

2ej  
15



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**

FACULTAD DE INGENIERIA

**ANALISIS NODAL EN REDES DE  
TUBERIAS SUPERFICIALES CON  
FLUJO MULTIFASICO**

**T E S I S**  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
**INGENIERO PETROLERO**  
P R E S E N T A N :  
**ERNESTO ESPINOSA ORDAZ**  
**PAULINO VALADEZ PEREZ**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

MEXICO, D. F.

1990



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

I	INTRODUCCION .....	3
II	TEORIA DEL FLUJO MULTIFASICO HORIZONTAL E INCLINADO .....	7
	- Correlación de Beggs-Brill .....	16
	- Correlación de Bertuzzi-Tek-Poettmann .....	31
	- Correlación de Eaton .....	37
III	FUNDAMENTOS DE ANALISIS NODAL .....	48
	- Pozos de aceite .....	56
	- Pozos de inyección .....	68
	- Pozos de gas .....	70
	- Líneas superficiales .....	72
IV	DESARROLLO E INTEGRACION DEL PROGRAMA DE COMPUTO .....	84

V	APLICACION .....	93
VI	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....	107
	NOMENCLATURA .....	109
	BIBLIOGRAFIA .....	113
	APENDICE A	
	PROPIEDADES DE LOS FLUIDOS .....	117
	APENDICE B	
	INTERPOLACION SPLINE .....	125

## CAPITULO I

### INTRODUCCION

En las operaciones de producción de hidrocarburos es necesario considerar, en la mayoría de los casos, el transporte de gas y aceite juntos en una tubería común desde un campo de aceite a la planta de procesamiento.

La tendencia a centralizar las instalaciones de separación y almacenamiento en los campos de recolección exige la existencia de líneas de tubería de recolección en las cuales fluye más de una fase.

El incremento en la capacidad de producción de los pozos petroleros debido a nuevas técnicas de producción ha ocasionado se rediseñen muchas líneas superficiales para el manejo de la producción incrementada.

Aunque se ha investigado mucho sobre el flujo de fluidos en dos fases durante los últimos cuarenta años, el estudio

del flujo en dos fases en redes de tuberías ha tenido poco desarrollo, a pesar de la gran utilización de éstas en la recolección de hidrocarburos.

El objetivo del presente estudio es el de analizar el comportamiento de las presiones y gastos de flujo multifásico en las redes de tubería superficiales, desde la salida de los pozos petroleros hasta la unidad de separación.

La *Scientific Software Corporation*<sup>11</sup> en su programa PIPEFLOW<sup>2</sup> analizó el mismo sistema desde un punto de vista amplio. Calcula la caída de presión y el gasto de flujo en cualquier sección en un sistema de tuberías con flujo multifásico en función de las propiedades in-situ del fluido. La determinación de éstas propiedades se basa en mezclar las corrientes de fluido en un nodo para hacer un balance de materia en todo el sistema de tuberías. El cálculo de la caída de presión requiere la predicción del colgamiento de líquido y el régimen de flujo, usando correlaciones y cálculos iterativos, los cuales se hacen a través de cada elemento, en pequeños incrementos o decrementos de presión.

Se intentó cumplir con el objetivo del estudio utilizando el método de Stoner<sup>23,24</sup> teniendo como ecuación de referencia la expresión de gradiente de presión total de la correlación de Beggs y Brill<sup>2</sup>. Se eliminó esta alternativa debido

a la gran cantidad de cálculos iterativos que se realizan para obtener una solución parcial.

Para examinar el comportamiento de presiones y gastos en un grupo de pozos, tuberías y el separador, se elaboró un programa de cómputo con base en un análisis nodal del sistema, auxiliándose con correlaciones de flujo multifásico y subrutinas del cálculo de las propiedades de los fluidos.

El programa está codificado en lenguaje GFA BASIC y compilado en forma ejecutable. La entrada de datos se encuentra en forma conversacional, los resultados se obtienen en tablas.

El programa consiste en determinar los gastos de producción de los pozos así como las caídas de presión a lo largo de las tuberías a partir de las características del fluido producido, el diámetro y longitud de la tubería, la presión en la cabeza de los pozos productores y la presión de separación. Se utilizan en forma opcional tres correlaciones para el cálculo de las propiedades de los fluidos: Standing<sup>22</sup>, Oistein<sup>20</sup> y Vazquez<sup>25</sup>. También en forma opcional se utilizan dos correlaciones de flujo multifásico: Beggs-Brill<sup>2</sup> y Bertuzzi-Tek-Poettmann<sup>3</sup>.

Por simplificación del problema y tomando en cuenta que el programa en la mayoría de los casos se aplicará en cada momento a un solo campo productor, y considerando que los resultados

finales no se afectarán en gran medida, se hicieron las siguientes suposiciones:

- Las características del fluido producido son las mismas en todos los pozos.

- No existe caída de presión en las interconexiones (codos, cambios de diámetro de tubería, etc.).

- Se tienen treinta nodos como máximo.

- Se tienen máximo cinco conectores en cada nodo, sin que la unión de nodos y conectores formen anillos.

Además del propósito obligado, el presente estudio pretende proporcionar un punto de partida a trabajos subsecuentes sobre el tema, tomando en cuenta que existe una multiplicidad de aspectos que se pueden cambiar o aumentar.

## CAPITULO II

### TEORIA DEL FLUJO MULTIFASICO HORIZONTAL E INCLINADO

El estudio del flujo multifásico en tuberías se ha realizado desde muchos años atrás. Este consiste, en general, en analizar el comportamiento de las presiones en una tubería de longitud y diámetro determinados, cuando está pasando a través de ésta una cantidad de fluido (gas y líquido) usualmente considerado bajo régimen estable.

La predicción de las caídas de presión y colgamiento del líquido que ocurren en el flujo en dos fases en tuberías es de interés particular en la industria petrolera, en donde muchos de los pozos productores de gas contienen condensados e hidrocarburos mas pesados, y los pozos de aceite producen gas. En cuanto la energía natural del yacimiento declina, muchos pozos son equipados con sistemas artificiales de producción, como el bombeo neumático. Para diseñar estos sistemas, se requiere de un método de predicción de los gradientes de presión en dos fases.

La capacidad para predecir el colgamiento del líquido también es esencial para el diseño de equipo superficial de campo, como son los separadores gas-líquido. Cuando se cambian los gastos de flujo de los pozos productores, la cantidad de colgamiento del líquido en las líneas de recolección puede cambiar y resultar en una sobrecarga del equipo de procesamiento.

El problema del flujo en dos fases es complicado por fenómenos como el resbalamiento entre las fases, el cambio del patrón de flujo y la transferencia de masa entre las fases. Estos factores ocasionan una caída de presión mayor que puede ser explicada por la menor área disponible para el flujo de cada fase. Cuando se adiciona el ángulo de inclinación, además de las propiedades del fluido, gastos de flujo y diámetros de tubería, el problema se complica.

Existen varias correlaciones para predecir las caídas de presión y el colgamiento de líquido en el flujo horizontal e inclinado, las utilizadas en el presente estudio son las de Beggs-Brill y Bertuzzi-Tek-Poettmann. También se presenta un resumen de la correlación de Eaton et al<sup>5</sup>, sólo para conocimiento de las correlaciones del flujo multifásico.

Hernández y Brill<sup>15</sup> compararon las correlaciones de Beggs-Brill, Dukler et al, Eaton et al y Guzhov et al contra datos experimentales de Eaton y Beggs, encontrando que la correlación de

Dukler et al se ajustó en mejor grado a los datos usados en el estudio.

Así también, Mandhane et al<sup>10</sup> evaluaron y compararon 16 diferentes correlaciones y modelos con aproximadamente 10500 observaciones sobre caídas de presión por fricción tomadas del *Multiphase Pipe Flow Data Bank* de la Universidad de Calgary, a partir de las cuales se dieron las siguientes anotaciones:

- Para la correlación de Lockhart y Martinelli<sup>18</sup> se utilizaron datos de laboratorio de mezclas de aire y líquidos, como keroseno, agua, benceno y varios aceites. El rango de diámetros en los cuales se realizaron las pruebas es de 0.0586 a 1.017 pulgadas. A pesar del pequeño rango, la correlación se utiliza para una gran variedad de sistemas con éxitos razonables.

- Hoogendoorn<sup>19</sup> propuso correlaciones para regímenes de flujo estratificado, ondulado y flujo niebla, basados en datos que él mismo obtuvo en sistemas aire-aceite, en diámetros de tubería de 0.945 a 5.5 pulgadas. Para los regímenes de flujo restantes, sugiere se utilice la correlación de Lockhart y Martinelli.

Posteriormente Hoogendoorn y Bultelaar<sup>17</sup> presentaron correlaciones para el flujo burbuja, bache y disperso, basados en los datos para el Freón-11 y agua. Los resultados combinados de los dos estudios constituyen un procedimiento de diseño completo.

- La correlación de Bertuzzi et al<sup>3</sup> se basa en datos de mediciones experimentales encontrados en varias fuentes de literatura. Calcula la caída de presión en tuberías horizontales.

El método requiere de una predicción independiente del colgamiento del líquido.

- La correlación de Beggs-Brill<sup>2</sup> está basada en datos para un sistema aire-agua en tuberías de 1.0 a 1.5 pulgadas. Algunos datos fueron para flujo horizontal y los restantes (la mayoría) para varios ángulos de tubería inclinada. La correlación determina la fracción de líquido in-situ, el valor obtenido se utiliza para el cálculo de las caídas de presión.

- Govier y Aziz<sup>12</sup> propusieron una correlación para usarse en regímenes de flujo burbuja disperso y alargado. La correlación se obtuvo a partir de consideraciones mecánicas.

Por otra parte, existen líneas de recolección con flujo en dos fases que pasan por terrenos montañosos, en donde el colgamiento del líquido y la densidad de la mezcla son menores en el flujo cuesta abajo, por lo que algunos autores desprecian la recuperación de presión en estas secciones para el diseño de las tuberías.

Las líneas de recolección de los pozos marinos usualmente se colocan sobre el suelo marino, formando una inclinación hasta la costa. El gradiente de presión por elevación en una tubería con una inclinación hacia arriba muy pequeña puede ser mucho mayor que el gradiente de presión por fricción.

Flanigan<sup>7</sup> desarrolló un método para calcular la caída

de presión en dos fases en tuberías de descarga en terreno montañoso. Utilizó la ecuación de Panhandle para flujo de gas con un factor de eficiencia para calcular la caída de presión por fricción; para la caída de presión por elevación usó un factor de elevación, la densidad del líquido y una sumatoria de los cambios de elevación cuesta arriba. Concluyó que el ángulo de inclinación no tuvo efecto sobre el factor de elevación y que no existió recuperación de presión apreciable en la sección cuesta abajo.

Guzhov et al<sup>14</sup> establecieron el colgamiento del líquido como función del número de Froude y la fracción de gas sin resbalamiento ( $i-\lambda$ ). Presentó una ecuación para el colgamiento en flujo tapón hacia arriba independiente del ángulo, y ecuaciones para flujo cuesta abajo afectadas por la inclinación. También propuso una correlación para la relación del factor de fricción en flujo en dos fases y el factor de fricción en una fase como función de la fracción de gas sin resbalamiento, con el número de Froude como parámetro. Esta correlación debe ser usada con precaución pues la relación del factor de fricción puede ser infinita cuando se tenga sólo flujo de gas.

Gregory et al<sup>15</sup> reportaron los resultados de un estudio en el cual se compararon cinco métodos para predecir las pérdidas de presión en tuberías en terreno montañoso. Los datos de campo consistieron de 52 mediciones de caídas de presión tomadas en una línea de 6.065 pulgadas de diámetro interior y 99700 pies de

largo. La suma de las elevaciones cuesta arriba de la línea fue de 829 pie. Las densidades relativas del aceite y gas fluyentes fueron de 0.82 y 0.73 respectivamente. No se reportaron rangos de gastos o presión. Los resultados son dados como un porcentaje de error promedio y desviación estandar de errores en la tabla 2-1.

Un porcentaje de error positivo indica que la caída de presión que se predijo fue mayor que la medida. Se ignoró la recuperación de presión en las secciones cuesta abajo.

TABLA 2-1

Método de diseño	Porcentaje error prom.	Desviación estandar
Gregory et al	-3.1	11.7
Gregory et al con el factor corrección por inclinación de Beggs-Brill	3.1	11.3
Colgamiento de Eaton combinando pérdidas por fricción de Dukler	-0.4	17.1
Beggs-Brill	2.0	17.3
Flanigan	-12.0	18.7

Correlaciones de flujo multifásico. Las caídas de

presión en flujo en dos fases (gas-líquido) son diferentes de aquellas encontradas en flujo de una sola fase, en la mayoría de los casos existe una interfase y el gas se desplaza a mayor velocidad que el líquido. La interfase puede ser lisa o tener varios grados de rugosidad, dependiendo del patrón de flujo. Por tanto, puede existir una transferencia de energía desde la fase gaseosa a la fase líquida, mientras que la energía se pierde del sistema a través de la fase mojanante en la pared de la tubería. Tal transferencia de energía puede ser de intercambio de calor o de aceleración. Debido a que al fluir cada fase a través de un área pequeña, como si fluyera sola, se producen mayores pérdidas de presión, comparadas con flujo en una sola fase.

Cuando dos fases fluyen simultáneamente, es evidente que lo pueden hacer en diversas formas. A cada una de estas formas se les conoce como patrón de flujo, "...un patrón de flujo es la distribución relativa de una fase con respecto a la otra en una tubería ..."<sup>4</sup>.

Muchos investigadores del fenómeno del flujo horizontal en dos fases han separado los datos experimentales en varios grupos de regímenes o patrones de flujo observados, desarrollando correlaciones para cada uno de ellos.

Existen otros parámetros que afectan el flujo en dos fases y su determinación depende de la correlación que se utilice

para el cálculo, estos son: colgamiento del líquido, factor de fricción, densidad de la mezcla y velocidad de la mezcla.

El colgamiento del líquido (HL) es aquella fracción de una unidad de volumen de tubería que es ocupada por líquido fluyente. Debido al resbalamiento entre el líquido y el gas al fluir simultáneamente, es imposible, partiendo de los gastos de entrada de gas y líquido, determinar la fracción de volumen de la tubería ocupada por cada una de las fases, por lo que se han desarrollado varias correlaciones para medir el colgamiento del líquido y correlacionarlo con los parámetros de flujo.

Un conocimiento de la variación del colgamiento del líquido permite el cálculo de las velocidades promedio de cada fase y su diferencia, conocida como velocidad de resbalamiento. El resbalamiento del gas sobre el líquido es responsable de la transferencia de energía entre las fases.

El factor de fricción para flujo de una fase depende del número de Reynolds, o sea, de las fuerzas viscosas y de inercia y de la rugosidad. En el flujo de dos fases, también influyen las fuerzas de gravedad e interfaciales.

La densidad de la mezcla ( $\rho_m$ ) se define, a partir del colgamiento como;

$$\rho_m = \rho_L HL + \rho_g (1-HL) \quad (1)$$

donde  $\rho_L$  y  $\rho_g$  son las densidades de la fase líquida y gaseosa a condiciones de escurrimiento. Sin considerar el resbalamiento entre las fases, la densidad de la mezcla se calcula con;

$$\rho_{na} = \rho_L \lambda + \rho_g (1-\lambda) \quad (2)$$

donde;

$$\lambda = \frac{q_L'}{q_L' + q_g'} = \frac{1}{1 + \frac{q_o (R-R_a) B_g}{5.615 (q_o B_o + q_v B_v)}} \quad (3)$$

La velocidad de la mezcla se define como;

$$u_m = u_{eL} + u_{eg} \quad (4)$$

y la velocidad real de cada una de las fases se obtiene aplicando el concepto de colgamiento;

$$u_{eL} = \frac{q_L'}{A_L} = \frac{q_L'}{A_p H_L} = u_{eL}/H_L \quad (5)$$

$$u_{eg} = \frac{q_g'}{A_g} = \frac{q_g'}{A_p (1-H_L)} = u_{eg}/(1-H_L) \quad (6)$$

lo anterior es en unidades consistentes.

**Correlación de Beggs-Brill.** El objetivo de la correlación de Beggs-Brill fue el de obtener un método para predecir el colgamiento del líquido y las pérdidas de presión que existen durante el flujo en dos fases en tuberías con diferentes ángulos, y particularmente aplicable en el diseño de tuberías superficiales para terreno montañoso y sartas de tubería de producción para pozos inclinados.

La estimación del flujo de fluidos se basa en un balance de energía entre dos puntos para el fluido en la tubería. Suponiendo que no existe trabajo externo realizado por el fluido o sobre éste, puede escribirse una ecuación diferencial de balance de energía en régimen permanente para una libra masa de fluido, como;

$$\frac{dP}{\rho_m} + \frac{g}{g_c} dh + \frac{v_m}{g_c} dv_m + dW_f = 0 \quad (7)$$

donde  $dW_f$  representa las pérdidas irreversibles por fricción.

Para flujo en una tubería inclinada se tiene;

$$dh = \text{sen}(\theta) dx \quad (8)$$

donde  $dh$  es la distancia vertical,  $\theta$  es el ángulo de inclinación

de la tubería desde la horizontal y  $dx$  es la longitud de la tubería. Sustituyendo 8 en 7, multiplicando por  $\rho_m$  y despejando el gradiente de presión, obtenemos;

$$\frac{dP}{dx} = - \left[ \frac{f}{gc} \rho_m \sin(\theta) + \rho_m \frac{v_m}{gc} \frac{dv_m}{dx} + \rho_m \frac{dW_f}{dx} \right] \quad (9)$$

que se puede escribir como

$$- \frac{dP}{dx} = \left[ \frac{\delta P}{\delta x} \right]_{el} + \left[ \frac{\delta P}{\delta x} \right]_{ac} + \left[ \frac{\delta P}{\delta x} \right]_f \quad (10)$$

esto es, el gradiente de presión total es la suma de los gradientes debidos al cambio de energía potencial, al cambio de energía cinética y a las pérdidas por fricción.

Por definición, el gradiente de presión por fricción está dado por;

$$\left[ \frac{\delta P}{\delta x} \right]_f = \frac{f_p \rho_m v_m^2}{2 gc d} = \frac{f_p G_m v_m}{2 gc d} \quad (11)$$

El término de energía cinética o de aceleración es despreciable en la mayoría de los casos prácticos, éste se puede

calcular con;

$$\left[ \frac{\delta P}{\delta x} \right]_{ac} = \frac{\rho_m u_m}{\xi c} \frac{du_m}{dx} \quad (12)$$

si,

$$u_m = G_L/\rho_L + G_g/\rho_g$$

entonces;

$$\left[ \frac{\delta P}{\delta x} \right]_{ac} = \frac{\rho_m u_m}{\xi c} \left[ \frac{d(G_L/\rho_L)}{dx} + \frac{d(G_g/\rho_g)}{dx} \right] \quad (13)$$

aunque la derivada de  $(G_L/\rho_L)$  con respecto a  $x$  no es cero, es pequeña comparada con la derivada de  $(G_g/\rho_g)$  con respecto a  $x$  debido a la diferencia de compresibilidades del líquido y el gas.

