

T-198

0376

D
DES

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

DIVISION DE ESTUDIOS SUPERIORES

FACULTAD DE INGENIERIA

ALGORITMO

PARA LA IMPLANTACION OPTIMA

DE TORRES DE TRASMISION

México, D.F.

Julio 1975

TESIS

QUE PARA OPTAR AL GRADO DE MAESTRO EN INGENIERIA ELECTRICA (POTENCIA)

P R E S E N T A

PEDRO WENCESLAO DOMINGUEZ ROMAN



DEPA

T. UNAM
1975
DOM

A manera de prólogo, conviene aclarar que la subrutina de avances que se adaptó al programa, fue desarrollada por el talentoso amigo Daniel Toral Garibay, bajo el asesoramiento del Dr. Roberto Canales Ruíz.

A este brillante investigador, y aún más al ingeniero Servio Tulio Guillén Burguete, debo dar gracias por haberme ayudado a realizar el presente trabajo. Para ellos, el Instituto de Ingeniería, la División de Estudios Superiores, maestros, compañeros y amigos, y para todo aquel que me ha brindado su estímulo, para las personas que aprecio, vaya esta manifestación de agradecimiento y cariño.

I N D I C E

	Pág
1. INTRODUCCION	1
1.1 Generalidades	1
1.2 Método de solución	3
1.3 Método manual	3
1.4 Método de solución con computadora	7
2. ALGORITMO DE OPTIMIZACION CON LA TECNICA DE BRANCH-AND-BOUND	9
2.1 Consideraciones generales	9
2.2 Planteamiento del problema	11
2.3 Criterios para la optimización	11
2.4 Descripción del algoritmo	13
3. ANALISIS Y PROGRAMACION DEL ALGORITMO	20
3.1 Descripción general	20
3.2 Entrada de datos	21
3.3 Descripción del programa principal	27
3.4 Descripción de las subrutinas	32
3.5 Observaciones adicionales	40
3.6 Pruebas y resultados	42
3.7 Consideraciones finales	46
APENDICE A	49
APENDICE B	51
APENDICE C	57
4. REFERENCIAS	65

1. INTRODUCCION

1.1 Generalidades

La automatización del procedimiento de localización de torres de transmisión eléctrica y la consiguiente posibilidad de emplear computadoras en el diseño completo de una línea de transmisión, actualmente son una realidad. Existen al respecto programas digitales tanto para el estudio fotogramétrico del área por donde se desea pasar una línea eléctrica, como para diseño e implantación de las diversas torres requeridas.

La investigación de esos aspectos empezó en la década pasada, y si hoy día se prosigue trabajando sobre el mismo asunto, es con objeto de mejorar las soluciones logradas, principalmente en lo que a exactitud y economía se refiere. En esto radica

la finalidad del presente estudio.

Para resolver el problema de localización de torres se cuenta con una serie de datos, entre ellos las cotas que definen los diferentes puntos del terreno por donde va a pasar la línea, así como las alturas, tipos y costos de diseño de las torres, lo que implica distribuir las torres sobre un terreno de la manera más económica, manteniendo todos los libramientos y límites de carga establecidos.

El programa de computadora que aquí se presenta ha sido desarrollado de tal manera que suministre una solución óptima, cualquiera que sean los tipos de torres y las condiciones del terreno.

La diferencia entre dicho programa y otros desarrollados anteriormente (refs 2,5,9 y 14) es que estos únicamente resuelven el problema siguiendo los mismos procedimientos manuales, con muy ligeras variantes. En general, consideran un número grande de alternativas, imposibles de manejar en los métodos manuales, pero no garantizan la optimalidad de la solución. Es decir, el objetivo de estos programas digitales es ejecutar, de una manera más rápida la parte mecánica del trabajo del proyectista, sin abandonar el método tradicional de ubicar, gráficamente, las torres sobre el perfil de la línea. Incluso, en alguno de esos programas (ref 2) se deja a la iniciativa del proyectista la decisión de dónde se van a emplear torres de tensión y dónde de suspensión. En tales aspectos, el presente programa es más ambicioso.

1.2 Método de solución

El método manual exige mucha capacidad y experiencia por parte del proyectista, a la vez que presenta problemas en cuanto a la lentitud, sobre todo si se desea considerar dos o más soluciones, y problemas de exactitud y economía. Además, no es posible afirmar que la respuesta obtenida sea la óptima.

Es conveniente hacer una introducción al problema de localización de estructuras de transmisión en el diseño de líneas aéreas, explicando en qué consiste el método manual.

1.3 Método manual

1.3.1 Representación del perfil de tierra

El primer paso es realizar un estudio de campo, el cual exige cálculos muy laboriosos pero sencillos.

El perfil de la línea se hace figurar, en forma gráfica, en una serie de hojas de acuerdo con escalas horizontales y verticales apropiadas.

Ese plano de ruta debe ser suficientemente detallado, e indicar donde atraviesan carreteras, ríos, canales, ferrocarriles, etc. Asimismo señalar los límites de las propiedades, cruces con otras líneas (eléctricas o de otra clase) y todos los elemen-

tos de interés observados a lo largo del perfil de tierra.

1.3.2 Utilización de las plantillas

La altura del conductor, Y , a una distancia X del origen del propio conductor, puede ser aproximada mediante la relación parabólica

$$Y = K X^2 \tag{1.1}$$

donde K es función de la tensión, T , considerada constante para una temperatura específica del conductor, y del peso unitario, w .

Con base en esos datos se construye una plantilla transparente de forma parabólica, similar a la curva del conductor. Si la plantilla ha sido preparada para una flecha, Y , a temperatura máxima, los libramientos que representa son mínimos.

Siempre que el claro real sea mayor que el de diseño de la plantilla, los errores en los libramientos no representan peligro alguno.

La tensión del conductor puede considerarse constante, a la máxima temperatura, para determinado número de torres de suspensión dispuestas entre dos torres de tensión. Así, para esa serie de claros se puede usar una misma plantilla. Ese claro simple se conoce como claro regulador y se obtiene numéricamente con la expresión

$$CR = \frac{\sqrt{\sum L_i^3}}{\sqrt{\sum L_i}}, \quad i = 1, 2, \dots, h \quad (1.2)$$

donde L representa las longitudes individuales de los claros, y h el número de los claros entre las dos torres de tensión.

La planeación se realiza con el valor estándar del claro regulador inmediato inferior al de la sección en estudio.

1.3.3 Localización de las torres

Una vez que ha sido fijada una torre la posición de la siguiente, que da alcance máximo, se encuentra haciendo coincidir la plantilla con el perfil de tierra; las alturas de las torres se consideran iguales a la altura del conductor más bajo menos el libramiento requerido.

Una vez que la plantilla se ha colocado lo más próxima posible al perfil (ligeramente encima), existen varias posibilidades de alturas de torres. Para las más altas, los claros son mayores.

En cada claro debe existir un punto de tangencia entre la plantilla y el perfil de tierra, pues de lo contrario el libramiento sería demasiado grande. En los puntos del perfil que hacen contacto con la plantilla, el libramiento del conductor a tie-

rra es igual al valor mínimo preestablecido; y en aquellos donde se requiere un libramiento superior al mínimo, se traza una altura ficticia a fin de lograr la posición deseada del conductor.

1.3.4 Claro de viento y claro de peso

El claro de viento de una torre se calcula como la semisuma de las longitudes de los claros adyacentes a ella. El claro de peso, en cambio, es igual a la distancia horizontal entre los vértices de las parábolas que forma el conductor a ambos lados de esa torre.

El claro de viento es proporcional a la carga horizontal transversal que actúa sobre la torre debido a la acción que ejerce el viento sobre el conductor y los cables de tierra. Por otra parte, los ángulos de deflexión, θ , que aparecen a lo largo de la ruta dan lugar a una fuerza horizontal transversal, constante, la cual también actúa sobre la torre. Su valor es igual a $2T \sin (\theta/2)$, si T es la tensión en el conductor.

El claro de peso, a su vez es proporcional a la fuerza vertical que actúa, en sentido descendente, sobre la cruceta de la torre. Debe impedirse que los valores de este claro lleguen a ser muy bajos porque, principalmente en las torres de suspensión no es conveniente la elevación. De la misma manera el ángulo de oscilación de la cadena de aisladores, para la velocidad máxima del viento, no debe ser tan grande que los libra-

mientos mínimos sean excedidos. Lo que suele hacerse es especificar un valor mínimo para la relación $\frac{\text{claro de peso}}{\text{claro de viento}}$, puesto que el ángulo de oscilación de la cadena es igual al valor calculado como

$$\tan^{-1} \left(\frac{\text{carga de viento}}{\text{carga de peso}} \right) \quad (1.3)$$

1.3.5 Tipos y costos de las torres

Tan pronto han sido determinadas las posiciones que ocupan las torres, así como sus alturas, tanto su tipo como su costo pueden conocerse mediante una tabla de costos típicos.

Se tiene un esquema de cargas de acuerdo con las especificaciones generales, dadas en relación con varios parámetros de diseño: libramientos, claros de viento y de peso, ángulo de deflexión, carga vertical, factor de seguridad, tamaño del conductor y tamaño del cable a tierra.

Para que la localización de las torres en cuestión sea económica, se recomienda al proyectista ajustarse a ciertas reglas, tales como emplear torres de tensión bajas, buscar que la plantilla coincida con el perfil, etc.

1.4 Método de solución con computadora

Al aplicar la computadora al problema de implantación de torres se hace una simulación matemática del método manual explicado.

Sin embargo, a diferencia de éste, el algoritmo que se propone no necesariamente localiza la siguiente torre en el punto de máximo alcance, sino que considera dominancias sobre el terreno. Por ejemplo, puede ser preferible localizar una torre en la cima de una loma que localizarla a mayor distancia pero a menor altura.

El método de solución consiste en ir considerando diferentes alternativas de ramificación, e ir las comparando de acuerdo a ciertos criterios de dominancia, para conservar aquellas opciones que podrían estar contenidas en una solución óptima. El procedimiento es el de rama y límite.

2. ALGORITMO DE OPTIMIZACION CON LA TECNICA DE BRANCH-AND-BOUND

2.1 Consideraciones generales

Son innumerables los casos en que el método de branch-and-bound o de rama y límite ha encontrado oportuna aplicación a problemas dentro de los más diversos campos de actividades. Independientemente de su formulación general, a veces con ligeras y otras con profundas modificaciones, esta técnica ha permitido resolver, con miras al óptimo, problemas de capital importancia para la ingeniería y otras áreas.

En este estudio se ha procurado adaptar el principio de rama y límite al problema de distribuir determinado número de torres eléctricas a lo largo de un terreno dado, de manera

que resulte lo más económico posible. En el Apéndice A se definen las condiciones que debe reunir un problema cualquiera para que este principio pueda ser aplicado, de acuerdo al criterio de E. Balas (ref 3).

En los casos en que el problema de localización de torres se ha resuelto mediante programas de computadora (refs 5, 9 y 14), el tiempo empleado por éstos en cada corrida es considerable, lo que aumenta mucho el costo del proyecto. Ello se debe a que en cada paso se analizan todas las combinaciones posibles entre las M alturas disponibles. Por consiguiente el objetivo real del presente algoritmo es descubrir un procedimiento que permita ahorrar bastante tiempo de computadora.

Uno de los aspectos más interesantes de este método es que se obtienen las M_1 mejores soluciones factibles, incluyendo la óptima, lo cual permite al proyectista decidirse por la más conveniente entre aquellas cuya diferencia de costos no es muy grande. Asimismo, se observa que tal como sucede con los problemas atacados con la técnica de rama y límite para los casos que implican muchos elementos, las necesidades de tiempo y memoria aumentan. Estas restricciones obligan a dividir la longitud total en tramos, cuando se trata de un perfil de tierra muy extenso, y los óptimos parciales se encadenan para dar la solución óptima completa. En todo caso, este programa, preparado para una computadora NOVA 800, con capacidad de memoria muy limitada, podría adaptarse a una computadora más perfeccionada y de mayor capacidad de memoria.

2.2 Planteamiento del problema

El problema de localización de estructuras puede ser formulado de manera general como sigue: dado un perfil de tierra, por el cual se desea pasar una línea de transmisión eléctrica, con datos y costos de diseño conocidos y un tamaño del conductor bien especificado, encontrar la mejor distribución de localizaciones, tal que la combinación tipo-altura de cada torre contribuya a que el costo total sea mínimo.

En el caso general, se dispone de t_i torres y h_j alturas. Cada combinación t_i-h_j tiene asignado un costo, C_{ij} . Entonces, n torres deben ser distribuidas en una ruta donde se va a colocar una línea eléctrica aérea. El asunto es determinar los n puntos sobre el terreno donde deben estar localizadas estas estructuras y cuál combinación t_i-h_j es la más apropiada en cada torre para que la solución sea óptima.

2.3 Criterios para la optimización

Debido a la fuerza que ejerce el viento sobre el cable conductor y al propio peso del cable, la distancia entre una pareja dada de torre influye bastante en el costo de ambas, siendo mayor este mientras más grande es la distancia.

