2 9

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE ECONOMIA

"SERIES DE TIEMPO Y SUS APLICACIONES A LA ECONOMIA"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

LICENCIADO EN ECONOMIA

P R E S E N T A :

VICTOR BALLESTEROS GONZALEZ

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

MEXICO, D. F. 1990

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

C A P I T U L O I

INTRODUCCION

LA ECONOMIA Y LAS MATEMATICAS

CONOCIMIENTOS BASICOS DE ESTADISTICA Y MATEMATICAS PARA EL ANALISIS DE LAS SERIES DE TIEMPO

La economía y las matemáticas

La economía es una ciencia social que en su análisis emplea el método científico para estudiar las diferentes alternativas económicas por parte de la sociedad. En respuesta a éstas necesidades, los economistas han desarrollado teorías y modelos los cuales establecen las leyes y relaciones que hacen comprensible la realidad económica de la sociedad, a través de supuestos que ayudan a organizar los razonamientos y fundamentos lógicos que sustentan a las teorías y modelos.

La teoría económica en especial analiza todos sus supuestos, bases, leyes y fundamentos, sin excepción alguna, a través del análisis matemático. Esto ha propiciado que el uso de las matemáticas en el campo económico, haya desarrollado de una manera muy específica lo que los economistas han llamado *economía matemática*.
La economía matemática describe a su manera el análisis económico, ya que el propósito de cualquier modelo o teoría usado dentro de las ciencias económicas, es siempre deducir un conjunto de conclusiones o teoremas a partir de un conjunto dado de hipótesis o postulados a través de un proceso de razonamiento. Ahora un modelo económico es simplemente un esquema teórico y no existe ninguna razón por la que deba ser matemático, más sin embargo, si el modelo se puede expresar a través de relaciones matemáticas, éste tendrá la siguientes ventajas: i) su lenguaje será más conciso y exacto, ii) usará todos los teoremas matemáticos, iii) podrá utilizar relaciones funcionales de n variables. Esto hace que algunas de las aplicaciones de la economía a traves de sus modelos económicos para resolver problemas particulares, necesiten del apoyo de la Estadistica y la Econometría, siendo éstas últimas las bases para probar las hipótesis teóricas de la economía y sus modelos.

El análisis matemático como instrumento de apoyo en el estudio de hechos económicos, es en la actualidad la base primordial para poder interpretar numéricamente las mediciones cuantitativas de las principales variables de estudio en las diversas disciplinas de la economía.

El economista es un profesionista que debe saber fomentar la actividad económica, a través de recomendar o aplicar decisiones para llevar a cabo diferentes alternativas económicas que sean de beneficio social, además frecuentemente se enfrenta a que decisión debe tomar al respecto, cuando una variable económica que está interpretándose cuantitativamente, sufre cambios o alteraciones.

Para poder llevar a cabo la decisión correcta, necesita de las herramientas de análisis que le permitan evaluar el problema en cuanto a sus efectos económicos y sociales, que le ayudarán a planificar y poner en práctica las estrategias económicas, permitiéndole servir a la sociedad , estas herramientas son proporcionadas por las ciencias matemáticas. Ahora cada economista o investigador de los fenómenos económicos debe saber cuando usar estas herramientas, ya que la interpretación y la calidad del análisis del fenómeno económico bajo estudio es responsabilidad exclusiva del economista o investigador.

No usar las matemáticas en el análisis económico significa no llegar lejos en la interpretación de una realidad social, por eso mismo las personas que practiquen la economía como disciplina de estudio y por lo tanto como profesión tienen que saber mínimanente las relaciones que hay entre la ciencia económica y el análisis matemático.

Conocimientos básicos de estadística y matemáticas para el análisis de las series de tiempo.

En la actualidad la toma de decisiones en el campo económico está ligada al hecho de poder determinar cuantitativamente los efectos a futuro de las variables económicas y gran parte de los metódos utilizados para poder pronosticar la magnitud de éstos mismos, se hace dentro del análisis temporal de las variables económicas.

Los pronósticos de variables económicas no es un problema reciente, porque ya en épocas pasadas se habían hecho intentos para llevar a cabo tales propósitos.

El objeto del presente trabajo es de utilizar las diferentes técnicas y tipos de prónosticos que se han elaborado para estos fines y que a la vez han sido de utilidad en el campo económico.

Todo economista que esté trabajando en los pronósticos de las variables económicas, debe tener siempre presente un conocimento pleno de las matemáticas y de la estadística, para que pueda cumplir con su propósito de pronosticar los efectos que causan las diferentes variables económicas que puedan afectar de manera sustancial a la sociedad.

Razones por las cuales daremos un breve repaso de los conocimientos fundamentales de matemáticas y estadística que se requieren para poder trabajar en el análisis de la series de tiempo. Entendiéndose de antemano que no se pretende hacer aquí un manual o texto de matemáticas, sino más bien dar a conocer de una manera general y sucinta éstas herramientas en las aplicaciones de las series de tiempo.

Para el análisis de las series de tiempo debemos de considerar los siguientes tópicos de matemáticas y estadística:

Funciones.

En el estudio de modelos económicos y de series de tiempo, es necesario formular relaciones que nos permitan medir la variabilidad que hay entre diferentes variables económicas, y esto se hace a través de funciones que se pueden expresar por medio de ecuaciones.

Una función se define como un conjunto de parejas ordenadas en donde dada dos parejas diferentes, éstas no deben tener el mismo primer componente. El conjunto de todos los primeros componentes de las parejas ordenadas se le llama el dominio de la función y al conjunto de todos los segundos componentes, se le llama el codominio o rango de la función. Es usual que para expresar una función se de una regla de asociación entre lo que se llama la variable independiente y la variable dependiente, de la forma dada a continuación.: $f = \{ (x,y) \mid x \in \mathbb{R} \ , \ y = f(x) \}$. pero una manera más simple es $y = f(x) \quad \forall \ x \in \mathbb{R}$.

La manera de expresar a este tipo de funciones se les denomina funciones de una sola variable, por el hecho de que la variable dependiente está relacionada sólo con una variable independiente.

Las funciones univariadas de uso común en el análisis económico son las siguientes:

$y = f(x) = a_0 + a_1x$ función lineal

$y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ función cuadrática

$y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$

que es la expresión general de la función polinomial.

$y = f(x) = a\,A^{bx}$ función exponencial.

$y = f(x) = \log_a x$ función logarítmica.

$$y = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n}$$ función racional.

Las funciones en la que la variable dependiente está relacionada con más de una variable independiente, se le llaman funciones de n variables, funciones multivariantes o funciones múltiples. Y se representan de la siguiente forma:

$$z = f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$$

En el análisis de series de tiempo éstas funciones multivariantes son de gran importancia ya que las series de tiempo, se expresan muy a menudo con este tipo de funciones.

Teoría de probabilidades y Estadística.

La estadística y la probabilidad están totalmentente relacionadas y es difícil entender el análisis estadístico matemático sin tener como base la teoría de probabilidades.

Para iniciar el estudio de la teoría de probabilidades es necesario definir los siguientes conceptos:

i) Experimento aleatorio

Experimento aleatorio es aquel en el cual su resultado no puede conocerse de antemano.

ii) Evento aleatorio

Evento aleatorio es un resultado de un experimento aleatorio.

iii) Espacio muestral.

Espacio muestral son todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.

También se define un evento aleatorio como un subconjunto de un espacio muestral, esto se debe a que la teoría de conjuntos es la base fundamental para la Teoría de probabilidades.

El experimento aleatorio es el concepto básico del que se originó la teoría de probabilidades, y éste tiene como características de que se puede repetir indefinidamente en condiciones análogas, en cada prueba se obtiene un resultado que pertenece al conjunto de todos los resultados posibles del experimento, es decir, del espacio muestral. Además que la frecuencia relativa de cada resultado tiende a estabilizarse, al aumentar de manera indefinidamente el número de pruebas. (Condición de estabilidad de las frecuencias relativas o de regularidad estadística).

El concepto de probabilidad tiene como base el enfoque clásico el cual define la probabilidad de un evento como:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

número de casos favorables entre el número de casos totales.

en donde $n(A)$ = núm. de casos favorables y $n(\Omega)$ = núm. de casos totales.

El concepto de frecuencias relativas o probabilidad empírica dice que la probabilidad del evento A es igual número de veces que se repite el evento A, dividido por el número de veces que se repite el experimento. $P(A) = \frac{f(A)}{N}$ $f(A)$ es el núm. de veces que aparece el evento A y N el núm. de veces que se repite el experimento.

El concepto de estabilidad a la larga establece que la probabilidad del evento A es un número p que se obtiene al efectuar el experimento un número infinito de veces.

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{f(A)}{N}$$

La teoría de probabilidades también establece las bases de toda la estadística matemática a través del siguiente concepto, que es la definición del espacio de probabilidad.

Espacio de probabilidad (finito) es la terna $(\Omega , \mathfrak{F} , P(\cdot))$ En donde Ω es el espacio muestral $\mathfrak{F}$ es la familia de eventos del espacio muestral y $P(\cdot)$ es una función real sobre $\mathfrak{F}$. Que tiene las siguientes propiedades llamadas axiomas de la teoría de probabilidades:

I) $P(A) \geq 0$ La probabilidad de todo evento es siempre un valor positivo.

II) $P(\Omega) = 1$ La probabiliad del espacio muestral es siempre 1.

III) Si los eventos $A_1, A_2, A_3 \ldots A_k$ son excluyentes dos a dos es decir $A_i \cap A_j = \emptyset$ entonces se tiene que

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_k)$

ésta es la propiedad aditiva de la función de probabilidad.

Como consecuencia de los axiomas anteriores se dan los siguientes teoremas:

1) $P(A) = 1 - P(A')$ en donde A' es el complemento del evento A.

2) $P(\emptyset)$ la probabilidad del evento imposible es cero.

3) $0 \leq P(A) \leq 1$ Para todo evento A su probabilidad está entre 0 y 1

4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ si la $A \cap B \neq \emptyset$.

Probabilidad condicional.

La probabilidad condicional se define de la siguiente manera:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

La probabilidad de A dado que ocurrió B es igual a la probabilidad de $A \cap B$ dividido entre la probabilidad de B.

De la definición anterior se puede obtener que

$P(A \cap B) = P(B)\, P(A \mid B)$ y de aquí también podemos definir que si $P(A \mid B) = p(A)$ entonces se tiene que:

$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$ que es la definición de independencia de dos eventos.

Variables aleatorias.

Definición. Una variable aleatoria (real) X sobre el espacio de probabilidad Ω, $\mathfrak{F}$, $P(\cdot)$ es una función definida sobre Ω y con variables reales es decir $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Una Distribución de Probabilidad es el conjunto de todas las probabilidades correspondientes a todos los valores que la variable aleatoria puede asumir. Para el estudio de las distribuciones o funciones de probabilidad éstas pueden estudiarse a través de variables aleatorias discretas o continuas.

Una variable aleatoria es discreta cuando solo puede tomar un número finito o infinito numerable de valores.

Una variable aleatoria es continua cuando puede tomar todos los valores posibles dentro de un intervalo finito o infinito.

Una función de variable aleatoria discreta es aquella que cumple con las siguientes condiciones:

i) $P(x_i) \geq 0$ para toda x_i del dominio de la función.

ii) $\sum_{i=1}^{k} P(x_i) = 1$.

Una función de probabilidad de una variable aleatoria continua es aquella que cumple con las siguientes condiciones :

i) $f(x) \geq 0$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$.

Esto implica que las probabilidades de una función de variable aleatoria discreta son puntuales, mientras que en la función de variable aleatoria continua las probabilidades son por intervalo y es el área bajo la curva de la función de densidad.

Media o valor esperado de una distribución de probabilidad.

El valor esperado de una distribución de probabilidad se define como :

i) $\mu = \sum_{i=1}^{k} x_i \, P(x_i)$ para una función de variable aleatoria discreta.

ii) $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f(x) \, dx$ para una función de variable aleatoria continua.

Varianza de una distribución de probabilidad.

La varianza de una distribución de probabilidad se define :

i) $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \, p(x_i)$ para una variable aleatoria discreta.

ii) $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \, f(x)dx$ para una variable aleatoria continua.

La raíz cuadrada de la varianza se le llama la desviación estándar.

La covarianza de dos variables aleatorias representa la medida de asociación entre las variables X y Y, teniendo como definición la siguiente expresión:

$$\text{cov } (x,y) = E (x - \mu_x) (y - \mu_y) = E (x y) - \mu_x \mu_y$$

ahora que si las variables X y Y son independientes entonces la $E(x \, y) = \mu_x \mu_y$ y la $\text{cov}(x,y) = 0$.

Una forma más estándar de medir el grado de asociación entre dos variables es el coeficiente de correlación que se define como:

$$\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \, \sigma_y}$$

que es el cociente de la covarianza de (x,y) dividido entre las desviaciones estándar de cada una de las variables. Si las variables aleatorias X y Y son independientes entonces $\rho = 0$.

Combinación lineal de variables aleatorias.

Considerando que se tienen k variables aleatorias definidas por (x_1, x_2, x_3, ... x_k) y suponiendo que cada variable aleatoria tenga $E(x_i) = \mu_i$ y si definimos una nueva variable aleatoria como $y = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_kx_k$ en donde cada a_i es una constante, el valor esperado para ésta nueva variable es:

$$E (y) = a_1E(x_1) + a_2E(x_2) + \ldots + a_kE(x_k)$$

$$E (y) = a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \ldots + a_k\mu_k$$

y la varianza de la variable y se define como:

$$\sigma_y^2 = E [(y - \mu_y)^2] = \sum_{i=1}^{k} a_i^2\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} a_ia_j\sigma_{ij}$$

en donde σ_i^2 es la varianza de la variable x_i y σ_{ij} es la covarianza entre x_i y x_j. Por lo que si la covarianza de (x_i, x_j) es cero, es decir cada x_i es independiente con respecto a cada x_j ($i \neq j$) entonces la $Var(y) = \sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{k} a_i^2 \sigma_i^2$

Entre las distribuciones que mayor importancia tienen en la estadística está la distribución normal cuya función de densidad se define con la siguiente ecuación :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x - \mu)^2/2\sigma^2}$$

En donde μ es la media y σ^2 la varianza de la distribución .

Distribuciones muestrales

La aplicación de la estadística radica en el sentido de que siempre se tiene que trabajar en algún problema real, por medio de muestras, que por definición están dadas por una relación de n variables aleatorias, en donde n es el tamaño de la muestra.

Estás muestras de n elementos, también definen a un estadístico muestral, que dan origen a la distribución muestral del estadístico, que por aplicación del *Teorema del límite central*, ésta distribución muestral del estadístico debe tender hacia una distribución normal por medio del estadístico :

$$Z = \frac{\hat{\theta} - E(\hat{\theta})}{\sigma_{\hat{\theta}}}$$

cuando el tamaño de la muestra tiende a infinito. Debemos de considerar que éste teorema es el elemento más importante y poderoso en la aplicación de la estadística en todos los campos de la ciencia, de tal forma que su demostración es parte clave de la llamada estadística matemática.

Matrices.

Las matrices dentro de la aplicación que tienen en el análisis económico, está la de poder representar de una manera breve y sistemática, una serie de relaciones funcionales. Una matriz es un arreglo rectangular de números reales formado por vectores renglón y vectores columna, que están sujetos a ciertas reglas de operación :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{1k} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{2k} \\ a_{31} & a_{31} & a_{32} \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{3k} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

$(a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots\ldots\ldots a_{1k})$ es un vector renglón y

$(a_{11}, a_{21}, a_{31}, \ldots\ldots\ldots a_{n1})$ es un vector columna.

