13A
2 g

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

REALIZACION EN SISTEMAS NO LINEALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A:

MARIA DE LA LUZ JIMENA DE TERESA DE OTEYZA

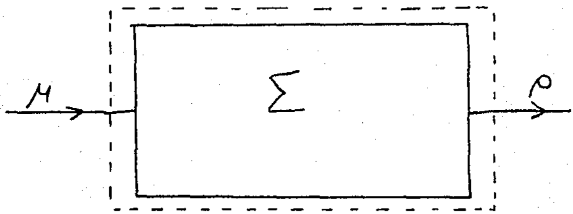
MEXICO,D.F. 1990

INDICE

Introducción

Lo primero que debemos conocer cuando pretendemos describir una teoría es el objeto de estudio de ésta. Así pues, en teoría del control, el objeto de estudio son "sistemas". Ahora bien, el término "sistemas" resulta sumamente vago. Intuitivamente podemos pensar que un sistema es una "máquina" que bajo "estímulos" produce "respuestas". Por ejemplo, un cultivo de bacterias es un sistema. El cultivo sería la "máquina". Si variamos la temperatura a la que se encuentra el cultivo o aplicamos un antibiótico, se está aplicando un "estímulo" a la "máquina". Estos estímulos producen "respuestas", que en este caso es el número de bacterias en el cultivo.

Una manera sencilla de representar gráficamente estas ideas es la siguiente:



donde μ representa los "estímulos", Σ el sistema y ρ las "respuestas".

Se puede pensar que Σ es un mediador (matemático, una funcional) entre μ y ρ . En todo sistema de este tipo tenemos tres tipos de variables.

1) *Variables de entrada*, variables externas al sistema y que lo afectan, (es decir , los estímulos). Entre estas variables hay algunas que se pueden manipular, en cuyo caso se llaman controles y son las variables de entrada que interesan en teoría del control. En caso de que estas variables no sean manipulables son perturbaciones al sistema.

Si por ejemplo nuestro sistema es la ciudad de México,podemos hacer una campaña de control de natalidad en cuyo caso tenemos una variable de entrada manipulable. Si, en cambio, sobreviene un cataclismo, se tiene una variable de entrada que afecta al sistema pero que nopuede controlarse (ni en general predecirse .)

2) *Variables de salida* , son las respuestas del sistema a las variables de entrada que uno puede observar. Estas variables depederán de distintas maneras del sistema y de como éste se vea afectado por las variables de entrada.

Podemos representar esta idea considerando como sistema un avión en vuelo. En este caso, podemos medir (observar) la presión atmosférica, que es una variable de salida y ésta dependerá directamente de la altitud a la que se encuentre el avión, donde la altitud es, como veremos a continuación, una variable de estado.

3) *Variables de estado*, son la variables que describen propiamente al sistema.

En general es posible obtener un modelo del sistema únicamente con variables de entrada y salida. En otras palabras, siempre es posible tener una colección de entradas con sus respectivas salidas. A este tipo de modelos se les llama modelo entrada/salida.

Por ejemplo, si se tiene que el sistema es el cuerpo humano, se puede tener cierta descripción con un modelo entrada/salida, (si se ingiere cianuro el sistema deja de funcionar), sin embargo, no es posible tener un modelo que describa exactamente a este sistema, no podemos construir un modelo matemático que muestre a cada una de las variables de estado y sus interrelaciones.

Cuando se tiene una descripción de Σ, es decir, cuando se sabe de que manera actuan las entradas en el sistema, como interactuan las distintas variables y de que manera se producen las salidas, se dice que se tiene un modelo interno. En este caso se tendrá un modelo de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u) \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

es decir, un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en la variable de estado x, donde u es la variable de entrada (el control) y y la variable de salida. Como se puede imaginar, es preferible tener una descripción de este tipo pues facilita el diseño de controles que lleven a producir salidas específicas o a que el sistema se estabilice. En este sentido modelar en control es diferente a modelar en otras ciencias. Mientras se tenga un modelo interno más sencillo más fácil será diseñar el control. Lo "sencillo" del sistema dependerá de las caracterízticas de $f(x,u)$ y de $h(x)$. Así por ejemplo, si

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

se tendrá un modelo lineal autónomo, A, B, C siendo matrices constantes, que es el tipo más sencillo de modelo interno. Si A, B y C son matrices con entradas dependientes del tiempo, se tendrá un modelo no autónomo que sigue siendo relativamente sencillo. Claramente entre más se le pida a las funciones $f(x,u)$ y $h(x)$ es más lo que se puede decir acerca del sistema. En muchos casos, aunque el mejor modelo es no lineal, la linealización alrededor de un punto de interés es suficiente para poder manipular el sistema. Por ello el estudio de los sistemas lineales es sumamente importante.

Uno de los problemas principales en teoría del control es obtener un modelo interno a partir de un modelo de entrada/salida. Este problema se conoce como el problema de *realización.*

Ejemplo : Temperatura en un edificio

Supongamos que se coloca un calefactor en un edificio que produce calor a una razón Q. Esta razón es un variable de entrada que podemos manipular, en otras palabras es nuestro control. Experimentalmente es posible medir la temperatura en cada parte del edificio, con lo que para cada entrada tenemos una salida $y(t)$ que es esta temperatura.

Estos datos obtenidos experimentalmente nos dan un modelo entrada/salida. Ahora bien, es importante saber a que razón se debe producir calor para tener en el interior del edificio una temperatura ideal. Para ello es conveniente tener una descripción interna del sistema. En este caso es posible, con base en consideraciones físicas construir un modelo sencillo, pero es necesario hacer algunas hipótesis que simplifiquen el problema. Por ejemplo, es posible considerar que la temperatura del aire circundante T_a es uniforme y constante, y que la temperatura se reparte uniformemente en el interior del edificio. Si se considera como variable de estado a la diferencia de temperaturas del interior con el exterior $x = T - T_a$, y se tiene que T_0 es la temperatura inicial, se puede obtener, debido a propiedades de la difusión del calor, el siguiente modelo.

$$\dot{x}(t) = \frac{-1}{\tau}x(t) + Ku(t)$$
$$y(t) = x(t) + T_a$$

donde τ y K son constantes conocidas,T_0 es la temperatura inicial del edificio y t es el tiempo. Obteniendo la solución de la ecuación diferencial que aparece, se tiene que

$$y(t) = e^{-t/\tau}(T_0 - T_a) + \int_0^t e^{-(t-\lambda)/\tau} Ku(\lambda)\, d\lambda + T_a$$

Sin embargo esta función de salida puede estar muy alejada de la función que se obtiene experimentalmente, pues para hacer el modelo se hicieron hipótesis que no corresponden a la realidad. Si este es el caso hay que encontrar una *realizaci ón*, que describa realmente a la función entrada/salida. Es decir un sistema que produzca una función de salida igual o muy cercana a la obtenida experimentalmente. Ahora bien, puede ser que este sistema, aunque no refleje la realidad tal cual nos sirva para diseñar un control que haga tener la temperatura deseada.

Uno de los problemas aledaños al de realización es la representación de $y(t)$ de manera conveniente. En el caso lineal autónomo, es decir, si $y(t)$ proviene de

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

se puede tener lo que se conoce como la función o matriz de transferencia del sistema. En el caso no autónomo, cuando A, B yC dependen del tiempo, se obtiene lo que se conoce como la matriz de patrón de peso del sistema. Cuando $f(x, u)$ y $h(x)$ son funciones arbitrarias, es difícil obtener una representación de $y(t)$ que pueda utilizarse en general. En algunos casos $y(t)$ puede representarse con una serie de Volterra, o sea, una expresión de la forma

$$y(t) = w_0(t) + \int_0^t w_1(t,s)u(s)\, ds + \int_0^t \int_0^{s_1} w_2(t, s_1, s_2)u(s_1)u(s_2)\, ds_1\, ds_2 + \dots$$

Cuando se tiene una función de transferencia es relativamente fácil obtener una realización. Mientras más complicada sea la expresión de $y(t)$ más difícil será y se obtendrá una realización más complicada en caso de obtenerse.

Según John Casti * el problema de realización, en especial en sistemas no lineales, es uno de los problemas menos estudiados en teoría del control y en consecuencia del que menos resultados generales se tienen. En este trabajo analizaremos únicamente este problema para sistemas lineales, autónomos y no autónomos, y para los llamados sistemas bilineales.

Otro problema fundamental en teoría del control es el problema de observabilidad. El problema consiste intuitivamente en identificar la cantidad precisa de información que se tiene acerca del estado del sistema que se puede medir en la salida.

En términos más específicos, dado el sistema

$$\dot{x} = f(x,u), \quad x(0) = x_0$$
$$y(t) = h(x)$$

y la entrada $u(.)$, hay que saber cuando el estado x_0 puede o no determinarse de manera *única* a partir de la salida $y(t)$ medida sobre cualquier intervalo de tiempo $0 \leq t \leq \tau$. Si se puede determinar se dice que x_0 es un estado *observable*.

En el caso lineal, cuando $f(x,u) = Ax + Bu$ y $h(x) = Cx$, el problema de observabilidad puede responderse fácilmente en términos de las propiedades de la matriz

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Sin embargo, el siguiente sistema escalar

$$\dot{x} = 0, x(0)0x_0$$
$$y = x^2(t)$$

muestra que ninguna observación de $y(t)$ es suficiente para determinar de manera única a x_0. Esto se ve claramente pues cuando, por ejemplo, $y(t) = 1$ x_0 puede ser 1 o -1. La estructura no lineal introduce complicaciones matemáticas escenciales en el análisis de este problema.

El punto principal que distingue a la teoría del control de la teoría de sistemas dinámicos clásica es la idea de influenciar el comportamiento del sistema por medio de entradas que están disponibles. Entonces, en lugar de tomar una posición pasiva y de contentarse con describir el movimiento de un sistema al que no se puede o debe influenciar, se adopta una posición activa donde se ve al comportamiento del sistema como modificable, sujetándose a restricciones en la manera en que se permiten las interacciones. Evidentemente esta posición activa incluye a la clásica ya que siempre es posible no hacer nada, en otras palabras, no introducir control alguno.

---

* Ver, *Non linear system theory*

Uno de los aspectos más importantes es, una vez conocida la descripción interna, con entradas pertenecientes a cierta clase, conocer el conjunto de estados alcanzables del sistema. En otras palabras, si suponemos un estado inicial x_0 fijo, deseamos saber que espacios pueden alcanzarse en un tiempo futuro aplicando una sucesión de controles admisibles. Si es posible llegar a cualquier estado en el espacio X (espacio de las variables de estado), se dice que X es *alcanzable* desde x_0.

Si tenemos que la descripción interna está dada por un sistema lineal autónomo la alcanzabilidad puede determinarse únicamente con las matrices A y B y el conjunto de controles admisibles.

Si pensamos en el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1\\ \dot{x}_2 &= x_2 + u(t)\end{aligned}$$

únicamente los estados de la forma $x_1 = 0, x_2 = \alpha, \alpha$ arbitraria, son alcanzables desde el origen para, digamos, funciones de entrada $u(t)$ continuas por pedazos para $t \geq 0$.

Algunos de los problemas que se analizan relacionados con alcanzabilidad son los siguientes:

1) como identificar las parejas de estados (x_0, x_T) que pueden unirse con una trayectoria del sistema teniendo una clase de funciones de entrada y un intervalo dado de tiempo;

2) como construir funciones de entrada que efectuen la transferencia ;

3) como caracterizar matemáticamente al conjunto de todos los estados alcanzables desde x_0.

4) como determinar el conjunto alcanzable cuando la clase de las funciones de entrada está sujeta a restricciones naturales, como que las funciones sean positivas o acotadas.

La alcanzabilidad nos da información sobre la posibilidad de manipular al sistema, pues nos dice a que estados se puede llegar partiendo de cierto estado inicial. Por esta razón el concepto de alcanzabilidad es complementario al de contolabilidad,en el cual se buscan los estados distintos de cero que pueden llevarse al origen en un intervalo de tiempo. En el caso lineal autónomo los conceptos de controlabilidad y de alcanzabilidad son equivalentes en el sentido de que un estado es controlable si es alcanzable y reciprocamente.

En general, el problema de controlabilidad es el que más se analiza pues el objetivo principal es *controlar* al sistema.

Lo ideal para manipular un sistema es tener una realización que sea a la vez controlable y observable. Ahora bien, si la realización que se tiene no cumple con esto es a veces posible, encontrar un subespacio que si lo sea.

En teoría del control, como en teoría de sistemas dinámicos también se trabaja el concepto de estabilidad (que claramente está relacionado con controlabilidad). De igual modo, una parte fundamental del control son los problemas de optimización, problemas que a partir del cálculo de variaciones dieron lugar a lo que ahora se conoce como teoría del control. En esta tesis no planteamos esas dos problemáticas por lo que no damos siquiera una descripción somera de ellas.

El tema fundamental de esta tesis es el problema de realización cuya problemática analizamos en dos casos generales de sistemas: los sistemas lineales y los bilineales. Además analizamos los problemas de controlabilidad y observabilidad en el caso lineal (auónomo y no autónomo).

La tesis está estructurada de la siguiente manera:

En la primera parte se trabaja con sistemas lineales. Al inicio de esa sección se dan algunos resultados básicos de ecuaciones diferenciales ordinarias. Después se analizan los conceptos de controlabilidad y observabilidad. Finalmente se plantea el problema de realización en dos secciones: caso autónomo y no autónomo.

En la segunda parte se trabaja con sistemas bilineales. Se desarrolla el concepto de serie de Volterra y se analiza el problema de realización. Finalmente se dan algunos resultados sobre observabilidad y alcanzabilidad pero no se demuestran. Al final del trabajo, aparece un anexo donde están recopilados algunos resultados del álgebra lineal que se utilizan a lo largo de la tesis.

PRIMERA PARTE

Caso lineal

Preliminares

En esta sección se introduce parte de la notación utilizada en este capítulo y se dan algunos resultados básicos de ecuaciones diferenciales ordinarias .

En la introducción se dieron algunos ejemplos de situaciones donde se presenta un problema de control. En esta primera parte estaremos interesados en sistemas que tengan un modelo interno lineal, es decir, cuya representación sea un sistema de ecuaciones diferenciales lineales, no homogéneas, donde, en la parte no homogénea se tenga una función lineal de u y que de manera semejante la función de salida $y(t)$ sea función lineal de x, la variable de estado.

$$\Sigma : \quad \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t) \\ y(t) = C(t)\,x(t) \qquad x(t_0) = x_0 \end{array}$$

donde x, u, y son funciones de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$,$\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^p$, respectivamente, y $A(t), B(t), C(t)$ son matrices de dimensiones $n \times n$, $n \times m$ y $p \times n$, respectivamente, y $u(t) \in \Omega$ donde Ω es el espacio de las funciones de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continuas por pedazos.

Consideremos primero un sistema lineal sin control, es decir, un sistema donde no aparece el término en $u(t)$ o bien donde $u(t) \equiv 0 \quad \forall t$. Por el momento, tampoco consideraremos la función de salida $y(t)$. Tenemos entonces un sistema de la forma:

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t), x(t_0) = x_0$$

Se sabe * que para este sistema, existe una única solución definida para todo $t \geq 0$ dada por:

$$x(t) = X(t)\,x_0$$

donde $X(t)$ es la única matriz de dimensión $n \times n$ que satisface

$$\frac{dX}{dt} = A(t)\,X(t), X(0) = I$$

y $X(t)$ es no singular (la matriz $X(t)$ se llama matriz fundamental del sistema *).

Cuando $A(t)$ es una matriz constante A

$$X(t) = exp(At)$$

Definición 1

Sea

$$\Phi(t, t_0) = X(t)\,X^{-1}(t_0)$$

* Véase, Sotomayor Jorge *Licoes de ecuacoes diferenciais ordinárias*

* Véase Sotomayor Jorge , op.cit

Entonces Φ satisface las siguientes tres propiedades:

$$a)\quad \Phi(t,t) = I_n$$
$$b)\quad \Phi(t_0,t) = \Phi^{-1}(t,t_0)$$
$$c)\quad \Phi(t_0,t_2) = \Phi(t_0,t_1)\,\Phi(t_1,t_2)$$

Entonces la solución del sistema con control

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t) \qquad x(t_0) = x_0$$

está dada por:

$$x(t) = \Phi(t,t_0)[x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)\,B(\tau)\,u(\tau)\,d\tau].$$

Lo que en el caso autónomo, es decir, cuando A y B son constantes, se reduce a

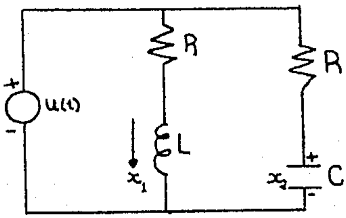
$$x(t) = \exp A(t-t_0)[x_0 + \int_{t_0}^{t} \exp[A(t_0-\tau)]\,B\,u(\tau)\,d\tau].$$

Con estos preliminares estamos ya en posición de abordar los problemas de teoría del control que nos interesan en el caso lineal.

1.2 Controlabilidad

Antes de definir formalmente lo que significa que un sistema sea controlable, ilustraremos con un ejemplo de un sistema que no es controlable.

Consideremos una red eléctrica simple



Sea x_1 el flujo magnético en el inductor y x_2 la carga eléctrica en el capacitor. Sea $u(t)$ la fuente de voltaje el tiempo t. Para tener un sistema relativamente simple, supongamos que $\frac{L}{C} = 1 = R^2$, entonces se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{-1}{L}x_1 + u(t)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{-1}{C}x_2 + u(t)$$

hagamos $\bar{x}_1 = \frac{(x_1+x_2)}{2}$ y $\bar{x}_2 = \frac{(x_1-x_2)}{2}$. Con este cambio de variable obtenemos el sistema

$$\frac{d\bar{x}_1}{dt} = \frac{-1}{L}\bar{x}_1 + u(t)$$
$$\frac{d\bar{x}_2}{dt} = \frac{-1}{L}\bar{x}_2$$

.

Tomemos como condiciones iniciales $t_0, \bar{x}_{10} = \bar{x}_1(0) = 0, \bar{x}_{20} = \bar{x}_2(0) = 0$

Por lo que se vió en los preliminares, la solución del sistema está dada por

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t/L}\bar{x}_{10} \\ e^{-t/L}\bar{x}_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-t/L} & 0 \\ 0 & e^{-t/L} \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} e^{\tau/L}u(\tau) \\ 0 \end{bmatrix} d\tau.$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t/L}\bar{x}_{10} \\ e^{-t/L}\bar{x}_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-t/L}\int_0^t e^{\tau/L}u(\tau)\,d\tau \\ 0 \end{bmatrix}$$

como $\bar{x}_{10} = \bar{x}_{20} = 0$, entonces

$$\bar{x}_1(t) = e^{-t/L}\int_0^t e^{\tau/L}u(\tau)\,d\tau$$

$$\bar{x}_2(t) = 0$$

Supongamos que por alguna razón queremos que para algún tiempo t_1 cualquiera, haya algún suministro de voltaje $u(t)$, tal que $\bar{x}_1(t_1) = 1, \bar{x}_2(t_1) = 1$. Sabemos que la solución del sistema nos da $\bar{x}_2(t) = 0 \quad \forall \quad t \geq 0$ lo que nos dice que no existe ningún tiempo finito, ni ningún control $u(t)$, que nos permitan llegar al resultado deseado. Esto se debe a que, como veremos más adelante, el sistema no es controlable.

Sea

$$\Sigma : \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) \end{aligned}$$

donde $A(t), B(t), C(t)$ son funciones continuas de dimensión $n \times n, n \times m$ y $p \times n$, respectivamente y $u(t) \in \Omega$ un espacio de funciones vectoriales permitidas,$u(t)$ medible o continua por pedazos.

Definición

Se dice que Σ es *completamente controlable* (c.c) si $\forall$ t_0, todo estado inicial $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ y dado cualquier estado final $x_f \in \mathbb{R}^n$, existe un tiempo finito $T \geq t_0$ y un control $u(t) en \Omega$ definido en $[t_0, T]$, tal que

$$x(T) = x_f$$

El término *completamente* es para señalar que es para toda pareja $x_0, x_f \in \mathbb{R}^n$.

Proposición 1

Para sistemas lineales, la definición de *completamente controlable* puede modificarse pidiendo $x_f = 0$. Es decir, Σ es completamente controlable si para todo estado inicial x_0, existe $T \geq t_0$ y $u(t)$ definido en $[t_0, T$ tal que $x(T) = 0$.

Demostración: Por la definicón de completamente controlable sabemos que si Σ es c.c. entonces, para todo x_0 existe $T \geq t_0$ y $u(t)$ tal que $x(T) = 0$.

