8
2 ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA MICROCOMPUTACION Y EL PROBLEMA DE ESTIMACION DE PARAMETROS LINEALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

HILDA BEATRIZ GARCIA ISLAS

MEXICO, D. F. 1990

INDICE

PROLOGO.

En el presente trabajo se discute e implementa un algoritmo para resolver numéricamente el problema de Mínimos Cuadrados Lineales, el cual, además de su eficacia práctica, ilustra en forma clara un aspecto importante del trabajo de todo analista numérico: el relativo a la búsqueda de un algoritmo que permita resolver en forma estable el problema en cuestión, considerando como premisa central de trabajo el tipo de recursos de que habrá de disponerse para efectuar los cálculos.

En nuestro caso como antes dijimos, el problema es el de Mínimos Cuadrados Lineales:

$$\min_{a} \quad \| Ga - t \|_2^2 \ , \ G_{mxn}, \ t \in R^m$$

añadiendo la condición: m >> n.

El recurso de cómputo, una microcomputadora con un mínimo de memoria (RAM) disponible y sin unidad de disco duro. La propuesta de algoritmo -debida a John C. Nash- consideramos que resulta bastante afortunada.

NOTACION USADA

MATRICES. ________ A, B, C, etc.

FUNCIONES. ________ α, β, Γ, etc.

VECTORES. ________ a, b, c, etc.

COMPONENTES
DE VECTORES. ________ α_i, β_i, γ_i, etc.

COMPONENTES
DE MATRICES. ________ α_{ij}, β_{ij}, γ_{ij}, etc.

ESCALARES. ________ α, β, γ, etc.

CAPITULO I

INTRODUCCION

Nos interesa discutir el siguiente problema:

Dado un conjunto de datos:

$$\left\{ (\gamma_i, \tau_i), \ i = 1,2, \cdot \cdot \cdot, m \right\}$$

proveniente, en general, de alguna observación experimental, se trata de ajustar un modelo matemático que, bajo ciertos criterios, dé una representación global del fenómeno descrito parcialmente por los datos.

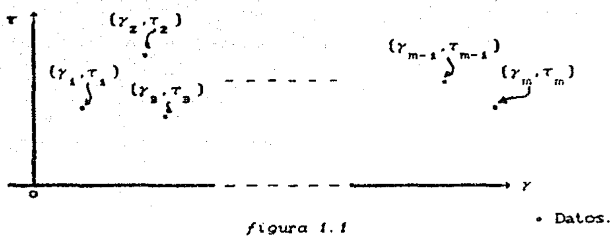


figura 1.1

A este tipo de problemas se les conoce como problemas de "ajuste" debido a que junto con los datos, se propone un modelo:

$$\Gamma(\gamma; \alpha_1, \alpha_2, \cdot \cdot \cdot, \alpha_n)$$

que depende de los parámetros $\alpha_1, \alpha_2, \cdot \cdot \cdot, \alpha_n$. Lo que se pretende entonces, es determinar aquellos: $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \cdot \cdot \cdot, \alpha_n^*$; de tal manera que $\Gamma(\gamma; \alpha_1^*, \alpha_2^*, \cdot \cdot \cdot, \alpha_n^*)$ pase lo más próxima a todos los datos recopilados del experimento.

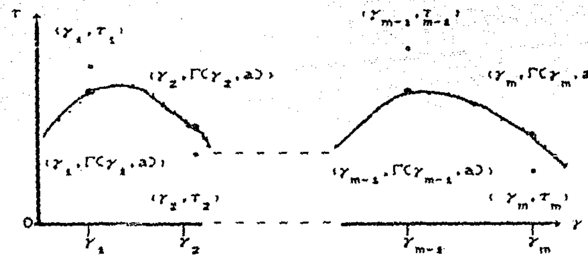
Se representa al conjunto de parámetros que se quieren obtener como:

$$a^{*} = (\alpha_1^{*}, \alpha_2^{*}, \alpha_3^{*}, \ldots, \alpha_n^{*})^T$$

La figura 1.2 ilustra la diferencia existente entre un modelo propuesto y los datos observados. Existen distintos criterios para atacar el problema de ajuste; uno de ellos, bastante usual es el que consiste en minimizar:

$$E(a) = \sum_{i=1}^{m} e_i^2 = \sum_{i=1}^{m} (\tau_i - \Gamma(\gamma_i, a))^2; \quad a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)^T$$

A este criterio se le conoce como el de Mínimos Cuadrados.



• Datos • Valor de $\Gamma(\gamma, a)$ correspondiente

figura 1.2

Con respecto a los modelos, éstos pueden ser lineales, por ejemplo:

1) $\Gamma(\gamma; a) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \gamma^{i-1}$

2) $\Gamma(\gamma; a) = \alpha_1 + \alpha_2 (1 + \gamma)(1 - \gamma)^2$

3) $\Gamma(\gamma; a) = \alpha_1 \gamma + \alpha_2 \operatorname{sen}(\gamma)$

4) $\Gamma(\gamma; a) = \alpha_1 \gamma + \alpha_2 \frac{1}{\gamma}$

5) $\Gamma(\gamma;a) \equiv \alpha_1 + \alpha_2\left\{\frac{1}{\cos(\gamma)}\right\}$

6) $\Gamma(\gamma;a) \equiv \alpha_1 + \alpha_2(1 + \gamma)^2 + \alpha_3 \cos^2(\gamma)$

7) $\Gamma(\gamma;a) \equiv \alpha_1 + \alpha_2\, \gamma + \alpha_3 \cos(\gamma)$

8) $\Gamma(\gamma;a) \equiv \alpha_1 + \alpha_2\left(\frac{1}{\gamma}\right)$

Definición:

Si el modelo $\Gamma(\gamma;a)$ se puede escribir como:

$$\Gamma(\gamma;a) \equiv \alpha_1\Gamma_1(\gamma) + \alpha_2\Gamma_2(\gamma) + \cdots + \alpha_n\Gamma_n(\gamma)$$

donde las funciones $\Gamma_i(\gamma)$ son independientes de los parámetros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; se dice que el modelo es lineal.

He aquí algunos ejemplos de modelos no-lineales:

1) $\Gamma(\gamma;a) \equiv \frac{\alpha_1}{(1 + \alpha_2\gamma)}\, e^{-\alpha_3\gamma}$

2) $\Gamma(\gamma;a) \equiv \frac{\alpha_1\gamma - \alpha_2 e^{\gamma}}{\alpha_3\gamma^3}$

3) $\Gamma(\gamma;a) \equiv \alpha_1\gamma^{\alpha_2} + \alpha_3 \cos(\alpha_4\gamma)$

4) $\Gamma(\gamma;a) \equiv \alpha_1\gamma^{\alpha_2} + \alpha_3\left[\frac{\operatorname{sen}(\alpha_4\gamma)^3}{2}\right]$

5) $\Gamma(\gamma;a) \equiv (\alpha_1\, \gamma^2 + \alpha_2\, \gamma)^3$

6) $\Gamma(\gamma;a) \equiv \alpha_1 e^{-\alpha_2(\gamma)}$

7) $\Gamma(\gamma;a) \equiv \alpha_1 + \alpha_2 e^{\alpha_3(\operatorname{sen}(\gamma))}$

8) $\Gamma(\gamma;a) \equiv \alpha_1 e^{\alpha_2\, \gamma^2}$

Nuestro interés se centrará en el caso lineal.

Necesitamos encontrar:

$$\min_{a} E(a) = \min_{a} \sum_{i=1}^{m} (\tau_i - \Gamma(\gamma_i, a))^2$$

y dado que:

$$\Gamma(\gamma; a) = \alpha_1 \Gamma_1(\gamma) + \alpha_2 \Gamma_2(\gamma) + \cdots + \alpha_n \Gamma_n(\gamma)$$

resulta que, para i = 1,...,m obtenemos, en forma matricial lo siguiente:

$$\min_{a} E(a) = \min_{a} \| t - Ga \|_2^2, \text{ en donde}$$

$$G = \begin{bmatrix} \Gamma_1(\gamma_1) & \Gamma_2(\gamma_1) & \Gamma_3(\gamma_1) & \cdots & \Gamma_n(\gamma_1) \\ \Gamma_1(\gamma_2) & \Gamma_2(\gamma_2) & \Gamma_3(\gamma_2) & \cdots & \Gamma_n(\gamma_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Gamma_1(\gamma_m) & \Gamma_2(\gamma_m) & \Gamma_3(\gamma_m) & \cdots & \Gamma_n(\gamma_m) \end{bmatrix}$$

$$t = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_m \end{bmatrix}$$

Esta notación matricial permite dar la siguiente interpretación geométrica.

Consideremos a la matriz G como una transformación lineal, esto es:

$$G : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

entonces la imagen de G define un subespacio linal de $\mathbb{R}^m$ de a lo más dimensión n.

El problema consiste entonces, en localizar sobre la imagen de G, denotado por Im(G), el punto más cercano al punto t.

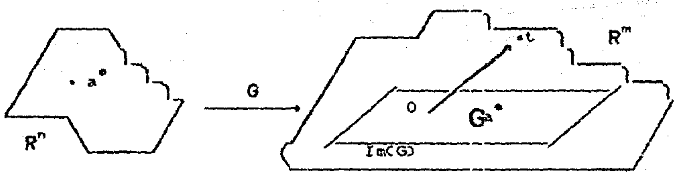


figura 1.3

A continuación se muestra, que tal punto, resulta ser la proyección del vector t sobre la Im (G).

Definición:

Dada $t \in \mathbb{R}^m$, $b \in Im(G)$ se llama la proyección ortogonal de t sobre la Im(G), si el vector $t - b$ es ortogonal a todos los vectores en la Im(G).

Denotación:

$$b = \text{Proy}_{Im(G)}\ t.$$

Consideremos el caso en que Im(G) es de dimensión uno, de acuerdo a esto, nos interesa resolver el problema: $\min_{b \in Im(G)} \| t - b \|_2^2$, el cual se ilustra geométricamente en la figura 1.4.

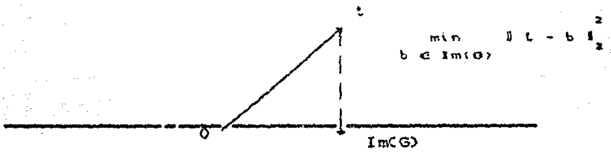


figura 1.4

Para resolver éste, tomamos dos puntos cualesquiera que se encuentren sobre la recta, que sean distintos y que sus distancias al punto t elevadas al cuadrado sean iguales; entonces:

Sean $b_1 \neq b_2 \in Im(G)$ tales que:

$$\| t - b_1 \|_2^2 = \| t - b_2 \|_2^2$$

se define su punto medio como:

$$b_m = \frac{b_1 + b_2}{2}$$

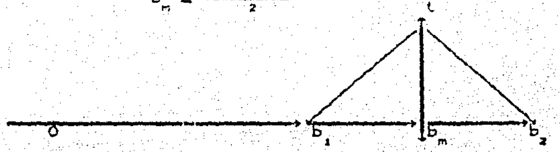


figura 1.5

Queremos demostrar que el vector $(t - b_m)$ es ortogonal a la $Im(G)$

y en consecuencia que:

$$b_m = \text{Proy}_{Im(G)}\, t.$$

Por construcción:

$$\| t - b_1 \|_2^2 = \| t - b_2 \|_2^2$$

$$(t - b_1)^T(t - b_1) = (t - b_2)^T(t - b_2)$$

$$\| b_1 \|_2^2 - 2t^T b_1 = \| b_2 \|_2^2 - 2t^T b_2$$

$$2t^T (b_2 - b_1) = \| b_2 \|_2^2 - \| b_1 \|_2^2$$

$$2t^T(b_2 - b_1) = (b_2 + b_1)^T(b_2 - b_1)$$

$$t^T (b_2 - b_1) = 1/2(b_2 + b_1)^T(b_2 - b_1)$$

$$\therefore \quad \left[t - \left(\frac{b_2 + b_1}{2} \right) \right]^T \left[b_2 - b_1 \right] = 0$$

$$\therefore \quad (t - b_m) \perp Im(G).$$

Del mismo resultado y usando la definición, resulta que :

$$b_m = Proy_{Im(G)} \, t \quad \blacksquare$$

No es difícil mostrar que, en general, la solución de:

$$\min_a \| t - Ga \|_2^2$$

resulta ser a^*, tal que:

$$Ga^* = Proy_{Im(G)} \, t.$$

BIBLIOGRAFIA

GILBERT STRANG — Linear Algebra and its Aplications.
Academic Press New York,
primera edición 1988.

JOSE GUERRERO GRAJEDA — Micelanea Matemática.
Mínimos Cuadrados No-Lineales.
Los métodos: Levemberg Marqeard Morrison.
Sociedad Matemática Mexicana,
Número 16, febrero de 1987.

REBECA ROMERO ALVAREZ — Tesis: Teoría Básica de Cuadrados Mínimos.
Facultad de Ciencias,
1983.

CAPITULO II

GRAM - SCHMIDT.

