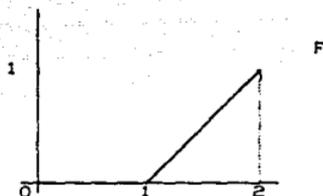


fig.(160)

$F(x)$  es continua en  $[0, 2]$

$F(x)$  no es derivable en  $[0, 2]$ .  $F'(1)$  no existe.

-Incluso la integral con limite de integración variable puede existir y ser derivable y su derivada no coincidir con la función original, por ejemplo.

Ejemplo (ff)

Sea  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \neq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{para } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

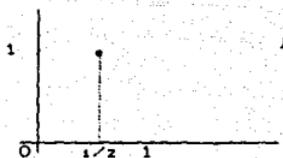


fig. (101)

$f$  es integrable y

$$F(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

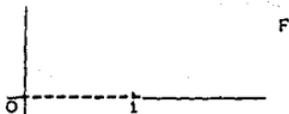


fig. (102)

$F(x)$  es continua en  $[0, 1]$

$F(x)$  es derivable en  $[0, 1]$  y

$$F'(x) \neq f(x), \text{ ya que } F'(1/2) \neq f(1/2)$$

Al revés,  $F$  puede ser la antiderivada de  $f$  sin coincidir con la integral con límite de integración variable, pues esta puede ni siquiera ser acotada, por ejemplo.

Ejemplo (12)

Sea  $F: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/\sqrt{x^2}); & x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

$F'(x)$  existe pero no es acotada en  $[-1, 1]$ . Este ejemplo también ya lo analizamos anteriormente

-De este ejemplo, concluimos que hay funciones que no son continuas en  $(a, b)$  y sin embargo sí tienen antiderivada.

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/\sqrt{x^2}); & x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

$$F'(x) = \begin{cases} (-2/x) \cos(1/x^2) + 2x \operatorname{sen}(1/x^2) & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

$F'(x)$  es discontinua en 0 y  $F(x)$  es antiderivada de  $F'(x)$ .

-Por último:

Ejemplo (13)

Sean  $f, F: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  definidas como

$$f(x) = 1 \quad \text{y} \quad F(x) = \begin{cases} x & \text{para } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{para } x = 1 \end{cases}$$

Figuras (183) y (184) respectivamente.

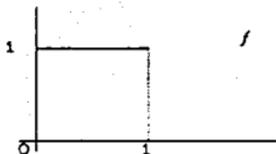


fig. (183)

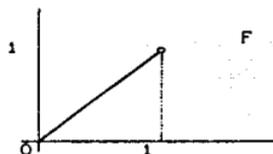


fig. (184)

$F'(x) = 1$  para  $x \in (0,1)$ ,

$F'(1)$  no existe.

$\therefore \int_a^b f$  no la podemos calcular como:

$F(b) - F(a)$ , pues esto sería  $F(1) = 0$ ,  $F(0) = 0$

$\therefore F(1) - F(0) = 0$ .

4.2

### Teorema de Cambio de Variable

Para  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Hay ocasiones en que resulta muy complicado integrar una función  $f(x)$ , y que haciendo un cambio de variable  $x = g(\theta)$  se simplifica notablemente el problema.

Por ejemplo.

Sea  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2},$$

para calcular  $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$

podemos hacer el siguiente cambio de variable

$$x = \text{sen } \theta$$

entonces

$$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta} = |\cos \theta|$$

e integrar la función *coseno* resulta más sencillo que integrar la función  $f$ , definida arriba..

El problema es que al hacer este cambio de variable, ya no es la misma función la que estaríamos integrando, (figuras 165 y 166)

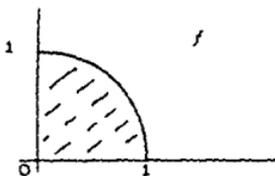


fig.(165)

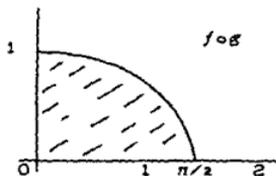


fig.(166)

Resulta que al hacer esa sustitución se simplifica el integrando, pero obtendríamos algo distinto al área original buscada.

El problema que planteamos es entonces el siguiente. Al hacer el cambio de variable, ¿cómo habrá que modificar el integrando y el intervalo de integración para que resulte el mismo valor en ambas integrales. (en la original y en la transformada)?.

El Teorema de Cambio de Variable proporciona la solución a este problema. Su demostración es inmediata a partir del T.F.C., por lo cual puede considerarse como un corolario de éste.

Sin embargo antes de enunciar el Teorema de Cambio de Variable, nos proponemos hacer un análisis geométrico, con el fin de ilustrar lo que ocurre al modificar el integrando y el

intervalo de integración. Preferimos hacerlo de esta manera ya que esto sentará las bases para entender posteriormente la generalización de este teorema a funciones de varias variables.

Sean:  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: [a, \beta] \rightarrow [a, b]$

al variar  $\theta$  de  $a$  a  $\beta$ ;  $x = g(\theta)$  varía de  $a$  a  $b$ , como se ilustra en las siguientes figuras. (167) y (168)

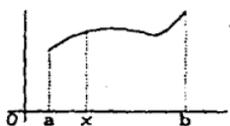


fig. (167)

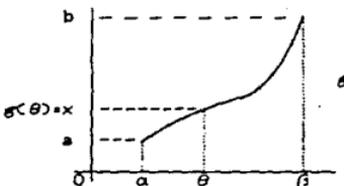


fig. (168)

También  $g$  puede ser como en las figuras (169) Y (170)

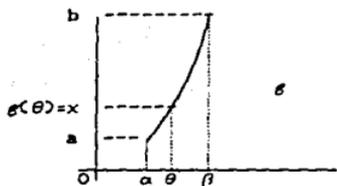


fig. (169)

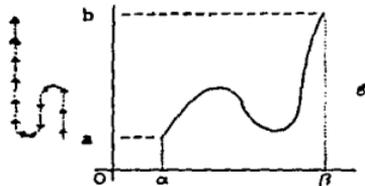


fig. (170)

Pero ¿quién es la nueva función cuya área entre  $a$  y  $\beta$  es igual al área de la función  $f$  entre  $a$  y  $b$ ?

$$\int_a^b f(x) dx = \int ?$$

¿Cómo obtener  $a$  y  $\beta$ ?

¿Qué condiciones deberán cumplir?.

Lo primero que debemos observar es que al hacer la transformación  $g: [a, \beta] \rightarrow [a, b]$ , el área que "barre" la función composición  $f \circ g$  sobre el intervalo  $[a, \beta]$  es distinta al área que barre la función  $f$  sobre el intervalo  $[a, b]$ .