Hay que demostrar entonces que si para todo x_0 exite $T \geq t_0$ y $u(t)$ definido en $[t_0, T]$ tal que $x(T) = 0$, entonces Σ es completamente controlable, es decir, que para todo x_0 y para todo x_f existe $\tilde{T} \geq t_0$ y $\tilde{u}(t)$ tal que $x(\tilde{T}) = x_f$

Sea $x_0 \in M$

Entonces existen t_1 y $u(t)$ tal que

$$0 = \Phi(t_1, t_0) \left[x_0 + \int_0^{t_1} \Phi(t_0, \tau) B(\tau) u(\tau)\, d\tau. \right] \tag{1}$$

Por otra parte, dado $x_f \in M$ tal que $x(t_0{}^*) = x_f$ existe $t_1{}^*$ y $\bar{u}(t)$ tal que

$$0 = \Phi(t_1{}^*, t_0{}^*) \left[x_f + \int_{t_0{}^*}^{t_1{}^*} = \Phi(t_0{}^*, \tau) B(\tau) \bar{u}(\tau)\, d\tau \right].$$

Como x_f es un punto en $x(t)$, el tiempo transcurrido de x_f a 0 es fijo, es decir, como la longitud del intervalo $[t_0{}^*, t_1{}^*]$ es fijo, una vez que para una $t_0{}^*$ se encontró $t_1{}^*$, podemos buscar $\tilde{t}_0^*$ de manera que $t_1{}^* = t_1$. Sea t_2 esta $\tilde{t}_0^*$, entonces

$$\therefore \qquad 0 = \Phi(t_1,t_2)\left[x_f + \int_{t_2}^{t_1} \Phi(t_2,\tau)B(\tau)\bar{u}(\tau)\,d\tau\right]$$

$$-\Phi(t_1,t_2)x_f = \Phi(t_1,t_2)\int_{t_2}^{t_1} \Phi(t_2,\tau)B(\tau)\bar{u}(\tau)\,d\tau$$

multiplicando por -1 obtenemos

$$\Phi(t_1,t_2)x_f = \Phi(t_1,t_2)\int_{t_1}^{t_2} \Phi(t_2,\tau)B(\tau)\bar{u}(\tau)\,d\tau \tag{2}$$

sumando (2) con (1) obtenemos

$$\Phi(t_1,t_2)x_f = \Phi(t_1,t_0)\left[x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau\right] + \Phi(t_1,t_2)\int_{t_1}^{t_2} \Phi(t_2,\tau)B(\tau)\bar{u}(\tau)\,d\tau$$

multiplicando por la izquierda por $\Phi(t_2,t_1)$

$$x_f = \Phi(t_2,t_0)x_0 + \Phi(t_2,t_0)\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t_2,\tau)B(\tau)\bar{u}(\tau)\,d\tau$$

Como $\Phi(t_2,\tau) = \Phi(t_2,t_0)\Phi(t_0,\tau)$ podemos factorizar a $\Phi(t_2,t_0)$ de la segunda integral como constante, así

$$\begin{aligned} x_f &= \Phi(t_2,t_0)\left[x_0 + \int_{t_0}^{t_2} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)\bar{u}(\tau)\,d\tau\right] \\ &= \Phi(t_2,t_0)\left[x_0 + \int_{t_0}^{t_2} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)\left(u(\tau)+\bar{u}(\tau)\right)\,d\tau\right] \end{aligned}$$

por lo tanto

$$x_f = x(t_2) \qquad \begin{aligned} \tilde{u}(t) &= u(\tau), \tau \in [t_0,t_1] \\ \tilde{u}(t) &= \bar{u}(\tau)\tau \in [t_1,t_2] \end{aligned}$$

lo que demuestra que Σ es controlable. □

TEOREMA 1

El sistema autónomo:

$$\Sigma^a : \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

es completamente controlable $\Longleftrightarrow$ la matriz de dimensión $n \times nm$ de controlabilidad

$$\mathcal{U}(t) = [\,B \quad AB \quad A^2B \quad \ldots \quad A^{n-1}B\,]$$

tiene rango n.

Demostración:

$\Rightarrow$)

Supongamos que Σ es completamente controlable y que el rango de $\mathcal{U} \leq n$. Entonces existe un vector $q \neq 0$ de dimensión n, tal que

$$qB = 0 \quad qAB = 0 \ldots qA^{n-1}B = 0$$

y supongamos sin pérdida de generalidad que $t_0 = 0$. Sustituyamos en la solución del sistema Σ^a,$x(0) = x_0, t = t_1, x(t_1) = 0$, entonces obtenemos

$$0 = \exp(At_1)\left[x_0 + \int_0^{t_1} \exp(-A\tau)Bu(\tau)\,d\tau\right]$$

Como $\exp(At_1)$ es no singular, podemos multiplicar (por la izquierda) ambos lados de la ecuación por

$$[\exp(At_1)]^{-1}$$

entonces

$$-x_0 = \int_0^{t_1} \exp(-A\tau)Bu(\tau)\,d\tau$$

Sea P el polinomio característico de A. Entonces, por el teorema de Cayley-Hamilton, $P(A) = 0$ y por lo tanto

$$A^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_iA^i = q_n(A)$$

con $q_n(x)$ un polinomio de grado $n-1$.

Así mismo,

$$\begin{aligned} A^{n+1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_iA^{i+1} &= a_{n-1}A^n + \ldots \\ &= a_{n-1}q_n(A) + \sum_{i=0}^{n-2} a_iA^{i+1} \\ &= q_{n+1}(A) \end{aligned}$$

donde $q_{n+1}(x)$ es un polinomio de grado $n-1$. En general,

$$A^{n+k} = q_{n+k}(A), \text{donde } q_{n+k} \text{es un polinomio de grado} \quad n-1$$

Sea $q_k(A) = A^k$ entonces

$$\begin{aligned} e^{-tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k A^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k q_k(A)}{k!} \end{aligned}$$

y la convergencia es uniforme en compactos de $\mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned} -x_0 &= \int_0^{t_1} e^{-\tau A} Bu(\tau)\, d\tau \\ &= \int_0^{t_1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\tau)^k}{k!} q_k(A) \right) Bu(\tau)\, d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{t_1} \frac{(-\tau)^k}{k!} q_k(A) Bu(\tau)\, d\tau \end{aligned}$$

por lo tanto

$$-qx_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{t_1} \frac{(-\tau)^k}{k!} q q_k(A) Bu(\tau)\, d\tau$$

pero como estamos suponiendo que rango de $\mathcal{U}$ es menor que n, y $q_k(A)$ es un polinomio de grado a lo más $n-1$ para toda k, se tiene que $qq_k(A)B$ es cero, por lo tanto

$$qx_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$$

Entonces $x_0 = 0$ es el único valor inicial tal que existen t_1 y $u(t)$ tales que $x(t_1) = 0$ esto es una contradicción con la hipótesis de que el sistema es controlable.Por lo tanto

$$\text{rango de} \mathcal{U} = n$$

$\Leftarrow$)

Supongamos que rango$\mathcal{U} = n$ Sea

$$M = \int_0^{t_1} \exp(-A\tau) BB^T \exp(-A^T\tau)\, d\tau$$

$$\alpha^T M \alpha = \int_0^{t_1} \Psi(\tau) \Psi^T(\tau)\, d\tau$$

$$\text{donde}\Psi(\tau) = \alpha^T \exp(-A\tau)B$$
$$\Rightarrow \quad \alpha^T M\alpha = \int \| \Psi(\tau) \|^2 d\tau \geq 0$$

Se tiene entonces que M es semidefinida positiva+, por lo que es singular si y sólo si

$$\exists\hat{\alpha} \neq 0 \text{tal que} \quad \hat{\alpha}^T M\hat{\alpha} = 0$$

Supongamos que existe $\hat{\alpha} \neq 0$ tal que $\hat{\alpha}^T M\hat{\alpha} = 0$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \| \Psi(\tau) \|^2 = 0 \\
&\Rightarrow \quad \Psi(\tau) = 0 \\
&\Rightarrow \quad \hat{\alpha}^T(I - \tau A + \frac{\tau^2}{2!}A^2 + \ldots)B = 0
\end{aligned}$$

para casi toda $t \in [0, t_1]$, en particular para $t = 0$ se tiene que $\hat{\alpha}^T B = 0$, derivando y evaluando en $t = 0$

$$\hat{\alpha}^T = 0, \ \ldots \ , \hat{\alpha}^T A^{n-1}B = 0$$
$$\Rightarrow \quad \hat{\alpha}^T \mathcal{U} = 0 \text{ pero rango } \mathcal{U} = n$$

por lo tanto $\hat{\alpha} = 0$

Definamos $u(t)$ en $[0, t_1]$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
u(t) &= -B^T \exp(-A^T\tau)M^{-1}x_0 \\
\Rightarrow \quad x(t_1) &= \exp(At_1)\left[x_0 - \int_0^{t_1} \exp(-A\tau)BB^T \exp(-A^T\tau)\, d\tau M{-}1x_0\right] \\
&= \exp(At_1)\left[x_0 - MM^{-1}x_0\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, Σ es completamente controlable y de hecho exhibimos el control. $\square$

Tenemos entonces una prueba para saber cuando un sistema autónomo es o no controlable y en caso de que lo sea tenemos una manera de construir el control adecuado. Por ejemplo, en el sistema que se dió al inicio de esta sección

$$\frac{d\bar{x}_1}{dt} = \frac{-1}{L}\bar{x}_1 + u(t)$$
$$\frac{d\bar{x}_2}{dt} = \frac{-1}{L}\bar{x}_2$$

$$A = \begin{bmatrix} -1/L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

+ En español, la palabra correcta es definitivamente semipositiva, utilizamos la expresión anterior por ser de uso generalizado.

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} 1 & -1/L \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{U}$ tiene claramente rango uno, por lo que el sistema no es completamente controlable.

Veamos ahora lo que sucede en el caso no autónomo.

TEOREMA 2

El sistema no autónomo

$$\Sigma : \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) \quad x(t_0) = x_0 \end{aligned}$$

es completamente controlable si y sólo si la matriz de controlabilidad

$$\mathcal{U}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_0, \tau)\, d\tau$$

es no singular, en cuyo caso,el control

$$\begin{aligned} &u(t) = -B^T(t)\Phi^T(t_0, t)\mathcal{U}^{-1}(t_0, t_1)\left[x_0 - \Phi(t_0, t_1)x_f\right] \\ &\quad \text{definido en} \quad t_0 \leq t \leq t_1 \\ &\quad \text{transfiere} \quad x(t_0) = x_0 \text{ a } x(t_1) = x_f \end{aligned}$$

Demostración:

$\Leftarrow$)

Si $\mathcal{U}(t_0, t_1)$ es no singular, entonces el control

$$u(t) = -B^T(t)\Phi^T(t_0, t)\mathcal{U}^{-1}(t_0, t_1)\left[x_0 - \Phi(t_0, t_1)x_f\right]$$

está definido.

Sustituyendo en la solución del sistema tenemos

$$x(t_1) = \Phi(t_1, t_0)\left[x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau)\left\langle -B^T(\tau)\Phi(t_0, \tau)\mathcal{U}^{-1}(t_0, t_1)(x_0 - \Phi(t_0, t_1)x_f\right\rangle d\tau\right]$$

$$= \Phi(t_1, t_0)\left[x_0 + \left\langle -\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)B(\tau)\Phi^T(t_0, \tau)\, d\tau\right\rangle \mathcal{U}^{-1}(t_0, t_1)\left\langle x_0 - \Phi(t_0, t_1)x_f\right\rangle\right]$$

$= \Phi(t_1, t_0)\left[\Phi(t_0, t_1)x_f\right] x(t_1) = x_f.$

$\Rightarrow$)

Sea α un vector columna de dimensión n. Como $\mathcal{U}$ es simétrica podemos construir la forma cuadrática

$$\begin{aligned}\alpha^T \mathcal{U} \alpha &= \int_{t_0}^{t_1} \Psi^T(\tau, t_0)\Psi(\tau, t_0)\, d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \|\Psi\|^2\, d\tau \geq 0 \\ &\Rightarrow \mathcal{U}(t_0, t_1) \quad \text{es semidefinida positiva}\end{aligned}$$

Supongamos que existe $\tilde{\alpha} \neq 0$ tal que

$$\tilde{\alpha}^T \mathcal{U}(t_0, t_1)\tilde{\alpha} = 0$$

esto implica que

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\tilde{\Psi}\|^2\, d\tau = 0$$

$$\text{donde} \quad \tilde{\Psi}(t_0, \tau) = \tilde{\alpha}^T \Phi(t_0, \tau) B(\tau),$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\Psi}(\tau, t_0) \equiv 0 \quad \text{para} \quad t_0 \leq \tau \leq t_1$$

pero Σ es completamente controlable, entonces existe un control $v(t)$ tal que $x(t_1) = 0$ y $x(t_0) = \tilde{\alpha}$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\alpha} = -\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau) B(\tau) v(\tau)\, d\tau$$

$$\begin{aligned}\|\tilde{\alpha}\|^2 = \tilde{\alpha}^T \tilde{\alpha} &= -\int_{t_0}^{t_1} v^T(\tau) B^T \Phi^T(t_0, \tau)\tilde{\alpha}\, d\tau \\ &= -\int_{t_0}^{t_1} v^T(\tau)\tilde{\Psi}(\tau, t_0)\, d\tau = 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\alpha} = 0$$

Esto es una contradicción pues Σ es completamente controlable y $x_0 = \tilde{\alpha} \neq 0$. Entonces $\mathcal{U}(t_0, t_1)$ es positiva definida y por tanto es no singular. □

El tema de controlabilidad es bastante extenso y se puede trabajar desde distintos puntos de vista. Se puede pedir, por ejemplo, que los controles $u(t)$ sean mayores o iguales que cero con lo que se tendría un problema de controlabilidad positiva. También, debido a que la condición de poder transferir cualquier estado inicial al origen es muy fuerte, se puede pedir que cualquier estado inicial x_0 pueda transferirse a cierto subespacio K de M en cuyo caso estaríamos pensando en controlabilidad relativa* . Sin

* Véase Casti, John, *Dynamical Systems and their Applications*

embargo, no desarrollaremos estos conceptos pues con lo que se ha expuesto, basta para analizar el problema de realización. Pasemos ahora a otro problema relacionado directamente con realización.

§1.3

Observabilidad

En muchas ocasiones se conoce la forma de un sistema Σ, se conoce la salida $y(t)$ y el control que se ha utilizado en el intervalo de tiempo de t_0 a t_1. Sin embargo, puede no conocerse el estado inicial $x(t_0)$ y de hecho el estado $x(t)$ para $t_0 \leq t \leq t_1$. El problema de controlabilidad consiste en saber cuando se puede determinar este estado de manera única. La definición formal es la siguiente.

Definición 2 Sea

$$\Sigma : \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) \end{aligned}$$

donde $A(t), B(t), C(t), \text{y} x(t), y(t), u(t)$ son como en §1.2. Se dice que Σ es *completamente observable* (c.o)si para todo t_0 y todo estado inicial $x(t_0) = x_0$ existe un tiempo finito $t_1 \geq t_0$ tal que si conocemos $u(t)$ y $y(t)$ para $t_0 \leq t \leq t_1$ es suficiente para determinar x_0 de manera única. Se puede considerar, sin pérdida de generalidad $u(t) \equiv 0$.

Un ejemplo trivial de un sistema no observable es

(1) $$\dot{x}_1 = a_1 x_1 + b_1 u$$

(2) $$\dot{x}_2 = a_2 x_2 + b_2 u$$

(3) $$y = x_1$$

De la ecuación (1) tenemos que

$$x_1 = e^{a_1 t} \int_{t_0}^{t} e^{-a_1 \tau} b_1 u(\tau)\, d\tau$$

como x_2 no aparece en la salida

$$y = x_1$$

no podemos determinar de manera alguna $x_2(t_0)$.

Veamos de que manera se puede determinar si un sistema es observable o no lo es.

TEOREMA 3

El sistema no autónomo

$$\Sigma : \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) \end{aligned}$$

es completamente observable si y sólo si la matriz de observabilidad

$$\mathcal{V}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau, t_0) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t_0)\, d\tau$$

es no singular.

Demostración:

$\Rightarrow$)

Suponiendo $u(t) \equiv 0, t_0 \leq t \leq t_1$ tenemos que

$$y(t) = C(t)\Phi(t,t_0)x_0$$

Multiplicando por la izquierda por $\Phi^T(t,t_0)C^T(t)$ e integrando tenemos que

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau,t_0)C^T(\tau)y(\tau)\, d\tau = \mathcal{V}(t_0,t_1)x_0$$

por lo que si $\mathcal{V}(t_0,t_1)$ es no singular el estado inicial está dado por

$$x_0 = \mathcal{V}^{-1}(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau,t_0)C^T(\tau)y(\tau)\, d\tau$$

$\Leftarrow$)

Supongamos que Σ es completamente observable, hay que demostrar que $\mathcal{V}(t_0,t_1)$ es no singular. Si α es un vector columna de dimensión n

$$\alpha T\mathcal{V}\alpha = \int_{t_0}^{t_1} [C(\tau)\Phi(\tau,t_0)\alpha]^T [C(\tau)\Phi(\tau,t_0)\alpha]\, d\tau \geq 0$$

por lo que $\mathcal{V}(t_0,t_1)$ es semi positiva definida.

Supongamos que existe $\tilde{\alpha} \neq 0$ tal que $\tilde{\alpha}^T\mathcal{V}\tilde{\alpha} = 0$

$$\Rightarrow \qquad C(\tau)\Phi(\tau,t_0)\tilde{\alpha} \equiv 0$$

para todo $t_0 \leq \tau \leq t_1$, esto implica que cuando $x_0 = \tilde{\alpha}$

$$y(t) = C(t)\Phi(t,t_0)\tilde{\alpha} \equiv 0$$

por lo que x_0 no puede determinarse al conocer $y(t)$ ya que $\tilde{x}_0 = 0$ y $x_0 = \tilde{\alpha}$ producen la misma función de salida. Esto es una contradicción pues se supuso el sistema completamente observable.

Por lo tanto $\mathcal{V}(t_0,t_1)$ es positiva definida y por lo tanto es no singular. $\square$

Aunque en un primer análisis no se ve conexión alguna entre observabilidad y controlabilidad, el siguiente teorema nos da una relación entre los dos conceptos que nos permitirá deducir una prueba de observabilidad para sistemas autónomos análoga a la que se dió para controlabilidad.

TEOREMA 4 (Dualidad)

El sistema

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) \end{aligned}$$

es completamente controlable si y sólo si el sistema dual

$$\Sigma_d: \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= -A^T(t)x(t) + C^T(t)u(t) \\ y(t) &= B^T(t)x(t) \end{aligned}$$

es completamente observable.

Demostración:

$\Rightarrow)$

Supongamos que Σ es completamente controlable , esto implica que $\mathcal{U}_\Sigma(t_0, t_1)$ es no singular pero

$$\mathcal{U}_\Sigma(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_0,\tau)\,d\tau \qquad (A)$$

$$\text{donde} \quad \Phi(t_0,\tau) = X(t_0)X^{-1}(t)$$

y $X(t)$ es la única solución del sistema

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) \qquad X(0) = I$$

$$\text{esto es} \qquad X(t) = \exp(\int_0^t A(\tau)\,d\tau)$$

Consideremos ahora $\Psi(t,t_0) = \widehat{X}(t)\widehat{X}^{-1}(t_0)$ donde $\widehat{X}(t)$ es la única solución del sistema

$$\dot{\widehat{X}}(t) = -A^T(t)\widehat{X}(t) \qquad \widehat{X}(0) = I$$

$$\text{esto es} \qquad \widehat{X}(t) = \exp(\int_0^t -A^T(\tau)\,d\tau)$$

esto es

$$\begin{aligned}
\Psi(t,t_0) &= \exp\left(\int_0^t -A^T(\tau)\,d\tau\right)\exp\left(\int_0^{t_0} A^T(\tau)\,d\tau\right) \\
&= \exp^T\left(\int_0^t -A(\tau)\,d\tau\right)\exp^T\left(\int_0^{t_0} A(\tau)\,d\tau\right) \\
&= \left[\exp\left(\int_0^{t_0} A(\tau)\,d\tau\right)\exp\left(\int_0^t -A(\tau)\,d\tau\right)\right]^T \\
&= \Phi^T(t_0,t)
\end{aligned}$$

Sustituyendo en (A) tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{\Sigma}(t_0,t_1) &= \int_{t_0}^{t_1} \Psi^T(\tau,t_0)B(\tau)B^T(\tau)\Psi(\tau,t_0)\,d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \Psi^T(\tau,t_0)\left[B^T(\tau)\right]^T \Psi(\tau,t_0)\,d\tau \\ &= \mathcal{V}_{\Sigma_d}(t_0,t_1)\end{aligned}$$

por lo que $\mathcal{V}_{\Sigma_d}(t_0,t_1)$ es no singular y por el teorema 3, Σ_d es completamente observable. Por la última sustitución queda demostrada la suficiencia. □

Corolario

El sistema autónomo

$$\Sigma : \quad \begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

es completamente observable si y sólo si la matriz de dimensión $np \times n$ de observabilidad

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1}\end{bmatrix}$$

tiene rango n.