Tomando en cuenta que el costo de las torres aumenta con la altura se comprende que resulta más económico colocar muchas

2.4 Descripción del algoritmo

Al utilizar el método de rama y límite el problema se representa mediante un árbol dividido, en el cual cada nodo corresponde a una torre específica y cada rama del árbol representa una conexión entre torres, con el sentido en que el árbol se aproxima a la meta (fig.pág.19).

La ramificación consiste en generar subconjuntos de M alternativas, a partir de un nodo que se toma como origen. Cada uno de los nodos está definido por atributos particulares. Así se logran cada vez más subconjuntos, los cuales favorecen la obtención de la solución óptima buscada.

En cada ramificación, los nodos procedentes de un nodo común, por definición, no son comparables entre sí. Las ramificaciones se hacen mediante la subrutina de avances, la cual será explicada en la sección 3.4.1.

Un nodo está definido por ocho variables, de las cuales las más importantes son el avance horizontal, la altura de la torre sobre el nivel del mar y el costo acumulado. Así, para cada nueva ramificación se determinan los valores de dichas variables y quedan fijadas cotas de forma que se conservan todas aquellas soluciones que superan a las demás en al menos una de esas tres variables y las soluciones restantes, las dominadas, se descartan.

2.4.1. Justificación del algoritmo

Dadas dos soluciones parciales, los criterios para compararlas entre sí son: mayor avance total, menor costo acumulado y mayor altura absoluta. En general, no puede haber eliminación entre los elementos precedidos por el mismo nodo de un subconjunto de soluciones, ya que la más avanzada, por ejemplo, tendrá un costo más elevado que las otras, etc, y no se cumple el criterio de eliminación empleado.

Tampoco habrá eliminación entre los nodos que permanecen activos en una iteración determinada, sino entre estos y los nuevos nodos generados. Además, si una solución factible reuniera los atributos de mayor avance, altura superior y costo mínimo, entonces esta eliminaría a todas las existentes y quedaría como la solución óptima. Pero tal cosa no es posible, porque siempre existirán $M-1$ soluciones generadas junto con ella que no podrían ser eliminadas.

2.4.2 Comparaciones y eliminaciones

Los nodos se diferencian enumerándolos $i=1,2,3,\dots$, según el orden en que van apareciendo. Los recién generados por el algoritmo se llaman nodos candidatos y se colocan dentro de la matriz C .

El conjunto de nodos factibles, que no han sido ramificados ni eliminados, se conocen como nodos frontales y están dis-

puestos en una matriz F . Así mismo, los nodos que ya fueron ramificados, pero que cuando menos una de sus ramas se prolonga hasta el frente, se denominan nodos atrasados o pasivos. La matriz A se compone de estos.

Al iniciar cada iteración, se ramifica el más atrasado de los nodos del frente, es decir, aquél cuyo avance total es menor. De esta forma, al elegir el nodo más atrasado, el propósito es hacer que los nuevos nodos ramificados sean comparables con los nodos activos restantes.

Es así como se obtienen M nuevos nodos que constituyen las ramificaciones del más atrasado. Tal como aquí se emplea, una iteración comprende las operaciones efectuadas desde que se ramifica algún nodo hasta que se ramifica el siguiente, y un nivel está dado por el número de nodos precedentes de un frontal; por ejemplo, todos aquellos que poseen cuatro nodos anteriores se hallan en el cuarto nivel.

Después de realizar la ramificación, debe investigarse cuáles nodos de las matrices C y F deben enumerarse. Para ello, el algoritmo efectúa una comparación de alternativas entre los nodos candidatos y los del frente, aplicando el criterio de dominancia. Si un nodo resulta dominado, se descarta toda ramificación posterior de este, colocándolo en la matriz E para que él a su vez pueda eliminar nodos de los niveles anteriores.

La ventaja de utilizar el criterio de dominancia en el princi-

pio de rama y límite es que se puede lograr una importante cantidad de eliminaciones entre las soluciones factibles.

Considerando que en las columnas 3, 4 y 5 de las matrices C y F se almacenan los valores respectivos de avance total, altura absoluta y costo acumulado, la situación de dominancia entre dos nodos (por ejemplo, el nodo candidato 7 y el nodo frontal 3), puede definirse a partir de las relaciones:

$$F(3,3) \geq C(7,3)$$

$$F(3,4) \geq C(7,4)$$

$$F(3,5) \geq C(7,5)$$

Si se cumplen tres condiciones, con al menos una desigualdad, se dice que el nodo 3 de F domina al nodo 7 de C, y este último es eliminado del proceso conjuntamente con todos aquellos que siendo anteriores a él, no tienen ninguna otra ramificación.

Si en algún caso no se verifican las tres relaciones simultáneamente, se concluye que no hay dominancia y se pasa a la siguiente comparación. En el caso crítico de igualdad plena entre dos nodos solamente se conserva uno. Estas comparaciones tienden a evitar que la matriz F llegue a contener un número excesivo de nodos.

El procedimiento de comparaciones y eliminaciones puede interpretarse como la aplicación de ciertos atributos asociados a una solución parcial, para eliminar aquellas soluciones que da-

rían lugar a localizaciones futuras que de todas maneras se -
rían dominadas. Puede resumirse así:

Si un nodo cualquiera, supóngase J , en alguna etapa del pro-
ceso domina a otro nodo, K , entonces, en todas las etapas
futuras la relación entre ambos será tal que nunca las rami-
ficaciones del nodo K llegarán a dominar a alguna de las ra-
mificaciones del J .

En resumen, si se conocen todos los atributos de los nodos del
frente y los de los nodos candidatos, puede determinarse, com-
parándolos entre sí, cuáles proporcionan una solución óptima .

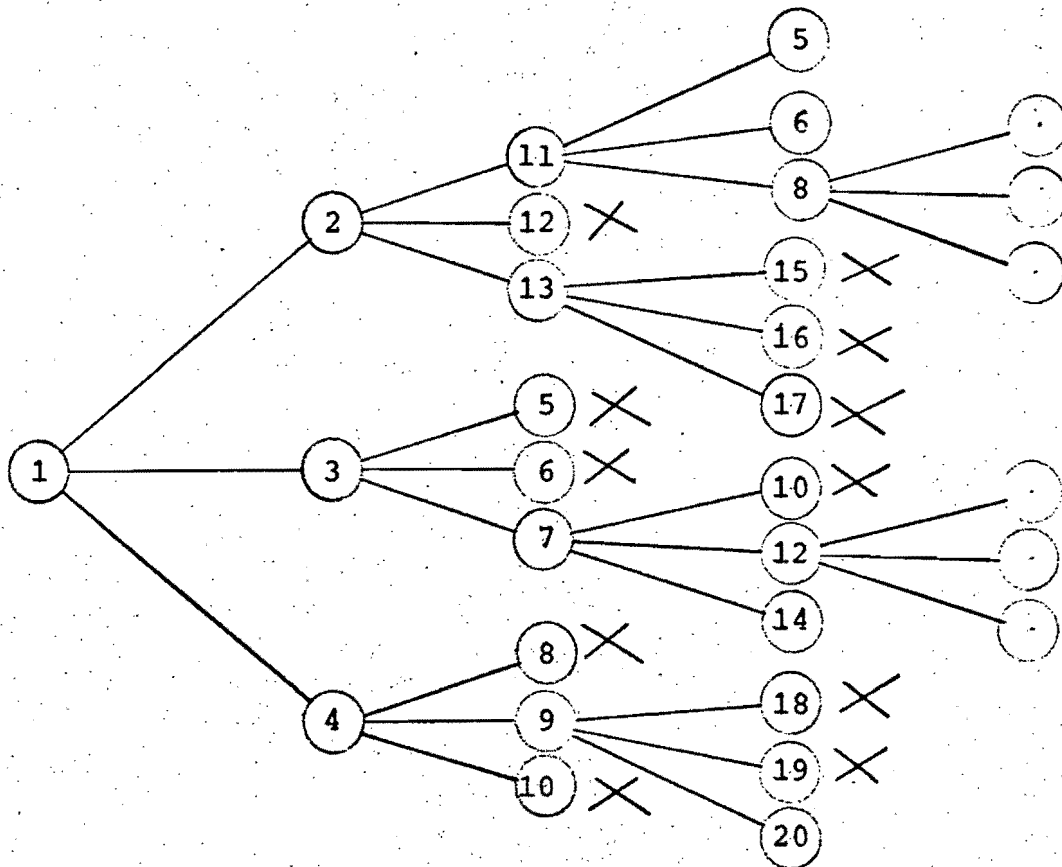
Cuando dos o más elementos del frente han quedado exactamente
en la misma posición, siendo esta la más atrasada, la ramifi-
cación tiene lugar a partir de uno cualquiera de ellos que el
programa escoge arbitrariamente.

2.4.3 Construcción del árbol

El árbol se forma tomando como origen un nodo inicial, para el
cual se definen su tipo y altura, considerando que se encuentra
en la posición cero, o sea, en el punto inicial del terreno. Un
árbol de alternativas, con $M=3$, se muestra a continuación en la
página 19.

i) Se empezó por el nodo 1 y se generaron tres alternativas,
entre las cuales no puede haber dominancia, puesto que la más

avanzada es , probablemente, la más alta y por ende la más cara.



ii) Se seleccionó el nodo más atrasado, es decir, el 3, y se generaron otros: los 5,6 y 7. El siguiente nodo ramificado fué el 4, y así después el 2.

iii) Al llegar, en este caso, al segundo nivel, se realizaron las comparaciones de lugar y resultaron eliminadas cinco alternativas numeradas 5,6,8,10 y 12.

iv) La siguiente ramificación tuvo lugar tomando como base a 11, el nodo más atrasado de todos los restantes, y después los 7,13 y 19 en forma sucesiva. Como se ve, al ramificar los

nodos 11 y 7, los nuevos nodos obtenidos fueron designados con los números de los eliminados.

v) En el tercer nivel tambien hubo eliminaciones de varias alternativas.

El siguiente paso es realizar nuevos avances, y así sucesivamente hasta llegar a límite de longitud previamente marcado.

3. ANALISIS Y PROGRAMACION DEL ALGORITMO

3.1 Descripción general

El algoritmo de optimización desarrollado con base en la técnica de rama y límite se muestra en las páginas 22 y 23, en forma de diagrama de bloques.

El programa elabora un árbol de alternativas, las cuales son guardadas en las matrices F, C y A .

A medida que avanza el proceso, se generan nuevas alternativas o soluciones factibles y se efectúan las comparaciones y elimina-

ciones de lugar; las mejores soluciones eliminan a las menos prometedoras y así en cada iteración hasta que se llega al valor dado como límite de longitud del terreno, L_2 .

Cuando la alternativa factible más atrasada se encuentra en una posición L_1 , tal que $L_1 > L_2$, el programa acaba, dando a conocer las características de la solución óptima. Es decir, la más económica de todas las factibles.

El diagrama de bloques muestra el encadenamiento lógico de todos estos elementos (págs.24,25)