Por tanto;

$$\left[ \frac{\delta P}{\delta x} \right]_{ac} = \frac{\rho_m u_m}{\xi c} \left[ \frac{d(G_g)/dx}{\rho_g} - \frac{G_g}{\rho_g^2} \frac{d(\rho_g)}{dx} \right] \quad (14)$$

suponiendo que;

$$\frac{d(G_g)/dx}{\rho_g} \ll \frac{G_g}{\rho_g^2} \frac{d(\rho_g)}{dx}$$

obtenemos;

$$\left[ \frac{\delta P}{\delta x} \right]_{ac} = - \frac{\rho_m u_m}{g_c} \frac{G_g}{\rho_g^2} \frac{d(\rho_g)}{dx} \quad (15)$$

Por otro lado, a partir de la ley de los gases;

$$\rho_g = \frac{P M}{Z R T}$$

y derivando,

$$\frac{d(\rho_g)}{dx} = \frac{d}{dx} \left[ \frac{P M}{Z R T} \right]$$

por lo que;

$$\frac{d(\rho g)}{dx} = \frac{M}{Z R T} \frac{dP}{dx} + \frac{P}{Z R T} \frac{dM}{dx} - \frac{P M}{Z^2 R T} \frac{dZ}{dx} - \frac{P M}{Z R T^2} \frac{dT}{dx} \quad (16)$$

dividiendo entre

$$\rho g = \frac{P M}{Z R T}$$

$$\frac{d(\rho g)}{dx} = \rho g \left( \frac{1}{P} \frac{dP}{dx} + \frac{1}{M} \frac{dM}{dx} - \frac{1}{Z} \frac{dZ}{dx} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dx} \right)$$

... (17)

de aquí se puede suponer que,

$$\frac{1}{M} \frac{dM}{dx} - \frac{1}{Z} \frac{dZ}{dx} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dx} < < \frac{1}{P} \frac{dP}{dx}$$

por tanto;

$$\frac{d(\rho g)}{dx} = \frac{\rho g}{P} \frac{dP}{dx} \quad (18)$$

sustituyendo 18 en 13;

$$\left[ \frac{\delta P}{\delta x} \right]_{oc} = - \frac{\rho_m u_m}{g_c} \frac{G g}{\rho g^2} \frac{\rho g}{P} \frac{dP}{dx} = - \frac{\rho_m u_m u_{sg}}{g_c P} \frac{dP}{dx} \quad (19)$$

El cálculo del gradiente de presión causado por el cambio de elevación es;

$$\left[ \frac{\delta P}{\delta x} \right]_{el} = \frac{\epsilon}{g_c} \text{sen}(\theta) \rho_m \quad (20)$$

que es lo mismo que,

$$\left[ \frac{\delta P}{\delta x} \right]_{el} = \frac{\epsilon}{g_c} \left[ \rho_L H_L + \rho_g (1 - H_L) \right] \text{sen}(\theta) \quad (21)$$

Por la sustitución de las ecuaciones 11, 19 y 21 en la

ecuación 10 y arreglando:

$$-\frac{dP}{dx} = \frac{\frac{\epsilon}{g_c} \text{sen}(\theta) \left[ \rho_L H_L + \rho_g(1-H_L) \right] + \frac{f_{tp} G_m u_m}{2 g_c d}}{1 - \left[ \rho_L H_L + \rho_g(1-H_L) \right] \frac{u_m u_{ag}}{g - P}}$$

... (22)

cuando  $H_L$  tiende a uno, la ecuación anterior se aplica para flujo de líquido; cuando  $H_L$  se aproxima a cero, se aplica para flujo de gas. Así también, cuando el ángulo de inclinación de la tubería ( $\theta$ ) sea cero,  $+90$  o  $-90$  se tendrá flujo horizontal o vertical respectivamente.

Las incógnitas de la ecuación 22 son el colgamiento del líquido ( $H_L$ ), utilizado para calcular la densidad in-situ; y  $f_{tp}$  el factor de fricción utilizado para calcular las pérdidas por fricción.

Para desarrollar las correlaciones se diseñó y construyó un equipo experimental en el cual se pueden medir los gastos de gas y líquido, el gradiente de presión, el ángulo de inclinación y el colgamiento del líquido.

Los fluidos utilizados fueron aire y agua. Los

parámetros estudiados y su rango de variación fueron los siguientes:

- Gasto de gas; de cero a 300 MM pie<sup>3</sup> @ c.s./día.
- Gasto de líquido; de cero a 30 gal/mín.
- Presión promedio; de 35 a 95 lb/pg<sup>2</sup>abs.
- Diámetro de la tubería; de 1 y 1.5 pulgadas.
- Colgamiento del líquido; de cero a 0.87.
- Gradiente de presión; de cero a 0.80 lb/pg<sup>2</sup>/pie.
- Ángulo de inclinación; de -90 a +90 grados.
- Patrón de flujo.

El procedimiento de prueba, diseñado para acentuar el efecto del cambio de inclinación sobre el colgamiento y la caída de presión, consistió de los siguientes pasos:

- 1.- Se fijó el gasto de gas.
- 2.- Se fijó el gasto de líquido.
- 3.- Lográndose las condiciones de régimen permanente, se activó un sistema de medición de presión, registrándose las presiones y calculándose las caídas de presión.
- 4.- Una vez registradas las presiones, los gastos y las temperaturas, se midió el colgamiento en las secciones cuesta arriba y cuesta abajo. Se repitió la medición al menos diez veces promediando el colgamiento leído.
- 5.- Se cambió el ángulo de la tubería repitiendo los pasos del uno al cuatro para cada ángulo probado.

6.- Se cambió el gasto de gas y se repitieron los pasos dos a cinco.

7.- Se modificó el gasto de líquido y se repitieron los pasos del uno al seis.

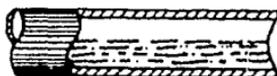
Las pruebas se realizaron en una tubería de una pulgada de diámetro que posteriormente se cambió a otra de 1.5 pg. Se obtuvieron un total de 584 mediciones de caída de presión y de colgamiento de líquido promedio.

Correlación del colgamiento de líquido. Graficando los datos del colgamiento de líquido contra el ángulo de inclinación para gastos constantes se observó una dependencia entre ellos. Esto es debido a que, en cuanto el ángulo de la tubería es incrementado desde la horizontal, las fuerzas de gravedad que actúan en el líquido causan un decremento en la velocidad del mismo, incrementando el resbalamiento y el colgamiento. Posteriormente, en cuanto el ángulo se incrementa, el líquido paulatinamente va ocupando el área total de la tubería, provocando que las grandes burbujas de gas desplacen al líquido hacia arriba y por tanto disminuye el colgamiento, el cual cambia con el ángulo de inclinación, pero también con el gasto de flujo.

Para obtener la correlación del colgamiento del líquido, el flujo en dos fases se clasificó en tres patrones de flujo; segregado, intermitente y distribuido (figura 2-1).

## FLUJO SEGREGADO

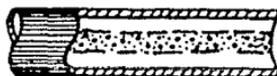
ESTRATIFICADO



ONDULADO



ANULAR



## FLUJO INTERMITENTE

TAPON



BACHE



## FLUJO DISTRIBUIDO

BURBUJA



NIEBLA

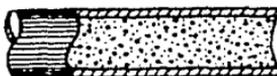


FIGURA 2-1 PATRONES DE FLUJO  
(CORRELACION DE BEGGS-BRILL)

Cuando se graficó el número de Froude ( $N_{Fr}$ ) contra  $\lambda$ , las pruebas quedaron en grupos en áreas diferentes. Estas áreas se presentan en el mapa de patrones de flujo de la figura 2-2, que después fué corregido añadiendo un área para el patrón de flujo en transición. El mapa define los patrones de flujo dentro de los cuales se encontrará una condición de flujo dada. Además se presentan ecuaciones ajustadas a las líneas del mapa, de tal forma que puedan determinarse los patrones de flujo sin referirse a él.

El patrón de flujo puede ser determinado como sigue:

TABLA 2-2

PATRON DE FLUJO	CONDICION
Segregado	$\lambda < 0.01$ y $N_{Fr} < L_1$
	$\lambda \geq 0.01$ y $N_{Fr} < L_2$
Transición	$\lambda \geq 0.01$ y $L_2 < N_{Fr} \leq L_3$
Intermitente	$0.01 \leq \lambda < 0.4$ y $L_3 < N_{Fr} \leq L_4$
	$\lambda \geq 0.4$ y $L_3 < N_{Fr} \leq L_4$
Distribuido	$\lambda < 0.4$ y $N_{Fr} \geq L_1$
	$\lambda \geq 0.4$ y $N_{Fr} > L_4$

en donde;

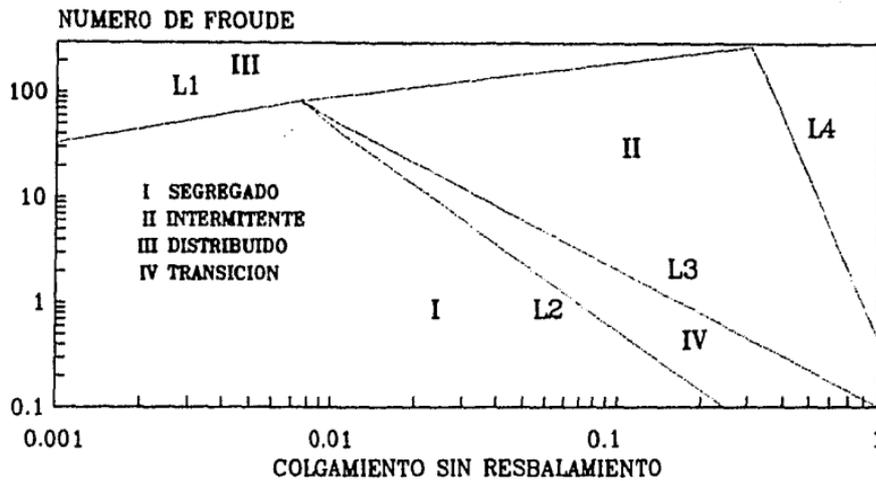


FIGURA 2-2 MAPA DE PATRONES DE FLUJO

$$N_{FR} = \frac{7734.9 \text{ } \mu\text{m}^2}{d^5 \rho_{ns}^2}$$

$$L_1 = 316 \lambda^{0.302} ; \quad L_2 = 0.0009252 \lambda^{-2.4084}$$

$$L_3 = 0.1 \lambda^{-1.4516} ; \quad L_4 = 0.5 \lambda^{-0.738}$$

El colgamiento se calcula a partir de;

$$H_L = \text{EXP} \left[ (C_1 + C_2 \sin(\theta) + C_3 \sin^2(\theta) + C_4 N_L^2) N_{gv}^{C_5} / N_{lv}^{C_6} \right] \quad \dots(23)$$

donde;

$$N_L = 0.15726 \mu_L (1/\rho_L \sigma^3)^{0.25} \quad \text{No. de visc. del liquido.}$$

$$N_{lv} = 1.938 u_{sL} (\rho_L / \sigma)^{0.25} \quad \text{No. de vel. del liquido.}$$

$$N_{gv} = 1.938 u_{sg} (\rho_g / \sigma)^{0.25} \quad \text{No. de velocidad del gas.}$$

Las unidades en las ecuaciones anteriores son;  $\mu$ (cp),  $\rho$ (lb/pie<sup>3</sup>),  $\sigma$ (dina/cm),  $u$ (pie/seg). Las constantes se obtienen de la siguiente tabla;

TABLA 2-3

G <sub>1</sub>	G <sub>2</sub>	G <sub>3</sub>	G <sub>4</sub>	G <sub>5</sub>	G <sub>6</sub>
Para flujo horizontal o ascendente en cualquier patrón;					
-0.38011	0.12988	-0.11979	2.34323	0.47569	0.28866
Para flujo descendente tipo estratificado;					
-1.33028	4.80814	4.17158	56.26227	0.07945	0.50489
Para flujo descendente diferente al estratificado;					
-0.51664	0.78981	0.55163	15.51921	0.37177	0.39395

Correlación del factor de fricción. Los valores para el factor de fricción de las dos fases, fueron obtenidos por la solución de la ecuación de gradiente de presión para  $f_{fp}$ ;

$$f_{fp} = \left[ \frac{dP}{dx} \left( 1 - \frac{\rho_m u_m v_{sg}}{g_c P} \right) - \frac{\xi}{g_c} \text{sen}(\theta) \rho_m \right] \frac{2 g_c d}{G_m u_m}$$

...(24)

El factor de fricción de las dos fases fue normalizado dividiéndolo por un factor de fricción sin resbalamiento ( $f_{ns}$ ), el

cual se obtiene del diagrama de Moody. Asumiendo que se tienen tuberías lisas,  $f_{ns}$  se calcula con;

$$f_{ns} = \left[ 2 \operatorname{Log} \left( \frac{N_{Re}}{4.5223 \operatorname{Log} N_{Re} - 3.8215} \right) \right]^{-2} \quad (25)$$

donde;

$$N_{Re} = \frac{G_m d}{\mu_L \lambda + \mu_g (1-\lambda)} \quad (26)$$

El análisis con regresión lineal del factor de fricción normalizado como variable dependiente y  $\lambda$  y  $H_L$  como variables independientes, indicó una relación del tipo;

$$\frac{f_{fp}}{f_{ns}} = f \left[ \frac{\lambda}{H_L^2} \right]$$

por lo que la ecuación del factor de fricción es;

$$\frac{f_{lp}}{f_{ns}} = \text{EXP}(S) \quad (27)$$

donde;

$$S = \frac{\text{Ln}(y)}{-0.0523 + 3.182 \text{Ln}(y) - 0.8725(\text{Ln}(y))^2 + .01853(\text{Ln}(y))^4}$$

$$y = \lambda / H L^2$$

La ecuación 27 puede hacerse infinita en un punto en el intervalo  $1 < y < 1.2$ , por lo que en este caso la función S se calcula con;

$$S = \text{Ln}(2.2 y - 1.2)$$

**Correlación de Bertuzzi-Tek-Poettmann.** Los autores de la correlación realizaron un estudio del flujo multifásico en tuberías horizontales con base en 267 mediciones experimentales, muestreadas aleatoriamente a partir de aproximadamente mil mediciones presentadas en varias fuentes de literatura. Ellos propusieron un método de predicción de la caída de presión para flujo de fluidos en dos fases en tuberías horizontales.

El objetivo de su estudio fue el de aplicar el concepto de factor de fricción de las dos fases ( $f_{tp}$ ), así como eliminar la necesidad de establecer un patrón de flujo para la predicción de la caída de presión. Los autores presentaron sus resultados en una correlación utilizable por el ingeniero de campo.

Para vencer la resistencia que encuentra cualquier flujo de fluidos durante su trayectoria se necesita una cierta cantidad de energía. La relación de energía básica de cualquier proceso de flujo de fluidos (ley de conservación de energía) establece que la energía de un fluido que entra en un conducto menos la energía disipada en el conducto debido a efectos irreversibles es igual a la energía que sale del conducto.

Basándonos en una unidad de masa de fluido fluyente podemos establecer;

$$\int_{P_1}^{P_2} V dP + \Delta \left[ \frac{u^2}{2gc} \right] + \Delta h + W_f + W_s = 0 \quad (28)$$

Para una tubería horizontal, la diferencia de elevación ( $\Delta h$ ) es cero. Cuando no se hace trabajo sobre o por el fluido  $W_s$  es cero. En la mayoría de los casos el término de energía cinética se puede despreciar. Por lo que la ecuación anterior se reduce a:

$$\int_{P_2}^{P_1} V dP + Wf = 0 \quad (29)$$

Para flujo de una fase, el término de disipación de energía  $Wf$  es expresado como parte de un número adimensional llamado factor de resistencia  $f$ ,

$$f = \frac{2 g_c Wf d}{4 v^2 x} \quad (30)$$

Para flujo en dos fases, en la ecuación 30,  $v$  es la velocidad superficial de la mezcla, basada en la sección transversal total de la tubería;  $V$  en la ecuación 29 es el volumen específico de la mezcla fluyente.

En el flujo en dos fases se involucran cuatro fuerzas principales; de viscosidad, de inercia, interfaciales y de gravedad. Lockhart y Martinelli lograron correlacionar datos para un amplio rango de condiciones despreciando las fuerzas interfaciales y de gravedad. Con base en lo anterior, para los datos usados, se estableció el factor de fricción de las dos fases correlacionado en términos de los números de Reynolds de las fases líquida y gas, cada uno basado en el diámetro de tubería y en el

gasto másico gas-líquido. Así,

$$\phi = (N_{reg})^a (N_{reL})^b \quad (31)$$

donde a y b son función de la relación másica gas-líquido ( $F_{gL}$ );

$$F_{gL} = w_g/w_L; \quad a = F_{gL}/(1 + F_{gL}); \quad b = 1/(\text{EXP}(0.1 F_{gL})) \quad (32)$$

además;

$$N_{reg} = \frac{d v_{ag} \rho_g}{\mu_g}; \quad N_{reL} = \frac{d v_{eL} \rho_L}{\mu_L} \quad (33)$$

cuando  $F_{gL}$  tiende a infinito (todo gas), el valor del exponente a tiende a 1 y el exponente b tiende a cero por lo que  $\phi = N_{reg}$ . Cuando  $F_{gL}$  tiende a cero (todo líquido) entonces el exponente a tiende a cero y b a uno ocasionando que  $\phi = N_{reL}$ . Por tanto, en las condiciones límite la correlación se reduce a aquella para flujo de una sola fase, despreciando la rugosidad relativa.

El factor de fricción puede obtenerse con la figura 2-3 o empleando las siguientes ecuaciones presentadas por Garaichocha<sup>10</sup>:

Para;

$$a) \quad 0 \leq \phi \leq 500$$

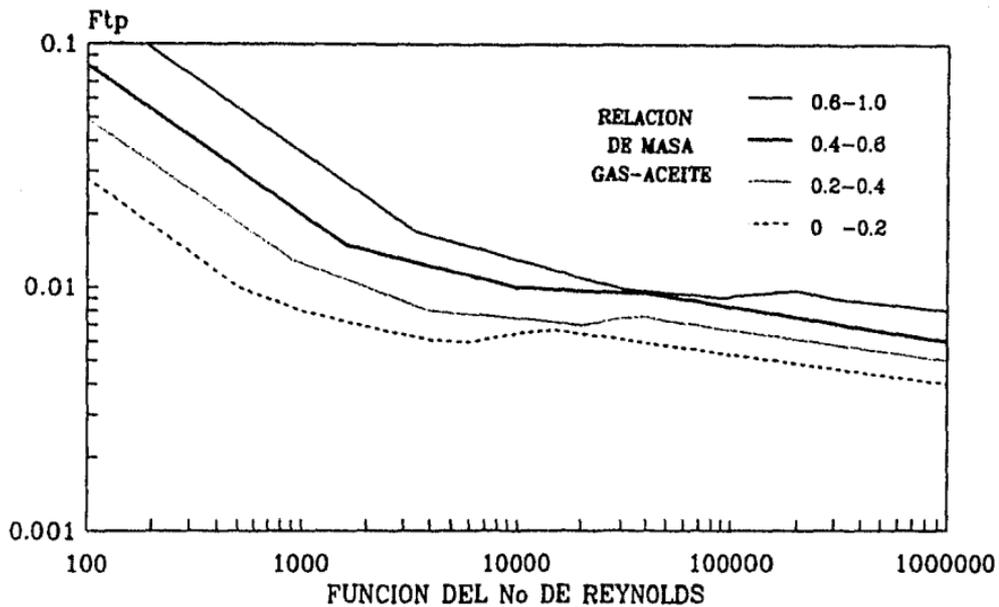


FIGURA 2-3 FACTOR DE PERDIDA DE ENERGIA

$$\text{Log } f_{ip} = 1.225 F_{gL} - 0.06561 \text{ Log } \phi - 0.37 \quad (34)$$

$$b) \phi \geq 10000$$

$$\text{Log } f_{ip} = 0.49 F_{gL} - 0.12616 \text{ Log } \phi - 1.702 \quad (35)$$

$$c) 500 \leq \phi \leq 10000$$

$$\begin{aligned} \text{Log } f_{ip} = F_{500} - 0.6561 Y + (1.1056 + 1.7723 \Delta F) Y^2 - \\ - (0.46214 + 0.90817 \Delta F) Y^3 \end{aligned} \quad (36)$$

donde,

$$\Delta F = F_{10000} - F_{500}$$

$$F_{10000} = \text{Log } f_{ip}(F_{gL}, \phi = 10000)$$

que se obtiene con la ecuación 35 usando el valor correspondiente de  $F_{gL}$  y con  $\phi = 10000$ .

$$F_{500} = \text{Log } f_{ip}(F_{gL}, \phi = 500)$$

que se obtiene con la ecuación 34 con el valor correspondiente de  $F_{gL}$  y con  $\phi = 500$ .

$$Y = \text{Log } \phi - 2.699$$

(36)

**Correlación de Eaton.** Al investigar el flujo en dos fases en tuberías horizontales y a partir de mediciones experimentales, Eaton et al<sup>d</sup> desarrollaron tres correlaciones. Utilizaron agua y aceite crudo o destilado como fase líquida (por separado) y gas natural como fase gaseosa.

Las correlaciones se utilizan para determinar el colgamiento de líquido, el factor de pérdida de energía y el patrón de flujo.