Demostración:

$\Rightarrow)$

Supongamos que Σ es completamente observable , esto implica que el sistema dual

$$\Sigma_d : \quad \begin{aligned}\dot{x}(t) &= -A^T x(t) + C^T u(t)\\ y(t) &= B^T x(t)\end{aligned}$$

es completamente controlable.

Por el teorema 1, esto implica que

$$\mathcal{U}_{\Sigma_d} = [\, C^T \quad -A^T C^T \quad (-A^T)^2 C^T \quad \dots \quad (-A^T)^{n-1} C^T \,]$$

tiene rango n , pero

$$\mathcal{U}_{\Sigma_d} = \begin{bmatrix} C \\ -AC \\ (-A)^2 C^T \\ \vdots \\ (-A^T)^{n-1} C^T\end{bmatrix}^T$$

Como $\mathcal{U}_{\Sigma_d}$ tiene rango n, también $\mathcal{U}_{\Sigma_d}{}^T$ tiene rango n, eso significa que la matriz

$$\begin{bmatrix} C \\ CA^2 \\ -CA^3 \\ \vdots \\ C(-A)^{n-1} \end{bmatrix}$$

tiene rango n y en consecuencia tiene n renglones linealmente independientes digamos r_1, $r_2, \ldots,$
r_n.

Si consideramos la matriz del sistema original

$$\begin{bmatrix} C \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

y tomamos los renglones de $\mathcal{V}, \acute{r}_1, \acute{r}_2, \ldots, \acute{r}_n$ tales que $\acute{r}_i = r_i$ o $\acute{r}_i = -r_i$ obtenemos que los n renglones $\acute{r}_i$ son linealmente independientes pues los r_i lo son. Por lo tanto $\mathcal{V}$ tiene rango n.

La suficiencia se obtiene invirtiendo los pasos de la demostración.

Este corolario puede demostrarse también directamente y la demostración es análoga a la demostraci'on del teorema 1.

En el ejemplo que se dió al inicio de esta sección

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1 x_1 + b_1 u \\ \dot{x}_2 &= a_2 x_2 + b_2 u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

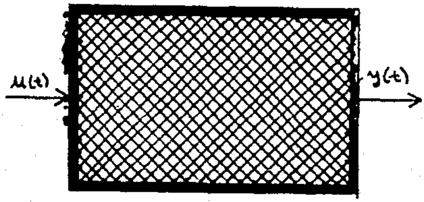
$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \qquad C = [1 \quad 0]$$

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 0 \end{bmatrix}$$ tiene rango 1, por lo tanto no es observable

En vista de que ya tenemos los resultados de controlabilidad y de observabilidad que necesitaremos podemos pasar al problema que nos interesa.

Realización: Caso autónomo

Recordemos lo que se dijo en la introducción sobre el problema de realización. A grandes rasgos, el problema de realización consiste en construir una representación interna del sistema, es decir, dar un sistema de ecuaciones diferenciales cuando únicamente se conoce el control $u(t)$ y la salida que produce este control. Podemos pensar que tenemos una caja negra



donde no sabemos que sucede, pero conocemos la salida $y(t)$ que se obtiene al aplicar un control cualquiera $u(t)$. A partir de esta información se desea obtener una representación de lo que sucede en la caja negra. Como se verá más adelante, para un mismo sistema se pueden tener distintas representaciones internas por lo que interesará construir una que de alguna manera sea la "mejor".

En primer lugar, consideraremos sistemas cuya representación interna sea posible en términos de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales autónomas. Para ello necesitaremos definir lo que se conoce como función (o matriz) de transferencia.

Definición

Sea

$$\Sigma : \quad \begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \qquad x(0) = 0 \end{array}$$

Un sistema lineal autóno de control, donde $A, B, C, x(t)$ y $y(t)$ son como en las secciones anteriores.

Consideremos la transformada de Laplace de este sistema

$$sX(s) = AX(s) + BU(s) \tag{1}$$

$$Y(s) = CX(s) \tag{2}$$

Con $X(0) = 0$. Despejando $X(s)$ de la ecuación (1) y sustituyendo en (2) obtenemos

$$Y(s) = C(sI_n - A)^{-1}BU(s)$$

A la matriz de dimensión $p \times m$, que es coeficiente de la transformada de Laplace del control, es decir, a

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B$$

se le llama función o matriz de transferencia del sistema.

Supongamos que se conoce la función de transferencia $G(s)$ de cierto sistema. El problema de realización consiste entonces en encontrar matrices A, B, C que produzcan dicha función de transferencia.

Debido a que:

$$(sI_n - A)^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(sI_n - A)}{\det(sI_n - A)}$$

se tiene que en cada entrada de la matriz $(sI_n - A)-1$ el grado del numerador es menor que el grado del denominador, se trabajará únicamente con funciones de transferencia $G(s)$ que satisfagan esto, es decir, trabajaremos con matrices cuyas entradas sean funciones racionales estrictamente propias, lo que significa que

$$\lim_{s \to \infty} G_{i,j}(s) = 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, p \quad \forall j = 1, \ldots, m.$$

Definición 4

Sea $G(s)$ una función de transferencia como las descritas arriba. Si las matrices A, B, C de dimensiones $n \times n, n \times m$ y $p \times n$ respectivamente, son tales que

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B$$

entonces a la tercia $\{A, B, C\}^*$ se le conoce como una realización de dimensión n para $G(s)$ +.

Uno de nuestros objetivos es encontrar una realización mínima (que involucre a menos variables de estado) es decir, se buscará una realización cuya dimensión n sea mínima sobre el conjunto de las dimensiones de todas las realizaciones posibles. Para poder conseguir esto, necesitamos que al menos exista una realización, lo que se verá en el siguiente teorema.

TEOREMA 5

Sea $G(s)$ una función de transferencia dada y sea $g(s) = s^q + g_1 s^{q-1} + \ldots + g_q$ el m'inimo común denominador mónico de las entradas $G_{i,j}(s)$ de la matriz.

---

* Aunque utilicemos llaves en lugar de paréntesis, estamos considerando a la tercia ordenada.

+ En muchas ocasiones, se habla de la tercia $\{A, B, C\}$ refiriéndose al sistema

$$\Sigma : \quad \begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \qquad x(0) = 0 \end{array}$$

Consideremos la descomposición de $g(s)G(s)$ dada por

$$g(s)G(s) = s^{q-1}G_0 + s^{q2}G_1 + \ldots + G_{q-1}$$

donde G_i para $i = 0, \ldots, q-1$ son matrices constantes de dimensión $p \times m$. Entonces se tiene la siguiente realización:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_m & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & I_m & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & I_m \\ -g_qI_m & -g_{q-1}I_m & -g_{q-2}I_m & \ldots & \ldots & -g_1I_m \end{pmatrix}$$

es decir, A es el producto de Kronecker de la matriz compañera del polinomio $g(s)$ con I_m.

$$B = \left.\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix}\right\}\text{q bloques (es decir } q-1 \text{ matrices 0 de dim } m \times m)$$

y $\quad C = [\, G_{q-1} \quad G_{q-2} \quad \ldots \quad G_0 \,]$

y la tercia $\{A, B, C\}$ es completamente controlable.

Antes de pasar a la demostración analizaremos un ejemplo sencillo para ver de manera más clara como se manipulan estas matrices.

Ejemplo

Sea

$$G(s) = \frac{1}{g(s)} \begin{bmatrix} s^2+6 & s^2+s+4 \\ 2s^2-7s-2 & s^2-5s-2 \end{bmatrix}$$

$$\text{con} \quad g(s) = s^3 + 2s^2 - s - 2$$

$$\text{entonces} \quad g(s)G(s) = \begin{bmatrix} s^2+6 & s^2+s+4 \\ 2s^2-7s-2 & s^2-5s-2 \end{bmatrix}$$

$$= s^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Entonces una realización es :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -7 & -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Demostración:

Sea F la matriz compañera de $g(s)$

$$\Rightarrow \qquad A = F \otimes I_m, \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\left[sI_{mq} - A\right]^{-1} &= \left[sI_{mq} - F \otimes I_m\right]^{-1} \\
&= \left[(sI_q - F) \otimes I_m\right]^{-1} \\
&= (sI_q - F)^{-1} \otimes I_m \\
&= \frac{\operatorname{adj}(sI_q - F)}{g(s)} \otimes I_m
\end{aligned}$$

$B = e_q \otimes I_m$ donde e_q es la última columna de I_q.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad (sI_{mq} - A)^{-1} &= \left[\frac{\operatorname{adj}(sI_q - F)}{g(s)} \otimes I_m\right] \quad \left[e_q \otimes I_m\right] \\
&= \operatorname{adj}(sI_q - F)e_q \otimes \frac{I_m}{g(s)} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \\ \vdots \\ s^{q-1} \end{bmatrix} \otimes Im/g(s)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
C(sI - A)^{-1}B &= \begin{bmatrix} G_{q-1} & G_{q-2} & \dots & G_0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} I_m \\ sI_m \\ \vdots \\ s^{q-1}I_m \end{bmatrix} 1/g(s) \\
&= G(s)
\end{aligned}$$

Es completamente controlable ya que

$$\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{mq-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & I_m & X \\ 0 & 0 & 0 & \dots & X & X \\ \vdots & \vdots & \vdots & & X & X \\ & & I_m & & X & X \\ & I_m & X & & X & X \\ Im & X & X & \dots & X & X \end{bmatrix}$$

donde X denota términos distintos de cero. Por esta razón tiene rango mq que es la dimensión de A. □

Como ya dijimos anteriormente, para una función de transferencia dada podemos tener varias realizaciones, algunas de las cuales pueden tener la misma dimensión. En el caso de realizaciones de la misma dimensión se puede decir que determinan sistemas que son "esencialmente el mismo". Este "esencialmente el mismo" se especifica en la siguiente definición.

Definición 5

Sean

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

y

$$\hat{\Sigma}: \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= \hat{A}x(t) + \hat{B}u(t) \\ y(t) &= \hat{C}x(t) \end{aligned}$$

Σ y $\hat{\Sigma}$ son algebraicamente equivalentes si existe una matriz P no singular, tal que

$$\hat{A} = PAP^{-1} \quad \hat{B} = PB \quad \hat{C} = CP^{-1}$$

Esto significa que se está realizando un cambio de variable $\hat{x} = Px$.

Observación: $\dim A = \dim \hat{A} = n$

Como veremos en el siguiente teorema, si dos sistemas son algebraicamente equivalentes, entonces tienen las mismas características en cuanto a controlabilidad y a observabilidad.

TEOREMA 6

Si $\{A, B, C\}$ representa un sistema completamente controlable [completamente observable] y $\{\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}\}$ es un sistema algebraicamente equivalente al primero, entonces $\{\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}\}$ es completamente controlable [completamente observable].

Demostraremos este teorema únicamente para sistemas controlables. La demostración en el caso de sistemas completamente observables se sigue por dualidad.

Demostración:

Supongamos que $\{A, B, C\}$ y $\{\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}\}$ son algebraicamente equivalentes y que $\{A, B, C\}$ es completamente controlable. Como son algebraicamente equivalentes existe una matriz P no singular tal que

$$\hat{A} = PAP^{-1} \quad \hat{B} = PB \quad \hat{C} = CP^{-1}$$

Consideremos $\hat{\mathcal{U}}$ la matriz de controlabilidad de $\{\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}\}$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{U}} &= [\hat{B} \quad \hat{A}\hat{B} \quad \hat{A}^2\hat{B} \quad \ldots \quad \hat{A}^{n-1}\hat{B}] \\ &= [PB \quad PAP^{-1}PB \quad PA^2P^{-1}PB \quad \ldots \quad PA^{n-1}P^{-1}PB] \\ &= [PB \quad PAB \quad PA^2B \quad \ldots \quad PA^{n-1}B] \\ &= P[B \quad AB \quad A^2B \quad \ldots \quad A^{n-1}B] \\ &= P\mathcal{U} \quad \text{donde } \mathcal{U} \text{ es la matriz de controlabilidad del sistema} \quad \{A, B, C\} \end{aligned}$$

Como P es no singular:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rango}\hat{\mathcal{U}} = \operatorname{rango} P\mathcal{U} = \operatorname{rango}\mathcal{U}\\
&\text{pero como} \quad \{A,B,C\} \quad \text{es completamente controlable}\\
&\operatorname{rango}\mathcal{U} = n\\
&\Rightarrow \operatorname{rango}\hat{\mathcal{U}} = n\\
&\Rightarrow \{\hat{A},\hat{B},\hat{C}\} \quad \text{es completamente controlable}
\end{aligned}$$

□

Ahora bien, ya vimos que si dos sistemas son algebraicamente equivalentes su comportamiento en cuanto a controlabilidad y a observabilidad es el mismo, pero todavía no conocemos la relación que tienen sus respectivas funciones de transferencia. En el siguiente teorema se tiene un resultado en ese sentido.

TEOREMA 7

Si dos sistemas son algebraicamente equivalentes su función de transferencia es la misma, es decir,

$$C(sI_n - A)^{-1}B = \hat{C}(sI_n - \hat{A})^{-1}\hat{B}$$

en donde $\{A,B,C\}$ y $\{\hat{A},\hat{B},\hat{C}\}$ son como en la definición 5.

Demostración:

Sean $\{A,B,C\}$ y $\{\hat{A},\hat{B},\hat{C}\}$ algebraicamente equivalentes. Entonces existe P una matriz no singular tal que

$$\hat{A} = PAP^{-1} \quad \hat{B} = PB \quad \hat{C} = CP^{-1}$$

en consecuencia

$$\begin{aligned}
\hat{C}(sI_n - \hat{A})^{-1}\hat{B} &= CP^{-1}(sI_n - PAP^{-1})^{-1}PB\\
&= CP^{-1}\left[P(sI_n - A)P^{-1}\right]^{-1}PB\\
&= CP^{-1}\left[(sI_n - A)P^{-1}\right]^{-1}P^{-1}PB\\
&= CP^{-1}P(sI_n - A)^{-1}B\\
&= C(sI_n - A)^{-1}B
\end{aligned}$$

por lo que su función de transferencia es idéntica

□

Por los resultados anteriores se ve que una matriz de transferencia $G(s)$ cuyas entradas son funciones racionales estrictamente propias, tiene al menos una realización y las realizaciones algebraicamente equivalentes a ésta. Veremos ahora un resultado que caracteriza a las realizaciones mínimas y en cuya demostración se da una construcción de ellas.

TEOREMA 8

Una realización $\{A, B, C,\}$ de una función de transferencia $G(s)$ es mínima si y sólo si es completamente controlable y completamente observable.

Demostración:

$\Leftarrow$)

Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$, respectivamente, las matrices de controlabilidad y de observabilidad del sistema. Debemos demostrar que si ambas tienen rango n (la dimensión de A), entonces no hay ninguna realización de dimensión menor que n.

Supongamos que existe una realización $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}\}$ de G(s) con dim$\tilde{A} = \tilde{n} \leq n$. Como

$$C(sI_n - A)^{-1}B = \tilde{C}(sI_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}$$

la transformada inversa de Laplace es igual. Es decir

$$C\exp(At)B = \tilde{C}\exp(\tilde{A}t)\tilde{B}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad & CB + CAtB + \frac{C(At)^2B}{2!} + \frac{C(At)^3B}{3!} + \dots \\ & = \tilde{C}\tilde{B} + \tilde{C}\tilde{A}t\tilde{B} + \frac{\tilde{C}(\tilde{A}t)^2\tilde{B}}{2!} + \frac{\tilde{C}(\tilde{A}t)^3\tilde{B}}{3!} + \dots \end{aligned}$$

como se tiene la igualdad para toda t, en particular para $t = 0$

$$\Rightarrow \qquad CB = \tilde{C}\tilde{B}$$

Derivando de ambos lados de la igualdad y evaluando en $t = 0$, tenemos que

$$CAB = \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B}$$

si volvemos a derivar y evaluamos en $t = 0$ obtenemos

$$CA^2B = \tilde{C}\tilde{A}^2\tilde{B}$$

repitiendo este procedimiento se obtiene

(1) $$CA^iB = \tilde{C}\tilde{A}^i\tilde{B} \quad \text{para} \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Consideremos el producto

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}\mathcal{U} &= \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] \\
&= \begin{bmatrix} CB & CAB & \dots & CA^{n-1}B \\ CAB & CA^2 & \dots & CA^nB \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{n-1}B & CA^nB & \dots & CA^{2n-2}B \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

por(1)

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \tilde{C}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B} & \dots & \tilde{C}\tilde{A}^{n-1}\tilde{B} \\ \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}^2 & \dots & \tilde{C}\tilde{A}^n\tilde{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}^n\tilde{B} & \dots & \tilde{C}\tilde{A}^{2n-2}\tilde{B} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \tilde{C}\tilde{A}^2 \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1} \end{bmatrix} [\tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B} \quad \dots \quad \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}] \\
&= \tilde{\mathcal{V}}\tilde{\mathcal{U}}
\end{aligned}
$$

Como $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ tienen rango $n, \mathcal{V}\mathcal{U}$ tiene rango n por lo que $\tilde{\mathcal{V}}\tilde{\mathcal{U}}$ también.

Las dimensiones de $\tilde{\mathcal{V}}$ y $\tilde{\mathcal{U}}$ son, respectivamente, $\tilde{p}n \times \tilde{n}$ y $\tilde{n} \times \tilde{m}n$, por ello, el rango de $\tilde{\mathcal{V}}\tilde{\mathcal{U}}$ no puede ser mayor que $\tilde{n}$ esto implica que $\tilde{n} \geq n$. Contradicción.Entonces la realización dada es mínima.

$\Rightarrow)$

Mostraremos que si $\{A, B, C\}$ no es completamente controlable entonces existe una realización de $G(s)$ de dimensión menor que n. La parte correspondiente a observabilidad se sigue por dualidad.

Supongamos que $\{A, B, C,\}$ no es controlable, entonces rango$\mathcal{U} = n_1 \leq n$, donde $\mathcal{U}$ es la matriz de controlabilidad del sistema. Consideremos n_1 columnas de $\mathcal{U}$ linealmente independientes, digamos $U_1, U_2, \dots, U_{n_1}$.

Como rango$\mathcal{U} = n_1$ cualquier otra columna de $\mathcal{U}$ se puede expresar como combinación lineal de elementos en $\mathcal{B}_{\mathcal{U}} = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$, es decir, estas columnas forman una base para $\mathcal{U}$.

Consideremos la transformación $\tilde{x} = Px$ donde P es la matriz de dimensión $n \times n$ definida por

$$P^{-1} = [U_1 \quad U_2 \quad \dots \quad U_{n+1} \quad \dots \quad U_n]$$

donde las columnas $U_{n+1}, \dots, U_n$ se eligen de manera que la matriz P sea no singular.

Consideremos la matriz

$$A\mathcal{U} = [AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^nB]$$

Como las primeras columnas son columnas de $\mathcal{U}$ entonces los vectores Au_i, para $i = 1$, $2, \ldots, n_1$,también se pueden expresar en términos de la misma base $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$.

Multipliquemos P^{-1} por la izquierda por P

$$\Rightarrow I_n = [\,PU_1 \quad PU_2 \quad \ldots \quad PU_{n+1} \quad \ldots \quad PU_n\,]$$

es decir, PU_i es la i-ésima columna de I_n.

Sea

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= PAP^{-1}\\ &= P\,[\,AU_1 \quad AU_2 \quad \ldots \quad AU_{n+1} \quad \ldots \quad AU_n\,]\end{aligned}$$

Como $AU_i; i = 1, \ldots, n_1$ se puede expresar como combinación linealde la base $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$ entonces esto, junto con la propiedad de que PU_i es la i-ésima columna de I_n, nos da que

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}$$

donde A_1 es una matriz de dimensión $n_1 \times n_1$.

Como las columnas de B son culumnas de $\mathcal{U}$, se pueden expresar como combinación lineal de $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$, eso nos da

$$\tilde{B} = PB = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde B_1 es vuna matriz de dimensión $n_1 \times m$.

