

9  
2ej

00362

# Regularidad y caos en sistemas dinámicos

Trabajo que para obtener el grado de  
Maestra en Ciencias (Física)  
Presenta  
Hilda Noemí Núñez Yépez

Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Marzo de 1990

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# TESIS CON FALLA DE ORIGEN

# Contenido

Capítulo 1. Conceptos básico .....	1
1. Conceptos fundamentales .....	1
2. Características de los sistemas dinámicos .....	5
3. Métodos de análisis .....	12
Pies de figuras del capítulo 1 .....	16
Figuras del capítulo 1 .....	17
Capítulo 2. Osciladores conservativos y disipativos .....	21
1. Péndulo físico .....	21
2. Sistema de Hénon–Heiles .....	26
3. Oscilador no lineal como modelo para un grifo goteante .....	27
Tabla 2.1 .....	30
Pies de figuras del capítulo 2 .....	31
Figuras del capítulo 2 .....	33
Capítulo 3 Péndulo extensible .....	40
1. Sistemas hamiltonianos .....	40
2. Péndulo extensible .....	45
Conclusiones .....	59
Referencias .....	60

# Capítulo 1

## Conceptos Básicos

Los fenómenos naturales que ocurren a nuestro alrededor casi nunca muestran características periódicas o regulares, su comportamiento se podría describir más bien como errático; ejemplos abundan: la trayectoria de hojas en el viento, el comportamiento de las gotas de agua en una rompiente, o la impredecibilidad (a pesar del mucho esfuerzo invertido para predecirlo) del clima. Aún sistemas mecánicos aparentemente muy simples, como una moneda que se lanza en un volado, son prototípicos de lo azaroso. Los conceptos necesarios para entender este comportamiento irregular en el marco de los, aparentemente, regulares y predecibles modelos de la física clásica, están actualmente en proceso de desarrollo (Schuster 1984, Bergé *et al.* 1986, Rosetti 1986, Ottino 1989, Tabor 1989). Cuando aparecen estas características de impredecibilidad en un modelo determinista se habla de la existencia de caos determinista (Ford 1983, Jensen 1987). Aunque no hay aún acuerdo sobre el significado preciso del término, se puede decir que el caos tiene su origen en la sensibilidad extrema a las condiciones iniciales que se presenta en la gran mayoría de los sistemas no lineales. En los últimos 30 años, y con el auxilio de las computadoras, mucho se ha avanzado en la comprensión de la aparición del caos.

En este capítulo introduciremos las ideas básicas que se requieren para entender y cuantificar la aparición del caos determinista en sistemas físicos. Como los conceptos no se encuentran aislados entre sí, se hará referencia a algunos de ellos en varios lugares del capítulo, con el propósito de enfatizarlos apropiadamente.

### 1. Conceptos fundamentales.

En esta sección describimos en forma muy general la aparición de caos en sistemas dinámicos y algunas de sus características.

## 1.1 Sistemas dinámicos.

Para comenzar, introduzcamos una abstracción que ha resultado útil al referirse a cualquier sistema (ya sea físico, químico, electrónico, biológico, etcétera) que evolucione en el tiempo; la noción de sistema dinámico. Un sistema dinámico es, pues, cualquier proceso que se desarrolla en el tiempo. Si describimos el estado del sistema por las  $N$  "coordenadas"  $X_r$ , el sistema dinámico no es más que la especificación de la ley de evolución para éstas (Bergé *et al.* 1986, Parker y Chua 1989). Para fijar ideas, pensemos en un sistema que evoluciona continuamente en el tiempo, *i.e.* un sistema dinámico continuo. El sistema queda especificado por el conjunto de ecuaciones

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \quad (1)$$

donde  $\mathbf{X}$  es un vector formado con las  $X_r$ , a la función  $\mathbf{F}$  se le llama el campo vectorial generado por el sistema; podemos considerar como *tiempo* al parámetro  $t$ . Estas ecuaciones, junto con las condiciones iniciales  $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$ , determinan, en principio, la evolución subsecuente del sistema. Por ello, a éstos se les llama sistemas deterministas.

## 1.2 Movimientos regulares y caóticos.

Los sistemas dinámicos pueden tener soluciones que muestren comportamiento regular: soluciones periódicas, o cuasiperiódicas. Pero sus movimientos pueden ser mucho más complejos, con trayectorias que se entrelazan tan errática y turbulentamente que resulta imposible toda predicción detallada para tiempos grandes; cuando ello ocurre se habla de comportamiento caótico, turbulento o estocástico (Schuster 1984, Jensen 1987). La característica importante de un sistema caótico es su extrema sensibilidad a las condiciones iniciales (Núñez Yépez *et al.* 1989); lo que significa que trayectorias posibles, muy próximas entre sí en el instante inicial, pueden separarse exponencialmente, sin que medie ninguna influencia externa. Entonces, al querer reproducir un comportamiento dado de este sistema, una pequeña falla al dar las condiciones iniciales nos colocará en una trayectoria de evolución totalmente diferente a la que queríamos reproducir; lo que eventualmente nos llevará a un desconocimiento total del estado final del sistema. También es

posible que, para una condición inicial el sistema evolucione regularmente y, una pequeñísima variación en la condición inicial, permita que se comporte caóticamente; i.e. en un mismo sistema pueden ocurrir movimientos tanto regulares como caóticos (Ruelle 1980, Ford 1983, Berry *et al.* 1987). Ello puede ocurrir en sistemas con solo dos grados de libertad e, incluso, con uno solo si se encuentra sometido a una fuerza externa dependiente del tiempo. Un ejemplo de éste es el péndulo, frecuentemente representación de lo regular, que se puede comportar de modo caótico si se le somete a una fuerza que varíe periódicamente con el tiempo, lo que se analiza en el capítulo 2 (D'Humieres *et al.* 1982, Koch *et al.* 1983).

### 1.3 Espacio de estados.

El movimiento de muchos sistemas dinámicos se produce en el espacio físico habitual, mientras que sus trayectorias dinámicas se sitúan en un espacio matemático al que se conoce como el espacio de estados del sistema; a cada punto de éste, le corresponde una situación física bien determinada. Aunque abstracto, este espacio contiene en forma geométrica toda la información dinámica del sistema. La principal ventaja que presenta el espacio de estados, está ligada precisamente a este hecho. Entonces, se llama espacio de estados al espacio cuyas coordenadas son las variables  $X_r$ , y  $\dot{X}_r$ ,  $r = 1, 2, \dots, N$ , la dimensión de este espacio es  $2N$ . A veces, pueden encontrarse espacios de estados con un número impar de coordenadas; por ejemplo, cuando se incluye al tiempo como otra variable. Se llama trayectoria del sistema, a toda curva en este espacio ligada a cierta condición inicial  $X_0$ . La dimensión de este espacio está muy relacionada con los grados de libertad que tiene el sistema que se analiza. La dimensión del espacio de estados es, la mayoría de las veces, dos veces el número de grados de libertad del sistema (Ottino 1989, Tabor 1989).

### 1.4 Determinismo y predecibilidad.

La descripción del movimiento de los sistemas dinámicos se hace mediante ecuaciones diferenciales o de diferencias; las soluciones a éstas nos proporcionan su evolución temporal. Las ecuaciones que describen al sistema tienen, usualmente,

infinitas soluciones que corresponden a sus infinitos movimientos posibles, pero, de todas ellas solo hay una que corresponde al momento actual, en el movimiento particular que estudiamos, quedando así determinadas las condiciones iniciales. Conocida la ley de evolución y dadas las condiciones iniciales, queda fija la evolución posterior. En otras palabras, tanto el futuro como el pasado parecen quedar determinados por el presente; a esta propiedad se le dió el nombre de determinismo.

Cuando se empezó a trabajar con sistemas de muchos grados de libertad, como un gas, ya no fué posible usar las ecuaciones del movimiento para predecir el comportamiento del sistema; sin embargo, se encontró que podían hacerse estimaciones estadísticas de su comportamiento; lo que dió lugar al desarrollo de la mecánica estadística (Ford 1983, Rosetti 1986). Se debe notar que nunca se supuso que los sistemas perdieran su carácter predecible aunque ahora se les describiera probabilísticamente. Lo interesante es que bastan dos grados de libertad para que la mayoría de los sistemas se vuelvan impredecibles. Ahora sabemos que muchos sistemas presentan tanto movimientos regulares como caóticos, dependiendo solo de las condiciones iniciales que se elijan (Lichtenberg y Lieberman 1983). En otros casos, la aparición de movimientos irregulares depende del valor de alguna magnitud característica del sistema, como un parámetro de acoplamiento o de la energía; un ejemplo apropiado es lo que ocurre en los flúidos, que pueden moverse en régimen laminar (regular) o turbulento (caótico) dependiendo del valor del número de Reynolds (Kadanoff 1983, Ottino 1989).

Lo anterior nos indica que el determinismo de las ecuaciones básicas de un sistema no garantiza que se pueda predecir la evolución de éste; para ello, es necesario, además, que al variar ligeramente las condiciones iniciales no cambie mucho la trayectoria; cuando sucede ésto, siempre se puede construir la solución al problema. Así, se puede decir que todo sistema predecible es determinista pero no que todo sistema determinista es predecible. De manera un poco mas formal podemos decir que el término caos determinista denota el movimiento irregular que puede ocurrir en sistemas no lineales, y cuyas leyes dinámicas determinan de manera unívoca la evolución en el tiempo de un estado del sistema, a partir del conocimiento

de un estado previo. El caos determinista es, pues, la aparición de movimientos aparentemente al azar en un sistema dinámico determinista (Ford 1983, Kadanoff 1983, Jensen 1987).

## 2. Características de los sistemas dinámicos.

Los sistemas dinámicos se pueden agrupar en varias clases no necesariamente excluyentes: discretos, continuos, conservativos y disipativos, entre otros.

### 2.1 Sistemas discretos.

Los sistemas discretos son aquellos en los que las variables evolucionan a saltos; sus órbitas consisten de un conjunto numerable (y posiblemente infinito) de puntos. Los valores que toman las variables en cada paso de la secuencia están determinados por aquellos que tomaron en instantes anteriores; a esto se le conoce como generación paso a paso, como mapeo, o se dice que el sistema obedece una ecuación de diferencias. Así la evolución de estos sistemas se determina por ecuaciones del tipo

$$\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{F}(\mathbf{X}_t), \quad (2)$$

donde  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{F}$  son vectores de  $N$  dimensiones, y  $t$  el tiempo discreto. Ecuaciones como estas han sido muy importantes en el desarrollo de los conceptos necesarios para describir la transición entre el comportamiento regular y el irregular, que ocurre en muchos sistemas. Hay dos ejemplos que vienen inmediatamente a la memoria al pensar en estos términos (figura 1.1): la ecuación logística, y el mapeo estándar.

La ecuación logística corresponde a un modelo unidimensional para un sistema disipativo (ver sección 2.4); está definido por

$$X_{t+1} = \mu X_t(1 - X_t) \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

el parámetro  $\mu \in [0, 4]$  mide el grado de no linealidad del sistema. Uno de los orígenes del interés por el modelo se encuentra en la dinámica de poblaciones de insectos (May 1976, Jensen 1987). Este modelo muestra una transición al caos siguiendo la ruta de bifurcaciones subarmónicas; como se representa en la figura 1.2.

El mapeo estándar se define por la pareja de ecuaciones

$$X_{n+1} = X_n + Y_n + k\text{sen}(X_n) \quad (4a)$$

$$Y_{n+1} = Y_n + k\text{sen}(X_n), \quad (4b)$$

donde  $k$  es un parámetro que controla la no linealidad; este modelo se ha convertido en un paradigma para sistemas hamiltonianos (Piña y Jiménez Lara 1988, Tabor 1989) (ver sección 2.3). Según lo ilustra la figura 1.1, en el sistema aparece caos.

## 2.2 Sistemas continuos.

Los sistemas continuos (a los que también se llama flujos) son aquellos en los que las variables son funciones continuas del tiempo que obedecen ecuaciones diferenciales. Su evolución se describe en la forma

$$\frac{dX_r}{dt} = F_r(\mathbf{X}, t) \quad r = 1, 2, \dots, N. \quad (5)$$

Si el campo vectorial  $\mathbf{F}$  no depende explícitamente del tiempo, se habla de un sistema autónomo. En este trabajo hablaremos tanto de sistemas autónomos como de los que no lo son. De los primeros trata la parte medular del trabajo: un sistema hamiltoniano con dos grados de libertad; de los segundos, únicamente ofrecemos algunos ejemplos en el capítulo 2.

Uno de los ejemplos clásicos de sistemas dinámicos disipativos es el modelo de Lorentz (Lorentz 1963); las ecuaciones que lo describen son:

$$\dot{X} = -\sigma X + \sigma Y, \quad (6a)$$

$$\dot{Y} = rX - Y - XZ, \quad (6b)$$

y

$$\dot{Z} = XY - bZ, \quad (6c)$$

donde  $\sigma, r$  y  $b$  son parámetros. La ilustración de su atractor se muestra en la figura 1.3d.

Aunque la evolución de un sistema discreto parece diferir de la de un sistema continuo, esta diferencia no es ni con mucho absoluta, pues para simplificar el

análisis de un sistema continuo, muchas veces se le substituye por un mapeo discreto equivalente (Koch *et al.* 1983). Éste se construye eligiendo intervalos apropiados de tiempo y evaluando la solución en esos instantes, lo que proporciona "las variables discretas". Entre los sistemas continuos, tienen un interés especial los llamados sistemas hamiltonianos autónomos, en los cuales la energía (el valor del hamiltoniano) es una constante del movimiento (Lichtenberg y Lieberman 1983).

### 2.3 Sistemas hamiltonianos conservativos.

La mecánica clásica muestra que es posible describir el comportamiento de cualquier sistema sin disipación mediante una función, llamada el hamiltoniano  $H$ , que depende de las coordenadas generalizadas, los momentos canónicos conjugados y, posiblemente, del tiempo. Los sistemas descritos por hamiltonianos independientes explícitamente del tiempo se dice que son conservativos; en este caso al espacio de estados se le llama espacio de fases. Dado el hamiltoniano de un sistema  $H(q, p, t)$ , las trayectorias quedan determinadas por las soluciones a las ecuaciones canónicas (Landau y Lifshits 1977, Saagdeev *et al.* 1988):

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad (7a)$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots N. \quad (7b)$$

En este trabajo nos ocuparemos fundamentalmente de sistemas en que el hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo.

Una característica de los sistemas hamiltonianos es que el área de cualquier elemento de superficie en un plano definido en el espacio de fases se conserva (Lichtenberg y Lieberman 1983, Ottino 1989). Si tomamos cualquier conjunto de puntos que ocupan una superficie en un instante prefijado, entonces, en cualquier instante posterior todos los puntos definen otra superficie cuya área es igual a la de la primera. Además el flujo generado por un sistema Hamiltoniano se puede considerar incompresible, ello es consecuencia del teorema de Liouville (Landau y Lifshits 1977).

Cuando la trayectoria es accesible a todos los puntos del espacio de fases,

esto es que, dado un punto, su trayectoria subsecuente pasa arbitrariamente cerca de cualquier otro punto en el espacio de estados una infinidad de veces, se dice que el sistema es ergódico. Esto excluye, por ejemplo, a los sistemas separables; o sea, aquellos en que la solución a la ecuación de Hamilton-Jacobi se puede expresar como una suma de funciones, cada una de las cuales solo depende de una de las coordenadas (Landau y Lifshits 1977).

Un hamiltoniano autónomo no puede dar lugar a un flujo ergódico sobre todo el espacio de fases, dado que la energía es una invariante exacta del movimiento y así el sistema no puede "explorar" todas las energías posibles; sin embargo el flujo puede ser ergódico (y, aún caótico) sobre la superficie de energía constante. Si existen otros invariantes además de la energía, entonces el sistema puede ser ergódico solamente en un subespacio del espacio de fases que conserve todos los invariantes. En un sentido, la ergodicidad es universal y el problema central es definir el subespacio sobre el cual existe (Lichtenberg y Lieberman 1983, Tabor 1989).

Además de ergódicos, los sistemas hamiltonianos pueden ser mezclantes. Lo que tenemos en una jerarquía de propiedades en un sistema hamiltoniano, cada una de ellas implicada por la anterior. El mezclado es una condición mucho mas poderosa que la ergodicidad: se puede ver facilmente que implica a la ergodicidad, pero no es implicada por ella. Una analogía puede hacer mas clara la idea de mezclado. Consideremos una mezcla que contenga 20% de una substancia y 80% de otra, en la distribución inicial los fluidos prácticamente no están mezclados, pero, si los agitamos lo suficiente, esperamos que el contenido quede homogéneo. Podemos pensar que en este ejemplo, la distribución inicial corresponde a un par de regiones en el espacio de fases y la mezcla final es el resultado de la evolución temporal de éstas en un sistema hamiltoniano mezclante. Así, el mezclado implica una redistribución completa en el espacio de fases, lo que no queda implicado por la ergodicidad.

Una característica mas de los sistemas dinámicos conservativos, es la entropía  $K$  o entropía  $KS$ , (entropía de Kolmogorov y Sinai) la que nos proporciona

una manera de cuantificar lo caótico que es el sistema. Se calcula introduciendo particiones del espacio de fases, como se haría en mecánica estadística; ésto se describe con detalle en la sección 5.2 del libro de Lichtenberg y Lieberman (1983). Si la entropía KS es menor que cero, el sistema es regular, y si es mayor que cero es mezclante.

Hay otras maneras de medir la aleatoriedad de un sistema y como todas proporcionan alguna "medida de la caoticidad" es de esperarse que exista una relación entre ellas. Por ejemplo, la entropía KS está relacionada de manera simple con los exponentes de Liapunov (definidos en la sección 3.2). La entropía KS se entiende generalmente como una medida definida sobre una región simplemente conexa, aislada en el espacio de fases, que excluye regiones regulares o con islas. Si este es el caso, los exponentes de Liapunov son independientes de la posición en el espacio de fases. Para un hamiltoniano autónomo con dos grados de libertad, solamente uno de los exponentes puede ser mayor que cero. La entropía KS puede interpretarse también como el promedio sobre todo el espacio de fases de la tasa de divergencia entre trayectorias muy cercanas. Por ello, en sistemas de dos grados de libertad, el valor de la entropía KS coincide con el exponente de Liapunov más grande del sistema.