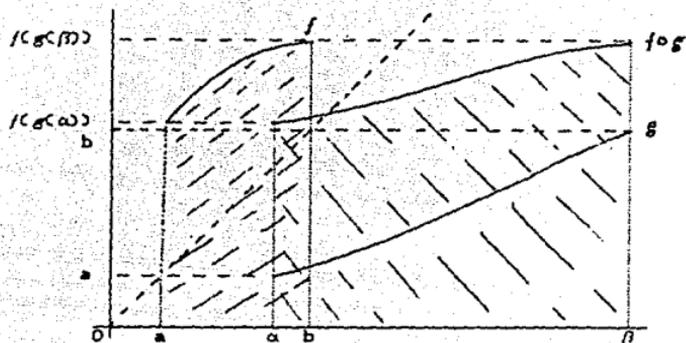


fig.(171)

Si comparamos el área bajo  $f$  en  $(\alpha, b)$ , con el área bajo  $f \circ g$  en  $(a, \beta)$ , en este caso, es inmediato que la segunda función abarca más área. (fig.(172)).

Nuestro propósito, entonces, es ver que relación existe entre la integral de  $f$  en el rango de  $g$  y la integral de la composición en el dominio de  $g$ .

Sean:  $g: [a, \beta] \longrightarrow [a, b]$

$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  y

$f \circ g: [a, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ .

Supongamos que  $g$  es inyectiva

sea  $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  una partición en el rango de  $g$  ( $\mathbb{R}_g$ ), es decir en  $[a, b]$ .

La partición  $P$ , induce una partición  $P'$  en  $(a, \beta)$ ,

sea  $P' = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ .

Sea  $\langle \xi_k \rangle$  una familia de valores intermedios,  $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k]$   
 $k=1, 2, \dots, n$ .

Para  $\xi_k$  existe  $\eta_k \in (t_{k-1}, t_k]$  tal que  $\xi_k = g(\eta_k)$ . Siempre y

cuando  $g$  sea continua e inyectiva. (fig.(172)).

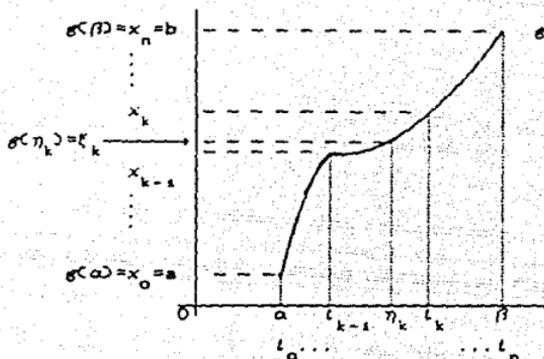


fig. (172)

Nos fijamos ahora en la función  $f$ . (fig. (173)).

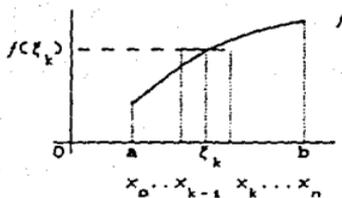


fig. (173)

$$f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = f(g(\eta_k))(x_k - x_{k-1}), \quad y$$

$$x_k - x_{k-1} = g(t_k) - g(t_{k-1})$$

$$\text{pero } g(t_k) - g(t_{k-1}) \approx g'(\eta_k)(t_k - t_{k-1})$$

Si  $\eta_k$  coincide con el valor para el cual  $g$  satisface el T.V.M.-D en el intervalo  $[x_{k-1}, x_k]$ , entonces, en la relación anterior se cumple la igualdad, sea  $\tau_k$  dicho valor, entonces

$$g'(\tau_k)(t_k - t_{k-1}) = g(t_k) - g(t_{k-1})$$

(Si la función  $g'$  fuese continua, entonces para intervalos suficientemente pequeños  $g'(\tau_k) \approx g'(\eta_k)$ ).

Como  $\tau_k$  es un valor para el cual se cumple la igualdad anterior, tenemos que

$$f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = f(g(\tau_k)) g'(\tau_k)(t_k - t_{k-1})$$

$$\text{por tanto } \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(g(\tau_k)) g'(\tau_k)(t_k - t_{k-1})$$

Si  $f$  y  $g$  son como en la fig.(174)

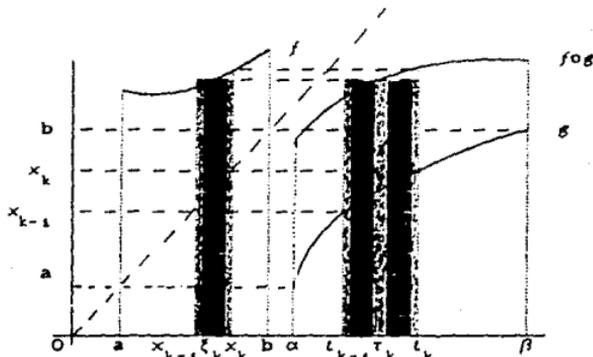


fig.(174)

Por el comportamiento de  $g$ ; para los elementos de la partición de  $[a, b]$  que se encuentran cerca de  $a$ , los correspondientes valores en la partición de  $[a, \beta]$  estarán relativamente cercanos entre si, y para los puntos de la partición de  $[a, \beta]$  que se encuentran cerca de  $b$ , los correspondientes valores de la partición de  $[a, b]$  estarán alejados entre si. Esto quiere decir que el intervalo  $[x_{k-1}, x_k]$  y el correspondiente  $[t_{k-1}, t_k]$  no tienen por que ser de la misma longitud.

El rectángulo cuya base es  $[x_{k-1}, x_k]$  y altura  $f(\xi_k)$  y el rectángulo de base  $[t_{k-1}, t_k]$  y altura  $(f \circ g)(\tau_k)$ , pueden ser de distinta área, sus alturas son iguales, y las bases según lo anterior, pueden ser distintas.

Esto sucede en cada uno de los rectángulos generados por la partición de  $[a, b]$ , y en los correspondientes de  $[a, \beta]$ .

Como, la altura de los rectángulos correspondientes es la misma, la razón que hay entre sus áreas, la podemos obtener a través del cociente de sus bases, es decir,

$$\frac{x_k - x_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} = \frac{g(t_k) - g(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} = g'(t_k)$$

por tanto, si multiplicamos  $g'(t_k)$  por el área del rectángulo que se encuentra bajo la gráfica de la función  $f \circ g$ , obtenemos el área del rectángulo que se encuentra bajo la gráfica de  $f$ . Y si esto lo hacemos en todos los rectángulos obtenemos

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(g(t_k)) g'(t_k)(t_k - t_{k-1}) \dots (I)$$

si  $f$  es continua en  $[g(\alpha), g(\beta)]$  entonces

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ g) g'$$

Si ahora  $g$  no es inyectiva y  $g: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ , como en la (fig. (175)).

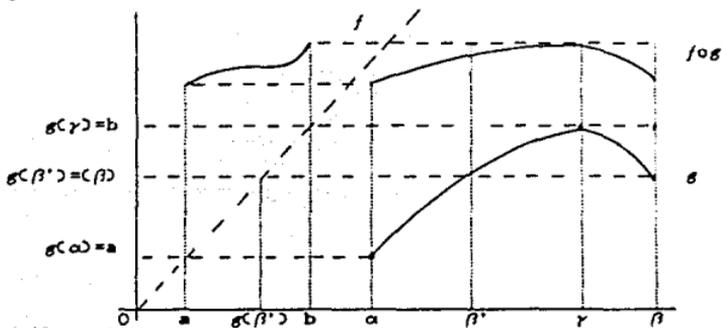


fig. (175)

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta')} f = \int_{\alpha}^{\beta'} (f \circ g) g'$$

si la última integral fuese igual a  $\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ g) g'$ , la fórmula anterior también aquí se cumpliría.