Considerando

$$\tilde{C} = CP^{-1} = [\,C_1 \quad C_2\,]$$

donde C_1 es una matriz de dimensión $p \times n_1$, tenemos, por el teorema 7, que

$$\begin{aligned}G(s) &= \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}\\ &= [\,C_1 \quad C_2\,]\begin{bmatrix} (sI_{n_1} - A_1)^{-1} & -A_2 \\ 0 & sI_{(n-n_1)} - A_3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}\\ &= [\,C_1 \quad C_2\,]\begin{bmatrix} (sI_{n_1} - A_1)^{-1} & (sI - A_1)^{-1}A_2(sI - A_3)^{-1} \\ 0 & (sI_{(n-n_1)} - A_3)^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}\\ &= C_1(sI_{n_1} - A_1)^{-1}B_1\end{aligned}$$

esto implica que $\{A_1, B_1, C_1\}$ es una realización de $G(s)$ de dimensión menor que n; contradiciendo el hecho de que $\{A, B, C\}$ sea mínima. Por lo tanto, $\{A, B, C,\}$ es completamente controlable. □

En esta demostración se exhibe una manera de construir una realización completamente controlable. Veamos como hacerlo en un ejemplo concreto.

Ejemplo

Sea

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} x$$

Una realización obtenida a partir de cierta función de transferencia.

La matrix de controlabilidad del sistema es

$$[B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 18 \\ 1 & 3 & 9 \\ -1 & -3 & -9 \end{bmatrix}$$

esta matriz tiene rango 1, (la segunda y tercera columnas son múltiplo de la primera).

Tomemos pues la primera columna y construyamos P^{-1}

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

las dos últimas columnas las seleccionamos de manera que P^{-1} sea no singular.

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & -7/2 & -11/2 \\ 0 & 5/6 & 21/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = PB = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = CP^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix} = [C_1 \quad C_2]$$

Entonces una realización controlable de la función de transferencia dada por las matrices originales es

$$A_1 = 6 \qquad B_1 = 1 \qquad C - {}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

es decir, obtenemos el sistema

$$\dot{x} = 6x + u$$
$$y_1 = 3x$$
$$y_2 = 5x$$

Ya vimos que cuando un sistema no es controlable es posible construir un sistema controlable, que tiene la misma función de transferencia que el original, a partir de cierta equivalencia algebraica. De manera semejante, considerando los reglones linealmente independientes de la matriz de observabilidad, $\mathcal{V}$, es posible contruir una matriz T no singular tal que un sistema no observable $\{A, B, C\}$ sea algebraicamente equivalente al sistema $\{\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}\}$ donde

$$\hat{A} = TAT^{-1}, \quad \hat{B} = TB, \quad \hat{C} = CT^{-1}$$

en la que

$$\{\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}\} = \left\{ \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

y $\{A_1, B_1, C_1\}$ es una realización observable del sistema original.*

En el siguiente teorema se verá la construcción de una realización mínima, es decir, una realización completamente observable y completamente controlable.

TEOREMA 9

Si una realización $\{A, B, C\}$ de dimensión n, es tal que rango $\mathcal{V}\mathcal{U} = q \leq n$, entonces $\{A, B, C\}$ es algebraicamente equivalente a la realización $\{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}\}$ donde:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & C_{21} \end{bmatrix}$$

y $\Sigma_q = \{A_{11}, B_{11}, C_{11}\}$ es una realización de dimensión q que es controlable y observable.

Demostración:

Supongamos que rango $\mathcal{V}\mathcal{U} = q \leq n$. Si el sistema no es completamente controlable, podemos encontrar, por la demostración del teorema 8, un sistema $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}\}$ algebraicamente equivalente a $\{A, B, C\}$ con

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = PB = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{C} = CP^{-1} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}$$

y $\{A_1, B_1, C_1\}$ una realización de dimensión $\tilde{q} = \text{rango}\mathcal{U} \leq n$ completamente controlable.

Si $\{A, B, C\}$ es completamente controlable, es decir $\tilde{q} = n$ nos quedamos con el sistema original, con lo que tendríamos

$$\tilde{A} = A = A_1, \qquad \tilde{B} = B = B_1, \qquad \tilde{C} = C = C_1$$

---

*Cuando se tiene un sistema dado, es decir, cuando se conoce el comportamiento real de un sistema, no se obtiene una representación del mismo sistema, donde una representación es observable y la otra no, simplemente se obtiene la representación interna de un sistema que tiene *la misma función de transferencia* que el sistema original. Esto quiere decir que no se puede hacer que un sistema no observable sea observable. En cierta forma, lo que se hace es sustraer la parte observable del sistema original. Lo mismo sucede en el caso de controlabilidad.

Consideremos ahora el sistema $\{A_1, B_1, C_1\}$ de dimensión $\bar{q}$ que ya es completamente controlable. Si no es completamente observable, vimos que es posible construir una realización $\{\hat{A}_1, \hat{B}_1, \hat{C}_1\}$ algebraicamente equivalente a $\{A_1, B_1, C_1\}$ tal que

$$\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad \hat{B}_1 = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_2 \end{bmatrix} \quad \hat{C}_1 = [\, C_{11} \quad 0 \,]$$

donde $\{A_{11}, B_{11}, C_{11}\}$ es completamente controlable y completamente observable (pues proviene de un sistema completamente controlable) y su dimensión es $\bar{q}$.

Entonces

$$\hat{A}_1 = PA_1P^{-1} \qquad \hat{B}_1 = PB_1 \qquad \hat{C}_1 = C_1P^{-1}$$

Añadiendo renglones a P hasta alcanzar la dimensión de $\hat{A}$ se puede obtener una matriz $\tilde{P}$ no singular con la que se tiene lo siguiente

$$\bar{A} = \tilde{P}\tilde{A}\tilde{P}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \qquad \bar{B} = \tilde{P}\tilde{B} = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = \tilde{C}\tilde{P}^{-1} = [\, C_{11} \quad 0 \quad C_{21} \,]$$

Como $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}\}$ es algebricamente equivalente a $\{A, B, C\}$ y $\{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}\}$ es algebraicamente equivalente a $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}\}$ entonces $\{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}\}$ es algebraicamente equivalente a $\{A, B, C\}$. Tenemos pues, que existe una matriz T no singular tal que

$$\bar{A} = TAT^{-1} \qquad \bar{B} = TB \qquad \bar{C} = CT^{-1}$$

y $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ son matrices de la forma enunciada en el teorema. Unicamente nos falta demostrar que la dimensión de la realización $\{A_{11}, B_{11}, C_{11}$ es q, es decir, que $\bar{q} = q$ Para ver esto analicemos el producto $\mathcal{VU}$ correspondiente a la realización original.

$$\mathcal{VU} = \begin{bmatrix} CB & CAB & \dots & CA^{n-1}B \\ CAB & CA^2 & \dots & CA^nB \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{n-1} & CA^nB & \dots & CA^{2n-2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} CT^{-1}TB & CT^{-1}TAT^{-1}TB & \dots & CT^{-1}(TAT^{-1})^{n-1}TB \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CT^{-1}(TAT^{-1})^{n-1}B & \dots & \dots & CT^{-1}(TAT^{-1})^{2n-2}TB \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|cc} C_{11}B_{11} & C_{11}A_{11}B_{11} & \dots & C_{11}A_{11}{}^{\bar{q}-1}B_{11} & \dots & C_{11}A_{11}{}^{n-1}B_{11} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{11}A_{11}{}^{\bar{q}-1}B_{11} & \dots & \dots & C_{11}A_{11}{}^{2\bar{q}-2}B_{11} & \vdots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{11}A_{11}{}^{n-1}B_{11} & \dots & \dots & \dots & \dots & C_{11}A_{11}{}^{2n-2}B_{11} \end{array}\right]$$

Este producto contiene como submatriz a la matriz producto

$$\mathcal{V}_{11}^{q}\mathcal{U}_{11}^{q}$$

donde $\mathcal{V}_{11}^{\bar{q}}$ y $\mathcal{U}_{11}^{\bar{q}}$ son, respectivamente, la matriz de observabilidad y de controlabilidad del sistema $\{A_{11}, B_{11}, C_{11}\}$.

Como esta realización es completamente controlable y completamente observable, $\mathcal{V}_{11}^{\bar{q}}\mathcal{U}_{11}^{\bar{q}}$ tiene rango $\bar{q}$, esto implica que $\mathcal{V}\mathcal{U}$ tiene rango por lo menos igual a $\bar{q}$, es decir $\bar{q} \leq q$.

Por otro lado,

$$\mathcal{V}\mathcal{U} = \mathcal{V}_{11}^{n}\mathcal{U}_{11}^{n}$$

donde $\mathcal{V}_{11}^{n}$ es la matriz de observabilidad de grado n del sistema $\{A_{11}, B_{11}, C_{11}\}$, es decir donde

$$\mathcal{V}_{11}^{n} = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{11}A_{11} \\ \vdots \\ C_{11}A_{11}^{\bar{q}-1} \\ C_{11}A_{11}^{\bar{q}} \\ \vdots \\ C_{11}A_{11}^{n-1} \end{bmatrix}$$

cuya dimensión es $pn \times \bar{q}$, es decir, su rango es a lo más igual a $\bar{q}$, sucediendo lo mismo para la matriz $\mathcal{U}_{11}^{n}$ de controlabilidad de grado n, con lo cual el producto

$$\mathcal{V}_{11}^{n}\mathcal{U}_{11}^{n}$$

tiene a lo más rango $\bar{q}$, esto implica que

$$q \leq \bar{q} \quad \text{por lo tanto} \quad \bar{q} = q$$

$\square$

1.5 Realización: Caso no autónomo

Consideremos ahora el caso más general de sistemas lineales. Nos abocaremos entoncesa sistemas cuya representación interna sea posible en términos de un sistema de ecuaciones diferenciales no autónomas. En este caso, no tendremos una matriz de transferencia, sino lo que se conoce como matriz de patrón de peso del sistema. Definamos pues este concepto.

Definición

Sea

$$\Sigma: \quad \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) \quad x(t_0) = 0 \end{array}$$

Un sistema lineal no autónomo, con $A(t), B(t), C(t)$ matrices de dimensiones $n \times n$, $n \times m, p \times n$, respectivamente, cuyas entradas sean funciones reales, de cuadrado integrable sobre cualquier intervalo finito de tiempo.

Como se vió en los preliminares

$$\begin{aligned} y(t) &= C(t) \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t} K(t,\tau)u(\tau)\,d\tau \end{aligned}$$

a la matriz $K(t,\tau) = C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau)$ se le llama (la matriz de) patrón de peso del sistema.

Se dice que una matriz de funciones reales de dimensión $p \times m$ es realizable si representa el patrón de peso de algún sistema lineal con m entradas y p salidas.

Entonces, el problema de realización consiste ahora en que, dada una matriz de funciones reales $K(t,\tau)$ se quiere encontrar una tercia $\{A(t), B(t), C(t)\}$ tal que ésta tenga como patrón de peso a $K(t,\tau)$.

La relación con el caso autónomo está dada por la transformada de Laplace de

$$\Phi(t,\tau) = \exp(A(t-\tau))$$

en cuyo caso

$$K(t,\tau) = C \exp At \exp(-A\tau)B$$

Tenemos que para el caso en que A, B, C son matrices constantes, $K(t,\tau)$ puede expresarse como el producto de una matriz en función de $t, C \exp At$, por una matriz en función de $\tau, \exp(-A\tau)B$.Siguiendo esta idea se obtiene el siguiente teorema:

TEOREMA 10

Una matriz de funciones reales $K(t,\tau)$ es realizable, si y sólo si, para toda t y toda τ

$$K(t,\tau) = \Psi(t)\beta(\tau)$$

donde $\Psi(t)$ y $\beta(t)$ son, respectivamente, matrices cuyas entradas son funciones de t, de cuadrado integrable sobre cualquier intervalo finito,y son de dimensión $p \times n$ y $n \times m$.

Demostración:

$\Rightarrow$)

Si $K(t,\tau)$ es realizable, entonces existen matrices $A(t), B(t), C(t)$ tales que $K(t,\tau)$ es el patrón de peso determinado por esa tercia, entonces

$$K(t,\tau) = C(t)X(t)X^{-1}(\tau)B(\tau)$$

donde $X(t)$ es la matriz definida en los preliminares.

$$\text{por lo tanto} \quad K(t,\tau) = \Psi(t)\beta(\tau)$$

donde

$$\Psi(t) = C(t)X(t)$$
$$\text{y } \beta(\tau) = X^{-1}(\tau)\beta(\tau)$$

Si

$$K(t,\tau) = \Psi(t)\beta(\tau)$$

entonces la tercia $\{0_n, \Psi(t), \beta(t)\}$ es una realización de $K(t,\tau)$ donde 0_n es la matriz nula de dimensión $n \times n$, con lo que $\Psi(t,\tau) = I_n$. □

Este teorema se aplica desde luego a sistemas que tienen una realización con matrices constantes, sin embargo, como se verá en el siguiente ejemplo, la construcción propuesta en la demostración del teorema es a veces demasiado compleja pues genera un sistema no autónomo y puede no ser muy "adecuado".

Ejemplo

Sea

$$K(t,\tau) = e^{-t}e^{\tau}$$

entonces, siguiendo la demostración del teorema, $\{0, e^t, e^{-t}\}$ es una realización que genera el siguiente sistema:

$$\dot{x} = e^t u(t)$$
$$y(t) = e^{-t}x(t)$$

Ahora bien, para u constante, $\dot{x}(t)$ es no acotada, por lo que se pueden tener ciertos problemas, pues, los sistemas biológicos, físicos, etc, son acotados. Una realización de $K(t,\tau)$ que nos puede ser más útil es:

$$\Sigma = \{-1,1,1\}$$

es decir,

$$\dot{x} = -x(t) + u(t)$$
$$y = x(t)$$

Como en el caso autónomo, buscaremos de alguna manera realizaciones mínimas, para ello necesitamos definir lo que significa que una descomposición de un patrón de peso esté reducida globalmente.

Definición

Sea $K(t,\tau)$ una matriz de dimensión $p\times m$ realizable. Por el teorema 10 tenemos que

$$(A) \qquad K(t,\tau) = \Psi(t)\beta(\tau), \quad -\infty \leq t,\tau \leq \infty$$

Se dice que la descomposición (A) está *reducida globalmente* si las columnas de $\Psi(t)$ y los renglones de $\beta(\tau)$ son linealmente independientes para casi toda $t \in \mathbb{R}$. Dicho de otra manera, (A) está reducida globalmente si para toda elección de vectores constantes no nulos, c y b

$$\Psi(t)c \neq 0_p, \text{ en un cjto de medida positiva}$$

$b^T\beta(t) \neq 0_m$, en un cjto de medida positiva

TEOREMA 11

Toda matriz $K(t,\tau)$ posee una descomposición reducida globalmente.

Demostración:

Supongamos que (A) no está reducida globalmente. Entonces, las columnas de $\Psi(t)$ o los reglones de $\beta(t)$ son linealmente dependientes sobre $-\infty \leq t \leq \infty$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que las n columnas de $\Psi(t)$: $\Psi_1(t)$, $\Psi_2(t),\ldots,\Psi_n(t)$ son linealmente dependientes. Por definición, existe un vector c de dimensión n tal que, casi dondequiera,

$$(B) \qquad \Psi(t)c = 0_p, \quad -\infty \leq t \leq \infty$$

Denotemos el número de vectores linealmente independientes c que satisfagan (B) por $n-k_0$ e incorporemos estos $n-k_0$ vectores, $c_1, c_2, \ldots, c_{n-k_0}$ como las últimas $n-k_0$ columnas de una matriz constante de dimensión $n \times n$ no singular:

$$C = [C_a | c_1 \quad c_2 \quad \ldots \quad c_{n-k_0}]$$

Claramente,

$$\Psi(t)\beta(\tau) = \Psi(t)CC^{-1}\beta(\tau)$$

como

$$\Psi(t)C = [\Psi(t)C_a \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0]$$

donde $\Psi(t)C_a$ es una matriz de dimensión $p \times k_0$ y las $n - k_0$ columnas restantes son la columna $\bar{0}$, se tiene que

$$\Psi(t)CC^{-1}\beta(\tau) = \Psi(t)C_a\hat{\beta}(\tau)$$

donde $\hat{\beta}(\tau)$ representa los primeros k renglones de $C^{-1}\beta(\tau)$.

Haciendo $\hat{\Psi}(t) = \Psi(t)C_a$ tenemos que

$$K(t,\tau) = \hat{\Psi}(t)\hat{\beta}(\tau)$$

Las k_0 columnas de $\hat{\Psi}(t)$ son linealmente independientes sobre $-\infty \leq t \leq \infty$, (por construcción). Ahora bien, si los renglones de $\hat{\beta}(\tau)$ no son linealmente independientes sobre $-\infty \leq t \leq \infty$, se repite el proceso ahora para $\hat{\beta}(\tau)$ y se obtiene finalmente

$$K(t,\tau) = \Psi_0(t)\beta_0(\tau)$$

con independencia lineal sobre $-\infty \leq t \leq \infty$, es decir las n_0 columnas de $\Psi_0(t)$ y los n_0 renglones de β_0 linealmente independientes sobre $-\infty \leq t \leq \infty$, lo que concluye la demostración. □

Ahora bien, ya vimos que dada una descomposición de $K(t,\tau) = \Psi(t)\beta(\tau)$, tenemos que la tercia $\{0_n, \beta(t), \Psi(t)\}$ es una realización de la matriz de patrón de peso. Por el teorema anterior, tenemos que cualquier matriz de patrón de peso realizable tiene una descomposición reducida globalmente. Es decir, tenemos de hecho una realización de grado menor dada por

$$K(t,\tau) = \Psi_0(t)\beta_0(\tau) \rightarrow \{0_{n_0}, \beta_0, \Psi_0\}$$

El siguiente teorema nos caracteriza a las realizaciones "generadas" por descomposiciones reducidas globalmente.

TEOREMA 12

Sea $K(t,\tau) = \Psi_0(t)\beta_0(\tau)$ una descomposición reducida globalmente, siendo n_0 el número de columnas de Ψ_0 entonces para alguna elección de intervalos finitos Δ_1 y Δ_2 las dos matrices de dimensión $n_0 \times n_0$

$$(C) \qquad M_0 = \int_{\Delta_1} \Psi_0^T(t)\Psi_0(t)\,dt$$

y

$$(D) \qquad N_0 = \int_{\Delta_2} \beta_0(t)\beta_0^T(t)\,dt$$

son no singulares; es decir,

$$\det M_0 \neq 0$$
$$\det N_0 \neq 0.$$

Antes de pasar a la demostración recordemos lo que sigmnifica esto.Por lo que se vió en los teoremas 2 y 3, la realización dada por $\{0_{n_0}, \beta_0, \Psi_0\}$ es completamente controlable y completamente observable.

Demostración:

En primer lugar, debe quedar claro que el que $\det M_0 \neq 0$ y $\det N_0 \neq 0$ es equivalente a afirmar que existen dos intervalos finitos Δ_1 y Δ_2 sobre los cuales, respectivamente, las columnas de $\Psi_0(t)$ y los renglones de $\beta_0(t)$ son linealmente independientes, pues en caso contrario, existiría, por ejemplo, un vector r de dimensión n_0 tal que $\Psi_0(t)r = 0$ para casi toda t en los reales, es decir $M_0 r = 0$ para todo intervalo finito Δ. Así pues, demostraremos por contradicción, que las n_0 columnas de $\Psi_0(t)$ y los n_0 renglones de $\beta_0(t)$ son linealmente independientes sobre algún intervalo (Δ_1 para Ψ_0 y Δ_2 para β_0)

Supongamos que las columnas de $\Psi_0(t)$ son linealmente dependientes sobre *todo* intervalo finito Δ. Entonces, para todo Δ existe un vector de dimensión $n_0$unitario tal que casi donde quiera

$$\Psi_0(t)c = 0_p, \quad t \in \Delta$$

Consideremos la sucesión de intervalos

$$\Delta_k = [-k \leq t \leq k], k = 1, 2, \ldots$$

y sean $c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots$ los vectores unitarios de dimensión n_0 asociados a esos intervalos , es decir, excepto posiblemente para un conjunto de medida cero

$$\Psi_0(t)c_k = 0_p \quad t \in \Delta_k;$$
$$c_k^T c_k = 1 \quad k = 1, 2, \ldots$$

Ahora bien, como $c_k^T c_k = 1$ tenemos que $\{c_k\}_1^\infty$ es una sucesión en un conjunto compacto , es decir ,$\{c_k\}_1^\infty$ tiene una subsucesión $\{c_{k_i}\}_{i=1}^\infty$, convergente:

$$\lim_{i \to \infty} c_{k_i} = c_0, \quad c_0^T c_0 = 1$$

Sea t cualquier instante, (que no pertenezca a algún conjunto de medida cero tal que $\Psi_0(t)c_k = 0$.)

Para toda i suficientemente grande $t \in \Delta_{k_i}$. Entonces, para i suficientemente grande

$$\Psi_0(t)c_{k_i} = 0_p$$

Pasando al límite,

$$\Psi_0(t)c_0 = 0_p$$

para casi toda t en $-\infty \leq t \leq \infty$ lo que contradice la independencia lineal de las columnas de Ψ_0 sobre $-\infty \leq t \leq \infty$. La misma demostración se aplica a $\beta_0(t)$ con lo que se concluye la demostración.