Cualquier fluido que viaje a través de un ducto tiene una cierta cantidad de energía asociada con cada unidad de masa de fluido. Esta energía va perdiéndose o transformándose a lo largo del flujo. Si las pérdidas de energía pueden ser cuantificadas, la energía total en dos puntos en cualquier sistema puede ser balanceada.

La ecuación básica de balance de energía en forma diferencial, basada en una libra de fluido fluyente, considerando flujo horizontal y que no existe trabajo externo por el fluido es;

$$144 V dP + \frac{u}{\xi^c} du + \frac{\xi}{\xi^c} dWl = 0 \quad (38)$$

que se puede escribir para cada fase fluyente. Para la fase líquida;

$$144 w_L v_L dP + \frac{w_L u_L}{\xi^c} du_L + \frac{\xi w_L}{\xi^c} dWl = 0 \quad (39)$$

para el gas;

$$144 w_g v_g dP + \frac{w_g u_g}{\xi^c} du_g + \frac{\xi w_g}{\xi^c} dWlg = 0 \quad (40)$$

sumando las dos ecuaciones anteriores e integrando entre dos puntos (1 y 2). Considerando que;

$$\int w_l dWl = \int [w_L dWl + w_g dWlg] \quad (41)$$

y que;

$$dWf = \frac{f u_m^2}{2 g_c d} dx \quad (42)$$

obtenemos;

$$144 \left[ w_L \int_{P_1}^{P_2} V_L dP + w_g \int_{P_1}^{P_2} V_g dP \right] + \frac{w_L}{g_c} \frac{\Delta u_L^2}{2} + \frac{w_g}{g_c} \frac{\Delta u_g^2}{2} + \frac{f w_L u_m^2}{2 g_c d} \Delta x = 0 \quad (43)$$

para pequeños decrementos se puede tener;

$$\int_{P_1}^{P_2} V_L dP = -V_L (P_1 - P_2) = -V_L \Delta P \quad (44)$$

$$\int_{P_1}^{P_2} V_g dP = -V_g (P_1 - P_2) = -V_g \Delta P \quad (45)$$

con lo que la ecuación 43 queda;

$$\begin{aligned}
 & -144 \left[ w_L V_L + w_g V_g \right] \Delta P + \frac{w_L \Delta v_L^2 + w_g \Delta v_g^2}{2 g c d} + \\
 & + \frac{f w_l v_m^2}{2 g c d} \Delta x = 0 \qquad (46)
 \end{aligned}$$

Como  $w_L$ ,  $w_g$  y  $w_l$  tienen unidades de masa por tiempo, la ecuación anterior es un balance de energía por tiempo, o más exactamente, un balance de potencia entre dos puntos. Pero;

$$\bar{\rho}_L = 1/V_L; \quad \bar{\rho}_g = 1/V_g$$

por lo que finalmente obtenemos;

$$\begin{aligned}
 & -144 \left[ \frac{w_L}{\bar{\rho}_L} + \frac{w_g}{\bar{\rho}_g} \right] \Delta P + \frac{w_L \Delta v_L^2 + w_g \Delta v_g^2}{2 g c} + \\
 & + \frac{f w_l v_m^2}{2 g c d} \Delta x = 0 \qquad (47)
 \end{aligned}$$

donde;

$$u_m = \frac{q_g' + q_L'}{A_p} = u_{sL} + u_{sg} \quad (48)$$

lo anterior es a condiciones medias de flujo.

Colgamiento de líquido. La correlación del colgamiento de líquido se generó a partir de datos experimentales agua-gas y es obtenida en base a un análisis adimensional ya contemplado por otros investigadores.

La función para el colgamiento de líquido está dada por;

$$HL = HL(\psi) \quad (49)$$

donde;

$$\psi = \frac{N_{Lv}^{0.575}}{N_{gv} N_d^{0.0277}} \left[ \frac{P}{P_b} \right]^{0.05} \left[ \frac{N_L}{N_{Lb}} \right]^{0.1} \quad (50)$$

La figura 2-4 muestra la variación del colgamiento de líquido con este grupo adimensional. La definición y los valores límite de las variables adimensionales se dan en la tabla 2-4.

La correlación de Eaton para el colgamiento es

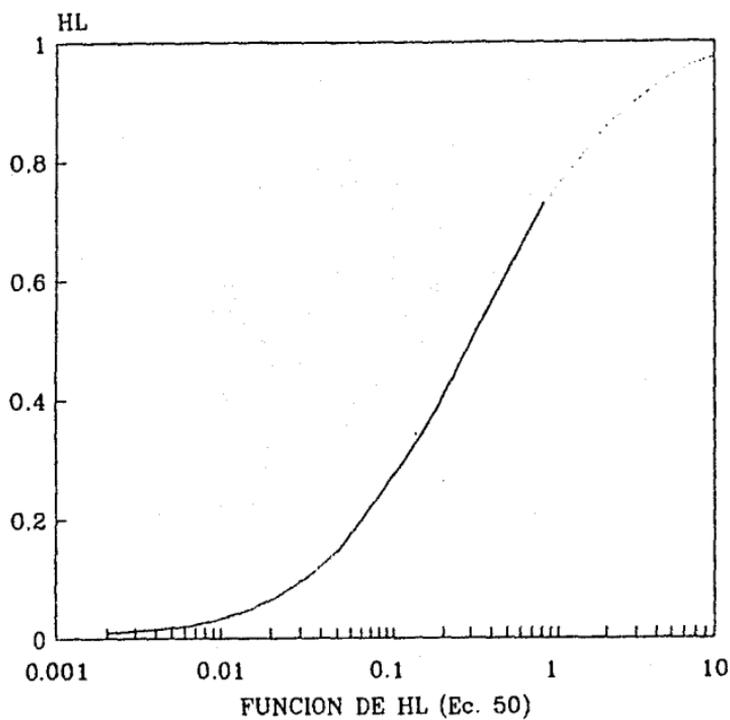


FIGURA 2-4 COLGAMIENTO DE LIQUIDO

utilizable sólo para tuberías comerciales horizontales y para líquidos con viscosidad menor de 20 cp.

Factor de pérdida de energía. El término factor fricción, que es en realidad un término de pérdida de energía que contiene todas las pérdidas desconocidas, incluyendo las pérdidas por fricción, también fué estudiado por Eaton. La correlación de pérdida de energía se muestra en la figura 2-5 y consiste de una sola línea recta que se divide en la parte inferior, correspondiendo las divisiones a diferentes diámetros de tubería. El valor de  $f_{ip}$  se obtiene despejando de la ecuación que representa las ordenadas, después de calcular el valor de las abscisas, entrar a la gráfica y leer la ordenada.

TABLA 2-4

Variable adimensional	Definición	L í m i t e s	
		Inferior	Superior
$N_{Lv}$	$1.938 \text{ vel } (\rho L / \sigma)^{-2.5}$	0.0697	13.2460
$N_{Lv}$	$1.938 \text{ usg } (\rho g / \sigma)^{-2.5}$	1.5506	140.5370
$N_d$	$120.872 \text{ d } (\rho L / \sigma)^{-5.0}$	20.3395	39.6277
$N_L$	$0.15726 \mu L (\rho L \sigma^3)^{-2.5}$	$\mu L \leq 20 \text{ cp}$	
$P/P_b$	$P/14.65$	5	65

$$N_{Lb} = 0.00226$$

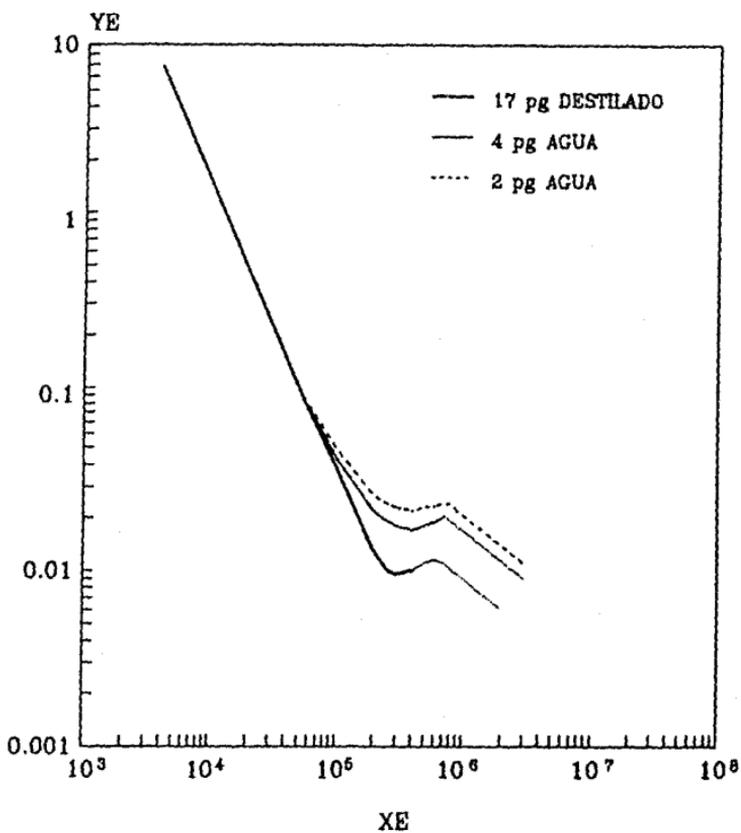


FIGURA 2-5 FACTOR DE PERDIDA DE ENERGIA

El valor de las ordenadas es  $YE = f_p(FLt)^{0.4}$  y el valor de las abscisas es;

$$XE = 1488.1617 (Fgt)^{0.5} (db/d)^{1.25} (u d/\mu g)$$

$$FLt = wL/wt; Fgt = wg/wt; u = wt/Ap; db = 0.083333 \text{ pie}$$

Patrones de flujo. La correlación para determinar los patrones de flujo se realizó a partir de mediciones y observaciones del flujo en varios puntos de la tubería. También se utilizó una función del número de Reynolds en dos fases;

$$N_{Re2} = 1488.1617 \left[ \frac{w_t HL^2}{d \mu t} \right] \quad (51)$$

junto con la función de Weber en dos fases;

$$We_b = 453.4736 \left[ \frac{\bar{\rho}_L u_L^2 HL^3}{\sigma} + \frac{\bar{\rho}_g u_g^2 (1-HL)^3}{\sigma} \right] \quad (52)$$

donde,

$$\mu t = \mu_L HL \mu_g (1-HL)$$

$$u_g = u_g - u_L$$

Los dos grupos adimensionales separan los diferentes datos de patrones de flujo. La figura 2-6 muestra la correlación final de regimenes de flujo.

Eaton llegó a la conclusión de que las variables que controlan las pérdidas de energía en el flujo en tuberías horizontales, también controlan el tipo de patrón de flujo.

Lo anterior se observa en la figura 2-6 donde en la región izquierda se tiene una relación lineal, existiendo solamente flujo laminar, estratificado y ondulado. En el centro o región de transición existen varios patrones de flujo inestables (ondulado, rizado y bache). La región del lado derecho contiene casi exclusivamente los patrones niebla y espuma.

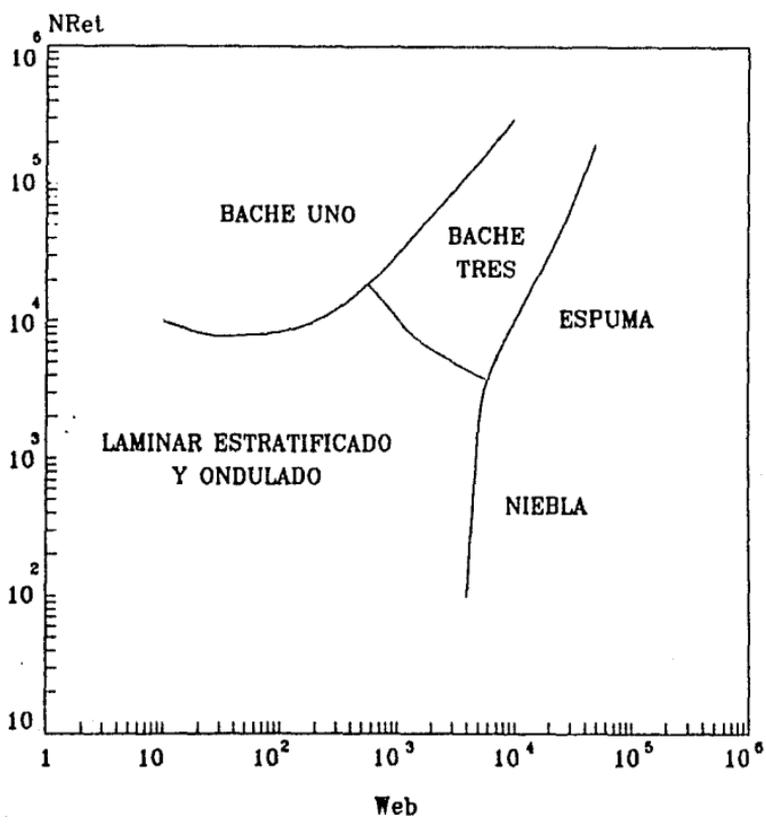


FIGURA 2-6 PATRONES DE FLUJO UTILIZADOS POR EATON

## CAPITULO III

### FUNDAMENTOS DE ANALISIS NODAL

El objetivo del análisis nodal es el de combinar los componentes de sistemas físicos (como son: pozos de aceite o de gas, líneas de descarga, redes de tuberías, etc.) para predecir la capacidad de flujo del sistema y optimizar dichos componentes.

La figura 3-1 muestra las caídas de presión que pueden existir en un sistema de producción de hidrocarburos, desde el yacimiento hasta el separador. Comenzando desde el yacimiento, esto se representa con:

$$\Delta P_i = P_r - P_{vfo} = \text{caída de presión en el medio poroso}$$

$$\Delta P_z = P_{vfo} - P_{vf} = \text{caída de presión en la terminación del pozo}$$

$$\Delta P_s = P_{ux} - P_{ur} = \text{caída de presión a través del}$$

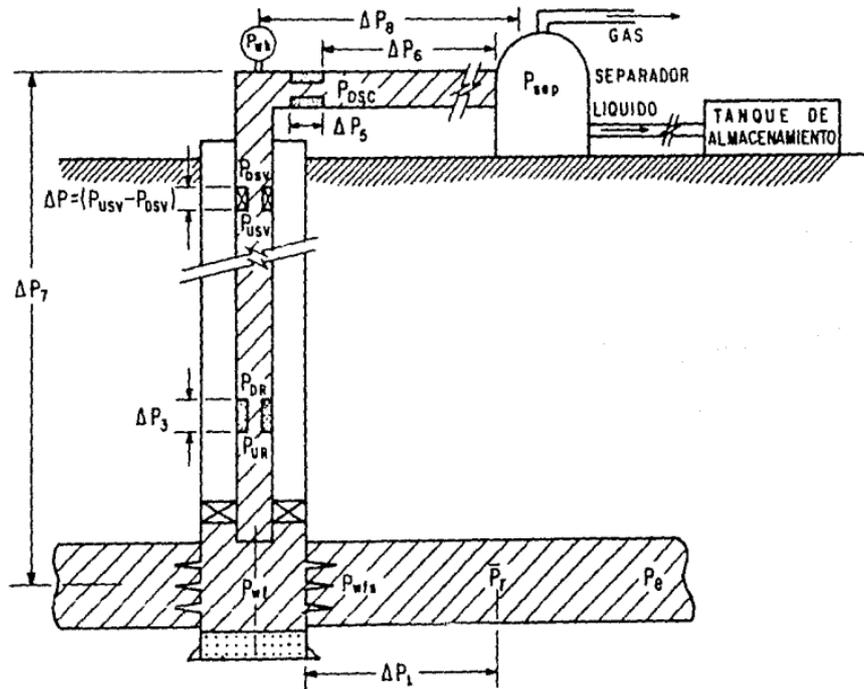


FIGURA 3-1.- CAIDAS DE PRESION EN UN SISTEMA COMPLETO.

estrangulador, regulador o niple de la tubería de producción

$\Delta P_4 = P_{usv} - P_{dsv} =$  caída de presión en la válvula de seguridad

$\Delta P_5 = P_{vh} - P_{dsc} =$  caída de presión a través del estrangulador superficial

$\Delta P_6 = P_{dsc} - P_{sep} =$  caída de presión en la línea superficial de descarga

$\Delta P_7 = P_{vf} - P_{vh} =$  caída de presión total en la tubería de producción, incluye  $\Delta P_3$  y  $\Delta P_4$

$\Delta P_8 = P_{vh} - P_{sep} =$  caída de presión total en la línea superficial de flujo, incluye  $\Delta P_5$

El análisis nodal de sistemas involucra la manera en la cual se interrelacionan las caídas de presión. En particular, se analiza la relación entre la capacidad del pozo para producir fluidos con la capacidad del sistema para manejar esos fluidos. La manera en la cual se estudia el efecto de los componentes se realiza por un concepto nodal.

Para resolver problemas de sistemas de producción totales, los nodos son colocados entre segmentos del sistema (conectores) definidos por ecuaciones o correlaciones. La figura 3-2 muestra la localización de los nodos.

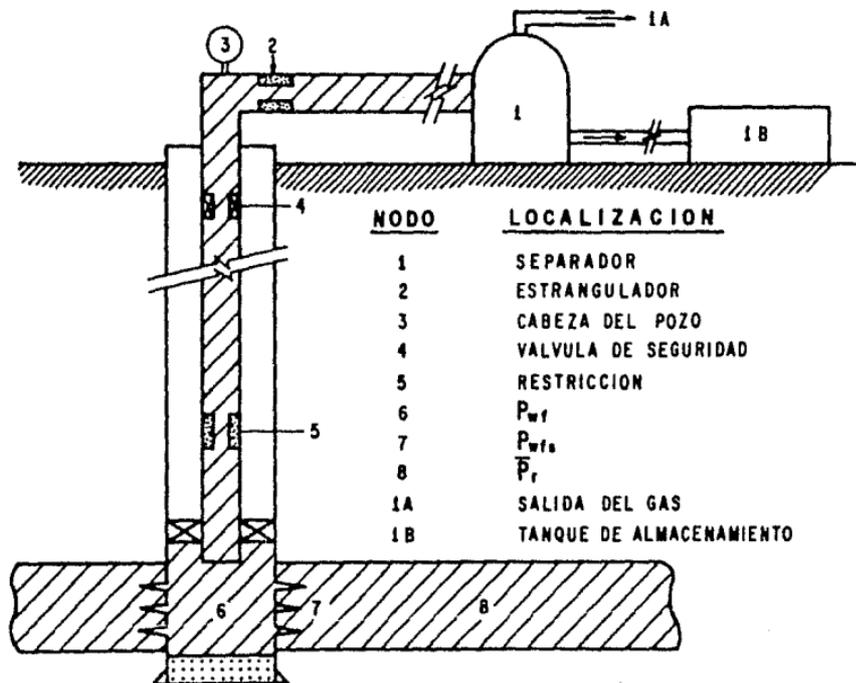


FIGURA 3-2.- LOCALIZACION DE LOS NODOS.