Si retomamos la discusión que hemos desarrollado para ilustrar la relación (I) tenemos que

$$\int_{\beta'}^{\gamma} (f \circ g) g' = \int_{g(\beta')}^{g(\gamma)} f$$

(fig. (17b)) y

$$\int_{\gamma}^{\beta} (f \circ g) g' = \int_{g(\gamma)}^{g(\beta')} f$$

por tanto

$$\int_{\beta'}^{\beta} (f \circ g) g' = \int_{g(\beta')}^{g(\gamma)} f + \int_{g(\gamma)}^{g(\beta')} f = 0$$

En este caso, al tomar un subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  en  $[g(\beta'), b]$ , este genera dos intervalos en  $[\beta', \beta]$ , uno a la izquierda y otro a la derecha de  $\gamma$ . (fig. (17c))

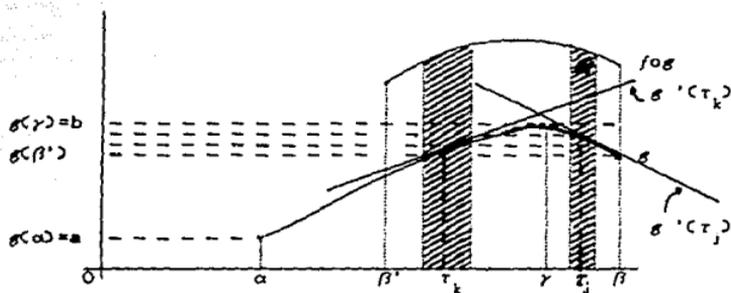


fig. (17c)

Por el comportamiento de  $g$ ; el intervalo que se encuentra a la izquierda de  $\gamma$  tiene mayor longitud que el intervalo localizado al lado derecho de  $\gamma$ . Pero,  $g'$  evaluada en el punto (intervalo del lado izquierdo de  $\gamma$ ) para el cual se cumple el T.V.M.-D. es pequeña, con signo positivo. Y  $g'$  evaluada en el punto (intervalo del lado derecho de  $\gamma$ ) para el cual se cumple el T.V.M.-D. resulta ser un valor pequeño, menor que cero.

De esta manera, las áreas de los rectángulos, (bajo la gráfica de la composición) multiplicadas por sus respectivos valores, difieren sólo en el signo.

Por tanto

$$\int_a^{\beta'} (f \circ g) g' = \int_a^{\beta} (f \circ g) g'$$

Por tanto 
$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ g) g'$$

Este resultado cuya idea es de hecho independiente del T.F.C., es llamado, Teorema de Cambio de Variable, y como mencionamos al principio de esta sección, su demostración es inmediata a partir del T.F.C., por tanto se puede considerar como un corolario de éste.

Corolario (6) (Teorema de Cambio de Variable).

Sea  $g: [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $g'$  continua en  $[\alpha, \beta]$ .

Sea  $f: R_g \longrightarrow \mathbb{R}$ , continua en el  $R_g$  (rango de  $g$ ) entonces

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ g) g'$$

Demostración.

Como  $g$  es continua en  $[\alpha, \beta]$ , entonces alcanza su valor máximo y su valor mínimo, si estos son iguales, entonces el rango de  $g$  es un punto, y por tanto  $g$  es constante.

Si son distintos; según el Teorema del Valor Intermedio, cualquier valor entre el mínimo y el máximo de la función, resulta ser imagen de algún elemento del dominio, bajo ésta.

Si  $g$  es constante  $g(\alpha) = g(\beta)$

entonces 
$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f = 0 \quad \text{y también} \quad g'(x) = 0 \quad \forall x \in [\alpha, \beta].$$

por tanto 
$$\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ g) g' = 0$$

por tanto se cumple la igualdad.

Si el  $R_g$  es un intervalo

Sean  $F: R_g \longrightarrow \mathbb{R}$  tal que  $F(x) = \int_{g(\alpha)}^x f$

y  $H: [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$  donde  $H(t) = F(g(t))$

entonces  $H'(t) = F'(g(t)) g'(t)$

Por el T.F.C.  $F' = f$

de ahí que  $H'(t) = f(g(t)) g'(t)$

$f$ ,  $g$  y  $g'$  son continua, entonces  $(f \circ g) g'$  es continua y por tanto integrable en  $(\alpha, \beta)$ .

Por el T.F.C.

$$\int_{\alpha}^{\beta} H'(t) dt = H(\beta) - H(\alpha) = F(g(\beta)) - F(g(\alpha))$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} H'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) g'(t) dt$$

$$F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f - \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f$$

$$\text{por tanto } \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ g) g'$$

Ovservaciones

1)  $F(x) = \int_{g(\alpha)}^x f$  está definida, no importando si  $x$  está a la izquierda o a la derecha de  $g(\alpha)$ . Por tanto el resultado es igualmente valido si  $g(\beta) > g(\alpha)$  o  $g(\beta) < g(\alpha)$ .

2) El resultado no dependio de que  $R_g = [g(\alpha), g(\beta)]$  o  $R_g = [g(\beta), g(\alpha)]$ , no siempre ocurre esto, pero si que  $[g(\alpha), g(\beta)] \subseteq R_g$  o bien  $[g(\beta), g(\alpha)] \subseteq R_g$ .

Ejemplo (14)

Sea  $f: (0,1) \rightarrow (0,1)$ , (fig.(177))

donde  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

$$\int_0^1 f = ?$$

Sea  $x = g(t) = \text{sen } t$ , (fig.(178))

sustituimos en la integral, y obtenemos

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int_\alpha^\beta |\cos t| \cos t dt$$

$$g(\alpha) = 0$$

$$g(\beta) = 1$$

entonces

$$\sin \alpha = 0$$

$$\sin \beta = 1$$

esto se cumple, en particular si  $\alpha = 0$  y  $\beta = \pi/2$

En este caso  $g: [0, \pi/2] \rightarrow [0, 1] = [g(\alpha), g(\beta)]$

como,  $\cos t \geq 0 \quad \forall t \in [0, \pi/2]$ , entonces

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos 2t dt \\ &= \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t \Big|_0^{\pi/2} = \pi/4. \end{aligned}$$

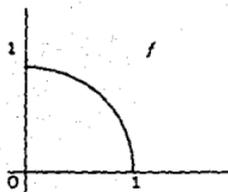


fig. (177)

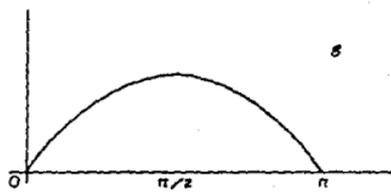


fig. (178)

También  $\sin \alpha = 0$  y  $\sin \beta = 1$

se cumple para  $\alpha = 0$  y  $\beta = 3/2 \pi$ . (fig. (179))