Ahora bien, si tenemos cualquier otra descomposición del patrón de peso es decir, $K(t,\tau) = \Psi(t)\beta(\tau)$ y tenemos una descomposición como la anterior, $K(t,\tau) = \Psi_0(t)\beta(\tau)$ reducida globalmente, se tiene que

$$(E) \qquad \Psi(t)\beta(\tau) = \psi_0(t)\beta_0(\tau), \quad -\infty \leq t \leq \infty$$

Multiplicando (E) por la izquierda por $\Psi_0^T(t)$ e integrando sobre Δ_1 con respecto a t,

$$\int_{\Delta_1} \Psi_0^T(t)\Psi_0(t)\beta_0(\tau)\,dt = \int_{\Delta_1} \Psi_0^T(t)\Psi(t)\beta(\tau)\,dt, \quad -\infty \leq \tau \leq \infty$$

$$M_0\beta_0(\tau) = \int_{\Delta_1} \Psi_0^T(t)\Psi(t)\beta(\tau)\,dt, \quad -\infty \leq \tau \leq \infty$$

Como M_0 es no singular

$$\beta_0(\tau) = M_0^{-1} \int_{\Delta_1} \Psi_0^T(t)\Psi(t)\beta(\tau)\,dt, \quad -\infty \leq \tau \leq \infty$$

$$(I) \qquad \beta_0(\tau) = R\beta(\tau), \quad -\infty \leq \tau \leq \infty$$

donde $R = M_0^{-1} \int_{\Delta_1} \Psi_0^T(t)\Psi(t)\,dt$ es una matriz de dimensión $n_0 \times n$.

Similarmente,

$$(II) \qquad \Psi_0(t) = \Psi(t)S, \quad -\infty \leq t \leq \infty$$

donde

$$S = \left(\int_{\Delta_2} \beta(\tau)\beta_0^T(\tau)\,d\tau \right) N_0^{-1}$$

es una matriz constante de dimensión $n \times n_0$.

De (II) se concluye que n_0, el número de columnas linealmente independientes de $\Psi_0(t)$, no puede exceder el rango de S, que a su vez, no puede ser mayor que n, el número de columnas de $\Psi(t)$. Entonces,

$$n \geq n_0.$$

$\square$

Si la descomposición $\Psi(t)\beta(\tau)$ también está reducida globalmente el argumento anterior se puede invertir y se tiene la desigualdad opuesta:

$$n_0 \geq n.$$

En consecuencia, si $\Psi_0(t)\beta(\tau)$ y $\Psi(t)\beta(\tau)$ son ambas descomposiciones de un mismo patrón de peso, reducidas globalmente, S y R son matrices de dimensión $n \times n$.

Este último hecho tiene también como consecuencia que el número total de columnas linealmente independientes en $\Psi(t)$ (o renglones en $\beta(\tau)$) en *cualquier* descomposición $K(t,\tau) = \Psi(t)\beta(\tau)$ reducida globalmente es un entero n_0 determinado de manera única por la matriz de patrón de peso $K(t,\tau)$ realizable. Al entero n_0 se le llama *orden* de $K(t,\tau)$. De hecho n_0 es la dimensión mínima del espacio de estados que puede tener *cualquier* realización de $K(t,\tau)$. Si se tiene la realización $\{0_{n_0}, \beta_0, \Psi_0\}$ generada por una descomposición reducida globalmente, y $\Delta_1 = [t_0, t_1]\Delta_2 = [t_0^*, t_1^*]$

$$M_0 = \int_{t_0}^{t_1} \Psi_0^T(t)\Psi_0(t)\,dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau,t_0)C^T(\tau)C(\tau)\Phi(\tau,t_0)\,dt = \mathcal{V}(t_0,t_1)$$

con $\Phi(t,t_0) = I$ y $C(t) = \Psi_0(t)$ es decir, M_0 es la matriz de observabilidad del sistema generado por la realización $\{0_{n_0}, \beta_0, \Psi_0\}$, que sabemos por el teorema 12 es no singular, por lo que se tiene un sistema completamente observable.

De manera similar,

$$N_0 = \mathcal{U}(t_0^*, t_1^*)$$

que es la matriz de controlabilidad generada por la realización $\{0_{n_0}, \beta_0, \Psi_0\}$, que por ser no singular determina un sistema completamente controlable.

Ahora bien, hasta ahora solamente podemos decir que si se tiene una realización $\{0_n, \beta, \Psi\}$ generada por una descomposición $K(t,\tau) = \Psi(t)\beta(\tau)$ entonces

$$\Psi(t)\beta(\tau)$$

es una descomposición reducida globalmente si y sólo si

$$\{0_n, \beta, \Psi\}$$

es completamente controlable y completamente observable. Y como demostramos que si la descomposición está reducida globalmente la realización generada es mínima, tenemos que para realizaciones de este tipo, minimalidad equivale a controlabilidad y observabilidad completas. De hecho, se tiene que una realización $\{A(t), B(t), C(t)\}$ es mínima si y sólo si es completamente controlable y completamente observable. Sin embargo no demostraremos este resultado. Si el lector está interesado puede consultar el artículo de D.C. Youla,cuya referencia aparece en la bibliografiía.

El último resultado que veremos en esta sección, y cuya demostración utilizaremos en la parte bilineal, es el siguiente:

TEOREMA 13

Sea $\Psi_0(t)\beta_0(\tau)$ una descomposición reducida globalmente. Para cualquier otra descomposición reducida globalmente $\Psi(t)\beta(\tau)$, existe una matriz constante M de dimensión $n_0 \times n_0$ no singular , tal que

$$\Psi(t) = \Psi_0(t)M$$
$$\beta(t) = M^{-1}\beta_0(t)$$

Demostración:

Tenemos que

$$\beta_0(\tau) = R\beta(\tau), \quad -\infty \leq \tau \leq \infty$$

y

$$\Psi_0(t) = \Psi(t)S, \quad -\infty \leq t \leq \infty$$

donde

$$R = M_0^{-1} \int\limits_{\Delta_1} \Psi_0^T(t)\Psi(t)\, dt \ \text{ y } \quad S = (\int\limits_{\Delta_2} \beta(\tau)\beta(\tau)\, d\tau)N_0^{-1}$$

siendo ambas en este caso matrices de dimensión $n_0 \times n_0$.

Si multiplicamos por la izquierda la igualdad

$$\Psi_0(t) = \Psi(t)S$$

por $\Psi_0^T(t)$ obtenemos

$$\Psi_0^T(t)\Psi_0(t) = \Psi_0^T(t)\Psi(t)S$$

integrando sobre Δ_1 con respecto a t,

$$M_0 = \int\limits_{\Delta_1} \Psi_0^T(t)\Psi_0(t)\, dtS.$$

como M_0 es invertible

$$I_{n_0} = M_0^{-1} \int\limits_{\Delta_1} \Psi_0^T(t)\Psi(t)\, dtS = RS$$

Por lo que R es la inversa de S. Sea $R = M, S = M^{-1}$, entonces

$$\Psi(t) = \Psi_0(t)M \qquad (*)$$
$$\beta(t) = M^{-1}\beta_0(t)$$

Ahora bien, si M es una matriz constante no singular, y dada una descomposición reducida globalmente, multiplicamos por M y M^{-1} como en (*), tenemos

$$\Psi(t)\beta(\tau) = \Psi_0(t)MM^{-1}\beta_0(\tau) = K(t,\tau)$$

por lo que obtenemos otra descomposición reducida globalmente del patrón de peso original. □

En realidad, lo que tenemos es una clase dc equivalencia entre descomposiciones mínimas módulo la relación

$$\{\Psi_1(t), \beta_1(t)\} \sim \{\Psi_2(t), \beta_2(t)\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \Psi_1(t) = \Psi_2(t) M \\ \beta_1(t) = M^{-1} \beta_2(t) \end{array} \right\}$$

donde M es una matriz constante no singular de dimensión $n_0 \times n_0$.

SEGUNDA PARTE

Caso bilineal

2.1

Series de Volterra

Como en muchas áreas de las matemáticas en teoría del control el paso de la teoría lineal a la no lineal es sumamente difícil. En este capítulo estudiaremos una clase especial de sistemas no lineales que, además de ser una continuación natural de los sistemas lineales, son una clase de sistemas que aparecen con mucha frecuencia en procesos relacionados con el hombre y su medio ambiente*. Esta clase de sistemas son los sistemas bilineales. Estos están descritos con ecuaciones diferenciales ordinarias y reciben el nombre de bilineales pues son lineales en el estado, lineales en el control pero no lo son simultáneamente en ambos.

Muchas veces cuando se está modelando un sistema ecológico, socioeconómico o de economía, por ejemplo, se trata de hacerlo con un sistema lineal, que como ya hemos visto es de la forma

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \tag{$*$}$$

Con A una matriz de $\dim n \times n$ y B de $\dim n \times m$, pudiendo ser éstas constantes o dependientes del tiempo.

Aunque frecuentemente se utilizan estos sistemas, en muchos casos son inadecuados. La sencilla ecuación que describe a la población de especies biológicas es un buen ejemplo. La tasa de cambio de la población es

$$\frac{dx}{dt} = ux \tag{1}$$

donde u, tasa de nacimientos menos tasa de muertes, puede considerarse como una variable de control. El coeficiente u depende generalmente de la población (que es el estado. x). Sin embargo, si pensamos en un sistema de ciclo abierto, es decir, cuando u no depende de x, tenemos un sistema bilineal que no se puede poner en la forma lineal.

Como este caso hay muchos más, algunos ejemplos son: procesos de control nucleares, procesos bioquímicos, regulación de la temperatura, etc.

En muchas ocasiones es posible hacer un modelo lineal para describir un sistema pero éste puede tener ciertas carencias. En la primera parte de este trabajo mencionamos el problema de controlabilidad de sistemas lineales. En este análisis admitíamos controles no acotados, lo que está muy alejado de la realidad. En la gran mayoria de los casos los controles disponibles son acotados y eso lleva a que ciertos sistemas controlables (con controles no acotados) dejen de serlo cuando se utilizan controles acotados.

Como ya mencionamos, un sistema bilineal es tal que es lineal en el estado y lineal en el control pero no simultáneamente en ambos. Escribiremos las ecuaciones de un sistema de este tipo, con una única salida, de la siguiente manera

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Nx(t)u(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t).$$

---

* Véase por ejemplo, Mohler, *Bilinear Control Processes*

donde $u(t) \in \mathbb{R}$ es la entrada, $y(t) \in \mathbb{R}$ es la salida y $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el estado en el tiempo t. Las matrices A, N, B y C son matrices constantes de las dimensiones adecuadas.

En el problema de realización de sistemas lineales utilizamos una función de transferencia, en el caso constante, y una función de patrón de peso, en el caso no autónomo, para representar la salida y con base en esa representación planteábamos el problema de realización. Ahora uno de los problemas surge al tratar de representar la salida. Para ver como hacerlo encontramos la solución de

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Nx(t)u(t) + Bu(t) \qquad x(0) = x_0$$

Si multiplicamos por el factor de integración e^{-At} obtenemos:

$$e^{-At}\dot{x} = e^{-At}Ax(t) + e^{-At}Nx(t)u(t) + e^{-At}Bu(t)$$

de donde se tiene que

$$\frac{d\, e^{-At}x(t)}{dt} = e^{-At}Nx(t)u(t) + Bu(t)e^{-At}$$

$$e^{-At}x(t) = x_0 + \int_0^t e^{-At}[Nx(t_1)u(t_1) + Bu(t_1)]dt_1$$

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-t_1)}[Nx(t_1)u(t_1) + Bu(t_1)]dt_1 \tag{1}$$

En el integrando aparece $x(t_1)$, por lo que resulta natural para obtener una mejor aproximación de $x(t)$, evaluar $x(t_1)$ y después sustituir en (1),

$$x(t_1) = e^{At_1}x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-t_2)}[Nx(t_2)u(t_2) + Bu(t_2)]dt_2$$

y sustituyendo en (1) obtenemos

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-t_1)}[N(e^{At_1}x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-t_2)}(Nx(t_2)u(t_2) + Bu(t_2)dt_2)u(t_1) \\ &\quad + Bu(t_1)]dt_1 \\ &= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-t_1)}Ne^{At_1}x_0dt_1 + \int_0^t\int_0^{t_1} e^{A(t-t_1)}Ne^{A(t_1-t_2)}(Nx(t_2)u(t_2) \\ &\quad + Bu(t_2))dt_2dt_1 + \int_0^t e^{A(t-t_1)}NBu(t_1)dt_1 \\ &= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-t_1)}Ne^{At_1}x_0dt_1 + \int_0^t e^{A(t-t_1)}NBu(t_1)dt_1 + \end{aligned}$$

$$\int_0^t \int_0^t e^{A(t-t_1)} N e^{(t_1-t_2)} B u(t_2) dt_2 dt_1$$

$$+ \int_0^t \int_0^{t_1} e^{A(t-t_1)} N e^{A(t_1-t_2)} N x(t_2) u(t_2) dt_2 dt_1 \tag{2}$$

Procediendo de esta manera pero ahora con $x(t_2)$, evaluándola en (2) y sustituyendo en (2) se obtiene:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-t_1)} B u(t_1) dt_1 + \int_0^t e^{A(t-t_1)} N e^{A(t_1)} x_0 u(t_1) dt_1 +$$

$$+ \int_0^t \int_0^{t_1} e^{A(t-t_1)} N e^{A(t_1-t_2)} B u(t_2) u(t_1) dt_2 dt_1 +$$

$$+ \int_0^t \int_0^{t_1} e^{A(t-t_1)} N e^{A(t_1-t_2)} N e^{At_2} N x_0 u(t_2) u(t_1) dt_2 dt_1$$

$$+ \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} e^{A(t-t_1)} N e^{A(t_1-t_2)} N e^{A(t_2-t_3)} B u(t_3) u(t_2) u(t_1) dt_3 dt_2 dt_1$$

$$+ \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} e^{A(t-t_1)} N e^{A(t_1-t_2)} N e^{t_2-t_3)} N e^{At_3} x_0 u(t_3) u(t_2) u(t_2) u(t_1) dt_3 dt_2 dt_1$$

$$+ \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \int_0^{t_3} e^{A(t-t_1)} N e^{A(t_1-t_2)} N e^{A(t_2-t_3)} N e^{(t_3-t_4)} B u(t_4) u(t_3) u(t_2) u(t_1)$$

$$dt_4 dt_3 dt_2 dt_1 + \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \int_0^{t_3} e^{A(t-t_1)} N e^{A(t_1-t_2)} N e^{(t_2-t_3)} N e^{A(t_3-t_4)}$$

$$N x(t_4) u(t_4) u(t_3) u(t_2) u(t_1) dt_4 dt_3 dt_2 dt_1$$

Siguiendo se esta manera tenemos una representación de la salida que es de de la siguiente forma

$$y(t) = C\,[\, e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-t_1)} B u(t_1) dt_1 + \int_0^t e^{A(t-t_1)} N e^{A(t_1)} x_0 U(t_1) dt_1 \ldots]$$

Ahora bien, haciendo algunos cambios de variable y reindexando podemos escribir esta serie de integrales como

$$y(t) = C\,[\,e^{At}x_0 + \int_0^t e^{At_1}Bu(t-t_1)dt_1 + \int_0^t e^{At_1}Ne^{A(t-t_1)}x_0u(t-t_1)dt_1 +$$

$$+ \int_0^t\int_{t_2}^t e^{At_2}Ne^{A(t_1-t_2)}Bu(t-t_1)u(t-t_2)dt_1dt_2 + \ldots +$$

$$+ \int_0^t\int_{t_1}^t \ldots \int_{t_2}^t e^{At_i}Ne^{A(t_{i-1}-t_i)} \ldots Ne^{A(t_1-t_2)}Bu(t-t_1)\ldots$$

$$u(t-t_i)dt_1dt_2\ldots dt_i + \ldots + \int_0^t\int_{t_i}^t \ldots$$

$$\int_{t_2}^t e^{At_i}Ne^{A(t_{i-1}-t_i)} \ldots e^{A(t-t_1)}x_0u(t)$$

$$\ldots u(t-t_i)dt_1dt_2\ldots dt_i]$$

Si además queremos expresar las integrales con límites de integración de 0 a t podemos multiplicar las integrales por $\prod_{k=1}^{i-1}\delta_{-1}(t_{k-1}-t_k)$, donde

$$\delta_{-1}(t_{i-1}-t_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } t_{i-1}-t_i < 0 \\ 1 & \text{si } t_{i-1}-t_i \geq 0 \end{cases}.$$

de esta manera podemos escribir a $y(t)$ como

$$y(t) = y_x(t) + y_u(t) + y_{xu}(t)$$

donde $y_x(t) = Ce^{A}x_0$ y

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty}\int_0^t \ldots \int_0^t v_i(t_1,\ldots,t_i)\left[\prod_{k=1}^{i}u(t-t_k)\right]dt_1\ldots dt_i$$

$$v_1(t_1) = ce^{At_1}B$$

$$v_i(t_1,\ldots,t_i) = ce^{At_i}Ne^{A(t_{i-1}-t_i)}\ldots Ne^{A(t_1-t_2)}\cdot B\left[\prod_{k=1}^{i-1}\delta_{-1}(t_{k-1}-t_k)\right]$$

$$y_{xu}(t) = \sum_{i=1}^{\infty}\int_0^t \ldots \int_0^t m_i(t_1,\ldots,t_i)Ne^{A(t-t_1)}x_0\left[\prod_{k=1}^{i}u(t-t_k)\right]dt_1\ldots dt_i$$

donde m_i se obtiene de v_i sustituyendo B por la matriz identidad de dimensión $n \times n$.

Para tener definida esta expresión para toda permutación de las variables t_i definimos

$$w_i = \sum_{per} v_i(t_1,\ldots,t_i) \qquad z_i = \sum_{per} m_i(t_1\ldots t_i)$$

con la que obtenemos

$$y_u(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \int_0^t \dots \int_0^t w_i \left[\prod_{k=1}^{i} u(t-t_k) \right] dt_1 \dots dt_i$$

y

$$y_{xu}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t z_i N e^{A(t-t_1)} x_0 \left[\prod_{k=1}^{i} u(t-t_k) \right] dt_1 \dots dt_i$$

Ahora bien, si $x_0 = x(0) = 0$ tenemos que

$$y(t) = y_u(t)$$

A esta expresión la conocemos como serie de Volterra del sistema *.

2.2
Realización

Utilizando lo anterior, definiremos lo que se entenderá por realización en sistemas bilineales

DEFINICION 1.

Una sucesión $\{w_i(t_1, \dots, t_i\}_1^\infty$ de núcleos simétricos de una expansión en series de Volterra es realizable por un sistema constante bilineal en un espacio de estados finitos (es decir, es realizable bilinealmente) si existen cuatro matrices constantes A, N, B, C de dimensiones $n \times n, n \times n, n \times 1$ y $1 \times n$ respectivamente, tales que las siguientes relaciones se satisfacen

(1) $$Ce^{At_1}B = w_1(t_1) \qquad \forall\, t_1$$

(2) $$\sum_{per} Ce^{At_i} N e^{A(t_{i-1}-t_i)} \dots N e^{A(t_1-t_2)} B \left[\prod_{k=1}^{i-1} \delta_{-1}(t_{k+1} - t_{k+2}) \right]$$

$$= w_i(t_1, \dots, t_i) \quad \forall t_k \;, \quad k = 1, \dots, i \;, \forall i > 1.$$

Por esta definición ya sabemos que es lo que plantea el problema de realización en sistemas bilineales. Ahora bien, dada una sucesión $\{w_i(t_1, \dots, t_i\}_0^\infty$ de núcleos de

---

* Un problema que tiene esta representación es la convergencia y unicidad de la serie, no analizaremos esto pero recomendamos leer el artículo de Lesiak, Casimir y Krener que aparece en la bibliografía

Volterra, ¿Cuándo es posible encontrar o por lo menos saber que existe una realización bilineal? El siguiente teorema nos da una respuesta.

TEOREMA 1

Una condición necesaria y suficiente para que una sucesión $\{w_i(t_1, \ldots, t_i)\}_{i=1}^{\infty}$ de núcleos de Volterra simétricos sea realizable bilinealmente es:

(a) Que $w_1(t_1)$ tenga una transformada de Laplace racional propia.