Una manera de representar una matriz es la siguiente:

$A = [\, a_{ij} \,] \;:\; B = [\, a_{ij} \,]$.

Dadas las matrices de orden $n \times k$ cada una de ellas

$A = [\, a_{ij} \,] \;:\; B = [\, a_{ij} \,]$.

La suma de $A + B = C$, es decir $[a_{ij}] + [b_{ij}] = [c_{ij}]$

en donde cada $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Producto de dos matrices.

$A \circ B = C$ el producto de dos matrices se lleva a cabo si y solo si, el número de columnas de A es igual al número de renglones de B. si A es de orden $n \times m$, y B es de orden $r \times k$ el producto de A y B se puede efectuar si $m = r$ obteniéndose, una matriz C de orden $n \times k$. Cada elemento c_{ij} se obtiene de la forma siguiente : $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}$

$$c_{ij} = \sum a_{ik}b_{kj}$$

Si en una $A = [\ a_{ij}\ ]$ matriz de orden $n \times k$, $n = k$, se dice que ésta matriz A es de orden $n \times n$ y que A es una matri.. cuadrada. Toda matriz cuadrada tiene asociado un determinante de orden $n \times n$ y éste es un número real. La manera de resolver el determinante de una matriz es un precedimiento en el cual se involucra a todos los elementos del determinante, siendo el procedimiento más común el de menores, que aunado a las propiedades de los determinantes, nos da la solución del determinante. El menor de un determinante se define como el determinante que se obtiene al cancelar el renglón j y la columna k del elemento a_{ij} de un determinante de orden $n \times n$, dando como resultado un nuevo determinante de orden $(n-1)\times(n-1)$. En general $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\ M_{ij}$ para cada renglón o columna que se tome en cuenta para resolver el determinante, $\alpha_{ij} = (-1)^{ij}a_{ij}$.

Si a una matriz $A = [\ a_{ij}\ ]$ se intercambian los renglones por las columnas o las columnas por los renglones, se dice que la matriz resultante es la matriz transpuesta de A y se simboliza $A^t = [a_{ji}]$ el valor del determinante de A^t tiene el mismo valor que el determinante de la matriz A .

Una matriz que es importante para diferentes fines en la aplicación de matrices, es la matriz de identidad.

Esta matriz es de orden nxn y tiene la característica que la diagonal principal contiene unicamente unos y los demás elementos son ceros. Si $A = [a_{ij}]$ es de orden nxn y se tiene la matriz de identidad del mismo orden entonces $A \cdot I = I \cdot A = A$. Ahora que si el determinante de la matriz A es diferente de cero, la matriz A tiene asociada una matriz inversa, A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = I$.
Esta última propieda se utiliza en problemas donde se requiere resolver sistemas de ecuaciones lineales simultaneas de n ecuaciones con n incognitas.

Regresión lineal.

Es frecuente que en los modelos de series de tiempo y econométricos se establezcan relaciones lineales en los cuales las variables en consideración se traten de ajustar a una función que pueda expresarse por medio de una relación funcional conocida, y una forma específica para estos casos de ajustar los datos empíricos hacia una ecuación es el análisis de regresión.

La parte más importante de este método se justifica a través de los mínimos cuadrados. El método en si consiste en minimizar la suma de los errores al cuadrado, en donde $e_i = y_i - \hat{y}_i$, y_i representa el valor observado de la variable dependiente, y $\hat{y}$ representa el valor dado a través de la ecuación con la cual se van ajustar los datos. Entonces la suma de los errores al cuadrado se expresan de la siguiente forma : $S = \sum e_i^2 = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2$.
Un modelo usado en series tiempo y en econometría es el siguiente:

$$\hat{y}_i = a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i} + a_3 x_{3i} + \ldots + a_k x_{ki}$$

mismo que usaremos para aplicar el método de mínimos cuadrados.
Entonces el error $e_i = y_i - \hat{y}$ se puede expresar de la forma dada a continuación :

$$e_i = y_i - (a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i} + a_3 x_{3i} + \ldots + a_k x_{ki})$$

y el error al cuadrado es:

es : $e_i^2 = [\ y_i - (a_o + a_1x_{1i} + a_2x_{2i} + a_3x_{3i} + \ldots + a_kx_{ki})]^2$

siendo la suma de los errores al cuadrado la siguiente expresión

$$S = \Sigma\, e_i^2 = \Sigma\, [\ y_i - (a_o + a_1x_{1i} + a_2x_{2i} + a_3x_{3i} + \ldots + a_kx_{ki})]^2$$

de la última expresión se tiene que S está en función con los coeficientes a_o , a_1 , a_2 ,..., a_k . $S = f\ (a_o\ ,\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ldots,\ a_k\ )$ entonces para que la suma S sea mínima tenemos que obtener todas las derivadas parciales $\partial S / \partial a_i$ e igualarlas a cero.

$$\frac{\partial S}{\partial a_o} = \Sigma\, 2\, [\ y_i - (a_o + a_1x_{1i} + a_2x_{2i} + a_3x_{3i} + \ldots + a_kx_{ki})](-1) = 0$$

de ésta ecuación se obtiene :

$$\Sigma\, y_i = n\, a_o + a_1\Sigma\, x_{1i} + a_2\Sigma\, x_{2i} + a_3\Sigma\, x_{3i} + \ldots + a_k\Sigma\, x_{ki}$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = \Sigma\, 2\, [\ y_i - (a_o + a_1x_{1i} + a_2x_{2i} + a_3x_{3i} + \ldots + a_kx_{ki})](-x_{1i}) = 0$$

tambien de ésta se obtiene

$$\Sigma\, y_ix_{1i} = a_o\Sigma\, x_{1i} + a_1\Sigma\, x_{1i}^2 + a_2\Sigma\, x_{1i}x_{2i} + a_3\Sigma\, x_{1i}x_{3i} + \ldots + a_k\Sigma\, x_{1i}x_{ki}$$

se continuan las derivadas parciales hasta terminar con :

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = \Sigma\, 2\, [\ y_i - (a_o + a_1x_{1i} + a_2x_{2i} + a_3x_{3i} + \ldots + a_kx_{ki})](-x_{ki}) = 0$$

obteniéndose para esta última ecuación :

$$\Sigma\, y_ix_{ki} = a_o\Sigma\, x_{1i}x_{ki} + a_1\Sigma\, x_{2i}x_{ki} + a_2\Sigma\, x_{2i}x_{ki} + \ldots + a_k\Sigma\, x_{ki}^2 = 0$$

entonces se tienen (k+1) ecuaciones normales de regresión :

$$\Sigma\, y_i = n\, a_o + a_1\Sigma\, x_{1i} + a_2\Sigma\, x_{2i} + a_3\Sigma\, x_{3i} + \ldots + a_k\Sigma\, x_{ki}$$

$$\Sigma\, y_ix_{1i} = a_o\Sigma\, x_{1i} + a_1\Sigma\, x_{1i}^2 + a_2\Sigma\, x_{1i}x_{2i} + a_3\Sigma\, x_{1i}x_{3i} + \ldots + a_k\Sigma\, x_{1i}x_{ki}$$

$$\Sigma\, y_ix_{2i} = a_o\Sigma\, x_{2i} + a_1\Sigma\, x_{1i}x_{2i} + a_2\Sigma\, x_{1i}^2 + a_3\Sigma\, x_{2i}x_{3i} + \ldots + a_k\Sigma\, x_{2i}x_{ki}$$

....

$$\Sigma\, y_ix_{ki} = a_o\Sigma\, x_{ki} + a_1\Sigma\, x_{1i}x_{ki} + a_2\Sigma\, x_{2i}x_{ki} + a_3\Sigma\, x_{3i}x_{ki} + \ldots + a_k\Sigma\, x_{1k}^2$$

con el cual resulta un sistema de (k+1) ecuaciones con (k+1) incognitas, que son a_o , a_1 , a_2 , ... a_k .

el cual podemos representar de una manera matricial :

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x_{1i} & \Sigma x_{2i} & \Sigma x_{3i} & \cdots & \Sigma x_{ki} \\ \Sigma x_{1i} & \Sigma x_{1i}^2 & \Sigma x_{1i}x_{2i} & \Sigma x_{1i}x_{3i} & \cdots & \Sigma x_{1i}x_k \\ \Sigma x_{2i} & \Sigma x_{1i}x_{2i} & \Sigma x_{2i}^2 & \Sigma x_{2i}x_{3i} & \cdots & \Sigma x_{2i}x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Sigma x_{ki} & \Sigma x_{1i}x_{ki} & \Sigma x_{2i}x_{ki} & \Sigma x_{3i}x_{ki} & \cdots & \Sigma x_{ki}^2 \end{bmatrix} = X$$

$$\begin{bmatrix} a_o \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_k \end{bmatrix} = A \qquad \begin{bmatrix} \Sigma y_1 \\ \Sigma x_{1i}y_i \\ \Sigma x_{2i}y_i \\ \cdots\cdots \\ \Sigma x_{ki}y_i \end{bmatrix} = Y$$

entonces el sistema se puede representar de la forma siguiente :

$Y = X \cdot A$; sabiendo que $X \cdot X^{-1} = I$, ya que X^{-1} es la inversa de X . se tiene que $X \cdot X^{-1} X = X^{-1} \cdot Y$ por lo que el sistema de ecuaciones tendrá como solución para la matriz de coeficientes $A = X^{-1} \cdot Y$.

Como ya pudimos apreciar a través de éste breve espacio, la importancia que tiene la aplicación de las matemáticas en el campo de la economía es muy amplio y sustancioso, de tal forma que podemos afirmar que las matemáticas es la herramienta más útil que puede tener la economía para poder comprobar todas y cada unas de sus hipótesis dentro del análisis económico.

C A P I T U L O II

SERIES DE TIEMPO Y SUS CARACTERISTICAS

METODO SIMPLE DE SERIES DE TIEMPO

METODO DE PROMEDIOS MOVILES DE SERIES DE TIEMPO

METODO DE DESCOMPOSICION DE SERIES DE TIEMPO

SERIES DE TIEMPO.

Las series de tiempo son conjuntos de observaciones tomadas en tiempos igualmente espaciados. En el estudio de éstas series se ha visto que su análisis se facilita si se considera que las observaciones son consecuencia de la intervención de los siguientes componentes:

i) Tendencia general

ii) Estacional

iii) Ciclica

iv) Irregular o aleatoria.

La tendencia general indica la dirección hacia la cual tiende la serie de tiempo y por lo tanto se le considera como la componente más importante, La componente estacional indica las variaciones periódicas que ocurren en el corto plazo, de manera general en lapsos de tiempo menores o iguales de un año, la componente cíclica indica las variaciones que se dan en el largo plazo, que en todos los casos los lapsos de tiempo en que éstas ocurren son de un año o más y por último la componente irregular son variaciones que ocurren aleatoriamente a través de la serie cronólogica.

El objeto del estudio de las series de tiempo, es que con los datos obtenidos cronológicamente, éstos sean útiles para efectuar pronósticos tomando en consideración la tendencia de los mismos y es común que a la serie cronológica se le llame un proceso de realización. Para llevar a cabo los pronósticos con series de tiempo es necesario verificar el patrón histórico de las realizaciones y también analizar su comportamiento con el propósito de que los valores futuros de las observaciones por pronosticar sean desde el punto de vista de la estadística, de lo más preciso.

Los patrones de los procesos de realización de una serie de tiempo, son de lo más variado y podemos enumerar los siguientes:

Patrones de realizaciones horizontales.

Estos tienen la característica de que los datos fluctuan alrededor de un valor fijo μ , en donde éste valor es la media o promedio de las observaciones hechas en los periodos de tiempo t_1, t_2, t_3,...t_k .

El diagrama de dispersión que presenta un patrón horizontal de un proceso de realización es de la forma que muestra la figura 2.1.

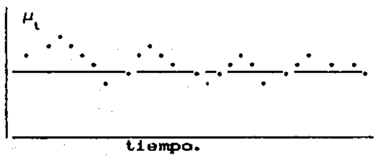


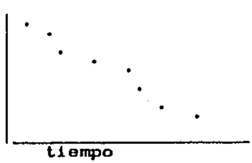
fig 2.1

Patrones de realizaciones con tendencia lineal.

Estos patrones siguen un nivel de tendencia que cambia linealmente con el tiempo y están definidos por la siguiente relación:

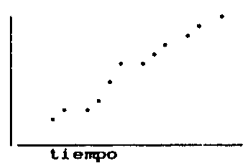
$$\mu_t = a + b\,t$$

El diagrama de dispersión que presenta la tendencia de estos patrones son de la forma mostrada en las figuras 2.2 y 2.3.



tendencia negativa

fig 2.2



tendencia positiva

fig 2.3

Existen otros patrones de realización ya sean que el nivel de estos tengan su cambio a través del tiempo siguiendo una relación cuadrática o una relación polinomial. Estos patrones tiene las siguientes ecuaciones.

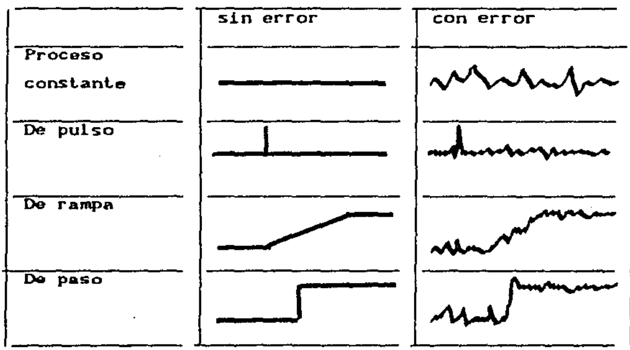
Patrón de realizacion con tendencia cuadrática

$$\mu_t = a + bt + ct^2$$

Patrón de realización con tendencia polinomial

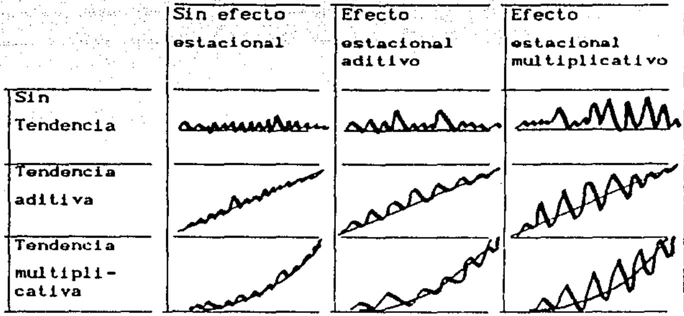
$$\mu_t = a_o + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_k t^k \;.$$

Los procesos de realización anteriores fueron identificados a través de alguna relación funcional, pero otros autores consideran que hay patrones de realizaciones que se pueden identificar por medio de su gráfica o diagrama de dispersión. Como se muestran en los siguientes cuadros.



Algunos patrones básicos (*)

(*) Makridakis et al .- Forecasting Methods and Aplications pag (70).- John Wiley & Sons.- New York, U.S.A.- 1985.



(b) Patrones de realizaciones basados en la clasificación de Pegel. (*)

Para usar las series de tiempo como una herramienta útil para efectuar pronósticos, existen métodos simples que no requieren de un análisis estadístico-matemático de alto nivel.
Por lo que en este espacio describiremos algunos de los más frecuentemente utilizados, sobre todo cuando el patrón de realizaciones está generado por unas cuantas observaciones.