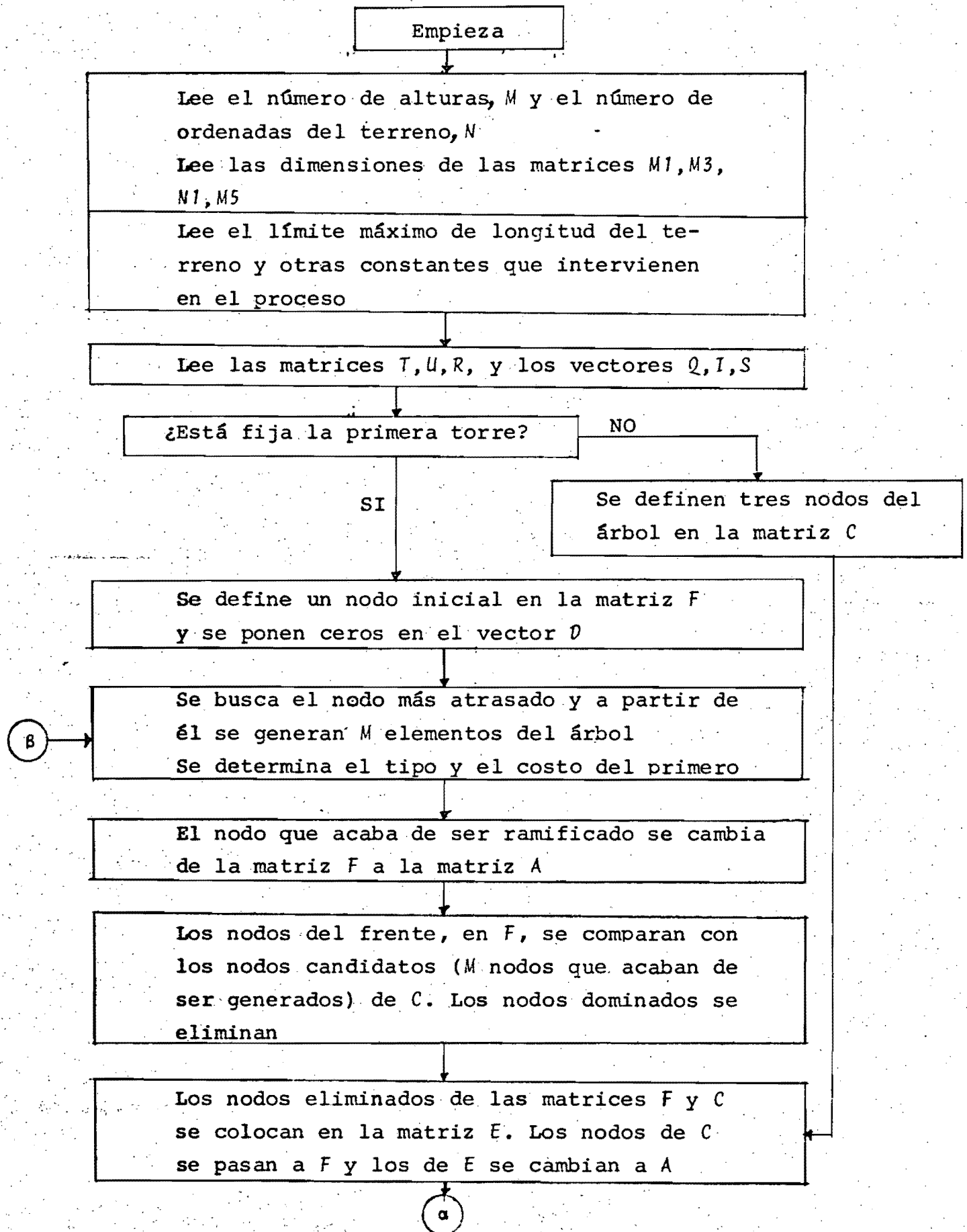
3.2 Entrada de datos

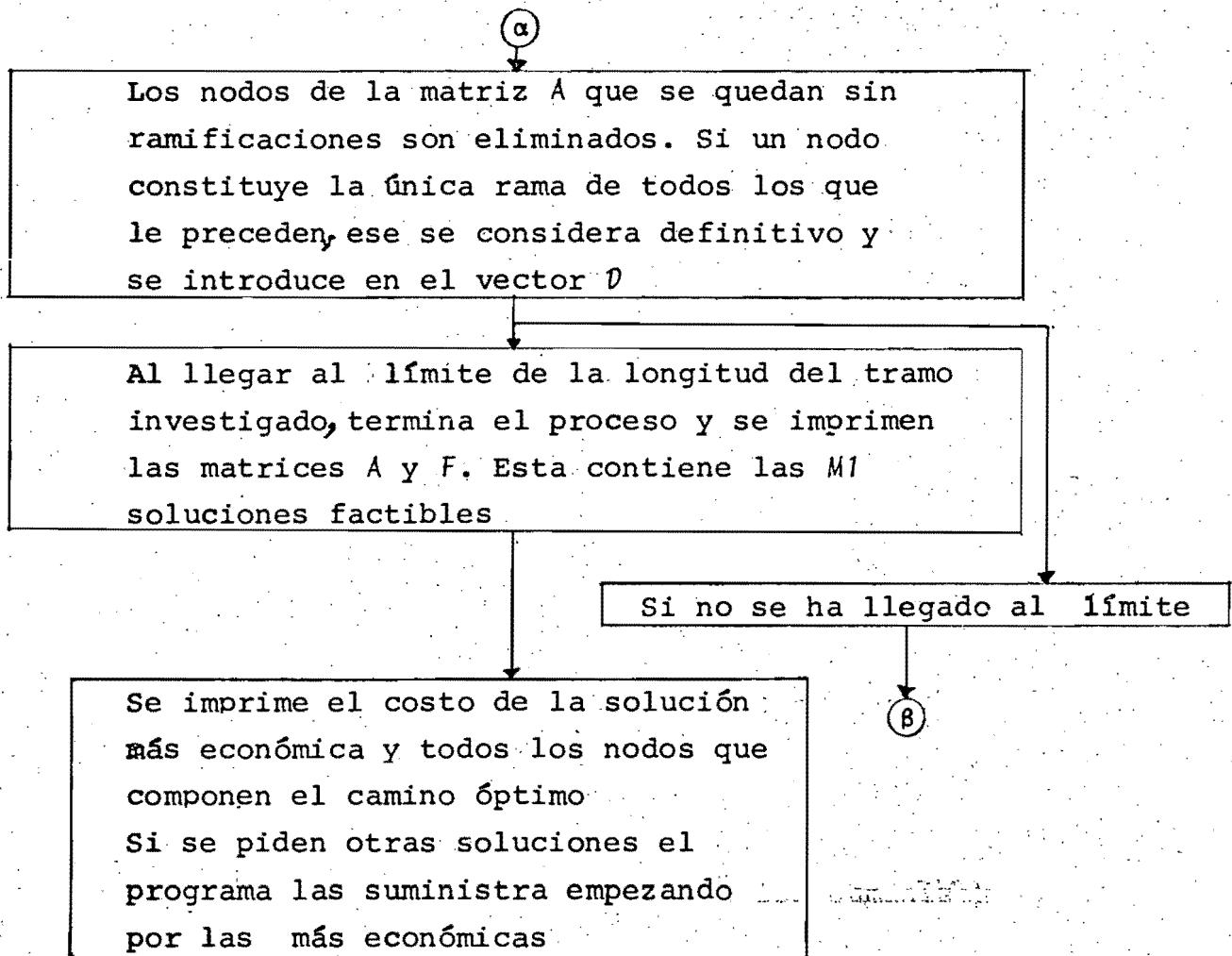
El programa empieza con la lectura de todos los datos de entrada. Las variables, matrices y datos en general, dados como entrada, son, usando la misma nomenclatura del programa, en lenguaje BASIC:

N: Número de ordenadas o cotas del terreno. Las ordenadas se toman según un intervalo fijo; en este caso cada 20 m., por tanto, mientras mayor sea la longitud del terreno, más grande será N . El vector S tiene este valor como dimensión.

X5: Longitud auxiliar empleada para la subrutina de localización de torres. Mediante esta longitud y una tolerancia Z_3 , escogida convenientemente, se evita que el programa aborte al inten

Diagrama de Bloques





tar colocar una torre más allá de la longitud máxima permitida. En general, es conveniente escoger $Z3$ y $X5$, tales que $Z3+X5 \leq L2$, la longitud del tramo en estudio.

$M3, N1, M5, M1$: Dimensiones de las matrices E, F, A, T, U y del vector I . Se escogen conforme el criterio del proyectista .

L : Valor estimado para el libramiento mínimo a tierra del conductor más bajo.

$K6$: Constante de la catenaria del terreno.

$A4$: Ordenada del terreno donde se va a poner la primera estructura.

Además de los anteriores se leen otros datos, requeridos sobre todo por la subrutina (auxiliar) de cálculo de cargas verticales y transversales . Estos datos son: los claros máximo y mínimo, $Q9$ y $Q1$; la tangente máxima del ángulo de inclinación de las cadenas, $G9$; las constantes unitarias de viento, $C1$, y de peso, $C2$; el valor de los contrapesos $P6$ y el número máximo de contrapesos, $S1$.

$T(M5, 4)$: Matriz de tipos de torres contra valores de claros de viento y de peso, relación de claros y tangente del ángulo de inclinación de las cadenas de aisladores. Estos valores se estipulan por el diseñador y varían con el tipo de torre.

$U(M5, M)$: Matriz de costos de acuerdo con la altura y tipo de la torre.

$R(M, 4)$: Matriz de costos según la altura de la torre y el claro entre esta y la precedente.

$Q(M)$: Vector que contiene los valores de las alturas.

$S(N)$: Vector que representa todas las ordenadas del terreno.

$I(I)$: Vector de numeración de nodos.

Todos los elementos del vector I son, inicialmente, hechos iguales a -1 . Su objetivo es el de conocer los números que están siendo usados para los nodos que participan en el proceso y los que están libres para ser escogidos. Es decir, todos los nodos con -1 en el vector I , se hallan vacantes, en tanto que los que tienen $+1$ están ocupados.

Otras matrices que son ocupadas en el curso del proceso, se definen enseguida:

$C(M, 8)$: Matriz de nodos candidatos. En esta matriz se meten las alternativas recién generadas por la subrutina correspondiente.

$F(M1, 8)$: Matriz de nodos frontales o terminales; contiene todos los nodos generados anteriormente y que por ser dominantes aún no han sido eliminados.

$D(\delta)$: Vector definitivo. Cuando un nodo frontal está precedido por una serie de nodos sin ramificaciones, entonces ese nodo se coloca en D .

$A(N1,9)$: Matriz de nodos atrasados, en la cual se almacenan todos los nodos del frente que han sido ramificados.

$E(M3,2)$: Cualquier nodo de las matrices C y F que no reúne los requisitos comparativos de dominancia, es colocado en esta matriz de nodos eliminados.

$H(J) = Q(J) - L$: Altura auxiliar para la subrutina de avances.

$B(M,3)$: Matriz donde se guardan los valores calculados en la subrutina de cargas verticales y transversales.

$P(M,2), W(M1,2)$: Estas matrices son utilizadas como funciones de costos y en ellas se meten los valores que permiten hacer las comparaciones entre alternativas en cada interacción.

Las funciones o índices de costos están descritas en la sección 3.4.

Los nodos de la matriz A que se quedan sin ramificaciones posteriores son eliminados del proceso.

Las matrices F y C , así como el vector D , presentan, por columnas, los siguientes elementos:

- 1.^a : número del nodo.
- 2.^a : número del nodo anterior.
- 3.^a : avance horizontal total, contado a partir de la subestación inicial.
- 4.^a : altura absoluta, sobre el nivel del mar, esto es, altura del terreno mas la de la torre.
- 5.^a : costo de la torre considerada.
- 6.^a : numeración de las alturas. Así, la más baja es 1, la siguiente 2, y así sucesivamente.
- 7.^a : distancia horizontal entre cualquier torre y su inmediata anterior.
- 8.^a : distancia horizontal entre cada torre y el punto mínimo anterior.

Las ocho primeras columnas de la matriz A presentan los mismos elementos que las anteriores; la novena muestra el número de nodos no eliminados que emana del nodo cuyo número se ubica en la primera columna.

Cuando es eliminado algún elemento de las matrices C o F, el número del nodo y el del nodo anterior se ponen en las dos columnas de la matriz de los eliminados. Esto permite conocer cuándo algún nodo se ha quedado sin ramificaciones.

3,3 Descripción del programa principal

a) Como se puede observar en el diagrama de bloques (págs.24 - 25), el programa plantea la alternativa de fijar la torre ini-

cial o colocar en ese lugar una cualquiera de las torres disponibles. En la práctica, las características de la torre en cuestión son estipuladas en la subestación donde se va a poner dicha estructura. Así mismo, cuando la localización se realiza por tramos, la primera torre de una corrida será la última de la corrida anterior.

b) Cuando se fija la primera torre, los elementos de la primera fila de la matriz F son definidos en esta subestación. Ese nodo es $n=1$, su nodo anterior $n=0$ y la posición sobre el terreno se considera $x=0$. La altura absoluta, el tipo y el costo son conocidos.

Para empezar, todos los elementos del vector definitivo, D , se consideran nulos.

c) Enseguida se realiza una búsqueda para conocer cual es el elemento de la matriz F que presenta menor avance. A estas alturas solo se tiene un elemento con $x=0$; pues a partir de él se determinan las posiciones donde se colocarán las M torres de distintas alturas con que se cuenta. Se asignan números a los nodos; los avances se anotan en la tercera columna, dentro de la matriz C , y las alturas absolutas en la cuarta; las columnas 6, 7 y 8 se llenan con los valores correspondientes.

El elemento que ha sido ramificado pasa de la matriz F a la A , y se coloca en el primer renglón desocupado.

(Cuando la primera torre no está fija, se definen los M primeros elementos de la matriz C , o sea, las M ramas iniciales del árbol. De aquí en adelante todas las operaciones son co--

munes a ambos casos).

d) Todas las alternativas almacenadas en F se comparan con las que se acaban de guardar en C ; mediante el criterio de dominancia se eliminan aquellas soluciones que aparenten ser menos factibles de alcanzar la solución óptima.

Para efectuar las comparaciones se definen unas funciones de costo, las cuales varían de una iteración a otra. Los otros parámetros de comparación son el avance total y la altura absoluta.

e) Todos los nodos eliminados de C y F pasan a la matriz E y de ahí a la matriz A . Los elementos que aún queden en la matriz C se colocan en F .

Se determina si alguno de los nodos pasivos que se encuentran en A se ha quedado sin ramificaciones; en caso de que así sea, el elemento correspondiente es expulsado del proceso.

Cuando cualquier nodo de A únicamente va seguido por una rama, se introduce en el vector de nodos definitivos, D , siempre y cuando el nodo que se encuentre en ese instante ahí sea el nodo anterior de aquel.

f) El programa termina cuando todas las soluciones existentes están dentro del intervalo $|X5_{z3}|$. En caso de no haber llegado todavía a esa situación, el programa continúa con el siguiente paso, repitiendo toda la mecánica a partir de c . El proceso es el mismo, con la diferencia de que desde el primer nivel en adelante cada vez que un elemento es ramificado, se calcula tanto su tipo como su costo, de acuerdo a la carga que soporta.