(b) Que existan matrices $F(t), G(t), H(t)$, de dimensiones $m \times m, m \times 1$, y $1 \times m$ respectivamente, de funciones con transformadas de Laplace racionales propias, tales que se satisfagan las siguientes relaciones:

(3) $$w_i(t_1, \ldots, t_i) = H(t_i)F(t_{i-1} - t_i) \ldots F(t_2 - t_3)G(t_1 - t_2)$$

en

$$\delta_i = \{(t_1, \ldots, t_i): t_1 > t_2 > \ldots > t_i\} \text{ para toda } i > 1$$

OBSERVACION

Debido a que los núcleos son simétricos, la condición (3) se satisface para cualquier permutación de las variables $t_1, \ldots, t_i$.

Demostración: $\Rightarrow$) *hbox*__Necesidad__ :

Si la sucesión $\{w_i(t_1, \ldots, t_i)\}_{i=1}^{\infty}$ de núcleos simétricos de Volterra es realizable bilinealmente, entonces existen matrices A, N, B, C tales que se satisfacen las ecuaciones (1) y (2).

Así

$$Ce^{At_1}B = w_1(t_1) \qquad \forall t_1.$$

y como $Ce^{At_1}B$ tiene transformada de Laplace racional propia, entonces se cumple la condición (a).

Como los núcleos son simétricos y se satisface (2), en particular si restringimos el dominio a $\delta_i = \{(t_1, \ldots, t_i): t_1 > t_2 > \ldots > t_i\} \quad i > 1$ tenemos que

$$w_i = (t_1, \ldots, t_i) = Ce^{At_i}Ne^{A(t_{i-1}-t_i)}Ne^{A(t_1-t_2)}B$$

pues $\prod_{k=1}^{i-1} \delta_{-1}(t_{k+1} - t_{k+2}) = 0$ en ese intervalo para las permutaciones de las t_i.

Ahora, factorizando la matriz N en la forma

$$N = N'N''$$

con N' de $\dim n \times m$ y N'' de $\dim m \times n$, tenemos que

$$w_i(t_1, \ldots, t_i) = Ce^{At_i}N'N''e^{A(t_{i-1}-t_i)} \ldots NN''e^{A(t_1-t_2)}B \quad \forall\, i \geq 1$$

Definiendo

$$Ce^{At}N' = H(t) \ , \ N''e^{At}N' = F(t)$$

y

$$N''e^{At}B = G(t)$$

tenemos que

$$w_i(t_1, \dots, t_i) = H(t_i)F(t_{i-1} - t_i) \dots F(t_2 - t_3)G(t_1 - t_2)$$

Como estas tres funciones tienen transformada de Laplace racional propia, se satisface la condición (b).

Suficiencia.

Supongamos que se satisfacen las condiciones (a) y (b). Consideremos la matriz

$$L(t) = \begin{pmatrix} w_1(t) & H(t) \\ G(t) & F(t) \end{pmatrix} \tag{4}$$

Como $w_1(t), H(t), G(t)$ y $F(t)$ son funciones cuya transformada de Laplace es racional propia, $L(t)$ se puede interpretar como el patrón de peso de un sistema lineal constante de orden finito con $n+1$ entradas y $m+1$ salidas. En consecuencia deben existir matrices A, R, S de dimensiones $n \times n, n \times (m+1)$ y $(m+1) \times n$ respectivamente, tales que

$$Se^{At}R = L(t)$$

Dando una partición de S y de R en la forma

$$S = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} \qquad R = (\, R_1 \quad R_2 \,)$$

Como S_1 una matriz de dimensión $1 \times n$ y R_1 una matriz de dimensión $n \times 1$, tenemos que

$$\begin{array}{ll} w_1(t) = S_1 e^{At} R_1 & H(t) = S_1 e^{At} R_2 \\ G(t) = S_2 e^{At} R_1 & F(t) = S_2 e^{At} R_2 \end{array} \tag{5}$$

Sustituyendo (5) en (3) tenemos que

$$w_i(t_1, \dots, t_i) = S_1 e^{At_1} R_2 S_2 e^{A(t_{i-1}-t_i)} R_2 \dots S_2 e^{A(t_2-t_3)} R_2 S_2 e^{A(t_1-t_2)} R_1$$

Haciendo

$$B = R_1 \quad C = S_1 \quad \text{y} \quad N = R_2 S_2$$

tenemos un sistema bilineal, caracterizado por la matriz A y las matrices B, C y N que acabamos de definir, que satisface las ecuaciones (1) y (2) sobre los conjuntos S_i.

Por otro lado como, por definición, los núcleos $w_i(t_1, \dots, t_i)$ son simétricos, las ecuaciones (1) y (2) se satisfacen para todo $t_1, \dots, t_i$. □

Por el resultado establecido en este teorema, debemos analizar las sucesiones $\{w_i(t_1,\ldots,t_i)\}_2^\infty$ que se puedan escribir en la forma

$$w_i(t_1,\ldots,t_i) = H(t_i)F(t_{i-1}-t_i)\ldots F(t_2-t_3)G(t_1-t_2)$$

que satisfagan las hipótesis del teorema. Estas sucesiones se llamarán *factorizables* y a la tercia $\{F(t),G(t),H(t)\}$ se le llamará una *factorización*.

Como en el caso lineal, estaremos interesados en realizaciones mínimas. Para ello, será necesario estudiar el conjunto de todas las factorizaciones posibles de una sucesión de núcleos dada. En particular, se establecerán resultados relacionados con la minimalidad de una factorización. Para poder hacer esto, introducimos las siguientes matrices, no sin antes recordar que las dimensiones de las matrices $F(t),G(t)$ y $H(t)$ son $m\times m, m\times 1$ y $1\times m$ respectivamente.

DEFINICION

$$P_k[F,G](t_1,\ldots,t_k) = [G(t_1)\ \ F(t_2)G(t_1)\ldots F(t_k)F(t_{k-1})\ldots G(t_1)] \text{ y}$$

$$Q_k[F,H](t_1,\ldots,t_k) = \begin{pmatrix} H(t_1) \\ H(t_1)F(t_2) \\ \vdots \\ H(t_1)\ldots F(t_{k-1})F(t_k) \end{pmatrix}$$

Nos interesará analizar si los m renglones de $P_k[F,G]$ (las m columnas de $Q_k[F,H]$) son funciones linealmente independientes o no. Como, por hipótesis, $F(t),G(t)$ y $H(t)$ tienen transformada de Laplace racional propia, será suficiente examinar la independencia lineal en algún subintervalo de $\mathbb{R}^k$, por ejemplo, en $\Delta_k = \{(t_1,\ldots,t_k): 0\le t_i\le 1\ ,\ \forall i\}$

Esto lleva a introducir las matrices gramianas:

$$\mathcal{P}_k[F,G] = \int_{\Delta_k} P_k P_k^T dt_1\ldots dt_k \tag{6}$$

$$\mathcal{Q}_k[F,H] = \int_{\Delta k} Q_k^T Q_k dt_1\ldots dt_k \tag{7}$$

Las matrices (6) y (7) definen, para F,G y H fijas, y para cada k, una transformación lineal de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^m$. Esto se ve claramente observando que $P_k[F,G](t_1,\ldots,t_k)$, {respectivamente $Q_k[F,G](\bar{t}_k)$}, es una matriz de dimensión $m\times k$, $\{k\times m\}$ por lo que $P_kP_k^T$ es una matriz de dimensión $m\times m$, $\{Q_k^TQ_k$ es $m\times m\}$, en las variables $t_1,\ldots,t_k$, por lo que al integrar sobre Δ_k, se obtiene una matriz $\mathcal{P}_k$, $\{\mathcal{Q}_k\}$, de dimensión $m\times m$ que define una transformación lineal $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^m$. En los dos siguientes lemas se obtendrán resultados, sobre el rango (imagen) de estas transformaciones, que nos serán de gran utilidad para lemas y teoremas posteriores.

LEMA 1.

Existe un entero k' tal que

$$(A) \qquad \mathcal{R}[\mathcal{P}_k] \subset \mathcal{R}[\mathcal{P}_{k+1}] \text{ para toda } k < k'$$

$$(B) \qquad \mathcal{R}[\mathcal{P}_k] = \mathcal{R}[\mathcal{P}_{k+1}] \text{ para toda } k \geq k'$$

y más aún,

$$(C) \qquad k' \leq m$$

LEMA 2.

Existe un entero k'' tal que

$$\mathcal{R}[\mathcal{Q}_k] \subset \mathcal{R}[\mathcal{Q}_{k+1}] \text{ para toda } k < k''$$

$$\mathcal{R}[\mathcal{Q}_k] = \mathcal{R}[\mathcal{Q}_{k+1}] \text{ para toda } k \geq k''$$

y más aún

$$k'' \leq m.$$

Solamente demostraremos el lema 1 pues la demostración del lema 2 se hace de manera similar. Para esta demostración utilizaremos las siguientes observaciones.

Observación 1.

$$\mathcal{R}[\mathcal{P}_k] = \ker[\mathcal{P}_k^t]^\perp \quad \$$$

Observación 2.

$$\mathcal{P}_k^T = \mathcal{P}_k \quad [i.e., \mathcal{P}_k \text{ es autoadjunta.}]$$

Demostración:

Hay que demostrar que

$$\langle \mathcal{P}_k x, y \rangle = \langle x, \mathcal{P}_k y \rangle$$

Sean $x, y \in \mathbb{R}^m$

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{P}_k x, y\rangle &= \langle \int_{\Delta_k} P_k P_k^t d\bar{t}_k\, x, y\rangle \\
&= \int_{\Delta_k} \langle P_k P_k^t x, y\rangle d\bar{t}_k \\
&= \int_{\Delta_k} \langle P_k^t x, P_k^t y\rangle d\overline{t_k} \\
&= \int_{\Delta_k} \langle x, P_k P_k^t y\rangle d\overline{t_k} \\
&= \langle x, \mathcal{P}_k y\rangle
\end{aligned}
$$

□

Demostración: (Lema 1.) Dividiremos la demostración en dos partes. En la primera parte se demostrará que

$$\mathcal{R}[\mathcal{P}_k] \subseteq \mathcal{R}[\mathcal{P}_{k+1}] \text{ para toda } k.$$

en la segunda parte se demostrará que si

$$\mathcal{R}[\mathcal{P}_{k-1}] = \mathcal{R}[\mathcal{P}_k] \text{ para alguna } k$$

$$\text{entonces} \qquad \mathcal{R}[\mathcal{P}_k] = \mathcal{R}[\mathcal{P}_{k+1}].$$

Primera parte

Tenemos que demostrar que

$$\mathcal{R}[\mathcal{P}_k] \subseteq \mathcal{R}[\mathcal{P}_{k+1}] \quad \text{para toda } k$$

por las observaciones 1 y 2, tenemos que basta demostrar que

$$\ker[\mathcal{P}_{k+1}] \subseteq \ker[\mathcal{P}_k]$$

Afirmación. $x \in \ker[\mathcal{P}_{k+1}] \iff P_k^t(\bar{t}_k)x = 0 \quad \forall\ \bar{t}_k \in \Delta_k.$

Demostración: $x \in \ker[\mathcal{P}_{k+1}] \iff \mathcal{P}_{k+1}x = 0 \iff$ para toda $y \in \mathbb{R}^m$ $\langle \mathcal{P}_k x, y\rangle = 0$

$$
\begin{aligned}
&\iff \int_{\Delta_k} \langle P_k^t(\bar{t}_k)x, P_k^t(\bar{t}_k)y\rangle d\bar{t}_k = 0 \\
&\iff \int_{\Delta_k} \|P_k^t(\bar{t}_k)x\|^2 d\bar{t}_k = 0 \\
&\iff P_k^t(\bar{t}_k)x \equiv 0 \quad \forall \bar{t}_k \in \Delta_k
\end{aligned}
$$

□

P.D. $\ker[\mathcal{P}_{k+1}] \subseteq [\mathcal{P}_k]$

Sea $x \in \ker[\mathcal{P}_{k+1}] \Rightarrow P^t_{k+1}(\bar{t}_{k+1})x = 0 \quad \forall \;\; \bar{t}_{k+1} \in \Delta_{k+1}$

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow \qquad \langle G(t_1), x\rangle &= 0 \quad \forall \;\; t_1 \in I, I = [0,1] && (a_1) \\ \langle F(t_2 G(t_1), x\rangle &= 0 \quad \forall \;\; t_1, t_2 \in I && (a_2) \\ &\vdots \qquad \vdots \\ \langle F(t_k)F(t_{k-1})\ldots F(t_2)G(t_1), x\rangle &= 0 \quad \forall \;\; t_1, \ldots, t_k \in I && (a_k) \\ \langle F(t_{k+1})F(t_k)\ldots F(t_2)G(t_1), x\rangle &= 0 \quad \forall \;\; t_1, \ldots, t_{k+1} \in I && (a_{k+1}) \end{aligned}$$

como x satisface las condiciones $(a_1), \ldots, (a_{k+1})$, satisface en particular las condiciones $(a_1), \ldots, (a_k)$, por lo que

$P^T_k(\bar{t}_k)x \qquad \forall \;\; t_k \in I$

$\Rightarrow x \in \ker[\mathcal{P}_k]$

$\therefore \ker[\mathcal{P}_{k+1}] \subseteq \ker[\mathcal{P}_k]$

$\therefore \mathcal{R}[\mathcal{P}_k] \subset \mathcal{R}[\mathcal{P}_{k+1}]$ para toda k.

<u>Segunda parte.</u>

Demostraremos que si

$$\mathcal{R}[\mathcal{P}_{k+1}] = \mathcal{R}[\mathcal{P}_k] \text{ para alguna } \quad k$$
$$\mathcal{R}[\mathcal{P}_k] = \mathcal{R}[\mathcal{P}_{k+1}].$$

Supongamos que $\mathcal{R}[\mathcal{P}_{k-1}] = \mathcal{R}[\mathcal{P}_k]$ entonces

$$\ker[\mathcal{P}_{k-1}] = \ker[\mathcal{P}_k].$$

P.D. $\ker(\mathcal{P}_k) \subset \ker[\mathcal{P}_{k+1}]$ (La otra contención se tiene siempre).

{ como las variables $t_i \in [0,1]$ para toda i, haremos una reindexación }

Sea $x \in \ker[\mathcal{P}_k]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad \langle G(t_1), x\rangle &= 0 \quad \forall \;\; t_1 \in I && (b_1) \\ \langle F(t_{k+1})G(t_1), x\rangle &= 0 \quad \forall \;\; t_{k+1}, t_1 \in I && (b_2) \\ \langle F(t_{k+1})F(t_2)G(t_1), x\rangle &= 0 \quad \forall \;\; t_{k+1}, t_dos, t_1 \in I && (b_3) \\ &\vdots \qquad \vdots \\ \langle F(t_{k+1})F(t_{k-1})\ldots F(t_2)G(t_1), x\rangle &= 0 \quad \forall \;\; t_{k+1}, t_{k-1}, \ldots, t_1 \in I && (b_{k-1}) \end{aligned}$$

transponiendo $F(t_{k+1})$ en $(b_2), \ldots, (b_{k-1})$ obtenemos que $F^T(t_{k+1})x \in \ker[\mathcal{P}_{k-1}]$ pero $\ker[\mathcal{P}_{k-1}] = \ker[\mathcal{P}_k] \quad \therefore \quad F^T(t_{k+1})x \in \ker[\mathcal{P}_k]$

$$\Rightarrow \quad \langle G(t_1), F^t(t_{k+1})x\rangle = 0 \quad \forall \; t_1, t_{k+1} \in I \qquad (c_1)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\langle F(t_k)F(t_{k-1})\ldots F(t_2)G(t_1), F^t(t_{k+1})x\rangle = 0 \quad \forall \; t_1 \ldots t_{k+1} \in I \qquad (c_k)$$

volviendo a transponer $F^t(t_{k+1})$ obtenemos que por $(b_1),(c_1),\ldots,(c_k)$, $x \in \ker[\mathcal{P}_{k+1}]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow &\quad \ker[\mathcal{P}_k] \subseteq \ker[\mathcal{P}_{k+1}] \\ \Rightarrow &\quad \ker[\mathcal{P}_k] = \ker[\mathcal{P}_{k+1}] \\ \therefore &\quad \mathcal{R}[P_k] = \mathcal{R}[\mathcal{P}_{k+1}] \end{aligned}$$

Como $\mathcal{R}[\mathcal{P}_k] \subset \mathbb{R}^m \quad \forall \quad k \Rightarrow \exists k' \leq m$ que satisface el lema. □

Para poder llegar a los resultados de factorizaciones (y de realizaciones) mínimas que nos interesan necesitaremos los dos siguientes lemas.

LEMA 3.

Si únicamente $\overline{m} < m$ renglones de $P_m[F,G](t_1,\ldots,t_m)$ son linealmente independientes sobre Δm, entonces existe una matriz constante T no singular de dimensión $m \times m$ tal que

$$TF(t)T^{-1} = \begin{pmatrix} F_{11}(t) & F_{12}(t) \\ 0 & F_{22}(t) \end{pmatrix} \qquad TG(t) = \begin{pmatrix} G_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde las matrices $F_{11}(t)$ y $G_1(t)$ son de dimensión $\overline{m} \times \overline{m}$ y $\overline{m} \times 1$, respectivamente, y $P_{\overline{m}}[F_{11}, G_1](t_1,\ldots,t_{\overline{m}})$ tiene $\overline{m}$ renglones linealmente independientes sobre $\Delta\overline{m}$.

LEMA 4.

Si únicamente $\overline{m} < m$ columnas de $Q_m(F,G)(t_1,\ldots,t_m)$ son linealmente independientes dobre Δm, entonces existe una matriz constante no singular T de dimensión $m \times m$ tal que

$$TF(t)T^{-1} = \begin{pmatrix} F_{11}(t) & 0 \\ F_{21}(t) & F_{22}(t) \end{pmatrix} \quad , \quad H(t)T^{-1} = (H_1(t), 0)$$

donde las matrices $F_{11}(t)$ y $H_1(t)$ son de dimensión $\overline{m} \times \overline{m}$ y $1 \times \overline{m}$, respectivamente, y $Q_{\overline{m}}[F_{11}, H_1](t_1,\ldots,t_{\overline{m}})$ tiene $\overline{m}$ columnas linealmente independientes sobre $\Delta_{\overline{m}}$. *

Como en el caso de los lemas 1 y 2, la demostración del lema 4, se hace de manera similar a la demostración del lema 3 por lo que únicamnete demostraremos el lema 3.

* *Observación:* $P_{\overline{m}}[F_{11}, G_1](\bar{t}_{\overline{m}}), (Q_{\overline{m}}[F_{11}, H_1](\bar{t}_{\overline{m}}))$ son matrices de dimensión $\overline{m} \times \overline{m}$, por lo que los $\overline{m}$ renglones ($\overline{m}$ columnas) del lema 3, (del lema 4) son los $\overline{m}$ renglones totales ($\overline{m}$ columnas totales) de la matriz en cuestión.

Demostración: (Del lema 3).

Si únicamente $\overline{m}$ renglones de $P_m[F,G]$ son linealmente independientes sobre Δm, existe una matriz constante no singular T de dimensión $m \times m$ tal que

$$TP_m[F,G](t_1,\ldots,t_m) = \begin{pmatrix} \tilde{P}(t_1,\ldots,t_m) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{A}$$

con los $\overline{m}$ renglones de $\tilde{P}(t_1,\ldots,t_m)$ linealmente independientes sobre Δm.

Tenemos que

$$\begin{aligned} TP_m[F,G](t_m) &= T[G(t_1) \quad F(t_2)G(t_1)\ldots F(t_m)F(t_{m-1})\ldots G(t_1)) \\ &= [TG(t_1) \quad TF(t_2)G(t_1)\ldots TF(t_m)F(t_{m-1})\ldots G(t_1)] \end{aligned}$$

Como T es no singular, T^{-1} existe por lo que

$$[TG(t_1)\ TF(t_2)T^{-1}TG(t_1) \quad TF(t_m)T^{-1}TF(t_{m-1})T^{-1}\ldots TG(t_1)]$$

$$= \begin{pmatrix} \tilde{P}(t_1,\ldots,t_m) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow TG(t_1) = \begin{pmatrix} G_1(t_1) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \quad \forall t_1 \in I$$

como $G(t_1)$ tiene transformada de Laplace racional propia

$$\Rightarrow TG(t) = \begin{pmatrix} G_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{para toda } t$$

con $G_1(t)$ una matriz de dimensión $\tilde{m} \times 1$.