Hemos visto que la solución de nuestro problema resulta ser:

$$Ga^{*} = \mathrm{Proy}_{\mathrm{Im}(G)}\, t.$$

Así, lo que interesa es encontrar alguna forma de calcular el vector a^{*}. Consideremos el caso:

$$G = [\, g_1 \mid g_2 \,] \in R^{m \times 2},$$

$$a = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix},\ t \in R^{m}.$$

tendremos:

$$E(\alpha_1, \alpha_2) = \| t - Ga \|_2^2$$

$$= \| t - \alpha_1 g_1 - \alpha_2 g_2 \|_2^2$$

dado que $Ga^{*} = \mathrm{Proy}_{\mathrm{Im}(G)} t$, entonces $t - Ga^{*}$ debe ser ortogonal a g_1, g_2 por lo que podemos escribir:

$$\left.\begin{array}{l} g_1^T(t - Ga^*) = 0 \\ g_2^T(t - Ga^*) = 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

como Ga^* es la proyección, se cumple que:

$$Ga^* = \alpha_1^* g_1 + \alpha_2^* g_2 \qquad (2)$$

sustituyendo (2) en (1) se tiene:

$$g_1^T(t - (\alpha_1^* g_1 + \alpha_2^* g_2)) = 0$$

$$g_2^T(t - (\alpha_1^* g_1 + \alpha_2^* g_2)) = 0$$

que implica :

$$\alpha_1^* g_1^T g_1 + \alpha_2^o g_1^T g_2 = g_1^T t$$

$$\alpha_1^* g_2^T g_1 + \alpha_2^o g^T{}_2 g_2 = g_2^T t$$

que se simplifica bastante si:

$$g_1^T g_2 = 0,$$

que indicaría que g_1, g_2 son ortogonales entre si, en cuyo caso nuestro problema se reduce a:

$$\alpha_1^* g_1^T g_1 = g_1^T t$$

$$\alpha_2^o g^T{}_2 g_2 = g_2^T t$$

encontrando que α_1^* y α_2^o son:

$$\alpha^*_1 = \frac{g_1^T\ t}{g_1^T\ g_1} \quad , \quad \alpha^*_2 = \frac{g_2^T\ t}{g_2^T\ g_2}$$

Considerando lo anterior, a^* puede ser escrita como:

$$a^* = \alpha^*_1 g_1 + \alpha^*_2 g_2 = \frac{g_1^T\ t}{g_1^T\ g_1}\ g_1 + \frac{g_2^T\ t}{g_2^T\ g_2}\ g_2$$

en donde el primer sumando del lado derecho, no es otra cosa que la proyección de t sobre g_1 y el segundo la proyección de t sobre g_2, de donde resulta:

Si las columnas g_1, g_2 de G son ortogonales entonces:

$$Ga^* = \mathrm{Proy}_{\mathrm{Im}(G)}\ t = \mathrm{Proy}_{g_1}\ t + \mathrm{proy}_{g_2}\ t$$

que indica, que la proyección del vector t sobre Im(G), es la suma de las proyecciones a lo largo de las columnas de G.

Como se ve, el cálculo de la solución del problema:

$$\min_a E(a) = \min_a \| t - Ga \|_2^2$$

se puede resolver de forma simple cuando G *tiene columnas ortogonales*, entre sí, lo que nos interesa ahora es ortogonalizar las columnas de la matriz G, ya que, en general no se tiene una matriz con las columnas mutuamente ortogonales.

Tomando el caso nuevamente:

$$G = [\ g_1 \mid g_2\ ],$$

con $g_1^T g_2 \neq 0$ y g_1, g_2 linealmente independientes.

Nos proponemos obtener q_1 y q_2 vectores ortogonales entre si, a partir de g_1, g_2. Tomando:

$$q_1 = g_1,$$

nos queda entonces por determinar q_2.

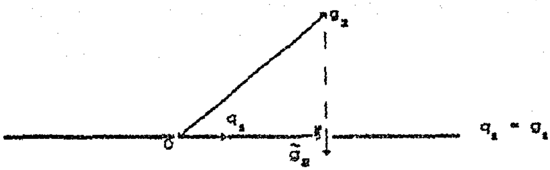


figura 2.1

llamando $\tilde{g}_2$ a la proyección de g_2 sobre q_1 tenemos (vease figura 2.1):

$$\tilde{g}_2 = \text{Proy}_{\ q_1}\, g_2$$

como sabemos que $g_2 - \tilde{g}_2$ es ortogonal a q_1, esto sugiere tomar:

$$q_2 = g_2 - \tilde{g}_2 = g_2 - \text{Proy}_{\,q_1} g_2 \,,$$

como:

$$\tilde{g}_2 = \text{Proy}_{\,q_1} g_2 = \frac{q_1^T g_2}{q_1^T q_1} q_1$$

de donde resulta:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= g_1 \\ q_2 &= g_2 - \frac{q_1^T g_2}{q_1^T q_1} q_1 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Si se quiere representar a la matriz con columnas g_1, g_2 en términos de la matriz de columnas q_1, q_2, despejando en (3) a g_1, g_2 se obtiene:

$$g_1 = q_1 \,.$$

$$g_2 = \rho_{12} q_1 + q_2,$$

en donde $\qquad \rho_{12} = \dfrac{q_1^T g_2}{q_1^T q_1}$

$$\therefore \; G = [\, g_1 \mid g_2 \,] = [\, q_1 \mid \rho_{12} q_1 + q_2 \,]$$

$$= [\, q_1 \mid q_2 \,] \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

lo que podemos escribir como:

$$G = QR.$$

donde la matriz Q tiene columnas ortogonales y la matriz R es triangular superior.

El procedimiento antes descrito, con una ligera modificación, se conoce como proceso de Gram-Schmidt y puede aplicarse al caso general:

$$G = [\, g_1 \mid g_2 \mid \cdot \cdot \cdot \mid g_n \,] \in R^{m \times n} .$$

con las g_i linealmente independientes El esquema general es:

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_1 &= g_1 \\
q_1 &= \| \tilde{q}_1 \|_2^{-1} \tilde{q}_1 \\
\tilde{q}_2 &= g_2 - (q_1^T g_2) q_1 \\
q_2 &= \| \tilde{q}_2 \|_2^{-1} \tilde{q}_2 \\
&\vdots \\
\tilde{q}_n &= g_n - (q_1^T g_n) q_1 - (q_2^T g_n) q_2 - \cdots - (q_{n-1}^T g_n) q_{n-1} \\
q_n &= \| \tilde{q}_n \|_2^{-1} \tilde{q}_n .
\end{aligned}$$

que puede escribirse como:

$$\rho_{11} q_1 = g_1, \text{ con } \rho_{11} = \sqrt{\tilde{q}_1^T \tilde{q}_1}$$

$$\rho_{22} q_2 = g_2 - \rho_{12} q_1, \text{ con } \rho_{22} = \sqrt{\tilde{q}_2^T \tilde{q}_2},$$

$$\vdots \qquad \rho_{12} = q_1^T g_2$$

$$\rho_{nn} q_n = g_n - \rho_{1n} q_1 - \rho_{2n} q_2 - \cdots - \rho_{n-1n} q_{n-1}$$

$$\text{con } \rho_{nn} = \sqrt{\tilde{q}_n^T \tilde{q}_n}, \; \rho_{1n} = q_1^T g_n, \ldots, \; \rho_{n-1,n} = q_{n-1}^T g_n$$

Despejando a las g_i que son las columnas de G se obtiene:

$$g_1 = \rho_{11} q_1$$

$$g_2 = \rho_{12} q_1 + \rho_{22} q_2$$

$$\vdots$$

$$g_n = \rho_{1n} q_1 + \rho_{2n} q_2 + \cdots + \rho_{n-1n} q_{n-1} + \rho_{nn} q_n .$$

Y esto puede escribirse como:

$$G = [\, q_1 \mid q_2 \mid \cdots \mid q_n \,] \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \cdots & \rho_{1n} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & \cdots & \rho_{2n} \\ 0 & 0 & \rho_{33} & \cdots & \rho_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & & \rho_{4n} \\ 0 & 0 & 0 & & \rho_{5n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & \rho_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & & \rho_{nn} \end{bmatrix}$$

Esto es:

$$G = QR.$$

La matriz $Q \in R^{m\times n}$, de esta factorización tiene columnas ortonormales entre si, esto es:

$$Q^TQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} = I_n.$$

la matriz $R \in R^{n\times n}$, es triangular superior. Regresando a nuestro problema.

$$\min_{a} \| t - Ga \|_2^2$$

ahora podemos encontrar su solución usando la factorización $G = QR$, de la siguiente manera:

Como ya se vió (en el caso de que la matriz G tiene dos columnas) el importantisimo hecho de que la proyección ortogonal de t sobre la imagen de G es la suma de las proyecciones ortogonales sobre g_1 y g_2 (columnas de G) en el caso de que g_1 sea ortogonal a g_2. Este resultado es válido en general, así pues tenemos:

$$\text{Proy}_{Im(G)}\, t = \sum_{i=1}^{n} \text{Proy}_{q_i}\, t = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i^T\, t\; q_i}{q_i^T\, q_i} = \sum_{i=1}^{n} (q_i^T\, t)q_i$$

$$= (q_1^T\, t)q_1 + (q_2^T\, t)q_2 + \, . \; . \; . + (q_n^T\, t)q_n$$

$$= \left[\, q_1 \mid q_2 \mid \cdots \mid q_n \,\right] \begin{bmatrix} q_n^T\, t \\ q_n^T\, t \\ \vdots \\ q_n^T\, t \end{bmatrix}$$

$$= Q\, Q^T t,$$

luego, ya que, $\mathrm{Proy}_{\mathrm{Im}(G)}\, t \in \mathrm{Im}\,(G)$,

$$Ga = Q\, Q^T\, t$$

como $\quad G = Q\, R$, entonces

$$Q\, Ra = Q\, Q^T\, t,$$

como Q es ortogonal, finalmente obtenemos que:

$$Ra = Q^T\, t,$$

tiene solución a^*, que es la solución buscada y el resultado es:

$$\min_a \| \, Ga - t \, \|_2^2 = \| \, Ga^* - t \, \|_2^2 .$$

Todo el proceso que implica la ortogonalización de la matriz G, que se encuentra en nuestro problema de Mínimos Cuadrados nos ha conducido a la descomposición:

$$G = QR .$$

La secuencia seguida ha sido la de Gram-Schmidt, que se puede encontrar en cualquier libro de Algebra Lineal. Notese que para este proceso se requiere tener en la memoria central (RAM) a la matriz completa.

En el próximo capítulo se presentan dos alternativas usuales para resolver nuestro problema usando las ideas antes expuestas.

BIBLIOGRAFIA

GILBERT STRANG — Linear Algebra and its Aplications, Academic Press New York, primera edicion 1988.

RICE. JOHN R. — Matrix Computations and Matematical Software. Mc Graw-Hill International Book Company primera edición 1983.

CAPITULO III

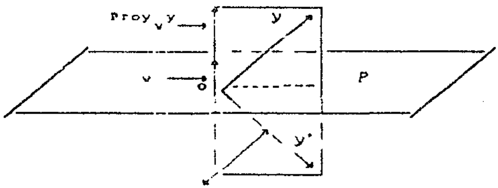
HOUSEHOLDER Y GIVENS.

3.1 REFLEXIONES DE HOUSEHOLDER.

En el capitulo anterior, hemos visto que la factorización de una matriz en el producto **QR**, se convierte en un camino para resolver el problema de Minimos Cuadrados Lineales. Pero se debe notar que una factorización de este estilo, no solamente puede ser obtenida por medio del proceso Gram-Schmidt, sino que existen otras vias para lograrlo. Una de estas alternativas se define e ilustra a continuación:

Dado un plano $P \subset \mathbb{R}^3$ que contenga al origen, se desea encontrar una transformación, tal que, refleje a $\mathbb{R}^3$ con respecto a P.

Se toma v vector unitario, normal a P y sea $y \in \mathbb{R}^3$ Queremos determinar $y' \in \mathbb{R}^3$, el "reflejado" de y con respecto a P.



$$y' = Uy = y - 2\ \mathrm{Proy}_v\ y$$

figura 3.1

Como la proyección de y en v se escribe como:

$$\mathrm{Proy}_v\ y = (v^T y)\ v$$

Esto implica que Uy se puede denotar en la forma:

$$Uy = I\ y - 2(v^T y)\ v$$

$$= I\ y - 2vv^T y = y'.$$

Lo que nos permite llegar a definir a la matriz U como:

$$U = I - 2\ vv^T$$

que se conoce como reflexión de Householder [1] y resulta ser la transformación que se buscaba.

Esta matriz U para el caso general $m{\times}n$ cumple con las siguientes propiedades:

1) $U = U^T$
2) $\| Uy \|_2 = \| y \|_2$
3) $U^T U = I$, $U^2 = I$

Como nuestro interés es usar este tipo de transformaciones, para construir la factorización QR de cualquier matriz. Un resultado central en esta dirección se dá a continuación en el siguiente teorema.

Teorema:

Dado un vector $y \in R^m$, $y \neq 0$, existe una matriz ortogonal U tal que.

$$Uy = -\sigma \| y \|_2 e_1$$

donde

$$\sigma = \begin{cases} 1 \text{ si } \theta_1 \geq 0 \\ -1 \text{ si } \theta_1 < 0 \end{cases}$$

siendo θ_1 la primera componente de y y

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \in R^m$$

Demostración:

Definimos el vector.

$$v = y + \sigma \| y \|_2 e_1$$

y la matriz

$$U = I - \frac{2vv^T}{v^T v}$$

a) Por demostrar que U es ortogonal.

Obsérvese que:

$$U^T = \left(I - \frac{2vv^T}{v^T v} \right)^T = I - \frac{2(v^T)^T v^T}{v^T v}$$

$$= I - \frac{2vv^T}{v^T v} = U$$

Esto es U es simétrica.