El patrón más fácil que se puede encontrar para efectuar pronósticos con las series de tiempo, es el método del patrón horizontal o método simple. El principio de éste metodo está fundamentado en que la media de un conjunto de valores, es un estimador insesgado, así si una serie de tiempo está siguiendo un proceso constante sujeto a variaciones aleatorias (o ruidos), entonces sus valores al tiempo T puede utilizarse como un pronóstico para los periodos de

---

(*) <u>Makidrakis</u> <u>et</u> <u>al</u> .- opcit.

tiempo siguientes y la condición para que éste método sea aplicable es que la serie cumpla con los requisitos de una serie estacionaria y éstos son:

i) Que la media del proceso de realización sea constante

ii) Que la varianza alrededor de ésta media sea constante a través del tiempo.

Los resultados de los pronósticos dados por éste procedimiento son muy pobres y de escaso valor práctico. Su ventaja es que sirve como un modelo de comparación con otros modelos de pronóstico más refinados, además de que se requieren sólo unos cuantos datos en las observaciones del proceso.

Siendo $\hat{x}$ los valores pronosticados al tiempo t entonces se tiene que $E(\hat{x}(t)) = E(x(T)) = \mu$ y el error del pronóstico $e_t = x_{T+t} - x_T$ $E(e(t)) = E(x_{T+t}) - E(\hat{x}_T(t)) = 0$ y la $Var(e(t)) = 2\sigma^2$.

Para mostrar la sencillez de éste método vamos a dar el siguiente ejemplo:

Tabla No. 1

	Miles de Personas (*)	
Año 1985.	Turismo receptivo	Turismo egresivo .
Enero	385	168
Febrero	410	164
Marzo	469	192
Abril	341	232
Mayo	323	215
Junio	345	238
Julio	341	339
Agosto	359	245
Septiembre	219	207

(*) Fuente: Banco de México. Dirección de Investigaciones Económicas.

Si $\hat{x}_T(t) = x_T$ para $t = 1, 2 \ldots$

Los pronósticos para un sólo periodo de tiempo adelantado.

	Miles	de	personas	
1985	Turismo.		Turismo Pronósticos	
	receptivo	egresivo	receptivo	egresivo
Enero	385	168	----	----
Febrero	410	464	385	168
Marzo	469	192	410	464
Abril	341	232	469	192
Mayo	343	215	341	232
Junio	345	238	343	215
Julio	341	339	345	238
Agosto	359	245	341	339
Septiembre	219	207	359	245
Octubre	---	---	219	207

Como se puede observar éste método es sencillo y sin ninguna complicación matemática.

Ahora vamos a describir otro de los modelos sencillos de aplicar cuando también el proceso de realización sigue un patrón horizontal éste método se le conoce como promedios móviles, el promedio de los valores de N periodos de tiempo es usado para el pronóstico de los valores futuros. Para aplicar éste método se debe seleccionar un valor de N y considerar los valores de x_T , x_{T-1} , .. x_{T-N-1} correspondientes y se obtiene su promedio M_T por medio de la siguiente ecuación :

$$M_T = \frac{x_{T-N+1} + \ldots + x_{T-1} + x_T}{N}$$

o si se usa una forma recursiva:

$$M_T = M_{T-1} + \frac{x_T - x_{T-N}}{N}$$

M_T se le denomia el promedio móvil al tiempo T, éste promedio se puede utilizar para obtener el prónostico al tiempo t.

$$\hat{x}(t) = M_T \ .$$

Las bases matemáticas se éste método son:

i) Que todos los valores x_i son independientes y que tienen una media μ , con una σ^2.

entonces se tiene :

$$E[\hat{x}(t)] = E[1/N(x_{T-N-1} + \ldots + x_{T-1} + x_T)] = \mu$$

$$E[e_{(t)}] = E[x_{(T+t)} - \hat{x}(t)] = \mu - \mu = 0$$

$$\mathrm{Var}[\hat{x}(t)] = \mathrm{Var}(1/N(x_{T-N+1} + \ldots + X_{T-1} + x_T)] = \frac{\sigma}{N}$$

$$\mathrm{Var}[e_{(t)}] = \mathrm{Var}[x_{T+t} - \hat{x}(t)] = \sigma^2 + \sigma^2/N = \frac{N+1}{N}\sigma^2$$

Para poder dar un ejemplo de éste método se van a utilizar los mismos datos de la tabla anteriormente descrita.

	Miles de Personas(*)	
	Turismo receptivo	Turismo egresivo .
1985.		
Enero	385	168
Febrero	410	184
Marzo	469	192
Abril	341	232
Mayo	323	215
Junio	345	238
Julio	341	339
Agosto	359	245
Septiembre	219	207

(*) Fuente Banco de México. Dirección de Investigaciones Económicas. Cuadernos de Información Oportuna.- SPP.- 145

Ahora aplicando el método de promedios móviles y utilizando una una N = 4 se tienen los siguientes resultados:

	Miles de personas		Pronósticos	
1985	Turismo.		Turismo	
	receptivo	egresivo	receptivo	egresivo
Enero	381	168	----	----
Febrero	410	464	----	----
Marzo	469	192	----	----
Abril	341	232	400.25	264.00
Mayo	343	215	390.75	275.75
Junio	345	238	374.50	219.25
Julio	341	339	342.50	256.00
Agosto	359	245	347.00	259.25
Septiembre	212	207	316.00	257.25

También podemos aquí afirmar que éste método es sencillo y fácil de aplicar sin hacer operaciones complicadas o difíciles.

Por último vamos a describir el método clásico del análisis de series de tiempo, éste tiene como principio, el hecho de que cada observación consta de las componentes que ya se han mencionado anteriormente y que son : la tendencia, la variación estacional, la variación cíclica y la componente aleatoria.

En el estudio de las componentes de las series de tiempo se han formulado dos modelos para determinar los valores observados en el transcurso del tiempo, y que se pueden expresar a través de las ecuaciones siguientes:

$$1)\ Y_t = T + E + C + I$$

$$2)\ Y_t = T \circ E \circ C \circ I$$

en donde Y_t es la observación al tiempo t.

T es la tendencia ;

E es el efecto estacional

C es el efecto ciclico

I es la variación aleatoria o irregular.

La expresión 1) supone que T, E, C e I son funciones del tiempo es decir: $T = f_1(t)$ $E = f_2(t)$ $C = f_3(t)$ $I = f_4(t)$.
entonces la observación Y_t se puede expresar como una suma algebraica de funciones:

$$Y_t = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + f_4(t) .$$

En cambio la expresión 2), supone que únicamente T es una función del tiempo y que los valores de E, C e I son indices o coeficientes. Para efectuar el estudio de las series de tiempo a través de la ecuación $Y_t = T + E + C + I$ es necesario entender las técnicas del análisis espectral ya que cada función en que se expresan T, E, C e I se obtienen por medio las transformadas de Fourier, un análisis simplificado se hace en el capitulo III a través de modelos senoidales.

Entonces unicamente se hará el análisis utilizando la ecuación $Y_t = T \cdot E \cdot C \cdot I$ .llamado método de descomposición.

Por medio de ésta ecuación el procedimiento a seguir es:

i) Obtener el indice de estacionalidad mensual

ii) Aplicar estos coeficientes para desestacionalizar la serie.

iii) A la serie desestacionalizada se le efectúa una regresión lineal para obtener la ecuación de la tendencia.

iv) A los valores originales de la serie, se dividen entre cada uno de los valores obtenidos por la ecuación de la tendencia, y con este cociente se obtienen las componentes cíclica e irregular. La componente cíclica por ser a largo plazo no se puede separar de una manera eficiente, por lo que se supone que los resultados obtenidos en éste paso son las variaciones irregulares o aleatorias junto con la componente cíclica.

Para aplicar éste método lo vamos a ilustrar con la siguiente serie cronológica:

Tabla No. 2

Saldos Mensuales del Medio circulante (miles de millones de pesos)

Mes	1986	1987	1988
Ene	5673.30	7862.00	15125.90
Feb	5715.30	8439.10	15201.60
Mar	6026.00	8439.10	15528.10
Abr	5909.80	9394.10	18371.30
May	6013.40	9888.90	19063.90
Jun	6274.80	9841.00	19378.70
Jul	6342.80	10962.50	18761.10
Ago	6285.60	10026.50	18174.10
Sep	6438.70	10730.40	16660.00
Oct	6876.10	11877.30	17049.00
Nov	7362.20	12168.60	17667.00
Dic	8390.40	14285.20	20335.00

Fuente: Banco de México.- Subdirección de Investigación económica.- Indicadores Económicos.- Cuadernos de Información Oportuna de la Secretaría de Programación y Presupuesto.- Diciembre de 1989.

Para obtener el índice estacional mensual se utiliza el siguiente procedimiento: Para cada uno de los años se hace la suma total y éste resultado va a dividir al valor de 1200, dando un valor que va a servir de factor que multiplica a cada uno de los valores mensuales del año en cuestión, a éste resultado deberá multiplicarse por el valor de 100. Quedando el índice mensual de ésta forma expresado en porcentajes, por lo que a éste procedimiento se le llama el método de porcentajes medios de índices estacionales. Así para el año de 1986, la suma total de los valores mensuales es de 77306.40 y dividiendo a 1200 entre éste valor se tiene un coeficiento de 0.0155, repitiendo lo mismo para los años de 1987 y 1988 se obtienen los siguientes coefiecientes 0.0097 y 0.0057 .
Entonces para los meses de 1986, sus valores se multiplican por 0.0155, para 1987 por 0.0097 y para 1988 por 0.0057 .
Los resultados se presentan en la tabla siguiente:

Mes	1986	1987	1988	Promedio
Ene	88.06	76.05	85.89	83.33
Feb	88.71	81.64	86.32	85.56
Mar	93.53	85.77	88.17	89.16
Abr	91.73	90.87	104.32	95.64
May	93.34	95.66	108.25	99.08
Jun	97.40	91.72	110.04	99.72
Jul	98.45	106.05	106.53	103.68
Ago	97.56	96.99	103.20	99.25
Sep	99.91	104.38	94.60	99.63
Oct	106.73	114.90	96.81	106.15
Nov	114.28	117.72	100.32	110.77
Dic	130.24	138.19	115.47	127.97

El paso a seguir es ahora obtener un promedio de los índices para cada uno de los meses y éste promedio será el indice estacional mensual Para éste ejemplo la última columna de la tabla anterior representa el indice estacional mensual.

Una vez obtenidos los indices estacionales mensuales se procede a desestacionalizar los datos originales, de acuerdo a la ecuación

$$Y = T \cdot E \cdot C \cdot I \qquad Y^{d} = (Y/E) = T \cdot C \cdot I$$

Esto se hace dividiendo cada mes del año por su respectivo indice estacional mensual, en éste caso por ejemplo, los valores originales de los mese de Enero de 1986, 1987 y 1988 se van a dividir por su respectivo indice estacional mensual cuyo valor es de 0.8333; y lo mismo se hace para todos los meses de cada año. La tabla siguiente representa los valores desestacionalizados de la tabla No. 2.

Tabla No. 3

Mes	1986	1987	1988
Ene	6807.46	9433.71	18149.75
Feb	6679.79	9863.25	17766.97
Mar	6758.26	9943.25	17415.03
Abr	6178.76	9821.64	19207.41
May	6068.65	9979.75	19239.05
Jun	6292.25	9507.36	19432.59
Jul	6117.50	10573.10	18094.69
Ago	6332.62	10101.51	18310.06
Sep	6480.17	10829.02	16720.77
Oct	6477.63	11189.02	16081.02
Nov	6646.03	10984.89	15948.43
Dic	6556.45	11162.79	15890.24

Con los resultados anteriores se efectúa una regresión lineal y con la ecuación obtenida, se evaluan todos los meses del periodo Enero de 1986 a Diciembre de 1988.

Los resultados de la regresión lineal se presentan a continuación, haciendo notar que los cálculos se hicieron con el fin de ilustrar el método de mínimos cuadrados aplicando las ecuaciones normales de regresión para el ajuste de una línea recta. Las cuales se expresan de la siguiente forma:

$$\Sigma Y^d = n\,\beta_o + \beta_1 \Sigma t \qquad (1)$$

$$\Sigma t\ Y^d = \beta_o \Sigma\ t + \beta_1 \Sigma t^2 \qquad (2)$$

Utilizando un método codificado para los valores de t se deduce que

$\beta_o = (\Sigma Y^d / n)$ y $\beta_1 = (\Sigma t \cdot Y^d)/(\Sigma t^2)$

	t	Y^d	$t \cdot Y^d$	t^2
1986.01	-35	6807.46	-238261.21	1225
1986.02	-33	6679.79	-220433.24	1089
1986.03	-31	6758.26	-209506.16	961
1986.04	-29	6178.56	-179178.24	841
1986.05	-27	6068.65	-163853.55	729
1986.06	-25	6292.25	-157306.29	625
1986.07	-23	6116.50	-140702.53	529
1986.08	-21	6332.62	-132985.12	441
1986.09	-19	6460.17	-122743.40	361
1986.10	-17	6477.63	-110119.80	289
1986.11	-15	6646.03	-99690.59	225
1986.12	-13	6556.45	-85233.93	169
1987.01	-11	9433.71	-103770.82	121
1987.02	-9	9863.25	-88769.29	81
1987.03	-7	9943.93	-69607.54	49
1987.04	-5	9821.64	-49108.21	25
1987.05	-3	9979.75	-29939.27	9
1987.06	-1	9507.36	-9907.36	1
1987.07	1	10573.10	10573.10	1
1987.08	3	10101.51	30304.53	9
1987.09	5	10828.75	54148.79	25
1987.10	7	11189.02	78323.14	49
1987.11	9	10984.89	98864.06	81
1987.12	11	11162.79	122790.71	121
1988.01	13	18149.75	235946.82	169
1988.02	15	17766.97	266504.58	225
1988.03	17	17415.03	296055.59	289
1988.04	19	19207.41	364940.85	361
1988.05	21	19239.05	404020.16	441
1988.06	23	19432.59	446949.72	529
1988.07	25	18094.69	452367.48	625
1988.08	27	18310.06	494371.80	729
1988.09	29	16720.77	484902.34	841
1988.10	31	16061.02	497891.75	961
1988.11	33	15948.43	526298.42	1089
1988.12	35	15890.24	556158.72	1225

Por lo tanto se tiene $\Sigma t = 0$, $\Sigma Y^{d} = 413002.46$

$\Sigma t \cdot Y^{d} = 3210690.01$ y $\Sigma t^{2} = 15540.00$

Aplicando los resultados a las ecuaciones (1) y (2)

se tiene $\beta_{o} = 11472.29$ $\beta_{1} = 208.608$

Entonces la ecuación de regresión para la serie desestacionalizada es : $T = 11472.29 + 206.608\, t$ en donde los valores de t para el periodo de Enero de 1986 a Diciembre de 1988 son de (-35, -33...33, 35)

Para efectos de pronóstico se tienen que aislar los efectos ciclicos y aleatorios C•I y esto se efectúa dividiendo los valores desestacionalizados de cada mes entre cada valor obtenido por la ecuación de la recta de mínimos cuadrados, obteniendose un coeficiente que-representa el valor de C•I al cual se le aplica la técnica de promedios móviles para aislar el efecto aleatorio o irregular I.

Al aplicar el método de promedios móviles se puede llevar cabo a tráves de que éstos sean con un periodo de adelanto o que éstos sean centrados.

Para el caso de que sean con un periodo de adelanto se tienen que calcular con la siguiente relación:

$$Coef_{t} = (CI_{t-1} + CI_{t-2} + CI_{t-3})/3 \text{ en donde}$$

Ahora que sí los periodos son centrados éstos deberán calcularse con esta otra relación:

$$Coef_{t} = (CI_{t-1} + CI_{t} + CI_{t+1})/3$$

CI representa el valor de cada valor desestacionalizado entre el valor de la ecuación de regresión a cada periodo de tiempo t.