Una vez que el proceso de optimización ha terminado, se imprime la solución factible más económica, es decir, los nodos que definen el camino óptimo junto con sus atributos (altura, costo, etc.).

Como las matrices A y F contienen, al final del proceso de cálculo, todos los caminos que llegaron a la meta, a solicitud del usuario pueden imprimirse las soluciones subóptimas, esto es, las restantes soluciones factibles.

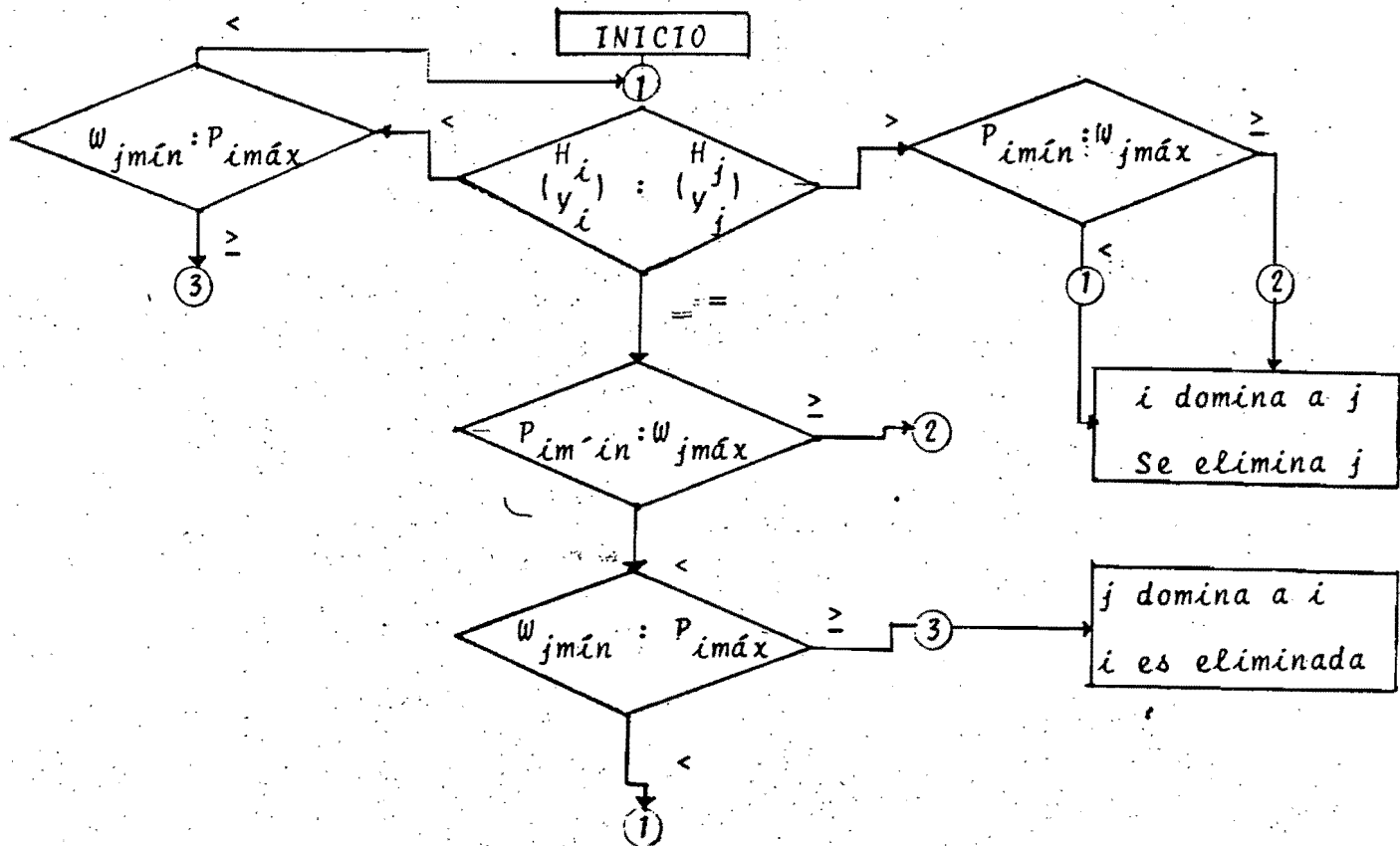
3.3.1 Subrutina de comparaciones y eliminaciones

Constituye una de las partes más importantes del programa, pues con ella se aplica el concepto de dominancia, comparando los avances y las alturas de los nodos candidatos con los respectivos de los frontales. Además, se hacen equiparaciones entre los índices de costo, los que se calculan en función de la altura de la torre considerada y el claro entre esta y la inmediata anterior, y se almacenan en las matrices P y W.

En la primera columna de la matriz P se coloca el índice de costo calculado para los nodos de la matriz C, en función del claro mínimo; igual se hace en la segunda columna, pero usando el claro máximo. Para los nodos de la matriz F se realizan operaciones similares respecto a la matriz W.

El criterio de dominancia para los nodos i , de la matriz C, y

j , de F , llamándole Y a la altura y X al avance horizontal, puede resumirse en un pequeño diagrama de flujos, tal como se muestra a continuación:



Esta subrutina de comparación ha sido programada de la siguiente manera :

```

0425 LET M2=M
0430 LET K1=M1
0435 GOSUB 1085
0440 IF M1 < 1 GOTO 0610
0445 IF M2 < 1 GOTO 0540
0450 FOR I=1 TO M2

```

```

0455 FOR J5=1 TO K1
0460 LET P4= ABS(SGN(C(I,3)-F(J5,3)))
0465 IF P4+ABS(SGN(C(I,4)-F(J5,4)))=0 GOTO 0480
0470 IF SGN(C(I,3)-F(J5,3))+SGN(C(I,4)-F(J5,4)) 0 GOTO 0495
0475 IF SGN(C(I,3)-F(J5,3))+SGN(C(I,4)-F(J5,4))=0 GOTO 0515
0480 IF C(I,3) F(J5,3) GOTO 0515
0485 IF P(I,2) W(J5,1) GOTO 0495
0490 GOTO 0530
0495 IF P(I,1) W(J5,2) GOTO 0515
0500 GOSUB 1005
0515 NEXT J5
0520 NEXT I
0525 GOTO 0540
0530 GOSUB 1040
0535 GOTO 0445

```

3.4 Descripción de las subrutinas

- 1) Se emplean tres subrutinas para intercambiar dos renglones internamente en cualquiera de las matrices, A, F o C. La finalidad es eliminar un renglón que ya no se necesita o que pasó a otra de las matrices. De esta manera, si la dimensión de la matriz F es K1 en ese momento, y hay que deshacerse del nodo $\{$, este se coloca en la K1-ésima posición de la matriz y el elemento K1 se pone en el lugar que ocupaba el $\{$. Luego, se disminuye la dimensión en una unidad, $K1=K1-1$, y el elemento $\{$ queda fuera de F:

```

1005 FOR I1=1 TO 8
1010 LET T1=F(J5,I1)
1015 LET F(J5,I1)=F(K1,I1)

```

```

1020 LET F(K1,I1)=T1
1025 NEXT I1
1030 LET K1=K1-1
1035 RETURN

```

Asimismo, en la matriz A:

```

1170 FOR L1=1 TO 9
1175 LET T1=A(J,L1)
1180 LET A(J,L1)=A(N1,L1)
1185 LET A(N1,L1)=T1
1190 NEXT L1
      N1=N1-1

```

Y en la matriz C:

```

1040 FOR Z1=1 TO 8
1045 LET T1=C(I,Z1)
1050 LET C(I,Z1)=C(M2,Z1)
1055 LET C(M2,Z1)=T1
1060 NEXT Z1
1065 LET M2=M2-1

```

- 2) Otras tres subrutinas solamente son llamadas por el programa principal cuando se necesita imprimir una de las matrices F, C o A:

```

1270 FOR L=1 TO M1
1275 PRINT F(L,1);F(L,2);F(L,3);F(L,4);F(L,5);F(L,6);F(L,7);F(L,8)
1280 NEXT L

1200 FOR J=1 TO M
1205 PRINT C(J,1);C(J,2);C(J,3);C(J,4);C(J,5);C(J,6);C(J,7);C(J,8)
1210 NEXT J

```

```

1250 FOR L=1 TO N1
1255 PRINT A(L,1);A(L,2);A(L,3);A(L,4);A(L,5);A(L,6);A(L,7);A(L,8)
1260 NEXT L

```

- 3) La siguiente subrutina tiene como finalidad encontrar cuál es el elemento más atrasado de todos los que componen el frente:

```

      LET K=3
1220 LET J5=1
1225 FOR J1=2 TO K1
1230 IF F(J1,K) =F(J5,K) GOTO 1240
1235 LET J5=J1
1240 NEXT J1

```

- 4) Para calcular los índices de costo se usa la subrutina:

```

1085 FOR L=1 TO K1
1090 FOR K=1 TO M2
1095 LET R1=INT(3*(C(K,7)+Q1)/(2*Q9))
1100 LET R2=INT(3*(C(K,7)+Q9)/(2*Q9))
1105 LET P(K,2)=F(J5,5)+R(C(K,6),R2)
1110 LET P(K,1)=F(J5,5)+R(C(K,6),R1)
1115 LET H1=F(L,2)
1120 FOR I1=1 TO N1
1125 IF A(I1,1) H1 GOTO 1150
1130 LET G1=INT(3*(F(L,7)+Q1)/(2*Q9))
1135 LET G2=INT(3*(F(L,7)+Q9)/(2*Q9))
1140 LET W(L,2)=A(I1,5)+R(F(L,6),G2)
1145 LET W(L,1)=A(I1,5)+R(F(L,6),G1)
1150 NEXT I1
1155 NEXT K
1160 NEXT L

```

5) Se determinan las cargas verticales que soporta la torre, y con base en estos datos se conoce el tipo de la misma. El tipo y la altura permiten saber cuál es el costo de la estructura. Estas operaciones se hacen por medio de la subrutina correspondiente:

```

1290 LET H1=F(J5,6)
1295 IF F(J5,7)=0 GOTO 1495
1300 FOR F1=1 TO M
1305 LET K7=0
1310 LET B(F1,1)=(C(F1,7)+F(J5,7))/2
1315 LET B(F1,3)=B(F1,1)*C1
1320 LET P4=P+P1
1325 LET B(1,2)=P4
1330 LET V6=P4*C2
1335 LET G1=B(F1,3)/V6
1340 LET R1=F(J5,7)/C(F1,7)
1345 IF R1 =1 GOTO 1355
1350 LET R1=1/R1
1355 LET B(3,2)=R1
1360 IF G1 G9 GOTO 1375
1365 LET B(2,2)=G1
1370 GOTO 1415
1375 IF P6=0 GOTO 1415
1380 LET V6=V6+P6
1385 LET K7=K7+1
1390 LET G2=B(F1,3)/V6
1395 IF G2 G9 GOTO 1410
1400 LET B(2,2)=G2
1405 GOTO 1415
1410 IF K7 S1 GOTO 1380
1415 NEXT F1
1420 FOR J=1 TO M5
1425 FOR K=1 TO M
1430 IF B(K,1) T(J,1) GOTO 1455
1435 IF B(K,2) T(J,K+1) GOTO 1455

```

```

1440 LET J2=J
1445 LET K=M
1450 LET J=M5
1455 NEXT K
1460 NEXT J
1465 LET K=F(J5,2)
1470 FOR L=1 TO N1
1475 IF A(L,1) K GOTO 1490
1480 LET F(J5,5)=A(L,5)+U(J2,H1)
1485 LET L=N1
1490 NEXT L
1495 FOR I1=1 TO M
1500 LET C(I1,5)=F(J5,5)+U(1,I1)
1505 NEXT I1

```

3.4.1 Subrutina de avances

El segmento más importante de este programa de optimización, o sea la espina dorsal de todo el programa es esta subrutina, con la cual se obtienen los avances de las M torres del proceso. La subrutina, tal como se emplea en el programa está constituida:

```

1515 LET I0=INT((F(J5,3)/20)+.5)
1520 LET J0=F(J5,6)
1525 GOSUB 1625
1530 FOR I=I2+1 TO 30
1535 FOR J1=1 TO M
1540 LET A1=S(I+I0-1)+H(J1)
1545 LET A2=S(I+I0)+H(J1)
1550 IF SGN(Y(I)-A2)=SGN(Y(I-1)-A1) GOTO 1610
1555 LET B1=ABS(Y(I-1)-A1)
1560 LET B2=ABS(Y(I)-A2)
1565 LET X1=20*(I-1)+20*B1/(B1+B2)
1570 LET C(J1,7)=X1

```

```
1575 LET C(J1,8)=X1-X0
1580 LET C(J1,3)=X1+F(J5,3)
1585 LET C(J1,4)=S(I0+INT(X1/20+.5))
1590 LET C(J1,6)=J1
1595 LET C(J1,4)=C(J1,4)+Q(J1)
1600 IF C(J1,3) X5 GOTO 1610
1605 LET X2=X5
1610 NEXT J1
1615 NEXT I
1620 GOTO 1765
1625 DEF FNS(X)=EXP(K6*X/2)-EXP(-K6*X/2)
1630 LET P=5000
1635 LET I1=1
1640 LET K=I1
1645 IF K 30 GOTO 1725
1650 LET X=20*K
1655 LET U1=K6*(S(K+I0)-(H(J0)+S(I0)))/FNS(X)
1660 LET X0=X/2-LOG(U1+SQR(1+U1^2))/K6
1665 IF X0 =P GOTO 1690
1670 LET P=X0
1675 LET I2=K
1680 LET K=K+1
1685 GOTO 1645
1690 GOSUB 1730
1695 FOR I=I2+1 TO 30
1700 LET D=Y(I)-S(I+I0)
1705 IF D =-.1 GOTO 1720
1710 LET I1=I
1715 GOTO 1640
1720 NEXT I
1730 DIM Y(N)
1735 DEF FNC(X)=1/K6*(EXP(K6*X)+EXP(-K6*X))/2
1740 FOR Z1=I2+1 TO 30
1745 LET X=20*Z1
1750 LET Y(Z1)=H(J0)+S(I0)+FNC(X-P)-FNC(P)
1755 NEXT Z1
1760 RETURN
```


Las curvas de avance que se obtienen en este programa, tienen como finalidad proporcionar la información relativa a la localización de las torres de transmisión, asociadas por una catenaria, sobre un terreno dado. La idea es que si una torre de cierto tipo o altura se coloca en determinado punto del terreno, cualquiera que este sea es posible saber exactamente dónde se encuentran las M torres finales de distintas alturas, que maximicen la distancia avanzada mediante la tangencia con el terreno de la catenaria de libramiento que describe el cable.