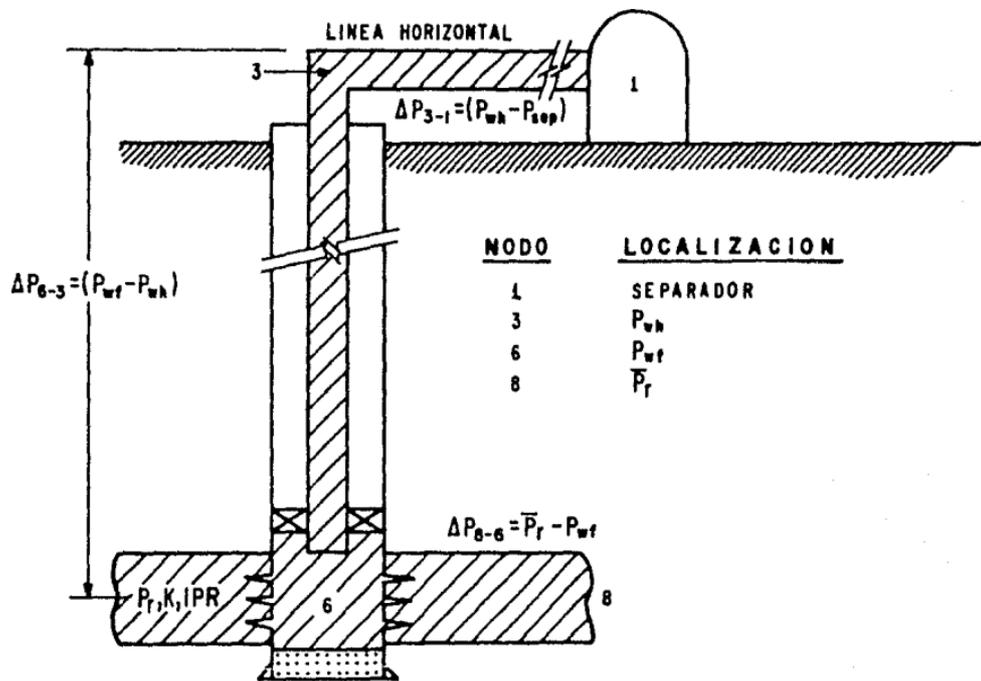


FIGURA 3-3.- NODOS EN UN SISTEMA DE PRODUCCION SIMPLE.

En un sistema de producción total existe al menos un punto o nodo donde existe una diferencial de presión a través de él mismo, este nodo es llamado *nodo funcional*, ya que la respuesta del gasto de flujo a la presión se puede representar por alguna función física o matemática. Un nodo funcional es aquel en donde existe una pérdida de presión inmediata en una pequeña distancia. Pueden ser nodos funcionales los estranguladores superficiales, válvulas de seguridad, estranguladores de fondo, reguladores, terminaciones con empacamiento de grava y terminaciones normalmente perforadas.

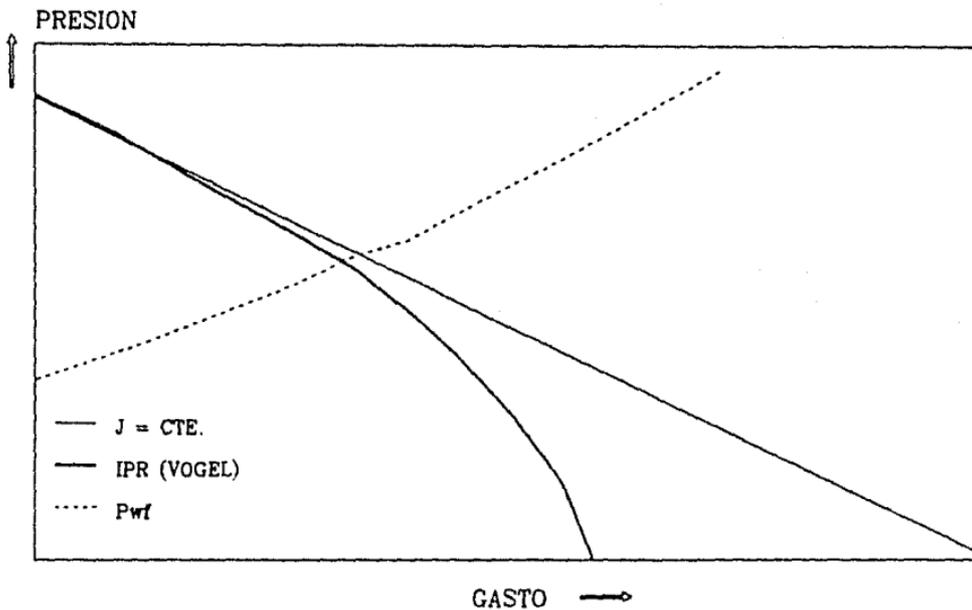
El nodo 1 (figura 3-2) representa la presión de separación, la cual es generalmente regulada a un valor constante, sin embargo, algunas presiones de separación cambian con el gasto y deberán ser tomadas en cuenta en la forma más apropiada. Existen por tanto dos posiciones donde las presiones no son función del gasto de flujo, estas son la presión del yacimiento ( $P_r$ ) en el nodo 8 y la presión de separación ( $P_{sep}$ ) en el nodo 1. Por esta razón cualquier solución por ensaye y error al problema del sistema total debe comenzar en el nodo 1, nodo 8, o ambos si un nodo intermedio como el 3 o 6 es seleccionado como nodo de solución. Una vez que el nodo de solución es seleccionado, las pérdidas o ganancias de presión desde el punto de comienzo son adicionadas hasta que se llega al nodo de solución. De esta forma:

se puede determinar el gasto de flujo posible utilizando el nodo 8, nodo 6, nodo 1 u otras posiciones. El nodo seleccionado depende del componente que queremos aislar para evaluación.

En resumen, se presenta un análisis nodal para evaluar efectivamente un sistema de producción completo. Considerando todos los componentes en el pozo, comenzando con la presión estática ( $P_r$ ) y finalizando con el separador. Esto incluye el flujo a través del medio poroso, a través de las perforaciones y terminación, flujo ascendente en la sarta de tuberías de producción pasando por una posible restricción de fondo y/o válvula de seguridad, y flujo en la línea horizontal pasando por el estrangulador superficial y el separador.

Los nodos de solución pueden ser adecuadamente seleccionados para mostrar mejor el efecto de ciertas variables, tales como la capacidad de flujo del yacimiento, los disparos, las restricciones, las válvulas de seguridad, los estranguladores superficiales, la sarta de tubería de producción, las líneas de flujo y las presiones de separación.

Se debe incorporar a la solución las correlaciones apropiadas de flujo multifásico y las ecuaciones para restricciones, estranguladores, etc.



FIGURÀ 3-4 SOLUCION EN EL FONDO DEL POZO

Un medio efectivo de analizar un pozo, haciendo cambios recomendados o planeando adecuadamente la estructura de un nuevo pozo puede ser realizado utilizando el análisis nodal del sistema. Este procedimiento ofrece un camino para optimizar económicamente los pozos productores.

Pozos de aceite. Se partirá de un sistema como el mostrado en la figura 3-3, los datos son  $P_{sep}$ ,  $P_r$ , diámetro y longitud de tuberías, propiedades de los fluidos y temperatura.

Probablemente la posición más común de solución es en el fondo del pozo (nodo 6), para lo cual el sistema es dividido en dos componentes; el yacimiento o capacidad del pozo y el sistema total de tuberías.

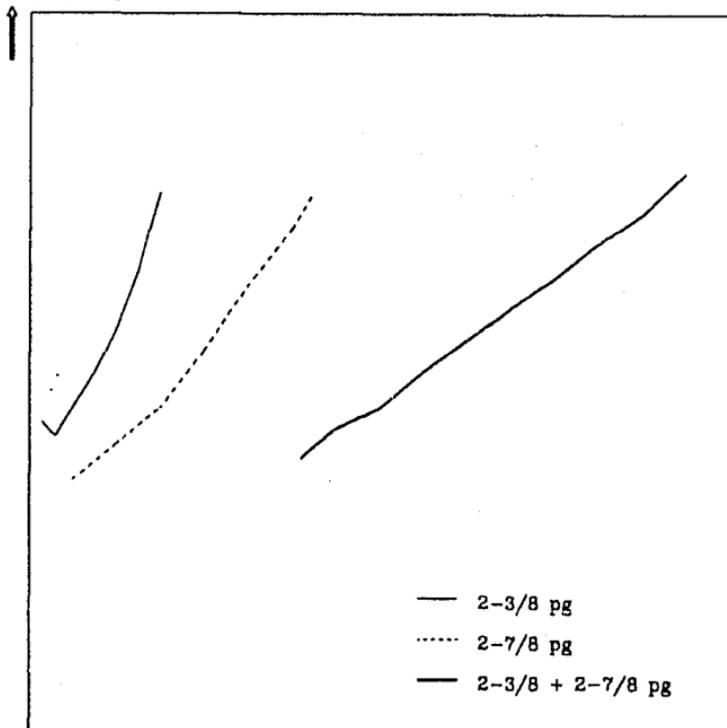
El procedimiento de solución es como sigue:

a) Suponer varios gastos de flujo, calcular la presión correspondiente y construir la curva de comportamiento de afluencia al pozo (IPR).

b) Suponer varios gastos de flujo y obtener la presión necesaria en la cabeza del pozo para mover los fluidos por la línea horizontal al separador, usando una correlación de flujo multifásico apropiada.

c) Utilizando los gastos supuestos y su presión correspondiente en la cabeza del pozo anteriores, determine las

PRESION



— 2-3/8 pg

..... 2-7/8 pg

— 2-3/8 + 2-7/8 pg

GASTO →

FIGURA 3-5 FLUJO EN TUBERIAS PARALELAS

presiones requeridas en la entrada de la tubería de producción (nodo de solución) ayudándose con correlaciones de flujo multifásico.

d) Grafique los gastos y presiones obtenidos en el paso (a) y en el paso (c). La intersección de las curvas muestra el gasto de flujo del sistema (figura 3-4). Este gasto no es el máximo, mínimo u óptimo, es el gasto al cual el pozo producirá con el sistema de tuberías instalado. El gasto puede cambiarse sólo al cambiar alguna parte del sistema, esto es, diámetro de la tubería, estrangulador, presión de separación, o modificando la curva IPR con un tratamiento de estimulación.

Quando existen dos sartas de tubería de producción en forma paralela o concéntrica, el procedimiento de solución puede ser (a partir de la presión de separación o la presión única en la cabeza del pozo) como sigue:

a) Suponga varios gastos de flujo.

b) Determine las presiones a la entrada de las tuberías de producción (nodo de solución), independientemente para cada sarta.

c) Grafique la presión contra el gasto.

d) Para cada presión sume los gastos de cada una de las sartas de flujo.

e) Grafique la suma de gastos contra las presiones

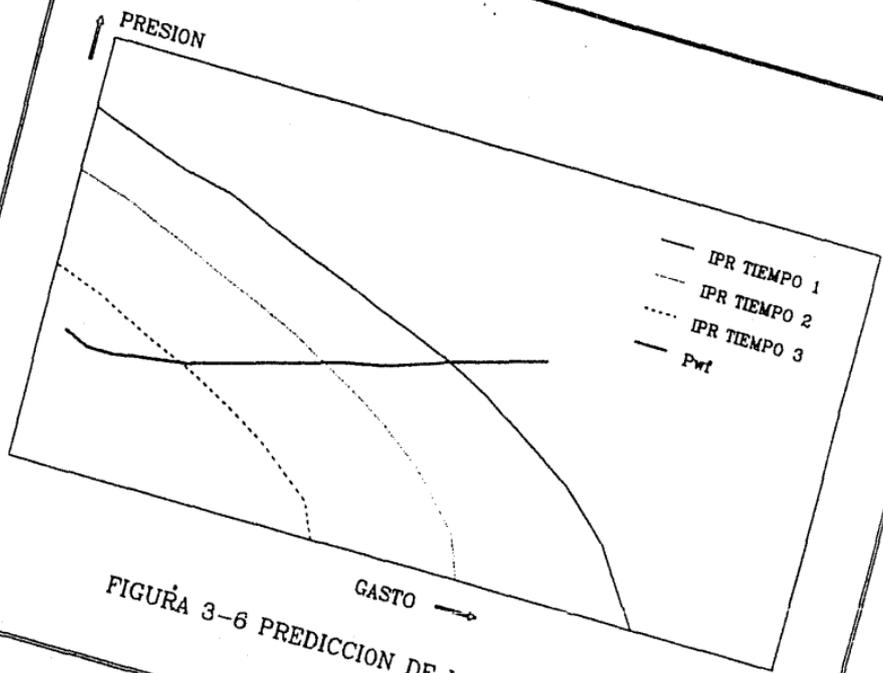


FIGURA 3-6 PREDICCIÓN DE LA PRODUCCION

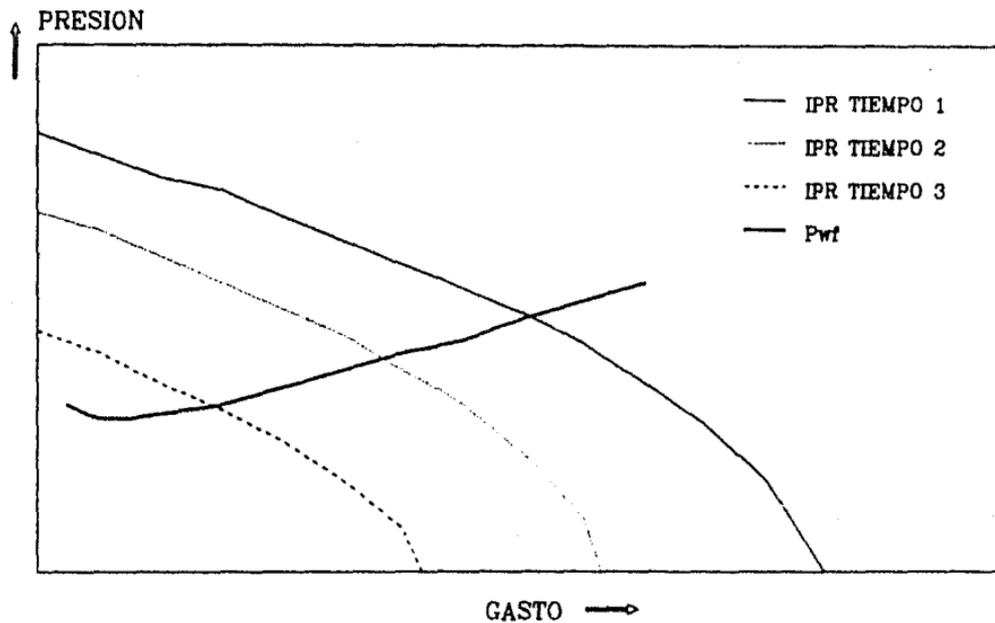


FIGURA 3-6 PREDICCIÓN DE LA PRODUCCIÓN

(figura 3-5).

f) El paso final para determinar el gasto de flujo es el de graficar la curva IPR apropiada.

La selección del fondo del pozo (nodo 6) como nodo de solución permite observar los cambios de gastos al cambiar la presión del yacimiento a lo largo del tiempo (figura 3-6). También puede mostrar las diferencias del gasto esperado al estimular un pozo (figura 3-7, FE = eficiencia de flujo).

La posición de solución más común, después del nodo 6, es en la parte superior del pozo (nodo 3). El sistema se divide en dos componentes; uno contiene al separador y la línea superficial, el otro se forma con el yacimiento y la sarta de tubería de producción.

El procedimiento de solución es como sigue:

- a) Suponer varios gastos de flujo.
- b) Comenzar con la presión de separación, determinar las presiones en la cabeza del pozo para los gastos supuestos y graficar.
- c) Utilizando los gastos supuestos, iniciar ahora desde la presión estática del yacimiento y determinar las presiones de fondo fluyendo.

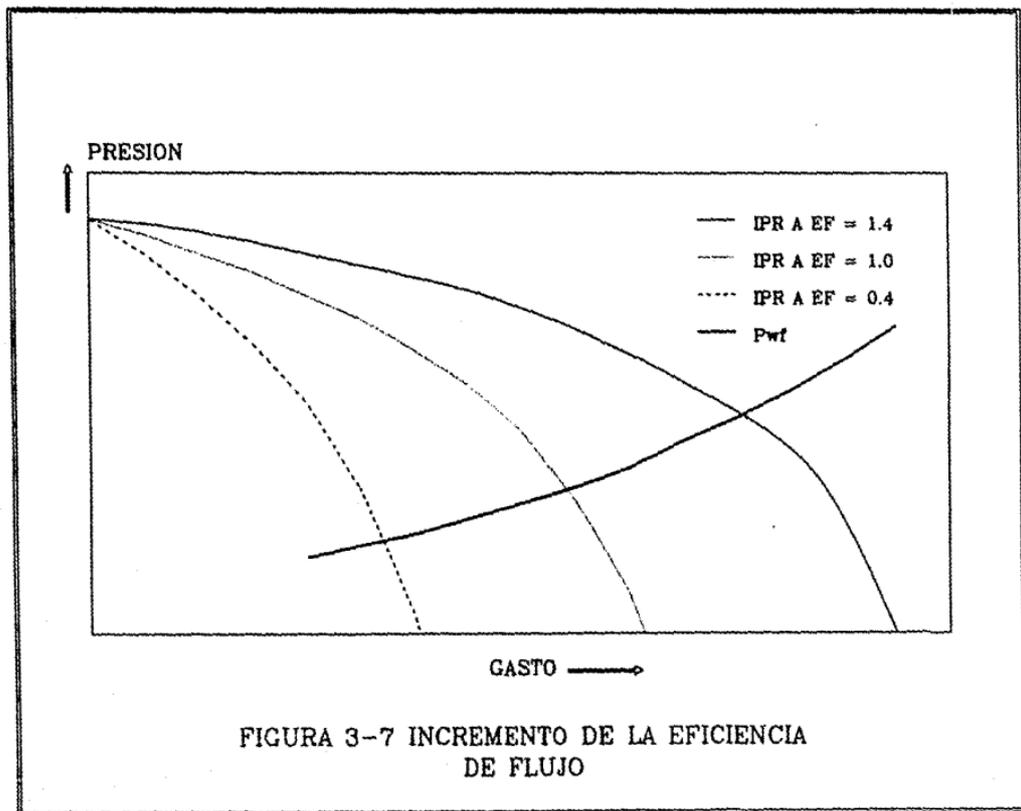


FIGURA 3-7 INCREMENTO DE LA EFICIENCIA DE FLUJO

d) A partir de las presiones fluyentes determinadas y el gasto de cada una de ellas, calcular la presión en la cabeza del pozo y graficar estos valores (figura 3-8). La intersección de las dos curvas de presión determina el gasto de flujo del sistema.

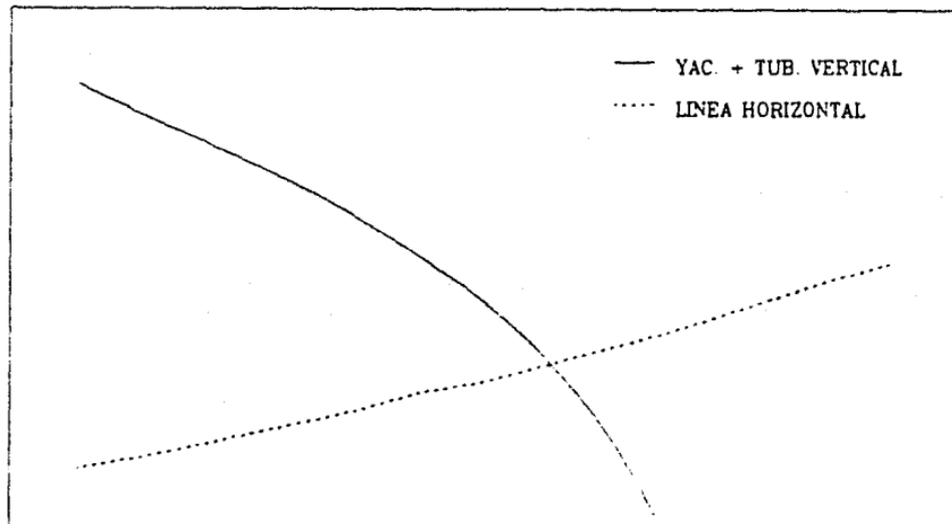
El uso del nodo 3 como nodo de solución permite observar el efecto de cambiar el diámetro de la línea superficial.

La selección de la presión de separación como nodo de solución es importante cuando se diseña un sistema de bombeo neumático o cuando la presión del gas del separador debe incrementarse para fluir en un sistema de mayor presión. La presión de separación controla la presión de succión del compresor, lo que la relaciona directamente con su potencia. Por otra parte, el incremento o disminución de la presión de separación no necesariamente afecta en forma favorable al gasto de flujo del sistema.

Antes de seleccionar o cambiar la presión de separación, es recomendable analizar el diámetro de la línea de descarga, dado que existen casos de campo donde, al cambiar la línea de descarga se observan mayores cambios en el gasto sin cambiar la presión de separación.

Procedimiento de solución (nodo 1):

PRESION



— YAC. + TUB. VERTICAL  
- - - LINEA HORIZONTAL

GASTO →

FIGURA 3-8 NODO DE SOLUCION EN LA  
CABEZA DEL POZO

a) Suponer varios gastos de flujo.

b) Comenzar con  $P_r$  y determinar las presiones de fondo fluyendo para los gastos supuestos.

c) A continuación, con las presiones calculadas en el punto anterior, y su gasto correspondiente, calcular las correspondientes presiones en la cabeza.