Para llevar a cabo los pronósticos se aplica la siguiente ecuación:

$$Y_{t}^{p} = T_{t} \cdot E_{t} \cdot Coef_{t}$$

Los resultados siguientes representan los pronósticos para las observaciones de la tabla No.2 en la cual se utilizó para las componentes C•I, los promedios móviles de orden 3 con un periodo de adelanto.

Periodo	Y^d	T	C•I	Coef.	Y^p
1986.01	6807.46	4240.96	1.6052	0.0000	---------
1986.02	6679.80	4654.20	1.4352	0.0000	---------
1986.03	6758.27	5067.42	1.3337	0.0000	---------
1986.04	6178.77	5480.63	1.1274	1.4580	7643.00
1986.05	6068.65	5893.85	1.0297	1.2988	7584.98
1986.06	6292.25	6307.06	0.9977	1.1636	7318.36
1986.07	6117.50	6720.27	0.9103	1.0516	7327.06
1986.08	6332.63	7133.49	0.8877	0.9792	6933.28
1986.09	6460.18	7546.71	0.8563	0.9319	7007.19
1986.10	6477.64	7959.92	0.8138	0.8847	7475.23
1986.11	6646.04	8373.14	0.7937	0.8525	7907.40
1986.12	6556.46	8786.35	0.7462	0.8212	9233.37
1987.01	9433.71	9199.57	1.0255	0.7846	6015.23
1987.02	9862.67	9612.78	1.0260	0.8551	7033.70
1987.03	9943.94	10025.99	0.9918	0.9326	8336.70
1987.04	9821.65	10439.21	0.9408	1.0144	10128.77
1987.05	9979.76	10852.42	0.9199	0.9862	10605.41
1987.06	9507.34	11265.64	0.8439	0.9508	10681.09
1987.07	10573.11	11678.85	0.9053	0.9015	10915.65
1987.08	10101.51	12092.07	0.8354	0.8896	10677.37
1987.09	10829.76	12505.28	0.8660	0.8615	10734.69
1987.10	11189.02	12918.50	0.8661	0.8689	11915.46
1987.11	10984.90	13331.71	0.8240	0.8558	12639.31
1987.12	11162.80	13744.93	0.8121	0.8520	14986.96
1988.01	18149.76	14158.14	1.2819	0.8341	9841.53
1988.02	17765.91	14571.36	1.2192	0.9727	12127.51
1988.03	17415.04	14984.57	1.1622	1.1044	14756.33
1988.04	19207.42	15397.79	1.2474	1.2211	17984.07
1988.05	19239.06	15811.00	1.2168	1.2096	18951.12
1988.06	19432.59	16224.22	1.1978	1.2088	19557.59
1988.07	18094.71	16637.43	1.0876	1.2207	21056.57
1988.08	18310.07	17050.65	1.0739	1.1674	19756.88
1988.09	16720.77	17463.86	0.9575	1.1197	19483.84
1988.10	16061.02	17877.08	0.8984	1.0396	19728.91
1988.11	15948.44	18290.29	0.87202	0.9766	19786.60
1988.12	15890.26	18703.51	0.8496	1.9093	21763.65

Pronósticos con promedios móviles de orden 3 con periodos centrados.

Periodo	Y^d	T	C•I	Coef.	Y^P
1986.01	6807.46	4240.96	1.6052	0.0000	---------
1986.02	6679.80	4654.20	1.4352	1.4580	5806.08
1986.03	6758.27	5067.42	1.3337	1.2988	5868.25-
1986.04	6178.77	5480.63	1.1274	1.1636	6099.25
1986.05	6068.65	5893.85	1.0297	1.0516	6141.34
1986.06	6292.25	6307.06	0.9702	1.1636	6158.78
1986.07	6117.50	6720.27	0.9319	1.0516	6493.24
1986.08	6332.63	7133.49	0.8877	0.8847	6264.05
1986.09	6460.18	7546.71	0.8563	0.8525	6410.28
1986.10	6477.64	7959.92	0.8138	0.8212	6938.61
1986.11	6646.04	8373.14	0.7937	0.7846	7277.25
1986.12	6556.46	8786.35	0.7462	0.8551	9615.12
1987.01	9433.71	9199.57	1.0255	0.9326	7149.75
1987.02	9862.67	9612.78	1.0260	1.0144	8343.90
1987.03	9943.94	10025.99	0.9918	0.9862	8816.45
1987.04	9821.65	10439.21	0.9408	0.9597	9493.02
1987.05	9979.76	10852.42	0.9199	0.9015	9693.87
1987.06	9507.34	11265.64	0.8439	0.8896	9994.25
1987.07	10573.11	11678.85	0.9053	0.8615	10432.39
1987.08	10101.51	12092.07	0.8354	0.8689	10428.86
1987.09	10829.76	12505.28	0.8660	0.8554	10663.63
1987.10	11189.02	12918.50	0.8661	0.88520	11684.11
1987.11	10984.90	13331.71	0.8240	0.8341	12317.90
1987.12	11162.80	13744.93	0.8121	0.9727	17109.04
1988.01	18149.76	14158.14	1.2819	1.1044	13031.57
1988.02	17765.91	14571.36	1.2192	1.2211	15225.11
1988.03	17415.04	14984.57	1.1622	1.2098	16161.65
1988.04	19207.42	15397.79	1.2474	1.2088	17802.75
1988.05	19239.06	15811.00	1.2168	1.2207	19124.14
1988.06	19432.59	16224.22	1.1978	1.1674	18887.40
1988.07	18094.71	16637.43	1.0876	1.1197	19315.62
1988.08	18310.07	17050.65	1.0739	1.0396	17594.82
1988.09	16720.77	17463.86	0.9575	0.9766	16992.80
1988.10	16061.02	17877.08	0.8984	0.9093	17255.11
1988.11	15948.44	18290.29	0.87202	0.8733	17694.53
1988.12	15890.26	18703.51	0.8496	------	--------

Como se puede observar a tráves de los resultados de las tablas anteriores el método de descomposición es también un procedimiento que si bien requiere el conocimiento de análisis de regresión para determinar la recta de los valores desestacionalizados, en si no lleva implicaciones que no se puedan salvar, utilizando una calculadora cientifica o bien un paquete computacional. En el presente caso los cálculos fueron elaborados a tráves de una hoja de cálculo y el paquete de análisis de series de tiempo TSP.

C A P I T U L O III

LAS SERIES DE TIEMPO COMO MODELOS DE PREDICCION

MODELOS ECONOMETRICOS

MODELOS SENOIDALES

METODOS DE SUAVIZAMIENTO EXPONENCIAL

LAS SERIES DE TIEMPO COMO MODELOS DE PREDICCION

Modelos Econométricos

Los modelos econométricos son una forma de pronosticar los fenómenos económicos a través de variables macroeconómicas y se debe considerar que en estos modelos su objetivo es interpretar y explicar fenómenos sobre los cuales unicamente se cuenta con información pasiva y no reproducible.

Por lo que se puede afirmar que un modelo econométrico es una versión simplificada de la realidad y que al definirlo se busca una explicación lógica y coherente de los fenómenos económicos pertinentes. Por otro lado también es importante señalar que un modelo económetrico no constituye un conjunto de reglas que puedan aplicarse en forma mecánica, ya que en la formulación de un modelo económetrico la Teoría Económica es insustituible y los argumentos empíricos no la pueden sustituir. Sin embargo cabe mencionar que el estado actual de la Teoría Económica es insuficiente para poder explicar sus planteamientos de la realidad y muchas de estas insificiencias tienen su origen en los postulados o axiomas que sustentan la Teoría Económica.

Un modelo econométrico en su formulación incluye un número determinado de ecuaciones simultaneas, cada una de las cuales incluye diferentes variables y no obstante que en la práctica se definen de una manera no trivial las variables exógenas y endógenas, en la definición de las ecuaciones que componen el sistema de ecuaciones simultaneas, en al menos una de ellas se deben de especificar las variables endógenas.

Además en la formulación de los modelos econométricos debe de considerarse los siguiente:

i) Si el número de ecuaciones es igual al número de variables endógenas, se dice que el modelo está identificado.

ii) Si el número de variables endógenas es menor que el número de ecuaciones, se dice que el modelo es subidentificado.

iii) Si el número de variables endógenas es mayor que el nú- de ecuaciones, se dice que el modelo es sobreidentificado.

Por último debemos decir que los modelos econométricos son el resultado de una interacción interdisciplinaria que involucra a estadísticos y economistas, que de acuerdo a sus experiencias e investigaciones han desarrollado modelos que constan desde unas cuantas ecuaciones hasta modelos que han involucrado más de 200 ecuaciones simultaneas.

A continuación se presenta un esquema sobre los pasos que deben seguirse para la construcción de un modelo econométrico. (*)

Objetivo de estudio

INFORMACION EMPIRICA DISPONIBLE

VARIABLES ENDOGENAS VARIABLES EXOGENAS

MODELO TEORICO

$$y = \Phi (Y , Z, \theta) + \sigma U$$

(*) J.S.Ruprah y H. Sabau.- Modelos Econométricos para la evaluación de la Política Económica: Una Perspectiva Metodológica.- Economía Mexicana. Serie Temática. Núm 2.- CIDE.- México, D.F.

Para dar un ejemplo de aplicación de un modelo econométrico, se va a tratar de ilustrar a través de los modelos de vectores autoregresivos.

Los vectores autorregresivos (VAR) han proporcionado una técnica útil para sistemas de pronósticos en donde se interrelacionan las variables a través de series de tiempo. Esta técnica de vectores autorregresivos es frecuentemente usada, no obstante ha sucitado bastantes controversias en el análisis del impacto dinámico de diferentes tipos de disturbancias aleatorias dentro de un sistema de variables temporales.

En si un vector autoregresivo es un sistema de ecuaciones que hace que cada una de las variables endógenas sea una función de su propio pasado y del pasado de las otras variables endógenas del sistema.

Por ejemplo las siguientes ecuaciones suponen que el PIB y la oferta de dinero Mo estan conjuntamnete determinadas por un vector autorregresivo de dos variables, en este ejemplo las variables PIB y MO estan determinadas por dos valores retrasados y los errores e_1 y e_2.

$$PIB = a_0 + a_1 PIB_{t-1} + a_2 PIB_{t-2} + a_3 MO_{t-1} + a_4 MO_{t-2} + e_1$$

$$MO = b_0 + b_1 PIB_{t-1} + b_2 PIB_{t-2} + b_3 MO_{t-1} + b_4 MO_{t-2} + e_2$$

Este sistema se puede tambien representar por la forma siguiente:

$$\begin{vmatrix} PIB_t \\ MO_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 \\ b_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} PIB_{t-1} \\ MO_{t-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} PIB_{t-2} \\ MO_{t-2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_1 \\ e_2 \end{vmatrix}$$

En general un vector autorregresivo se puede dar de la siguiente forma:

$$X_t = K_0 + K_1 t + A_1 X_{t-1} + A_2 X_{t-2} + \cdots + A_s X_{t-s} + V_t$$

En donde K_0 y K_1 son los vectores de coeficientes de dimensiones de mx1 para el término constante y la tendencia, respectivamente, las A_1 A_2 A_3 ... A_m son matrices de orden mxm conformables con los rezagos del vector X_t .

En el uso de los vectores autorregresivos no se ha podido determinar de una manera precisa el número de rezagos, por lo que la experiencia indica que cuando se utilice los VAR se debe elegir un modelo con un número de rezagos de tal forma que los estimadores sean de lo más eficientes.

Ahora que la utilidad que presentan los vectores autorregresivos es que en modelos econométricos no requiere de restricciones previas que esten fundamentadas en teoría económica alguna, por lo que los VAR en este caso pueden demostrar evidencias empíricas sin ninguna restricción.

En el siguiente trabajo se va a utilizar los vectores autorregresivos para relacionar de una manera empírica los precios, por medio del indice nacional de precios del consumidor y la oferta monetaria dada a través de la cantidad de dinero en circulación.

Para ello se van a utilizar las series de la base monetaria, y el Índice nacional de precios al consumidor para el periodo Enero de 1980 a Septiembre de 1989. Estas series van a transformarse a través de sus logaritmos naturales, y después haciendo uso de los paquetes TSP y RATS para análisis de series de tiempo se procederá a obtener los resultados para el caso de vectores autorregresivos. Para ello se rezagarán hasta dos periodos las series transformadas por medio de logaritmos, haciendo las respectivas regresiones y una vez obtenidos las estimaciones de los parámetros, se formula un modelo de ecuaciones simultaneas, mismas que por medio de métodos numericos nos darán las estimaciones pertinentes y finalmente se transforman a los valores así obtenidos a sus unidades originales correspondientes.

Entonces el modelo a formular es el siguiente:

$lm1_t$ es el logaritmo natural del medio circulante al tiempo t.

$lm1_{t-1}$ es el logaritmo natural del medio circulante al tiempo t-1.

$lm1_{t-2}$ es el logaritmo natural del medio circulante al tiempo t-2.

$lipc_t$ es el logaritmo natural del indice nacional de precios del consumidor al tiempo t.

$lipc_{t-1}$ es el logaritmo natural del indice nacional de precios del consumidor al tiempo t-1

$lipc_{t-2}$ es el logaritmo natural del indice nacional de precios del consumidor al tiempo t-2.

Como ejemplo de éstas series unicamente pondremos los valores para un solo año, para la serie M1.(Aunque el modelo se estimará para el periodo de Enero de 1980 a Septiembre de 1989)

M1(Medio circulante)
millones de pesos corrientes.

1980	t	t-1	t-2
ENE	345551	---	---
FEB	349930	345551	---
MAR	362833	349930	345551
ABR	356813	362833	349930
MAY	366800	356813	362833
JUN	387836	366800	356813
JUL	388660	387836	366800
AGO	393993	388660	387836
SEP	394014	393993	388660
OCT	407069	390014	393993
NOV	432800	407069	390014
DIC	492121	432800	407069

(La serie M1 y IPC se presentan totalmente al final de la solución de éste modelo de vectores sutorregresivos)

Logaritmo natural de M1

1980	t	t-1	t-2
ENE	12.75289	---	---
FEB	12.76548	12.75289	---
MAR	12.80169	12.76548	12.75289
ABR	12.78496	12.80169	12.76548
MAY	12.81257	12.78496	12.80169
JUN	12.86833	12.81257	12.78496
JUL	12.87046	12.86833	12.81257
AGO	12.88408	12.87046	12.86833
SEP	12.88414	12.88408	12.87046
OCT	12.91673	12.88414	12.88408
NOV	12.97803	12.91673	12.88414
DIC	13.10647	12.97803	12.91673

La ecuación del modelo es:

$$lm1_t = \alpha_0 + \alpha_1\, lm1_{t-1} + \alpha_2\, lm1_{t-2} + \beta_1\, lipc_{t-1} + \beta_2\, lipc_{t-2} \quad (I)$$

$$lipc_t = \delta_0 + \delta_1\, lm1_{t-1} + \delta_2\, lm1_{t-2} + \varepsilon_1\, lipc_{t-1} + \varepsilon_2\, lipc_{t-2} \quad (II)$$

Al hacer las estimaciones para las ecuaciones (I) y (II) se obtuvieron los siguientes resultados(*):

Ecuación (I)	Ecuación (II)
$\alpha_0 = 1.4020439$	$\delta_0 = 0.0568229$
$\alpha_1 = 0.8624792$	$\delta_1 = 0.1480783$
$\alpha_2 = -0.0213579$	$\delta_2 = -0.1535056$
$\beta_1 = 0.0836364$	$\varepsilon_1 = 1.7528651$
$\beta_2 = 0.0499983$	$\varepsilon_2 = -0.7490214$

(*) Utilizando el paquete computacional TSP. versión 4.1, cuyos resultados generales se anexan a continuación.