Es decir, que conociendo el perfil del terreno en forma discreta, la constante de la catenaria (dada por la tensión en los extremos, el peso del cable por unidad de longitud y la altura de la torre inicial), se puede conocer inmediatamente la localización de las torres finales asociadas a esta catenaria tangente.

El procedimiento para obtener las curvas de avance consta principalmente de cuatro pasos:

- i) Obtención de un arreglo que contenga las ordenadas de la catenaria.
- ii) Cálculo de la catenaria tangente al terreno.
- iii) Localización de las torres finales, de M alturas, que hacen contacto con la curva trazada en su altura de libramiento.
- iv) Obtención de las curvas de avance.

La ecuación de la catenaria dada en función de la tensión en los apoyos T y del peso por unidad de longitud del cable w , es:

$$y = \frac{T}{w} (\cosh \frac{w}{T} x - 1) \quad (3.1)$$

lo que puede expresarse, según el desarrollo del Apéndice B, como

$$y = H + \frac{1}{K} \cosh K(X-X_0) - \frac{1}{K} \cosh KX_0 \quad (3.2)$$

con $K = \frac{w}{T}$, siendo X_0 la abscisa del punto de simetría y H la altura de la torre inicial.

En el mismo Apéndice, figura el desarrollo para encontrar el punto donde la catenaria es tangente al terreno, así como el punto de simetría de esta.

A partir de esos factores, se puede realizar la búsqueda necesaria para localizar las torres terminales, tomando como base una torre ya implantada por el propio programa.

La búsqueda se hace a partir del punto de tangencia, ya que se trata de maximizar la distancia avanzada y minimizar el número de cálculos requeridos para su obtención.

Para localizar las torres, únicamente es necesario encontrar algún punto en el cual la ordenada de la catenaria es igual a

la ordenada de la superficie más la altura de la torre a localizar. Sin embargo, esto no sucede a menudo, pues la información que se tiene acerca del terreno es discreta, por tanto, las diferencias entre la catenaria y la torre serán positivas o negativas, según el caso. La posición de la torre se encuentra cuando hay un cambio de signo entre dos diferencias calculadas, con una simple interpolación.

El programa localiza M torres terminales para cada torre inicial, siendo M el número de alturas empleadas, el cual puede variarse desde dos hasta siete, o quizás más.

La información obtenida acerca de las distancias entre torres para cada punto del terreno, puede almacenarse en arreglos de N renglones y M columnas. N es el número de puntos de superficie donde se colocan las diferentes torres. En esos arreglos está la información necesaria para trazar las curvas de avance que nos dan una idea gráfica de la localización óptima. Además, con estos datos se alimenta el programa para efectuar la búsqueda.

3.5 Observaciones adicionales

1. La subrutina de avances presenta el problema de que no toma en cuenta las dominancias sobre el terreno, es decir, la posibilidad de que alguna de las alternativas recién generadas domine a otra del mismo subconjunto, efectuando la eliminación de la dominada sobre el mismo terreno.

2. Como se indicó anteriormente, los atributos de la primera torre son establecidos en la subestación inicial; lo mismo sucede con los de la última torre, ya que deben especificarse en la subestación terminal. Ello se debe a que como únicamente se conoce la carga de un lado, no es posible analizarlas completamente. No obstante, la altura de la última es generada por el programa y en general se le asigna el tipo más común de torres de suspensión, a menos que el ángulo de inclinación de las cadenas indique lo contrario.

3. En adición al cálculo de funciones o índices de costo para propósitos de comparación y eliminación entre las alternativas, fue necesario incluir en el programa un cálculo de costos para cada serie de nodos candidatos generados. El procedimiento es simple: una vez conocido el costo de la torre recién ramificada, $F(J5,5)$, se le suma a este un valor constante, $U(1,1)$, suponiendo que se trata de una torre tipo 1, cuya altura, 1, es la de la torre que se está considerando.

El propósito de la suposición anterior es poder realizar una comparación realista entre todas las soluciones factibles, cuando se ha llegado al final del tramo de longitud que ha sido sometido a estudio, puesto que será el proyectista quien decida cuáles serán los atributos que definan a esa torre terminal.

3.6 Pruebas y resultados

A causa de la limitada capacidad de la computadora NOVA 800, los problemas resueltos durante el desarrollo del programa estuvieron restringidos a tramos de terreno pequeños en longitud.

A continuación se muestra, a modo de ilustración, una prueba realizada para un terreno poco accidentado.

Los datos de entrada son:

Libramiento mínimo de conductor a tierra: 10 m

Longitud del tramo considerado: 2200 m

Alturas de torres: 20, 25 y 30 m

Tipos de torres: 3 torres de suspensión

Claros máximo y mínimo: 500 y 200 m

Tangente del ángulo de inclinación de los aisladores: 0.84

Contrapesos: 40 Kg.

Los otros datos corresponden a las siguientes tablas:

MATRIZ T

TIPO	CLARO DE VIENTO (m)	CLARO DE PESO (m)	TANGENTE DEL ANGULO DE INCLINACION	RELACION DE CLAROS
1	550	800	0.84	5
2	1000	1500	1.19	5
3	2320	1500	100	100

MATRIZ U

ALTURA (m) \ TIPO	20	25	30
1	11000 (\$)	115000	120000
2	125000	130000	135000
3	160000	170000	180000

MATRIZ R

CLARO (m) \ ALTURA (m)	350	450	600
1	110000 (\$)	125000	160000
2	115000	130000	170000
3	120000	135000	180000

Los resultados dados por el programa, como salida de la computadora, son:

número de soluciones factibles: 7

costo de la solución más económica: \$ 805,000

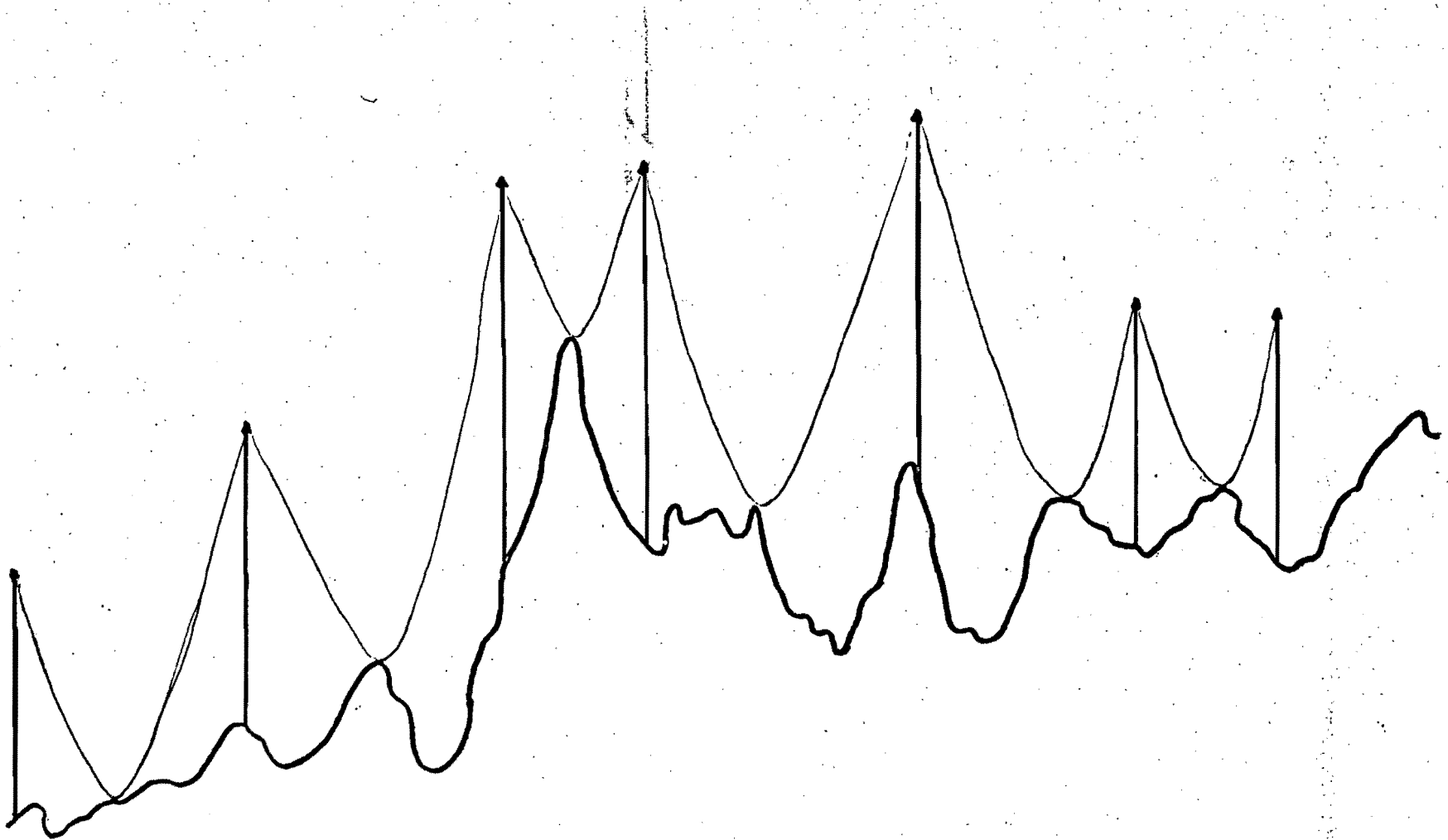
número de torres implantadas: 7

La primera torre fue fijada de tipo 1 y altura 1 (20m) y la última fue también escogida de altura 1 por el programa. La última torre siempre se escoge de suspensión tipo 1, a menos que el ángulo de inclinación de la cadena de aisladores determine lo contrario.

Las principales características de la solución óptima son:

Avance total m	Altura de la torre m	Altura absoluta m	Tipo de la torre	Costo \$	Costo Acumulado \$
0	20	30	1	110 000	110 000
354.4	25	41	1	115 000	225 000
763.049	30	61	1	120 000	345 000
975.479	30	62	1	120 000	465 000
1392.92	30	66	1	120 000	585 000
1733.4	20	51	1	110 000	695 000
1960.83	20	50	1	110 000	805 000

En este ejemplo todas las estructuras resultaron del tipo 1, quizás porque se trata de un perfil muy poco accidentado, o tal vez por la sencillez de la subrutina que calcula las cargas que soporta la torre.



Distribución óptima de las torres para el ejemplo anterior (pp 42-44)

El tiempo de procesamiento para este ejemplo fue 201.9 seg (3.365 min).

En la página siguiente se muestra una representación gráfica de la solución óptima.

3.7 Consideraciones finales

El programa presenta la ventaja de que fuera de las limitaciones de tiempo y memoria, puede emplearse para cualquier número de alturas de torres, sin importar si son alturas típicas o no.

Como no se conoce el tipo de la última torre y sí la altura, el programa siempre supone se trata de una estructura de suspensión del tipo 1 (véase la matriz T, pág 43). Esta consideración permite llenar la columna de costos acumulados de la matriz C en cada iteración, lo que es importante para comparar entre sí las soluciones factibles al final del proceso.

El programa es bastante general para que pueda usarse en cualquier proyecto de líneas de transmisión. En realidad, el empleo de un número de alturas superior de cinco, haría aumentar mucho el tiempo de procesamiento, y si se emplea un tramo de terreno de gran longitud, puede ser que se agote la capacidad de almacenamiento de la computadora. Sin embargo, la práctica es la única que hace factible aminorar algo, según el tipo de valores permisibles de esos parámetros de localización.