Usando este hecho, tomemos ahora:

$$U^T U = \left[I - \frac{2vv^T}{v^T v} \right]^T \left[I - \frac{2vv^T}{v^T v} \right]$$

$$= I - \frac{2vv^T}{v^T v} - \frac{2vv^T}{v^T v} + \frac{4}{(v^T v)^2} vv^T vv^T$$

$$= I - \frac{4vv^T}{v^T v} + \frac{4vv^T}{v^T v} = I$$

$\therefore$ U es ortogonal.

La demostración de que

$$Uy = -\sigma \| y \|_2 e_1$$

es directa y se omite, pero puede verse en [2] ∎

Una representación geométrica de este resultado, para el caso de $\mathbb{R}^3$ se muestra en la figura 3.2.

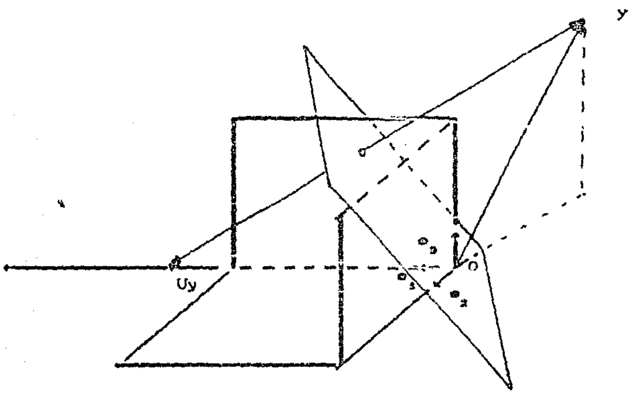


figura 3.2

Lo que en esencia nos dice la proposición anterior es, que dado $y \in R^m$ es posible construir una transformación U (una reflexión) tal que el ''reflejado'' de y es un vector $y' = Uy$ en la dirección de e_1.

Se describe a continuación un proceso mediante el cual es posible construir la factorización QR de cualquier matriz.

Consideremos una matriz:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{1n} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

si ahora tomamos la primera columna de A

$$a_1 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{m1} \end{bmatrix}$$

y construimos U_1 con la propiedad de que $U_1 a_1 = \sigma_1 \| a_1 \|_2 e_1$ tendremos:

$$U_1 A = U_1 \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_{11}^{(1)} & \alpha_{12}^{(1)} & \alpha_{13}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{1n}^{(1)} \\ 0 & \alpha_{22}^{(1)} & \alpha_{23}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{2n}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ 0 & \alpha_{m2}^{(1)} & \alpha_{m3}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{mn}^{(1)} \end{bmatrix} = A_1$$

Se construye U_2 de tal forma que no se modifique la primera columna en la que ya existen ceros por abajo de la componente α_{11} y tampoco se modifique el primer renglón, construyendo $\tilde{U}$ con la propiedad $\tilde{U}_2 a = \sigma_1 \| a \|_2 e_1$, $a = (\alpha_{22}^{(1)}, \ldots, \alpha_{m2}^{(1)})^T$; donde $\tilde{U}_2$ es uno de los bloques de la matriz U_2, esto es:

$$U_2 = \left[\begin{array}{c:c} \underset{(1\times 1)}{I} & \underset{1\times(m-1)}{0} \\ \hdashline \underset{(m-1)\times 1}{0} & \underset{(m-1)\times(m-1)}{\tilde{U}_2} \end{array}\right] \qquad A_1 = \left[\begin{array}{c:c} \underset{(1\times 1)}{R} & \underset{1\times(m-1)}{A_{12}} \\ \hdashline \underset{(m-1)\times 1}{0} & \underset{(m-1)\times(m-1)}{A_{22}} \end{array}\right]$$

entonces $\tilde{U}_2$ actuará sobre A_{22} y se obtiene:

$$U_2 A_1 = U_2 \begin{bmatrix} \alpha_{11}^{(1)} & \alpha_{12}^{(1)} & \alpha_{13}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{1n}^{(1)} \\ 0 & \alpha_{22}^{(2)} & \alpha_{23}^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & \alpha_{33}^{(2)} & & & & \alpha_{3n}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ 0 & 0 & \alpha_{m3}^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{mn}^{(2)} \end{bmatrix} = A_2$$

Similarmente pueden construirse: $U_3, U_4, \cdot \cdot \cdot, U_n$ de tal forma que:

$U_n\, U_{n-1} \cdot \cdot \cdot U_2\, U_1\, A = A_n$ sea de la forma:

$$A_n = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^{(1)} & \alpha_{12}^{(1)} & \alpha_{13}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{1n}^{(1)} \\ 0 & \alpha_{22}^{(2)} & \alpha_{23}^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & \alpha_{33}^{(3)} & & & & \alpha_{3n}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & & & & \alpha_{4n}^{(4)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & & & \alpha_{nn}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & & & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}$$

Si llamamos:

$U_n U_{n-1} \cdot \cdot \cdot U_2 U_1 = Q^T$, resulta:

$$Q^T A = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \}\, n \\ m-n \end{array}$$

y dado que Q es ortogonal, ya que producto de ortogonales es ortogonal

$$A = Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \}\, n \\ m-n \end{array}$$

Este proceso con sus detalles técnicos se puede consultar en [1].
Volviendo a nuestro problema :

$$\min_{a} \| Ga - t \|_2^2$$

si consideramos la factorización:

$$G = Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \}\, n \\ m-n \end{array}$$

se tiene

$$\| Ga - t \|_2^2 = \left\| Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} a - t \right\|_2^2$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} a - Q^T t \right\|_2^2$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} Ra \\ 0 \end{bmatrix} \Big\}^{n} - \begin{pmatrix} c_1 \\ \hline c_2 \end{pmatrix} \Big\}_{n} \right\|_2^2$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} Ra - c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \right\|_2^2$$

donde

$$Q^T t = \begin{pmatrix} c_1 \\ \hline c_2 \end{pmatrix}$$

de tal forma que, la a^* que resuelve nuestro problema, está dada por la solución de:

$$\bar{R}\, a = c_1,$$

además,

$$\| Ga - t \|_2^2 = \| c_2 \|_2^2$$

Esta es una diferencia importante de Householder sobre Gram-Schmidt.

Así pués, es posible resolver:

$$\min_a \| Ga - t \|_2^2$$

mediante la factorización:

$$A = Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$$

El algoritmo que usa (para obtener la descomposición de una matriz en Q R) el método de Householder, es un algoritmo en donde se debe de tener la matriz presente, lo que implica que, la máquina debe de ocupar buena parte de memoria, tan sólo en el almacenamiento de datos, lo que resulta un inconveniente, pues nos gustaría que esto no fuera una limitante para la solución del problema, cosa que puede evitarse haciendo uso del método que se desarrolla a continuación.

3.2 ROTACIONES DE GIVENS.

En esta parte se presenta otra alternativa para obtener la factorización

$$A = Q\,R$$

que nos permite superar el problema de almacenamiento en memoria central presente en los métodos de Gram-Schmidt y Householder descritos anteriormente.

A manera de presentación, consideremos el siguiente problema:

Dado $v = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]$, $\varphi_3 \neq 0$

construir una rotación que "lleve" a v sobre el plano xy (véase fig. 3.3).

Geométricamente, el método de Givens consiste en:

a) Proyectar v sobre el plano xz.
   A dicha proyección lo llamaremos $\tilde{v}$

b) Aplicar una rotación plana de ángulo ϕ a $\tilde{v}$ que lleve a ésto sobre el eje x. Al vector rotado lo llamaremos $R_\phi \tilde{v}$.

c) Se define el rotado de v como $v' = Rv = R_\phi \tilde{v} + \varphi_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
   v' es el vector buscado.

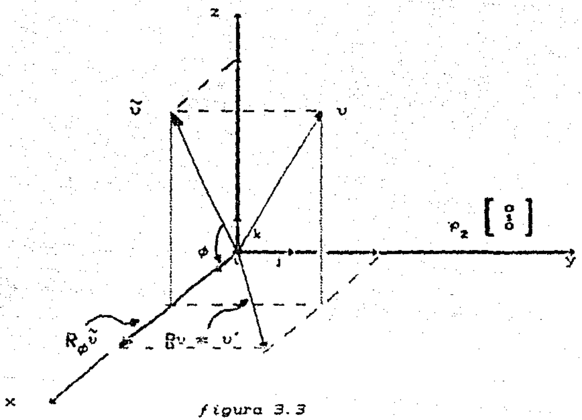


figura 3.3

Se tiene entonces:

$$v' = Rv = R_\phi \tilde{v} + \varphi_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \operatorname{sen}\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \operatorname{Proy}_{xz} v + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \operatorname{sen}\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \operatorname{sen}\phi \\ 0 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \operatorname{sen}\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varphi_1 \cos\phi + \varphi_3 \operatorname{sen}\phi \\ \varphi_2 \\ -\varphi_1 \operatorname{sen}\phi + \varphi_3 \cos\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \\ \varphi'_3 \end{bmatrix}$$

De aquí, para que $\varphi'_3 = 0$ basta tomar

$$\cos\phi = \frac{\varphi_1}{\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_3^2}} \quad , \quad \operatorname{sen}\phi = \frac{\varphi_3}{\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_3^2}}$$

Dos cuestiones son importantes de hacer notar:

i) v' se puede ver como el producto

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \operatorname{sen}\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = v' = \begin{bmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A la matriz de la izquierda se le llama matriz de rotación de Givens.

ii) La rotación sólo modifica dos elementos del vector original (observese que $\varphi_2 = \varphi_2'$).

Por lo que toca al caso general una rotación de Givens, para el caso de R^m está dada por una matriz de la forma:

$$R_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \cos\phi & & \operatorname{sen}\phi & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & -\operatorname{sen}\phi & & \cos\phi & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ --- \; i \\ \\ --- \; j \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \qquad\qquad\qquad i \qquad\quad j \end{matrix} & \end{array}$$

Ahora, si $y = [\theta_1, \ldots, \theta_m]^T$, se tiene que

$$R_{ij}y = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{i-1} \\ \theta_i \cos\phi + \theta_j \operatorname{sen}\phi \\ \theta_{i+1} \\ \vdots \\ \theta_{j-1} \\ -\theta_i \operatorname{sen}\phi + \theta_j \cos\phi \\ \theta_{j+1} \\ \vdots \\ \theta_m \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ --- \; i \\ \\ \\ \\ --- \; j \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{i-1} \\ \theta'_i \\ \theta_{i+1} \\ \vdots \\ \theta_{j-1} \\ \theta'_j \\ \theta_{j+1} \\ \vdots \\ \theta_m \end{bmatrix} = y' \qquad (1)$$

Esto es, la aplicación de la rotación a un vector, sólo afecta a dos de sus componentes, dejando a las demás fijas. En particular, θ'_j puede hacerse cero aplicando un argumento análogo al visto anteriormente.

Si consideramos ahora la matriz

$$A = [\alpha_1 | \alpha_2 | \cdot \cdot \cdot |\alpha_n], \quad \alpha_i \in \mathbb{R}^m$$

y dado que R_{ij} es de orden m, se tiene

$$R_{ij}A = [R_{ij}\,\alpha_1 \mid R_{ij}\,\alpha_2 \mid \ldots \mid R_{ij}\,\alpha_n]$$

esto junto con la igualdad (1) nos permite concluir, que si aplicamos R_{ij} a la matriz A , lo único que se modificará serán los renglones i-ésimo y j-ésimo, quedando lo demás invariante. Una propiedad importan acerca de R_{ij} se muestra en seguida.

Teorema

R_{ij} es ortogonal.

Demostación:

En efecto,

$$R_{ij}^T R_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \cos\phi & & -\mathrm{sen}\ \phi & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & \mathrm{sen}\ \phi & & \cos\phi & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \cos\phi & & \mathrm{sen}\ \phi & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & -\mathrm{sen}\ \phi & & \cos\phi & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & \cos^2\phi + \mathrm{sen}^2\phi & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & \cos^2\phi + \mathrm{sen}^2\phi & & \\ & & & & & 1 & \\ 0 & & & & & & \ddots \ 1 \end{bmatrix} = I$$

∎

Ahora veremos el proceso a seguir para que usando las rotaciones de Givens se llegue a la factorización de una matriz de $m \times n$ en QR. Llamando R_{ij} a cada rotación, es necesario una serie de ellas para ir haciendo ceros en cada renglón hasta tener una matriz tiangular superior.