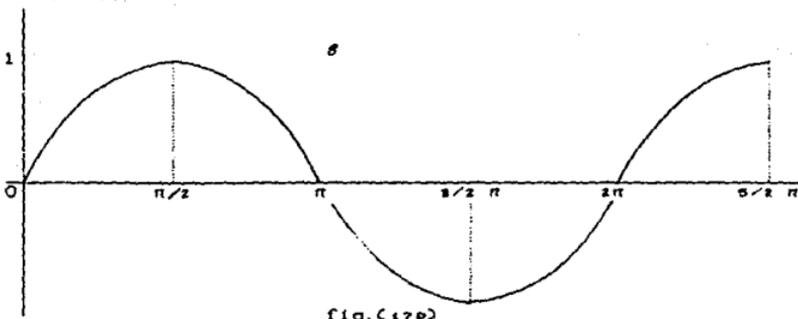


fig. (179)

En este caso  $g: [0, 3/2 \pi] \rightarrow [-1, 1]$ , en este caso

$[g(a), g(3/2 \pi)] \subseteq [-1, 1]$

$\cos t \geq 0$  si  $t \in [0, \pi/2] \cup [3/2 \pi, 3/2 \pi]$  y

$\cos t < 0$  si  $t \in [\pi/2, 3/2 \pi]$

entonces

$$\begin{aligned} \int_0^{3/2 \pi} |\cos t| \cos t \, dt &= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt - \int_{\pi/2}^{3/2 \pi} \cos^2 t \, dt + \int_{3/2 \pi}^{3/2 \pi} \cos^2 t \, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \pi/4 \end{aligned}$$

Por tanto  $\int_0^{3/2 \pi} |\cos t| \cos t \, dt = \pi/4$

por tanto  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \int_0^{\pi} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t \, dt = \pi/4$

y  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \int_0^{3/2 \pi} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t \, dt = \pi/4$

**Corolario (7)** Sean  $f$  y  $g$  derivables en  $[a, b]$ , si  $f'$  y  $g'$  son integrables en  $[a, b]$ , entonces

$$\int_a^b f g' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f' g.$$

tambi3n se puede escribir como

$$\int_a^b f g' = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f' g$$

**Demostraci3n.**

Como  $f$  y  $g$  son derivables en  $[a, b]$ , entonces  $f$  y  $g$  son continuas en  $[a, b]$ , por tanto,  $f$  y  $g$  son integrables en  $[a, b]$ ; adem3s  $f'$  y  $g'$  son integrables en  $[a, b]$ , entonces  $f g'$ ,  $f g$  y  $f' g$  son integrables en  $[a, b]$  y

$$\begin{aligned} (f g)' &= f' g + f g' \\ \int_a^b (f g)' &= \int_a^b f' g + \int_a^b f g' \end{aligned}$$

### 4.3 Integral impropia

En la construcción de la integral que hemos desarrollado; como indicamos en el capítulo II, nos hemos restringido a funciones acotadas, definidas en intervalos acotados. En este capítulo veremos que el concepto de integral se puede generalizar a funciones definidas en intervalos no acotados, y a funciones no acotadas.

Para el propósito del estudio de integrales en intervalos no acotados, recordemos el concepto de límite de una función en el infinito.

**Definición (14)** Sea  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  se aproxima al límite  $L$  cuando  $x$  tiende a  $\infty$  (o  $x$  tiende a  $-\infty$ ) esto es,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \quad (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L)$$

si y sólo si  $\forall \varepsilon > 0 \exists A(\varepsilon) > 0$  tal que  
 $|f(x) - L| < \varepsilon \quad \forall x > A(\varepsilon) \quad (\forall x < -A(\varepsilon))$

(fig. (179)).

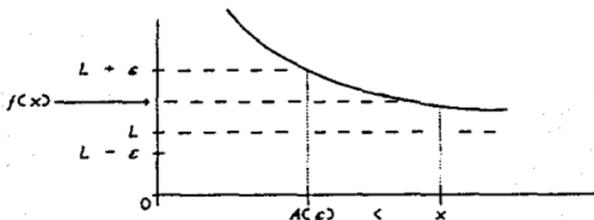


fig.(179)

**Ejemplo (1)**  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Claramente  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ . (fig.(180)).

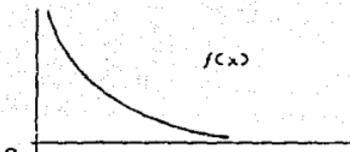


fig. (180)

ya que

$$|f(x) - 0| = \left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{|x|} < \epsilon$$

$$\forall x > \frac{1}{\epsilon} = A(\epsilon)$$

Supongamos que  $f: [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$  es Riemann-integrable en  $[a, w]$  para toda  $w > a$ , entonces

$$F(w) = \int_a^w f$$

define una función de  $w$  en  $[a, \omega)$ ; esta función puede o no tener límite en el infinito.

**Definición (15)** Si  $f: [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$  es Riemann-integrable en  $[a, w]$  para toda  $w > a$ , y si

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \int_a^w f \quad \text{existe, entonces el límite es}$$

llamado **LA INTEGRAL IMPROPIA DE PRIMER ORDEN** de  $f$  en  $[a, \omega)$ , y es denotada por

$$\int_a^{\infty} f = \lim_{w \rightarrow \infty} \int_a^w f$$

**Ejemplo (2)** Sea  $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = x^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (\text{fig. 181}).$$

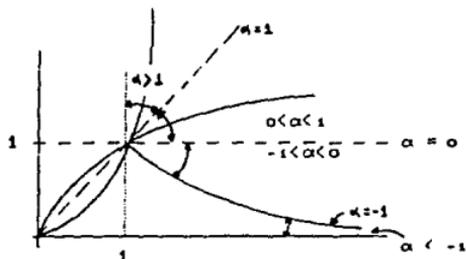


fig. (181)

$$\int_1^w x^\alpha = \begin{cases} \log w & \text{para } \alpha = -1 \\ \frac{w^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} & \text{para } \alpha \neq -1 \end{cases}$$

para  $\alpha = -1$  tenemos

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \log w = \infty$$

para  $\alpha \neq -1$ ,

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \left( \frac{w^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} \right) = \lim_{w \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\alpha+1} (w^{\alpha+1} - 1) \right)$$

si  $\alpha < -1$ ,

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha+1} (w^{\alpha+1} - 1) = \frac{-1}{\alpha+1}$$

y si  $\alpha > -1$  el límite no existe.

Así obtenemos que:

$$\int_a^\infty x^\alpha = \lim_{w \rightarrow \infty} \left( \frac{w^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} \right) = -\frac{1}{\alpha+1} \quad \text{para } \alpha < -1$$

y no existe si  $\alpha \geq -1$ .

Veamos ahora cómo podemos definir la integral cuando la función es la que no está acotada.

Supongamos que  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  es Riemann-integrable en  $(a, b)$ ,

entonces  $F(a) = \int_a^b f$ , esto define una función de  $a$  en  $(a, b)$ . El

límite de esta función cuando  $a$  se aproxima a  $a$  (por la derecha  $a \rightarrow a^+$ ), puede ó no existir.