#### 2.4 Sistemas disipativos.

Las propiedades dinámicas de estos sistemas son de muchas formas opuestas a las de los conservativos. Estos sistemas en general, no se pueden describir mediante hamiltonianos independientes explícitamente del tiempo, y la energía no se conserva. Los sistemas disipativos pueden tener un régimen evolutivo más complicado que un simple decaimiento, especialmente cuando la dinámica incluye el efecto de amortiguamiento y el mecanismo que mantiene el movimiento. El oscilador amortiguado es un buen ejemplo de sistema disipativo, como se verá en el siguiente capítulo.

En los sistemas disipativos, las áreas en el espacio de estados no se conservan, al contrario de lo que sucede en los conservativos. Un elemento de superficie

en el espacio de estados no se conserva, lo que puede dar lugar a la aparición de atractores. Ello es una característica específica de los sistemas disipativos; el área de cualquier conjunto de condiciones iniciales disminuye con el tiempo, lo que en general se expresa diciendo que el flujo contrae las áreas en el espacio de estados. Esta contracción puede ocurrir de diferentes maneras: en ocasiones se piensa equivocadamente que, la contracción de las áreas lleva consigo la contracción a lo largo de todas las longitudes que definen el área en cuestión, lo cual no necesariamente tiene que ocurrir.

Un distintivo especial de los sistemas disipativos es la existencia de atractores, soluciones a las que llega el sistema, después de transcurrido un tiempo más o menos grande, independientemente de las condiciones iniciales. En terminología clásica un atractor no es más que la solución estacionaria a un sistema mecánico, a la que se llega después del decaimiento de los transitorios. En la figura 1.3 se esquematizan los diferentes tipos de atractores. Para fijar ideas, consideremos un péndulo oscilante: si se le permite evolucionar sin ningún efecto adicional, su trayectoria eventualmente llegará a su posición de equilibrio, este estado estacionario se comporta como un punto fijo; si ahora hacemos que el péndulo sea capaz de mantener su movimiento, introduciéndole energía por algún mecanismo, cualquiera que sea su amplitud inicial de lanzamiento, evolucionará hacia un estado periódico único en el que la frecuencia es la de la excitación externa (piénsese en un reloj); lo que se traduce en una convergencia de las trayectorias dinámicas hacia una única curva cerrada recorrida periódicamente por el punto representativo del péndulo en el espacio de estados. Esta curva cerrada representativa de un régimen periódico estacionario, es otro ejemplo de atractor al que se le denomina ciclo límite. El punto fijo y este ciclo límite se ilustran en las figuras 1.3a y 1.3b respectivamente, la figura 1.3c muestra otro tipo de ciclo límite. Este representa un movimiento biperiódico, que se encuentra en la superficie de un toro en el espacio de estados de un sistema disipativo.

Los atractores, "atraen" hacia ellos todas las trayectorias dinámicas engendradas en una cierta región del espacio de estados; la llamada cuenca de atracción

del atractor. Así, tras un lapso de tiempo más o menos largo, todas las trayectorias van a caer al atractor, igual que el lecho de un río es un "atractor" para todos los cursos de agua, del más pequeño al mas grande, que nacen en la cuenca de aquél.

También se conocen otro tipo de atractores, los llamados atractores extraños que se caracterizan por tener una subestructura muy compleja, en la que la evolución del sistema muestra todas las características de un proceso azaroso. Así, la aparición de atractores extraños es una de las manifestaciones del caos en los sistemas disipativos. No hay una definición precisa de lo que se debe entender por atractor extraño, pero éste debe reflejar dos tendencias antagónicas, la atracción de las trayectorias en su cuenca y la divergencia de trayectorias muy próximas entre si. La atracción está ligada al carácter disipativo de todo sistema real, bajo el efecto del rozamiento, las trayectorias tienden a coincidir en el atractor; mientras que, la divergencia procede de la gran sensibilidad a las condiciones iniciales. La coexistencia de la atracción y la divergencia es una restricción mucho más fuerte cuando las trayectorias tienen que describirse con continuidad en un espacio confinado. Dado lo anterior, podemos comenzar a visualizar el origen de la compleja estructura de un atractor extraño. Para ello, veamos lo que ocurre en una sección bidimensional "perpendicular" a las trayectorias. Elijamos en este plano un conjunto de condiciones iniciales contenidas, por ejemplo, en un rectángulo; la atracción de las trayectorias se traducirá en un "achataamiento" del rectángulo en una dirección y en consecuencia, una disminución de su superficie; pero bajo el efecto de la divergencia de las trayectorias, el rectángulo también se estirará en una dirección distinta a la primera; y por último, para asegurar el confinamiento de las trayectorias y mantenerlas en una porción limitada y finita del espacio de estados, el rectángulo también se plegará sobre si mismo. Bajo el efecto simultáneo de estas tres operaciones -contracción, estiramiento y plegado- el rectángulo se va transformando en una herradura que a su vez, se achata, estira y pliega, dando lugar a una estructura en forma de clip y así sucesivamente. Estos atractores se fabrican en cierto modo, semejante al que utiliza el panadero para amasar; no es de extrañar que presente una estructura laminar autosimilar, esto es que, usualmente, sean objetos fractales (Ruelle 1980, Mandelbrot 1987) Dadas las propiedades peculiares de estos

atractores, se les llamó extraños; la figura 1.3d pretende ilustrar uno de ellos.

Al observar la evolución de los sistemas dinámicos disipativos, además de clasificar los atractores, se han podido determinar varias maneras en que el sistema se vuelve caótico.

Se reconocen al menos tres tipos de rutas por las que el régimen periódico llega al caótico aumentando algún parámetro de control, éstas son:

i) Intermittencia.

Se caracteriza por un régimen que presenta un carácter prácticamente periódico durante largos intervalos de tiempo, súbitamente se desliza a un corto intervalo caótico, luego vuelve a ser periódico y así sucesivamente (Kadanoff 1983). La propia aparición de los intervalos caóticos es irregular.

ii) Sucesión de bifurcaciones subarmónicas.

Al aumentar uno de los parámetros de control (en el experimento); el período del régimen regular empieza duplicándose; 1, 2, 4, 8, etc. Como los umbrales de aparición de estas duplicaciones sucesivas están cada vez mas próximas, se alcanza un punto de acumulación para el cual existe en principio una multiplicación del período base hasta el infinito, entonces se dice que alcanzó el umbral del caos (Kadanoff 1983, Jensen 1987, Feigenbaum 1978, 1979, 1980).

iii) Cuasiperiodicidad.

Esta ruta es la que presenta mayor número de variantes; de una manera muy cualitativa el escenario es el siguiente: al aumentar algún parámetro de control, el régimen periódico se vuelve biperiódico, y entonces, puede ocurrir que pierda su estabilidad y en consecuencia se vuelve caótico, directamente o por la aparición de una tercera frecuencia (Kadanoff 1983).

### 3. Métodos de análisis.

Hay varias maneras de analizar un sistema para investigar las propiedades

del flujo que genera y, en particular, para saber si es o no caótico. En esta parte describimos dos maneras que nos fueron especialmente útiles en la realización de este trabajo (Núñez Yépez *et al.* 1990).

### 3.1 Mapeos de Poincaré.

Visualizar el comportamiento de un sistema dinámico siguiendo sus órbitas en el espacio de estados puede ser extremadamente complejo, sobre todo cuando el sistema tiene más de un grado de libertad y, por lo tanto, su espacio de estados es de dimensión mayor que dos. Obviamente los problemas desaparecerían si el sistema en cuestión fuese integrable, pues entonces podríamos disponer de expresiones analíticas para los flujos; lamentablemente esto casi nunca ocurre y en la mayoría de los casos y debemos recurrir a otros métodos para estudiar el conjunto de soluciones en el espacio de estados. Una técnica muy poderosa fué propuesta por Poincaré. La que describimos a continuación (Parker y Chua 1989).

Un mapeo de Poincaré reemplaza el flujo de un sistema continuo con  $M/2$  grados de libertad, por un sistema discreto de orden  $M - 1$ . La utilidad de esta técnica estriba tanto en la reducción del orden como en que nos provee de una conexión entre sistemas discretos y continuos. Dado el uso que haremos de esta técnica en el capítulo 3, la ejemplificaremos en el caso de sistemas hamiltonianos conservativos con dos grados de libertad.

Llamemos  $q_1, q_2, p_1$ , y  $p_2$  a las coordenadas en el espacio de fases (con  $q$  las coordenadas generalizadas y  $p$  los momentos conjugados correspondientes); como el sistema se pidió conservativo, automáticamente nuestras variables se reducen a tres cualesquiera, digamos  $q_1, q_2$  y  $p_1$ , pero si, además, fijamos arbitrariamente una de ellas, entonces, hagamos  $q_2 = \text{constante}$ , lo que nos define un plano  $S$  en el espacio de fases. Así, el estudio del flujo hamiltoniano lo podremos realizar observando solo los puntos de intersección, correspondiendo a una dirección dada en la evolución, con el plano  $S$ . Ello se ilustra en la figura 1.4 La altura del plano la elegimos para que la trayectoria pueda intersectarlo varias veces, dando lugar a una sucesión de intersecciones  $a_0, a_1, a_2 \dots$ . Una elección apropiada del plano  $S$  permite que las

secciones sean analizables con mayor facilidad. Dada una condición inicial, se puede obtener un conjunto de puntos sobre  $S$  que llamaremos la sección de Poincaré; en esta gráfica bidimensional se pueden "leer" muchas de las características del flujo; por ejemplo, si el movimiento es periódico, la sección de Poincaré se reduce a un punto, si el movimiento es cuasiperiódico, la sección contendrá un conjunto de puntos que forman una curva suave (Lichtenberg y Lieberman 1983).

La transformación  $T$  que permite pasar de un punto sobre  $S$  al siguiente, es un mapeo discreto de  $S$  conocido como mapeo de Poincaré (figura 1.4). Como la solución es única, el punto  $a_0$  determina completamente y de manera única al punto  $a_1$  que a su vez determina al punto  $a_2$  y así sucesivamente; si este proceso se puede invertir y  $a_1$  determina  $a_0$ , entonces se dice que  $T$  es un mapeo invertible de  $S$  en si mismo.

Las secciones de Poincaré reemplazan la evolución continua en el tiempo con un mapeo discreto, en general, los intervalos de tiempo entre punto y punto sobre el plano no necesariamente son constantes.

### 3.2 Exponentes de Liapunov.

Los exponentes de Liapunov juegan un papel muy importante tanto en la teoría hamiltoniana como en la de los sistemas disipativos. Nos proveen una medida cuantitativa de la estocasticidad de una trayectoria; además, hay una estrecha relación entre los exponentes de Liapunov y otras medidas de la aleatoriedad, como se mencionó al hablar de la entropía KS.

Los exponentes de Liapunov de una trayectoria dada, caracterizan la razón exponencial promedio de la divergencia de las trayectorias alrededor de ésta. Para dar las propiedades de los exponentes de Liapunov, definámoslos para un flujo generado por un sistema autónomo de primer orden; consideremos una trayectoria en el espacio de estados  $M$ -dimensional  $\mathbf{x}(t)$  y otra trayectoria muy cercana a ésta  $\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t)$ , donde  $\mathbf{w}(t)$  es un vector tangente a la trayectoria original. Obviamente, la separación entre ambas  $d(t) = \|\mathbf{w}(t)\|$  dependerá del tiempo. Calculemos ahora la tasa promedio de divergencia entre estas dos trayectorias, en

el límite en que la separación entre las trayectorias tiende a cero:

$$\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ d(0) \rightarrow 0}} \frac{1}{t} \log d(t)/d(0). \quad (8)$$

Esta expresión define a los exponentes característicos de Liapunov  $\lambda$ . Hay un exponente independiente por cada dimensión del espacio de estados.

Una vez calculados los exponentes característicos de Liapunov, se puede calcular la entropía KS,  $h$ , mediante la relación (Lichtenberg y Lieberman 1983, Pesin 1976):

$$h = \int_P \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i d\mu \quad (9),$$

lo que representa la suma de todos los exponentes característicos de Liapunov positivos promediados sobre alguna región del espacio de estados ( $P$ ) con medida  $d\mu$ .

Para un flujo hamiltoniano, los exponentes de Liapunov suman cero y tienen una simetría particular:  $\lambda_i = -\lambda_{2N-i+1}$  donde  $2N = M$  con  $N$  el número de grados de libertad del sistema; esta simetría no es válida para sistemas disipativos, en cuyo caso la suma de los exponentes de Liapunov es menor que cero. Si el sistema hamiltoniano tiene dos grados de libertad solo uno de los exponentes de Liapunov ( $\lambda_1$ ) es mayor que cero. En este caso,  $h = \lambda_1$ .

# Pies de figuras

## Capítulo 1

Figura 1.1

a) Mapeo logístico. Se grafica  $x_{n+1}$  contra  $x_n$ , para valores grandes de  $n$ , empleando el mapeo logístico para diferentes valores de  $\mu$  : 1.5, 3.3, 3.5, 3.8, respectivamente (Núñez Yépez *et al.* 1989).

b) Mapeo estandard, también conocido como mapeo de Chirikov. Estas figuras se obtienen iterando el mapeo estandard para varias condiciones iniciales  $(x_0, y_0)$ , graficándose los puntos sucesivos  $(x_n, y_n)$ . Se muestran las secciones de Poincaré para diferentes valores de  $k$  : 0, 0.5, 1, 2, respectivamente; de ellas se puede apreciar fácilmente la transición de su comportamiento regular al caótico al aumentar  $k$  (Jensen 1987).

Figura 1.2

El diagrama de bifurcaciones muestra el comportamiento del mapeo logístico descrito por la ecuación (3), se grafica  $x_n$  contra  $\mu$  para tiempos grandes, haciendo variar el parámetro  $\mu$  entre 3.5 y 4, (Jensen 1987). Este diagrama también muestra una transición del comportamiento regular al caótico, pero similar, en este caso, al que ocurre en un sistema hamiltoniano.

Figura 1.3

Se ilustran los tipos de atractores en el espacio de estados: a) punto fijo, b) y c) ciclos límite y d) un atractor extraño; a éste en particular se le conoce como el atractor de Lorenz.

Figura 1.4

Sección de Poincaré. La trayectoria  $\Gamma$  en el espacio de estados intersecta al plano  $S$  (con  $\dot{z} \leq 0$ ) en los puntos sucesivos  $P_0, P_1, P_2, \dots$ . Estos puntos pertenecen a la sección de Poincaré de  $\Gamma$  con el plano  $S$ .