Tomando una matriz.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{3n} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{4n} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{5n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \alpha_{m4} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

La rotación R_{12} aplicada a A nos permite hacer cero en la entrada α_{21}, la rotación R_{12} tiene la forma:

$$R_{12} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{13} & \operatorname{sen} \varphi_{13} & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -\operatorname{sen} \varphi_{13} & \cos \varphi_{13} & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & 1 & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \ddots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & 1 \end{bmatrix}$$

esta rotación al aplicada a A nos hace el primer cero de lo que será una de las matrices que queremos obtener, teniendo:

$$
R_{12}A = \begin{bmatrix}
\alpha_{11}^{(1)} & \alpha_{12}^{(1)} & \alpha_{13}^{(1)} & \alpha_{14}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{1n}^{(1)} \\
0 & \alpha_{22}^{(1)} & \alpha_{23}^{(1)} & \alpha_{24}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{2n}^{(1)} \\
\alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{3n} \\
\alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{4n} \\
\alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{5n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\
\alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \alpha_{m4} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{mn}
\end{bmatrix}
$$

Para hacer cero la entrada α_{31} debemos aplicar la rotación R_{13} a la matriz $R_{12}A$. Es importante notar que R_{13} respeta el cero producido por R_{12}, esto puede verse por la forma que tiene R_{13} la cual es:

$$
R_{13} = \begin{bmatrix}
\cos\varphi_{13} & 0 & \operatorname{sen}\varphi_{13} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
-\operatorname{sen}\varphi_{13} & 0 & \cos\varphi_{13} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & 1 & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \ddots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & 1
\end{bmatrix}
$$

la matriz resultante es:

$$
R_{13}R_{12}A = \begin{bmatrix}
\alpha_{11}^{(2)} & \alpha_{12}^{(2)} & \alpha_{13}^{(2)} & \alpha_{14}^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{1n}^{(2)} \\
0 & \alpha_{22}^{(1)} & \alpha_{23}^{(1)} & \alpha_{24}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{2n}^{(1)} \\
0 & \alpha_{32}^{(1)} & \alpha_{33}^{(1)} & \alpha_{34}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{3n}^{(1)} \\
\alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{4n} \\
\alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{5n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\
\alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \alpha_{m4} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{mn}
\end{bmatrix}
$$

Para hace cero α_{32}, tomaremos los renglones 2 y 3.

$$R_{23}R_{13}R_{12}A = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^{(2)} & \alpha_{12}^{(2)} & \alpha_{13}^{(2)} & \alpha_{14}^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{1n}^{(2)} \\ 0 & \alpha_{22}^{(2)} & \alpha_{23}^{(2)} & \alpha_{24}^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & \alpha_{33}^{(2)} & \alpha_{34}^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{3n}^{(2)} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{4n} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{5n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \alpha_{m4} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

Haciendo la aplicación R_{14}, se afectan el primer y cuarto renglones tenemos:

$$R_{14}R_{23}R_{13}R_{12}A = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^{(3)} & \alpha_{12}^{(3)} & \alpha_{13}^{(3)} & \alpha_{14}^{(3)} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{1n}^{(3)} \\ 0 & \alpha_{22}^{(2)} & \alpha_{23}^{(2)} & \alpha_{24}^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & \alpha_{33}^{(2)} & \alpha_{34}^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{3n}^{(2)} \\ 0 & \alpha_{42}^{(1)} & \alpha_{43}^{(1)} & \alpha_{44}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{4n}^{(1)} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{5n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \alpha_{m4} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

Al hacer las aplicaciones R_{24} y R_{34} tendriamos:

$$R_{34} \cdot \cdot \cdot R_{12}\, A = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^{(3)} & \alpha_{12}^{(3)} & \alpha_{13}^{(3)} & \alpha_{14}^{(3)} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{1n}^{(3)} \\ 0 & \alpha_{22}^{(3)} & \alpha_{23}^{(3)} & \alpha_{24}^{(3)} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{2n}^{(3)} \\ 0 & 0 & \alpha_{33}^{(3)} & \alpha_{34}^{(3)} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{3n}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44}^{(3)} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{4n}^{(3)} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{5n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \alpha_{m4} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

Continuando en esta forma llegamos a la aplicación:

$$R_{n-1n} \cdot \cdot \cdot R_{2n} \; R_{1n} \cdot \cdot \cdot R_{12}A$$

que nos ha dejado una matriz triangular superior de nxn.

$$R_{n-1n} \cdot \cdot \cdot R_{12}\, A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & a_{13}^{(n-1)} & a_{14}^{(n-1)} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n}^{(n-1)} \\ 0 & a_{22}^{(n-1)} & a_{23}^{(n-1)} & a_{24}^{(n-1)} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n}^{(n-1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(n-1)} & a_{34}^{(n-1)} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n}^{(n-1)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(n-1)} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{4nn}^{(n-1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & a_{nn}^{(n-1)} \\ a_{n+11} & a_{n+12} & a_{n+13} & a_{n+14} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}$$

como m » n, se continúa en esta forma, hasta que se tengan las

$$R_{nm} \cdots R_{1m} \cdots R_{nn+2} \cdots R_{1n+2} R_{nn+1} \cdots R_{1n+1} R_{n-1n} \cdots R_{12}A$$

haciendo las aplicaciones de las rotaciones faltantes, tenemos finalmente la matriz triangular superior que necesitábamos, esto es;

$$R_{nm} \cdot \cdot \cdot R_{12}\, A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(m-1)} & a_{12}^{(m-1)} & a_{13}^{(m-1)} & a_{14}^{(m-1)} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n}^{(m-1)} \\ 0 & a_{22}^{(m-1)} & a_{23}^{(m-1)} & a_{24}^{(m-1)} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n}^{(m-1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(m-1)} & a_{34}^{(m-1)} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n}^{(m-1)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(m-1)} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{4n}^{(m-1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & a_{nn}^{(m-1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}$$

con R_{ij} ortogonal para toda i,j.

Si llamamos:

$$R_{nm} \cdot \cdot \cdot R_{12} = Q^T.\ Q^T \text{ es ortogonal y tenemos}$$

$$Q^T A = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$A = Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$$

Que es nuevamente una factorización del tipo descrito en la sección anterior, lo cual nos permite resolver el problema Mínimos Cuadrados usando rotaciones de Givens.

Este método tiene la importante propiedad que deseábamos; esto es posible, con un manejo adecuado de técnicas para obtener la factorización QR con rotaciones de Givens y por ende la factorización y residual del problema Mínimos Cuadrados Lineal, sin tener presente toda la matriz en la memoria central. Los detalles se presentan en el capítulo siguiente.

BIBLIOGRAFIA

1 G. M. STEWART. Introduction to Matrix Computations. Academic Press New York and London. Primera Edición 1968.

2 GENE H. GOLUB & CHARLES F.VAN LOAN. Matrix Computations. The Johns Hopkins University Press Primera edición 1983.

CAPITULO IV

ALGORITMO DE NASH

(J. C. Nash; 1979).

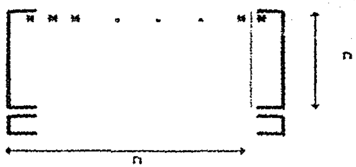
DESCRIPCION.

0) Sea $\tilde{G} = [G|t]$

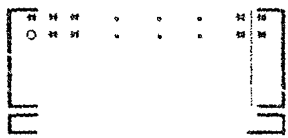
Declárese un arreglo AR(,) de dimensiones (n + 1) x (n + 1).

1) Construcción de la factorización de $\tilde{G}$

1.1) Almacénese el renglón 1 de $\tilde{G}$ en el renglón 1 de AR(;).



1.2) Almacénese el renglón 2 de $\tilde{G}$ en el n + 1 de AR(,).
Usando una rotación R_{12}, elimínese AR(n + 1,1).
Almacénese el renglón n + 1 de AR(,) en el 2.



1.3) Almacénese el renglón 3 de $\tilde{G}$ en el n + 1 de AR(,).
Con R_{13} elimínese AR(n + 1,1)
Con R_{23} elimínese AR(n + 1,2)
Almacénese el renglón n + 1 de AR(,) en el 3.

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} * & * & * & \cdot & \cdot & \cdot & * & * \\ 0 & * & * & \cdot & \cdot & \cdot & * & * \\ 0 & 0 & * & \cdot & \cdot & \cdot & * & * \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{array}\right]$$
$$\left[\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\right]$$

.
.
.

1.n) Almacénese el renglón n de $\hat{G}$ en el n + 1 de AR(,).

Con R_{1n} elimínese AR(n + 1,1)

Con R_{2n} elimínese AR(n + 1,2)

.
.
.

Con R_{n-1n} elimínese AR(n + 1,n - 1)

Almacénese el renglón n + 1 de AR(,) en el n.

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} * & * & * & \cdot & \cdot & \cdot & * & * \\ 0 & * & * & \cdot & \cdot & \cdot & * & * \\ 0 & 0 & * & \cdot & \cdot & \cdot & * & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & & & * & * \end{array}\right]$$
$$\left[\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\right]$$

1.n+1) Almacénese el renglón n+1 de $\tilde{G}$ en el n+1 de AR(,).

Con R_{1n+1} elimínese AR(n+1,1)

Con R_{2n+1} elimínese AR(n+1,2)

.
.
.

Con R_{nn+1} elimínese AR(n+1,n)

$$SQ \longleftarrow [AR(n+1,n+1)]^2$$

1.m) Almacénese el renglón m de $\tilde{G}$ en el n+1 de AR(,).

Con R_{1m} elimínese AR(n+1,1)

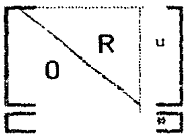
$\vdots$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\vdots$

Con R_{nm} elimínese AR(n+1,1)

$$SQ \longleftarrow SQ + [AR(n+1,n+1)]^2$$

2) Cálculo de la solución

2.1) Llamemos



al resultado del proceso anterior.

Por un proceso de sustitución hacia atrás resuélvase

$$Ra = u$$

$$a^* = R^{-1}u \text{ es la solución de } \min_a \| t - Ga \|_2^2$$

2.2) La variable SQ contiene el valor de

$$\| t - Ga^{*} \|_2^2$$

3) FIN.

Es necesario hacer notar que para esta descomposición no fué necesario tener a la matriz presente, ya que las rotaciones nos permiten ir metiendo renglon por renglón, lo que nos deja hacer ahorro de memoria central. Asi mismo se requiere destacar que en el ejemplo gráfico fue usado un solo lado derecho, pero se puede usar el programa para varios lados derechos.

El algoritmo de Nash se reproduce a continuación con algunas modificaciones.

ALGORITMO 1.

0) Datos de entrada (w,n,l)

- w Arreglo de (n + 1) x (n + 1).
- n Numero de columnas de la matriz w.
- l Número de lados derechos.

Comentario: Se asigna cero a todo el espacio w.

1) Para i = 1, . . . ,n
   - 1.1) Para j = 1, . . . ,n + 1
     - 1.1.1) W (i,j) ← 0

Comentario: Se calcula la tolerancia para discriminar rango deficiente o no. Empezando con el cálculo de la epsilon de la maquina.

2) $\alpha \longleftarrow 4 / 3$

3) $\beta \longleftarrow \alpha - 1$

4) eps $\longleftarrow \beta + \beta + \beta$

5) eps $\longleftarrow |$ eps $- 1 |$

6) tol $\longleftarrow$ n x n + eps x eps

Comentario: Asignamos cero a la variable nobs (número de observaciones), para contarlas.

7) nobs $\longleftarrow$ 0

Comentario: Asignamos cero al espacio de trabajo h, donde son guardadas las sumas de cuadrados.

8) Para j = 1, . . . ,l
   8.1) h (j) $\longleftarrow$ 0

9) t $\longleftarrow$ n + 1

10) k $\longleftarrow$ n + 1

Comentario: En la siguiente instrucción se lee un renglón de la matriz aumentada $[A, t_1, t_2, \ldots, t_l]$ y es asignado en W (k,j), j = 1, . . . ,t.

11) ¿ Hay más observaciones ?
   11.1) Para j = 1, . . . ,t (Hay más observaciones)
      11.1.1) Leer W (k,j)

   11.2) Ir a 18) (no hay más observaiones)

12) nobs $\longleftarrow$ nobs + 1

Comentario: Proceso para la descomposición QR con rotaciones de Givens.

13) Para $j = 1, \ldots, n$

13.1) $m \longleftarrow j$

13.2) $s \longleftarrow W(k, j)$

13.3) $c \longleftarrow W(j, j)$

13.4) $b \longleftarrow |c|$

13.5) ¿si $|s| < b$?

13.5.1) $b \longleftarrow |s|$ (si)

13.6) ¿ si $b \neq 0$?

13.6.1) $c \longleftarrow c / b$

13.6.2) $s \longleftarrow c$

13.6.3) $p \longleftarrow \sqrt{c^2 + s^2}$

13.6.4) $s \longleftarrow s / p$

13.6.5) ¿ si $|s| \geq tol$?

13.6.5.1) $c \longleftarrow c / p$

13.6.5.2) aplicar algoritmo 2.

Comentario: Acumulación de la suma de cuadrados.

14) Para $j = 1, \ldots, l$

14.1) $h(j) \longleftarrow h(j) + W(k, n + j)^2$

Comentario: Se regresa a leer más datos.

15) Ir a 11)

Comentario: Se aplica sustitucion hacia atras para obtener las soluciones.

16) Aplicar algoritmo 3

17) Alto

El siguiente algoritmo es el que se sigue para ejecutar las rotaciones planas.

ALGORITMO PARA EFECTUAR LAS ROTACIONES PLANAS.

ALGORITMO 2

Propósito: Aplicar una rotación plana a los renglones j,k de la matriz W de la columna m a la t, c y s son el coseno y el seno del ángulo de rotación.

0) Datos de entrada (j,k,m,t,c,s,w)

j,k Renglones a rotar.

m,t Columnas inicial y final de los renglones.

c Contiene $\cos(\phi)$, ϕ ángulo de rotación.

s Contiene $\operatorname{sen}(\phi)$, ϕ ángulo de rotación.

w Arreglo de $(n + 1) \times (n + 1)$.