**Definición (16)** Si  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  es Riemann-integrable en  $(a, b)$

$\forall a \in (a, b)$  y si

$$\lim_{a \rightarrow a^+} \int_a^b f$$

existe, entonces este límite es llamado

**LA INTEGRAL IMPROPIA DE SEGUNDO ORDEN** de  $f$  en  $(a, b)$  y es denotada por

$$\int_a^b f = \lim_{a \rightarrow a^+} \int_a^b f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f$$

Ejemplo (3) Sea  $f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(t) = t^\alpha$   $\alpha \in \mathbb{R}$

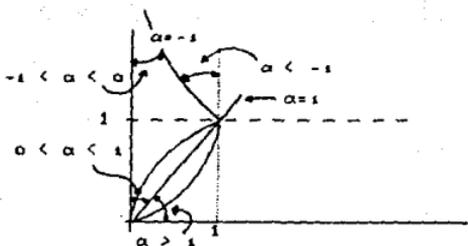


fig.(182)

$$\int_{0+\varepsilon}^1 t^\alpha = \begin{cases} -\log \varepsilon & \text{para } \alpha = -1 \\ \frac{1}{\alpha+1} (1 - \varepsilon^{\alpha+1}) & \text{para } \alpha \neq -1 \end{cases}$$

para  $\alpha = -1$ , tenemos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\log \varepsilon = \infty$$

por tanto el limite no existe.

Para  $\alpha \neq -1$ , tenemos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha+1} (1 - \varepsilon^{\alpha+1})$$

si  $\alpha + 1 < 0 \Rightarrow \alpha < -1$  entonces el limite no existe

si  $\alpha + 1 > 0 \Rightarrow \alpha > -1$  entonces el limite si existe.

$$\therefore \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 t^\alpha = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha+1} (1 - \varepsilon^{\alpha+1}) = \frac{1}{\alpha+1} \text{ si } \alpha > -1$$

y no existe si  $\alpha \leq -1$  fig.(182)

Una condición suficiente para la existencia de las integrales impropias queda expresada por el siguiente teorema:

**Teorema (23)** Si  $f, g : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  son Riemann-integrables en  $[a, w] \quad \forall w > a$ , si  $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \geq a$  y

$$\int_a^w g$$

existe, entonces

$$\int_a^w f$$

también existe.

b) Si  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  son Riemann-integrables en  $[\varepsilon, b] \quad \forall \varepsilon \in (a, b)$ , si  $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in (a, b)$  y

$$\int_a^b g$$

existe, entonces

$$\int_a^b f$$

también existe.

Probaremos la parte a) y dejamos al lector la prueba de b).

**Demostración.**



fig. (183)

Como  $0 \leq \int_a^w f \leq \int_a^w g \leq \int_a^w g$ , vemos que

$$\left\{ \int_a^w f \mid w > a \right\}$$

es un conjunto acotado

superiormente, entonces tiene supremo; como

$$F(w) = \int_a^w f$$

es no decreciente, entonces el límite, cuando  $w$  tiende a infinito, de la función  $F(w)$  existe, y portanto

$$\int_a^{\infty} f \quad \text{existe.}$$

q. e. d.

Si ahora el dominio de la función es  $\mathbb{R}$  ¿cómo definir  $\int_{-\infty}^{\infty} f$ ?

Apoyados en la integral impropia de primer orden, podemos establecer la siguiente definición (lo que resulta ser una generalización de esta integral).

**Definición (17)** Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es Riemann-integrable en  $[A, B]$   $\forall A < B \in \mathbb{R}$ , si

$$\lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^0 f \quad \text{y} \quad \lim_{B \rightarrow \infty} \int_0^B f$$

existe, entonces definimos la integral impropia de primer orden de  $f$  sobre  $(-\infty, \infty)$  por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^0 f + \lim_{B \rightarrow \infty} \int_0^B f$$

**Ejemplo (4)** Sea  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^0 \frac{1}{1+x^2} + \lim_{B \rightarrow \infty} \int_0^B \frac{1}{1+x^2}$$

en caso de que dichos límites existan

$$\begin{aligned} \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^0 \frac{1}{1+x^2} &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \arctan x \Big|_A^0 = \\ &= \lim_{A \rightarrow -\infty} (\arctan 0 - \arctan A) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{B \rightarrow \infty} \int_0^B \frac{1}{1+x^2} &= \lim_{B \rightarrow \infty} \arctan x \Big|_0^B = \\ &= \lim_{B \rightarrow \infty} (\arctan B - \arctan 0) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(fig.(184) y fig.(185)).

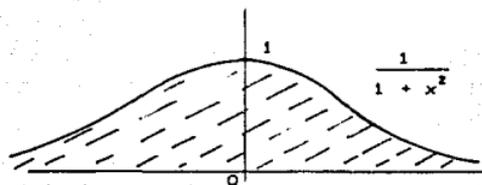


fig.(184)

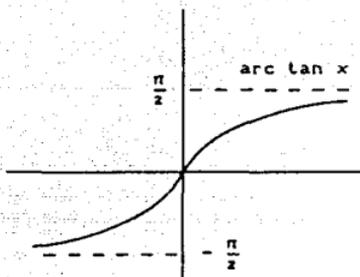


fig.(185)

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} = \pi$$

Ejemplo (5) Sea  $f(x) = \text{sen } x$

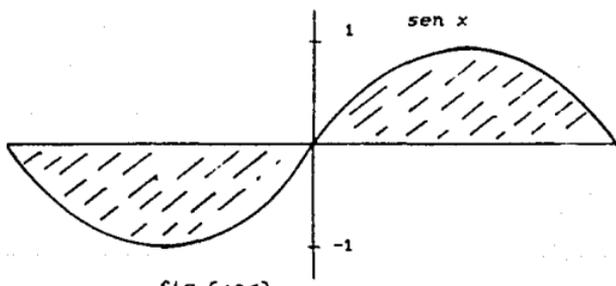


fig.(186)

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \int_0^B \text{sen } x \, dx$$

si  $B = k 2\pi$  entonces

$$\begin{aligned} \lim_{B \rightarrow \infty} \int_0^B \text{sen } x \, dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{2k\pi} \text{sen } x \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} -\cos x \Big|_0^{2k\pi} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (-\cos(2k\pi) + \cos(0)) = 0 \end{aligned}$$

Por tanto  $\int_0^{\infty} \text{sen } x \, dx = 0$

Si  $B = (2k - 1) \pi$ , tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{B \rightarrow \infty} \int_0^B \text{sen } x \, dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{(2k-1)\pi} \text{sen } x \, dx = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (-\cos x) \Big|_0^{(2k-1)\pi} = \lim_{k \rightarrow \infty} ((-\cos(2k-1)\pi) + \cos(0)) = 2 \end{aligned}$$

por tanto para distintas formas de que  $B$  tienda a  $\infty$ , la integral de  $f$  se va a valores distintos:

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen } x \quad \text{no existe.}$$

Si el punto  $c$  en torno al cual la función  $f$  es no acotada, no coincide con algún extremo del intervalo  $[a, b]$ , ¿cómo definir

$$\int_a^b f \, ?$$

Apoyados ahora en la integral impropia de segundo orden, podemos también establecer la siguiente generalización de ésta.