El método de localización aplicado, contribuye a alcanzar una solución rápida y económica con notable exactitud. El criterio de avanzar constantemente, realizando en cada iteración comparaciones entre las soluciones factibles, es muy importante para lograr una buena velocidad de procesamiento.

Otra conveniencia del programa es que puede trabajar en cualquier terreno, no importa las condiciones, pues en lugares muy accidentados, muchas veces hay más eliminaciones de alternativas que en superficies planas.

El método puede proporcionar una localización de primera clase, ya que ubica apropiadamente las torres en cualquier perfil de línea y porque considera, durante el proceso, un alto número de soluciones factibles antes de escoger la óptima.

De cualquier manera, como el programa aun no está completo, sería necesario antes de aplicarlo a un problema real introducir algunos cálculos que faltan. Además debe ampliarse la subrutina que calcula las cargas y asigna los costos, para que considere los puntos de deflexión; así como considerar los casos en que la torre requiere de alguna extensión y también los puntos de deflexión de la ruta. Asimismo debe mejorarse la subrutina de avance para que considere las dominancias sobre el terreno.

Otro aspecto importante sería incluir en el programa una subrutina que grafique la distribución completa de torres al fi-

nal del proceso.

Los factores mencionados, no fundamentales para demostrar la efectividad de la técnica de optimización que rige el programa, no han sido considerados debido a la poca capacidad de memoria que tiene actualmente la computadora NOVA 800, del Instituto de Ingeniería, UNAM. Actualmente se está trabajando en la traducción del programa al lenguaje FORTRAN, para ser usado en una BOURROUGHS 6700, y en su ampliación, introduciendo los factores que aún no han sido incluidos. Aunque el tiempo de computación para el programa es aceptable, seguramente este hecho lo hará mejorar en forma notable.

A P E N D I C E A

A. APLICABILIDAD DEL PRINCIPIO BRANCH-AND-BOUNDA.1 Definición del problema

Dado un conjunto finito

$$S = \{S_1, \dots, S_n\} \quad (A.1)$$

definido por una función

$$z : S \rightarrow R \quad (A.2)$$

la cual asocia un número real $z(S_i) \in R$ con cada $S_i \in S$, encontrar un elemento óptimo $S_k \in S$ definido por

$$z(S_k) = \min \{z(S_i) \mid S_i \in S\} \quad (A.3)$$

En general, los elementos $S_i \in S$ y los valores asociados $z(S_i)$ no están inmediatamente disponibles, sino sólo definidos de tal manera que se requieren algunos cálculos para generarlos; de otro modo, el problema sería trivial.

A.2 Aplicabilidad del principio

El principio de rama y límite puede aplicarse (eficazmente) al problema arriba mencionado, en la medida en que se cumplen las siguientes condiciones:

- a) Se puede hallar un superconjunto finito T de S

$$T = \{t_i, \dots, t_n\} \supset S \quad (\text{A.4})$$

con una extensión v de z

$$v : T \rightarrow R, \quad (\text{A.5})$$

es decir, una función v que asocia un número real (fácilmente calculable) con cada $t_i \in T$, de tal modo que

$$t_i \in S_i \Rightarrow v(t_i) = z(t_i). \quad (\text{A.6})$$

b) Se puede definir una regla de ramificación β , la cual si es aplicada a cualquier subconjunto $T^h \subset T$ que tenga por lo menos dos elementos, generaría una familia de subconjuntos

$$\beta(T^h) = \{T_i^h, \dots, T_q^h\}, \quad (\text{A.7})$$

de modo que

$$\bigcup_{i=1}^q T_i^h = T^h - \{t_{j_h}\}, \quad (\text{A.8})$$

donde t_{j_h} es un elemento óptimo de T^h definido por

$$v^h = v(t_{j_h}) = \min \{v(t_j) \mid t_j \in T^h\} \quad (\text{A.9})$$

c) T , v y β son tales que v^h puede ser (fácilmente) hallado para cada subconjunto $v^h \subset T$ obtenido por β , es decir, cada $v^h \cap S$ puede ser (fácilmente) acotada.

A P E N D I C E B

B. ECUACIONES DE LA CATENARIA

B.1 Ordenadas de la catenaria

La ecuación de la catenaria en función de la tensión de los apoyos y el peso por unidad de longitud del cable, es:

$$Y = \frac{T}{\omega} \left\{ \cosh \frac{\omega}{T} x - 1 \right\} \quad (B.1)$$

donde

ω : peso unitario del cable

T: tensión aplicada en los extremos

Si se hace $x=0$ el punto donde se encuentra localizada la torre inicial, el eje de simetría de la catenaria quedaría normalmente desplazado de este sitio para que la curva sea tangente con el perfil.

Con:

X_0 : abscisa del punto de simetría

H : altura de la torre inicial

La ecuación general queda:

$$Y - H = \frac{T}{\omega} \left\{ \cosh \frac{\omega}{T} (x - x_0) \right\} - \frac{T}{\omega} \left\{ \cosh \frac{\omega}{T} (x_0) \right\} \quad (B.2)$$

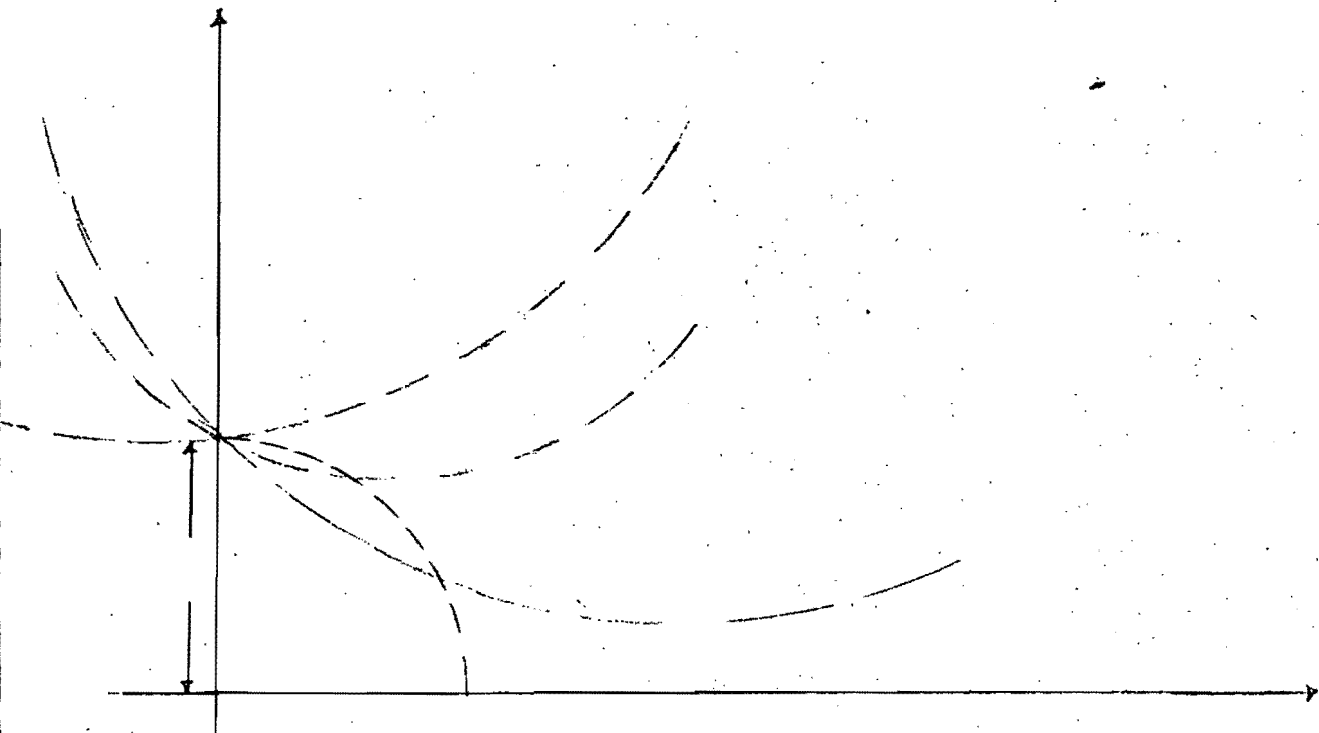
y si se llama a $k = \frac{\omega}{T}$ constante de la catenaria, la ecuación es:

$$Y = H + \frac{1}{k} \cosh k(x - x_0) - \frac{1}{k} \cosh kX_0 \quad (B.3)$$

que da el valor de las ordenadas en cualquier punto una vez conocida la constante de la catenaria, la localización del punto de simetría y la abscisa, x correspondiente.

B.2 Lugar geométrico del punto de simetría

La idea es buscar un parámetro que defina la familia de catenarias que pasan por las coordenadas $x=0, y=H$, y encontrar el que corresponda a la catenaria tangente.



A partir de la ecuación de la catenaria

$$Y = H - \frac{1}{K} \cosh kx_0 + \frac{1}{K} \cosh K(x-x_0) \quad (\text{B.4})$$

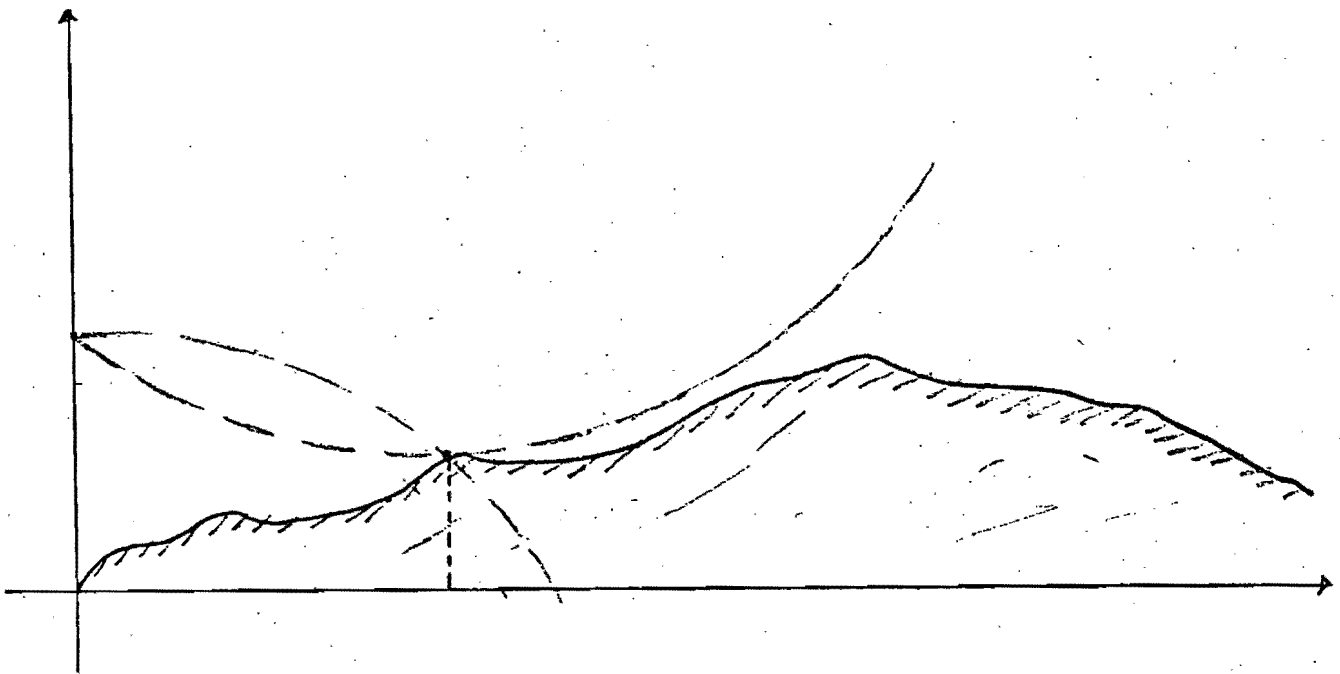
cuando $x=x_0$

$$Y_0 = H - \frac{1}{K} (\cosh KX_0 + 1) \quad (\text{B.5})$$

corresponde al lugar geométrico del punto $P(x_0, y_0)$; es decir, del punto de simetría.