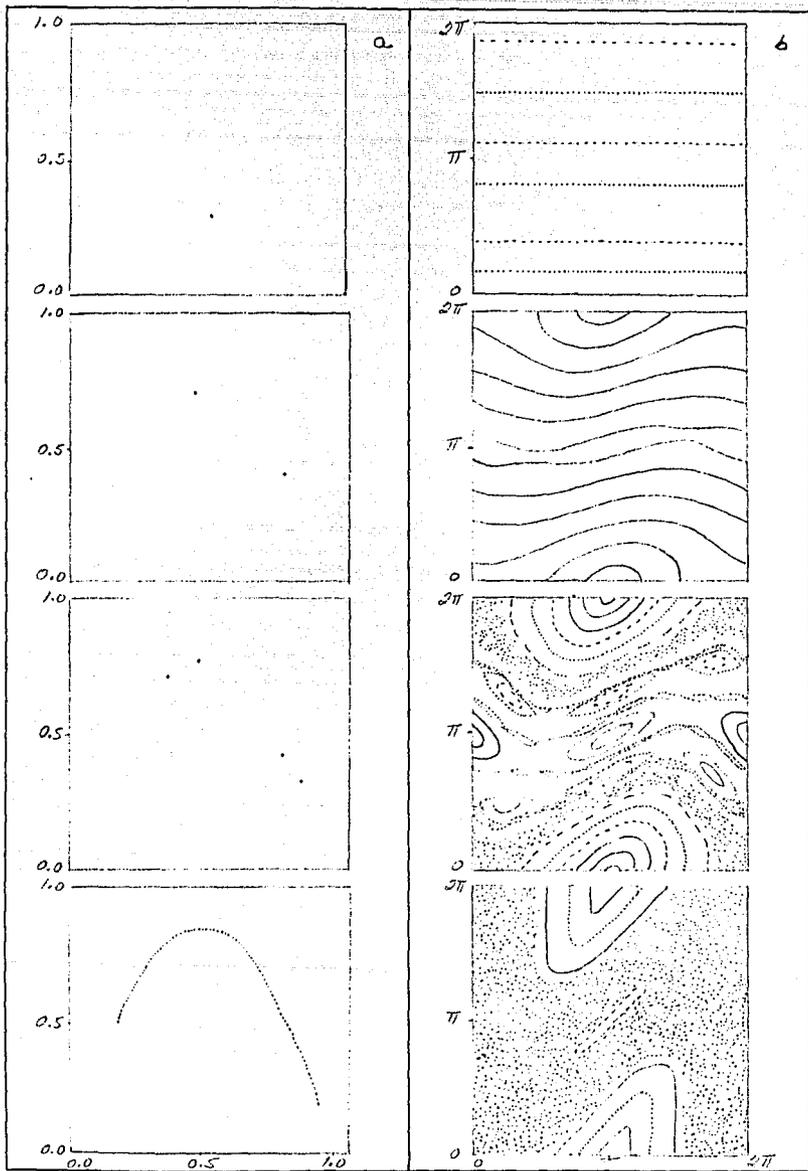


Fig. 1.1

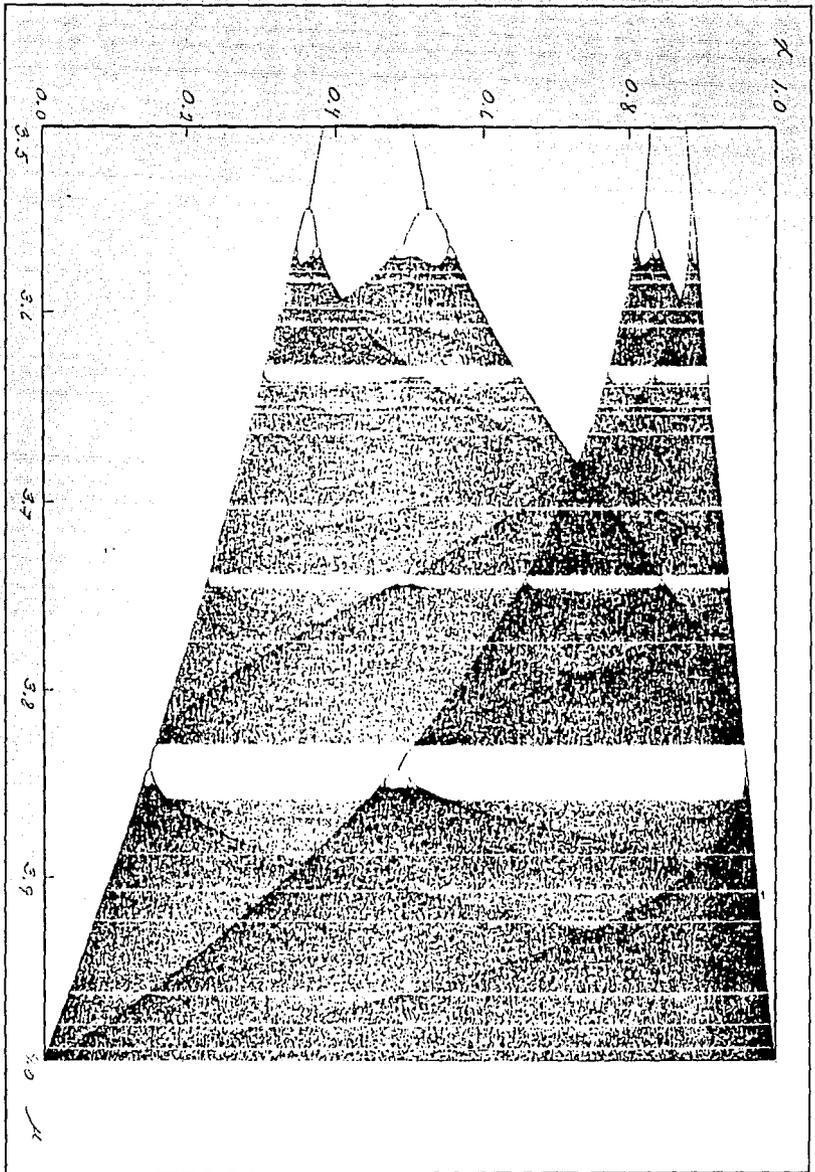


Fig. 1.2

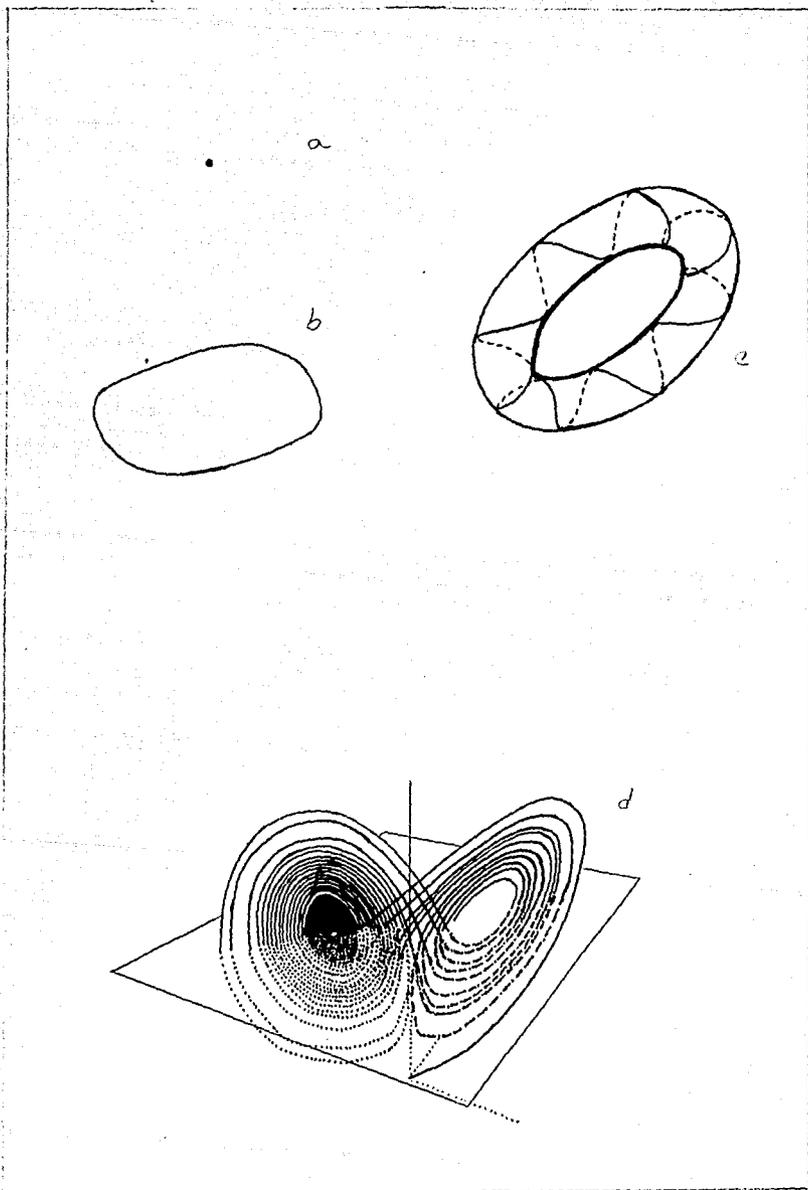


Fig 1.3

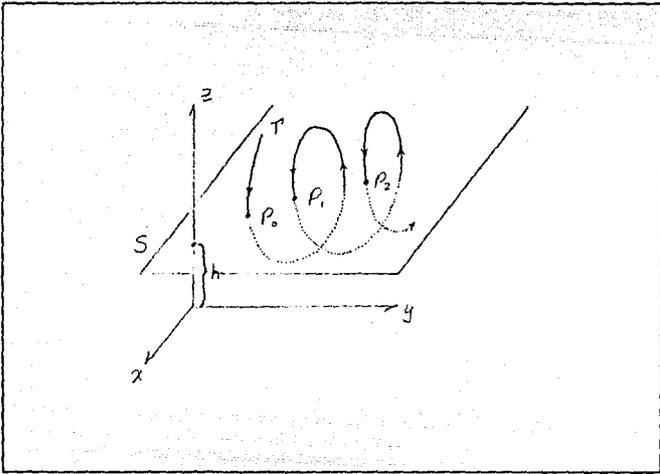


Fig 1.4

## Capítulo 2

# Osciladores conservativos y disipativos

Los sistemas oscilantes tienen un papel muy especial de entre la gran variedad de los sistemas dinámicos. Este papel se debe, al menos en parte, a sus variados usos (Jensen 1987): relojes, circuitos electrónicos de control, sistemas mecánicos en los que se desean inhibir o se desean producir vibraciones, etcétera. En este capítulo mencionaremos y discutiremos brevemente algunos ejemplos de ellos que han sido estudiados en la literatura reciente, y en los que, además, aparecen movimientos caóticos. Elegimos los ejemplos por que han sido problemas clásicos: como el péndulo físico y sus variantes (Landau y Lifshits 1977, Bergé *et al.* 1984, Moon 1987, Parker y Chua 1987), o como el sistema de Hénon y Heiles (1964); por que han sido estudiados por su importancia en otros campos: como es el caso de las oscilaciones en una juntura Josephson (Pedersen y Davidson 1981, D'Humieres *et al.* 1983, Saagdeev *et al.* 1988), problema que, de hecho, es formalmente equivalente al del péndulo (ver tabla 2.1); o por nuestra familiaridad con ellos: como es el caso del fenómeno de goteo en un grifo mal cerrado (Martien *et al.* 1985, Núñez Yépez *et al.* 1989).

### 1. Péndulo Físico.

El péndulo simple es el ejemplo más antiguo y conocido de un oscilador libre no lineal; consiste de un cuerpo (de masa  $m$ ) suspendido mediante una cuerda (de largo  $l$ ) y sujeto a la acción del campo gravitacional ( $g$ ). Al estudiarlo, se acostumbra hacer ciertas suposiciones adicionales: se supone que la masa es puntual, que la cuerda no pesa y no se estira ni se dobla, que no hay fricción y, que oscila solamente en un plano vertical. Bajo estas suposiciones, y eligiendo coordenadas

polares, la ecuación que describe el movimiento del péndulo es (ver figura 2.1):

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \text{sen}\theta = 0. \quad (1)$$

Obviamente este sistema no es lineal, sin embargo solo muestra movimientos periódicos. De hecho, como se mencionó en el capítulo anterior, se le usa con frecuencia como ejemplo prototípico de sistemas que únicamente tienen movimientos regulares, sin mayor complicación, y son completamente integrables. Esta característica del sistema se ilustra claramente en el diagrama de estados que se muestra en la figura 2.2. Cada línea esta parametrizada por un valor para la energía; nótese las dos clases de movimientos periódicos (de rotación o de libración) que es capaz de mostrar el péndulo; estos movimientos están separados por una curva que se autointersecta en puntos de equilibrio inestable. A la curva se le llama separatriz, y los puntos son ejemplos de puntos fijos hiperbólicos. El punto fijo que se encuentra en el origen, alrededor del cual oscila el péndulo a bajas energías, es ejemplo de un punto fijo elíptico. Este diagrama de estados es característico de sistemas hamiltonianos integrables. La integrabilidad del sistema corresponde a lo que se espera en cualquier sistema con un solo grado de libertad.

Si se sujeta el péndulo a la acción de una fuerza dependiente del tiempo, la situación puede cambiar mucho, el sistema puede perder la integrabilidad y mostrar movimientos caóticos. Si nos interesa investigar esta posibilidad, podemos simplemente suponer que es el "campo gravitacional" el que varía con el tiempo, esto es proponer:

$$g(t) = g_0 + f(t) \quad (2)$$

al substituir esta expresión para la variabilidad temporal del campo gravitacional en la ecuación (1), nos da lugar a una ecuación que no es integrable para casi cualquier elección de la función  $f(t)$ . Es de particular interés el caso en que la fuerza externa  $f(t)$  sea una función periódica del tipo

$$f(t) = g_1 \cos(\omega t), \quad (3)$$

caso en el cual la expresión (1) se transforma en una ecuación conocida como

ecuación de Mathiew (Bender y Orszag 1978, Breitenberger y Mueller 1981, Saag-deev *et al.* 1988):

$$\ddot{\theta} + \frac{\text{sen}\theta}{l} (g_0 + g_1 \cos(\omega t)) = 0. \quad (4)$$

Dado que todo fenómeno físico, incluyendo el péndulo real, esta sujeto al rozamiento, es conveniente añadir el término correspondiente a la expresión (4) para describir con más precisión el movimiento de aquél si, además, la escribimos en su forma mas general posible, obtenemos:

$$a\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + c\text{sen}\theta = \Gamma(t). \quad (5)$$

La ecuación que describe a un péndulo forzado es isomorfa a la ecuación del movimiento para muchos otros sistemas de interés; por ejemplo, a la que describe a un circuito eléctrico oscilante (D'Humieres *et al.* 1982, Moon 1987), o a una juntura Josephson (Pedersen y Davidson 1981). La correspondencia de las variables físicas, entre el péndulo y los otros dos sistemas se muestra en la tabla 2.1.

### 1.1 Dinámica de un péndulo forzado.

Conviene reescribir la ecuación (5) en forma adimensional. Los dos tiempos característicos del sistema son:  $\tau_0 = b/c$  y  $\Omega_0 = (c/a)^{1/2}$ ;  $\tau_0$  es el tiempo de amortiguamiento exponencial para un péndulo sobreamortiguado *i.e.* cuando el término para  $\ddot{\theta}$  es despreciable comparado con los demás,  $\Omega_0$  es la frecuencia de oscilación para oscilaciones de amplitud pequeña en un péndulo sin fricción; ello hace que existan dos posibilidades para escribir la ecuación adimensional:

$$\beta \ddot{\theta} + \dot{\theta} + \text{sen}\theta = \gamma(t), \quad (6a)$$

y

$$\ddot{\theta} + Q^{-1} \dot{\theta} + \text{sen}\theta = \gamma(t), \quad (6b)$$

donde  $\beta = Q^2 = ac/b^2$ ,  $\gamma(t) = \Gamma(t)/c$ , y el tiempo ha sido normalizado por  $\tau_0$  en la ecuación (6a) y por  $\Omega_0^{-1}$  en la ecuación (6b). En general, el término de forzamiento ( $\Gamma(t)$ ) esta dado por

$$\gamma(t) = \gamma_0 + \gamma_1 \cos(\omega t) \quad (7)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia normalizada,  $\gamma_0$  es la fuerza externa constante, y  $\gamma_1$  es la amplitud del término periódico de forzamiento.  $Q$  tiene que ser finita para poder emplear la ecuación (6b); esta es la forma que emplearemos. Aunque, en el límite de amortiguamiento grande,  $\beta = Q^2 \rightarrow 0$ , y es más apropiada la ecuación (6a).

Para mostrar la diversidad de comportamientos en el sistema, se generaron soluciones numéricas a las ecuaciones (6) para diferentes valores de  $\beta$  y  $\Omega_0$ . La técnica numérica utilizada fue muy directa; se resolvieron usando el método de Euler modificado (Feynman 1964, Press *et al.* 1989).

Las soluciones estacionarias obtenidas numéricamente se comparan con las obtenidas experimentalmente por D'Humieres *et al.* (1982), empleando un circuito analógico para ello. En su experimento D'Humieres *et al.* suponen  $\gamma_0 = 0$ , y utilizan como parámetro de control a la amplitud de la excitación externa,  $\gamma_1$ . En la figura 2.3 se muestran las gráficas de  $\theta$  contra  $\text{sen}\theta$  que ellos obtuvieron. Nuestras soluciones numéricas, calculadas con los mismos valores de  $\gamma_1$ , se muestran en la figura 2.4. Al comparar la ambas figuras, observamos que para valores pequeños de  $\gamma_1$  el comportamiento es muy regular y que al aumentar éste, ocurren cambios cualitativos en el comportamiento del sistema hasta que, eventualmente, se vuelve caótico. Nuestra solución caótica se muestra en la figura 2.5; nótese que el valor de  $\gamma_1 = 0.64$ , en el que nos aparece la solución caótica, no corresponde a ninguno de los reportados por D'Humieres *et al.* (1982) Ellos mencionan  $\gamma_1 \simeq 0.68$ , como un valor para el que aparece el movimiento caótico, a este valor nuestra solución es cuasiperiódica. Lo que es notable es que, aunque nuestros resultados son similares, no reproducen los obtenidos por ellos; este hecho nos indica que sería deseable realizar un estudio numérico cuidadoso del sistema. No lo hicimos, pues nuestro trabajo avanzó por otro lado.

## 1.2 Mapeos de Poincaré para un péndulo forzado paramétricamente.

Para redondear nuestra rápida visita al péndulo forzado. Mencionaremos el estudio experimental que realizaron Koch *et al* (1983), sobre una realización mecánica de un péndulo forzado paramétricamente. El péndulo estudiado por Koch

*et al.* consistió de una lenteja con masa de 0.2 kg, sujeto a una barra de longitud 38.5 cm, cuyo punto de suspensión se hacía oscilar. La frecuencia de oscilación  $\omega_0$ , i.e. el momento de inercia del péndulo, era ajustable. El punto de suspensión se hacía oscilar periódicamente a una frecuencia de  $1.64 \times 2\pi \text{ s}^{-1}$ , y la amplitud del movimiento se podía variar. La ecuación de movimiento para el sistema descrito es (usando la terminología de Koch *et al.*)

$$I \frac{d^2 x}{d\tau^2} + B \frac{dx}{d\tau} + ml(g + a\omega^2 \cos(\omega\tau)) \text{sen} x = 0 \quad (8)$$

donde  $I$  es el momento de inercia del péndulo,  $B$  la constante de amortiguamiento,  $m$  la masa,  $l$  la distancia del centro de masas al eje de rotación y  $g$  la aceleración debida a la gravedad.

Si definimos  $\omega_0 = (mlg/I)^{1/2}$ ,  $\beta = B/I\omega_0$ ,  $A = a\omega^2/g$ ,  $\Omega = \omega/\omega_0$ , la ecuación (8) se puede reescribir como:

$$\ddot{x} + \beta \dot{x} + (1 + A \cos(\Omega t)) \text{sen} x = 0. \quad (9)$$

esta ecuación fué la que analizaron Koch *et al.* al comparar con sus resultados experimentales. La solución numérica de la ecuación (9) muestra que para valores no muy grandes de  $A$  hay movimientos vibratoriales cuyo período es  $4\pi/\Omega$ , al continuar aumentando  $a$  se producen una serie de bifurcaciones hasta la aparición del caos. En el régimen caótico siempre existen ventanas periódicas muy angostas. El diagrama de bifurcaciones correspondiente es muy similar al del mapeo logístico (McLaughlin 1981, Leven y Koch 1981).

Mediante métodos optoelectrónicos es posible medir tanto  $\theta$  como  $\dot{\theta}$ , a intervalos preestablecidos. De esta forma se obtuvieron representaciones estroboscópicas (secciones de Poincaré) del movimiento del péndulo; estas secciones, muestran un punto en el plano  $\theta - \dot{\theta}$  para cada incremento de  $\omega t$ ; así, cada solución subarmónica de orden  $n$  dará lugar a  $n$  puntos discretos, y su solución caótica dará lugar a un conjunto de puntos con una estructura compleja, un atractor extraño.

Los resultados experimentales se muestran en las figuras 2.6 y 2.7. Según los autores, estos resultados corroboran los resultados del análisis numérico del sistema llevado a cabo por Leven y Koch (1981).