**Definición (18)** Si  $f: [a, c) \cup (c, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $a < c < b$  en Riemann-integrable en  $[a, c - \delta_1] \cup [c + \delta_2, b]$   $\forall \delta_1, \delta_2$  tales que  $\delta_1 \in (a, c)$  y  $\delta_2 \in (c, b)$ , y

$$\text{si } \lim_{\delta_1 \rightarrow 0^-} \int_a^{c-\delta_1} f \, \text{y } \lim_{\delta_2 \rightarrow 0^+} \int_{c+\delta_2}^b f \, \text{existen}$$

definimos la integral impropia de segundo orden de  $f$  sobre  $[a, b]$  como

$$\int_a^b f = \lim_{\delta_1 \rightarrow 0^-} \int_a^{c-\delta_1} f \, + \lim_{\delta_2 \rightarrow 0^+} \int_{c+\delta_2}^b f$$

Ejemplo (6) Sea  $f: ]-1, 0) \cup (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} = \lim_{\delta_1 \rightarrow 0^-} \int_{-1}^{0-\delta_1} \frac{1}{\sqrt{|x|}} + \lim_{\delta_2 \rightarrow 0^+} \int_{0+\delta_2}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}$$

en caso de que los límites existan

$$\begin{aligned} \lim_{\delta_1 \rightarrow 0^-} \int_{-1}^{-\delta_1} x^{-1/2} &= \lim_{\delta_1 \rightarrow 0^-} \left. \frac{2}{3} x^{3/2} \right|_{-1}^{-\delta_1} \\ &= \lim_{\delta_1 \rightarrow 0^-} \left( \frac{2}{3} (-\delta_1)^{3/2} - \frac{2}{3} (-1)^{3/2} \right) = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\delta_2 \rightarrow 0^+} \int_{\delta_2}^1 x^{-1/2} &= \lim_{\delta_2 \rightarrow 0^+} \left. \frac{2}{3} x^{3/2} \right|_{\delta_2}^1 \\ &= \lim_{\delta_2 \rightarrow 0^+} \left( \frac{2}{3} (1)^{3/2} - \frac{2}{3} (\delta_2)^{3/2} \right) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$$

Ejemplo (7) Sea  $f: ]-1, 0) \cup (0, 1]$  dada por

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x} = \lim_{\delta_1 \rightarrow 0^-} \int_{-1}^{-\delta_1} x^{-1} = \lim_{\delta_1 \rightarrow 0^-} \log x \Big|_{-1}^{-\delta_1} =$$

la función logaritmo tiene como dominio  $\mathbb{R}^+$ , por tanto aquí no tiene sentido evaluar el logaritmo en  $-\delta_1$  y  $-1$ ; por tanto este límite no tiene sentido.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x} &= \lim_{\delta_2 \rightarrow 0^+} \int_{\delta_2}^1 x^{-1} = \lim_{\delta_2 \rightarrow 0^+} \log x \Big|_{\delta_2}^1 = \\ &= \lim_{\delta_2 \rightarrow 0^+} \log(1) - \log(\delta_2) = \lim_{\delta_2 \rightarrow 0^+} (-\log(\delta_2)) = \infty \end{aligned}$$

$$\therefore \int_{-1}^1 \frac{1}{x} \text{ no existe.}$$

La generalización de la integral impropia de primer orden de  $f$  sobre  $(-\infty, \infty)$ , la definimos con base en la existencia de

$$\lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^0 f \quad \text{y} \quad \lim_{B \rightarrow \infty} \int_0^B f$$

¿qué sucede si en lugar de calcular la integral de  $f$  por medio estos dos límites, consideramos un sólo límite, es decir  $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A f$ ?

Lo que estaríamos haciendo es determinar un valor, (en caso de que dicho límite existiera), a partir de "barrer" de manera simétrica y simultánea el área bajo la gráfica de la función ubicada a la derecha e izquierda del cero. Por ejemplo.

Ejemplo (8) Sea  $f(x) = \text{sen } x$

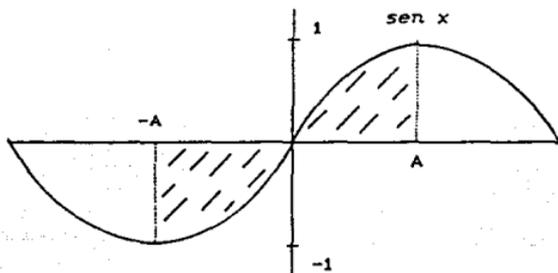


fig. (187)

si definimos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen } x \, dx &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \text{sen } x \, dx = \lim_{A \rightarrow \infty} (-\cos x) \Big|_{-A}^A \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} (-\cos(A) - (-\cos(-A))) = \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} (-\cos A + \cos A) = 0 \\ \therefore \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen } x \, dx &\quad \text{si existiera} \end{aligned}$$

Según el ejemplo (8), si primero calculamos el área bajo la gráfica de cero a infinito y después de menos infinito a cero, la

$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sen } x$  no existe, y en el ejemplo (B) vemos que si lo hacemos en forma simultánea obtenemos que  $\int_{-\infty}^{\infty} \text{sen } x = 0$ .

A esta segunda manera de barrer el área bajo la gráfica de la función, la definimos como sigue:

*Definición (19)* Si  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es Riemann-integrable en cualquier intervalo  $(a, b)$  entonces

$$(VPC) \int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A f$$

es llamado el Valor Principal de Cauchy (VPC) de la integral de  $f$  en  $(-\infty, \infty)$ , si dicho límite existe.

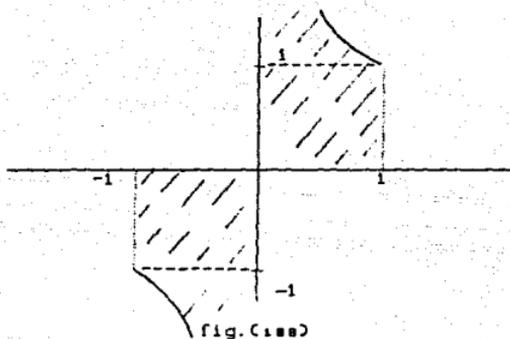
De igual manera, si en la generalización de la integral impropia de segundo orden, calculamos el área bajo la gráfica de la función a través de un sólo límite, podemos establecer la siguiente definición:

*Definición (20)* Si  $f: [a, c) \cup (c, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a < c < b$ , es Riemann-integrable en  $[a, c-\delta) \cup (c+\delta, b]$  para toda  $\delta$  tal que  $0 < \delta < \min \{(c-a, b-c)\}$  entonces

$$(VPC) \int_a^b f = \lim \left( \int_a^{c-\delta} f + \int_{c+\delta}^b f \right)$$

es llamado el Valor Principal de Cauchy de  $f$  en  $[a, b]$ , si dicho límite existe.