1) Para i = m, . . . ,t

1.1) $r \longleftarrow W(i,j)$

1.2) $W(j,i) \longleftarrow r \times c + s \times W(k,i)$

1.3) $W(k,i) \longleftarrow -r \times s + c \times W(k,i)$

2) Alto

ALGORITMO PARA EFECTUAR LA SUSTITUCION HACIA ATRAS.

ALGORITMO 3

Propósito: Resolver AX = T, donde la matriz A es triangular superior, T-varios lados derechos, X- las soluciones respectivas. Se hacen sustituciones hacia atrás. n número de variables. g número de lados derechos.

0) Datos de entrada (A,T,n,g)

A Matriz dada por las rotaciones de Givens.

T Lados derechos.

n Número de variables.

g Número de lados derechos.

```
1) | Para kg = n + 1, . . . . ,n + g
   |   1.1)| ¿ si n > 1 ?
   |       |     1.1.1)  nm1  <----  n - 1
   |       |     1.1.2) | Para kb = 1, . . . . ,nm1
   |       |            | 1.1.2.1)  km1  <----  n - kb
   |       |            | 1.1.2.2)  k    <----  km1 + 1
   |       |            | 1.1.2.3) A (k,kg) <---- A (k,kg) / A (k,k)
   |       |            | 1.1.2.4)  t    <----  -A (k,kg)
   |       |            | 1.1.2.5) | Para i = 1, . . . . , km1
   |       |            |          | 1.1.2.5.1) A (i,kg) <----
   |       |            |          |       A (i,kg) + A (i,k) * t
   |       |            |          |__________________
   |       |            |_____________________________
   |       |__________________________________________
   |
   |   1.2)   A (1,kg)  <----  A (1,kg) / A (1,1)
   |__________________________________________________
```

2) Alto

En el apéndice se encuentran los ejemplos numéricos que se usaron para comprobar el buen funcionamiento del programa, en esta parte escribiremos los problemas y como no se contó con la forma cotidiana para todos ellos, en su mayor parte se escibe el modelo matemático correspondiente.

PROBLEMA NUMERO 1.

Sea el conjunto de datos $\{(1,5.2),(2,4.7),(3,4.4),(4,3.8),(5,3.6)\}$ obtenidos de observar una particula de alguna substancia en una mezcla, en un intervalo de tiempo.

El problema se escribe matemáticamente como:

$$\Gamma(\gamma, a) = \alpha_1\Gamma_1(\gamma) + \alpha_2\Gamma_2(\gamma).$$

donde: $\Gamma_1(\gamma_1) = 1$, $\Gamma_1(\gamma_2) = 1$, $\Gamma_1(\gamma_3) = 1$, $\Gamma_1(\gamma_4) = 1$, $\Gamma_1(\gamma_5) = 1$ y $\Gamma_2(\gamma_1) = 1$, $\Gamma_2(\gamma_2) = 1.5$, $\Gamma_2(\gamma_3) = 1.8$, $\Gamma_2(\gamma_4) = 2$, $\Gamma_2(\gamma_5) = 2.2$. (Esta última parte es un buen ejemplo, para mostrar que no se conocen siempre las reglas de correspondencia de las Γ_j).

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.5 \\ 1 & 1.8 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2.2 \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad t = \begin{bmatrix} 5.2 \\ 4.7 \\ 4.4 \\ 3.8 \\ 3.6 \end{bmatrix}$$

que de acuerdo al criterio de Mínimos Cuadrados son los correspondientes valores que se piden en la ecuación siguiente:

$$\min_a \| Ga - t \|_2^2$$

Del problema 2 en adelante, independientemente de que se conozca o no la regla de correspondencia de la Γ_j, $j = 1,2,\ldots,n$ la columna j-ésima de la matriz G es la Γ_j evaluada en la γ_i, $i = 1,2,\ldots,m$.

PROBLEMA NUMERO 2.

El problema matemáticamente escrito es:

$$\Gamma\,(\gamma,a) = \alpha_1\Gamma_1(\gamma) + \alpha_2\Gamma_2(\gamma) + \alpha_3\Gamma_3(\gamma) + \alpha_4\Gamma_4(\gamma).$$

$\gamma_i,\ \ i = 1,2,\ldots,6$

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -2 \\ 5 & -1 & 0 & 4 \\ 7 & 6 & 10 & 3 \\ 3 & 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad a = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}$$

$$t = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA NUMERO 3.

La forma matemática de este problema es:

$$\Gamma\,(\gamma,a) = \alpha_1\Gamma_1(\gamma) + \alpha_2\Gamma_2(\gamma) + \alpha_3\Gamma_3(\gamma).$$

$\gamma_i,\ \ i = 1,2,\ldots,4$

$$G = \begin{bmatrix} 5 & 1.E-6 & 1 \\ 6 & 0.999999 & 1 \\ 7 & 2.00001 & 1 \\ 8 & 2.9999 & 1 \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, \quad t = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA NUMERO 4.

Este problema si cuenta con las referencias de datos en un contexto cotidiano.

Se cree que existe una relación lineal entre la ganancia monetaria agrícola y el uso de nitrógeno, fosfato, potasio y petróleo más una constante; lo que matemáticamente podemos escribir como:

$$\Gamma(\gamma, a) = \alpha_1 \Gamma_1(\gamma) + \alpha_2 \Gamma_2(\gamma) + \alpha_3 \Gamma_3(\gamma) + \alpha_4 \Gamma_4(\gamma) + \alpha_5 \Gamma_5(\gamma).$$

$\gamma_i, \; i = 1,2,\ldots,13$

Entonces la matriz nos queda de la forma:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 563 & 262 & 461 & 221 \\ 1 & 658 & 291 & 473 & 222 \\ 1 & 676 & 294 & 513 & 221 \\ 1 & 749 & 302 & 516 & 218 \\ 1 & 834 & 320 & 540 & 217 \\ 1 & 973 & 350 & 596 & 218 \\ 1 & 1079 & 386 & 650 & 218 \\ 1 & 1151 & 401 & 676 & 225 \\ 1 & 1324 & 445 & 760 & 228 \\ 1 & 1499 & 492 & 870 & 230 \\ 1 & 1690 & 510 & 907 & 237 \\ 1 & 1735 & 534 & 932 & 235 \\ 1 & 1778 & 559 & 956 & 238 \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix}$$

$$
t = \begin{bmatrix} 305 \\ 342 \\ 331 \\ 339 \\ 354 \\ 369 \\ 378 \\ 368 \\ 405 \\ 438 \\ 438 \\ 451 \\ 485 \end{bmatrix}
$$

PROBLEMA NUMERO 5.

Este problema no cuenta con las referencias de datos en un contexto cotidiano, por lo que sólo se escribe matemáticamente.

$$
\Gamma(\gamma, a) = \alpha_1\Gamma_1(\gamma) + \alpha_2\Gamma_2(\gamma) + \alpha_3\Gamma_3(\gamma) + \alpha_4\Gamma_4(\gamma) + \alpha_5\Gamma_5(\gamma).
$$

$\gamma_i, \; i = 1,2,\ldots,8$

$$
a = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix}
$$

$$G = \begin{bmatrix} 22 & 10 & 2 & 3 & 7 \\ 14 & 7 & 10 & 0 & 8 \\ -1 & 13 & -1 & -11 & 3 \\ -3 & -2 & 13 & -2 & 4 \\ 9 & 8 & 1 & -2 & 4 \\ 9 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 2 & -6 & 6 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad t = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 10 & 11 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & -6 \\ -3 & 6 & 3 \\ 1 & 11 & 12 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA NUMERO 6.

La forma matemática de este problema es:

$$\Gamma(\gamma, a) = \alpha_1\Gamma_1(\gamma) + \alpha_2\Gamma_2(\gamma) + \alpha_3\Gamma_3(\gamma).$$

γ_i, $i = 1,2,\ldots,4$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, \quad t = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA NUMERO 7.

La forma matemática de este problema es:

$$\Gamma(\gamma, a) = \alpha_1\Gamma_1(\gamma) + \alpha_2\Gamma_2(\gamma).$$

$\gamma_i = i, \quad i = 1,2,\ldots,12$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \\ 1 & 7 \\ 1 & 8 \\ 1 & 9 \\ 1 & 10 \\ 1 & 11 \\ 1 & 12 \end{bmatrix} \quad a = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad t = \begin{bmatrix} 4.0225 \\ 6.3095 \\ 5\ 3522 \\ 4.3553 \\ 3.7861 \\ 2.2947 \\ 2.9492 \\ 2.1732 \\ 1.4921 \\ 3.3424 \\ 1.2595 \\ 2.4732 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA NUMERO 8.

La forma matemática de este problema es:

$$\Gamma(\gamma, a) = \alpha_1 \Gamma_1(\gamma) + \alpha_2 \Gamma_2(\gamma).$$

$\gamma_i, \quad i = 1,2,\ldots,4$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad t = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.5 \\ 0.75 \\ 1.25 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA NUMERO 9.

La forma matemática de este problema es:

$$\Gamma(\gamma, a) = \alpha_1 \Gamma_1(\gamma) + \alpha_2 \Gamma_2(\gamma) + \alpha_3 \Gamma_3(\gamma).$$

$$\gamma_i, \quad i = 1, 2, \ldots, 5$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, \quad t = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.3 \\ 4.65 \\ 3.1 \\ 1.2 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA NUMERO 10.

La forma matemática de este problema es:

$$\Gamma(\gamma, a) = \alpha_1 \Gamma_1(\gamma) + \alpha_2 \Gamma_2(\gamma) + \alpha_3 \Gamma_3(\gamma).$$

$$\gamma_i, \quad i = 1, 2, \ldots, 8$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 6 & 36 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{bmatrix}, \qquad a = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

$$t = \begin{bmatrix} 75994575 \\ 91972266 \\ 10571062 \\ 122775046 \\ 131669275 \\ 150697381 \\ 179323175 \\ 203235298 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA NUMERO 11.

La forma matemática de este problema es:

$$\Gamma(\gamma, a) = \alpha_1 \Gamma_1(\gamma) + \alpha_2 \Gamma_2(\gamma).$$

$$\gamma_i,\ i = 1,2,\ldots,25$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \\ 1 & 7 \\ 1 & 8 \\ 1 & 9 \\ 1 & 10 \\ 1 & 11 \\ 1 & 12 \\ 1 & 13 \\ 1 & 14 \\ 1 & 15 \\ 1 & 16 \\ 1 & 17 \\ 1 & 18 \\ 1 & 19 \\ 1 & 20 \\ 1 & 21 \\ 1 & 22 \\ 1 & 23 \\ 1 & 24 \\ 1 & 25 \end{bmatrix},\quad a = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix},\quad t = \begin{bmatrix} 5.0291 \\ 6.5099 \\ 5.3666 \\ 4.1272 \\ 4.2948 \\ 6.1261 \\ 12.514 \\ 10.0502 \\ 9.1614 \\ 7.5677 \\ 7.292 \\ 10.0357 \\ 11.0708 \\ 13.4045 \\ 12.8415 \\ 11.9666 \\ 11.0765 \\ 11.7774 \\ 14.5701 \\ 17.044 \\ 17.0398 \\ 15.9069 \\ 15.485 \\ 15.5112 \\ 17.6572 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA NUMERO 12.

La forma matematica de este problema es:

$$\Gamma(\gamma,a) = \alpha_1\Gamma_1(\gamma) + \alpha_2\Gamma_2(\gamma) + \alpha_3\Gamma_3(\gamma).$$

$\gamma_i,\ i = 1,2,\ldots,9$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.25 & 0.0625 \\ 1 & 0.5 & 0.0025 \\ 1 & 0.75 & 0.5625 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1.25 & 1.5625 \\ 1 & 1.5 & 2.25 \\ 1 & 1.75 & 3.0625 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad a = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix},$$

$$t = \begin{bmatrix} 20.00 \\ 51.58 \\ 68.73 \\ 75.46 \\ 74.36 \\ 67.09 \\ 54.73 \\ 37.98 \\ 17.28 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA NUMERO 13.

La forma matemática de este problema es:

$$\Gamma(\gamma, a) = \alpha_1 \Gamma_1(\gamma) + \alpha_2 \Gamma_2(\gamma) + \alpha_3 \Gamma_3(\gamma).$$

$$\gamma_i, \quad i = 1, 2, \ldots, 25$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.0174524 \\ 1 & 2 & 0.348954 \\ 1 & 3 & 0.0523359 \\ 1 & 4 & 0.0697564 \\ 1 & 5 & 0.0871557 \\ 1 & 6 & 0.1045284 \\ 1 & 7 & 0.1218693 \\ 1 & 8 & 0.13917331 \\ 1 & 9 & 0.15644344 \\ 1 & 10 & 0.1736481 \\ 1 & 11 & 0.190809 \\ 1 & 12 & 0.2079116 \\ 1 & 13 & 0.224951 \\ 1 & 14 & 0.2419219 \\ 1 & 15 & 0.258819 \\ 1 & 16 & 0.2756373 \\ 1 & 17 & 0.2923717 \\ 1 & 18 & 0.3090169 \\ 1 & 19 & 0.3355681 \\ 1 & 20 & 0.3420201 \\ 1 & 21 & 0.3583679 \\ 1 & 22 & 0.374565 \\ 1 & 23 & 0.3907311 \\ 1 & 24 & 0.4067366 \\ 1 & 25 & 0.4226182 \end{bmatrix}. \qquad t = \begin{bmatrix} 5.0291 \\ 6.5099 \\ 5.3666 \\ 4.1275 \\ 4.2948 \\ 6.1261 \\ 12.514 \\ 10.0502 \\ 9.1614 \\ 7.5677 \\ 7.292 \\ 10.0357 \\ 11.0706 \\ 13.4045 \\ 12.8415 \\ 11.9666 \\ 11.0765 \\ 11.7774 \\ 14.5701 \\ 17.044 \\ 17.0398 \\ 15.9069 \\ 15.485 \\ 15.5112 \\ 17.6572 \end{bmatrix}.$$

$$a = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA NUMERO 14.