## 2. El sistema de Hénon-Heiles.

Los sistemas hamiltonianos que describen osciladores acoplados han sido muy estudiados en los últimos años (Deng y Hioe 1985, Aguiar y Baranger 1987, 1988, Bolotin *et al.* 1989, Núñez Yépez *et al.* 1989). Ello se debe tanto a su interés intrínseco, como a que sirven de modelo para otros sistemas. En este sentido, podemos mencionar modelos hamiltonianos de osciladores para investigar: la estructura de las líneas de campo magnético en un plasma (Petrosky 1984), para la dinámica de una partícula acelerada (Schuster 1984, Saagdeev *et al.* 1988) y para procesos de mezclado en fluidos (Ottino 1989). La parte medular de este trabajo será, de hecho, un estudio detallado de uno de estos sistemas: el péndulo extensible. Pero ello es el contenido del capítulo 3.

El sistema de Hénon-Heiles fué uno de los primeros en que se descubrió la existencia de movimientos oscilatorios aperiódicos en sistemas con muy pocos grados de libertad. Se le ha estudiado desde que fué propuesto, hace más de 25 años, por Hénon y Heiles (1964) como un modelo del movimiento de una estrella en un potencial gravitacional, cilíndricamente simétrico, *i.e.* del tipo que podría producir, en promedio, una galaxia. El hamiltoniano de Hénon-Heiles tiene la forma siguiente:

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2) + x^2 y - \frac{1}{3}y^3, \quad (10)$$

y puede considerársele también como un modelo de acoplamientos moleculares no lineales; su función de energía potencial es

$$V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2 y - \frac{1}{3}y^3, \quad (11)$$

esquematizada por curvas equipotenciales en la figura 2.8. El sistema tiene movimientos acotados para  $E$  menor de  $1/6$ ; para energías superiores los movimientos no están confinados. Para pequeños desplazamientos, el movimiento es aproximadamente lineal; sin embargo, al aumentar la energía, se acentúa más la no linealidad del potencial con sus correspondientes consecuencias. En la figura 2.9 se muestran las secciones de Poincaré (para varias condiciones iniciales en cada caso) en el espacio de estados, en las que basaron Hénon y Heiles sus conclusiones. Las secciones se muestran para tres energías:  $E = 1/12$ ,  $E = 1/8$  y  $E = 1/6$ .

Para una energía de  $1/12$  los movimientos son predominantemente regulares, todas las condiciones iniciales estudiadas dan lugar a órbitas cuasiperiódicas cuyos mapeos se localizan sobre una curva suave. Para la energía de  $1/8$  el mapeo de Poincaré correspondiente cambió; algunas curvas suaves aún permanecen mientras que otras se han roto de varias maneras; del lado derecho la familia de curvas aparece como una cadena de islas, ello es generado por una sola trayectoria que salta sucesivamente de isla en isla y gradualmente cubre las curvas que circundan las islas. Por otro lado, la curva que se intersecta para  $E = 1/12$  ahora ha desaparecido y en su lugar vemos puntos esparcidos aleatoriamente (nuevamente generados por una sola órbita) a través de las cuales no se puede dibujar ninguna curva suave. Para  $E = 1/6$  virtualmente todas las curvas han desaparecido excepto por la pequeña y delgada franja de islas. El conjunto de puntos, que casi llena la región accesible para la energía dada es generado por una sola órbita. Esto se ejemplifica en la secuencia de cuadros que proporcionan una ilustración de la manera en la cual el movimiento de un hamiltoniano no integrable puede cambiar de tener un comportamiento predominantemente regular, a uno predominantemente caótico.

### 3. Oscilador no lineal como modelo para un grifo goteante.

Como mencionamos en el capítulo 1, muchos de los sistemas con los que tenemos contacto cotidiano, muestran comportamiento irregular. Un buen ejemplo es la sucesión de gotas en una llave mal cerrada; Así que el sistema consiste esencialmente de agua que gotea por un orificio. El estudio de este sistema fue sugerido por Rössler (1977), y, a pesar de ello, del interés que representan los fenómenos de goteo para la química y la mecánica de fluidos, y de su posible relación con el problema de la turbulencia; hay muy poco trabajo hecho sobre él (Shaw 1984, Martien *et al.* 1985, Núñez Yépez *et al.* 1988, 1989, Wu y Schelly 1989). En parte por ello, no se han hecho avances significativos en la comprensión teórica del fenómeno.

Los estudios hechos hasta ahora son experimentales. Como construirse una descripción dinámica del sistema a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes puede ser extremadamente complicado (Landau y Lifshitz 1987), puede resultar innecesaria

rio (Gollup 1989), y ni siquiera es del todo claro cuales son las variables dinámicas de importancia, se ha enfocado la atención hacia una característica fácilmente medible: el tiempo entre una gota y la siguiente  $T_n$  o, como se le llama usualmente, el intervalo de goteo. En la figura 2.10 (a-g) se muestran reconstrucciones del espacio de estados (en la forma de gráficas  $T_{n+1}$  vs  $T_n$  hechas con resultados experimentales), que ilustran la dinámica del sistema. Se pueden observar bifurcaciones subarmónicas hasta de orden 4 y, lo que parecen ser, atractores extraños a altas tasas de goteo. En este punto el lector podría preguntarse que tiene que ver este sistema con los osciladores. La respuesta a esta pregunta es que, dada la falta de guía para entender su dinámica, se ha propuesto un modelo de oscilador para describir su dinámica (Shaw 1984, Martien *et al.* 1985): Una gota que cuelga de un orificio puede oscilar, con una frecuencia que disminuye al aumentar la masa de la gota. En cierto instante crítico, la gota se rompe; pero ello pone en oscilación a la gota que sigue... Esta descripción del proceso de ruptura de las gotas puede, entonces, modelarse por la siguiente ecuación (Shaw 1984):

$$\frac{d(mv)}{dt} = mg - ky - bv, \quad (12)$$

donde  $y$  es la posición de la gota en formación,  $v$  su velocidad,  $m$  su masa, y  $g$ ,  $k$ , y  $b$  son parámetros constantes. Supondremos también que la masa de la gota se incrementa linealmente en el tiempo de acuerdo a

$$\frac{dm}{dt} = c, \quad (13)$$

hasta que se alcanza un valor prefijado de  $y$ , en ese instante la masa se reduce discontinuamente en una cantidad proporcional a su velocidad en ese momento; simulando en esta forma la ruptura de la gota. El modelo admite al menos 4 parámetros independientes:  $g$ ,  $k$ ,  $b$ , y  $c$ . Cálculos hechos por Martien *et al.* (1985) con este modelo se presentan en la figura 2.10 (h-j); puesto que no lo dicen, desconocemos los valores de los parámetros que utilizaron para obtener los resultados que se muestran. Sin embargo, lo importante es notar la similitud cualitativa de los resultados numéricos con algunos de los resultados experimentales que se muestran en la figura 2.10 (a-g). Hasta donde sabemos, nadie ha hecho un estudio sistemático de este modelo en el espacio de parámetros.

En este capítulo pretendimos ejemplificar la ocurrencia de movimientos caóticos en diversos sistemas oscilantes; ya fuesen osciladores acoplados no lineales, pero conservativos; o un solo oscilador excitado externamente y con disipación. Los ejemplos ilustran, a nuestro juicio, la diversidad de comportamientos que pueden ocurrir en los sistemas dinámicos. Por otro lado, este comportamiento dinámico tan rico, ha propiciado que los osciladores sean utilizados frecuentemente para modelar sistemas complejos: desde el sistema de la llave goteante (Shaw 1984), pasando por modelos de dinámica cardíaca (Guevara *et al.* 1988), de vibraciones en estructuras (Moon 1987), y de vibraciones en cuerdas (Tufflaro 1990), hasta modelos para SQUIDS forzados (Hogg y Huberman 1984) y para convección en fluidos conductores (Libchaber y Fauvé 1982). Estas referencias deben bastar para ilustrar la gran riqueza dinámica y el porqué de la enorme importancia de los osciladores no lineales en la ciencia actual.

**Tabla 2.1**  
**Correspondencia de las variables para**  
**3 sistemas dinámicos que presentan comportamiento caótico**

	Péndulo	Circuito eléctrico	Junta Josephson
$\theta$	posición angular	diferencia de fase entre los osciladores	diferencia de fase cuántica
$\dot{\theta}$	velocidad angular	$kV$	$2eV/\hbar$
$a$	momento de inercia	$c/k$	$\hbar c/2e$
$b$	amortiguamiento	$1/kR$	$\hbar/2eR$
$c \sin \theta$	torca restauradora	corriente de retroalimentación	corriente Josephson
		$I_{FB}$	$J_J$
$c$		$V_1/R_s$	corriente crítica $I_c$
$\Gamma(t)$	torca aplicada	corriente aplicada	corriente aplicada
		$V_E(t)/R_E$	$I(t)$
$\Omega_0 = (c/a)^{1/2}$	frecuencia única normal	$(kV_1/R_s C)^{1/2}$	$(2eI_c/\hbar C)^{1/2}$
$\tau_0 = b/c$	tiempo de amortiguamiento	$R_s/kRV_1$	$\hbar/2eRI_c$
$Q = (ac/\delta^2)^{1/2}$	factor de calidad	$(kV_1 C R^2/R_s)^{1/2}$	$(2eI_c R^2 C/\hbar)^{1/2}$

$V \sim$  voltaje

$\hbar \sim$  constante de Plank

$C \sim$  capacitancia

$e \sim$  carga del electrón

$R \sim$  resistencia

# Pies de figuras

## Capítulo 2

Figura 2.1

Péndulo forzado paramétricamente en el que se hace oscilar el punto de suspensión (Koch 1983). Este sistema se describe por la ecuación:

$$\ddot{x} + \beta \dot{x} + (1 + A \cos(\Omega t)) \sin x = 0.$$

Figura 2.2

Diagrama de fases para el péndulo simple. Las curvas se dibujan en el plano  $\theta - \dot{\theta}$  para energía constante. Las curvas (casi) circulares, corresponden a oscilaciones cuyo período es casi independiente de la amplitud, el centro de estas es un punto fijo elíptico; para valores mas grandes de la energía, los círculos son reemplazados por óvalos y el período depende notablemente de la amplitud; cuando la energía aumenta aún más, las oscilaciones se reemplazan por rotaciones continuas alrededor del origen (punto de suspensión del péndulo). A cada una de las curvas que forma la frontera entre las oscilaciones y rotaciones se le llama separatriz, los puntos en que estas se cruzan son puntos de equilibrio inestable, o puntos fijos hiperbólicos. Este diagrama es típico de sistemas hamiltonianos integrables.

Figura 2.3

Traectorias en el espacio de estados  $\dot{\theta} - \sin \theta$  para el péndulo forzado. Se mantiene fija la frecuencia externa  $\omega = 0.67$ , y se muestran resultados para amplitudes de forzamiento  $\gamma_1 : 0.46, 0.50, 0.52, 0.54$  y  $0.68$ , respectivamente (D'Humieres *et al.* 1982). Estas curvas muestran resultados experimentales obtenidos con un circuito electrónico.

Figura 2.4

Resultados numéricos  $\dot{\theta} - \sin \theta$ , obtenidos usando los mismos valores para las amplitudes de forzamiento que D'Humieres *et al.* (1982).

### Figura 2.5

Trayectoria irregular en el espacio  $\dot{\theta}$ - $\text{sen}\theta$ , para un péndulo forzado. Esta trayectoria se calculó numéricamente usando  $\gamma_1 = 0.64$ , en la ecuación (6b). El comportamiento que se muestra, es similar al reportado por D'Humieres *et al.* (1982) para  $\gamma_1 = 0.68$ .

### Figura 2.6

Representación estroboscópica de la transición del movimiento regular al caótico vía doblamientos de período y empezando con período 1, para un péndulo forzado paramétricamente (Koch *et al.* 1983). Se muestran resultados experimentales.

### Figura 2.7

Representación de la transición al caos para el péndulo forzado. Se muestran resultados experimentales, que muestran bifurcaciones subarmónicas a partir de período 3 (Koch *et al.* 1983).

### Figura 2.8

Diagrama de líneas equipotenciales para el potencial de Hénon y Heiles (Lichtenberg y Lieberman 1983).

### Figura 2.9

Secciones de Poincaré del hamiltoniano de Hénon y Heiles, con energías: a)  $E = 1/24$ , b)  $E = 1/12$ , c)  $E = 1/8$  y d)  $E = 1/6$ . (Lichtenber y Lieberman 1983).

### Figura 2.10

Gráficas de  $T_{n+1}$  contra  $T_n$  que ilustran la dinámica de una llave que gotea: (a-c) muestran comportamiento regular (Martien *et al.* 1983); (d-f) atractores extraños (Núñez Yépez *et al.* 1989); (g) otro atractor extraño en el mismo sistema (Wu y Schelly 1989); (h-j) resultados numéricos que, obtenidos con el modelo de oscilador (ver texto), ilustran similitudes con el comportamiento experimental de la llave goteante.