Ejemplo (9) Sea  $f: [-1, 0) \cup (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \frac{1}{x^3}$



$$\begin{aligned}
 \text{(VPC)} \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{-1}^{0-\epsilon} \frac{1}{x^3} + \int_{0+\epsilon}^1 \frac{1}{x^3} \right) \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( -\frac{1}{2x^2} \Big|_{-1}^{0-\epsilon} + \left(-\frac{1}{2x^2}\right) \Big|_{\epsilon}^1 \right) = \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( -\frac{1}{2(-\epsilon)^2} + \frac{1}{2(-1)^2} - \frac{1}{2\epsilon^2} + \frac{1}{2\epsilon^2} \right) = 0
 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{(VPC)} \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} = 0$$

y según el ejemplo (3)  $\int_0^1 \frac{1}{x^3}$  no existe, calculada de la otra manera.

#### 4.4 Problemas resueltos.

Problema 1). En el problema 3 del capítulo I (atracción gravitacional). Definimos la función

$$f(r) = \left( \frac{B}{(p-r)^2} \right)$$

También obtuvimos la suma  $S_n$  tal que

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(r_i)(x_i - x_{i-1})$$

Decíamos que, al tomar  $n$  suficientemente grande, nos acercábamos tanto como quisiéramos a la atracción que ejerce la barra sobre los 2 Kg. masa.

Con la herramienta que hemos desarrollado, de la integral, observamos que el límite cuando  $n$  tiende a infinito de  $S_n$  es precisamente la integral de la función  $f$ .

Entonces

$$F = \int_0^a f = \int_0^a G \left( \frac{1}{(p-r)^2} \right) dr = 6G \int_0^a \frac{1}{(p-r)^2} dr$$

Según el T.F.C. (primera parte) hay que encontrar una función  $g$  tal que su derivada sea  $f$ .

Sea  $g(r) = \frac{1}{(p-r)}$  tal función.

Por el T.F.C. (segunda parte)

$$\begin{aligned} 6G \int_0^a \frac{1}{(p-r)^2} dr &= 6G \left( \frac{1}{(p-r)} \right) \Big|_0^a = 6G \left( \frac{1}{(p-a)} - \frac{1}{p} \right) = \\ &= 6G \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{p} \right) = \frac{4}{3} G \end{aligned}$$

Por tanto  $\frac{4}{3} G$  Kg. es la atracción gravitacional que ejerce la barra sobre los 2 Kg. masa.

Problema 2). La aguja de buffon.

Una aguja de 2 cm. de largo es arrojada al azar sobre un piso de tablas, cada una de 4 cm. de ancho. ¿Cuál es la probabilidad de que el aguja al caer quede cruzada sobre la hendidura entre dos tablas (fig.(189)).

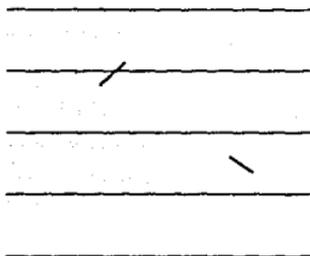


fig.(189)

Consideremos todas las posibles formas en que puede caer la aguja.

Convenimos en que, al caer la aguja al piso el extremo que quede más al Sur, sea, el extremo a partir del cual midamos la aguja; si la aguja queda paralela a una hendidura, de tal manera que ninguno de sus extremos esté más al Sur, entonces vamos a tomar el extremo Oriente de la aguja como el punto a partir del cual se va a medir la aguja.

Tomando en cuenta estas convenciones, podemos describir la posición de la aguja respecto a las hendiduras considerando las siguientes medidas. (fig.(190))

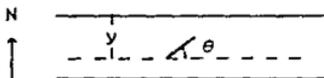


fig.(190)

donde

$y$  = distancia del extremo a partir del cual medir el aguja a la hendidura que quede al norte, más cerca.

$\theta$  = Angulo formado por la aguja y una línea imaginaria paralela a las hendidura, que pasa por el extremo, a partir del cual hemos convenido medir la aguja.

Es claro que  $0 \leq y < 4$  y  
 $0 \leq \theta < \pi$

Por tanto, todas las posibilidades que tiene la aguja al caer al suelo quedan expresadas en la siguiente gráfica.

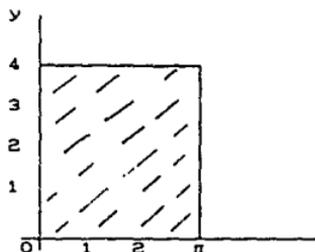


fig.(191)

La región rectangular, es considerada en probabilidad como el "espacio de probabilidad"; cada posible posición en que quede la aguja, al caer al piso, está representada por la pareja coordenada  $(\theta, y)$ , que esté dentro del rectángulo, representado en la figura 191.

Hay dos posibilidades para la aguja al caer al piso.

- i) Que quede cruzada sobre una hendidura.(fig.(192). y
- ii) La aguja no quede cruzada,(que sus dos extremos queden sobre la misma tabla).(fig.(193).

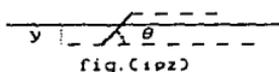


fig.(192)

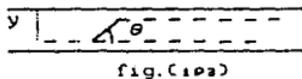


fig.(193)

A través del triángulo en la figura 194 establecemos la relación entre  $y$  y  $\theta$



fig.(194)

La aguja cruza una hendidura si y solo si

$$y < 2 \operatorname{sen} \theta$$

Los puntos  $(\theta, y)$  contenidos en el "espacio de probabilidad", que satisfacen la relación anterior, representan la región bajo la curva  $y = 2 \operatorname{sen} \theta$  (figura 195).

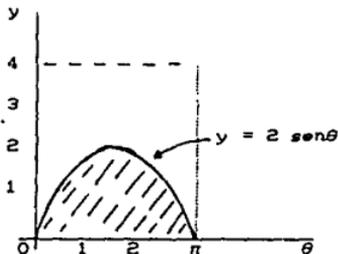


fig.(195)

Por tanto

La probabilidad de que la aguja cruce una hendidura. =  $\frac{\text{área bajo la curva } y = 2 \operatorname{sen} \theta}{\text{área del rectángulo}}$

Pero el área del rectángulo =  $4\pi$

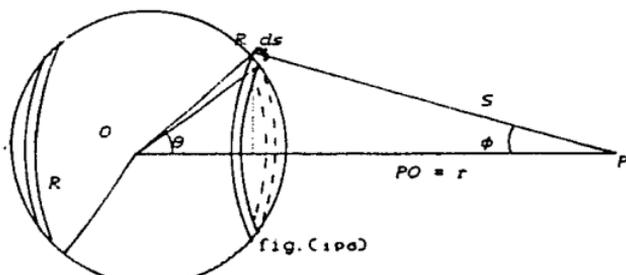
y el área bajo la curva  $y = \operatorname{sen} \theta$  es

$$\int_0^{\pi} 2 \operatorname{sen} \theta \, d\theta = 2 \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \theta \, d\theta = 2 (-\cos \theta) \Big|_0^{\pi} = 4$$

Por tanto, la probabilidad de que la aguja quede cruzada sobre una hendidura es

$$\frac{4}{4\pi} = \frac{1}{\pi}$$

Problema 3). ¿Cómo atrae una esfera hueca a una masa  $m$  situada fuera de la esfera?



La masa  $m$  está situada en  $P$ .