Con los resultados así obtenidos se resuelve el sistema de ecuaciones formado por (I) y (II) y se debe estimar y calcular para cada uno de los periodos de tiempo. Los resultados se dan en la siguiente tabla:

Periodo	$M1_t$	IPC_t	$LM1_t$	$LIPC_t$	$PROLM_t$	$PROLIP_t$
1980.01	345551	133.8	12.75290	4.89635	345553	133.8
1980.02	349930	136.9	12.76549	4.91925	349930	136.9
1980.03	362833	139.7	12.80170	4.93950	360728	140.4
1980.04	356813	142.1	12.78497	4.95653	371424	144.7
1980.05	366800	144.4	12.81257	4.97259	382105	149.7
1980.06	387836	147.3	12.86834	4.99247	393006	155.1
1980.07	388660	151.4	12.87046	5.01993	404295	161.0
1980.08	393993	154.6	12.88409	5.04084	416079	167.3
1980.09	394014	156.3	12.88414	5.05178	428438	174.1
1980.10	407069	158.6	12.91674	5.06639	441432	181.3
1980.11	432800	161.4	12.97803	5.08389	455108	188.9
1980.12	492121	165.6	13.10648	5.10958	469503	197.0
1981.01	463114	171.0	13.04573	5.14166	484649	205.5
1981.02	465492	175.2	13.05085	5.16593	500584	214.5
1981.03	486064	178.9	13.09410	5.18683	517337	223.9
1981.04	500432	182.9	13.12323	5.20894	534940	233.9
1981.05	510460	185.7	13.14307	5.22413	553424	244.5
1981.06	519205	188.3	13.16005	5.23804	572822	255.6
1981.07	516490	191.6	13.15481	5.25541	593166	267.3
1981.08	521557	195.6	13.16457	5.27607	614497	279.6
1981.09	517047	199.2	13.15589	5.29431	636844	292.5
1981.10	541025	203.6	13.20122	5.31616	660247	306.1
1981.11	573448	207.5	13.25942	5.33513	684744	320.5
1981.12	656094	213.1	13.39406	5.36176	710376	335.5
1982.01	621894	223.7	13.34052	5.41031	737189	351.3
1982.02	651712	232.5	13.38736	5.44889	765221	368.0
1982.03	672179	241.0	13.41828	5.48480	794509	385.4
1982.04	672745	254.1	13.41912	5.53773	825108	403.8
1982.05	676920	268.4	13.42531	5.59248	857066	423.0
1982.06	681768	281.3	13.43244	5.63942	890421	443.2
1982.07	686975	295.8	13.44005	5.68968	925223	464.4
1982.08	751144	329.0	13.52935	5.79606	961529	486.6
1982.09	786657	346.5	13.57555	5.84788	999390	509.8
1982.10	838032	364.5	13.63642	5.89853	1038855	534.2
1982.11	948621	382.9	13.76276	5.94777	1079987	559.8
1982.12	1010917	423.8	13.82637	6.04926	1122838	586.6
1983.01	947194	469.9	13.76126	6.15252	1167459	614.6
1983.02	942607	495.1	13.75640	6.20476	1213914	643.9
1983.03	944221	519.1	13.75812	6.25210	1262255	674.6
1983.04	945638	552.0	13.75961	6.31355	1312546	706.7
1983.05	965025	575.9	13.77991	6.35593	1364857	740.3
1983.06	996395	597.7	13.81190	6.39309	1419251	775.4
1983.07	1019462	627.3	13.83479	6.44143	1475785	812.0
1983.08	1057878	651.6	13.87178	6.47943	1534522	850.3
1983.09	1049154	671.7	13.86349	6.50981	1595535	890.3
1983.10	1121667	694.0	13.93033	6.54247	1658891	932.0
1983.11	1213992	734.7	14.00942	6.59946	1724676	975.6
1983.12	1429772	766.1	14.17303	6.64131	1792926	1021.0

Periodo	$M1_t$	IPC_t	$LM1_t$	$LIPC_t$	$PROLM_t$	$PROLIP_t$
1984.01	1343443	814.8	14.11075	6.70294	1863748	1068.4
1984.02	1359327	857.8	14.12250	6.75437	1937193	1117.7
1984.03	1419402	894.5	14.16575	6.79627	2013328	1169.2
1984.04	1486494	933.2	14.21193	6.83862	2092249	1222.8
1984.05	1518761	964.1	14.23341	6.87120	2174023	1278.6
1984.06	1568548	999.0	14.26566	6.90676	2258723	1336.7
1984.07	1586896	1031.8	14.27729	6.93906	2346417	1397.2
1984.08	1597696	1061.1	14.28407	6.96706	2437199	1460.1
1984.09	1624930	1092.7	14.30097	6.99641	2531139	1525.5
1984.10	1753175	1130.9	14.37694	7.03077	2628306	1593.4
1984.11	1911599	1169.7	14.46345	7.06450	2728794	1664.1
1984.12	2321221	1219.4	14.65760	7.10611	2832698	1737.5
1985.01	2166898	1309.8	14.58881	7.17763	2940058	1813.7
1985.02	2210994	1364.2	14.60895	7.21832	3050999	1892.8
1985.03	2249522	1417.1	14.62623	7.25637	3165589	1974.9
1985.04	2254719	1460.7	14.62854	7.28667	3283894	2060.0
1985.05	2323033	1495.3	14.65838	7.31008	3406003	2148.3
1985.06	2450340	1532.8	14.71174	7.33485	3532019	2239.8
1985.07	2489939	1586.2	14.72777	7.36910	3661999	2334.6
1985.08	2534083	1655.5	14.74534	7.41186	3796045	2432.9
1985.09	2720523	1721.6	14.81633	7.45101	3934207	2534.6
1985.10	2759600	1787.0	14.83060	7.48829	4076584	2639.9
1985.11	2997070	1869.5	14.91315	7.53343	4223208	2748.8
1985.12	3570159	1996.7	15.08812	7.59925	4374358	2861.5
1986.01	3262467	2173.3	14.99799	7.68400	4529898	2978.0
1986.02	3324584	2269.9	15.01686	7.72749	4689985	3098.5
1986.03	3582401	2375.4	15.09154	7.77292	4854711	3222.9
1986.04	3495021	2499.4	15.06685	7.82381	5024168	3351.5
1986.05	3636125	2638.3	15.10643	7.87789	5198390	3484.2
1986.06	3885802	2807.6	15.17284	7.94009	5377531	3621.2
1986.07	3900476	2947.7	15.17661	7.98878	5561619	3762.6
1986.08	3987345	3182.7	15.19864	8.06549	5750747	3908.4
1986.09	4072083	3373.7	15.21967	8.12376	5944935	4058.8
1986.10	4344362	3566.5	15.28439	8.17934	6144326	4213.8
1986.11	4922403	3807.5	15.40931	8.24473	6349012	4373.5
1986.12	6144801	4108.2	15.63112	8.32074	6559009	4538.0
1987.01	5783469	4440.9	15.57051	8.39861	6774389	4707.5
1987.02	6008093	4761.3	15.60862	8.46828	6995306	4881.9
1987.03	6485237	5076.0	15.68504	8.53228	7221767	5061.3
1987.04	6833608	5520.1	15.73736	8.61615	7453839	5245.9
1987.05	7193155	5936.2	15.78864	8.68883	7691608	5435.8
1987.06	7755625	6365.7	15.86393	8.75868	7935130	5631.0
1987.07	7975968	6881.3	15.89194	8.83656	8184559	5831.6
1987.08	8886011	7443.7	15.99999	8.91512	8439808	6037.6
1987.09	9054354	7934.1	16.01876	8.97892	8701009	6249.3
1987.10	10055150	8595.2	16.12380	9.05896	8968232	6466.5
1987.11	11856520	9277.0	16.28839	9.13529	9241556	6689.5
1987.12	14116210	10647.2	16.46283	9.27305	9521084	6918.3

Periodo	$M1_t$	IPC_t	$LM1_t$	$LIPC_t$	$PROLM_t$	$PROLIP_t$
1988.01	13413900	12293.5	16.41180	9.41683	9806730	7153.0
1988.02	14598890	13318.9	16.49646	9.49694	10098630	7393.7
1988.03	15580510	14001.0	16.56153	9.54688	10396810	7640.4
1988.04	16789790	14431.9	16.63628	9.57720	10701350	7893.1
1988.05	16839580	14711.1	16.63924	9.59636	11012380	8152.1
1988.06	18423100	15011.2	16.72912	9.61655	11329840	8417.3
1988.07	18620510	15261.8	16.73977	9.63311	11653760	8688.8
1988.08	18276450	15402.2	16.72112	9.64226	11984210	8966.7
1988.09	18383280	15490.3	16.72695	9.64797	12321180	9251.0
1988.10	19493800	15608.4	16.78561	9.65556	12664830	9541.8
1988.11	20641820	15817.3	16.84283	9.66886	13015100	9839.2
1988.12	22317250	16147.3	16.92087	9.68951	13372090	10143.2
1989.01	20208270	16542.6	16.82160	9.71370	13735730	10453.8
1989.02	20442720	16767.1	16.83314	9.72717	14106130	10771.2
1989.03	20685200	16948.8	16.84493	9.73795	14483350	11095.4
1989.04	20771180	17202.3	16.84908	9.75280	14867220	11426.3
1989.05	21279120	17439.1	16.87324	9.76647	15257920	11764.2
1989.06	22046820	17650.9	16.90868	9.77854	15655460	12108.9
1989.07	22789570	17827.4	16.94181	9.78849	16059980	12460.6
1989.08	22301470	17997.3	16.92016	9.79798	16471300	12819.4
1989.09	23061120	18169.4	16.95366	9.80749	16889460	13185.1

M1 es la serie de dinero en circulación en millones de pesos corrientes. (Billetes y Moneda, Cuentas de cheques en moneda nacional y moneda oxtranjera)

IPC es la serie del índice nacional de precios del consumidor en donde el año base 1978 = 100.

LM1 es el logaritmo natural de M1.

LIPC es el logartimo natural de IPC

PROLM es el pronóstico de M1 obteniéndose por la solución del modelo previamente dado por las ecuaciones (I) y (II) .

PROLIP es el pronóstico de IPC obteniéndose por la solución del modelo previamente dado por las ecuaciones (I) y (II)

Periodo	$LM1_t$	$LIPC_t$	$LM1_{t-1}$	$LM1_{t-2}$	$LIPC_{t-2}$	$LIPC_{t-2}$
1980.01	12.7529	4.8963	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1980.02	12.7655	4.9193	12.7529	0.0000	4.8963	0.0000
1980.03	12.8017	4.9395	12.7655	12.7529	4.9193	4.8963
1980.04	12.7850	4.9565	12.8017	12.7655	4.9395	4.9193
1980.05	12.8126	4.9726	12.7850	12.8017	4.9565	4.9395
1980.06	12.8683	4.9925	12.8126	12.7850	4.9726	4.9565
1980.07	12.8705	5.0199	12.8683	12.8126	4.9925	4.9726
1980.08	12.8841	5.0408	12.8705	12.8683	5.0199	4.9925
1980.09	12.8841	5.0518	12.8841	12.8705	5.0408	5.0199
1980.10	12.9167	5.0664	12.8841	12.8841	5.0518	5.0408
1980.11	12.9780	5.0839	12.9167	12.8841	5.0664	5.0518
1980.12	13.1065	5.1096	12.9780	12.9167	5.0839	5.0664
1981.01	13.0457	5.1417	13.1065	12.9780	5.1096	5.0839
1981.02	13.0509	5.1659	13.0457	13.1065	5.1417	5.1096
1981.03	13.0941	5.1868	13.0509	13.0457	5.1659	5.1417
1981.04	13.1232	5.2089	13.0941	13.0509	5.1868	5.1659
1981.05	13.1431	5.2241	13.1232	13.0941	5.2089	5.1868
1981.06	13.1601	5.2380	13.1431	13.1232	5.2241	5.2089
1981.07	13.1548	5.2554	13.1601	13.1431	5.2380	5.2241
1981.08	13.1646	5.2761	13.1548	13.1601	5.2554	5.2380
1981.09	13.1559	5.2943	13.1646	13.1548	5.2761	5.2554
1981.10	13.2012	5.3162	13.1559	13.1646	5.2943	5.2761
1981.11	13.2594	5.3351	13.2012	13.1559	5.3162	5.2943
1981.12	13.3941	5.3618	13.2594	13.2012	5.3351	5.3162
1982.01	13.3405	5.4103	13.3941	13.2594	5.3618	5.3351
1982.02	13.3874	5.4489	13.3405	13.3941	5.4103	5.3618
1982.03	13.4183	5.4848	13.3874	13.3405	5.4489	5.4103
1982.04	13.4191	5.5377	13.4183	13.3874	5.4848	5.4489
1982.05	13.4253	5.5925	13.4191	13.4183	5.5377	5.4848
1982.06	13.4324	5.6394	13.4253	13.4191	5.5925	5.5377
1982.07	13.4401	5.6897	13.4324	13.4253	5.6394	5.5925
1982.08	13.5294	5.7961	13.4401	13.4324	5.6897	5.6394
1982.09	13.5756	5.8479	13.5294	13.4401	5.7961	5.6897
1982.10	13.6364	5.8985	13.5756	13.5294	5.8479	5.7961
1982.11	13.7628	5.9478	13.6364	13.5756	5.8985	5.8479
1982.12	13.8264	6.0493	13.7628	13.6364	5.9478	5.8985
1983.01	13.7613	6.1525	13.8264	13.7628	6.0493	5.9478
1983.02	13.7564	6.2048	13.7613	13.8264	6.1525	6.0493
1983.03	13.7581	6.2521	13.7564	13.7613	6.2048	6.1525
1983.04	13.7596	6.3135	13.7581	13.7564	6.2521	6.2048
1983.05	13.7799	6.3559	13.7596	13.7581	6.3135	6.2521
1983.06	13.8119	6.3931	13.7799	13.7596	6.3559	6.3135
1983.07	13.8348	6.4414	13.8119	13.7799	6.3931	6.3559
1983.08	13.8718	6.4794	13.8348	13.8119	6.4414	6.3931
1983.09	13.8635	6.5098	13.8718	13.8348	6.4794	6.4414
1983.10	13.9303	6.5425	13.8635	13.8718	6.5098	6.4794
1983.11	14.0094	6.5995	13.9303	13.8635	6.5425	6.5098
1983.12	14.1730	6.6413	14.0094	13.9303	6.5995	0.5425