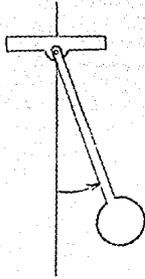


Fig 2.1

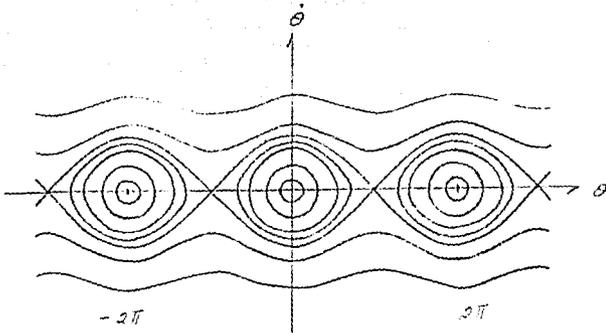


Fig 2.2

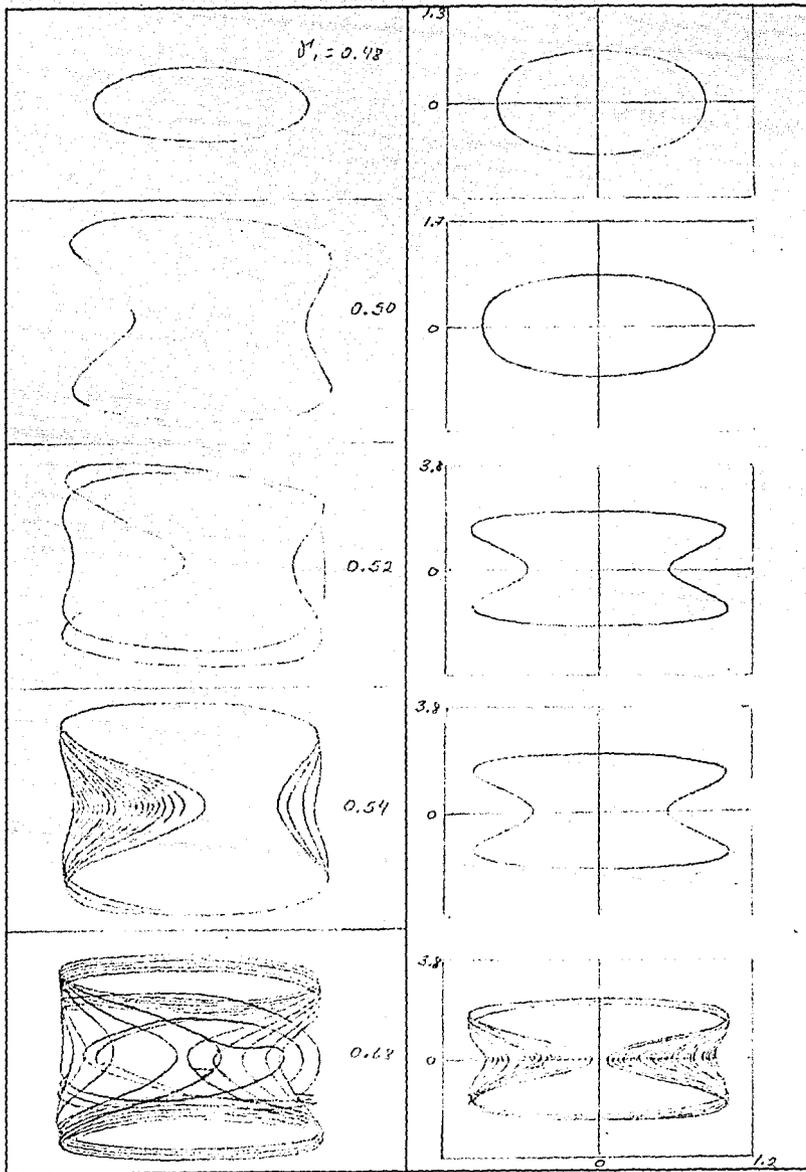


Fig 2.3

Fig 2.4

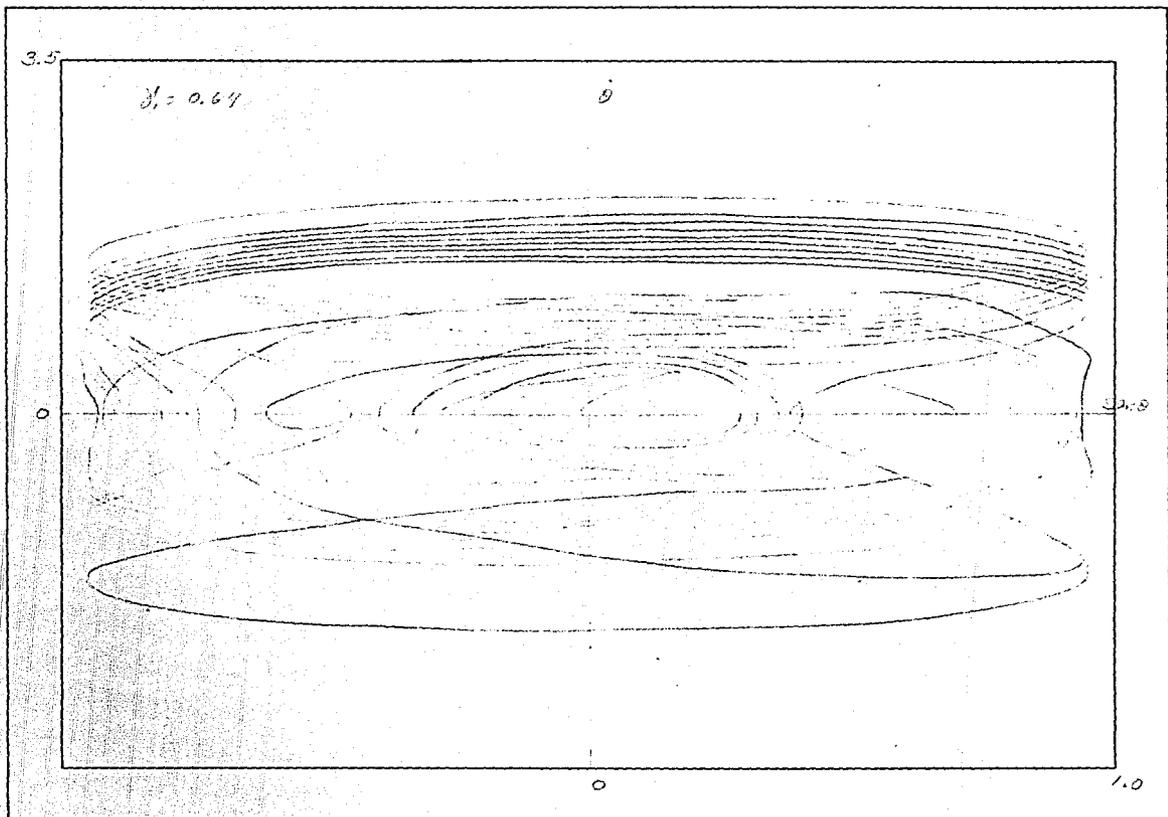


Fig. 2.5

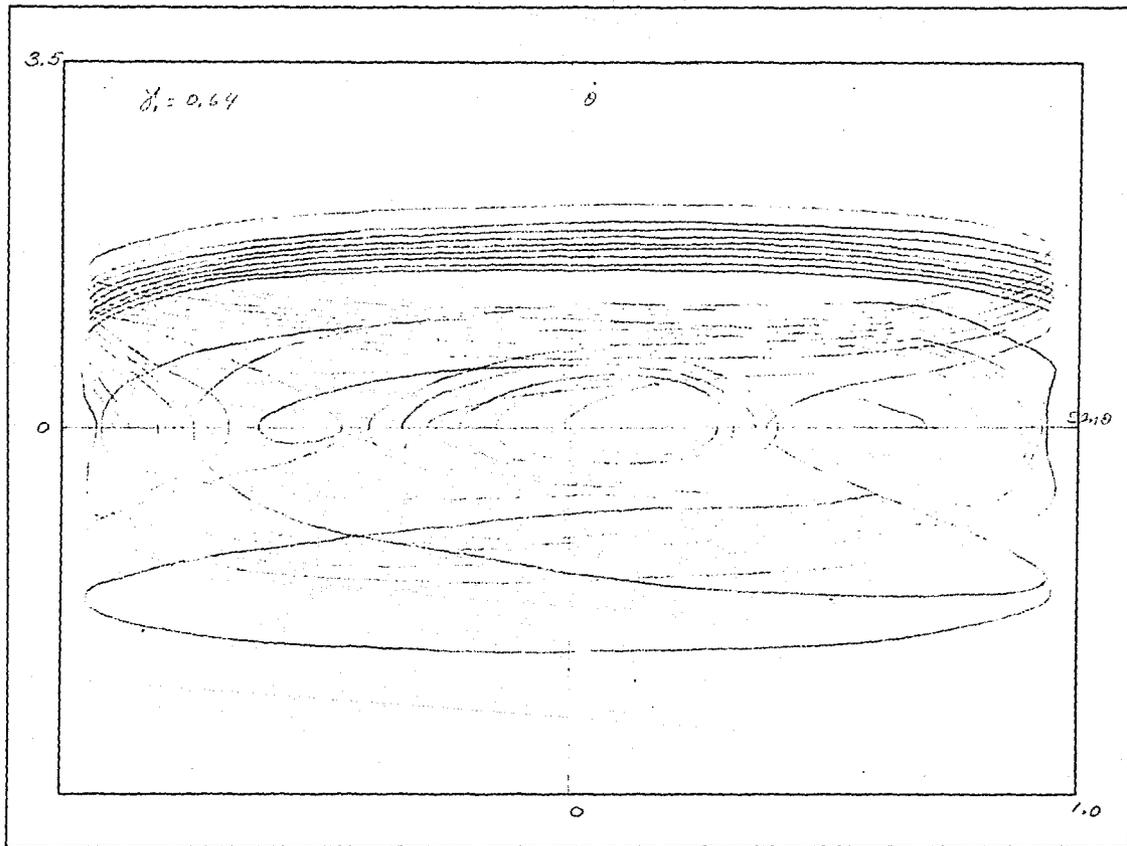


Fig. 2.5

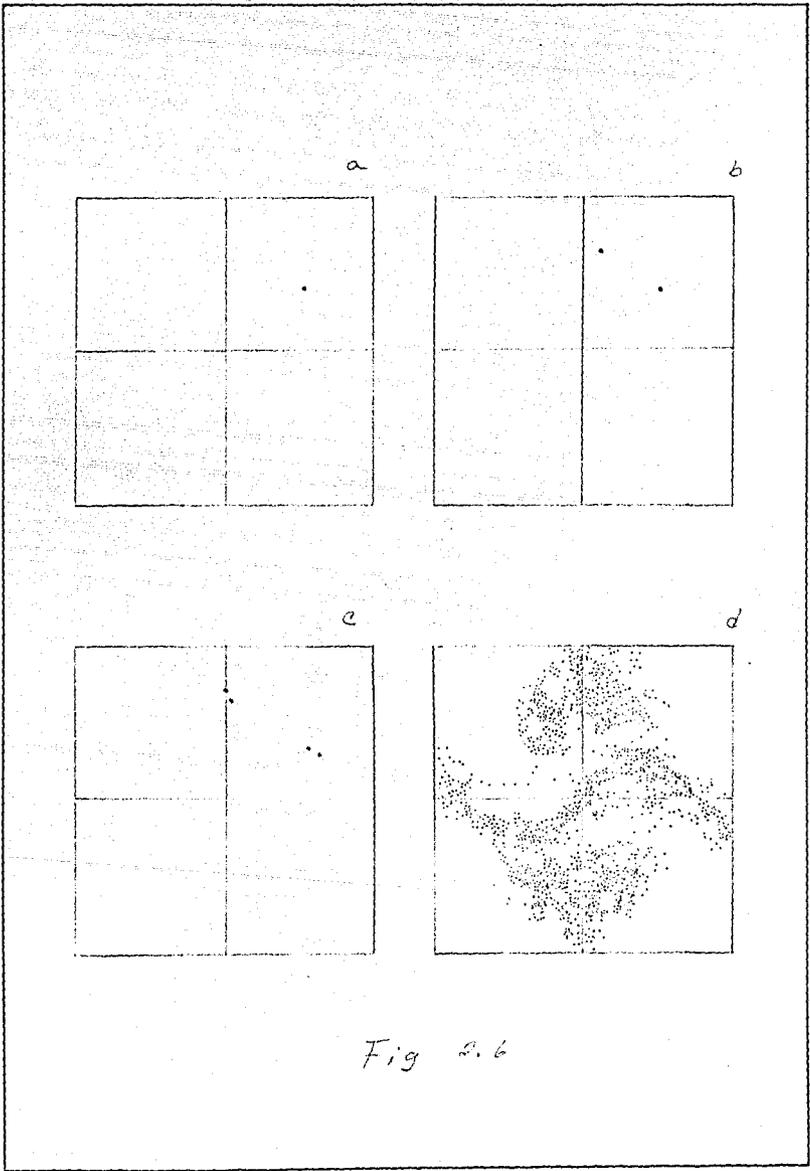


Fig 2.6

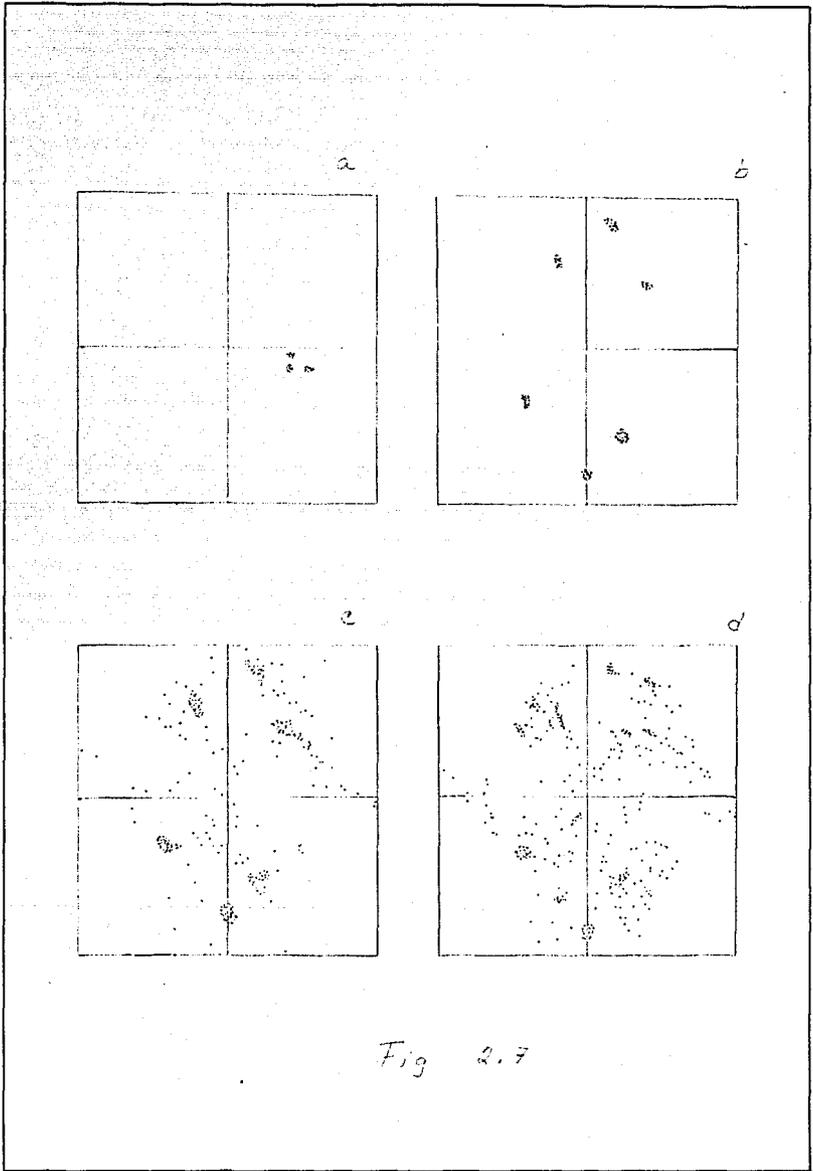


Fig 2.7

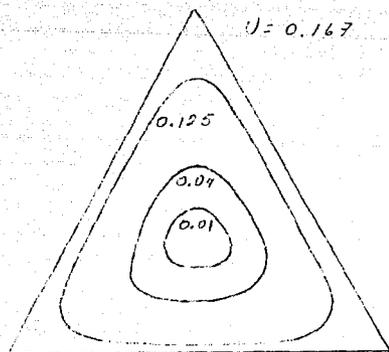


Fig. 2.8

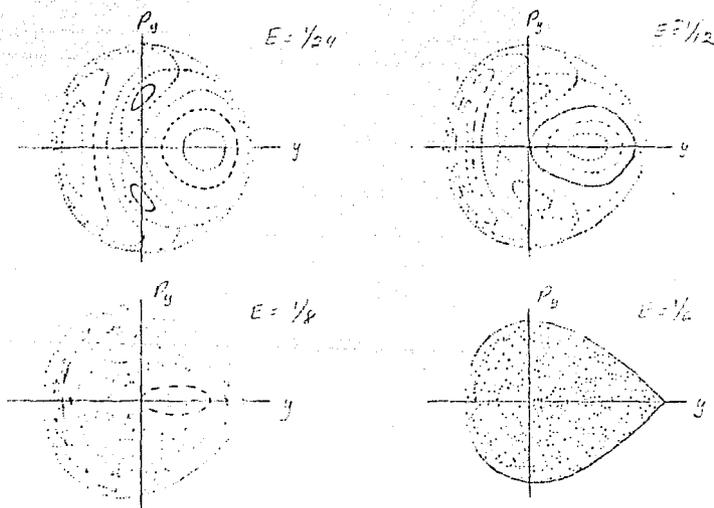


Fig. 2.9

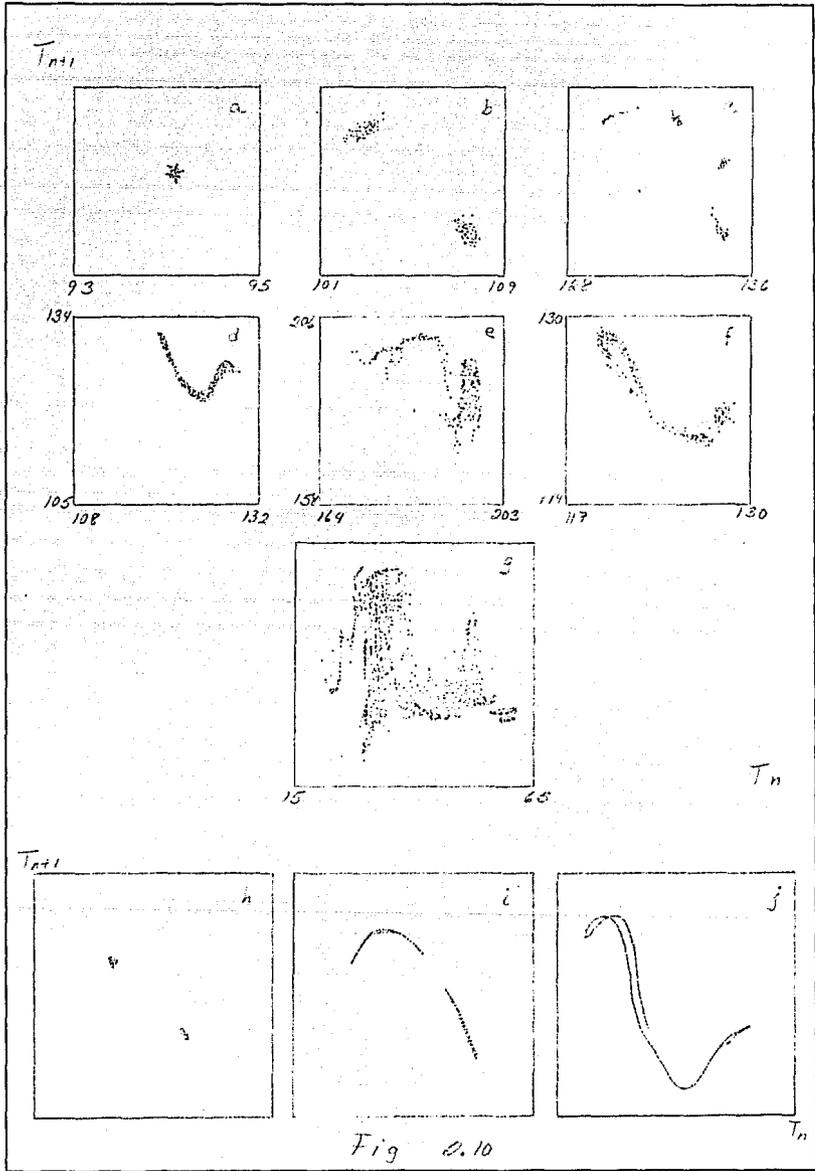


Fig 0.10

## Capítulo 3

### Péndulo Extensible

En los capítulos anteriores describimos la aparición de movimientos irregulares y azarosos en sistemas totalmente deterministas, ello fué ejemplificado con el comportamiento de sistemas oscilantes diversos. Allí, pretendimos ilustrar, no solo la aparición de caos, sino también la importancia de los sistemas de osciladores como modelos para otras situaciones (Casti 1989); desde una juntura Josephson, hasta una llave que gotea. En este capítulo, discutiremos ampliamente otro sistema oscilante, el llamado péndulo extensible. Este es un sistema hamiltoniano que se estudió ampliamente en el pasado, puesto que se le llegó a considerar paradigma de los osciladores no lineales conservativos (Witt y Gorelik 1933, T'selman 1970, Van den Burgh 1968, 1975, 1976, Kane y Kahn 1968, Breitenberger y Mueller 1981, Pippard 1983). Este capítulo contiene la parte central de nuestro trabajo. Describimos la aparición de movimientos caóticos en el péndulo extensible y calculamos su espectro de Liapunov. Como ocurre una transición regularidad-caos-regularidad al aumentar la energía del sistema, comparamos nuestros resultados con las predicciones de un esquema que pretende predecir la ocurrencia y otras características de este fenómeno en sistemas hamiltonianos (Toda 1974, Brumer y Duff 1976, Bolotin *et al.* 1989). Antes de entrar en materia, haremos una rápida revisión de los aspectos de la mecánica hamiltoniana que serán útiles a nuestro tratamiento del péndulo extensible.

#### 1. Sistemas hamiltonianos.

Dado un sistema mecánico conservativo de  $N$  grados de libertad, el hamiltoniano se define por

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_i^N p_i^2 / 2m_i + V(\mathbf{q}), \quad (1)$$

donde  $m_i$  es la masa del  $i$ -ésimo grado de libertad y  $V(\mathbf{q})$  la función de energía

potencial del sistema. El hamiltoniano determina la dinámica del sistema a través de las  $2N$  ecuaciones de primer orden (ecuaciones de Hamilton):

$$\dot{q} = \partial H / \partial p, \quad \dot{p} = -\partial H / \partial q. \quad (2)$$

Si definimos los paréntesis de Poisson de dos variables dinámicas  $A(q, p)$  y  $B(q, p)$ , en la forma (Landau y Lifshitz 1977, Arnold 1980)

$$\{A, B\} = \sum_k \left( \frac{\partial A}{\partial q_k} \frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial B}{\partial q_k} \frac{\partial A}{\partial p_k} \right) \quad (3)$$

con ello, la variación temporal de cualquier variable dinámica se puede expresar como

$$dA/dt = \{A, H\}; \quad (4)$$

si,  $\{A, H\} = 0$ , se dice que  $A$  es una constante del movimiento. El flujo hamiltoniano preserva volúmenes en el espacio de fases (es un flujo incompresible, si usamos terminología hidráulica) (Lichtenberg y Lieberman 1983, Ottino 1989).