Vamos a imaginar la esfera como formada por anillos como los que se muestran en la figura anterior. Calculamos la magnitud de la atracción que cada uno de estos anillos ejerce sobre la masa  $m$ , y posteriormente sumaremos estas atracciones (es decir, integraremos sobre la esfera) para obtener la magnitud de la atracción de la esfera sobre  $m$ .

Sea  $M$  la masa total de la esfera, entonces

$$\frac{M}{4\pi R^2} \text{ es la masa que hay por unidad de área}$$

(Recordemos que el área de la esfera es  $4\pi R^2$ )

$R d\theta$  = anchura del anillo.

$2\pi R \text{ sen } \theta$  = circunferencia del anillo.

$2\pi R^2 \text{ sen } \theta d\theta$  = área del anillo.

Entonces:

$$(2\pi R^2 \text{ sen } \theta d\theta) \frac{M}{4\pi R^2} = \text{masa del anillo}$$

$$\frac{M \text{ sen } \theta d\theta}{2} = \text{masa del anillo.}$$

La atracción que el anillo ejerce sobre la masa  $m$  tiene una magnitud  $dF$  igual a:

$$dF = G \frac{m (\text{sen } \theta d\theta)}{2S^2} \cos \phi \dots\dots(1)$$

pues dicha atracción solo tiene componente a lo largo de  $PO$ .

En virtud de la simetría del anillo respecto a su centro podemos observar lo siguiente

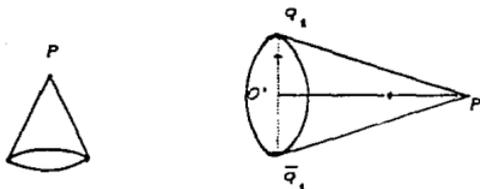


fig. (197)

El punto  $q_1$  (arbitrario) atrae a una partícula situada en  $P$  a lo largo de  $\overline{Pq_1}$ . La fuerza de atracción ejercida por  $q_1$  la podemos descomponer en una componente horizontal que actúa sobre  $\overline{PO'}$ , y una componente vertical que actúa sobre  $\overline{O'q_1}$ , como se indica en la figura 197. El punto  $q_1$  está sobre una circunferencia de radio  $\overline{O'q_1}$ . Si denotamos  $\overline{q_1}$  el punto diametralmente opuesto a  $q_1$ , sobre tal circunferencia, vemos que la componente vertical de la atracción que  $\overline{q_1}$  ejerce (sobre el cuerpo situado en  $P$ ) tiene igual magnitud y dirección pero sentido opuesto a la correspondiente componente de  $q_1$ . Por lo tanto, todas las componentes verticales de atracción sobre  $m$  (localizada en  $P$ ) se cancelan por parejas y, en total, solo hay una fuerza de atracción que se ejerce a lo largo de  $PO$ .

Por tanto, el anillo entero ejerce una atracción determinada por la masa del anillo multiplicada por el  $\cos \phi$ .

Tanto  $\cos \phi$  como  $\sin \theta$  dependen de  $S$ ; explicitemos esta dependencia.

Aplicamos la ley de los cosenos en el triángulo, (figura 198).

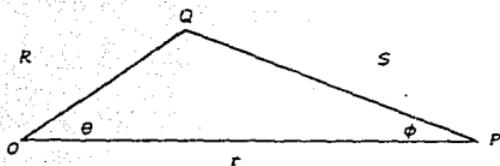


fig. (100)

$$R^2 = r^2 + S^2 - 2rS \cos \phi \Rightarrow \cos \phi = \frac{r^2 + S^2 - R^2}{2rS}$$

$$S^2 = r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{r^2 + R^2 - S^2}{2rR}$$

Derivando la expresión  $\cos \theta$  obtenemos

$$\operatorname{sen} \theta \, d\theta = \frac{S}{rR} \, dS$$

Sustituyendo en (1)

$$dF = \frac{G M m}{z S^2} \frac{r^2 - R^2 + S^2}{2rS} \frac{S}{rR} \, dS$$

entonces 
$$dF = \frac{G M m}{4Rr^2} \left[ \frac{r^2 - R^2}{S^2} + 1 \right] \, dS$$

Esta es la magnitud de la atracción que ejerce el anillo sobre la masa  $m$  situada en  $P$ . Integramos estas magnitudes  $dF$  para obtener la magnitud de la atracción de la esfera sobre  $m$ .

Notese que: (i) El mínimo valor de  $S = r - R$

(ii) El máximo valor de  $S = r + R$

Por tanto

$$\begin{aligned} F &= \int_{r-R}^{r+R} \frac{G M m}{4Rr^2} \left[ \frac{r^2 - R^2}{S^2} + 1 \right] \, dS \\ &= \frac{G M m}{4Rr^2} \int_{r-R}^{r+R} \left[ \frac{r^2 - R^2}{S^2} + 1 \right] \, dS \end{aligned}$$

entonces

$$F = \frac{G M m}{r^2}$$

Por tanto, la esfera hueca atrae a la partícula de masa  $m$  situada en  $P$ , de la misma forma que una partícula de masa  $M$  (masa de la esfera) situada en el centro de la esfera atrae a la partícula de masa  $m$  situada en  $P$ .

## BIBLIOGRAFIA

ALEKSANDROV, A. D, Kolmogorov, A. N, Laurentiev, M.A. et. al.

La matemática: su contenido, métodos y significado.

Madrid, Alianza Editorial, 1980. 4<sup>a</sup> ed.

BARTLE, Robert G.

Introducción al Análisis Matemático.

México, Ed. Limusa, 1982.

COURANT, Richard y Fritz, John.

Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático.

México. Cia. Editorial Continental, 1979. Vol.II.

COURANT, Richard y Robbins, Herbert.

¿Qué es la Matemática ?.

(tr. Bravo Gala, Luis)

Madrid, Ed. Aguilar, 1979, 5<sup>a</sup>ed.

CRUSE, Allan B. y Lehman, Millianne.

Lecciones de Cálculo 2.

México, Fondo Educativo Interamericano.S.A. 1982.

FULKS, Watson.

Cálculo Avanzado.

México, Ed. Limusa, 1973.

HAASER, Norman B., et. al.

Análisis matemático 1.

México, Ed. Trillas. 1975.

KLINE, Morris.

Calculus.

United States of America, John Wiley and Sons, 1977.

KUDRIAVTSEV, L.D.

Curso de Análisis Matemático.

Moscú, Ed. Mir, 1983.

de OYARZABAL, Juan B.

Ensayos sobre mecánica clásica.

México, UNAM, 1984.

RESNICK, Robert y Halliday, David.

Física.

México, Compañía Editorial Continental, 1980.

SAGAN, Hans.

Advanced Calculus.

United States of America, Houghton Mifflin Company, 1974.

SHERWOOD, G.E.F. y Taylor, Angus E.

Cálculo.

México, Compañía Editorial Continental, 1958, 8<sup>a</sup> ed.

SPIVAK, Michael.

Cálculo Infinitesimal.

Colombia, Ed. Reverté. (s.a).

THOMAS, Jr. George B. y Finney, Ross L.

Cálculo con Geometría Analítica.

Ed. Addison-Wesley Iberoamericana, 8<sup>a</sup> ed.