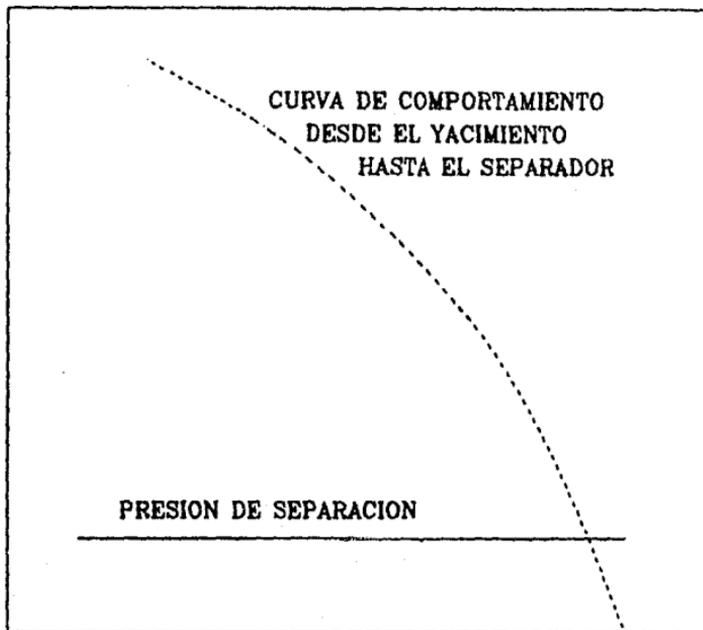
d) Con las presiones en la cabeza del pozo, obtener las presiones de separación para los gastos supuestos correspondientes.

e) Grafique la presión de separación (constante) y las presiones de separación encontradas en el punto anterior. La intersección de las curvas resultantes nos da el gasto que maneja el sistema (figura 3-9).

Tomando la presión de separación como nodo de solución, es fácil visualizar el efecto de ésta sobre el gasto de flujo. El gasto es influenciado por el sistema total, incluyendo la capacidad de producción del pozo (curva IPR) y diámetros y longitud de las tuberías de producción y de descarga.

Tomando al yacimiento como nodo de solución, se puede determinar en forma inmediata el gasto de flujo para diferentes presiones promedio del yacimiento. Aunque bajo condiciones normales, la relación gas disuelto-aceite cambia en cuanto declina la presión estática del yacimiento, y por tanto, se requiere una

PRESION



GASTO →

FIGURA 3-9 NODO DE SOLUCION EN EL SEPARADOR

curva nueva del sistema total en cada momento.

El procedimiento de solución realiza los siguientes pasos:

- a) Suponer varios gastos de flujo.
- b) A partir de la presión de separación, obtener las presiones en la cabeza requeridas para mover los fluidos al separador.
- c) Usando las presiones en la cabeza del pozo, determine las presiones de fondo fluyendo para los gastos supuestos.
- d) Con las presiones fluyentes y su gasto correspondiente, calcular los valores requeridos de presión del yacimiento. Se grafican estos valores y el valor real de la presión del yacimiento. La intersección nos indica el gasto de flujo (figura 3-10).

En el caso de sartas de tubería de producción combinadas, es común tener como nodo de solución el punto de unión de las tuberías. El proceso de solución se puede enlistar así:

- a) Suponer varios gastos de flujo.
- b) Comenzando con la parte superior del nodo de solución, a partir de la presión de separación, obtener las presiones en la cabeza para cada gasto de flujo.
- c) Determinar, para las presiones y gastos anteriores,

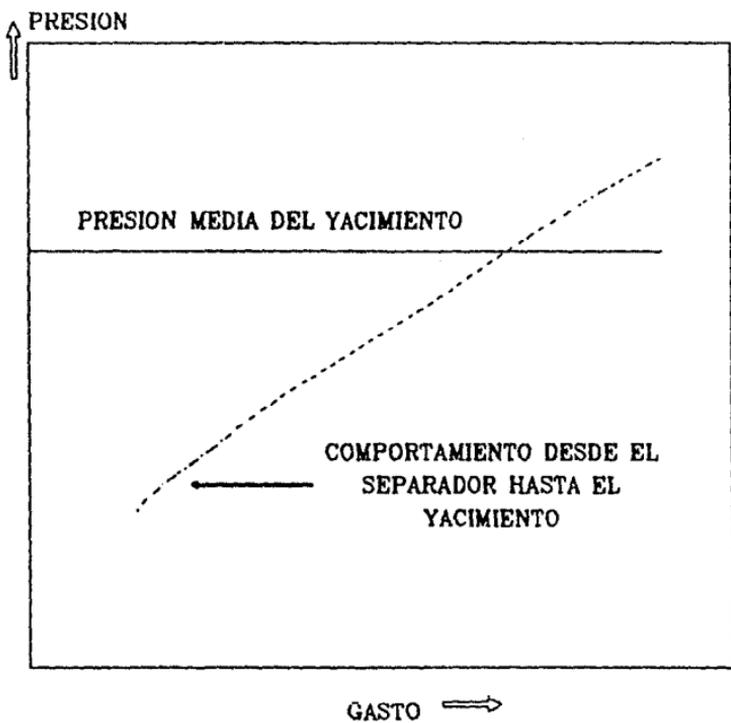


FIGURA 3-10 NODO DE SOLUCION EN EL YACIMIENTO

la presión en el nodo de solución.

d) Comenzando ahora con la presión del yacimiento y los gastos supuestos, se encuentran las presiones de fondo fluyendo del pozo.

e) Con las presiones fluyentes se determina la presión en el nodo de solución para los gastos supuestos.

f) Grafique los valores obtenidos en los pasos (c) y (e), la intersección de las curvas determina el gasto de flujo del sistema (figura 3-11).

**Pozos de inyección.** Se puede aplicar análisis nodal a pozos de inyección de gas o agua, y determinar de esta forma los gastos de inyección óptimos, los diámetros de tubería correctos y los tipos de terminación de pozos.

El procedimiento que se sugiere para el análisis nodal de un pozo inyector de agua o gas es como sigue:

a) Realice la curva IPR de inyección en forma normal utilizando la ley de Darcy.

b) Construya la curva de descarga de la tubería vertical del pozo para diferentes gastos de inyección.

c) Las curvas anteriores se combinan de la misma forma que para pozos fluyentes. La intersección de estas curvas muestra el gasto de inyección posible para este pozo (figura 3-12).

Por medio de análisis nodal a pozos inyectores se puede

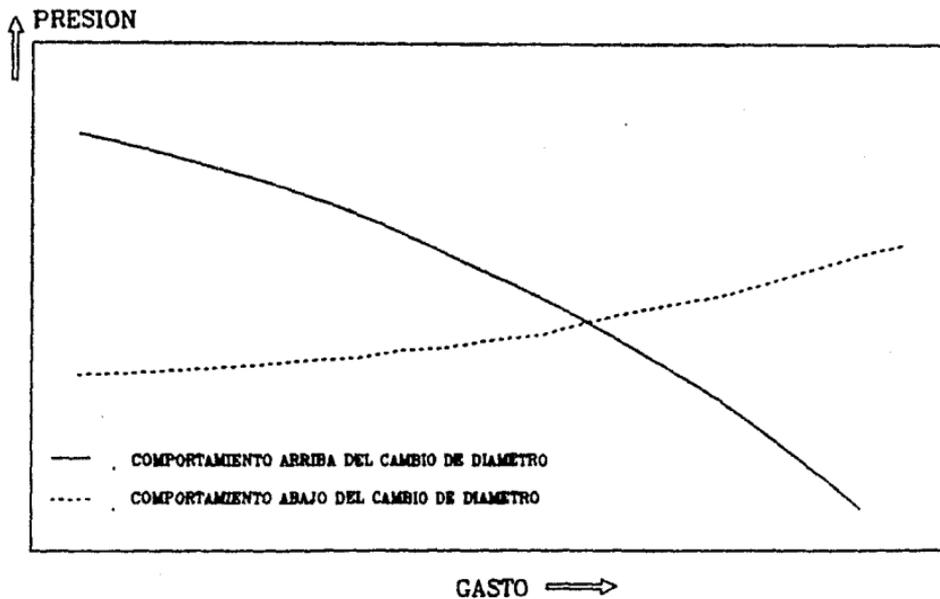


FIGURA 3-11 NODO DE SOLUCION EN EL CAMBIO DE DIAMETRO

observar el efecto de varios parámetros sobre la inyección. Uno de los parámetros es la presión superficial de inyección, al variar ésta, podemos observar el comportamiento del sistema y seleccionar la menor potencia de las bombas o compresoras necesaria para el buen funcionamiento del sistema.

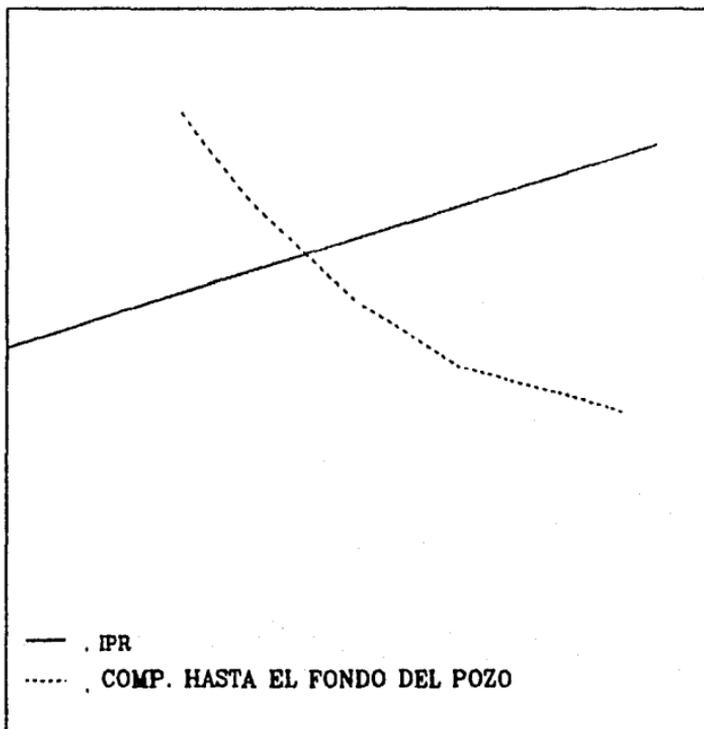
Otro parámetro es el efecto del diámetro de la tubería, el cual debe ser seleccionado (si no se tiene tubería o se desea rediseñarla), para obtener el gasto de flujo pedido.

La presión del yacimiento puede ser manejada con diferentes valores y así analizar los posibles gastos de inyección teniendo la misma tubería en el pozo.

Si se requiere una línea superficial muy larga y de diámetro pequeño para llevar el fluido de inyección al pozo, pueden existir excesivas caídas de presión por fricción en ella. El efecto de la variación de diámetros de la línea de flujo puede ser evaluado en la misma manera que para un pozo fluyente, tomando como nodo de solución la cabeza o el fondo del pozo.

Pozos de gas. El sistema de producción para un pozo de gas puede ser dividido en los mismos componentes que un pozo de aceite, por lo que se puede utilizar el mismo procedimiento de análisis nodal en ambos casos.

↑ PRESION



GASTO DE INYECCION →

FIGURA 3-12 SOLUCION EN EL FONDO DEL POZO PARA POZOS INYECTORES

Lineas superficiales. En general, se aplica análisis nodal para determinar la capacidad de transporte de la línea si se conoce la presión de entrada y la de descarga, así como la longitud y diámetro interior de la tubería y las propiedades físicas de los fluidos que maneja.

El análisis nodal más simple es aplicable al de una línea constituida por dos tubos de diferente diámetro (figura 3-13). El nodo de solución puede estar en la presión de entrada (nodo 1), en la unión de las tuberías (nodo 2) o en la presión de descarga (nodo 3). Considerando al nodo 2 como nodo de solución, el procedimiento de análisis es:

a) Suponer varios gastos de flujo.

b) A partir de  $P_e$  (nodo 1) y considerando el flujo por la tubería con diámetro  $D_1$ , se calcula la presión en el nodo 2 para los gastos supuestos. Este cálculo se realiza aplicando una correlación de flujo multifásico previamente seleccionada.

c) A partir de  $P_d$  (nodo 3) y considerando el flujo por la tubería con diámetro  $D_2$ , se calcula la presión en el nodo 2 para los diferentes gastos supuestos.

d) Graficar los gastos y presiones encontrados en los pasos (b) y (c). La intersección de las dos curvas corresponde al gasto de flujo del sistema (figura 3-14).

Cuando se tiene una línea con ramificación como la

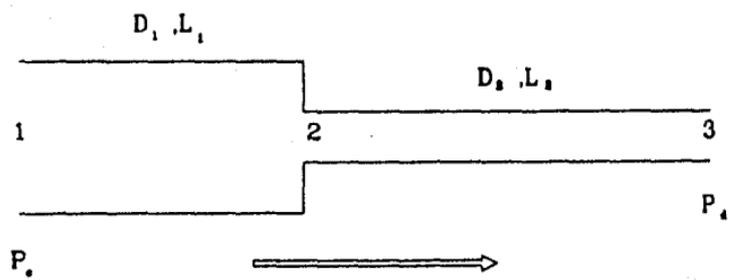


FIGURA 3-13 LINEA CON DIAMETROS DIFERENTES

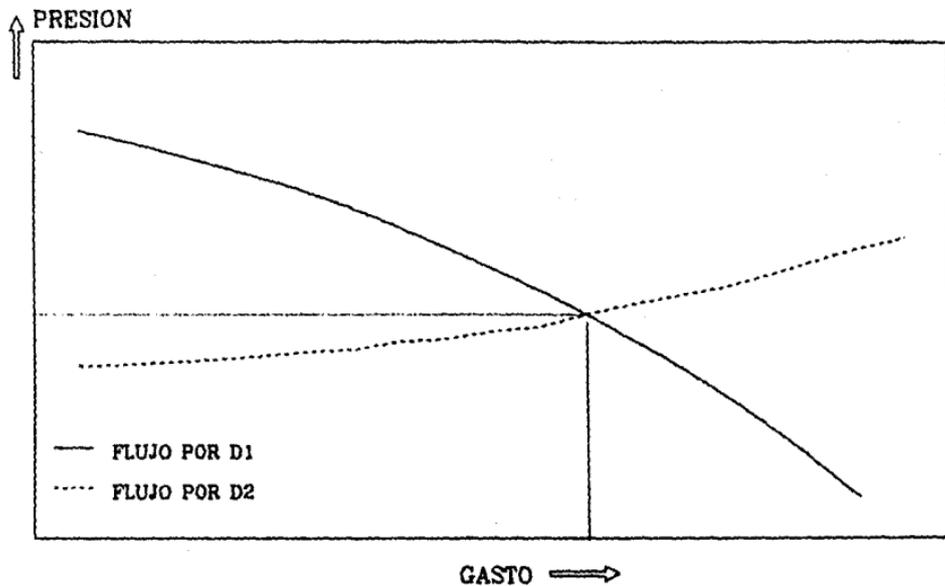


FIGURA 3-14 SOLUCION EN EL CAMBIO  
DE DIAMETRO

mostrada en la figura 3-15, el procedimiento de solución tomando como nodo de solución al nodo 3 es:

a) Suponer varios gastos.

b) Considerando solo el flujo por  $D_1$  se calcula la presión en el nodo 3 para los gastos supuestos, se utiliza para esto correlaciones de flujo multifásico.

c) A partir de  $P_2$  (suponiendo como ejemplo que la presión del nodo 2 es mayor que la presión del nodo 1, y  $D_2$  es mayor que  $D_1$ ), determinar la presión en el nodo 3 para diferentes gastos supuestos y graficar.

d) El gasto total que pasa por el nodo 3 es igual a la suma de los gastos que pasan por  $D_1$  y por  $D_2$ . Por tanto, para cada presión similar en el nodo 3 suma los gastos correspondientes y grafique.

e) Considerando exclusivamente flujo por  $D_2$  y a partir de  $P_4$  (nodo 4), calcular la presión en el nodo 3 para diferentes gastos supuestos y graficar.

f) La intersección de la curva de  $D_2$  con la de  $D_1$  más  $D_2$  nos da el gasto buscado, además de la presión del nodo 3, y trazando horizontalmente encontramos los gastos que aporta  $D_1$  y  $D_2$  cada uno (ver figura 3-16).

Otra posible configuración en líneas superficiales es la doble ramificación mostrada en la figura 3-17. Si el nodo de solución es el 3, además de suponer que la presión en el nodo 1 es mayor que la presión del nodo 2 y que la presión en el nodo 3 es

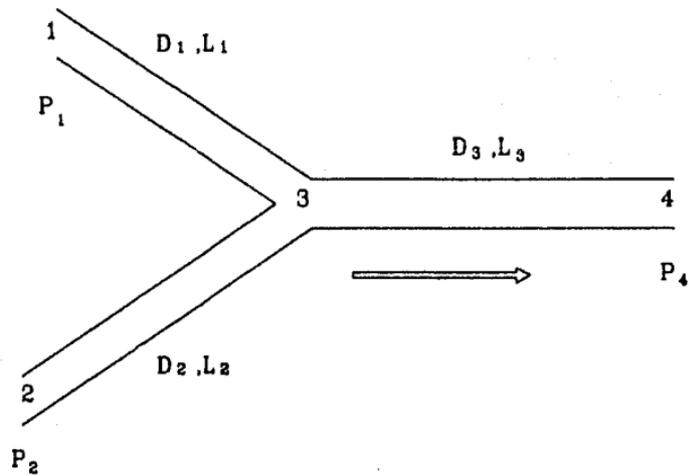


FIGURA 3-15 SISTEMA CON UNION  
DE DOS LINEAS

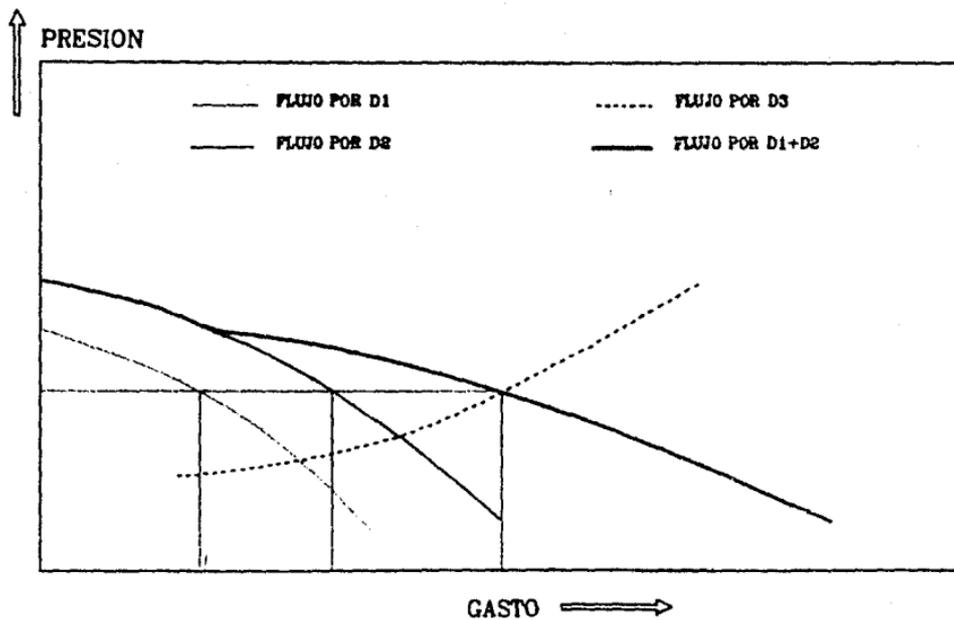


FIGURA 3-16 SOLUCION EN EL NODO TRES

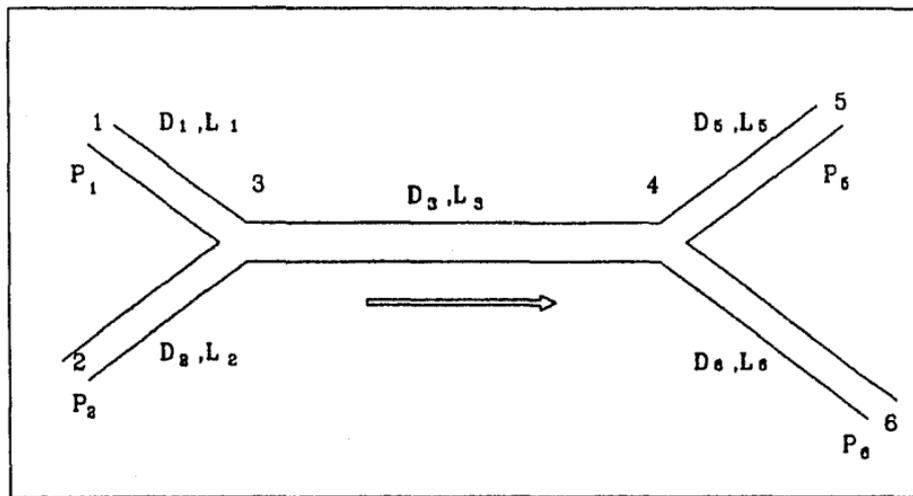


FIGURA 3-17 SISTEMA CON DOS  
RAMIFICACIONES

mayor que la presión del nodo 6, el procedimiento de solución es el siguiente:

- a) Suponer diferentes gastos de flujo.
- b) Considerar sólo el flujo por  $D_1$  y con la correlación de flujo multifásico seleccionada, se calcula la presión en el nodo 3 a partir de la presión  $P_1$  (nodo 1). Se grafican resultados.
- c) Considerando el flujo por  $D_2$  se obtiene la presión la presión en el nodo 3 a partir de la presión  $P_2$  (nodo 2) para diferentes gastos y se grafica.
- d) Para cada presión en el nodo 3, se suman los correspondientes gastos y se grafican (figura 3-18).
- e) Se repite el procedimiento pero ahora a partir de  $P_3$  y después a partir de  $P_4$  para obtener la presión en el nodo 4 y se grafican los resultados (figura 3-19).
- f) Para diferentes valores de presión en el nodo 4 y sus gastos totales correspondientes tomados de la figura 3-19, se calcula la presión en el nodo 3 (nodo de solución) y se grafican los valores junto con la curva de gastos totales de la figura 3-18 (ver figura 3-20). En la intersección de las dos curvas encontramos el gasto que maneja el sistema total así como la presión real en el nodo 3.
- g) Para determinar los gastos que se manejan en la tubería con diámetro  $D_1$  y en la de diámetro  $D_2$ , se entra en la figura 3-18 con la presión real encontrada en el nodo 3 y se lee directamente.
- h) Para encontrar los gastos que se manejan en la

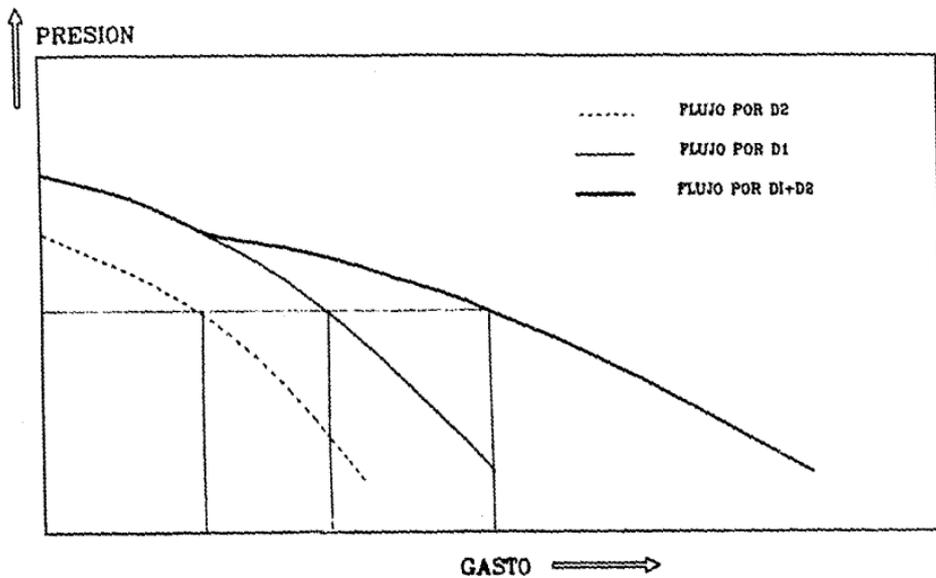


FIGURA 3-18 COMPORTAMIENTO PRESION-GASTO  
EN EL NODO TRES

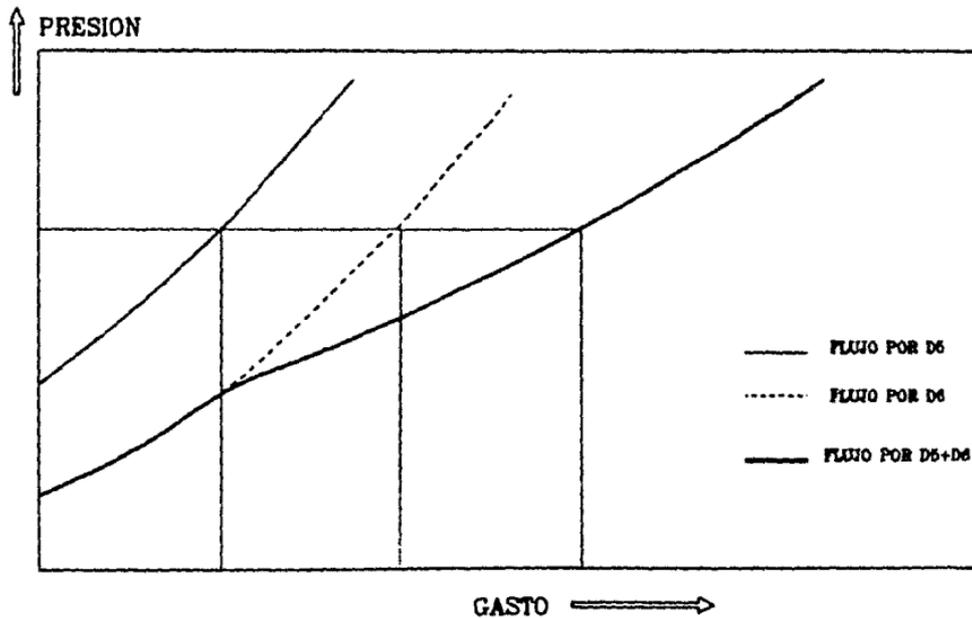


FIGURA 3-19 COMPORTAMIENTO PRESION-GASTO  
EN EL NODO CUATRO

tubería con  $D_s$  y  $D_o$ , a partir del gasto del sistema se entra a la figura 3-19, se intersecta la curva de  $D_s+D_o$  y horizontalmente se leen los gastos pedidos, también se lee la presión en el nodo 4.

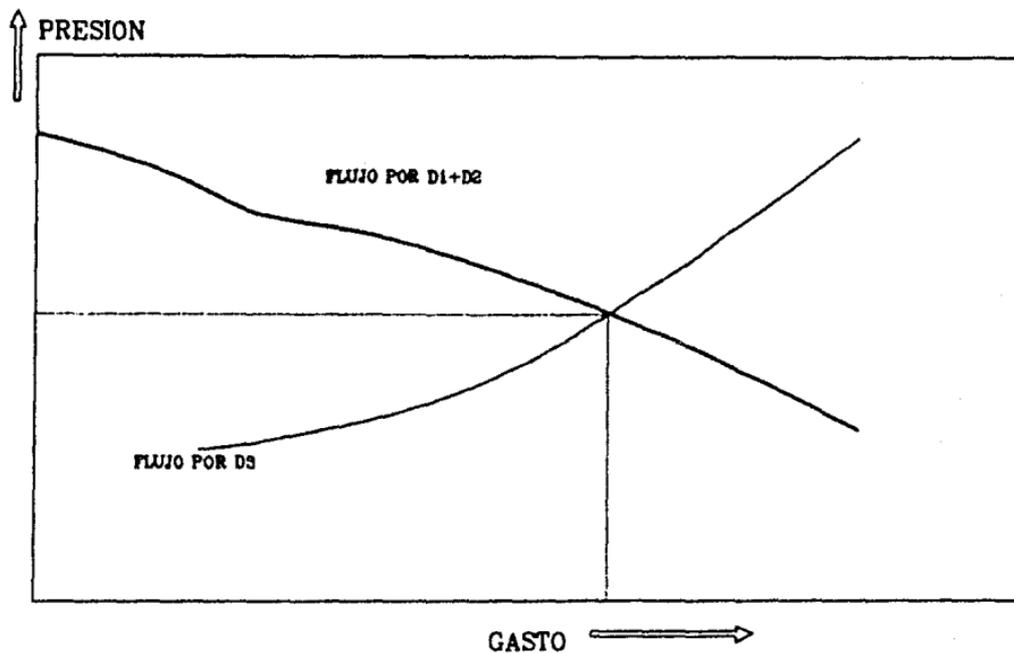


FIGURA 3-20 SOLUCION EN EL NODO TRES  
PARA SISTEMAS CON DOS RAMIFICACIONES

## CAPITULO IV

### DESARROLLO E INTEGRACION DEL PROGRAMA DE COMPUTO

Uno de los objetivos principales del presente trabajo fue el de desarrollar un programa de cómputo con el que se obtuvieran resultados aceptables de presión y gasto en varios puntos o nodos al analizar redes de recolección de hidrocarburos. Se debe tener presente que la utilización de correlaciones para el cálculo de las propiedades de los fluidos y los cálculos de las caídas de presión pocas veces proporcionarán valores semejantes a los reales debido a que los rangos de aplicación de dichos métodos de cálculo generalmente no satisfacen las condiciones del problema determinado que se está resolviendo.

El programa de cómputo está codificado en lenguaje GFA BASIC y es adaptable a cualquier computadora personal.

El programa se compone de varios bloques, los cuales

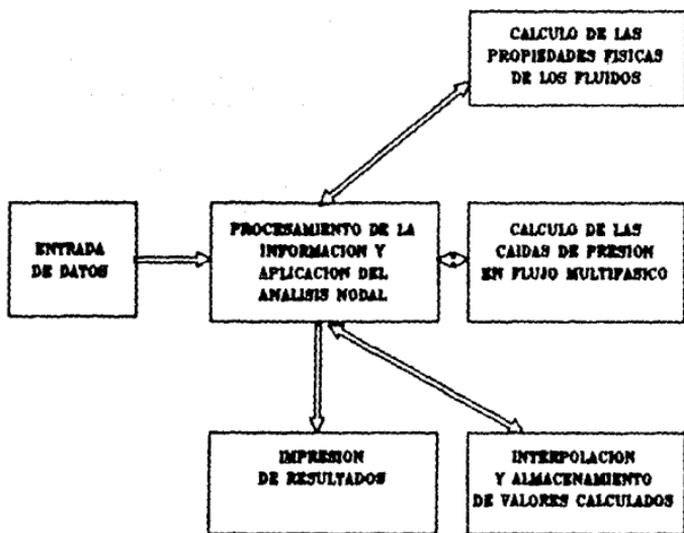


FIGURA 4-1 DIAGRAMA GENERAL

contienen un conjunto de subrutinas de cálculo, que son enlazadas continuamente con un bloque de procesamiento (figura 4-1).

El método de solución consiste en calcular las presiones en cada conector y cada nodo para diferentes gastos. En la unión de varios conectores se realiza una sumatoria de gastos para la misma presión y se continúa con los cálculos hasta llegar a la unidad de separación o nodo de entrega.

Antes de la utilización del programa, es necesario transformar el sistema a analizar en un diagrama de nodos y conectores, asignándole un número a cada nodo.

La captura de datos en el programa se realiza en forma conversacional. Los valores requeridos son:

- número de nodos
- cual nodo es el nodo final
- caract. del conector entre cada nodo;
  - + longitud
  - + diámetro
  - + ángulo de inclinación
- caract. del fluido producido;
  - + densidad API del aceite
  - + densidad relativa del gas
  - + relación gas-aceite instantánea

- + relación agua-aceite
- + salinidad del agua
- temperatura media de flujo
- presiones en la cabeza de los pozos y en el separador.

A partir de los datos de características de los fluidos, se pide seleccionar una de las tres correlaciones para el cálculo de las propiedades físicas de los fluidos que integran el programa. Posteriormente también se pide seleccionar la correlación de flujo multifásico a utilizar.

Los datos de características de los conectores son almacenados en matrices, en las cuales los subíndices de cada elemento relacionan el nodo de salida y el nodo de llegada. Existen dos posibles restricciones en el almacenamiento de datos, estas son; el tener en el sistema un máximo de treinta nodos (restricción sólo por dimensionamiento) y el que cada nodo tenga sólo cinco conectores como máximo (restricción debida a espacio en la matriz de almacenamiento de datos). Cuando se analice un sistema con mayor cantidad de nodos que lo establecido, es necesario modificar el dimensionamiento de los arreglos matriciales, lo que resulta muy fácil.

No se consideran sistemas que contienen anillos en el

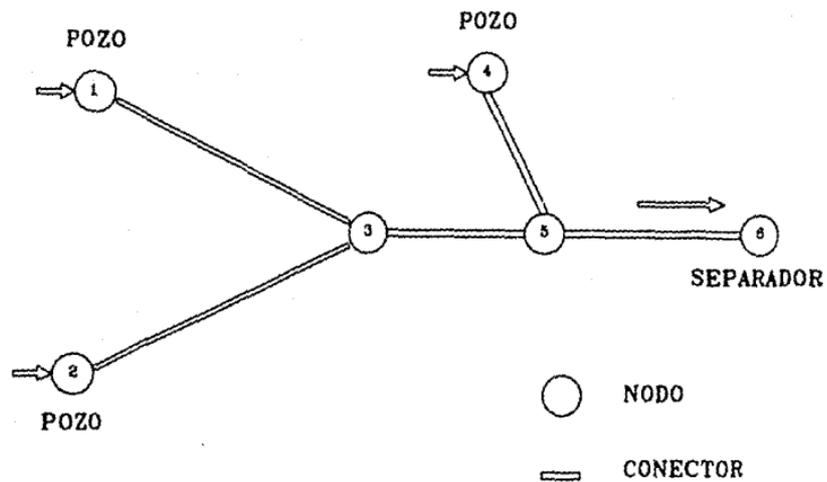


FIGURA 4-2 SISTEMA CON NODOS Y CONECTORES

desarrollo del programa, esto es debido a que en flujo multifásico existe un intercambio de masa entre las fases en una misma tubería, y al existir una bifurcación de la corriente en el sentido del flujo, es muy difícil predecir la cantidad de aceite y gas que se desvía por cada rama. Esto es, solo puede aplicarse el programa a sistemas con ramificaciones como el mostrado en la figura 4-2.

En el programa de cómputo desarrollado solamente se consideran conectores a las tuberías, y los nodos pueden ser pozos, interconexión de tuberías o el separador. No se considera la caída de presión en los cambios de diámetro de tubería, estranguladores, interconexión de tuberías, etc.

En el bloque de procesamiento de la información se analizan los datos y se comienza el cálculo a partir de la presión de los pozos, suponiendo varios gastos. El rango de los gastos supuestos es de cero hasta un gasto máximo con el que se obtiene una presión casi cero en el nodo de llegada.

Después de tener un gasto y una presión inicial se supone un decremento de presión ( $\Delta P = 10$  psi) y se calcula la presión media, se llama a la subrutina de propiedades de los fluidos y a la de flujo multifásico. Se determina una presión final y un incremento de longitud, posteriormente se realiza otro

decremento de presión y se repite el cálculo. El proceso se realiza hasta encontrar la presión del nodo opuesto al de la presión inicial.

Las correlaciones de propiedades de los fluidos se presentan en el apéndice A.

Cuando se encuentra un nodo al que llegan varios conectores, se realiza una sumatoria de gastos de los conectores de llegada para una misma presión en el nodo, para esto se realiza un proceso de interpolación entre presiones y gastos. Los valores de presión y gasto de cada conector al igual que la sumatoria de gastos para cada presión se almacenan en una matriz para su posterior utilización.

Para continuar el cálculo, con base en cada presión y su correspondiente sumatoria de gastos se determina la presión en el siguiente nodo en la forma antes mencionada.

Al llegar al nodo de entrega, que puede ser el separador, se tiene almacenado un grupo de valores de presión con su correspondiente gasto por cada conector, además un grupo de presiones con su gasto (sumatoria de gastos de los conectores) por cada nodo.

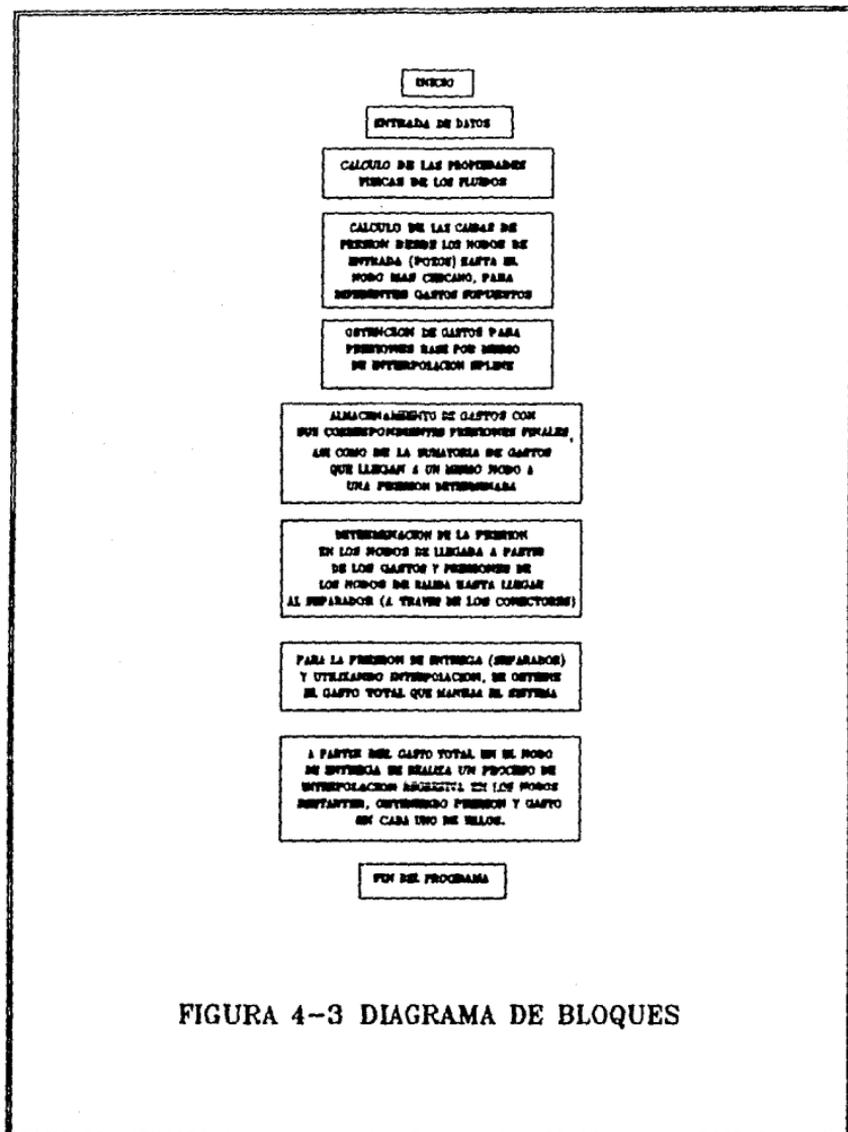


FIGURA 4-3 DIAGRAMA DE BLOQUES

El gasto de llegada al separador se obtiene interpolando en los valores almacenados (pertenecientes al nodo de entrega) para la presión real de separación. A partir del gasto real obtenido, se realiza una regresión del proceso, interpolando continuamente hasta obtener la distribución de presión y gasto que se tiene en cada nodo.

Si se desea conocer el gasto para otra presión de separación, el programa realiza otra interpolación y obtiene gastos y presiones en los nodos.

Los resultados se imprimen en tablas con gastos y presiones para cada nodo.