### 1.1 Sistemas integrables y no integrables.

Central para el estudio de sistemas hamiltonianos es la noción de integrabilidad (Arnold 1980). Por ello no se entiende el cálculo explícito de las soluciones, sino la existencia de un número suficiente de constantes del movimiento que permitan determinar las características cualitativas del movimiento en el espacio de fases. Mas formalmente, se dice que un hamiltoniano con  $N$  grados de libertad es integrable, si existen  $N$  variables dinámicas independientes del tiempo y entre sí:  $F_i; i = 1, 2, \dots, N$ , tales que  $\{F_i, H\} = 0$ . Por ejemplo, todo sistema hamiltoniano con un grado de libertad es integrable, pues siempre existe una constante del movimiento, el Hamiltoniano.

Si consideramos sistemas hamiltonianos con dos grados de libertad, las cosas cambian drásticamente, pues casi ninguno es integrable. Obviamente  $H$  sigue conservándose, el problema es encontrar una segunda constante del movimiento. Otra manera de definir la integrabilidad de un sistema es mediante las variables de ángulo y acción, a las cuales se puede llegar por una transformación canónica

especial (Landau y Lifshitz 1977, Lichternberg y Lieberman 1983, Rosetti 1986).

En general una transformación de variables

$$\mathbf{p}, \mathbf{q} \rightarrow \boldsymbol{\theta}, \mathbf{I} \quad (5)$$

donde  $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}(\theta_1, \dots, \theta_N)$ ,  $\mathbf{I} = \mathbf{I}(I_1, \dots, I_N)$ , con  $I_i = I_i(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ ,  $\theta_i = \theta_i(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ , se llama canónica si las ecuaciones del movimiento en las variables  $\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}$ , mantienen la estructura canónica i.e. tienen la forma

$$\frac{dI_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \theta_k}, \quad \frac{d\theta_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial I_k}, \quad (6)$$

donde  $H = H(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta})$ . Esto es, se dice que una transformación es canónica si preserva la estructura hamiltoniana de las ecuaciones del movimiento. Un subconjunto muy útil de las transformaciones canónicas son las transformaciones a variables de ángulo y acción  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \rightarrow \boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}$ ; en la cual el hamiltoniano en las coordenadas  $\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}$  no es una función de  $\boldsymbol{\theta}$ . Bajo estas condiciones las ecuaciones canónicas para el sistema son

$$\frac{dI_i}{dt} = \frac{\partial H(\mathbf{I})}{\partial \theta_i} = 0, \quad (7a)$$

y

$$\frac{d\theta_i}{dt} = -\frac{\partial H(\mathbf{I})}{\partial I_i} = \omega_i(\mathbf{I}), \quad (7b)$$

entonces, el sistema queda listo para integrarse como

$$\mathbf{I}(t) = \mathbf{I}(0), \quad \theta_i(t) = \omega_i(\mathbf{I})t + \theta_i(0). \quad (8)$$

Así, la transformación a variables de ángulo y acción nos permite integrar el sistema, pues las ecuaciones canónicas son triviales en estas coordenadas. De hecho, un sistema integrable se puede definir también como aquél en que se puede encontrar una transformación canónica a variables de ángulo y acción. Una consecuencia inmediata de la existencia de variables de ángulo y acción, es que las trayectorias de un sistema hamiltoniano integrable están confinadas a (hiper-) superficies con dimensión  $N$ , topológicamente equivalentes a toros. Los "tamaños" de los toros quedan determinados por las variables  $I_i$ , mientras que las  $\theta_i$  determinan el enrollamiento de la trayectoria en el toro (Tabor 1989). Pensemos, para fijar ideas, en un

sistema hamiltoniano con dos grados de libertad. Los toros, en este caso, son superficies bidimensionales que viven en una hipersuperficie tridimensional de energía constante en el espacio de fases. En este caso, el cociente entre frecuencias  $\omega_1/\omega_2$  determina si la trayectoria es periódica (cociente racional), o ergódica en el toro, llamada también cuasiperiódica o condicionalmente periódica (cociente irracional).

Si no se cumplen las condiciones anteriores, ya sea que, el número de constantes del movimiento sea  $< 3N$ , o que alguna (o todas) de las funciones no sean analíticas (por ejemplo, discontinuas, multivaluadas, etcétera), o no exista la transformación a variables de ángulo y acción, el sistema no es integrable. En este punto uno puede bien preguntarse:

¿Qué tan frecuente es que un hamiltoniano no sea integrable? La respuesta a esta pregunta puede parecer sorprendente para quién aprendió mecánica en los libros de texto tradicionales, aunque ya era conocida por Poincaré a principios de siglo, solo en casos muy excepcionales se encuentran hamiltonianos son integrables; la gran mayoría de los sistemas hamiltonianos con  $N \geq 2$  no son integrables. Usualmente los hamiltonianos integrables corresponden a sistemas con una gran cantidad de simetrías, lo que se traduce en constantes del movimiento (Landau y Lifshitz 1977, Salas y Vargas 1985, Núñez Yépez *et al.* 1985); ejemplos de ello son los problemas con fuerzas centrales, todos los cuales son integrables.

## 1.2 Perturbaciones en sistemas integrables y el teorema de KAM.

Si perturbo levemente un hamiltoniano integrable, ¿qué tanto cambian las propiedades cualitativas de sus trayectorias?

La respuesta a esta pregunta la da el famoso resultado de Kolmogorov, Arnold y Moser, llamado usualmente teorema KAM (Moser 1973, Arnold 1980, Lichtenberg y Lieberman 1983). El teorema KAM se puede enunciar aproximadamente de la siguiente forma (Ottino 1989, Casti 1989): Supongamos que la perturbación  $P$  es "pequeña," y que las frecuencias  $\omega(I)$  del sistema antes de la

perturbación, satisfacen la condición

$$\det \frac{\partial(\omega_1(I), \dots, \omega_n(I))}{\partial(I_1, \dots, I_n)} \neq 0, \quad (9)$$

i. e. las frecuencias no son resonantes, entonces, las trayectorias del sistema aún están confinadas a los toros, excepto para un pequeño conjunto de condiciones iniciales. Conviene hacer unas precisiones sobre este resultado antes de continuar.

A) A los toros se les llama superficies de KAM; si se les observa en una sección de Poincaré, se verán como versiones distorcionadas de la sección a  $P = 0$ . Sin embargo, cualitativamente, el movimiento es del mismo tipo que en el caso integrable.

B) Las trayectorias que no permanecen confinadas a los toros pueden vagar libremente por la superficie de energía constante, dando lugar a regiones de movimiento irregular; si  $N \leq 2$ , estas regiones son necesariamente disjuntas, separadas por regiones KAM.

C) La frontera de la superficie de energía constante debe ser de dimensión  $2N - 1$ ; así, cuando  $N \geq 3$  las superficies  $N$ -dimensionales de KAM no pueden servir como fronteras que dividan a la superficie de energía constante en regiones disjuntas que confinen a las trayectorias en su interior. En consecuencia, estas trayectorias pueden moverse a través de toda la superficie de energía y dan lugar a un mecanismo aleatorio conocido como difusión de Arnold.

D) Este resultado provee de una forma para entender la transición al caos en un sistema hamiltoniano. Se comienza con un sistema integrable y al "perturbarlo" se comienzan a subdividir algunos toros KAM, mientras otros desaparecen completamente. Así se generan mas regiones estocásticas cada vez; no todos los toros tienen por que desaparecer al final.

Un hecho interesante en los sistemas no integrables es que pueden tener regiones con movimiento regular, y, regiones en las cuales el movimiento es caótico; dependiendo unicamente de las condiciones iniciales. Podemos decir que la falta de integrabilidad es una condición necesaria pero no suficiente para el caos en sistemas hamiltonianos.

## 2. Péndulo extensible.

Esencialmente, un péndulo extensible es un péndulo en que la lenteja está suspendida por un resorte (figura 3.1); si además suponemos que todos sus movimientos están confinados a un plano vertical y elegimos un sistema coordenado cuyo origen coincide con el punto de equilibrio de la lenteja, su hamiltoniano podrá escribirse como

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_z^2) + mgz + \frac{1}{2}k(l_0 - l)^2, \quad (10)$$

donde  $m$  es la masa de la lenteja,  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $k$  es la constante elástica del resorte,  $l_0$  es la longitud inicial del resorte y  $l$ , su longitud instantánea; al colgarle la lenteja al resorte, adquiere una longitud  $z_0 = l_0 + mg/k$ . Las frecuencias de oscilación de los modos pendular para pequeñas oscilaciones y de resorte, son  $\omega_p = (g/z_0)^{1/2}$  y  $\omega_s = (k/m)^{1/2}$ , respectivamente. El péndulo extensible es una de las realizaciones más simples de un sistema hamiltoniano oscilatorio con dos grados de libertad. Nótese el origen geométrico del acoplamiento no lineal entre los modos de resorte y péndular.

Para el análisis posterior, es conveniente adimensionalizar el hamiltoniano del péndulo extensible; para ello, definamos

$$q_1 = x/z_0, \quad q_2 = z/z_0, \quad (11)$$

expresemos los tiempos en unidades de  $\omega_s^{-1}$ , las energías en unidades de  $m\omega_s z_0^2$ , e introduzcamos el parámetro  $f = (\omega_p/\omega_s)^2$ , con ello el hamiltoniano del péndulo extensible adquiere la forma

$$H = (p_1^2 + p_2^2)/2 + fq_2 + (1 - f - \sqrt{q_1^2 + (1 - q_2)^2})^2/2. \quad (12)$$

Dado que la relación  $f = 1 - l_0/l$  es válida en el sistema, el intervalo de valores admisibles para el parámetro  $f$  es  $[0, 1]$  (Núñez Yépez *et al.* 1990). Este sistema mecánico tan simple se ha estudiado ampliamente como un ejemplo de sistema conservativo no lineal (Witt y Gorelik 1933, Kane y Khan 1968, Van der Burgh 1968, 1975, 1976, Tsel'man 1970, Narkis 1977, Breitenberger y Mueller 1981), como un análogo clásico al término que produce la resonancia de Fermi en los espectros infrarrojo y Raman de  $CO_2$  y moléculas similares (Califano 1976, Pippard 1983), y

en conexión con problemas de mecánica celeste (Contoupoulos 1963, Hori 1966, Broucke y Baxa 1973).

## 2.1 Los casos integrables del péndulo extensible.

El hamiltoniano (12) no es, en general, integrable, sin embargo, como demostraremos a continuación, cuando el parámetro  $f$  toma sus valores extremos el hamiltoniano se vuelve integrable.

A) El caso  $f = 0$ .

Cuando  $f = 0$  el hamiltoniano de péndulo extensible es

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{q_1^2 + (1 - q_2)^2})^2; \quad (13)$$

Si hacemos la transformación de variables (en este caso, una transformación canónica)

$$\rho^2 = q_1^2 + (1 - q_2)^2, \quad \tan \phi = (1 - q_2)/q_1, \quad (14)$$

es posible reescribir el hamiltoniano en la forma

$$H = \frac{1}{2}p_\rho^2 + V_{efec}(\rho), \quad (15)$$

en donde hemos introducido el potencial efectivo  $V_{efec}(\rho)$  como

$$V_{efec}(\rho) = \frac{1}{2} \left( (1 - \rho)^2 - l^2/\rho^2 \right), \quad (16)$$

y  $l = \rho^2 \dot{\phi}$  es una constante del movimiento. Entonces, dado que hemos reducido el problema a uno unidimensional, hemos demostrado que el hamiltoniano es integrable cuando  $f = 0$ .

B) El caso  $f = 1$ .

Si  $f = 1$ , el hamiltoniano es

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + q_2 + \frac{1}{2}(q_1^2 + (1 - q_2)^2); \quad (17)$$

de donde es obvia la integrabilidad del hamiltoniano, cuando  $f = 1$ .

## 2.2 Inestabilidad paramétrica en el sistema.

En muchos de los trabajos anteriores se ha dado un interés particular a la inestabilidad paramétrica en el sistema. El acoplamiento no lineal entre el movimiento vertical de resorte y el movimiento de lado a lado del péndulo se vuelve resonante cuando el cociente natural de frecuencias de estos movimientos es entero  $n \geq q_2$  (Breitenberger y Mueller 1981). Para analizar el origen de ésta, supongamos desviaciones pequeñas de la posición de equilibrio; si desarrollamos el hamiltoniano en una serie de potencias en  $q_1$  y  $q_2$ , conservando términos hasta de tercer orden, obtenemos:

$$H = (p_1^2 + p_2^2)/2 + (f + f q_1^2 + q_2^2 + (f - 1)q_1^2 q_2)/2, \quad (18)$$

las ecuaciones del movimiento en esta aproximación, son

$$\ddot{q}_1 + f q_1 = (1 - f) q_1 q_2, \quad (19)$$

y

$$\ddot{q}_2 + q_2 = \frac{1}{2}(1 - f) q_1^2. \quad (20)$$

En estas ecuaciones queda de manifiesto la interpretación del problema como dos osciladores (el péndulo y el resorte) acoplados en forma no lineal.

Para analizar la inestabilidad, supongamos que el modo dominante de movimiento es el de oscilaciones en el resorte ( $q_1 \ll q_2$ ), la ecuación (20) nos dice entonces que  $q_2$  tiene como solución aproximada  $q_2(t) = A \cos(t)$ , por lo que la ecuación para el otro modo se puede escribir en forma aproximada como una ecuación de Mathieu (Bender y Orzag 1978, Stoker 1959)

$$\ddot{q}_1 + [f + (f - 1)A \cos(t)] q_1 = 0. \quad (21)$$

Así, el modo horizontal corresponde a un oscilador paramétrico. El comportamiento de las soluciones a la ecuación de Mathieu (Stoker 1959) nos dice que ambos modos de oscilación estarán acoplados en forma resonante cuando

$$f = (n/2)^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (22)$$

La resonancia más pronunciada ocurre cuando  $n = 1$ , lo que corresponde a  $f = 0.25$ . Este es el único caso que analizaremos en este trabajo, dado que es el que mayor relevancia tiene para las aplicaciones del modelo (Núñez Yépez *et al.* 1990).

### 2.3 Transición al caos en el péndulo extensible.

Como mencionamos anteriormente, el péndulo extensible ha sido muy estudiado, pero, parece que a pesar del gran interés que ha tenido el estudio del caos hamiltoniano recientemente, se ha puesto muy poca atención a la posibilidad de movimientos caóticos en el sistema. La única excepción que conocemos está en un trabajo de Petrosky (1984).

En esta sección investigaremos la transición al caos que ocurre en el péndulo extensible. Trataremos exclusivamente el caso donde la frecuencia del resorte es exactamente el doble de la frecuencia del movimiento pendular ( $f = 0.25$ ), caso para el que ocurre la resonancia paramétrica más intensa, como mostramos en la sección anterior. La energía mínima permitida para el péndulo es  $E_0 = 0.03125$ , en este caso. Las ecuaciones canónicas de movimiento para el péndulo extensible a una  $f$  de 0.25 son:

$$\dot{q}_1 = p_1 \quad (23a)$$

$$\dot{q}_2 = p_2 \quad (23b)$$

$$\dot{p}_1 = \frac{3}{4} \frac{q_1}{\sqrt{q_1^2 + (1 - q_2)^2}} - q_1 \quad (23c)$$

$$\dot{p}_2 = \frac{3}{4} \left( 1 - \frac{(1 - q_2)}{\sqrt{q_1^2 + (1 - q_2)^2}} \right) - q_2. \quad (23d)$$

Para estudiar la transición al caos integramos numéricamente estas ecuaciones usando el método de Verlet (Gould y Tobochnik 1988, Birdsall y Langdon 1985); la ventaja de este método es que preserva la estructura simpléctica del flujo hamiltoniano y conserva muy bien la energía. De hecho, usamos este método de integración en todos nuestros cálculos garantizando siempre que la energía se conserva hasta en una parte en  $10^4$ . Nuestros resultados numéricos muestran (figura 3.2) que hay una transición de órbitas regulares a caóticas y nuevamente a regulares al incrementar la energía. Este tipo de comportamiento se ha encontrado recientemente en varios sistemas de osciladores acoplados (Deng y Hioe 1985, Reichl y Büttner 1986, Bolotin *et al.* 1989).

Para analizar el comportamiento dinámico del sistema usamos las secciones de Poincaré construídas numéricamente integrando las ecuaciones (23) y mapeando las intersecciones de las órbitas del espacio fase con el plano  $p_1 - q_1$  cuando  $p_2 \geq 0$ . Las secciones que calculamos se muestran en las figuras 3.2. El intervalo de energías que abarcan estas secciones va, desde un poco más que la energía mínima hasta  $E = 1.5$

La figura 3.2a muestra el mapeo de Poincaré para  $E = 0.0332031$  y varias condiciones iniciales. Vemos que todas las órbitas del sistema son cuasiperiódicas a muy bajas energías. Las figuras 3.2b y 3.2c muestran mapeos similares a energías mas altas; aún se presentan órbitas cuasiperiódicas para éstas energías pero también se encuentran puntos generados por órbitas irregulares que vagan por la superficie tridimensional de energía constante. La región de máxima irregularidad se obtiene para cierto valor (que no calculamos con precisión) de la energía entre 0.42 y 0.47. La figura 3.2d muestra el mapeo de Poincaré que se obtienen cuando la energía ha aumentado mucho: la región caótica desaparece y todas las órbitas vuelven a ser cuasiperiódicas nuevamente; aumentar aún más la energía no parece afectar la regularidad de las órbitas.