La forma matemática de este problema es:

$$\Gamma(\gamma, a) = \alpha_1\Gamma_1(\gamma) + \alpha_2\Gamma_2(\gamma) + \alpha_3\Gamma_3(\gamma) + \alpha_4\Gamma_4(\gamma) + \alpha_5\Gamma_5(\gamma).$$

$$\gamma_i, \; i = 1, 2, \ldots, 6$$

la matriz G se escribe a continuación

$$\begin{bmatrix} 3.6E{+}01 & -6.3E{+}02 & 3.36E{+}03 & -7.56E{+}03 & 7.56E{+}03 \\ -6.3E{+}02 & 1.47E{+}04 & -8.82E{+}04 & 2.1168E{+}05 & -2.205E{+}05 \\ 3.36E{+}03 & -8.82E{+}04 & 5.648E{+}05 & -1.4112E{+}06 & 1.512E{+}06 \\ -7.56E{+}03 & 2.1168E{+}05 & -1.4112E{+}06 & 3.6288E{+}06 & -3.969E{+}06 \\ 7.56E{+}03 & -2.205E{+}05 & 1.512E{+}06 & -3.969E{+}06 & 4.41E{+}06 \\ -2.772E{+}03 & 8.316E{+}04 & -5.8212E{+}05 & 1.55232E{+}06 & -1.74636E{+}06 \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix}, \quad t = \begin{bmatrix} 4.63E{+}02, & -4.157E{+}03 \\ -1.38E{+}04 & -1.782E{+}04 \\ 9.702E{+}04 & 9.3555E{+}04 \\ -2.5872E{+}05 & -2.618E{+}05 \\ 2.9106E{+}05 & 2.88288E{+}05 \\ -1.16424E{+}05 & -1.18944E{+}05 \end{bmatrix}$$

BIBLIOGRAFIA

Dahlquist, Germund and Bjorck Åke. — Numerical Methods
Prentice-Hall.
Primera Edición 1974.

GUERRERO G. JOSE — El Cálculo Científico por Computadora: Dos Fuentes Importantes de Error, Memoria del Congreso Nacional Pasado, Presente y Futuro de la Computación, Tomo I .
U. N. A. M.
Primera Edición 1988.

LAWSON, CHARLES L. & HANSON, RICHARD J., — Solving Least Squares Problems.
Prentice - Hall
Primera Edición 1974.

NASH, JOHN C. . — Compact Numerical Methods for Computers: Linear Algebra and Function Minimization.
Halsted Press.
Primera Edición 1979.

APENDICE

GUIA DEL USUARIO PARA EL PROGRAMA

Se debe de crear un archivo de datos del problema en disco flexible (memoria secundaria), la cadena de caracteres usada para que el programa VIVA.For accese dicho archivo de datos no debe de contener más de 25 caracteres incluyendo el drive deseado, la trayectoria y el nombre (con o sin extención). Por ejemplo en una microcomputadora con dos unidades de disco (A y B) en la unidad A ponemos el diskette con el programa VIVA.FOR y el (o los) archivo (s) de datos del (o los) problemas (un archivo por cada problema).

Descripción del formato del archivo de datos del problema:
En la primera linea se escriben dos números enteros (en formato libre) que corresponden al número de variables (parámetros) a ajustar y el número de lados derechos respectivamente.

En la segunda linea se escribe la palabra SI (en los dos primeros espacios), lo que le indica al programa VIVA.FOR que se leerá un renglón mas de la matriz aumentada de datos del problema a resolver.

En la tercera linea se escribe el primer renglón de la matriz aumentada de datos del problema a resolver.

A continuación se repite el proceso de las lineas segunda y tercera tantas veces como renglones tenga la matriz aumentada de datos.

La ultima linea debe de contener la palabra NO en los dos primeros espacios, cabe hacer notar, que las palabras SI y NO deben ser con mayúsculas.

Un ejemplo:
<inicio>
2 1
SI
1 1 5.2
SI
1 1.5 4.7
SI
1 1.8 4.4
SI
1 2 3.8
SI
1 2.2 3.6
NO
< fin >

Nota: no se debe de dejar lineas en blanco, se debe iniciar la escritura en el primer espacio y entre dato y dato debe de haber al menos un espacio en blanco.

Al correr (o ejecutar) el programa VIVA.FOR, nos pide dos cadenas de caracteres (a lo más 25) la primera contireno el drive, la trayectoria y el nombre del archivo de los datos del problema a resolver, la segunda contiene el drive, la trayectoria y el nombre del archivo de los resultados encontrados, este último no debe existir.

Ejemplo:
B:\MCL\DATEJO1.DAT
B:\MCL\SOLEJO1.DAT

Una vez que se ha dicho como se usa el programa ponemos a continuación del mismo y una serie de datos y de resultados que se han obtenido al correr el programa.

```
      PROGRAM NASH
C
C///////////////////////////////////////////////////////////////////////
C//    ESTE PROGRAMA TIENE POR OBJETO RESOLVER PROBLEMAS DE           //
C//     MINIMOS CUADRADOS LINEALES (DE RANGO COMPLETO):               //
C//          MIN || T - G * A || ** 2                                  //
C//           A                                                        //
C//                                                                    //
C//   DONDE G ES MATRIZ DE DIMENSION  M  *  N,  T  ES  DE  DIMEN-     //
C//   SION M * L  Y A ES DE DIMENSION N *  L,  CON  M  >>  N.         //
C//   LA IDEA CENTRAL DEL METODO ES FACTORIZAR  LA  MATRIZ  G         //
C//   EN SU DESCOMPOSICION Q * R, VIA  ROTACIONES  PLANAS  DE         //
C//   GIVENS. CON DETALLES TECNICOS DE PROGRAMACION LOS  CUA-         //
C//   LES LO HACEN ATRACTIVO EN CUANTO QUE.  SE  REQUIERE  UN         //
C//   MINIMO DE MEMORIA CENTRAL (RAM). YA QUE SE NECESITA  UN         //
C//   ARREGLO DE DIMENSION (N + 1) * (N + L).                         //
C//  LA DECLARACION DE LA  MATRIZ  TS  Y  DEL  VECTOR  NRES           //
C//   ESTAN PENSADOS PARA RESOLVER UN PROBLEMA DE MINIMOS CUA-        //
C//   ADARADOS LINEALES DE UN MAXIMO DE 10 VARIABLES Y CINCO LA-      //
C//  DOS DERECHOS.                                                    //
C//   SI SE REQUIERE RESOLVER PROBLEMAS CON MAS VARIABLES (N)         //
C//   Y MAS LADOS DERECHOS (L) DEBEN CAMBIARSE LAS DIMENSIONES        //
C//   DEL ARREGLO TS Y DEL VECTOR NRES. ESTO ES:                      //
C//  REAL  TS(N+1,N+L),NRES(L),TOLERA,DMIN                            //
C//   Y LA ASIGNACION                                                 //
C//        NREND =   N   +   1                                        //
C//                                                                    //
C//                             INVIERNO  89/90.                      //
C///////////////////////////////////////////////////////////////////////
C
      REAL TS(11,15),NRES(5),TOLERA,DMIN
      INTEGER NVAR,NLDER,NOBSER,NREND,K,N,NOMBRE
      CHARACTER ENTRA*25,SALIDA*25,PROB*2
      NREND = 11
30    WRITE(6,*) 'DAME EL NOMBRE DEL ARCHIVO-ENTRADA.'
      WRITE(6,*) 'A LO MAS 25 CARACTERES ALFANUMERICOS.'
      READ(5,40)ENTRA
      OPEN(7,FILE=ENTRA,STATUS='OLD')
```

```
      WRITE(6,*) 'DAME EL NOMBRE DEL ARCHIVO-SALIDA,'
      WRITE(6,*)'A LO MAS 25 CARACTERES ALFANUMERICOS.'
      READ(5,40)SALIDA
      OPEN(8,FILE=SALIDA,STATUS='NEW')
40    FORMAT(A25)
45    FORMAT(A2)
      READ (7,*) NVAR,NLDER
      CALL REDGIV(NPEND,NVAR,NLDER,TS,NRES,TOLERA,NOBSER)
C
C
C     SE ASIGNA LA TOLERANCIA PARA DISCRIMINAR RANGO
C     DEFICIENTE O NO.
C
      TOLDP = SQRT(TOLERA)
      TOLDP = TOLDP/FLOAT(NVAR)
      TOLDP = 10. * TOLDP
C
C     SE CHECA QUE TODOS LOS ELEMENTOS DE LA DIAGONAL PRINCIPAL
C     SEAN MAYORES O IGUALES QUE LA TOLERANCIA.
C
      DMIN = ABS(TS(1,1))
      DO 10 K = 2,NVAR
         DMIN = AMIN1(DMIN,ABS(TS(K,K)))
10    CONTINUE
      IF (DMIN .LT. TOLDP) THEN
         WRITE(8,*)'**************************************************'
         WRITE(8,*)'**                                              **'
         WRITE(8,*)'**  HOLA !!!CORRIDA DEL PROGRAMA:   "NASH"      **'
         WRITE(8,*)'**                                              **'
         WRITE(8,*)'**  SOLUCION DE MINIMOS CUADRADOS LINEALES      **'
         WRITE(8,*)'**  DE RANGO COMPLETO.                          **'
         WRITE(8,*)'**  MEDIANTE EL ALGORITMO DE NASH.              **'
         WRITE(8,*)'**                                              **'
         WRITE(8,*)'**************************************************'
         WRITE(8,*)' '
         WRITE(6,*)  'DAME EL NUMERO DEL ARCHIVO A IMPRIMIR'
         READ(5,*)NOMBRE
```

```
      WRITE(8,*) 'RESULTADOS DEL PROBLEMA #',NOMBRE
      WRITE(8,*)'***DISCULPE, NO PUEDO RESOLVER SU PROBLEMA***'
      WRITE(8,*)'***         POSIBLE RANGO DEFICIENT          ***'
      WRITE(8,*)'**********************************************'
      WRITE(8,*)' '
      WRITE(8,*)' '
      WRITE(8,*)'***  ESTO ES TODO PARA ESTE PROBLEMA         ***'
      WRITE(8,*)'***  SUERTE Y HASTA PRONTO ...               ***'
      WRITE(8,*)'***                                          ***'
      WRITE(8,*)'----------------------------------------------'
      GO TO 100
   ELSE
      WRITE(8,*)'**********************************************'
      WRITE(8,*)'**                                          **'
      WRITE(8,*)'**  HOLA !!!CORRIDA DEL PROGRAMA:  ''NASH ''**'
      WRITE(8,*)'**                                          **'
      WRITE(8,*)'**  SOLUCION DE MINIMOS CUADRADOS LINEALES **'
      WRITE(8,*)'**  MEDIANTE EL ALGORITMO DE NASH.          **'
      WRITE(8,*)'**                                          **'
      WRITE(8,*)'**********************************************'
      WRITE(8,*) ' '
      READ(8,*) 'DAME EL NUMERO DEL ARCHIVO A IMPRIMIR'
      READ(5,*)NOMBRE
      WRITE(8,*) 'REDSULTADOS DEL POBLEMA #',NOMBE
      CALL SUSTRAC(TS,NREND,NVAR,NLDER)
      WRITE(8,*) 'RESULTADOS OBTENIDOS:'
      WRITE(8,*) '---------------------------------------------'
      WRITE(8,*) ' '
      WRITE(8,90) TOLDP
90    FORMAT (' TOLERANCIA PARA DISCRIMINAR RANGO DEFICIENTE',
     1 //,E15.7,//)
      DO 20 K = 1,NLDER
         WRITE(8,*) 'SOLUCION PARA LADO DERECHO # ',K
         WRITE(8,*) ' '
         DO 95 N = 1,NVAR
95       WRITE(8,80) N, TS(N,NVAR + K)
80       FORMAT(/,5X,'ALFA (',I2,') = ',E15.7)
```

```
              WRITE(8,*) ' '
              WRITE(8,*) ' '
              WRITE(8,*) 'CON RESIDUAL = ',NRES(K)
              WRITE(8,*) ' '
              WRITE(8,*) '# DE OBSERVACIONES =',NOBSER
              WRITE(8,*) ' '
              WRITE(8,*)'***  ESTO ES TODO PARA ESTE PROBLEMA  ***'
              WRITE(8,*)'***  SUERTE Y HASTA PRONTO ...        ***'
              WRITE(8,*)'***                                   ***'
              WRITE(8,*)'-----------------------------------------'
20          CONTINUE
        ENDIF
100     CLOSE(8)
        WRITE(6,*) 'QUIERES QUE RESUELVA OTRO PROBLEMA? (SI O NO)'
        READ(5,45)PROB
        IF (PROB .EQ. 'SI') THEN
            NOBSER = 0
            DO 50 N = 1,15
               DO 51 K = 1,11
                  TS (K,N) = 0.0
51             CONTINUE
50          CONTINUE
            DO 60 K = 1,5
               NRES(K) = 0.0
60          CONTINUE
            GO TO 30
        ENDIF
        STOP
        END
C
C.........................................................................
C
       SUBROUTINE REDGIV(NR,N,G,W,H,TOL,NOBS)
       INTEGER NR,N,G,NOBS
       REAL W(NR,N+G),H(G),TOL
C
C/////////////////////////////////////////////////////////////////////////
```

```
C
C  PROPOSITO: ESTE SUBPROGRAMA HACE LA DESCOMPOSICION QR VIA
C             ROTACIONES DE GIVENS.
C             PASOS 0 - 10, ALGORITMO #4 PAG. 47 DEL LIBRO
C              ``COMPACT NUMERICAL METHODS FOR COMPUTERS''
C                           DE J. C. NASH.
C
C  ENTRADA.
C
C
C    NR       # DE RENGLONES DECLARADOS EN EL PROGRAMA PRIN-
C             CIPAL DE LA MATRIZ W.
C
C     N       # DE COLUMNAS DE LA MATRIZ W.
C
C     G       # DE LADOS DERECHOS A RESOLVER.
C
C
C  SALIDA.
C
C
C
C
C     W       CONTIENE A LA  MATRIZ R DE N POR N DE LA DES-
C             COMPOSICION QR, EN SUS COLUMNAS N+1,....,N+G
C             SE ENCUENTRAN Q(TRANS) * [b1,b2.....bG].
C
C     H       CONTIENE LA SUMA DE CUADRADOS PARA CADA LADO
C             DERECHO.
C
C   TOL       TOLERANCIA.
C
C  NOBS       # DE OBSERVACIONES REGISTRADAS.
C
C  SUBPROGRAMAS USADOS:
C
C
```

```
C             ROTA.
C
C//////////////////////////////////////////////////////////////////////////
C
      INTEGER I,J,T,K,M
      REAL  EPS,S,C,B,P,ALFA,BETA
      CHARACTER RSP*2
      T = N+G
      K = N+1
C
C  SE ASIGNAN CEROS A LOS PRIMEROS N-RENGLONES
C  Y LAS N+G-COLUMNAS DE W.
C
      DO 10 I = 1,N
         DO 20 J = 1,T
            W( I, J ) = 0.0
20       CONTINUE
10    CONTINUE
C
C  SE CALCULA LA EPSILON DE LA MAQUINA (EPS).
C
      ALFA = 4. / 3.
80    BETA = ALFA - 1.
      EPS = BETA + BETA + BETA
      EPS = ABS(EPS -1.)
      IF (EPS  .EQ.  0.) GO TO 80
C
C  SE CALCULA LA TOLERANCIA (TOL).
C
      TOL = FLOAT(N) * EPS
      TOL = TOL * TOL
C
C  SE INICIA CONTADOR DEL # DE OBSERVACIONES.
C
      NOBS = 0
C
C  SE ASIGNAN CEROS A H(I), I = 1,....,G
```

```
C
        DO 30 J = 1,G
           H(J) = 0.0
30      CONTINUE
C
C  SE LEE UNA OBSERVACION.
C
C
200     READ(7,1000) RSP
1000    FORMAT(A2)
        IF (RSP .EQ. 'SI') THEN
            READ(7,*) ( W ( K,J ), J = 1,T )
            NOBS = NOBS + 1
        ELSE
            GO TO 70
        ENDIF
C
C  PROCESO PARA LA DESCOMPOSICION QR VIA ROTACIONES
C  DE GIVENS.
C
        DO 40 J = 1,N
           M = J
           S = W ( K,J )
           C = W ( J,J )
           B = ABS (C)
           IF ( ABS(S) .GT. B) B = ABS (S)
           IF ( B  .NE.  0.0 ) THEN
                C = C/B
                S = S/B
                P = SQRT ( C * C + S * S )
                S = S/P
                IF ( ABS(S)  .GE.  TOL ) THEN
                     C = C/P
                     CALL ROTA(W,NR,T,S,C,J,K,M,T)
                ENDIF
           ENDIF
40      CONTINUE
```

```
C
C  ACUMULACION DE SUMA DE CUADRADOS.
C
       DO 50 J = 1,G
          H (J) = H (J) + W (K,N+J) *  W (K, N+J)
50     CONTINUE
C
C  SE REGRESA A LEER OTRO DATO
C
       GO TO 200
70     RETURN
       END
C
C.........................................................................
C
       SUBROUTINE ROTA(W,NRD,NC,S,C,J,K,M,T)
C
C  DECLARACION DE LAS VARIABLES DE LA CABEZA.
C
       INTEGER NRD,NC,J,K,M,T
       REAL W(NRD,NC),S,C
C
C/////////////////////////////////////////////////////////////////////////
C
C
C  ESTE SUBPROGRAMA HACE UNA ROTACION PLANA A W.
C  SOBRE LOS RENGLONES J,K, DE LA COLUMNA M A LA T.
C
C
C  ENTRADA:
C
C       W      REAL DE NRD * NC COMPONENTES DE MATRIZ A ROTAR.
C
C     NRD      ENTERO,# DE RENGLONES DECLARADOS DE W EN EL
C              PROGRAMA PRINCIPAL.
C
C      NC      ENTERO,  # DE COLUMNAS DE W.
```

```
C
C    J,K      RENGLONES A ROTAR.
C
C    M,T      COLUMNAS INICIAL Y FINAL DE LOS RENGLONES
C
C      S      REAL, CONTIENE SEN(TETA), TETA-ANGULO DE ROTACION.
C
C      C      REAL, CONTIENE COS(TETA).
C
C
C  SALIDA:
C
C      W      CON LOS RENGLONES J-ESIMO Y K-ESIMO ROTADOS
C             DE LA COLUMNA M-ESIMA A LA T-ESIMA.
C
C/////////////////////////////////////////////////////////////////////
C
C  DECLARACION DE VARIABLES LOCALES.
C
C
      INTEGER I
      REAL R
      DO 10 I = N,T
         R = W(J,I)
         W(J,I) = R * C + S * W(K,I)
         W(K,I) =-R * S + C * W(K,I)
10    CONTINUE
      RETURN
      END
C
C.....................................................................
C
      SUBROUTINE SUSTRA(A,NRDA,N,G)
      INTEGER NRDA,N,G
      REAL A(NRDA,N+G)
C
C/////////////////////////////////////////////////////////////////////
C
```

```
C
C  RESUELVE EL SISTEMA LINEAL R * X = B
C  USANDO LA R CALCULADA POR REDGIV.
C
C  ENTRADA.
C
C     A       MATRIZ DADA POR REDGIV.
C
C     NRDA    NUMERO DE RENGLONES DECLARADOS EN EL PROGRAMA PRINCIPAL
C             PARA LA MATRIZ "A".
C
C     N       NUMERO DE VARIABLES.
C
C     G       NUMERO DE LADOS DERECHOS.
C
C  SALIDA.
C
C     A       SOLUCIONES AL PROBLEMA DE MINIMOS CUADRADOS
C             EN LAS COLUMNAS: N + 1, N + 2,...,N + G.
C
C/////////////////////////////////////////////////////////////////////
C
C  VARIABLES LOCALES.
C
      INTEGER NM1,KG,KB,KM1,K,I
      REAL T
      DO 50 KG = N + 1, N + G
         IF (N .GT. 1) THEN
            NM1 = N - 1
            DO 40 KB = 1,NM1
               KM1 = N - KB
               K = KM1 + 1
               A(K,KG) = A(K,KG)/A(K,K)
               T = -A(K,KG)
               DO 30 I = 1,KM1
                  A(I,KG) = A(I,KG) + A(I,K) * T
30             CONTINUE
```

```
40              CONTINUE
            ENDIF
            A(1,KG) = A(1,KG)/A(1,1)
50        CONTINUE
          RETURN
          END
```