Consideremos ahora la partición

$$TF(t)T^{-1} = \begin{pmatrix} F_{11}(t) & F_{12}(t) \\ F_{21}(t) & F_{22}(t) \end{pmatrix}$$

donde $F_{11}(t)$ es de dimensión $\tilde{m} \times \tilde{m}$, $F_{12}(t)$ de dimensión $\tilde{m} \times (m-\tilde{m})$, $F_{21}(t)$ de dimensión $(m-\tilde{m}) \times \tilde{m}$ y $F_{22}(t)$ de dimensión $(m-\tilde{m}) \times (m-\tilde{m})$, entonces

$$\begin{aligned} TP_m[F,G](t_1,\ldots,t_m) = \Bigg[\begin{bmatrix} G_1(t_1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad & \begin{bmatrix} F_{11}(t_2) & F_{12}(t_2) \\ F_{21}(t_2) & F_{22}(t_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1(t_1) \\ 0 \end{bmatrix} \ldots \\ & \begin{bmatrix} F_{11}(t_m) & F_{12}(t_m) \\ F_{21}(t_m) & F_{22}(m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11}(t_{m-1}) & F_{12}(t_{m-1}) \\ F_{21}(t_{m-1}) & F_{22}(t_{m-1}) \end{bmatrix} \ldots \\ & \begin{bmatrix} F_{11}(t_2) & F_{12}(t_2) \\ F_{21}(t_2) & F_{22}(t_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1(t_1) \\ 0 \end{bmatrix} \Bigg] \end{aligned}$$

Por la igualdad (A), esto implica que

$$\begin{aligned} F_{21}(t_2)G_1(t_1) &= 0 \quad \forall \quad t_2 \in I \\ F_{21}(t_3)F_{11}(t_2)G_1(t_1) &= 0 \quad \forall \quad t_3,\ldots,t_1 \in I \\ F_{21}(t_4)F_{11}(t_3)F_{11}(t_2)G(t_1) &= 0 \quad \forall \quad t_4,\ldots,t_1 \in I \\ &\vdots \\ F_{21}(t_m)F_{11}(t_{m-1})\ldots F_{11}(t_2)G(t_1) &= 0 \quad \forall \quad t_m,\ldots,t_1 \in I \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{P}(t_1,\ldots,t_m) = P_m[F_{11},G_1](t_1,\ldots,t_m) \qquad (B)$$

y

$$F_{21}(t)P_{m-1}[F_{11},G_1](t_1,\ldots,t_{m-1}) = 0 \ . \qquad (C)$$

De B, se tiene que $P_m[F_{11},G_1]$ tiene rango $\overline{m}$ y por el lema 1, $P_{\overline{m}}[F_{11},G_1]$ también tiene rango $\overline{m}$ o lo que es lo mismo, $\overline{m}$ renglones de $P_{\overline{m}}[F_{11},G_1]$ son linealmente independientes, como C es valido para toda $m > 1$, se tiene que $F_{21}(t) = 0$, lo que completa la demostración. □

Teniendo en cuenta estos resultados preliminares, es posible examinar las propiedades de las sucesiones factorizables de núcleos y describir el conjunto de todas las factorizaciones. Al entero $\underline{m}$ se le llamará la <u>dimensión de la factorización</u> y en consecuencia se dirá que una <u>factorización es mínima</u> cuando su dimensión alcance el valor mínimo sobre el conjunto de las dimensiones de todas las factorizaciones de una sucesión dada.

En el siguiente teorema se expresarán las propiedades de las factorizaciones mínimas.

TEOREMA 2.

Una factorización de dimensión m, $\{F(t),G(t),H(t)\}$, de una sucesión factorizable de núcleos es mínima, si y solo si, los renglones $P_m[F,G]$ y las columnas de $Q_m[F,H]$ son linealmente independientes sobre Δ_m. Las factorizaciones mínimas son una clase de equivalencia módulo la relación:

$$\{F_1(t),G_1(t),H_1(t)\} \sim \{F_2(t),G_2(t),H_2(t)\} \iff \begin{cases} F_1(t) = TF_2(t)T^{-1} \\ G_1(t) = TG_2(t) \\ H_1(t) = H_2(t)T^{-1} \end{cases}$$

donde T es una matriz constante no singular de dimensión $m \times m$.

Demostración: La demostración se dividirá en dos partes, la primera se referirá a la minimalidad y la segunda a la clase de equivalencia.

Primera parte.

Como $\{F(t),G(t),H(t)\}$ es una factorización de una sucesión de núcleos $\{w_i(t_1,\ldots,t_i)\}_2^\infty$, tenemos que:

(1) $$w_i(t_1,\ldots,t_i) = H(t_i)F(t_{i-1}-t_i)\ldots F(t_2-t_3)G(t_1-t_2), \quad \forall \ i.$$

Necesidad:

Supongamos, por ejemplo, que la matriz $P^m[F,G]$ correspondiente a una factorización mínima tiene únicamente $\overline{m} < m$ renglones linealmente independientes. Como consecuencia del lema 3, existe una matriz constante no singular T de dimensión $m \times m$, tal que:

$$TF(t)T^{-1} = \begin{pmatrix} F_{11}(t) & F_{12}(t) \\ 0 & F_{22}(t) \end{pmatrix} \qquad TG(t) = \begin{pmatrix} G_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $F_{11}(t)$ de dimensión $\overline{m} \times \overline{m}$, y las demás de las dimensiones adecuadas.

Consideremos la partición:

$$H(t)T^{-1} = (H_1(t), H_2(t))$$

con $H_1(t)$ de dimensión $1 \times \overline{m}$.

Entonces, (1) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} w_i(t_1,\ldots,t_i) &= H(t_i)T^{-1}TF(t_{i-1}-t_i)T^{-1}\ldots TF(t_2-t_3)T^{-1}TG(t_1-t_2) \\ &= (H_1(t_1) \quad H_2(t_1)) \begin{pmatrix} F_{11}(t_{i-1}-t_i) & F_{12}(t_{i-1}-t_i) \\ 0 & F_{21}(t_{i-1}-t_i) \end{pmatrix} \ldots \\ &\quad \begin{pmatrix} F_{11}(t_2-t_3) & F_{12}(t_2-t_3) \\ 0 & F_{22}(t_2-t_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1(t_1-t_2) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= H_1(t_i)F_{11}(t_{i-1}-t_i)\ldots G_1(t_1-t_2), \end{aligned} \tag{2}$$

con lo que la tercia $\{F_{11}(t), G_1(t), H_1(t)\}$ de dimensión $\overline{m} < m$ es una factorización de la sucesión $\{w_i(t_1,\ldots,t_i)\}_2^\infty$, contradiciendo la minimalidad.

Basándose en el lema 4 se obtiene una demostración similar para la matriz $Q_m[F,H]$.

Suficiencia:

Supongamos que la factorización $\{F(t), G(t), H(t)\}$ para la cual las matrices $P_m[F,G]$ y $Q_m[F,H]$ tienen respectivamente sus renglones y sus columnas linealmente independientes, no es una realización mínima.

Entonces existe una factorización $\{\overline{F}(t), \overline{G}(t), \overline{H}(t)\}$ de dimensión $\overline{m} < m$ para la misma sucesión factorizable $\{w_i(t_1,\ldots,t_i)\}_2^\infty$. Esto significa que:

$$\begin{aligned} w_i(t_1,\ldots,t_i) &= H(t_i)F(t_{i-1}-t_i)\ldots F(t_2-t_3)G(t_1-t_2) \\ &= \overline{H}(t_i)\overline{F}(t_{i-1}-t_i)\ldots \overline{F}(t_2-t_3)\overline{G}(t_1-t_2) \end{aligned} \tag{3}$$

para todo $t_1 > t_2 > \ldots > t_i > \ldots$, $\forall \;\; i = 2,3,\ldots$, y en particular para $t_1 - t_2 \in [0,1], \ldots, t_{i-1} - t_i \in [0,1]$, $t_1 \in [0,1]$.

Por lo tanto, reindicando las t_i,

$$\begin{aligned} &Q_m[F,H](t_1,\ldots,t_m)P_m[F,G](t_{m+1},\ldots,t_{2m}) \\ &= Q_m[\overline{F},\overline{H}](T_1,\ldots,t_m)P_m[\overline{F},\overline{G}]t_1,\ldots,t_m) \end{aligned} \tag{3*}$$

Multiplicando, esta última igualdad de ambos lados, por la izquierda, por $Q_m^T[F,H]$ $(t_1,\ldots,t_m)$ y por la derecha, por $P_m^T[F,G](t_{m+1},\ldots,t_{2m})$ e integrando sobre Δ_{2m} se obtiene

$$\int_{\Delta_{2m}} Q_m^T[F,H]Q_m[F,H]P_m[F,G]P_m^T[F,G]dt_1\ldots dt_m dt_{m+1}\ldots dt_{2m} =$$

$$\int_{\Delta_{2m}} Q_m^T[F,H]Q_m[F,H]P_m[\overline{F},\overline{G}]P_m^T[F,G]dt_1 \dots dt_2.$$

Ahora bien, como $Q_m^T[F,H]Q_m[F,H]$ y $Q_m^T[F,H]Q_m[\overline{F},\overline{G}]$ no dependen de $t_{m+1},\dots,t_{2m}$ y $P_m[F,G]P_m^T[F,G]$ y $P_m[\overline{F},\overline{G}]P_m^T[F,G]$ no dependen de $t_1,\dots,t_m$, y recordando la definición de Δ_{2m}, obtenemos:

$$Q_m \cdot P_m = \int_{\Delta m} Q_m^T[F,H]Q_m[\overline{F},\overline{H}]dt_1,\dots,dt_m$$

$$\cdot \int_{\Delta_{2m}\Delta_m} P_m[\overline{F},\overline{G}]P_m^T[F,G]dt_{m+1}\dots dt_{2m}$$

Por construcción $Q_m[\overline{F},\overline{H}]$ tiene rango a lo más $\overline{m}$, por lo que $\int_{\Delta m} Q^T[F,H]Q_m[\overline{F},\overline{H}]$ tiene rango a lo más $\overline{m}$, sucediendo lo mismo para $\int_{\Delta_{2\overline{m}}\Delta m} P_m[\overline{F},\overline{G}]P_m^T[F,G]$.

Entonces el lado derecho de la igualdad tiene rango a lo más $\overline{m}$ y como $Q_m \cdot P_m$ tienen por hipótesis rango m, $m \leq \overline{m}$ lo que es una contradicción, pues se supuso $\overline{m} < m$.

Así queda completada la demostración de la primera parte.

Segunda parte.

Si la tercia $\{F_2(t),G_2(t),H_2(t)\}$ es una factorización mínima entonces por (2), y dada la dimensión de $TF_2(t)T^{-1}$ se tiene que $\{F_1(t),H_1(t),G_1(t)\}$ es también una factorización mínima.

Supongamos ahora que las tercias $\{F_1(t),G_1(t),H_1(t)\}$ y $\{F_2(t),G_2(t),H_2(t)\}$ son dos factorizaciones mínimas cualesquiera de una sucesión factorizable de núcleos. Entonces, por (3) y (3*)

$$\begin{aligned} &Q_m[F_1,H_1](t_1,\dots,t_m)\cdot P_m[F_1,G_1](t_{m+1},\dots,t_{2m}) \\ &= Q_m[F_2,H_2](t_1,\dots,t_m)\cdot P_m[F_2,G_2](t_{m+1},\dots,t_{2m}) \end{aligned}$$

Por lo que se probó en la primera parte, las m columnas de $Q_m[F_1,H_1]$ y de $Q_m[F_2,H_2]$, y los m renglones de $P_m[F_1,G_1]$ y de $P_m[F_2,G_2]$ son linealmente independientes sobre Δm.

Entonces, generalizando el teorema 13 de la primera sección,

$$(4) \qquad Q_m[F_1,H_1] = Q_m[F_2,H_2]T^{-1}$$

$$(5) \qquad P_m[F_1,G_1] = TP_m[F_2,G_2]$$

con T una matriz constante no singular.

De (4) tenemos que:

$$\begin{pmatrix} H_1(t_1) \\ H_1(t_1)F_1(t_2) \\ \vdots \\ H_1(t_1)\dots F_1(t_{m-1})F_1(t_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_2(t_1)T^{-1} \\ H_2(t_1)F_2(t_2)T^{-1} \\ \vdots \\ H_2(t_1)\dots F_2(t_{m-1})F_2(t_m)T^{-1} \end{pmatrix}$$

y de (5) tenemos que:

$$[G_1(t_1) \quad G_1(t_2)G_1(t_1)\ldots F_1(t_m)F_1(t_{m-1})\ldots G_1(t_1)]$$

$$= [TG_2(t_1) \quad TF_2(t_2)G_2(t_1)\ldots TF_2(t_m)F_2(t_{m-1})\ldots G_2(t_1)$$

por lo que

$$H_1(t) = H_2(t)T^{-1}$$

$$G_1(t) = TG_2(t).$$

Para ver la relación entre $F_1(t)$ y $F_2(t)$, tenemos que debido a que las tercias

$$\{F_1(t), G_1(t), H_1(t)\}\ ,\ \{F_2(t), G_2(t), H_2(t)\}$$

son factorización de una misma sucesión de núcleos.

$$H_1(t_1)F_1(t_2)\ldots F_1(t_{m+1})\ldots F_1(t_{m+3})G_1(t_{m+2}) =$$

$$H_2(t_1)F_2(t_3)\ldots F_2(t_{m+1})\ldots F_2(t_{m+3})G_2(t_{m+2})$$

entonces

$$Q_m[F_1, H_1](t_1, \ldots, t_m) \cdot F_1(t_{m+1}) \cdot P_m[F_1, G_1](t_{m+2}, \ldots, t_{2m+1})$$

$$= Q_m[F_2, H_2](t_1, \ldots, t_m) \cdot F_2(t_{m+1}) \cdot P_m[F_2, G_2](t_{m+2}, \ldots, t_{2m+1})$$

Sustituyendo (4) y (5) en la igualdad

$Q_m[F_2, H_2]T^{-1} \cdot F_1(t_{m+1}) \cdot TP_m[F_2, G_2] = Q_m[F_2, H_2] \cdot F_2(t_{m+1}) \cdot P_m[F_2, G_2]$

Por la independencoa lineal de las columnas de $Q_m[F_2, H_2]$ y de los renglones de $P_m[F_2, G_2]$

$$T^{-1}F_1(t_{m+1})T \quad = F_2(t_{m+1})$$

$$\Rightarrow \quad F_1(t) \quad = TF_2(t)T^{-1}$$

concluyendo así la demostración de la segunda parte. □

Adem'as del resultado expresado en el teorema anterior, también es conveniente encontrar una relación entre cualquier sucesión factorizable de núcleos y una factorización mínima.

Esta relación se expresa en el siguiente teorema.

TEOREMA 3

Cualquier factorización de una sucesión factorizable de núcleos se puede escribir como:

$$F(t) = T\begin{pmatrix} F_0(t) & 0 & F_{12}(t) \\ F_{21}(t) & F_{22}(t) & F_{23}(t) \\ 0 & 0 & F_{33} \end{pmatrix}T^{-1} \qquad G(t) = T\begin{pmatrix} G_0(t) \\ G_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H(t) = (\,H_0(t) \quad 0 \quad H_2(t)\,)\,T^{-1}$$

donde T es una matriz constante no singular y la tercia $\{F_0, G_0, H_0\}$ es una factorizaciópn mínima de la misma sucesión.

Demostración:

Sea $\{F(t), G(t), H(t)\}$ una factorización de dimensión m de una sucesión de núcleos dada.

Primer caso

Si los m renglones de $P_m[F, G]$ y las m clumnas de $Q_m[F, H]$ son linealmente independientes, tenemos que la tercia $\{F_0(t), G_0(t), H_0(t)\}$ dada por

$$\begin{aligned} F_0(t) &= MF(t)M^{-1} \\ G_0(t) &= MG(t) \\ H_0(t) &= H(t)M^{-1} \end{aligned}$$

donde M es cualquier matriz constante de dimensión $m \times m$, no singular; es también una factorizaciónde la sucesión y ésta es mínima. (Pues, por el teorema 2, $\{F(t), G(t), H(t)\}$ es mínima.) Entonces:

$$F(t) = TF_0(t)T^{-1}, G(t) = TG_0(t), H(t) = H_0(t)T^{-1}$$

donde $T = M^{-1}$, por lo que se tiene el resultado enunciado. □

Segundo caso

Supongamos que $P_m[F, G]$ tiene únicamente $\bar{m} \le m$ renglones linealmente independientes sobre Δ_m, entonces, por el lema 3, existe M una matriz constante no singular de dimensión $m \times m$ tal que

$$MF(t)M^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{F}_{11}(t) & \bar{F}_{12}(t) \\ 0 & \bar{F}_{22}(t) \end{pmatrix} \qquad MG(t) = \begin{pmatrix} \bar{G}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde $\bar{F}_{11}(t)$ es una matriz de dimensión $\bar{m} \times \bar{m}$ tal que $P_{\bar{m}}[\bar{F}_{11}, \bar{G}_1(t)]$ tiene sus m renglones linealmente independientes sobre Δ_m.

Tomemos la partición de $H(t)M^{-1}$ dada por

$$H(t)M^{-1} = (\bar{H}_1(t) \quad \bar{H}_2(t))$$

donde $\bar{H}_1(t)$ es una matriz de dimensión $1 \times \bar{m}$.

Ahora bien, si $Q_{\bar{m}}[\bar{F}_{11}(t), \bar{H}_1(t)]$ tiene únicamente $\tilde{m} \le \bar{m}$ columnas linealmente independientes sobre $\Delta_{\bar{m}}$ tenemos que, por el lema 4, existe una matriz R constante no singular, de dimensión $\tilde{m} \times \tilde{m}$, tal que

$$R\bar{F}_{11}(t)R^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_0(t) & 0 \\ \tilde{F}_{21}(t) & \tilde{F}_{22}(t) \end{pmatrix} \quad \bar{H}_1(t)R^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{H}_0(t) & 0 \end{pmatrix}$$

donde $Q_{\tilde{m}}[F_0(t), H_0(t)]$ tiene sus $\tilde{m}$ renglones linealmente independientes sobre $\Delta_{\tilde{m}}$.

Ahora bien, si tomamos la partición

$$R\bar{G}_1(t) = \begin{pmatrix} \tilde{G}_0(t) \\ \tilde{G}_2(t) \end{pmatrix}$$

Entonces, $P_{\tilde{m}}[\tilde{F}_0, \tilde{G}_0(t)]$ tiene por construcción sus $\tilde{m}$ renglones linealmente independientes.

Sea

$$S = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & I_{m-\tilde{m}\times m-\tilde{m}} \end{bmatrix}$$

donde S es una matriz constante no singular de dimensión $m \times m$, y

$$SMF(t)M^{-1}S^{-1} = S\begin{pmatrix} \bar{F}_{11} & \bar{F}_{12}(t) \\ 0 & \bar{F}_{22}(t) \end{pmatrix} S^{-1}$$

$$SMG(t) = S\begin{pmatrix} \bar{G}_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad H(t)M^{-1}S^{-1} = (\bar{H}_1(t) \quad \bar{H}_2(t))S^{-1}$$

tomando $SM = T^{-1}$

$$T^{-1}F(t)T = \begin{pmatrix} \tilde{F}_0(t) & 0 & \tilde{F}_{12}(t) \\ \tilde{F}_{21} & \tilde{F}_{22} & \tilde{F}_{23}(t) \\ 0 & 0 & \bar{F}_{22} \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}G(t) = \begin{pmatrix} \tilde{G}_0(t) \\ \tilde{G}_2(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad H(t)T = (\tilde{H}_0 \;\; 0 \;\; \bar{H}_2)$$

donde al multiplicar por la derecha por T a $T^{-1}F(t)T$ y a $T^{-1}G(t)$, y por la izquierda por T^{-1} a $T^{-1}F(t)T$ y a $H(t)T$, tenemos la expresión buscada y $\{\tilde{F}_0, \tilde{G}_0, \tilde{H}_0\}$ es una factorización mínima.

□

Corolario 1

La dimensión m_0 de una factorización mínima, de una sucesión factorizable de núcleos, está dada por

$$m_0 = rango\{\mathcal{Q}_m[F,H]\mathcal{P}_m[F,G]\}$$

donde $\{F(t), G(t), H(t)\}$ es cualquier factorización de la sucesión.