En la figura 4-3 se presenta el diagrama de bloques del programa de cómputo elaborado.

## CAPITULO V

### APLICACION

El programa desarrollado tiene múltiples aplicaciones en el diseño de redes de recolección, su principal objetivo es el de determinar presiones y gastos en los nodos de una red existente, sin embargo, es posible seleccionar diámetros y longitudes de tuberías para un sistema cualquiera. También es posible visualizar el efecto del cambio de gasto o presión en el sistema, así como el cambio de longitud o diámetro o tipo de fluido.

Es posible determinar el efecto de las condiciones de separación sobre la capacidad de flujo. En general, se puede utilizar el programa de cómputo para mejorar el diseño de sistemas de recolección o líneas individuales de tubería al evaluar el sistema rápidamente para diferentes condiciones.

A continuación se presenta un problema ejemplo para

mostrar el método utilizado. Como primer caso, se resuelve en forma manual gráfica y después con la utilización del programa de cómputo.

#### Problema ejemplo

Determinar los gastos de aceite que aportan los pozos FI3 y FI4 del campo UNAM, los cuales envían los hidrocarburos a la misma unidad de separación.

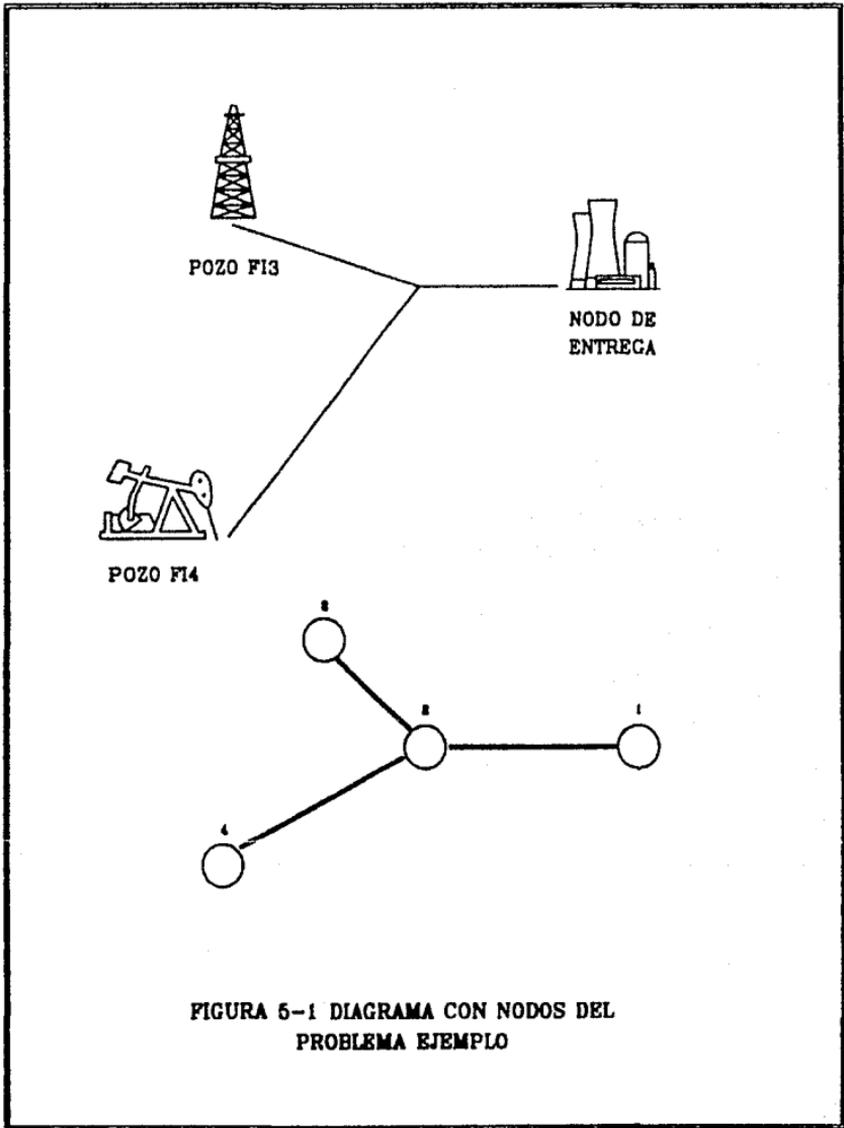
El arreglo del sistema, sus características y los datos de los fluidos producidos se dan a continuación (ver figura 5-1):

#### Características del fluido;

Campo	UNAM
Temperatura media de flujo	120 °F
Densidad API del aceite	40 °API
Densidad relativa del gas	.65
Relación gas-aceite instantánea	1500 pie <sup>3</sup> /bl
Relación agua-aceite	0

#### Configuración del sistema;

Número de nodos	4
-----------------	---



**FIGURA 5-1 DIAGRAMA CON NODOS DEL PROBLEMA EJEMPLO**

TABLA 5-1

NODO	DESCRIPCION	PRESION (lb/pg <sup>2</sup> )
1	entrega	100
2	interconexión	---
3	pozo FI3	800
4	pozo FI4	900

TABLA 5-2

CONECTOR	LONGITUD (pie)	DIAMETRO (pg)	INCLINACION (°)
1 - 2	10000	6	0
2 - 3	5000	4	0
2 - 4	8000	4	0

El cálculo de las propiedades del fluido se realiza con la correlación de Standing. El cálculo de las caídas de presión en flujo multifásico se hace con la correlación de Beggs-Brill.

Solución con el método gráfico.

Se comienza suponiendo varios gastos y a partir de la presión del pozo F13 (P<sub>3</sub>) y con las características del conector 2-3, aplicando las correlaciones del cálculo de las propiedades de los fluidos y del flujo multifásico, se obtiene la presión del nodo 2 (P<sub>2</sub>) para los diferentes gastos supuestos.

A continuación se realiza el mismo cálculo, pero ahora a partir de la presión del pozo F14 (P<sub>4</sub>) y con las características del conector 2-4. Los resultados de éstos cálculos son:

TABLA 5-3

GASTO (bl/día)	P <sub>2</sub> A PARTIR DE P <sub>3</sub> (lb/pg <sup>2</sup> )	P <sub>2</sub> A PARTIR DE P <sub>4</sub> (lb/pg <sup>2</sup> )
1000	791	880
2000	771	859
3000	738	811
4000	692	743
5000	628	648
6000	542	508
7000	417	251
8000	164	

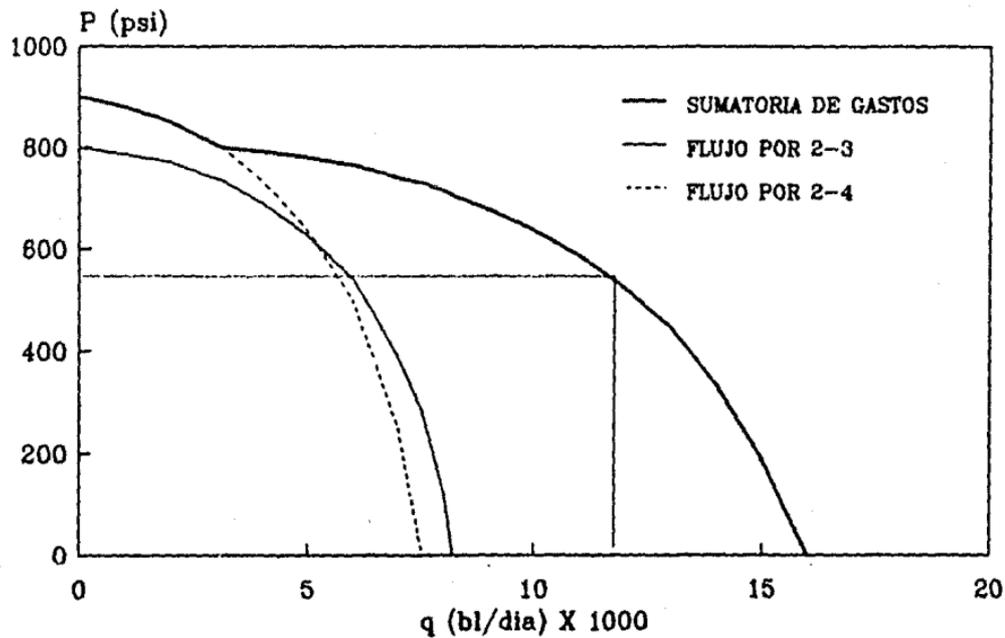


FIGURA 5-2 PRESION-GASTO EN EL NODO 2

Se grafican todas las parejas de valores de presión vs gasto y con base en la gráfica obtenida, se suman los gastos para una misma presión y se grafican (figura 5-2).

Obteniendo valores de puntos presión-gasto de la curva de sumatoria de gastos y con las subrutinas del cálculo de las propiedades de los fluidos y de flujo multifásico, se calcula la presión en el nodo 1 ( $P_1$ ), tomando en cuenta las características del conector 1-2. El proceso se repite para varios puntos.

Las presiones obtenidas en el nodo 1 son:

TABLA 5-4

Presión nodo 2 (lb/pg <sup>2</sup> )	Gasto de flujo (bl/día)	Presión nodo 1 (lb/pg <sup>2</sup> )
800	3200	781
700	8300	563
600	10710	276
500	12350	***
400	13500	***

\*\*\* No existe flujo hasta el nodo 1

Graficando la presión del nodo 1 ( $P_1$ ) contra el gasto de flujo y extrapolando para bajas presiones (figura 5-3), se obtiene la curva del comportamiento del gasto con la presión en el

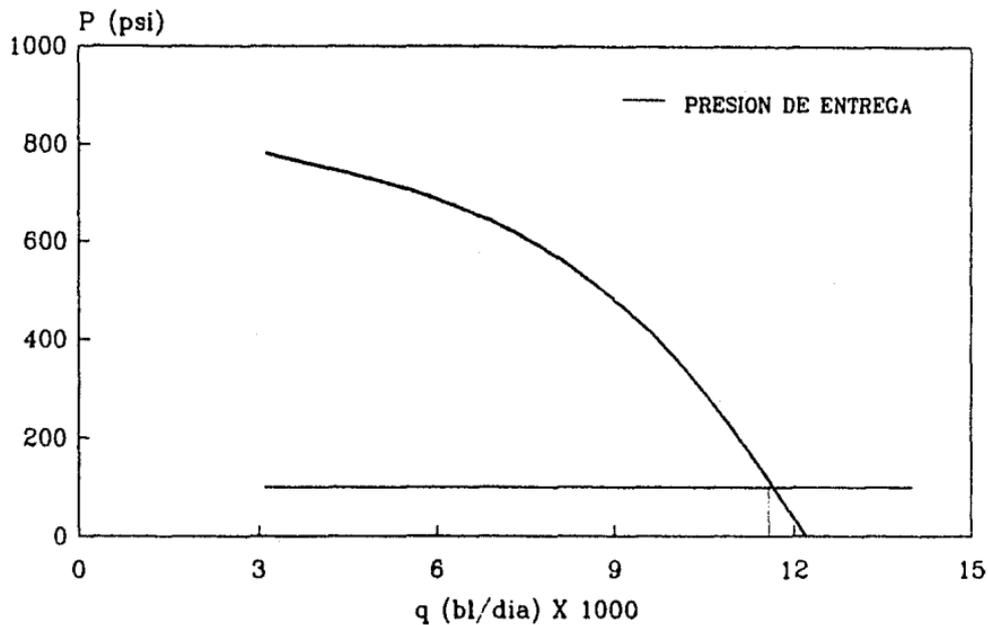


FIGURA 5-3 PRESION-GASTO EN EL NODO 1

nodo de entrega. Para obtener el gasto que llega al separador, se grafica en la figura 5-3 la presión de separación (100 lb/pg<sup>2</sup>, constante). En la intersección de las dos curvas se encuentra el gasto pedido.

Con el gasto que llega al separador y con la figura 5-2, se intersecta la curva de la sumatoria de gastos y se lee la presión, que será la presión real en el nodo 2 (P<sub>2</sub>). Con dicha presión y cortando las curvas de flujo en los conectores 2-3 y 2-4, se encuentra el gasto que aporta cada pozo.

Los resultados finales son los siguientes:

TABLA 5-5

NODO	GASTO (bi/día)	PRESION (lb/pg <sup>2</sup> )
1	11750	100
2	11750	540
3	6000	800
4	5750	900

Otra forma de llegar al resultado del problema es seleccionando el nodo dos como nodo de solución.

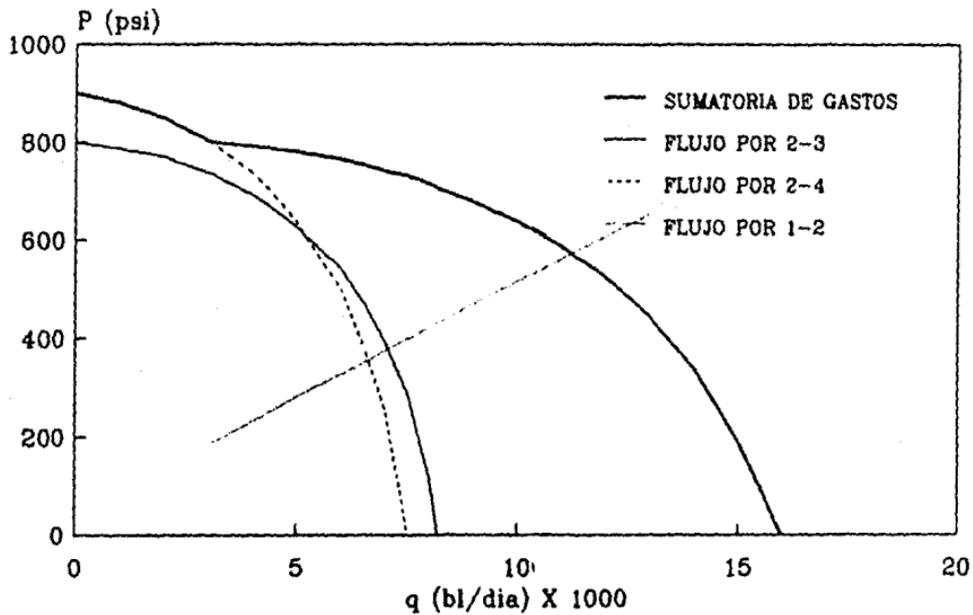


FIGURA 5-4 SOLUCION EN EL NODO 2

El procedimiento es el siguiente:

- realizar los calculos correspondientes y obtener la figura 5-2.

- determinar la presión en el nodo dos a partir del nodo uno para varios gastos supuestos (Tabla 5-6) y graficar sobre la figura anterior (ver figura 5-4).

TABLA 5-6

GASTO (bl/dia)	P <sub>2</sub> A PARTIR DE P <sub>1</sub> (lb/pg <sup>2</sup> )
3000	190
4000	235
5000	281
6000	328
7000	375
8000	422
9000	469
10000	515
11000	562
12000	608
13000	654
14000	699
15000	744

- en la intersección de las curvas de sumatoria de gastos y de flujo por el conector 1-2 obtenida anteriormente, se

leé el gasto que maneja el sistema. Trazando una línea horizontal hasta el eje de las ordenadas, a partir del punto encontrado, leemos la presión en el nodo dos y en el cruce de ésta con las curvas de flujo por 2-3 y 2-4 se lee el gasto que aporta cada pozo. Los resultados son los de la tabla 5-5.

La solución con el programa de cómputo se presenta a continuación.

D A T O S

CAMFU

UNAM

CARACTERISTICAS DEL FLUIDO

TEMPERATURA MEDIA DE FLUJO	( F )	120
DENSIDAD API DEL ACEITE		40
DENSIDAD RELATIVA DEL GAS		0.658471
RELACION GAS-ACEITE INSTANTANEA (PIE 3/BL)		1500
PRESION DEL SEPARADOR	(lb/pq 2)	100

CONFIGURACION DEL SISTEMA

NUMERO DE NUDOS

4

NODO	DESCRIPCION	PRESION (lb/pq <sup>2</sup> )
------	-------------	-------------------------------

1	ENTREGA	100
2	INTERCONEXION	---
3	POZO	800
4	POZO	900

CONECTOR	LONGITUD (pie)	DIAMETRO (pg)	INCLINACION
----------	----------------	---------------	-------------

1 - 2	10000	6	0
2 - 3	5000	4	0
2 - 4	8000	4	0

EL CALCULO DE LAS PROPIEDADES DEL FLUIDO SE REALIZA CON: STANDING

EL CALCULO DE LAS CAIDAS DE PRESION EN FLUJO MULTIFASICO

SE HACE CON LA CORRELACION DE : BEGGS-BRILL

R E S U L T A D O S

CALCULO DE EL NODO 3 A NODO 2

Qo (b1/d) =	800	1600	2400	3200	4000	4800	5600	6400	7200	8000
Po (lb/pg' 2) =	796	781	759	730	692	643	580	499	384	164

CALCULO DE EL NODO 4 AL NODO 3

Qo (b1/d) =	700	1400	2100	2800	3500	4200	4900	5600	6300	7000
Po (lb/pg' 2) =	895	878	855	822	780	726	658	571	452	251

NODO	TABLA DE GASTOS (b1/dia)									
1	0	0	0	11295	10924	10528	10103	9643	9144	8596
2	11295	11969	11643	11295	10924	10518	10103	9643	9144	8596
3	6293	6108	5910	5697	5470	5226	4962	4676	4361	4011
4	5982	5861	5733	5597	5454	5302	5140	4968	4783	4585

NODO	TABLA DE PRESIONES (lb/pg' 2)									
1	0	0	0	44	231	316	383	440	492	541
2	511	531	551	571	591	611	631	651	671	691
3	511	531	551	571	591	611	631	651	671	691
4	511	531	551	571	591	611	631	651	671	691

0 NO EXISTE FLUJO HASTA EL NODO

\*\*\*\*\* RESULTADOS FINALES \*\*\*\*\*

NODO	GASTO (b1/dia)	PRESION (lb/pg' 2)
1	11297	100
2	11257	573
3	5674	800
4	5583	900

## CAPITULO VI

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se desarrolló un programa de cómputo con el que es posible analizar y diseñar redes de tuberías con flujo de fluidos en dos fases. El programa es una herramienta muy valiosa al optimizar sistemas de recolección de hidrocarburos.

En el desarrollo del programa se hicieron varias consideraciones y suposiciones que en alguna medida afectan los resultados que se obtienen. Estos, aunque no son exactos, proporcionan una idea del comportamiento de un sistema, al modificarle algún elemento. De ésta forma, es posible visualizar el efecto que se tendría al diseñar en forma incorrecta tal sistema, así como la posible solución.

No obstante de las limitaciones del programa de cómputo, su posible aplicación en la industria petrolera es inmediata.

Generalmente, al adicionar una tubería proveniente de un nuevo pozo no se analiza su efecto sobre el sistema completo. Así mismo, al reparar tuberías con fugas, muchas veces se conectan tramos de tubería con diferente diámetro al original, lo que afecta en gran medida al gasto y presión sobre la línea, por lo que es importante analizar éste efecto sobre el sistema, y esto es posible (para tramos largos) con el programa de cómputo.

Dada la configuración del programa, no es difícil complementarlo en el futuro con el cálculo de las caídas de presión en válvulas, estranguladores, cambios de diámetro de la tubería, cambios de dirección del flujo a diferente ángulo, etc.

Se recomienda complementar el programa de cómputo para adicionar el cálculo de las caídas de presión en las restricciones al flujo mencionadas anteriormente y aplicarlo para analizar el comportamiento presión-gasto de los sistemas de recolección existentes en el campo, con el fin de obtener una mayor producción de hidrocarburos al modificar alguno de los elementos del sistema y sin dañar el yacimiento. Con esto, es posible observar el gasto que aporta cada pozo bajo las condiciones existentes de flujo, y si el yacimiento tiene capacidad, se contempla la posibilidad de aumentar dicho gasto.