Primero se van a presentar todos los datos y a continuación se pondrán todos los resultados.

DATOS DEL EJEMPLO 1.

```
2 1
1 1 5.2
1 1.5 4.7
1 1.8 4.4
1 2 3.8
1 2.2 3.8
```

DATOS DEL EJEMPLO 2.

```
4 1
2 4 1 5 1
1 3 4 0 2
3 0 5 -2 1
5 -1 0 4 0
7 8 10 3 1
-3 0 -4 1 1
```

DATOS DEL EJEMPLO 3.

```
3 1
5 1.E-8 1 1
8 0.999999 1 2
7 2.00001 1 3
8 2.9999 1 4
```

DATOS DEL EJEMPLO 4.

5 1
1 563 262 461 221 305
1 658 291 473 222 342
1 676 294 513 221 331
1 749 302 516 218 339
1 834 320 540 217 354
1 973 350 596 218 369
1 1079 386 650 218 378
1 1151 401 676 225 389
1 1324 446 760 228 405
1 1499 492 870 230 438
1 1690 510 907 237 438
1 1735 534 932 235 451
1 1776 559 956 236 465

DATOS DEL EJEMPLO 5.

5 3
22 10 2 3 7 -1 1 0
14 7 10 0 8 2 -1 1
-1 13 -1 -11 3 1 10 11
-3 -2 13 -2 4 4 0 4
9 8 1 -2 4 0 -6 -6
9 1 -7 5 -1 -3 8 3
2 -6 6 5 1 1 11 12
4 5 0 -2 2 0 -5 -5

DATOS DEL EJEMPLO 6.

3 1
1 1 1 2
1 2 4 7
1 3 9 9
1 4 16 6

DATOS DEL EJEMPLO 9.

2 1
1 1 4.0225
1 2 6.3095
1 3 5.3522
1 4 4.3553
1 5 3.7881
1 6 2.2947
1 7 2.8492
1 8 2.1732
1 9 1.4921
1 10 3.3424
1 12 2.4732

DATOS DEL EJEMPLO 9.

2 1
1 1 1
1 2 1.5
1 3 0.75
1 4 1.25

DATOS DEL EJEMPLO 9.

3 1
1 1 1 1
1 2 4 2.3
1 3 9 4.6
1 4 16 3.1
1 5 25 1.2

DATOS DEL EJEMPLO 10.

3 1

1 1 1 75994575

1 2 4 91972268

1 3 9 105710620

1 4 16 122775046

1 5 25 131669275

1 6 36 150697361

1 7 49 179323175

1 8 64 203235298

DATOS DEL EJEMPLO 11.

2 1

1 1 5.0291

1 2 6.5099

1 3 5.3666

1 4 4.1272

1 5 4.2948

1 6 6.1261

1 7 12.514

1 8 10.0502

1 9 9.1614

1 10 7.5877

1 11 7.292

1 12 10.0357

1 13 11.0708

1 14 13.4045

1 15 12.8415

1 16 11.9666

1 17 11.0765

1 18 11.7774

1 19 14.5701

1 20 17.044

1 21 17.0398

1 22 15.9069

1 23 15.485

1 24 15.5112

1 25 17.6572

DATOS DEL EJEMPLO 12

3 1

1 0 0 20

1 0.25 0.0625 51.58

1 0.5 0.0025 69.73

1 0.75 0.5625 75.46

1 1 1 74.36

1 1.25 1.5625 67.09

1 1.5 2.25 54.73

1 1.75 3.0625 37.98

1 2 4 17.28

DATOS DEL EJEMPLO 13.

3 1
1 1 0.0174524 5.0291
1 2 0.0348954 6.5099
1 3 0.0523359 5.3666
1 4 0.0697564 4.1275
1 5 0.0871557 4.2948
1 6 0.1045284 6.1261
1 7 0.1218693 12.514
1 8 0.1391731 10.0502
1 9 0.1564344 9.1614
1 10 0.1736481 7.5577
1 11 0.190809 7.292
1 12 0.2079116 10.0357
1 13 0.224951 11.0708
1 14 0.2419219 13.4045
1 15 0.258819 12.8415
1 16 0.2756373 11.9668
1 17 0.2923717 11.0765
1 18 0.3090169 11.7774
1 19 0.3255681 14.5701
1 20 0.3420201 17.044
1 21 0.3583679 17.0398
1 22 0.3746065 15.9069
1 23 0.3907311 15.485
1 24 0.4067366 15.5112
1 25 0.4226182 17.6572

DATOS DEL EJEMPLO 14.