B.3 Abcisas de los puntos de simetría y tangencia

La abscisa del punto de simetría debe encontrarse (ya sobre un terreno específico) entre los puntos $(0,0)$ y $(A,0)$.



por lo que se determinó entonces que el punto de simetría es un parámetro adecuado que define las curvas que se cruzan únicamente en el punto $L(0,H)$. A partir de la ecuación general es posible despejar x_0 :

$$Y = H + \frac{1}{K} \cosh k(x-x_0) - \frac{1}{K} \cosh (kx_0) \quad (\text{B.6})$$

Utilizando la identidad trigonométrica

$$\cosh \alpha - \cosh \beta = 2 \operatorname{senh} \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right) \operatorname{senh} \left(\frac{\alpha-\beta}{2} \right) \quad (\text{B.7})$$

y haciendo

$$\beta = KX_0$$

$$\alpha = k(x-x_0)$$

se obtiene

$$Y = H + \frac{2}{k} \sinh\left(\frac{kx}{2}\right) \sinh\left\{\frac{K}{2}(x-2x_0)\right\} \quad (\text{B.8})$$

la que se despeja para obtener x_0 , resulta

$$k(y-H) = 2 \sinh\left\{k \frac{x}{2}\right\} \sinh\left\{k \frac{x-2x_0}{2}\right\} = \quad (\text{B.9})$$

$$= \sinh\left\{\frac{k}{2}(x-2x_0)\right\} = \frac{k(Y-H)}{2 \sinh\left\{k \frac{x}{2}\right\}} \quad (\text{B.10})$$

Ahora, al aplicar la fórmula

$$\text{arc sinh } u = \text{Ln} \left\{u + (1+u^2)^{1/2}\right\} \quad (\text{B.11})$$

y haciendo

$$u = \frac{k(Y-H)}{2 \sinh\left\{k \frac{x}{2}\right\}} \quad (\text{B.12})$$

se obtiene:

$$k \left(\frac{x}{2} - x_0\right) = \text{Ln} \left\{(u + (1+u^2)^{1/2})\right\} \quad (\text{B.13})$$

$$x_0 = \frac{x}{2} - \frac{1}{k} \text{Ln} \left\{u + (1+u^2)^{1/2}\right\} \quad (\text{B.14})$$

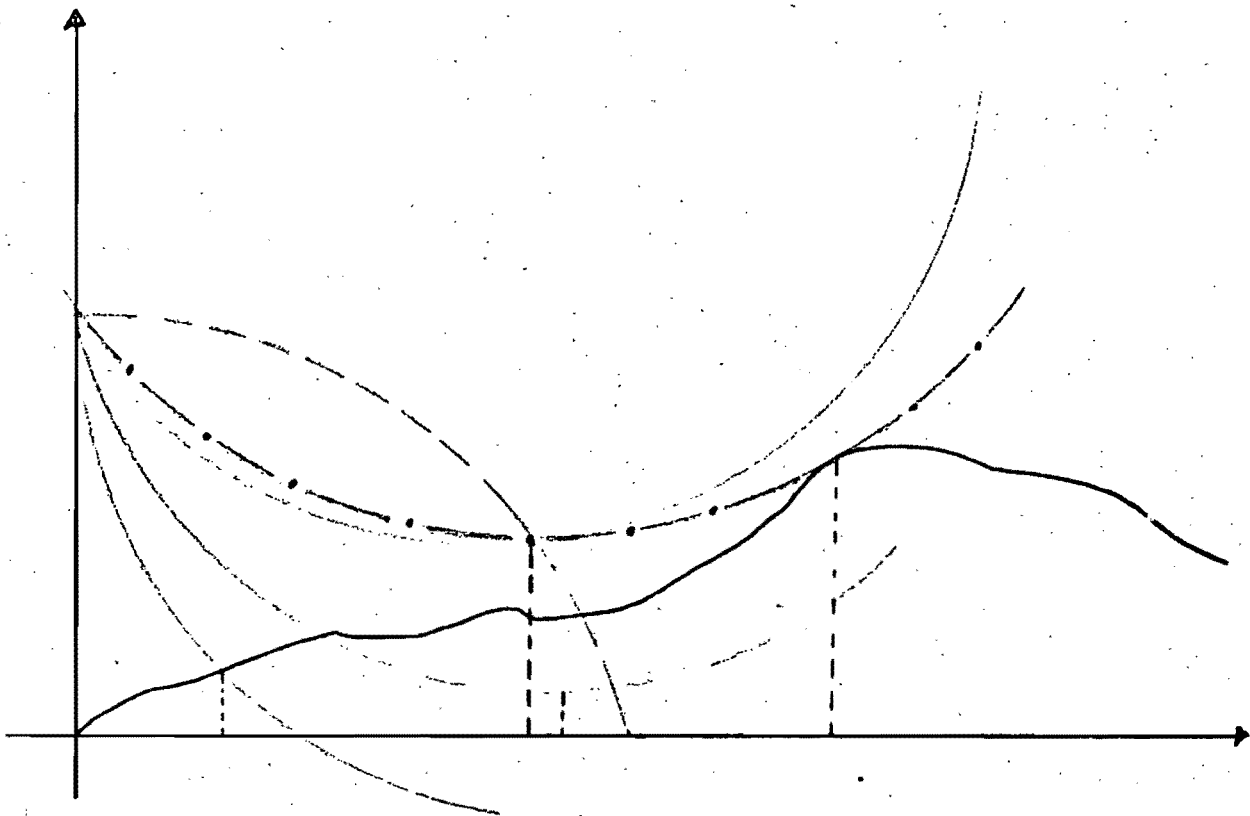
$$x_0 = \frac{x}{2} - \frac{1}{k} \text{Ln} \left\{ \frac{K(Y-H)}{2 \sinh\left(\frac{kx}{2}\right)} + \left(1 + \frac{k(Y-H)}{2 \sinh\left(\frac{kx}{2}\right)}\right)^2 \right\}^{1/2} \quad (\text{B.15})$$

donde

x, y : coordenadas del punto por el cual se pasa la catenaria

Si en esta ecuación se sustituyen las coordenadas de cada punto del perfil del terreno en (x_1, y_1) , resulta la abscisa del punto de simetría, x_0 , de la catenaria que pasa por los puntos

$(0,H)$ y (x_1,y_1) . De tal forma que si esto se efectúa para todos los puntos (x,y) , es sencillo ver que la tangencia de la curva ocurrirá cuando x_0 sea mínimo y la catenaria toque el terreno. Si se conoce la abscisa del punto de simetría se pueden definir las ordenadas de la catenaria tangente, tal como se explica en la sección B.1.



El procedimiento puede mejorarse mediante la disminución de los cálculos de x_0 , si después de encontrar un x_0 mínimo relativo se define la catenaria con este dato y a continuación se calculan las diferencias entre la curva y el terreno. Si la diferencia es siempre positiva, la curva no se cruza con el terreno y es tangente en el punto de coordenadas (x_1,y_1) con el cual se obtuvo x_0 mínimo. Si hay una diferencia negativa, se vuelve a calcular el valor de x_0 co-

rrespondiente, es lógicamente menor que el anterior, hasta encontrar otro mínimo relativo x_0 ; cuando suceda esto, nuevamente se define la catenaria y se buscan las diferencias.

El procedimiento se repite hasta que no exista ninguna diferencia entre la catenaria y el terreno, buscando siempre dentro de un rango de distancias máximas restringidas por el peso del cable, las tensiones, etc.

De esta manera quedan definidas las abscisas del punto de simetría y del punto de tangencia, así como las ordenadas de la catenaria tangente al terreno para poder localizar las torres finales asociadas a la estructura base.

A P E N D I C E C

C. LISTADO DEL PROGRAMA

```

0005 READ Z3,X5,K6,L,N
0010 READ Q1,Q9
0015 READ A4,M5,C1,C2,P6,G9,S1
0020 PRINT "NUMERO DE ALTERNATIVAS EN CADA NODO: "
0025 INPUT M
0030 PRINT
0035 READ M1,M3,N1
0040 DIM D[8],H[M],S[N+10],I[M1+M3+N1],E[M3,2]
0045 DIM C[M,8],F[M1,8],A[N1,9],B[M,3]
0050 DIM P[M,2],W[M1,2]
0055 LET X2=0
0060 MAT READ T[M5,4],U[M5,M]
0065 MAT READ R[M,4]
0070 FOR J1=1 TO M
0075   READ Q[J1]
0080   LET H[J1]=Q[J1]-L
0085 NEXT J1
0090 FOR I=1 TO M1+M3+N1
0095   LET I[I]= -I
0100 NEXT I
0105 LET M3=0
0110 FOR I2=0 TO N
0115   READ S[I2]
0120 NEXT I2
0125 LET N1=1
0130 LET A[1,2]= -1
0135 PRINT "ESTA FIJA LA PRIMERA TORRE?"
0140 INPUT I1
0145 PRINT
0150 PRINT "SU TIPO ES:"
0155 INPUT I7
0160 PRINT
0165 IF I1<>1 GOTO 0175
0170 GOTO 0230
0175 PRINT "CASO EN QUE NO SE FIJA EL TIPO DE LA PRIMERA TORRE"
0180 PRINT
0185 LET J=0
0190 LET M1=0
0195 FOR I=1 TO M
0200   LET C[I,3]=0
0205   LET C[I,4]=Q[I]+A4
0210   LET C[I,5]=U[I,I]
0215   LET C[I,6]=1
0220 NEXT I
0225 GOTO 0365
0230 PRINT "CASO EN EL CUAL LA PRIMERA TORRE ESTA FIJA."
0235 PRINT "SU ALTURA ES : "
0240 INPUT I1
0245 PRINT
0250 LET N1=1
0255 LET F[I,1]=1
0260 LET I[I]=+1
0265 LET F[I,2]=0

```

```

0270 LET F[1,3]=0
0275 LET F[1,4]=Q[I1]+A4
0280 LET F[1,5]=U[1,I1]
0285 LET F[1,6]=11
0290 FOR I=1 TO 8
0295   LET D[I]=0
0300 NEXT I
0305 LET K1=M1
0310 LET K=3
0315 GOSUB 1220
0320 LET P1=F[J5,8]
0325 GOSUB 1500
0330 GOSUB 1290
0335 GOSUB 1005
0340 LET N1=N1+1
0345 FOR Z2=1 TO 8
0350   LET A[N1,Z2]=F[M1,Z2]
0355 NEXT Z2
0360 LET M1=M1-1
0365 LET K1=1
0370 LET A[N1,9]=M
0375 FOR I=1 TO M
0380   LET I6=I[K1]
0385   ON SGN(I6)+2 GOTO 0400, 0390, 0390
0390   LET K1=K1+1
0395   GOTO 0380
0400   LET I[K1]=-I[K1]
0405   LET C[I,1]=I[K1]
0410   LET C[I,2]=A[N1,I]
0415   LET K1=K1+1
0420 NEXT I
0425 LET M2=M
0430 LET K1=M1
0435 GOSUB 1085
0440 IF M1<1 GOTO 0610
0445 IF M2<1 GOTO 0540
0450 FOR I=1 TO M2
0455   FOR J5=1 TO K1
0460     LET P4=ABS(SGN(C[I,3]-F[J5,3]))
0465     IF P4+ABS(SGN(C[I,4]-F[J5,4]))=0 GOTO 0480
0470     IF SGN(C[I,3]-F[J5,3])+SGN(C[I,4]-F[J5,4])<0 GOTO 0495
0475     IF SGN(C[I,3]-F[J5,3])+SGN(C[I,4]-F[J5,4])=0 GOTO 0515
0480     IF C[I,3]<>F[J5,3] GOTO 0515
0485     IF P[I,2]>W[J5,1] GOTO 0495
0490     GOTO 0530
0495     IF P[I,1]<W[J5,2] GOTO 0515
0500     GOSUB 1005
0505     IF K1<1 GOTO 0520
0510     GOTO 0460
0515   NEXT J5
0520 NEXT I
0525 GOTO 0540

```

```

0530 GOSUB 1040
0535 GOTØ 0445
0540 IF K1+1>M1 GOTØ 0570
0545 FØR L2=K1+1 TØ M1
0550 LET E[L2-K1,1]=F[L2,1]
0555 LET E[L2-K1,2]=F[L2,2]
0560 LET I[F[L2,1]]=-F[L2,1]
0565 NEXT L2
0570 IF M2+1>M GOTØ 0605
0575 LET M4=M1-K1-M2
0580 FØR I5=M2+1 TØ M
0585 LET E[I5+M4-M1+K1,1]=C[I5,1]
0590 LET E[I5+M4-M1+K1,2]=C[I5,2]
0595 LET I[C[I5,1]]=-C[I5,1]
0600 NEXT I5
0605 LET M3=M1-K1+M-M2
0610 FØR I=1 TØ M2
0615 FØR J=1 TØ 8
0620 LET F[K1+1,J]=C[I,J]
0625 NEXT J
0630 NEXT I
0635 LET M1=K1+M2
0640 IF M3<=0 GOTØ 0800
0645 FØR L=1 TØ M3
0650 LET A[N1+L,1]=E[L,1]
0655 LET A[N1+L,2]=E[L,2]
0660 NEXT L
0665 LET N2=N1+M3
0670 FØR I=N2 TØ N1+1 STEP -1
0675 FØR J=1 TØ N1
0680 IF A[I,2]<>A[J,1] GOTØ 0710
0685 LET A[J,9]=A[J,9]-1
0690 IF A[J,9]<>0 GOTØ 0710
0695 IF J=N1 GOTØ 0705
0700 GOSUB 1170
0705 LET N1=N1-1
0710 NEXT J
0715 NEXT I
0720 FØR J=1 TØ N1
0725 IF A[J,9]>1 GOTØ 0790
0730 IF A[J,2]<>D[I] GOTØ 0790
0735 PRINT
0740 PRINT "CARACTERISTICAS DEL VECTOR DEFINITIVO D"
0745 PRINT D[1];D[2];D[3];D[4];D[5];D[6];D[7];D[8]
0750 FØR I1=1 TØ 8
0755 LET D[I1]=A[J,I1]
0760 LET I[A[J,I1]]=-A[J,I1]
0765 NEXT I1
0770 IF J=N1 GOTØ 0780
0775 GOSUB 1170
0780 LET N1=N1-1
0785 GOTØ 0795
0790 NEXT J
0795 IF X2<>X5 GOTØ 0805