Hemos entendido este comportamiento, como el resultado de que, cuando la energía es suficientemente grande, el péndulo gira continuamente sobre su punto de suspensión. Podemos decir que el movimiento rotacional "nulifica" el efecto del acoplamiento no lineal entre los modos vertical y horizontal, así que el sistema se vuelve regular nuevamente. Si esta visión cualitativa es correcta, el caos debería comenzar a desaparecer para energías mayores que la energía de la separatriz para un péndulo inextensible de longitud  $l$ , i.e. al rebasar d la energía  $E = 0.5$ , lo cual se corrobora aproximadamente por el comportamiento del exponente de Liapunov más grande que se presenta en la figura 3.3.

#### 2.4 Espectro de Liapunov para el sistema.

Las determinaciones del espectro de Liapunov para un sistema hamiltoniano son de gran importancia (Saagdeev *et al.* 1988, Andrey 1986, Livi *et al.* 1987),

sobre todo por su relación con la entropía de KS (ver sección 3.2 del capítulo 1)

Hemos evaluado numéricamente el espectro de Liapunov para condiciones iniciales fijas en el plano de Poincaré y para varias energías en nuestro sistema. El máximo exponente de Liapunov  $\lambda_1$  se calculó (Lichtenberg y Lieberman 1983) integrando simultáneamente las ecuaciones de Hamilton (3) para una órbita dada del espacio fase y la ecuación variacional para un vector tangente escogido aleatoriamente  $\mathbf{u}(t)$  a esa órbita, y evaluando numéricamente el límite

$$\lambda_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{\|\mathbf{u}(t)\|}{\|\mathbf{u}(0)\|}. \quad (4)$$

Sabemos que al menos dos de los exponentes de Liapunov se anulan ( $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ) (Lichtenber y Lieberman 1983), el exponente restante se puede obtener usando la relación de simetría  $\lambda_4 = -\lambda_1$ , la cual es válida en cualquier sistema Hamiltoniano con dos grados de libertad. Los resultados para el exponente máximo se muestran en la figura 3.3. Nótese que el comportamiento exhibido para  $\lambda_1$  como función de la energía corrobora la existencia de la transición orden-caos-orden.

Pensando en trabajo posterior, hemos calculado el exponente de Liapunov mayor a energía fija, como función de  $f$ . Los resultados se muestran en la figura 3.4. Nótese la transición regularidad-caos-regularidad que se manifiesta también al variar  $f$ .

2.5 Comparación de nuestros resultados con las predicciones de un esquema propuesto de estocastización. /par De acuerdo a una propuesta de estocastización (Toda 1974, Brumer y Duff 1976, Bolotin *et al.* 1989, Nagaraja Kumar y Khare 1989), la aparición de una transición orden-caos-orden está ligada con la existencia de una región localizada con curvatura gaussiana negativa en la superficie de energía potencial del sistema. De acuerdo a esta propuesta, a bajas energías todas las órbitas deben ser regulares, ya que la curvatura siempre es positiva cerca de un mínimo del potencial. Pero, para valores grandes de la energía, las órbitas pueden eventualmente llegar a la región de curvatura gaussiana negativa y penetrarla. Así, que se esperaría que dos trayectorias inicialmente muy cercanas en el espacio de fases, divergieran exponencialmente y, así, el sistema mostraría una fuerte sensibi-

lidad a las condiciones iniciales, y se volvería caótico. Par mayores energías, las orbitas pasarían la mayor parte del tiempo en regiones de curvatura positiva, así que el sistema volvería a ser regular.

Para comparar las predicciones de la propuesta mencionada con nuestros resultados numéricos, hemos buscado la región de curvatura negativa para la superficie de energía potencial del péndulo extensible. Encontramos que es un círculo centrado en el punto singular  $q_s = (0, 1)$  y con un radio  $\rho_c = 1 - f$ . Nótese que hay una inconsistencia entre este criterio para la aparición de caos, y la integrabilidad del sistema para  $f = 0$ .

La energía crítica para la primera transición se puede calcular, en el escenario mencionado para la transición orden-caos-orden (Bolotin *et al.* 1989, Nagaraja Kumar y Khare 1989), como la energía mínima sobre la línea de curvatura cero, *i.e.* sobre la frontera de separación entre las regiones de curvatura negativa y positiva en la superficie de energía potencial. Para el péndulo extensible, en el caso  $f = 0.25$  esta energía crítica es  $E_c^{(1)} = 0.0625$ . Este valor, está de acuerdo con los resultados de nuestros experimentos numéricos. Sin embargo, para energías mas altas, donde los movimientos vuelven a ser regulares, la energía crítica para la transición a la regularidad no concuerda muy bien con nuestros resultados. Por ejemplo, en el caso  $f = 0.25$  y determinado por la frontera superior de la región de curvatura negativa (Bolotin *et al.* 1989), la energía predicha para la transición es  $E_c^{(2)} = 0.4375$ , que es un valor menor (Núñez Tépez *et al.* 1990) que el observado en nuestro resultado numérico  $E \sim 0.71$ . (ver figura 3.3).

# Pies de figuras

## Capítulo 3

Figura 3.1

Péndulo extensible.

Figura 3.2

Mapeos de Poincaré para el péndulo extensible. La línea continua marca la frontera de la región de Hill, i.e. la región energéticamente permitida.

- a)  $E = 17/512$ , a esta energía el movimiento es completamente regular.
- b)  $E = 5/32$ , al incrementar la energía empiezan a aparecer regiones caóticas, aunque el movimiento es predominantemente cuasiperiódico.
- c)  $E = 14/32$ , a esta energía casi no hay movimientos regulares, aunque, obviamente, sobreviven algunas regiones de éstas.
- d)  $E = 1.5$ , todas las regiones caóticas han desaparecido, y el movimiento del sistema es cuasiperiódico otra vez.

Figura 3.3

Comportamiento del exponente de Liapunov más grande como función de la energía, en el péndulo extensible.  $E_0 = 1/32$ , es el valor mínimo permitido para la energía del sistema cuando  $f = 0.25$ . Todos los valores fueron calculados con las mismas condiciones iniciales en el plano  $p_1 - q_1$ :  $p_1 = q_2 = 0$ ,  $q_1 = -0.075$ ,  $p_2$  se obtuvo de la ecuación de la energía. Los cálculos se hicieron con el algoritmo de Verlet y el número de iteraciones fué 50 000.

Figura 3.4

Comportamiento del exponente de Liapunov más grande a energía fija, como función del parámetro  $f$ . El cálculo se hizo en las condiciones que se describen en la figura 3.3. Nótese la transición regularidad-caos-regularidad que ocurre al variar  $f$ .

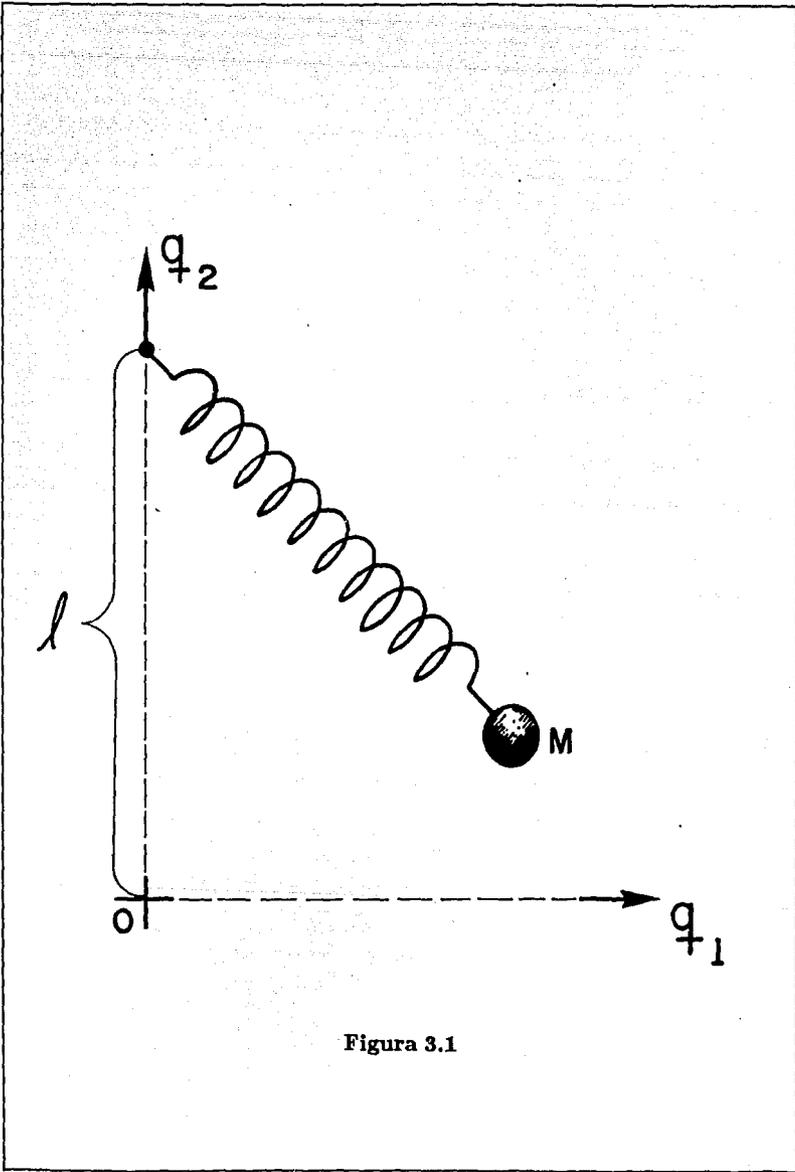


Figura 3.1

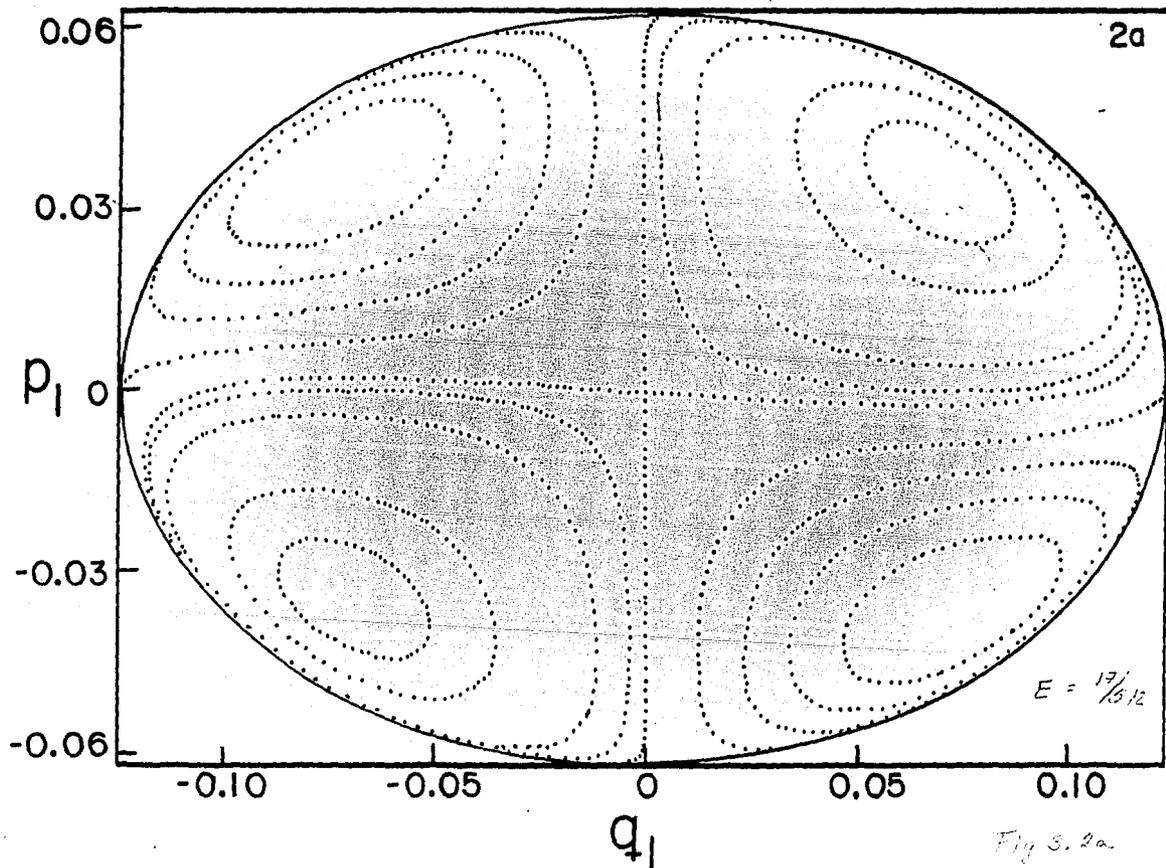
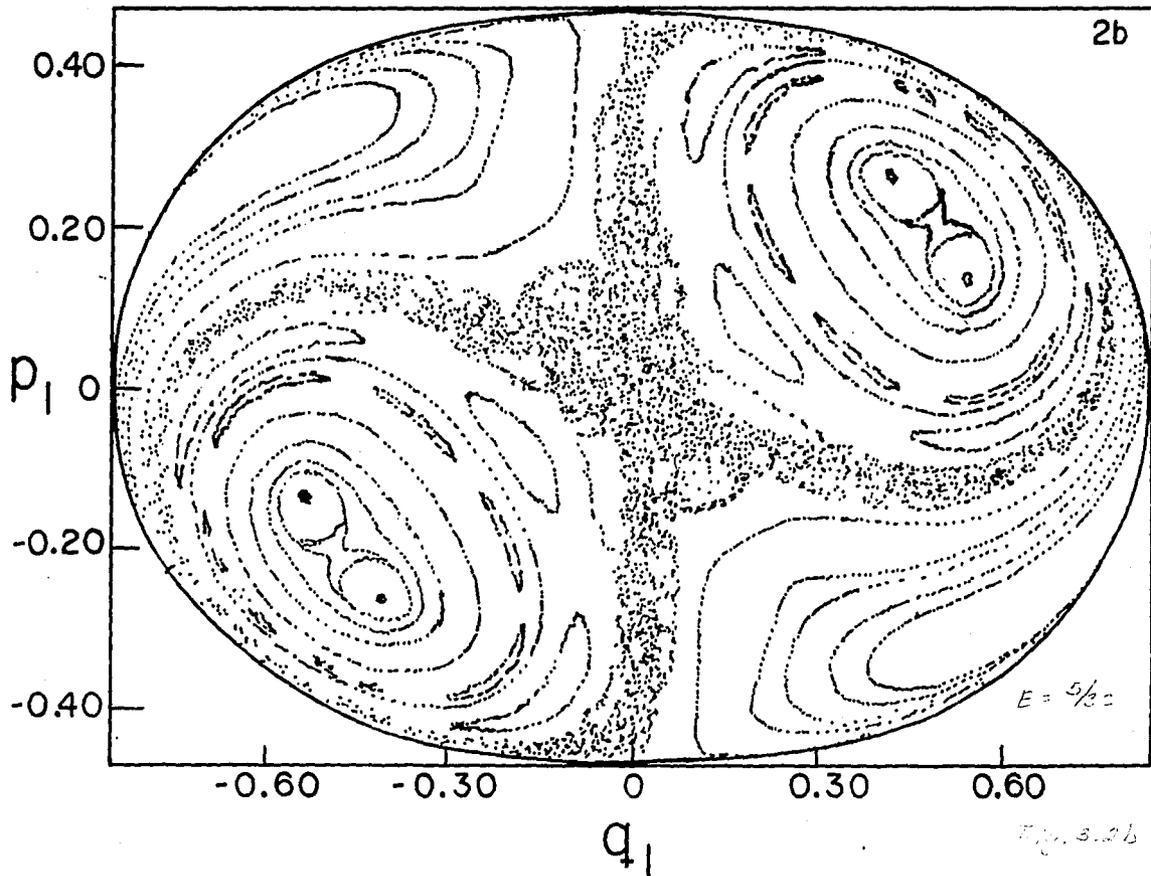


Fig 3.2a.