Periodo	$LM1_t$	$LIPC_t$	$LM1_{t-1}$	$LM1_{t-1}$	$LIPC_{t-2}$	$LIPC_{t-2}$
1984.01	14.1108	6.7029	14.1730	14.0094	6.6413	6.5995
1984.02	14.1225	6.7544	14.1108	14.1730	6.7029	6.6413
1984.03	14.1658	6.7963	14.1225	14.1108	6.7544	6.7029
1984.04	14.2119	6.8386	14.1658	14.1225	6.7963	6.7544
1984.05	14.2334	6.8712	14.2119	14.1658	6.8386	6.7963
1984.06	14.2657	6.9068	14.2334	14.2119	6.8712	6.8386
1984.07	14.2773	6.9391	14.2657	14.2334	6.9068	6.8712
1984.08	14.2841	6.9671	14.2773	14.2657	6.9391	6.9068
1984.09	14.3010	6.9964	14.2841	14.2773	6.9671	6.9391
1984.10	14.3769	7.0308	14.3010	14.2841	6.9964	6.9671
1984.11	14.4635	7.0645	14.3769	14.3010	7.0308	6.9964
1984.12	14.6576	7.1061	14.4635	14.3769	7.0645	7.0308
1985.01	14.5888	7.1776	14.6576	14.4635	7.1061	7.0645
1985.02	14.6090	7.2183	14.5888	14.6576	7.1776	7.1061
1985.03	14.6262	7.2564	14.6090	14.5888	7.2183	7.1776
1985.04	14.6285	7.2867	14.6262	14.6090	7.2564	7.2183
1985.05	14.6584	7.3101	14.6285	14.6262	7.2867	7.2564
1985.06	14.7117	7.3349	14.6584	14.6285	7.3101	7.2867
1985.07	14.7278	7.3691	14.7117	14.6584	7.3349	7.3101
1985.08	14.7453	7.4119	14.7278	14.7117	7.3691	7.3349
1985.09	14.8163	7.4510	14.7453	14.7278	7.4119	7.3691
1985.10	14.8306	7.4883	14.8163	14.7453	7.4510	7.4119
1985.11	14.9132	7.5334	14.8306	14.8163	7.4883	7.4510
1985.12	15.0881	7.5993	14.9132	14.8306	7.5334	7.4883
1986.01	14.9980	7.6840	15.0881	14.9132	7.5993	7.5334
1986.02	15.0169	7.7275	14.9980	15.0881	7.6840	7.5993
1986.03	15.0915	7.7729	15.0169	14.9980	7.7275	7.6840
1986.04	15.0669	7.8238	15.0915	15.0169	7.7729	7.7275
1986.05	15.1084	7.8779	15.0669	15.0915	7.8238	7.7729
1986.06	15.1728	7.9401	15.1064	15.0669	7.8779	7.8238
1986.07	15.1766	7.9888	15.1728	15.1064	7.9401	7.8779
1986.08	15.1986	8.0655	15.1766	15.1728	7.9888	7.9401
1986.09	15.2197	8.1238	15.1986	15.1766	8.0655	7.9888
1986.10	15.2844	8.1793	15.2197	15.1986	8.1238	8.0655
1986.11	15.4093	8.2447	15.2844	15.2197	8.1793	8.1238
1986.12	15.6311	8.3207	15.4093	15.2844	8.2447	8.1793
1987.01	15.5705	8.3986	15.6311	15.4093	8.3207	8.2447
1987.02	15.6086	8.4683	15.5705	15.6311	8.3986	8.3207
1987.03	15.6850	8.5323	15.6086	15.5705	8.4683	8.3986
1987.04	15.7374	8.6162	15.6850	15.6086	8.5323	8.4683
1987.05	15.7886	8.6888	15.7374	15.6850	8.6162	8.5323
1987.06	15.8639	8.7587	15.7886	15.7374	8.6888	8.6162
1987.07	15.8919	8.8366	15.8639	15.7886	8.7587	8.6888
1987.08	16.0000	8.9151	15.8919	15.8639	8.8366	8.7587
1987.09	16.0188	8.9789	16.0000	15.8919	8.9151	8.8366
1987.10	16.1236	9.0590	16.0188	16.0000	8.9789	8.9151
1987.11	16.2884	9.1353	16.1236	16.0188	9.0590	8.9789
1987.12	16.4628	9.2731	16.2884	16.1236	9.1353	9.0590

Periodo	$LM1_t$	$LIPC_t$	$LM1_{t-1}$	$LM1_{t-1}$	$LIPC_{t-2}$	$LIPC_{t-2}$
1988.01	16.4118	9.4168	16.4628	16.2884	9.2731	9.1353
1988.02	16.4965	9.4969	16.4118	16.4628	9.4168	9.2731
1988.03	16.5615	9.5469	16.4965	16.4118	9.4969	9.4168
1988.04	16.6363	9.5772	16.5615	16.4965	9.5469	9.4969
1988.05	16.6392	9.5964	16.6363	16.5615	9.5772	9.5469
1988.06	16.7291	9.6166	16.6392	16.6363	9.5964	9.5772
1988.07	16.7398	9.6331	16.7291	16.6392	9.6166	9.5964
1988.08	16.7211	9.6423	16.7398	16.7291	9.6331	9.6166
1988.09	16.7270	9.6480	16.7211	16.7398	9.6423	9.6331
1988.10	16.7856	9.6556	16.7270	16.7211	9.6480	9.6423
1988.11	16.8428	9.6689	16.7856	16.7270	9.6556	9.6480
1988.12	16.9209	9.6895	16.8428	16.7856	9.6689	9.6556
1989.01	16.8216	9.7137	16.9209	16.8428	9.6895	9.6689
1989.02	16.8331	9.7272	16.8216	16.9209	9.7137	9.6895
1989.03	16.8449	9.7380	16.8331	16.8216	9.7272	9.7137
1989.04	16.8491	9.7528	16.8449	16.8331	9.7380	9.7272
1989.05	16.8732	9.7665	16.8491	16.8449	9.7528	9.7380
1989.06	16.9087	9.7785	16.8732	16.8491	9.7665	9.7528
1989.07	16.9418	9.7885	16.9087	16.8732	9.7785	9.7665
1989 08	16.9202	9.7980	16.9418	16.9087	9.7885	9.7785
1989.09	16.9537	9.8075	16.9202	16.9418	9.7980	9.7885

$LM1_t$ es el logaritmo natural de M1 al periodo t

$LM1_{t-1}$ es el logaritmo natural do M1 al periodo t-1

$LM1_{t-2}$ es el logaritmo natural de M1 al periodo t-2

$LIPC_t$ es el logaritmo natural de IPC al periodo t

$LIPC_{t-1}$ es el logaritmo natural de IPC al periodo t-1

$LIPC_{t-2}$ es el logaritmo natural de IPC al periodo t-2

MODELOS SENOIDALES

Los modelos senoidales son también llamados modelos trigonométricos, éstos son especialmente útiles debido a que pueden reflejar el efecto ciclico que es común en ciertas series de tiempo, ya que por la periocidad de las funciones trigonométricas tales como las funciones seno y coseno, mismas que a través de los métodos de mínimos cuadrados pueden utilizarse para obtener una ecuación que sea representativa para un modelo de predicción.

La base principal de éstos modelos es el comportamiento que tiene la funcion trigonómetrica :

$Y = \text{sen}\ \Theta$ Esta función graficamente representa una onda periódica para los valores de Θ . En donde Θ se mide en radianes o grados. Esta función tiene la propiedad que caracteriza a las funciones periódicas dada por la siguiente definición:

$f(x) = f(x + p)$ en donde p representa el periodo o ciclo en donde se vuelve a repetir el valor de $f(x)$.

El caso más general se da a través de la siguiente ecuación: $Y = A\ \text{sen}\ (b\Theta + c)$.

En donde A es lo que se llama la amplitud y hace que la variable Y tome los valores máximos y minimos de +A y -A respectivamente. Ahora b es una constante que multiplica a Θ , y es llamada la frecuencia y representa el número de ondas completas que hay en un intervalo de 2Π radianes ó 360^{o}, por último c representa un ángulo que al adicionarse a Θ permite el cambio de fase o desplazamiento horizontal de la onda.

Estas tres propiedades representadas por A, b y c, de la onda senoidal y que hemos denominado A amplitud, b frecuencia y c fase, puestas en el contexto de las series de tiempo dan una expresion de la forma siguiente:

(1) $$Y_t = A \text{ sen } [\ 2\pi\ (\frac{f\ t}{n}) + \phi\ ]$$

En donde A es la amplitud, f es la frecuencia sobre el número total de observaciones n , t representa el tiempo y ϕ es el ángulo de la fase. la fracción (f t/n), para los diferentes valores de t. convierte los valores discretos de la variable tiempo t a partes proporcionales de 2π.

La ecuación (1) aplicada al ajuste de series de tiempo, unicamente tiene como supuestos de que no hay tendencia pero si estacionalidad , por lo que si los datos que se van a ajustar tienen tendencia el modelo debe ser representado por:

(2) $$Y_t = A_o + A_1 t + A_2 \text{ sen } [\ 2\pi\ (\frac{f\ t}{n}) + \phi\ ]$$

Por último la ecuación que puede representar de manera más general el ajuste de una serie de tiempo a través de funciones senoidales es la expresión siguiente:

(3) $$Y_t = A_o + A_1 t + \sum_{k=1}^{k} B_k \text{ sen } [\ 2\pi\ (f_k t/n) + \phi_k]$$

En la expresión anterior las amplitudes B_k son desconocidas. las f_k las frecuencias se conocen al determinar el modelo y las fases ϕ_k son ángulos que se desconocen, por lo tanto (3) no es una ecuación que contengan los B_k en términos de coeficientes lineales de una ecuación de regresión, por lo que tendremos que expresar (3) de tal forma que pueda contener unicamente coeficientes lineales y de esa manera aplicar el método de mínimos cuadrados para estimar tales coeficientes.

El procedimiento a seguir para que la expresión (3) pueda tener coeficientes lineales es dado a continuación:

cada termino $B_k \text{ sen } [\ 2\pi\ (f_k t/n) + \phi_k\ ]$ de (3) puede representarse de la forma siguiente:

b_{1k} sen [2π $(f_k t/n)$] + b_{2k} cos [2π $(f_k t/n)$]

esto se hace utilizando el siguiente teorema de trigonometria:

$$\text{sen}(U + V) = \text{sen } U \cos V + \cos U \text{ sen } V$$

si se representa $U = [\,2\pi\,(f_k t/n)\,]$ y $\phi_k = V$

entonces se tiene B_k sen U cos V + B_k cos U sen V

por lo que $b_1 = B_k \cos \phi$ y $b_2 = B_k \text{ sen } \phi$

y si aplicamos la siguiente identidad trigonométrica:

$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ se tiene que :

$$b_1^2 = B_k^2 \cos^2 \phi \qquad \text{y} \qquad b_2^2 = B_k^2 \text{ sen}^2 \phi$$

y entonces

$$b_1^2 + b_2^2 = B_k^2 \cos^2\phi + B_k^2 \text{ sen}^2\phi = B_k^2 (\cos^2\phi + \text{sen}^2\phi) = B_k^2$$

esto implica que B_k pueda obtenerse de la manera siguiente:

$$B_k = [\, b_1^2 + b_2^2 \,]^{1/2}$$

por lo que toca a ϕ se tiene que :

$$\cos \phi = [\, b_1 / B_k \,] \qquad \text{y} \qquad \text{sen } \phi = [\, b_2 / B_k \,]$$

Como consecuencia de las explicaciones anteriores el modelo senoidal representado por la ecuación (3) ahora puede ser escrito de la siguiente forma:

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \beta_{11}\text{sen}(\,2\pi\, f_1 t/n) + \beta_{21}\cos(\,2\pi\, f_1 t/n) + \ldots +$$
$$\beta_{1k}\text{sen}(\,2\pi\, f_k t/n) + \beta_{2k}\cos(\,2\pi\, f_k t/n)$$

que ahora puede expresarse como

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t \quad \beta_{11}X_{11} + \beta_{12}X_{12} + \ldots + \beta_{1k}X_{1k} + \beta_{2k}X_{2k}$$

por lo que ésta última ecuación puede estimarse por el método de minimos cuadrados ordinarios.

Para ilustrar éste método se usará la serie de tiempo representada por los ingresos monetarios obtenidos a través de los servicios turisticos prestados a los visitantes extranjeros en nuestro pais.

En la formulación de éste modelo trigonométrico los valores que se van a dar a las frecuencias f_i que intervienen en las expresiones:

$$\text{sen} [2\Pi (f\ t / n)] \quad y \quad \cos [2\pi (f\ t / n)]$$

son los siguientes : 1 , 2 , 6 , 7 , y 13.

Los valores de t son de 1 hasta 80 y n = 80

Los valores de t y n son debidos a que la serie que se va a analizar que corresponde a los ingresos por servicios turísticos, comienza para el caso de estudio en Enero de 1983 y termina en Agosto de 1989 siendo los datos reportados mensualmente y en total son 80 observaciones.

Por lo tanto el modelo queda expresado de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t &+ \beta_{11}\text{sen} [2\pi (t/80)] + \beta_{21}\cos [2\pi (t/80)] + \\ &\beta_{12}\text{sen} [2\pi (2t /80)] + \beta_{22}\cos [2\pi (2t /80)] + \\ &\beta_{16}\text{sen} [2\pi (6t /80)] + \beta_{26}\cos [2\pi (6t /80)] + \\ &\beta_{17}\text{sen} [2\pi (7t /80)] + \beta_{27}\cos [2\pi (7t /80)] + \\ &\beta_{113}\text{sen} [2\pi (13t/80)] + \beta_{213}\cos [2\pi (13t/80)] + \\ &\beta_{17t}\ t*\text{sen} [2\pi (7t/80)] + \beta_{27t}\ t*\cos [2\pi (7t/80)] \end{aligned}$$

Para la obtención de los coeficientes se usó el paquete estadístico TSP, para lo cual se introdujeron los datos de la siguiente forma:

sen1 = sen[2π(t/80)] cos1 = cos[2π(t/80)]

sen2 = sen[2π(2t/80)] cos2 = cos[2π(2t/80)]

sen6 = sen[2π(6t/80)] cos6 = cos[2π(6t/80)]

sen7 = sen[2π(7t/80)] cos7 = cos[2π(7t/80)]

sen13 = sen[2π(13t/80)] cos13 = cos[2π(13t/80)]

tsen7 = t*sen[2π(7t/80)] tcos7 = t*cos[2π(7t/80)]

t = tiempo.