5 2

3.6E+01 -6.3E+02 3.36E+03 -7.56E+03 7.56E+03 4.53E+02
-4.157E+03
-6.3E+02 1.47E+04 -8.82E+04 2.1168E+05 -2.205E+05 -1.386E+04
-1.782E+04
3.36E+03 -8.82E+04 5.6448E+05 -1.4112E+06 1.512E+06 9.702E+04
9.3555E+04
-7.56E+03 2.1168E+05 -1.4112E+06 3.6288E+06 -3.969E+06 -2.5872E+05
-2.618E+05
7.56E+03 -2.205E+05 1.512E+06 -3.969E+06 4.41E+06 2.9106E+05
2.88288E+05
-2.772E+03 8.316E+04 -5.8212E+05 1.55232E+06 -1.74636E+06
-1.16424E+05 -1.18944E+05

```
**********************************************
**                                          **
**  HOLA !!!CORRIDA DEL PROGRAMA: ''NASH''  **
**                                          **
**  SOLUCION DE MINIMOS CUADRADOS LINEALES  **
**  MEDIANTE EL ALGORITMO DE NASH.          **
**                                          **
**********************************************

 RESULTADOS DEL PROBLEMA #       1


RESULTADOS OBTENIDOS:
---------------------------------------------

 TOLERANCIA PARA DISCRIMINAR RANGO DEFICIENTE=

  0.1192093E-05


SOLUCION PARA LADO DERECHO #            1


    ALFA( 1)=    6.6581820

    ALFA( 2)=    -1.3836360


CON RESIDUAL =                  0.0753302

# DE OBSERVACIONES =          5

***     ESTO ES TODO PARA ESTE PROBLEMA      ***
***     SUERTE Y HASTA PRONTO ...            ***
***                                          ***
----------------------------------------------
```

```
********************************************
**                                        **
**  HOLA !!!CORRIDA DEL PROGRAMA: ''NASH''  **
**                                        **
**  SOLUCION DE MINIMOS CUADRADOS LINEALES  **
**  DE RANGO COMPLETO.                    **
**  MEDIANTE EL ALGORITMO DE NASH.        **
**                                        **
********************************************


 RESULTADOS DEL PROBLEMA #        2


*** DISCULPE. NO PUEDO RESOLVER SU PROBLEMA ***
***         POSIBLE RANGO DEFICIENT        ***
********************************************


***      ESTO ES TODO PARA ESTE PROBLEMA      ***
***   SUESUERTE Y HASTA PRONTO ...            ***
***                                           ***
------------------------------------------------
```

```
**********************************************
**                                          **
**  HOLA !!!CORRIDA DEL PROGRAMA: ''NASH''  **
**                                          **
**  SOLUCION DE MINIMOS CUADRADOS LINEALES  **
**  MEDIANTE EL ALGORITMO DE NASH.          **
**                                          **
**********************************************

 RESULTADOS DEL PROBLEMAEMA #       3


RESULTADOS OBTENIDOS:
---------------------------------------------

 TOLERANCIA PARA DISCRIMINAR RANGO DEFICIENTE=

  0.1192093E-05


SOLUCION PARA LADO DERECHO #             1

    ALFA( 1)=     0.9950805

    ALFA( 2)=     0.0049196

    ALFA( 3)=    -3.9754010

CON RESIDUAL =              0.4001010E-014

# DE OBSERVACIONES =             4

***      ESTO ES TODO PARA ESTE PROBLEMA      ***
***      SUERTE Y HASTA PRONTO ...            ***
***                                           ***
-----------------------------------------------
```

```
**********************************************
**                                          **
**   HOLA !!!CORRIDA DEL PROGRAMA: ''NASH'' **
**                                          **
**   SOLUCION DE MINIMOS CUADRADOS LINEALES **
**   MEDIANTE EL ALGORITMO DE NASH.         **
**                                          **
**********************************************

 RESULTADOS DEL PROBLEMAEMA #      4


RESULTADOS OBTENIDOS.
---------------------------------------------

 TOLERANCIA PARA DISCRIMINAR RANGO DEFICIENTE=

  0.1192093E-05


SOLUCION PARA LADO DERECHO #             1

    ALFA( 1)=      220.5488000

    ALFA( 2)=       -0.0504463

    ALFA( 4)=        0.9688559

    ALFA( 3)=       -0.1191909

    ALFA( 5)=       -0.3598519

CON RESIDUAL =                   984.6410000

# DE OBSERVACIONES =          13

***      ESTO ES TODO PARA ESTE PROBLEMA     ***
***      SUERTE Y HASTA PRONTO ...           ***
***                                          ***
----------------------------------------------
```

```
***********************************************
**                                           **
**   HOLA !!!CORRIDA DEL PROGRAMA: ''NASH''  **
**                                           **
**   SOLUCION DE MINIMOS CUADRADOS LINEALES  **
**   DE RANGO COMPLETO.                      **
**   MEDIANTE EL ALGORITHMO DE NASH.         **
**                                           **
***********************************************

 RESULTADOS DEL PROBLEMAEMA #      5



*** DISCULPE, NO PUEDO RESOLVER SU PROBLEMA ***
***        POSIBLE RANGO DEFICIENT           ***
***********************************************



***     ESTO ES TODO PARA ESTE PROBLEMA      ***
***     SUERTE Y HASTA PRONTO ...            ***
***                                          ***
-----------------------------------------------
```

```
****************************************************
**                                                **
**   HOLA !!!CORRIDA DEL PROGRAMA: ''NASH''       **
**                                                **
**   SOLUCION DE MINIMOS CUADRADOS LINEALES       **
**   MEDIANTE EL ALGORITMO DE NASH.               **
**                                                **
****************************************************

 RESULTADOS DEL PROBLEMAMA #       6


RESULTADOS OBTENIDOS:
--------------------------------------------------

 TOLERANCIA PARA DISCRIMINAR RANGO DEFICIENTE=

  0.1192093E-05


SOLUCION PARA LADO DERECHO #             1


    ALFA( 1)=      -7.5000060

    ALFA( 2)=      11.4000100

    ALFA( 3)=      -2.0000010

CON RESIDUAL =                    0.2000008

# DE OBSERVACIONES =            4

***      ESTO ES TODO PARA ESTE PROBLEMA       ***
***      SUERTE Y HASTA PRONTO ...             ***
***                                            ***
--------------------------------------------------
```

```
**********************************************
**                                          **
**  HOLA !!!CORRIDA DEL PROGRAMA: ''NASH''  **
**                                          **
**  SOLUCION DE MINIMOS CUADRADOS LINEALES  **
**  MEDIANTE EL ALGORITMO DE NASH.          **
**                                          **
**********************************************

 RESULTADOS DEL PROBLEMAEMA #       7


RESULTADOS OBTENIDOS:
---------------------------------------------

 TOLERANCIA PARA DISCRIMINAR RANGO DEFICIENTE=

  0.1192093E-05


SOLUCION PARA LADO DERECHO #            1

    ALFA( 1)=     5.4779590

    ALFA( 2)=    -0.3323783

CON RESIDUAL =                   9.8594210

# DE OBSERVACIONES =             12

***      ESTO ES TODO PARA ESTE PROBLEMA     ***
***      SUERTE Y HASTA PRONTO ...           ***
***                                          ***
----------------------------------------------
```

```
*******************************************
**                                      **
**  HOLA !!!CORRIDA DEL PROGRAMA: ''NASH''  **
**                                      **
**  SOLUCION DE MINIMOS CUADRADOS LINEALES  **
**  MEDIANTE EL ALGORITMO DE NASH.       **
**                                      **
*******************************************

 RESULTADOS DEL PROBLEMAEMA #      8


RESULTADOS OBTENIDOS:
-------------------------------------------

 TOLERANCIA PARA DISCRIMINAR RANGO DEFICIENTE=

  0.1192093E-05


SOLUCION PARA LADO DERECHO #             1

    ALFA( 1)=     1.1250000

    ALFA( 2)=     0.3998401E-007

CON RESIDUAL =                  0.3125001

# DE OBSERVACIONES =             4

***     ESTO ES TODO PARA ESTE PROBLEMA     ***
***     SUERTE Y HASTA PRONTO ...           ***
***                                         ***
 ------------------------------------------
```

```
******************************************************
**                                                  **
**  HOLA !!!CORRIDA DEL PROGRAMA: ''NASH''          **
**                                                  **
**  SOLUCION DE MINIMOS CUADRADOS LINEALES          **
**  MEDIANTE EL ALGORITMO DE NASH.                  **
**                                                  **
******************************************************

 RESULTADOS DEL PROBLEMAEMA #        9


RESULTADOS OBTENIDOS:
---------------------------------------------------

 TOLERANCIA PARA DISCRIMINAR RANGO DEFICIENTE=

  0.1192093E-05


SOLUCION PARA LADO DERECHO #              1

    ALFA( 1)=      -3.0200030

    ALFA( 2)=       4.4914310

    ALFA( 3)=      -0.7285719

CON RESIDUAL =                  1.1565720

# DE OBSERVACIONES =          5

***     ESTO ES TODO PARA ESTE PROBLEMA      ***
***     SUERTE Y HASTA PRONTO ...            ***
***                                          ***
------------------------------------------------------
```

```
********************************************
**                                        **
**   HOLA !!!CORRIDA DEL PROGRAMA: ''NASH''   **
**                                        **
**   SOLUCION DE MINIMOS CUADRADOS LINEALES   **
**   MEDIANTE EL ALGORITMO DE NASH.          **
**                                        **
********************************************

 RESULTADOS DEL PROBLEMAMA #        10


RESULTADOS OBTENIDOS:
--------------------------------------------

 TOLERANCIA PARA DISCRIMINAR RANGO DEFICIENTE=

  0.1192093E-05


SOLUCION PARA LADO DERECHO #              1

    ALFA( 1)=    0.7032248E+008

    ALFA( 2)=    7633672.0000000

    ALFA( 3)=    1097970.0000000

CON RESIDUAL =             0.8740829E+014

# DE OBSERVACIONES =          8

***      ESTO ES TODO PARA ESTE PROBLEMA      ***
***      SUERTE Y HASTA PRONTO ...            ***
***                                           ***
--------------------------------------------
```

```
*****************************************
**                                     **
**  HOLA !!!CORRIDA DEL PROGRAMA: ''NASH''  **
**                                     **
**  SOLUCION DE MINIMOS CUADRADOS LINEALES  **
**  MEDIANTE EL ALGORITMO DE NASH.      **
**                                     **
*****************************************

 RESULTADOS DEL PROBLEMAMA #       11


RESULTADOS OBTENIDOS:
-----------------------------------------

 TOLERANCIA PARA DISCRIMINAR RANGO DEFICIENTE=

  0.1192093E-05


SOLUCION PARA LADO DERECHO #           1

    ALFA( 1)=     4.0126910

    ALFA( 2)=     0.5328428

CON RESIDUAL =              72.9517100

# DE OBSERVACIONES =         25

***     ESTO ES TODO PARA ESTE PROBLEMA     ***
***     SUERTE Y HASTA PRONTO ...           ***
***                                         ***
-----------------------------------------
```

```
********************************************
**                                        **
**  HOLA !!!CORRIDA DEL PROGRAMA: ''NASH''  **
**                                        **
**  SOLUCION DE MINIMOS CUADRADOS LINEALES  **
**  MEDIANTE EL ALGORITMO DE NASH.         **
**                                        **
********************************************

 RESULTADOS DEL PROBLEMAMA #      12


RESULTADOS OBTENIDOS:
-------------------------------------------

 TOLERANCIA PARA DISCRIMINAR RANGO DEFICIENTE=

  0.1192093E-05


SOLUCION PARA LADO DERECHO #             1

    ALFA( 1)=     23.7229500

    ALFA( 2)=    101.8772000

    ALFA( 3)=    -52.9007800

CON RESIDUAL =              123.5896000

# DE OBSERVACIONES =          9

***     ESTO ES TODO PARA ESTE PROBLEMA      ***
***     SUERTE Y HASTA PRONTO ...            ***
***                                          ***
--------------------------------------------
```

```
##########################################################
###                                                   ###
###   HOLA !!!CORRIDA DEL PROGRAMA: ''NASH''          ###
###                                                   ###
###   SOLUCION DE MINIMOS CUADRADOS LINEALES          ###
###   MEDIANTE EL ALGORITMO DE NASH.                  ###
###                                                   ###
##########################################################

 RESULTADOS DEL PROBLEHAMA #        14

RESULTADOS OBTENIDOS:
-------------------------------------------------

 TOLERANCIA PARA DISCRIMINAR RANGO DEFICIENTE=

  0.1192093E-05

SOLUCION PARA LADO DERECHO #              1

    ALFA( 1)=     0.9837321
    ALFA( 2)=     0.4938400
    ALFA( 3)=     0.3603600
    ALFA( 4)=     0.2486234
    ALFA( 5)=     0.1894919

CON RESIDUAL =                    0.0008502

# DE OBSERVACIONES =             6

####      ESTO ES TODO PARA ESTE PROBLEMA        ####
####      SUERTE Y HASTA PRONTO ...              ####
####                                             ####
---------------------------------------------------------

SOLUCION PARA LADO DERECHO #              2

    ALFA( 1)=     15.9259700
    ALFA( 2)=      8.4978470
    ALFA( 3)=      2.4718970
    ALFA( 4)=      1.1658230
    ALFA( 5)=      0.5327907

CON RESIDUAL =                0.7295148E+008

# DE OBSERVACIONES =             6

####      ESTO ES TODO PARA ESTE PROBLEMA        ####
####      SUERTE Y HASTA PRONTO....              ####
####_____________________________________________####
```

```
*************************************************
**                                            **
**  HOLA !!!CORRIDA DEL PROGRAMA: ''NASH''    **
**                                            **
**  SOLUCION DE MINIMOS CUADRADOS LINEALES    **
**  MEDIANTE EL ALGORITMO DE NASH.            **
**                                            **
*************************************************

 RESULTADOS DEL PROBLEMAMA #       13


RESULTADOS OBTENIDOS:
------------------------------------------------

 TOLERANCIA PARA DISCRIMINAR RANGO DEFICIENTE=

  0.1192093E-05


SOLUCION PARA LADO DERECHO #             1

    ALFA( 1)=     4.0504120

    ALFA( 2)=     0.7358421

    ALFA( 3)=   -11.9938200

CON RESIDUAL =                72.9412200

# DE OBSERVACIONES =           25

***      ESTO ES TODO PARA ESTE PROBLEMA       ***
***      SUERTE Y HASTA PRONTO ...             ***
***                                            ***
-------------------------------------------------
```