55

Fig. 3.2b

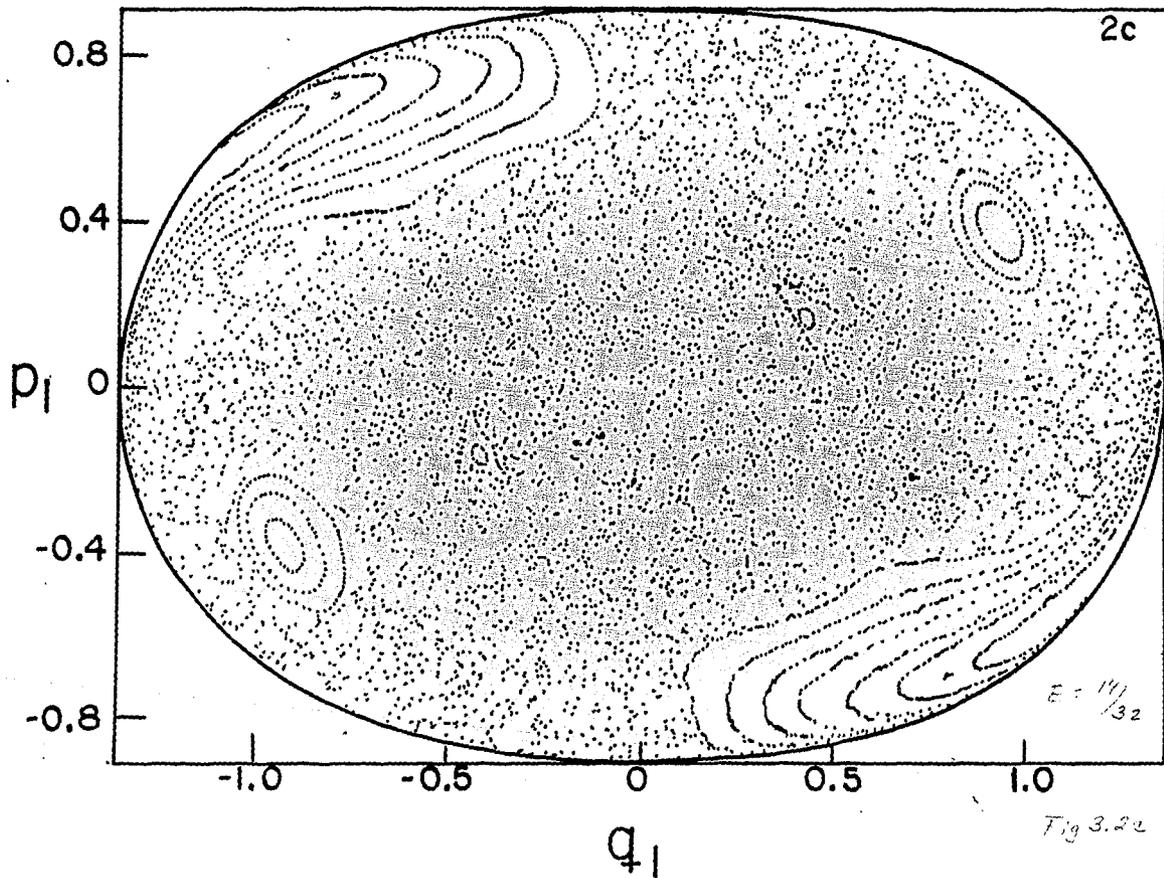


Fig 3.22

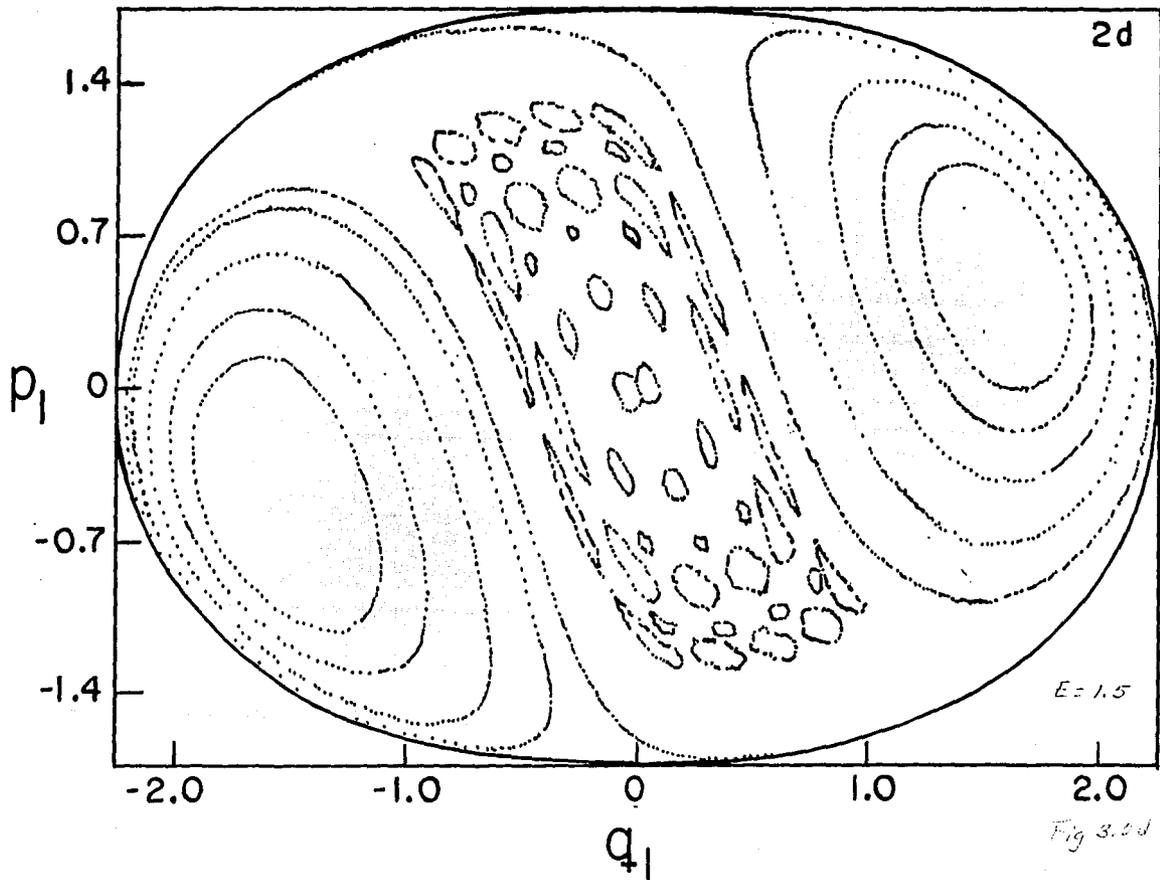


Fig 3.5d

57

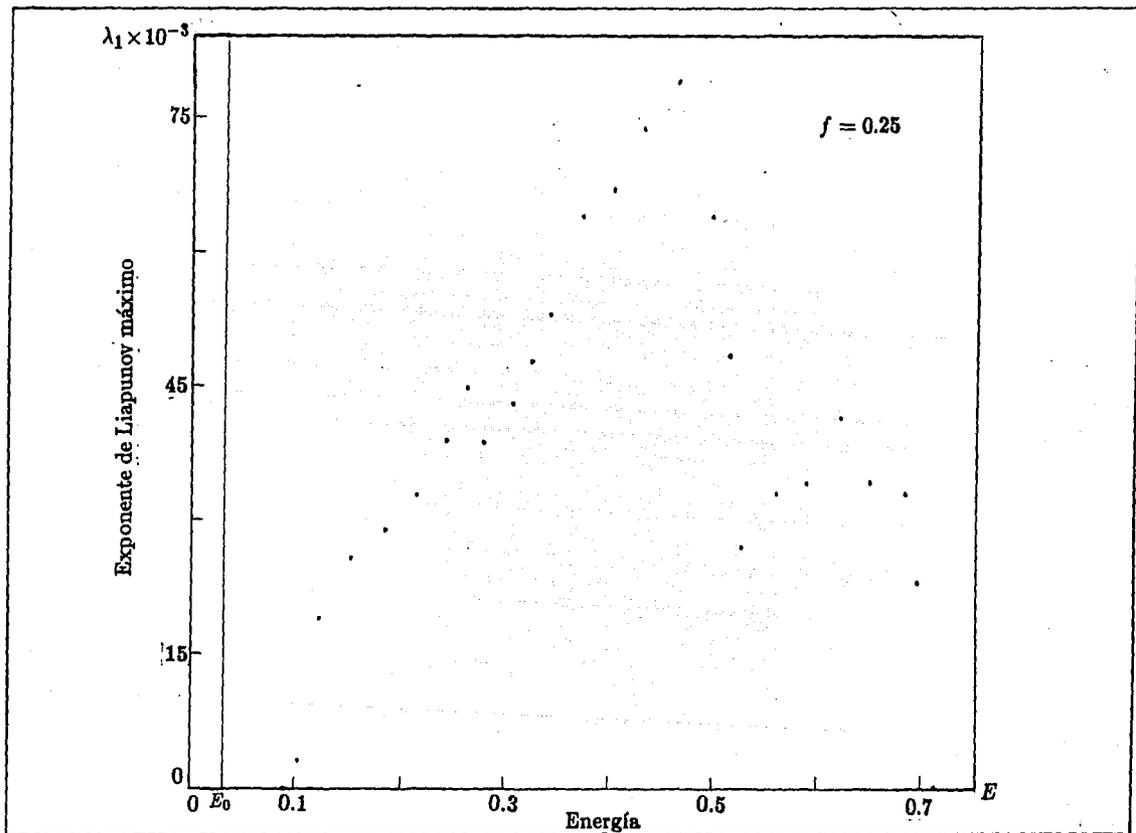


Figura 3.3

58

$\lambda \times 10^{-3}$

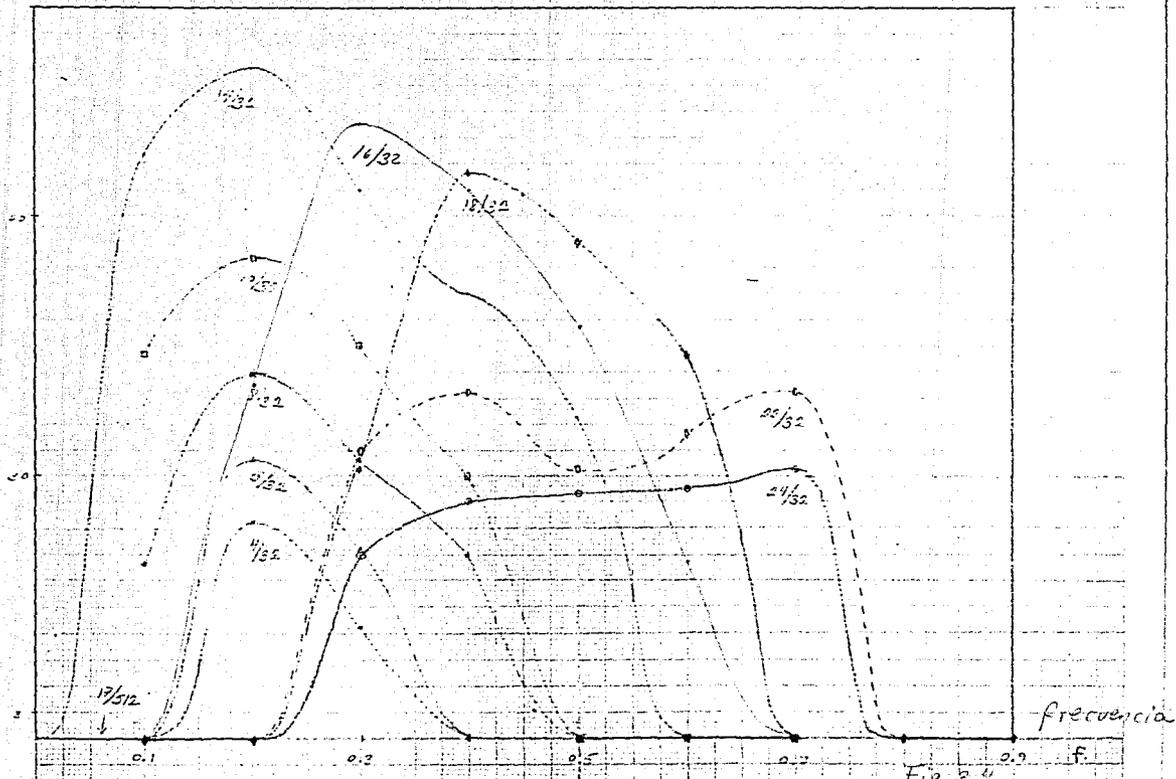


Fig. 8.4

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

## Referencias

- Aguiar M A M de y Baranger M 1988 *Ann. Phys. N Y* **186** 355.  
1987 *Ann. Phys. N Y* **180** 167.
- Andrey L 1986 *Prog. Theor. Phys.* **75** 1258.
- Arnold V I 1980 *Mathematical methods of classical mechanics* (New York: Springer-Verlag).
- Bergé P, Pomeau Y, y Vidal Ch 1986 *Order within chaos*, (New York: John Wiley).
- Berry M V, Percival I C, y Weiss N O editores 1987 *Dynamical Chaos* (London: Royal Society).
- Benettin B y Strelcyn J M 1978 *Phys. Rev. A* **17** 773.
- Bender y Orzag
- Breitenberger E y Mueller R D 1981 *J. Math. Phys.* **22** 1196.
- Birdsall Ch K y Langdon A B 1985 *Plasma physics via computer simulations* (New York: Mc Graw-Hill) sección 2-4.
- Bolotin Yu L, Gonchar V Yu, Tarasov V N y Chekanov N A 1989 *Phys. Lett. A* **135** 29.
- Broucke R y Baxa P A 1973 *Celestial Mech.* **8** 261.
- Brumer P y Duff W 1976 *J. Chem. Phys.* **65** 1665.
- Califano S 1976 *Vibrational states* (New York: John Wiley).
- Casti J L 1989 *Alternate realities*, (New York: John Wiley).
- Contoupoulos G 1963 *Astron. J.* **68** 763.

Deng Z y Hioe F T 1985 *Phys. Rev. Lett.* **55** 1539.

D'Hurnieres D , Beasley M R, Huberman B A, y Libchaber A 1982 *Phys. Rev. A* **26** 3483.

Feigenbaum M J 1978 *J. Stat. Phys.* **19** 25.

1979 *J. Stat. Phys.* **21** 669.

1980 *Los Alamos Sci.* **1** 4.

Feynman R P, Leighton R, y Sands M 1964 *The Feynman Lectures on Physics* Vol 1 (Reading: Addison Wesley).

Ford J 1983 *Phys. Today* **36** 40.

Gollub P 1990 comunicación personal.

Gould H y Tobochnik J *Computer simulation methods Part 1* (Reading USA: Addison-Wesley) apéndice 5A.

Guevara M R, Shrier A y Glass L 1988 *Am. J. Physiol.* **254** H1.

Hénon M y Heiles C 1964 *Astron. J.* **69** 73.

Hogg T y Huberman B A 1984 *Phys. Rev. A* **29** 275.

Hori G H 1966 *Publ. Astron. Soc. Japan* **18** 287.

Jensen R V 1987 *Am. Sci.* **75** 168.

Kadanoff L P 1983 *Phys. Today* **36** (12) 46.

Kaňe T R y Khan M E 1968 *J. Appl. Mech.* **35** 547.

Koch B P, Leven R W, Pompe B, y Wilke C 1983 *Phys. Lett. A* **96** 219.

Landau L D y Lifshits E M 1977 *Course of theoretical physics Vol. 1 Classical mechanics* (Oxford: Pergamon Press).

Landau L D y Lifshits E M *Course of theoretical physics Vol. 6 Fluid mechanics* (Oxford: Pergamon Press).

Laplace P S de 1921 *Essai philosophique sur les probabilités* (Paris: Gauthier Villars).

Leven R W y Koch B P 1981 *Phys. Lett. A* **86** 71.

Libchaber A y Fauvé S 1982 en Kalia R K y Vashista P editores, *Melting, localization, and chaos* (New York: North Holland).

Lichtenberg A J y Lieberman M A 1983 *Regular and stochastic motion* (New York Heidelberg Berlin: Springer-Verlag).

Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130.

Mandelbrot B B 1983 *The fractal geometry of nature* (San Francisco: Freeman).

Martien P, Pope S C, Scott P L, y Shaw R 1985 *Phys. Lett. A* **110** 399.

May R M 1976 *Nature* **261** 459.

McLaughlin J B 1981 *J. Sata. Phys.* **24** 375.

Moon F C 1987 *Chaotic vibrations* (New York: John Wiley)

Moser J 1973 *Stable and random motions in dynamical systems* (Princeton: Princeton University Press)

Nagaraja Kumar C y Khare A 1989 *J. Math. Phys. A: Math. Gen.* **22** L849.

Narkis Y 1977 *Z. Angew. Math. Phys.* **28** 343.

Núñez Yépez H N, Salas Brito A L y Vargas C A 1985 *Contactos* **2** 65.

Núñez Yépez H N, Salas Brito A L, Vargas C A, y Vicente L 1988, *Memorias del Ier coloquio sobre caos y sistemas dinámicos* (México D.F: Universidad Autónoma Metropolitana) por publicarse.

Núñez Yépez H N, Salas Brito A L, Vargas C A, y Vicente L 1989 *Eur. J. Phys.* **10** 99.

Núñez Yépez H N, Salas Brito A L, Vargas C A, y Vicente L 1990 *Phys. Lett. A* por aparecer.

Núñez Yépez H N, Salas Brito A L, Vargas C A, y Vicente L 1990, *Order-chaos-order transition in an extensible pendulum*, presentado en Dynamic Days Texas, Austin.

Olsson M G 1976 *Am. J. Phys.* **44** 1211.

Ottino J M 1989 *The kinematics of mixing: stretching, chaos, and transport*, (Cambridge).

Parker T S y Chua L O 1987 *Proc. IEEE* **75** 982.

Parker T S y Chua L O 1989 *Practical numerical algorithms for chaotic systems* (Berlin: Springer-Verlag).

Pedersen N F y Davidson A 1981 *Appl. Phys. Lett.* **39** 830.

Pesin Ya B 1976 *Dokl. Akad. Nauk.* **226** 774.

Petrosky T Y 1988 en *Statistical physics and chaos in plasma physics* Chorlton C W y Reichl L E editores (New York: John Wiley).

Piña E y Jiménez Lara L 1987 *Physica D* **26** 378.

Pippard A B 1983 *The physics of vibrations Vol 2* (Cambridge: Cambridge University Press).

Poincaré H 1957 *Les methodes nouvelles de la mécanique celeste Vol 1-3* (Paris: Gauthier-Villars) reimpresso por Dover.

Press W H, Flannery B P, Teukolsky S A, Vetterling W T 1989 *Numerical recipes. The art of scientific computing* (Cambridge: Cambridge University Press) Capítulo 15.

Rosetti M 1986 *Modern methods in equilibrium statistical mechanics*, (Singapore: World Scientific).

Rössler O 1977 en *Synergetics: a workshop* (Berlin: Springer Verlag) 177.

Ruelle D 1980 *La Recherche* **11** 132.

Salas A L y Vargas C 1985 *Contactos* **1** 26.

Saagdeev R Z, Usikov D A y Zaslavsky G M 1988 *Nonlinear physics* (Chur: Harwood).

Schuster H G 1984 *Deterministic Chaos*, (Berlin: Physik-Verlag).

Shaw R 1984 *The dripping faucet as a model chaotic system* (Santa Cruz, CA: Aerial Press).

Stoker J J 1959 *Nonlinear oscillations* (Princeton EUA: Interscience).

Tabor M 1989 *Chaos and integrability in nonlinear dynamics*, (New York: Wiley-Interscience).

Toda M 1974 *Phys. Lett. A* **48** 335.

Tritton D J 1986 *Eur. J. Phys.* **7** 162.

Tsel'man F D 1970 *J. Appl. Math. Mech.* **34** 916.

Tuffillaro N 1990 *Ph D Thesis*.

Van der Burgh 1968 *J. Méchanique* **7** 507.

1975 *J. Sound Vib.* **42** 463.

1976 *J. Sound Vib.* **46** 295.

Witt A y Gorelik G 1933 *Z. Techn. Phys. Sowjetunion* **3** 294.

Wu X y Schelly Z A 1989 *Physica D* **40** 433.

Wu X, Tekle E y Schelly Z A 1989 *Rev. Sci. Instrum.* **60** 3779.