Ingresos por Turismo *
Periodo Enero de 1983 - Agosto de 1989
(Millones de dolares)

	1983	1984	1985	1986
ENE	122.50	185.40	200.80	164.10
FEB	146.70	229.10	242.80	181.50
MAR	168.50	227.40	269.70	218.20
ABR	128.40	171.60	154.90	138.50
MAY	114.70	152.20	126.70	125.20
JUN	120.40	151.30	133.00	134.90
JUL	149.80	142.00	120.00	129.80
AGO	123.00	142.20	121.30	138.60
SEP	88.50	96.50	68.70	83.40
OCT	119.20	111.40	74.90	114.40
NOV	139.00	142.00	98.10	154.70
DIC	203.00	202.30	152.70	208.60

	1987	1988	1989
ENE	226.40	257.70	272.30
FEB	242.40	293.70	262.40
MAR	254.90	316.50	322.80
ABR	194.90	219.80	241.30
MAY	168.40	172.00	194.80
JUN	161.40	174.90	206.70
JUL	176.60	200.20	221.70
AGO	177.10	192.50	227.00
SEP	120.00	128.20	
OCT	159.10	143.10	
NOV	176.30	180.80	
DIC	217.10	264.90	

FUENTE: CUADERNOS DE INFORMACION OPORTUNA
INEGI. SPP. MEXICO.D.F
NUM. 138-145

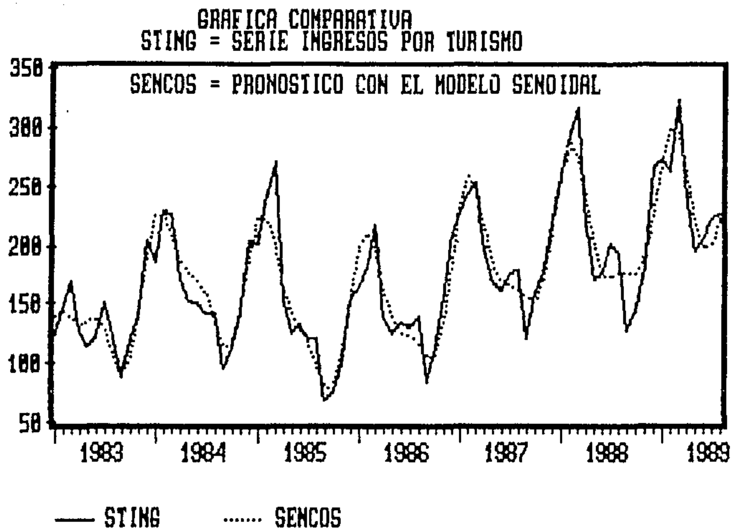
* (Para su manejo en TSP se define como STING)

Las series se dan en su totalidad al final de éste modelo y los resultados de la regresión lineal multiple se dan en la siguiente tabla:

Variable dependiente Y_t

Coeficiente	Valor estimado
α_0	88.8419330
α_1	2.0851581
β_{11}	25.5129540
β_{21}	16.3800020
β_{12}	15.5167160
β_{22}	-16.2043170
β_{16}	- 9.8865615
β_{26}	6.4797425
β_{17}	52.7437980
β_{27}	- 3.6463411
β_{119}	10.6828300
β_{219}	17.8045600
β_{17t}	- 0.4586621
β_{27t}	- 0.6954682

A continuación se dan la gráficas comparativas entre la serie original y la serie de valores pronosticados, misma que también es obtenida por el paquete de análisis de series de tiempo TPS.


GRAFICA COMPARATIVA
STING = SERIE INGRESOS POR TURISMO
SENCOS = PRONOSTICO CON EL MODELO SENOIDAL
350
300
250
200
150
100
50
1983
1984
1985
1986
1987
1988
1989
STING
SENCOS

SMPL 1983.01 - 1989.08
80 Observations
LS // Dependent Variable is STING

VARIABLE	COEFFICIENT	STD. ERROR	T-STAT.	2-TAIL SIG.
C	88.841933	10.639866	8.3498323	0.000
TIEMPO	2.0851581	0.2548162	8.1829898	0.000
SEN1	25.512954	7.4534072	3.4229920	0.001
COS1	16.380002	3.7140343	4.4102992	0.000
SEN2	15.516716	4.9027089	3.1649265	0.002
COS2	-16.204317	3.7250825	-4.3500557	0.000
SEN6	-9.8865615	4.5557974	-2.1701056	0.034
COS6	6.4797425	4.6145356	1.4042025	0.165
SEN7	52.743798	9.1466365	5.7664692	0.000
COS7	-3.6463411	8.6527027	-0.4214107	0.675
SEN13	10.682830	3.6674972	2.9128394	0.005
COS13	17.804560	3.6445097	4.8853102	0.000
TSEN7	-0.4586621	0.2070848	-2.2148520	0.030
TCOS7	-0.6954682	0.1930014	-3.6034359	0.001

R-squared	0.861636	Mean of dependent var	173.7562
Adjusted R-squared	0.834383	S.D. of dependent var	56.28392
S.E. of regression	22.90534	Sum of squared resid	34627.22
Durbin-Watson stat	1.991422	F-statistic	31.61570
Log likelihood	-356.3298		

obs	TIEMPO	SEN1	COS1	SEN2	COS2
1983.01	1.000000	0.078459	0.996917	0.156435	0.987688
1983.02	2.000000	0.156435	0.987688	0.309017	0.951056
1983.03	3.000000	0.233445	0.972370	0.453990	0.891007
1983.04	4.000000	0.309017	0.951056	0.587785	0.809017
1983.05	5.000000	0.382683	0.923880	0.707107	0.707107
1983.06	6.000000	0.453990	0.891007	0.809017	0.587785
1983.07	7.000000	0.522499	0.852640	0.891007	0.453990
1983.08	8.000000	0.587785	0.809017	0.951056	0.309017
1983.09	9.000000	0.649448	0.760406	0.987688	0.156434
1983.10	10.00000	0.707107	0.707107	1.000000	-2.32D-08
1983.11	11.00000	0.760406	0.649448	0.987688	-0.156435
1983.12	12.00000	0.809017	0.587785	0.951056	-0.309017
1984.01	13.00000	0.852640	0.522499	0.891007	-0.453990
1984.02	14.00000	0.891007	0.453990	0.809017	-0.587785
1984.03	15.00000	0.923880	0.382683	0.707107	-0.707107
1984.04	16.00000	0.951056	0.309017	0.587785	-0.809017
1984.05	17.00000	0.972370	0.233445	0.453990	-0.891007
1984.06	18.00000	0.987688	0.156434	0.309017	-0.951056
1984.07	19.00000	0.996917	0.078459	0.156434	-0.987688
1984.08	20.00000	1.000000	-2.32D-08	-4.64D-08	-1.000000
1984.09	21.00000	0.996917	-0.078459	-0.156435	-0.987688
1984.10	22.00000	0.987688	-0.156435	-0.309017	-0.951056
1984.11	23.00000	0.972370	-0.233445	-0.453991	-0.891007
1984.12	24.00000	0.951056	-0.309017	-0.587785	-0.809017
1985.01	25.00000	0.923880	-0.382683	-0.707107	-0.707107
1985.02	26.00000	0.891007	-0.453990	-0.809017	-0.587785
1985.03	27.00000	0.852640	-0.522499	-0.891007	-0.453990
1985.04	28.00000	0.809017	-0.587785	-0.951056	-0.309017
1985.05	29.00000	0.760406	-0.649448	-0.987688	-0.156434
1985.06	30.00000	0.707107	-0.707107	-1.000000	6.96D-08
1985.07	31.00000	0.649448	-0.760406	-0.987688	0.156435
1985.08	32.00000	0.587785	-0.809017	-0.951056	0.309017
1985.09	33.00000	0.522499	-0.852640	-0.891007	0.453991
1985.10	34.00000	0.453990	-0.891007	-0.809017	0.587785
1985.11	35.00000	0.382683	-0.923880	-0.707107	0.707107
1985.12	36.00000	0.309017	-0.951056	-0.587785	0.809017
1986.01	37.00000	0.233445	-0.972370	-0.453990	0.891007
1986.02	38.00000	0.156434	-0.987688	-0.309017	0.951056
1986.03	39.00000	0.078459	-0.996917	-0.156434	0.987688
1986.04	40.00000	-4.64D-08	-1.000000	9.28D-08	1.000000
1986.05	41.00000	-0.078459	-0.996917	0.156435	0.987688
1986.06	42.00000	-0.156435	-0.987688	0.309017	0.951056
1986.07	43.00000	-0.233445	-0.972370	0.453991	0.891007
1986.08	44.00000	-0.309017	-0.951056	0.587785	0.809017
1986.09	45.00000	-0.382683	-0.923880	0.707107	0.707107
1986.10	46.00000	-0.453991	-0.891007	0.809017	0.587785
1986.11	47.00000	-0.522499	-0.852640	0.891007	0.453990
1986.12	48.00000	-0.587785	-0.809017	0.951056	0.309017

obs	TIEMPO	SEN1	COS1	SEN2	COS2
1987.01	49.00000	-0.649448	-0.760406	0.987688	0.156434
1987.02	50.00000	-0.707107	-0.707107	1.000000	-1.16D-07
1987.03	51.00000	-0.760406	-0.649448	0.987688	-0.156435
1987.04	52.00000	-0.809017	-0.587785	0.951056	-0.309017
1987.05	53.00000	-0.852640	-0.522498	0.891007	-0.453991
1987.06	54.00000	-0.891007	-0.453990	0.809017	-0.587785
1987.07	55.00000	-0.923880	-0.382683	0.707107	-0.707107
1987.08	56.00000	-0.951056	-0.309017	0.587785	-0.809017
1987.09	57.00000	-0.972370	-0.233445	0.453990	-0.891007
1987.10	58.00000	-0.987688	-0.156434	0.309017	-0.951056
1987.11	59.00000	-0.996917	-0.078459	0.156434	-0.987688
1987.12	60.00000	-1.000000	6.96D-08	-1.39D-07	-1.000000
1988.01	61.00000	-0.996917	0.078459	-0.156435	-0.987688
1988.02	62.00000	-0.987688	0.156435	-0.309017	-0.951056
1988.03	63.00000	-0.972370	0.233445	-0.453991	-0.891007
1988.04	64.00000	-0.951056	0.309017	-0.587785	-0.809017
1988.05	65.00000	-0.923880	0.382683	-0.707107	-0.707107
1988.06	66.00000	-0.891007	0.453991	-0.809017	-0.587785
1988.07	67.00000	-0.852640	0.522499	-0.891007	-0.453990
1988.08	68.00000	-0.809017	0.587785	-0.951056	-0.309017
1988.09	69.00000	-0.760406	0.649448	-0.987688	-0.156434
1988.10	70.00000	-0.707107	0.707107	-1.000000	1.62D-07
1988.11	71.00000	-0.649448	0.760406	-0.987688	0.156435
1988.12	72.00000	-0.587785	0.809017	-0.951056	0.309017
1989.01	73.00000	-0.522498	0.852640	-0.891007	0.453991
1989.02	74.00000	-0.453990	0.891007	-0.809017	0.587785
1989.03	75.00000	-0.382683	0.923880	-0.707107	0.707107
1989.04	76.00000	-0.309017	0.951056	-0.587785	0.809017
1989.05	77.00000	-0.233445	0.972370	-0.453990	0.891007
1989.06	78.00000	-0.156434	0.987688	-0.309017	0.951057
1989.07	79.00000	-0.078459	0.996917	-0.156434	0.987688
1989.08	80.00000	9.28D-08	1.000000	1.86D-07	1.000000

obs	SEN6	COS6	SEN7	COS7
1983.01	0.453990	0.891007	0.522499	0.852640
1983.02	0.809017	0.587785	0.891007	0.453990
1983.03	0.987688	0.156434	0.996917	-0.078459
1983.04	0.951056	-0.309017	0.809017	-0.587785
1983.05	0.707107	-0.707107	0.382683	-0.923880
1983.06	0.309017	-0.951056	-0.156435	-0.987688
1983.07	-0.156435	-0.987688	-0.649448	-0.760406
1983.08	-0.587785	-0.809017	-0.951056	-0.309017
1983.09	-0.891007	-0.453990	-0.972370	0.233445
1983.10	-1.000000	6.96D-08	-0.707107	0.707107
1983.11	-0.891007	0.453991	-0.233445	0.972370
1983.12	-0.587785	0.809017	0.309017	0.951056
1984.01	-0.156434	0.987688	0.760406	0.649448
1984.02	0.309017	0.951056	0.987688	0.156434
1984.03	0.707107	0.707107	0.923880	-0.382684
1984.04	0.951056	0.309017	0.587785	-0.809017
1984.05	0.987688	-0.156435	0.078459	-0.996917
1984.06	0.809017	-0.587785	-0.453991	-0.891007
1984.07	0.453990	-0.891007	-0.852640	-0.522498
1984.08	-1.39D-07	-1.000000	-1.000000	1.62D-07
1984.09	-0.453991	-0.891007	-0.852640	0.522499
1984.10	-0.809017	-0.587785	-0.453990	0.891007
1984.11	-0.987688	-0.156434	0.078459	0.996917
1984.12	-0.951056	0.309017	0.587785	0.809017
1985.01	-0.707107	0.707107	0.923880	0.382683
1985.02	-0.309017	0.951057	0.987688	-0.156435
1985.03	0.156435	0.987688	0.760406	-0.649448
1985.04	0.587785	0.809017	0.309017	-0.951057
1985.05	0.891007	0.453990	-0.233446	-0.972370
1985.06	1.000000	-2.09D-07	-0.707107	-0.707107
1985.07	0.891006	-0.453991	-0.972370	-0.233445
1985.08	0.587785	-0.809017	-0.951056	0.309017
1985.09	0.156434	-0.987688	-0.649448	0.760406
1985.10	-0.309017	-0.951056	-0.156434	0.987688
1985.11	-0.707107	-0.707107	0.382684	0.923879
1985.12	-0.951057	-0.309017	0.809017	0.587785
1986.01	-0.987688	0.156435	0.996917	0.078459
1986.02	-0.809017	0.587785	0.891006	-0.453991
1986.03	-0.453990	0.891007	0.522498	-0.852640
1986.04	2.78D-07	1.000000	-3.25D-07	-1.000000
1986.05	0.453991	0.891006	-0.522499	-0.852640
1986.06	0.809017	0.587785	-0.891007	-0.453990
1986.07	0.987688	0.156434	-0.996917	0.078459
1986.08	0.951056	-0.309017	-0.809017	0.587785
1986.09	0.707106	-0.707107	-0.382683	0.923880
1986.10	0.309017	-0.951057	0.156435	0.987688
1986.11	-0.156435	-0.987688	0.649448	0.760406
1986.12	-0.587785	-0.809017	0.951057	0.309017

obs	SEN6	COS6	SEN7	COS7
1987.01	-0.891007	-0.453990	0.972370	-0.233446
1987.02	-1.000000	3.48D-07	0.707106	-0.707107
1987.03	-0.891006	0.453991	0.233445	-0.972370
1987.04	-0.587785	0.809017	-0.309017	-0.951056
1987.05	-0.156434	0.987688	-0.760406	-0.649448
1987.06	0.309017	0.951056	-0.987688	-0.156434
1987.07	0.707107	0.707106	-0.923879	0.382684
1987.08	0.951057	0.309017	-0.587785	0.809017
1987.09	0.987688	-0.156435	-0.078459	0.996917
1987.10	0.809017	-0.587786	0.453991	0.891006
1987.11	0.453990	-0.891007	0.852640	0.522498
1987.12	-4.18D-07	-1.000000	1.000000	-4.87D-07
1988.01	-0.453991	-0.891006	0.852640	-0.522499
1988.02	-0.809017	-0.587785	0.453990	-0.891007
1988.03	-0.987688	-0.156434	-0.078460	-0.996917
1988.04	-0.951056	0.309017	-0.587786	-0.809017
1988.05	-0.707106	0.707107	-0.923880	-0.382683
1988.06	-0.309017	0.951057	-0.987688	0.156435
1988.07	0.156435	0.987688	-0.760406	0.649449
1988.08	0.587786	0.809017	-0.309016	0.951057
1988.09	0.891007	0.453990	0.233446	0.972370
1988.10	1.000000	-4.87D-07	0.707107	0.707106
1988.11	0.891006	-0.453991	0.972370	0.233445
1988.12	0.587785	-0.809017	0.951056	-0.309018
1989.01	0.156434	-0.987688	0.649448	-0.760406
1989.02	-0.309018	-0.951056	0.156434	-0.987688
1989.03	-0.707107	-0.707106	-0.382684	-0.923879
1989.04	-0.951057	-0.309016	-0.809017	-0.587785
1989.05	-0.987688	0.156435	-0.996917	-0.078458
1989.06	-0.809017	0.587786	-0.891006	0.453991
1989.07	-0.453990	0.891007	-0.522498	0.852641
1989.08	5.57D-07	1.000000	6.50D-07	1.000000