Demostración:

Sea $\{F(t), G(t), H(t)\}$ una factorización cualquiera de la sucesión de núcleos dada. Entonces, por el teorema anterior, existe T no singular y $\{F_0(t), G_0(t), H_0(t)\}$ una factorización mínima tal que

$$F(t) = T \begin{pmatrix} F_0(t) & 0 & F_{12}(t) \\ F_{21}(t) & F_{22}(t) & F_{23}(t) \\ 0 & 0 & F_{33} \end{pmatrix} T^{-1} \qquad G(t) = T \begin{pmatrix} G_0(t) \\ G_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H(t) = \begin{pmatrix} H_0(t) & 0 & H_2(t) \end{pmatrix} T^{-1}$$

Como $\{F_0, G_0, H_0\}$ es una factorización mínima de la misma sucesión

$$Q_m[F,H]P_m[F,G] = Q_m[F_0,H_0]P_m[F_0,G_0]$$

$$\Rightarrow Q_m^T[F,H]Q_m[F,H]P_m[F,G]P_m^T[F,G] =$$
$$Q_m^T[F,H]Q_m[F_0,H_0]P_m[F_0,G_0]P_m^T[F,G]$$
$$\Rightarrow \mathcal{Q}_m[F,H]\mathcal{P}_m[F,G] = \int_{\Delta_{2m}} Q_m^T Q_m^0 P_m^0 P_m^T$$

(donde $Q_m^0 = Q_m[F_0,H_0], P_m^0 = P_m[F_0,G_0]$) pero, $Q_m^0 P_m^0$ tiene rango m_0, la dimensión de F_0, por lo tanto, $\mathcal{Q}_m[F,H]\mathcal{P}_m[F,G]$ tiene a lo más rango m_0. Es decir,

$$rango\{\mathcal{Q}[F,H], \mathcal{P}[F,G]\} \leq m_0$$

Por otro lado,

$$P_m[F,G] = T\left[\begin{pmatrix} G_0(t_1) \\ G_1(t_1) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} F_0(t_2) & 0 & F_{13} \\ F_{21}(t_2) & F_{22}(t_2) & F_{23} \\ 0 & 0 & F_{33}(t_2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G_0(t_1) \\ G_1(t_1) \\ 0 \end{pmatrix} \cdots\right]$$

$$Q_m[F,G] = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} H_0(t_1) & 0 & H_3(t_1) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} H_0(t_1) & 0 & H_3(t_1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_0(t_2) & 0 & F_{13} \\ F_{21}(t_2) & F_{22}(t_2) & F_{23} \\ 0 & 0 & F_{33}(t_2) \end{pmatrix} \\ \vdots \end{bmatrix} T^{-1}$$

Observando que $Q_m^T Q_m P_m P_m^T$ tiene como primera entrada a $Q_m^{0T} Q_m^0 P_m^0 P_m^{0T}$ y como

$$\mathcal{Q}_m[F_0,H_0]\mathcal{P}_m[F_0,G_0]$$

tiene rango igual a m_0, se tiene que

$$\mathcal{Q}_m[F,H]\mathcal{P}_m[F,G]$$

tiene al menos rango igual a m_0, es decir

$$rango\{\mathcal{Q}_m[F,H]\mathcal{P}_m[F,G]\} \geq m_0$$

por lo tanto

$$rango\{\mathcal{Q}_m[F,H]\mathcal{P}_m[F,G]\} = m_0 = \dim F_0$$

□

Hasta el momento únicamente hemos trabajado con factorizaciones. En el teorema 1 vimos que una sucesión de núcleos es realizable con un sistema bilineal si y sólo si $w_1(t_1)$ iene transformada de Laplace racional propia y si existe una factorización de la sucesión de núcleos. Ahora bien, como en el caso lineal, estamos interesados en buscar realizaciones mínimas. Veamos pues lo que significa que una realización sea mínima y la relación que tiene con las factorizaciones mínimas.

Definición

Una realización $\{A, N, B, C\}$ es mínima si la dimensión del espacio de estados (dim A), alcanza su valor mínimo sobre el conjunto de todas las realizaciones posibles para una sucesión dada de núcleos.

Denotando por $\delta\{L(t)\}$ al orden del patrón de peso $L(t)$, se tiene el siguiente teorema.

TEOREMA 4

Sea $\{w_i(t_1, \ldots, t_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de núcleos realizable bilinealmente, y sea $\{F_0, G_0, H_0\}$ una factorización mínima de la subsucesión $\{w_i(t_1, \ldots, t_i\}_{i=2}^{\infty}$. Entonces, la realizaciones bilineales mínimas son tales que:

a) La dimensión del espacio de estados está dada por:

$$n_0 = \delta\left\{\begin{pmatrix} w_1(t) & H_0(t) \\ G_0(t) & F_0(t) \end{pmatrix}\right\}$$

b) Son una clase de equivalencia módulo la relación

$$\{\, A_1, N_1, B_1, N_1\} \sim \{A_2, N_2, B_2, C_2\} \iff \begin{aligned} A_1 &= TA_2T^{-1} \\ N_1 &= TN_2T^{-1} \\ B_1 &= TB_2 \\ C_1 &= C_2T^{-1} \end{aligned}$$

con T una matriz no singular.

Demostración:

Sea $\{F(t), G(t), H(t)\}$ una factorización cualquiera de $\{w_i(t_1, \ldots, t_i\}_{i=2}^{\infty}$.

Consideremos la matriz

$$L(t) = \begin{pmatrix} w_1(t) & H(t) \\ G(t) & F(t) \end{pmatrix} \tag{1}$$

Por la demostración de suficiencia del teorema 1, se sigue que cualquier realización lineal de la matriz $L(t)$ genera una realización bilineal de los núcleos, reciprocamente, a partir de cualquier realización bilineal de éstos, es posible construir una factorización, y en consecuencia una matriz $L(t)$. Se puede entonces concluir que todas las realizaciones bilineales se pueden obtener tomando todas las realizaciones lineales de todas la matrices $L(t)$ asociadas a la sucesión dada, aplicándoles el método utilizado en la demostración del teorema 1. Entonces, la dimensión de las realizaciones bilineales mínimas es igual a

$$N_0 =_{L(t)} \min \delta\{L(t)\}$$

Si ahora, se toma la expresión de la factorización $\{F(t), G(t), H(t)\}$ como está dada en el teorema 3 y se sustituye en la expresión de $L(t)$ se tiene:

$$L(t) = \begin{pmatrix} w_1(t) & (H_0(t) \quad 0 \quad H_2(t))T^{-1} \\ T\begin{pmatrix} G_0(t) \\ G_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} & T\begin{pmatrix} F_0(t) & 0 & F_{13}(t) \\ F_{21}(t) & F_{22} & F_{23}(t) \\ 0 & 0 & F_{33}(t) \end{pmatrix} T^{-1} \end{pmatrix}$$

Considerando $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}$ tenemos que

$$L(t) = S \begin{bmatrix} w_1(t) & H_0(t) & 0 & H_2(t) \\ G_0(t) & F_0(t) & 0 & F_{13}(t) \\ G_1(t) & F_{21}(t) & F_{22}(t) & F_{23}(t) \\ 0 & 0 & 0 & F_{33} \end{bmatrix} S^{-1}$$

Se ve entonces que

$$\delta\{L(t)\} \geq \delta\{L_0(t)\}$$

para tota $L(t)$, pues S es no singular y

$$L_0(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) & H_0(t) \\ G_0(t) & F_0(t) \end{bmatrix}$$

es una submatriz de $S^{-1}L(t)S$. Como $L_0(t)$ es un elemento del conjunto de matrices $L(t)$, se alcanza el mínimo, con lo que se prueba la afirmación a). □

Demostración: b)

Sea $\{A, N, B, C\}$ una realización bilineal mínima y sea

$$N\prime N\prime\prime = N$$

una factorización de N tal que $N\prime$ y $N\prime\prime$ tengan rango completo $r = \textit{rango}\ N$. Claramente la tercia

(2) $$F(t) = N\prime\prime e^{At} N\prime \ , G(t) = N\prime\prime e^{At} B, \ \ H(t) = Ce^{At} N\prime$$

es una factorización r-dimensional.

Entonces $r \geq m_0$, pues por hipótesis la dimensión de cualquier factorización no puede ser menor que m_0.

Hay que demostrar que la desigualdad estricta $r \geq m_0$ lleva a una contradicción.

Supongamos que $r \geq m_0$, esto implica que la tercia (2) no es una factorización mínima y por lo tanto es reductible. Supongamos, poı ejemplo,que únicamente $r_1 \leq r$ renglones de $P_r[N\prime\prime e^{At}N\prime, N\prime\prime e^{At}B]$ son linealmente independientes. Entonces existe T una matriz constante no singular de dimensión $r \times r$, tal que T reduce a (2) a una tercia de dimensión r_1.

$F_{11}(t) = \tilde{N}_1\prime\prime e^{At}\tilde{N}_1\prime\prime \;\; G_1(t) = \tilde{N}_1\prime\prime e^{At}B, \;\; H(t) = Ce^{At}\tilde{N}_1\prime$

donde $\tilde{N}_1\prime\prime$ y $\tilde{N}_1\prime$ (de dimensiones $r_1 \times n$ y $n \times r_1$ respectivamente) están definidas por

$$TN\prime = \begin{pmatrix} \tilde{N}_1\prime\prime \\ \tilde{N}_2\prime\prime \end{pmatrix} \quad N\prime T^{-1} = (\tilde{N}\prime \quad \tilde{N}_2)$$

Más aún, la matriz T es tal que

$$\tilde{N}_2\prime\prime e^{At}B = 0, \;\; \tilde{N}_2\prime\prime e^{At}\tilde{N}_1\prime = 0$$

La tercia (3) es una factorización, y por lo tanto, el cuarteto $\{A, \tilde{N}_1\prime\tilde{N}_1\prime\prime, B, C\}$ es una realización bilineal mínima pues su dimensión permanece intacta.

Se sigue entonces que la tercia

$\{A, (B \quad \tilde{N}_1\prime), \begin{pmatrix} C \\ \tilde{N}_1\prime\prime \end{pmatrix}\}$

es una realización lineal mínima de

$$L_0(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) & H_1(t) \\ G_1(t) & F_{11}(t) \end{bmatrix}$$

En consecuencia, los n renglones de la matriz $e^{At}(B \quad \tilde{N}_1\prime)$ son linealmente independientes y esto aunado a (4) implica que $\tilde{N}_2\prime\prime = 0$. Esto es una contradicción pues por hipótesis $N\prime\prime$ tenía rango completo $r \geq m_0$. Por lo tanto $r = m_0$.

Demostración: c)

Sean

$A_1 = TA_2T^{-1}, \;\; N_1 = TN_2T^{-1}, \;\; B_1 = TB_2, \;\; C_1T^{-1}$

con T una matriz constante no singular , entonces

$$w_1(t) = C_1e^{A_1t}B_1 = C_2T^{-1}e^{TA_2T^{-1}t}TB_2$$

Considerando la expansión en serie de $e^{TA_2T^{-1}}$ se ve claramente que $e^{TA_2T^{-1}t} = Te^{A_2t}T^{-1}$ por lo que

$$w_1(t) = C_2e^{A_2t}B_2$$

De manera semejante se ve que ambos cuartetos definen los mismos núcleos de Volterra, por lo que se demuestra la suficiencia.

Consideremos ahora dos realizaciones bilineales mínimas de la misma sucesión, $\{A_1, N_1, B_1, C_1\}$ y $\{A_2, N_2, B_2, C_2\}$ Por el inciso b), tenemos que

$$rango\{N_1\} = rango\{N_2\} = m_0$$

Como ya sabemos, a partir una una realización es posible construir una factorización. Sean
$\{F_1(t), G_1(t), H_1(t)\}$ y $\{F_2(t), G_2(t), H_2(t)\}$
factorizaciones asociadas a las realizaciones.

Entonces, por el teorema 2, estas son equivalentes y existe una matriz M constante no singular de dimensión $m_0 \times m_0$, tal que

$$\begin{pmatrix} w_1(t) & H_1(t) \\ G_1(t) & F_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2(t) & H_2(t) \\ G_2(t) & F_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{pmatrix}$$

Por otro lado, por (3), la expresión anterior se transforma en

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ N_1{}'' \end{pmatrix} e^{A_1 t} (B_1 \quad N_1{}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 \\ N_2{}'' \end{pmatrix} e^{A_2 t} (B_1 \quad N_2{}') \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{pmatrix}$$

En esta expresión aparecen dos realizaciones *lineales* mínimas y por lo tanto existe T no singular tal que

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ N_1{}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 \\ N_2{}'' \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$(B_1 \quad N_1{}') = T(B_2 \quad N_2{}') \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{pmatrix}$$

$$A_1 = T A_2 T^{-1}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ N_1{}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_2 \\ M N_2{}'' \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} C_2 T^{-1} \\ M N_2{}'' T^{-1} \end{pmatrix}$$

$$(B_1 \quad N_1{}') = T(B_2 \quad N_2{}' M^{-1}) = (T B_2 \quad T N_2{}' M^{-1})$$

$\Rightarrow$

$$B_1 = T B_2 \quad C_1 = C_2 T^{-1}$$
$$N_1 = N_1{}' N_1{}'' = T N_2{}' M^{-1} M N_2{}'' T^{-1} = T N_2 T^{-1}$$

por lo que dos realizaciones mínimas, elegidas arbitrariamente, son equivalentes módulo la relación enunciada en el teorema, lo que concluye la demostración. □

2.3
Generalizaciones de resultados obtenidos en el caso lineal

En el caso lineal vimos que una realización es mínima si y sólo si es completamente controlable y completamente observable. En el caso bilineal se tiene un resultado análogo. Sin embargo, debido a la no linealidad del sistema hay que recurrir al concepto de alcanzabilidad.

Diremos que un estado $x_f \in$ (b) R^n es *alcanzable desde el origen* si para $x_0 = 0$ existen $T \geq 0$ y u tales que

$$x(T) = x_f$$

En el caso lineal autónomo este concepto coincide con el de controlabilidad

En el caso bilineal se tiene que el conjunto de todos los estados alcanzables desde el origen no es un subespacio lineal. Sin embargo, es posible sumergirlo en un espacio que si lo sea.

Los resultados que expondremos a continuación sobre alcanzabilidad y observabilidad no los demostraremos, pero lo mencionamos pues es importante ver las analogías que se tienen con el caso lineal.

TEOREMA 5

Sean $\begin{array}{l} \bar{P}_1 = B \\ \bar{P}_i = (A\bar{P}_{i-1} \quad N\bar{P}_{i-1}, \ i = 1,2,3,\ldots \end{array}$

Entonces, el subconjunto de todos los estados del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Nx(t)u(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

alcanzables desde el origen genera un subespacio $\mathcal{X}_p$ de (b) R^n tal que:

a) es el mínimo subespacio invariante bajo A y N que contiene a $\mathcal{R}[B]$;

b) puede expresarse como

$$\mathcal{X}_p = \mathbb{R}[\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_n]$$

En el caso lineal tendríamos que

$$\begin{aligned} \bar{P}_1 &= B \\ \bar{P}_2 &= AB \\ \bar{P}_3 &= A^2B \\ &\vdots \\ \bar{P}_n &= A^{n-1}B \end{aligned}$$

y entonces

$$\mathcal{X}_p = \mathcal{R}[B \quad AB \quad \ldots \quad A^{n-1}] = \mathcal{R}[\mathcal{U}]$$

$$\mathcal{X}_q = \mathcal{N}\left\{\begin{array}{c} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{array}\right\} = \mathcal{N}[\mathcal{V}]$$

donde $\mathcal{V}$ es la matriz de observabilidad del sistema lineal, entonces $\mathcal{X}_q = 0$ si y sólo si $\mathcal{N}[\mathcal{V}] = 0$, si y sólo si $rango\mathcal{V} = n$.

En el caso bilineal, el sistema es observable si $\mathcal{X}_q = 0$.

Teniendo estos subespacios el teorema de realizaciones mínimas en el caso bilineal queda como sigue:

TEOREMA 7

Una realización $\{A, N, B, C\}$ de una sucesión realizable de núcleos es mínima si y sólo si, su espacio de estados es observable y está generado por los estados alcanzables desde el origen.

2.4 Conclusiones

Es importante enfatizar la estricta analogía entre la teoría desarrollada para sistemas lineales y la de sistemas bilineales. Muchos de los resultados obtenidos en el caso lineal se pueden obtener a partir del caso bilineal haciendo simplemente $N = 0$. Esto es de esperarse debido a la estructura de los sistemas bilineales. Una ventaja que tienen estos dos tipos de sistemas es que una de las herramientas fundamentales es el álgebra lineal que permite un tratamiento accesible.

Al trabajar con sistemas no lineales en general, ya no se tiene esta ventaja. La notación y las herramientas empiezan a complicarse y cada vez es más difícil obtener resultados generales.

En ocasiones se tiene un sistema de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x) \quad x(0) = x_0 \end{aligned}$$

definido en espacios localmente euclideanos donde no existe un sistema coordenado que paramatrice globalmente a la entrada, a la salida y al espacio de estados, por lo que es necesario tener mucho cuidado al definir lo que significan los "datos" del sistema.

Ya no es posible ver a los datos de entrada/salida como representados por un objeto que sea una serie infinita (o finita) de matrices como se tiene en los casos analizados en este trabajo. Si se intenta copiar el caso bilineal resulta natural tratar de representar a la salida en términos de una serie de Volterra.

Ahora bien, el problema que se presenta al tratar de hacer esto es encontrar condiciones sobre f y h, bajo las cuales se pueda tener existencia y unicidad de dicha representación.

Acerca de esto, en el artículo de Lesiak-Krener, que se menciona en la bibliografía, se tienen resultados para cuando

$$f(x,u) = \tilde{f}(x) + \sum_{i=1}^{l} u_i g(x)$$
$$y(t) = h(x)$$

es decir, cuando se tiene un caso generalizado del bilineal. En este artículo se ve existencia y unicidad de los núcleos de la serie de Volterra cuando $\tilde{f}, g$ y h son funciones analíticas.

En el artículo de Bronislav Jakubczyk se trata el problema de buscar series de Volterra para las cuales se tenga una realización como la anterior, con $\tilde{f}, g$ y h analíticas.

En este mismo artículo se trabaja también con dos enfoques que no utilizan series de Volterra. Uno de ellos requiere de funcionales de cierto tipo y el otro series de potencias en variables no conmutativas.

Como puede verse, el problema de realización es amplio y puede atacarse desde distintos puntos de vista, buscando representaciones de la salida de distintas formas. Para condiciones muy particulares sobre f y h se tienen resultados locales pero en general es un problema abierto.

ANEXO

A lo largo de la primera parte utilizamos el producto de Kronecker de dos matrices A, de dimensión $m \times n$, y B, de dimensión $p \times q$, recordemo lo que esto significa. Si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_2 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

entonces el producto de Kronecker de A y B, que se denota como $A \otimes B$, es la matriz de dimensión $mp \times nq$ definida como:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

El producto de Kronecker satisface las siguientes propiedades: SeanA, B, C y D matrices de dimensiones $m \times n, p \times q, n \times l, q \times r$, respectivamente, entonces:

$$(A \otimes B)\,(C \otimes D) = AC \otimes BD$$

$$(A \otimes B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} \otimes B^{\mathrm{T}}$$

$$(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$$

(donde * denota la matriz transpuesta conjugada).

Otra matriz de importancia es la que se construye a partir de un polinomio, de manera que el polinomio dado sea el polinomio característico de la matriz. Si $k(\lambda)$ es un polinomio

$$k(\lambda) = \lambda^n + k_1\lambda^{n-1} + \ldots + k_{n-1}\lambda + k_n = 0$$

definimos a la matriz compañera del polinomio $k(\lambda)$ como:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & l & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -k_n & -k_{n-1} & -k_{n-2} & -k_{n-3} & \dots & -k_1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene la propiedad que se desea, es decir, que su polinomio característico es $k(\lambda)$.

BIBLIOGRAFIA

- Barnett,S y Cameron,R.G.*Introduction to mathematical control theory*,Segunda edición, Clarendon Press, Oxford 1985 pp.404
- Lesiak, Casimir y Krener, Arthur. "The existence and uniqueness of Volterra series for nonlinear systems",*IEEE Transactions on Automatic Control* Vol.AC-23,n'6, dic 1978, pp 1090-95.
- Jakubczyk, Bronislaw. "Realization theory for nonlinear systems; three approaches"
- D' Alessandro, Paolo; Isidori, Alberto y Ruberti, Antonio. "Realization and structure theory of bilinear dynamical systems".*SIAM J. Control*.Vol 12,n' 3 agosto 1974,pp 517-535.
- Youla, D.C. "The synthesis of linear dynamical systems from prescribed weighting patterns",*SIAM J. Appl. Math.* 14 (1966),pp.527-549.
- Wonham, W.Murray.*Linear multivariable control;a geometrric approach*,tercera edición, Springer-Verlag. Harrisonburg, 1985, pp 334
- Mc. Clamroch, N. Harris *State models of dynamical systems: A case study approach* Springer-Verlag. New-York, 1980,pp 248
- Mohler, Ronald. *Bilinear control processes* Academic Press, New-York.1973, pp 224
- Casti, John "Recents developments and future perspectives in nonlinear system theory" *SIAM Review* Vol 24, n' 2, Julio 1982.pp 301-331
- *Non linear system theory*, Academic Press, 1985 pp 261
- *Dynamical systems and their applications;Linear Theory* Academic Press, Londres 1977
- Sotomayor, Jorge .*Licoes de equacoes diferencias ordinarias* (Proyecto Euclides) IMPA, Rio de Janeiro, 1979.pp 327