```



DEPFI



DEPFI

```

0800 FOR Z1=1 TO M1
0805   IF ABS(F[Z1,3]-X5)<=Z3 GOT0 0815
0810   IF F[Z1,3]<X5 GOT0 0305
0815 NEXT Z1
0820 PRINT
0825 PRINT "      <      !!      **      !!      >"
0830 PRINT "NUMER0 DE S0LUCIONES 0PTIMAS FACTIBLES: ";M1
0835 PRINT
0840 PRINT "ULTIMA MATRIZ DE N0D0S ATRASAD0S  A "
0845 G0SUB 1250
0850 PRINT
0855 PRINT "MATRIZ FINAL DE N0D0S DEL FRENTE  F "
0860 G0SUB 1270
0865 PRINT
0870 LET K1=M1
0875 LET K=5
0880 G0SUB 1220
0885 PRINT "S0LUCI0N C0N C0ST0 = ";F[J5,5]
0890 PRINT
0895 PRINT "ULTIMA T0RRE DE LA S0LUCI0N"
0900 LET Z=J5
0905 PRINT F[Z,1];F[Z,2];F[Z,3];F[Z,4];F[Z,5];F[Z,6];F[Z,7];F[Z,8]
0910 PRINT
0915 LET K=F[J5,2]
0920 PRINT "      T0RRES ANTERI0RES  "
0925 FOR I=1 TO N1
0930   IF A[I,1]<>K GOT0 0950
0935   PRINT A[I,1];A[I,2];A[I,3];A[I,4];A[I,5];A[I,6];A[I,7];A[I,8]
0940   LET K=A[I,2]
0945   GOT0 0925
0950 NEXT I
0955 IF K1=1 GOT0 1000
0960 INPUT I1
0965 IF I1<>1 GOT0 1000
0970 PRINT
0975 PRINT " < ! 0TRA S0LUCI0N ! > "
0980 PRINT
0985 G0SUB 1005
0990 LET N1=K1
0995 GOT0 0875
1000 END

```

SUBROUTINA PARA INTERCAMBIAR LOS RENGLONES K1 Y J5 DE LA MATRIZ F

```

1005 FOR I1=1 TO 8
1010   LET T1=F[J5,I1]
1015   LET F[J5,I1]=F[K1,I1]
1020   LET F[K1,I1]=T1
1025 NEXT I1
1030 LET K1=K1-1
1035 RETURN

```

SUBROUTINA PARA PERMUTAR LOS RENGLONES I Y M2 DE LA MATRIZ C

```

1040 FOR Z1=1 TO 8
1045   LET T1=C(I,Z1)
1050   LET C(I,Z1)=C(M2,Z1)
1055   LET C(M2,Z1)=T1
1060 NEXT Z1
1065 LET M2=M2-1
1070 RETURN

```

1075 REM SUBROUTINA EMPLEADA PARA CALCULAR
1080 REM LOS INDICES DE COSTOS

```

1085 FOR L=1 TO K1
1090   FOR K=1 TO M2
1095     LET R1=INT(3*(C(K,7)+Q1)/(2*Q9))
1100     LET R2=INT(3*(C(K,7)+Q9)/(2*Q9))
1105     LET P(K,2)=F(J5,5)+R(C(K,6),R2)
1110     LET P(K,1)=F(J5,5)+R(C(K,6),R1)
1115     LET H1=F(L,2)
1120     FOR I1=1 TO N1
1125       IF A(I1,1)<>H1 GOTO 1150
1130       LET G1=INT(3*(F(L,7)+Q1)/(2*Q9))
1135       LET G2=INT(3*(F(L,7)+Q9)/(2*Q9))
1140       LET W(L,2)=A(I1,5)+R(F(L,6),G2)
1145       LET W(L,1)=A(I1,5)+R(F(L,6),G1)
1150     NEXT I1
1155   NEXT K
1160 NEXT L
1165 RETURN

```

SUBROUTINA PARA INTERCAMBIAR LOS RENGLONES J Y NI EN LA MATRIZ A

```

1170 FOR LI=1 TO 9
1175   LET T1=A(J,LI)
1180   LET A(J,LI)=A(NI,LI)
1185   LET A(NI,LI)=T1
1190 NEXT LI
1195 RETURN

```

SUBROUTINA PARA IMPRIMIR LA MATRIZ DE CANDIDATOS C

```

1200 FOR J=1 TO M
1205   PRINT C(J,1);C(J,2);C(J,3);C(J,4);C(J,5);C(J,6);C(J,7);C(J,8)
1210 NEXT J
1215 RETURN

```


SUBROUTINA PARA DETERMINAR CUAL ES EL ELEMENTO MAS ATRASADO DE TODOS LOS QUE SE ENCUENTRAN EN LA MATRIZ F (K=3).

```

1220 LET J5=1
1225 FOR J1=2 TO K1
1230 IF F[J1,K1]>=F[J5,K1] GOTO 1240
1235 LET J5=J1
1240 NEXT J1
1245 RETURN

```

SUBROUTINA PARA IMPRIMIR TODOS LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ A

```

1250 FOR L=1 TO N1
1255 PRINT A[L,1];A[L,2];A[L,3];A[L,4];A[L,5];A[L,6];A[L,7];A[L,8]
1260 NEXT L
1265 RETURN

```

SUBROUTINA PARA IMPRIMIR LOS RENGLONES DE LA MATRIZ F

```

1270 FOR L=1 TO M1
1275 PRINT F[L,1];F[L,2];F[L,3];F[L,4];F[L,5];F[L,6];F[L,7];F[L,8]
1280 NEXT L
1285 RETURN

```

SUBROUTINA AUXILIAR PARA CALCULAR LAS CARGAS VERTICALES Y TRANSVERSALES QUE SOPORTA LA ESTRUCTURA.

```

1290 LET H1=F[J5,6]
1295 IF F[J5,7]=0 GOTO 1495
1300 FOR F1=1 TO M
1305 LET K7=0
1310 LET B[F1,1]=(C[F1,7]+F[J5,7])/2
1315 LET B[F1,3]=B[F1,1]*C1
1320 LET P4=P+P1
1325 LET B[1,2]=P4
1330 LET V6=P4*C2
1335 LET G1=B[F1,3]/V6
1340 LET R1=F[J5,7]/C[F1,7]
1345 IF R1>=1 GOTO 1355
1350 LET R1=1/R1
1355 LET B[3,2]=R1
1360 IF G1>G9 GOTO 1375
1365 LET B[2,2]=G1
1370 GOTO 1415
1375 IF P6=0 GOTO 1415
1380 LET V6=V6+P6
1385 LET K7=K7+1

```

```

1390 LET G2=B[F1,3]/V6
1395 IF G2>G9 GØTØ 1410
1400 LET B[2,2]=G2
1405 GØTØ 1415
1410 IF K7 <>S1 GØTØ 1380
1415 NEXT F 1
1420 FØR J=1 TØ M5
1425   FØR K=1 TØ M
1430     IF B[K,1]>T[J,1] G ØTØ 1455
1435     IF B[K,2]>T[J,K+1] GØTØ 1455
1440     LET J2=J
1445     LET K=M
1450     LET J=M5
1455   NEXT K
1460 NEXT J
1465 LET K=F[J5,2]
1470 FØR L=1 TØ N1
1475   IF A[L,1]<>K GØTØ 1490
1480   LET F[J5,5]=A[L,5]+U[J2,H1]
1485   LET L=N1
1490 NEXT L
1495 RETURN

```

SUBROUTINA PARA CALCULAR EL AVANCE DE LAS TORRES DE TRANSMISION
SØBRE UN TERRENO CUALQUIERA.

```

1500 LET IO=INT((F[J5,3]/20)+.5)
1505 LET JO=F[J5,6]
1510 GØSUB 1610
1515 FØR I=I2+1 TØ 30
1520   FØR J1=1 TØ M
1525     LET A1=S[I+IO-1]+H[J1]
1530     LET A2=S[I+IO]+H[J1]
1535     IF SGN(Y[I]-A2)=SGN(Y[I-1]-A1) GØTØ 1595
1540     LET B1=ABS(Y[I-1]-A1)
1545     LET B2=ABS(Y[I]-A2)
1550     LET X1=20*(I-1)+20*B1/(B1+B2)
1555     LET C[J1,7]=X1
1560     LET C[J1,8]=X1-X0
1565     LET C[J1,3]=X1+F[J5,3]
1570     LET C[J1,4]=S[IO+INT(X1/20+.5)]
1575     LET C[J1,6]=J1
1580     LET C[J1,4]=C[J1,4]+Q[J1]
1585     IF C[J1,3]<X5 GØTØ 1595
1590     LET X2=X5
1595   NEXT J1
1600 NEXT I
1605 GØTØ 1750
1610 DEF FNS(X)=EXP(K6*X/2)-EXP(-K6*X/2)
1615 LET P=5000
1620 LET I1=1

```

```
1625 LET K=I1
1630 IF K>30 GØTØ 1710
1635 LET X=20*K
1640 LET U1=K6*(S[K+IØ]- (H[JØ]+S[IØ]))/FNS(X)
1645 LET XØ=X/2-LØG(U1+SQR(1+U1^2))/K6
1650 IF XØ>=P GØTØ 1675
1655 LET P=XØ
1660 LET I2=K
1665 LET K=K+1
1670 GØTØ 1630
1675 GØSUB 1715
1680 FØR I=I2+1 TØ 30
1685 LET D=Y[I]-S[I+IØ]
1690 IF D>=-.1 GØTØ 1705
1695 LET I1=I
1700 GØTØ 1625
1705 NEXT I
1710 RETURN
1715 DIM Y[N]
1720 DEF FNC(X)=1/K6*(EXP(K6*X)+EXP(-K6*X))/2
1725 FØR Z1=I2+1 TØ 30
1730 LET X=20*Z1
1735 LET Y[Z1]=H[JØ]+S[IØ]+FNC(X-P)-FNC(P)
1740 NEXT Z1
1745 RETURN
1750 RETURN
```

4. R E F E R E N C I A S

1. Araoz, J. y Poleo V. "Localización óptima de estructuras en líneas aéreas de transmisión", Congreso Panamericano de Ingeniería Mecánica, Eléctrica y de Ramas Afines, Caracas, sept 1967
2. Badiov, J.P. y Estart, R. "Etude sur ordinateur de la repartition des supports d'une ligne aerienne", R G E , Tomo 79, No. 9, oct 1970, pp 727-30
3. Balas, Egon, "A note on the branch-and bound principles", Carnegie-Mellon, University, Pittsburgh. Opns Res, No. 16, 1968, pp 442-45
4. Brown, A.P.G. y Lomnicki, Z.A. "Some applications of the branch-and-bound algorithm to the machine scheduling problem", Opns Res, No. 2, Vol 17, pp 173-86
5. Converti, V. Hyland, E.J. y Tickle, D.E. "Optimized transmission tower spotting on digital computer", A I E E , Power Apparatus and Systems, No. 59, abril 1962, pp 55-63
6. Efroymsen, M.A. y Ray, T.L. "A branch-bound algorithm for plant location", Opns Res, No. 14, may -jun 1966, pp 361-68
7. Gavett, J.W. y Plyter, N.V. "The optimal assignement of

facilities to locations by branch and bound", The University of Rochester, New York, marzo 1965, Opns Res, No 14, 1955, pp 210-32

8. Greenberg, H.H. "A branch-bound solution to the general scheduling problem, Operations Research Center, Institute of Applied Economic Research, Brasil, nov 1968, pp 353-61
9. Hoare, P.J. y Morwood, C.H. "Overhead transmission line optimized tower positioning using a digital computer, University of Queensland, jun 1964
10. Ignall, E y Schrage, L. "Application of branch-and-bound technique to some flow-shop scheduling problems", Opns Res, No 13, 1965, pp 400-12
11. Kolesar, J.P. "A branch-and-bound algorithm for the Knapsack problem", Management Science, Vol 13, No 9, may 1967
12. Lawler, E.V. y Wood, D.E. "Branch-and-bound methods: a survey", Operations Research, jul-ago 1966, pp 699-719
13. Mitten, L.G. "Branch-and-bound methods: General formulation and properties", Operations Research University of British Columbia, Vancouver, nov 1968
14. Popp, E.R., Dabekis, C.J. y Fullerton, F.M., "Electronic computer program permits optimized spotting of electric

transmission towers, A I E E , Power Apparatus and Systems, No. 66, jun 1963, pp 360-65

15. Sa, G. "Branch-and-bound and approximate solutions to the capacitated plant-location problem", Operations Research, Institute of Applied Economic Research, Brasil, 1968, pp 1005-16
16. Tomlin, J.A. "A improved branch-and-bound method for integer programming", Operations research, Scientific Control Systems, London, may 1969, pp 1070-78