## NOMENCLATURA

### Variables:

A	Área de la tubería
B	factor de volumen
C	compresibilidad
d	diámetro
d	derivada total
f	factor de fricción
f	función de
F	relación mástica
g	aceleración de la gravedad
gc	constante de la segunda ley de Newton
G	cáudal mássico de flujo por área
h	longitud vertical
H <sub>L</sub>	colgamiento de líquido
M	peso molecular
N <sub>L</sub>	número de viscosidad del líquido

$N_{Lz}$	número de la viscosidad base del agua
$N_{Lv}$	número de velocidad del líquido
$N_{gv}$	número de velocidad del gas
$N_{Fa}$	número de Froude
$N_{Re}$	número de Reynolds
$P$	presión
$q$	gasto a condiciones estandar
$q'$	gasto a condiciones de flujo
$R$	constante universal de los gases
$R$	relación gas-aceite instantánea
$R_s$	relación gas disuelto-aceite
$T$	temperatura
$u$	flujo másico total por unidad de área
$v$	velocidad
$V$	volumen específico
$V$	volumen específico promedio
$w$	gasto másico
$W$	pérdidas irreversibles de energía
$Web$	número de Weber
$x$	longitud horizontal
$Z$	factor de compresibilidad del gas
$\gamma$	densidad relativa
$\delta$	derivada parcial
$\Delta$	diferencial
$\phi$	función del número de Reynolds (ec. 31)

$\lambda$	colgamiento sin resbalamiento
$\mu$	viscosidad
$\psi$	función para el cálculo de H <sub>L</sub> (ec. 50)
$\rho$	densidad
$\sigma$	tensión interfacial
$\theta$	ángulo de inclinación de la tubería

**subíndices:**

ac	aceleración
b	a condiciones de burbujeo
b	condiciones base
el	elevación
f	fricción
g	gas
L	líquido
m	mezcla
o	aceite
p	tubería
r	relativa
o	resbalamiento
s	trabajo externo
s	separación
sg	superficial del gas

sl superficial del liquido  
t total  
lp dos fases  
v agua

## BIBLIOGRAFIA

- 1.- ACUÑA R. A., Garalcochea P. F., Limón H. T.,  
"Flujo multifásico en tuberías", Instituto  
Mexicano del Petróleo, Sub. de Explotación,  
1976.
- 2.- BEGGS H. D., Brill J. P., "A study of two-phase flow  
in inclined pipes", Journal of Petroleum  
Technology, mayo de 1973.
- 3.- BERTUZZI A. F., Tek M. R., Postmann F. H.,  
"Simultaneous flow of liquid and gas through  
horizontal pipe", Petroleum Transactions  
AIME, vol. 207, 1956.
- 4.- BRILL J. P. y Beggs H. D. "Two-phase flow in pipes",  
notas para cursos cortos, U. de Tulsa,  
febrero de 1984.
- 5.- BROWN K. E. y otros, "Technology of artificial lift  
methods", vol 4, cap. IV, PENNWELL PUBLISHING  
COMPANY, Tulsa Oklahoma, 1984.
- 6.- EATON B. A., Andrews D. E., Knowles C. R., "The

prediction of flow patterns, liquid holdup and pressure losses occurring during continuous two-phase flow in horizontal pipelines", Journal of Petroleum Technology, julio de 1967.

- 7.- FLANIGAN O., "Effect of uphill flow on pressure drop in design of two-phase gathering systems", Oil and Gas Journal, marzo 10 de 1958.
- 8.- FORSYTHE G. E., Malcom M. A., Moler C. B., "Computer methods for mathematical computations", Prentice-Hall Inc., E. U. A., 1977, 259 pp.
- 9.- GARAICOCHEA P. F., apuntes de clase de la asignatura "Transporte de hidrocarburos", Facultad de Ingenieria, UNAM, semestre 1987-II.
- 10.- GARAICOCHEA P. F., "Transporte de hidrocarburos", Facultad de Ingenieria, UNAM, 1983.
- 11.- GOULD T. L. (Vicepresident of Scientific Software Corporation), "Technical description of PIPEFLOW<sup>2</sup>", Scientific Software Co.
- 12.- GOVIER G. W., Aziz K., "The flow of complex mixtures in pipes", Van Nostrand-Reinhol Co., New York 1972.
- 13.- GREGORY G. A., Mandhane J. M. y Aziz K., "Some

- design considerations for two-phase flow in pipes", 25th Annual Tech. Mtg. of Petroleum Society of CIM, Calgary, paper 374020, 1974.
- 14.- GUZHOV A. I., Mamayev V. A., Odishariya G. E., "A study of transportation in gas liquid systems", IOU/C 19-67, Intl. Gas Conference, Hamburgo, Germany 1967.
- 15.- HERNANDEZ F. y Brill J. P., "Comparison of friction factor correlations for gas-liquid flow in horizontal pipes", SPE of AIME, Dallas Texas, 1973 (SPE 4691).
- 16.- HOOGENDOORN C. J., "Gas-liquid flow in horizontal pipes", Chem. Eng. Sci. 1959.
- 17.- HOOGENDOORN C. J., Buitelaar A. A., "The effect of gas density and gradual vaporization on gas-liquid flow in horizontal pipes", Chem. Eng. Sci. 1961.
- 18.- LOCKHART E. W., Martinelli R. C., "Proposed correlation for isothermal two-phase, two-component flow in pipes", Chem. Eng. Prog. 1949.
- 19.- MANDHANE J. M., Gregori G. A., Aziz K., "Critical evaluation of friction pressure drop prediction methods for gas-liquid flow in horizontal pipes", SPE of AIME, Dallas Texas, 1976. SPE 6036.

- 20.- OISTEIN Glaso, "Generalized pressure-volume-temperature correlations", Journal of Petroleum Technology, mayo de 1980. SPE 8016.
- 21.- SEVIGNY R., "An investigation of isothermal, cocurrent, two-fluid two-phase flow in an inclined tube", U. de Rochester New York, 1962.
- 22.- STANDING M. B., "A pressure-volume-temperature correlation for mixtures of California oils and gases", Drilling and production practices, 1947, E. U. A.
- 23.- STONER M. A., "A new way to design natural gas systems", Pipe Line Industry, febrero 1970.
- 24.- STONER M. A., "Steady-state analysis of gas production, transmission and distribution systems", SPE 2554.
- 25.- VAZQUEZ M, Beggs H. D., "Correlations for fluid physical property prediction", Journal of Petroleum Technology, junio 1980. SPE 6719.
- 26.- VOHRA I. R., Marciano N. and Brill J. P., "Comparison of liquid holdup correlations for gas-liquid flow in horizontal pipes", SPE 4690, octubre de 1973.

## APENDICE A

### PROPIEDADES DE LOS FLUIDOS

El cálculo de los gradientes de presión fluyente en dos fases que existen en sistemas de tuberías requiere la predicción de las propiedades físicas de los fluidos, tales como el gas disuelto, factor de volumen del aceite y del gas, compresibilidad del aceite, viscosidades, etc. en cada uno de los puntos de la tubería.

A continuación se presentan tres correlaciones empíricas del cálculo de las propiedades de los fluidos. Estas se basan en datos de laboratorio de análisis PVT manipulados por los autores. Las correlaciones se encuentran como subrutina en el programa de cómputo.

**Correlación de Standing.** En 1947 Standing<sup>22</sup> presentó los resultados de un estudio de laboratorio sobre análisis PVT de 22 mezclas diferentes de aceite crudo y gas natural de los campos

de California. Desarrolló correlaciones para la presión de burbujeo ( $P_b$ ) y el factor de volumen del aceite ( $B_o$ ) como funciones empíricas de la relación gas disuelto-aceite ( $R_s$ ), densidad relativa del gas ( $\gamma_g$ ), densidad relativa del aceite ( $\gamma_o$ ), presión y temperatura.

Para el desarrollo de las correlaciones, se obtuvieron los parámetros antes mencionados a partir de un proceso de separación *flash* en dos etapas. La primera etapa se llevó a cabo dentro de un rango de presión de 250 lb/pg<sup>2</sup> a 450 lb/pg<sup>2</sup>, la segunda fué a presión atmosférica.

La correlación obtenida para la presión es

$$P = 18 \left[ (R_s/\gamma_g)^{0.89} \frac{10^{0.00001(T)}}{10^{0.0125(\gamma_o)}} \right] \quad (A-1)$$

donde  $\gamma_o$  es la densidad del aceite en grados API.

Para obtener  $P_b$  simplemente se cambia en la ecuación anterior a  $R_s$  por  $R$  (relación gas-aceite instantánea). Despejando la relación gas disuelto-aceite de la ecuación A-1;

$$R_s = \gamma_g \left[ \frac{(P/18) \frac{10^{0.0125(\gamma_g)}}{10^{0.00001(T)}}}{10^{0.00001(T)}} \right]^{1/0.92} \quad (A-2)$$

La expresión para obtener el factor de volumen del aceite a presiones menores que la presión de burbujeo es;

$$B_o = 0.972 + 0.000147(F)^{1.175} \quad (A-3)$$

donde;

$$F = R_s (\gamma_g/\gamma_{ro})^{1/2} + 1.25 T \quad (A-4)$$

**Correlación de Vazquez-Reggs.** La correlación desarrollada por Vazquez<sup>25</sup> se basa en más de 600 análisis PVT de laboratorio de campos de todo el mundo. Los datos comprenden amplios rangos de presión, temperatura y propiedades de los fluidos e incluyen más de 600 mediciones de  $R_s$ ,  $B_o$  y  $\mu_o$  a varias presiones.

Las correlaciones empíricas se desarrollaron en función de la presión, temperatura, densidad relativa del aceite y densidad relativa del gas.

Dado que la densidad relativa del gas es muy importante en la predicción de las propiedades del fluido, y ésta depende de las condiciones a las que se realiza la separación gas/aceite; se decidió utilizar un valor de dicha densidad relativa normalizada a una presión de separación de 100 lb/pg<sup>2</sup>. La correlación para la densidad relativa obtenida es;

$$\gamma_{gs} = \gamma_g [ 1 + 5.912 \times 10^{-5} \gamma_o T_s \log (P_s/114.7) ] \quad (A-5)$$

Basandose en la densidad API del aceite, se desarrolló una correlación para la relación gas disuelto-aceite y para el factor de volumen del aceite a una presión menor o igual a la presión de burbujeo,

$$R_s = C_1 \gamma_{gs} P^{C_2} \text{EXP} [C_3 (\gamma_o / (T + 460))] \quad (A-6)$$

$$B_o = 1 + C_4 R_s + C_5 (T + 460)(\gamma_o / \gamma_{gs}) + C_6 R_s (T - 60)(\gamma_o / \gamma_{gs}) \quad (A-7)$$

donde

Coefficiente	$\gamma_o \leq 30$	$\gamma_o > 30$
C <sub>1</sub>	0.0362	0.0178
C <sub>2</sub>	1.0937	1.1870
C <sub>3</sub>	25.7240	23.9310
C <sub>4</sub>	$4.677 \times 10^{-4}$	$4.670 \times 10^{-4}$
C <sub>5</sub>	$1.751 \times 10^{-5}$	$1.100 \times 10^{-5}$
C <sub>6</sub>	$-1.811 \times 10^{-8}$	$1.337 \times 10^{-9}$

El factor de volumen del aceite cuando la presión es mayor que la presión de burbujeo depende de la compresibilidad isotérmica del líquido, por lo que

$$B_o = B_{ob} / \text{EXP}(C_o(P-P_b)) \quad (\text{A-8})$$

y el valor de la compresibilidad (C<sub>o</sub>) es;

$$C_o = (a_1 + a_2R_s + a_3T + a_4\gamma_o + a_5\gamma_o) / (a_6P) \quad (\text{A-9})$$

donde

$$a_1 = -1433.0; a_2 = 5.0; a_3 = 17.2;$$

$$a_4 = -1180.0; a_5 = 12.61; a_6 = 10^5$$

**Correlación de Oistein.** Basado en el trabajo de Standing<sup>22</sup>, Oistein<sup>20</sup> desarrolló correlaciones de propiedades PVT para aceites del Mar del Norte (Tipo volátil). Aunque serán válidas para todos los tipos de mezclas después de corregir las

correlaciones para componentes no hidrocarburos (CO<sub>2</sub>, N<sub>2</sub> y H<sub>2</sub>S) en los gases superficiales, y para el contenido de parafina del aceite.

La ecuación para el cálculo de la presión de burbujeo es:

$$\text{Log } P_b = 1.7669 + 1.7447 \text{ Log } P_b^* - 0.30218(\text{Log } P_b^*)^2 \quad (\text{A-10})$$

donde;

$$P_b^* = (R/\gamma_g)^{0.810} \frac{T^{0.172}}{\gamma_o^{0.989}} \quad (\text{A-11})$$

Garaicochea<sup>10</sup> realiza otro ajuste a la correlación, despejando de la ecuación A-11,

$$R_s = \gamma_g \left[ \frac{P^* \gamma_o^{0.989}}{T^M} \right]^{1/0.810} \quad (\text{A-12})$$

$$\text{Log } P^* = -2.57364 + 2.35772 \text{ Log } P - 0.703988(\text{Log } P)^2 + 0.098479(\text{Log } P)^3 \quad (\text{A-13})$$

para;

$$\gamma_o \geq 35^\circ \text{API}, M = 0.130$$

$$\gamma_o < 35^\circ \text{API}, M = 0.172$$

El factor de volumen del aceite a la presión de saturación se calcula con,

$$\begin{aligned} \text{Log}(B_{ob} - 1) = & -6.58511 + 2.91329(\text{Log } B_{ob}^*) \\ & - 0.27683(\text{Log } B_{ob}^*)^2 \end{aligned} \quad (A-14)$$

$$B_{ob}^* = R (\gamma_g/\gamma_{ro})^{0.524} + 0.968 T \quad (A-15)$$

Al sustituir  $R_a$  por  $R$  en la ecuación anterior, obtenemos una buena aproximación de  $B_o$  cuando la presión es menor que la presión de burbujeo.

El factor de volumen total, se puede calcular con la siguiente expresión;

$$\begin{aligned} \text{Log } B_t = & 8.0135 \times 10^{-2} + 4.7237 \times 10^{-1} (\text{Log } B_t^*) \\ & + 1.7351 \times 10^{-2} (\text{Log } B_t^*)^2 \end{aligned} \quad (A-16)$$

$$B_t^* = R_a \frac{T^{0.5}}{\gamma_g^{0.5}} \gamma_{ro}^{2.0 \times 10^{-5} - 0.00037 R_a} P^{-1.108 P} \quad (A-17)$$

Las correcciones por contenido de parafinas y por componentes no hidrocarburos no se incluyen en la subrutina por lo que no se presentan aquí.

## APENDICE B

### INTERPOLACION SPLINE

El método de interpolación de las funciones cúbicas  $(S(x))$  SPLINE<sup>3</sup> ajusta  $n-1$  polinomios de tercer grado, un polinomio por cada intervalo entre dos puntos. Las funciones se caracterizan por ser continuas, teniendo primera y segunda derivada también continuas.

De todas las funciones  $f(x)$  con segunda derivada continua en el intervalo  $[a, b]$  tales que  $f(x_i) = y_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , la función SPLINE  $S(x)$  con segunda derivada igual a cero en los extremos del intervalo, posee la menor curvatura de todas las funciones que pueden interpolar entre puntos dato, o sea, es la función más suave que puede ajustarse a un conjunto de datos.

Para entender mejor la construcción de estas funciones se debe tener en cuenta que; en los  $n-1$  intervalos, existen  $n-1$  secciones separadas de curvas cúbicas, cada una con cuatro

parámetros desconocidos, haciendo un total de  $4n-4$  parámetros a determinar. El hecho de que la función  $S(x)$  sea continua y tenga primera y segunda derivada continuas en cada uno de los  $n-2$  nodos interiores  $x_i$ , introduce  $3(n-2)$  condiciones en  $S$ . El hecho de que  $S(x_i)$  sea igual a  $y_i$  impone  $n$  condiciones más en  $S(x)$ , haciendo un total de  $4n-6$  condiciones. Para generar un sistema compatible es necesario contar con dos condiciones más, las cuales pueden ser  $S''(x_1) = S''(x_n) = 0$ .

Considerando el subintervalo  $(x_i, x_{i+1})$  y haciendo que;

$$h_i = x_{i+1} - x_i \quad (B-1)$$

$$w = (x - x_i)/h_i \quad (B-2)$$

$$W = 1 - w \quad (B-3)$$

tenemos que;

$$S(x) = w y_{i+1} + W y_i + h_i^2 ((w^3 - w) \sigma_{i+1} + (W^3 - W) \sigma_i) \quad (B-4)$$

siendo  $\sigma_i$  y  $\sigma_{i+1}$  constantes a determinar.

Diferenciando la ecuación B-4, usando la regla de la cadena, además de considerar que:

$$w' = 1/h_i$$

$$W' = -1/h_i$$

obtenemos

$$S'(x) = (y_{i+1} - y_i)/h_i + h_i((3w^2 - 1)\sigma_{i+1} - (3w^2 - 1)\sigma_i) \quad (B-5)$$

$$S''(x) = 6w\sigma_{i+1} + 6W\sigma_i \quad (B-6)$$

$$S'''(x) = 6(\sigma_{i+1} - \sigma_i)/h_i \quad (B-7)$$

$S''(x)$  interpola los valores  $6\sigma_i$  y  $6\sigma_{i+1}$  por lo que

$$\sigma_i = S''(x_i)/6 \quad (B-8)$$

Evaluando  $S'(x)$  en los puntos finales del subintervalo,

$$S'_+(x_i) = \Delta_i - h_i(\sigma_{i+1} + 2\sigma_i) \quad (B-9)$$

$$S'_-(x_{i+1}) = \Delta_i + h_i(2\sigma_{i+1} + \sigma_i) \quad (B-10)$$

donde;

$$\Delta_i = (y_{i+1} - y_i)/h_i \quad (B-11)$$

Para obtener continuidad en  $S'(x)$ , se dan las condiciones siguientes en los puntos interiores

$$S'_-(x_i) = S'_+(x_i), \text{ para todo } i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (B-12)$$

Aunque el valor de  $S'_-(x_i)$  se calcula al considerar el subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ , su fórmula puede ser obtenida al

reemplazar  $i$  por  $i-1$  en  $S'(x_{i+1})$ , esto es;

$$\Delta_{i-1} + h_{i-1}(2\sigma_i + \sigma_{i-1}) = \Delta_i - h_i(\sigma_{i+1} + 2\sigma_i) \quad (B-13)$$

y por tanto;

$$h_{i-1}\sigma_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)\sigma_i + h_i\sigma_{i+1} = \Delta_i - \Delta_{i-1} \quad (B-14)$$

Esto es un sistema de  $n-2$  ecuaciones lineales simultáneas involucrando  $n$  incógnitas  $\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Por lo que es necesario tener dos condiciones adicionales para obtener una solución única. Considerando que;

$$S''(x_1) = S''(x_n) = 0 \quad (B-15)$$

implica que;

$$\sigma_1 = \sigma_n = 0 \quad (B-16)$$

con lo que obtenemos un sistema de  $n-2$  ecuaciones lineales con  $n-2$  incógnitas, esto es,

$$\begin{bmatrix} 2(h_1+h_2) & h_2 & & & & \\ h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & h_{n-3} & 2(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} & \\ & & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \\ & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \vdots \\ \sigma_{n-2} \\ \sigma_{n-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_3 - \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_{n-2} - \Delta_{n-3} \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \end{bmatrix} \quad (B-17)$$

Debido a su forma, el sistema anterior puede resolverse fácilmente empleando el algoritmo de Thomas.

Muchas veces resulta mas conveniente calcular los

$b_i, c_i$  y  $d_i; i = 1, 2, 3, \dots, n-1$

para cada intervalo  $(x_i, x_{i+1})$ , donde

$$S(x) = y_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \quad (B-18)$$

siempre y cuando

$$x_i \leq x \leq x_{i+1}$$

Los coeficientes están dados por

$$b_i = (y_{i+1} - y_i)/h_i - h_i(\sigma_{i+1} + 2\sigma_i) \quad (B-19)$$

$$c_i = 3\sigma_i \quad (B-20)$$

$$d_i = (\sigma_{i+1} - \sigma_i)/h_i \quad (B-21)$$

para  $i = 1, 2, \dots, n-1$

De esta manera se simplifican operaciones matemáticas en  $S(x)$  tales como derivaciones e integraciones.

La subrutina Spline calcula estos coeficientes para realizar la interpolación entre presiones y gastos calculados y supuestos dentro del programa de cómputo que se realizó.