obs	SEN13	COS13	TSEN7	TCOS7	STING	SENCOS
1983.01	0.852640	0.522499	0.522499	0.852640	122.5000	138.8943
1983.02	0.891007	-0.453990	1.782013	0.907981	146.7000	143.7019
1983.03	0.078459	-0.996917	2.990752	-0.235377	168.5000	135.5835
1983.04	-0.809017	-0.587785	3.236068	-2.351141	128.4000	131.1076
1983.05	-0.923880	0.382683	1.913417	-4.619398	114.7000	134.9372
1983.06	-0.156434	0.987688	-0.938607	-5.926130	120.4000	137.1578
1983.07	0.760406	0.649448	-4.546137	-5.322842	149.8000	126.3421
1983.08	0.951056	-0.309017	-7.608452	-2.472135	123.0000	104.9214
1983.09	0.233445	-0.972370	-8.751329	2.101009	88.50000	90.88741
1983.10	-0.707107	-0.707107	-7.071067	7.071068	119.2000	103.0276
1983.11	-0.972370	0.233445	-2.567898	10.69607	139.0000	143.0775
1983.12	-0.309017	0.951057	3.708205	11.41268	203.0000	191.7751
1984.01	0.649448	0.760406	9.885279	8.442823	185.4000	223.1991
1984.02	0.987688	-0.156435	13.82764	2.190082	229.1000	224.8129
1984.03	0.382683	-0.923880	13.85819	-5.740254	227.4000	205.3788
1984.04	-0.587785	-0.809017	9.404562	-12.94427	171.6000	184.3175
1984.05	-0.996917	0.078459	1.333802	-16.94760	152.2000	173.3207
1984.06	-0.453990	0.891007	-8.171831	-16.03812	151.3000	167.7550
1984.07	0.522499	0.852640	-16.20016	-9.927470	142.0000	155.3807
1984.08	1.000000	-3.02D-07	-20.00000	3.25D-06	142.2000	132.8949
1984.09	0.522498	-0.852640	-17.90544	10.97247	96.50000	113.1775
1984.10	-0.453991	-0.891006	-9.987787	19.60214	111.4000	115.1982
1984.11	-0.996917	-0.078459	1.804564	22.92910	142.0000	145.6118
1984.12	-0.587785	0.809017	14.10685	19.41640	202.3000	189.6857
1985.01	0.382684	0.923879	23.09699	9.567082	200.8000	220.9560
1985.02	0.987688	0.156434	25.67990	-4.067302	242.8000	221.5927
1985.03	0.649448	-0.760406	20.53096	-17.53510	269.7000	195.3729
1985.04	-0.309017	-0.951056	8.652471	-26.62959	154.9000	162.0038
1985.05	-0.972370	-0.233445	-6.769922	-28.19873	126.7000	138.8209
1985.06	-0.707106	0.707107	-21.21321	-21.21320	133.0000	127.2528
1985.07	0.233446	0.972370	-30.14347	-7.236798	120.0000	116.2142
1985.08	0.951057	0.309016	-30.43381	9.888551	121.3000	97.94778
1985.09	0.760406	-0.649449	-21.43178	25.09340	68.70000	79.78910
1985.10	-0.156435	-0.987688	-5.318763	33.58141	74.90000	79.51564
1985.11	-0.923880	-0.382683	13.39393	32.33578	98.10000	107.9320
1985.12	-0.809017	0.587786	29.12462	21.16026	152.7000	155.6589
1986.01	0.078460	0.996917	36.88594	2.902975	164.1000	197.2630
1986.02	0.891007	0.453990	33.85824	-17.25165	181.5000	210.2122
1986.03	0.852640	-0.522499	20.37743	-33.25297	218.2000	191.9184
1986.04	-6.03D-07	-1.000000	-1.30D-05	-40.00000	138.5000	159.8042
1986.05	-0.852641	-0.522498	-21.42245	-34.95824	125.2000	134.9868
1986.06	-0.891006	0.453991	-37.42228	-19.06759	134.9000	125.0932
1986.07	-0.078458	0.996917	-42.86744	3.373756	129.8000	121.8351
1986.08	0.809017	0.587785	-35.59674	25.86256	138.6000	114.3668
1986.09	0.923879	-0.382684	-17.22074	41.57459	83.40000	104.2065
1986.10	0.156434	-0.987688	7.196001	45.43366	114.4000	106.2299
1986.11	-0.760406	-0.649448	30.52407	35.73907	154.7000	134.1028
1986.12	-0.951056	0.309018	45.65072	14.83280	208.6000	184.1240

obs	SEN13	COS13	TSEN7	TCOS7	STING	SENCOS
1987.01	-0.233445	0.972370	47.64613	-11.43884	226.4000	233.7063
1987.02	0.707107	0.707106	35.35532	-35.35536	242.4000	257.2702
1987.03	0.972370	-0.233446	11.90570	-49.59087	254.9000	245.8760
1987.04	0.309016	-0.951057	-16.06890	-49.45493	194.9000	213.1216
1987.05	-0.649449	-0.760405	-40.30154	-34.42073	168.4000	182.3802
1987.06	-0.987688	0.156435	-53.33518	-8.447436	161.4000	167.5050
1987.07	-0.382683	0.923880	-50.81337	21.04761	176.6000	164.6126
1987.08	0.587786	0.809017	-32.91596	45.30496	177.1000	161.4352
1987.09	0.996917	-0.078460	-4.472142	56.82430	120.0000	153.7795
1987.10	0.453990	-0.891007	26.33147	51.67836	159.1000	152.0832
1987.11	-0.522499	-0.852640	50.30578	30.82739	176.3000	171.1079
1987.12	-1.000000	9.05D-07	60.00000	-2.92D-05	217.1000	212.7043
1988.01	-0.522498	0.852641	52.01104	-31.87244	257.7000	258.9664
1988.02	0.453991	0.891006	28.14738	-55.24242	293.7000	283.7084
1988.03	0.996917	0.078458	-4.942956	-62.80579	316.5000	272.8578
1988.04	0.587785	-0.809017	-37.61829	-51.77707	219.8000	235.5699
1988.05	-0.382684	-0.923879	-60.05218	-24.87440	172.0000	196.1057
1988.06	-0.987688	-0.156433	-65.18742	10.32471	174.9000	174.0727
1988.07	-0.649447	0.760407	-50.94717	43.51305	200.2000	170.9687
1988.08	0.309018	0.951056	-21.01312	64.67186	192.5000	174.4298
1988.09	0.972370	0.233444	16.10777	67.09351	128.2000	174.5594
1988.10	0.707106	-0.707107	49.49750	49.49745	143.1000	175.4965
1988.11	-0.233446	-0.972370	69.03827	16.57458	180.8000	190.5994
1988.12	-0.951057	-0.309016	68.47606	-22.24926	264.9000	226.1043
1989.01	-0.760405	0.649449	47.40968	-55.50967	272.3000	269.8927
1989.02	0.156436	0.987688	11.57611	-73.08894	262.4000	297.6007
1989.03	0.923880	0.382682	-28.70130	-69.29095	322.8000	291.7990
1989.04	0.809016	-0.587786	-61.48533	-44.67165	241.3000	257.0972
1989.05	-0.078460	-0.996917	-76.76264	-6.041302	194.8000	217.1932
1989.06	-0.891007	-0.453990	-69.49848	35.41130	206.7000	196.2693
1989.07	-0.852640	0.522500	-41.27734	67.35860	221.7000	201.3403
1989.08	1.21D-06	1.000000	5.20D-05	80.00000	227.0000	220.8308

METODOS DE SUAVIZAMIENTO EXPONENCIAL

Estos métodos fueron desarrollados por Brown(1) y Holt(2), y sus principios están en que los pronósticos son actualizados a través de los datos más recientes utilizando una forma recursiva, en la cual se le asigna una ponderación a la observación más reciente y también son ponderadas las observaciones más remotas, dando facilidad a que el pronóstico pueda reaccionar a los cambios potenciales de las observaciones y de ésta manera corrige de manera paulatina el pronóstico más reciente.

Un primer método para pronosticar con el suavizamiento exponencial es el llamado suavizamiento exponencial simple el cual se expresa por medio de la siguiente ecuación:

I) $$F_{t+1} = \alpha X_t + (1 - \alpha) F_t$$

En donde α es el coeficiente de suavizamiento exponencial y es un valor que está dado por el siguiente intervalo $0 < \alpha < 1$.

Si utilizamos la forma recursiva de la ecuación I) tenemos:

$$F_{t+1} = \alpha X_t + (1 - \alpha) F_t = \alpha X_t + (1 - \alpha) [\alpha X_{t-1} + (1 - \alpha) F_{t-1}]$$

$$F_{t+1} = \alpha X_t + \alpha (1 - \alpha) X_{t-1} + (1 - \alpha)^2 F_{t-1}$$

$$F_{t+1} = \alpha X_t + \alpha (1 - \alpha) X_{t-1} + (1 - \alpha)^2 [\alpha X_{t-2} + (1 - \alpha) F_{t-2}]$$

de tal manera que siguiendo el mismo procedimiento se tiene:

$$F_{t+1} = \alpha X_t + \alpha (1 - \alpha) X_{t-1} + \alpha (1 - \alpha)^2 + \dots +$$
$$+ \alpha (1 - \alpha)^{t-1} + (1 - \alpha)^t F_1$$

por lo que también la ecuación 1 puede expresarse de la forma siguiente:

---

1) Brown, R. G. - Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time Series. - pag(128-132). - Prentice Hall, Inc. - E. Cliffs, N. J. -1962

2) Holt. C. C. - Forecasting Seasonal and Trends by Exponential Weighted Moving Averages. - Office of Naval Research. - Research Memorandum. -

$$F_{t+1} = \alpha \sum_{j=1} (1 - \alpha)^j X_{t-j} + (1 - \alpha)^t F_1$$

de aquí se puede deducir que $\alpha \sum_{j=1}^{t-1} (1 - \alpha)^j + (1 - \alpha)^t = 1$

y que si $t \rightarrow \alpha \quad (1 - \alpha)^t \rightarrow 0$

la ecuación I) ahora queda de la forma siguiente:

$$F_{t+1} = \alpha \sum_{j=1}^{t-1} (1 - \alpha)^j X_{t-j} \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty$$

Para la ilustración de éste método utilizaremos la siguiente serie:

EXPORTACIONES NO PETROLERAS

MILLONES DE DOLARES

	1985	1986	1987	1988
ENE	585.00	819.60	899.20	1044.00
FEB	568.20	730.90	863.90	1191.80
MAR	660.70	781.90	1034.60	1237.10
ABR	565.80	848.50	971.50	1169.30
MAY	600.70	803.50	1061.50	1226.20
JUN	517.10	708.30	1099.10	1212.60
JUL	541.30	738.10	981.20	1112.70
AGO	541.20	686.90	884.80	1234.60
SEP	510.70	794.60	1003.10	1067.10
OCT	623.40	888.10	1062.00	1064.50
NOV	630.60	901.70	1015.80	-------
DIC	755.30	1021.00	1149.60	-------

FUENTE: CUADERNOS DE INFORMACION OPORTUNA

INEGI. SPP

NUM. 144 - 148

Para iniciar se tiene que $F_1 = X_1$ y para efectuar el suavizamiento se usará un valor de $\alpha = 0.7$, por lo que al aplicar la ecuación I) se tiene:

$$F_2 = 0.7\ X_1 + 0.3\ F_1 = 0.7\ X_1 + 0.3\ X_1 = X_1 = 585.00$$

$$F_3 = 0.7\ X_2 + 0.3\ F_2 = 0.7\ (568.2) + 0.3\ (585.00) = 573.24$$

$$F_4 = 0.7\ X_3 + 0.3\ F_3 = 0.7\ (660.7) + 0.3\ (523.24) = 634.46$$

Y así sucesivamente hasta terminar con todos los valores de serie, los resultados se dan a continuación:

PRONOSTICOS PARA LA SERIE DE EXPORTACIONES NO PETROLERAS

Con un valor de $\alpha = 0.7$.

	1985	1986	1987	1988
ENE	------	714.45	980.71	1111.38
FEB	585.00	788.05	923.65	1064.21
MAR	573.24	748.05	881.83	1153.52
ABR	634.46	771.74	988.77	1212.03
MAY	586.40	825.47	976.68	1182.12
JUN	596.41	810.09	1036.05	1212.98
JUL	540.89	738.84	1080.19	1212.71
AGO	541.18	738.32	1010.90	1142.70
SEP	541.19	702.33	922.63	1207.03
OCT	519.85	766.92	978.96	1109.08
NOV	592.33	851.75	1037.09	-------
DIC	619.12	886.71	1022.19	-------

DOBLE SUAVIZAMIENTO EXPONENCIAL CON UN SOLO PARAMETRO LINEAL

Este método es muy similar al de suavizamiento exponencial simple ya que a la serie original se le aplica un suavizamiento, y en seguida a la serie suavizada obtenida se le repite el suavizamiento exponencial con el mismo valor de α, de tal forma que las ecuaciones a utilizar son las siguientes:

i) $S1_t = \alpha X_t + (1 - \alpha) S1_{t-1}$

ii) $S2_t = \alpha S1_t + (1 - \alpha) S2_{t-1}$

iii) $a_t = 2S1_t - S2_t$

iv) $b_t = (\alpha / 1 - \alpha)(S1_t - S2_t)$

v) $F_{t+m} = a_t + b_t m$ m es el número de periodos que se van a pronosticar hacia adelante a partir del tiempo t.

Para ilustrar éste método utilizaremos la misma serie de exportaciones no petroleras.

Para los valores iniciales de $S1_t$ y $S2_t$ se tiene que:

$$S1_1 = S2_1 = X_1 \qquad \text{y usaremos un } \alpha = 0.65$$

para el periodo comprendido de Enero de 1986 a Octubre de 1908.

$X_1 = 819.60 \qquad S1_1 = 819.60 \qquad S2_1 = 819.6$

$a_1 = 819.60 \qquad b_1 = 0$

$X_2 = 730.90 \qquad S1_2 = 0.65(730.90) + 0.35(819.60) = 761.945$

$S2_2 = 0.65(761.945) + 0.35(819.60) = 782.124$

$a_2 = 2S1_2 - S2_2 = 741.755 \qquad b_2 = (0.65/0.35)(S1_2 - S2_2) = - 37.475$

$X_3 = 781.90 \qquad S1_3 = 0.65(781.90) + (0.35)761.945 = 774.915$

$S2_3 = 0.65(774.915) + 0.35(782.124) = 777.436$

$a_3 = 2S1_3 - S2_3 = 772.394 \qquad b_3 = (0.65/0.35)(S1_3 - S2_3) = -4.681$

$X_4 = 848.50 \qquad S1_4 = 0.65(848.50) + 0.35((774.915) = 822.745$

$S2_4 = 0.65(822.745) + 0.35(777.436) = 806.886$

$a_4 = 2S1_4 - S2_4 = 838.604 \qquad b_4 = (0.65/0.35)(S1_4 - S2_4) = 29.452$

y asi sucesivamente hasta terminar con todas las observaciones de la serie. Por lo que los pronósticos para un valor de m = 1 son:

$F_2 = a_1 + b_1(1) = 819.60$

$F_3 = a_2 + b_2(1) = 741.771 - (37.475) = 704.301$

$F_4 = a_3 + b_3(1) = 772.394 - (4.681) = 767.713$

$F_5 = a_4 + b_4(1) = 838.604 + (29.452) = 868.056$

A continuación se dan los resultados para toda la serie.

Periodo	X_t	$S1_t$	$S2_t$	a_t	b_t	F_t
1986.01	819.60	819.60	819.60	819.60	0.00	----
1986.02	730.90	761.95	782.12	741.77	-37.48	819.60
1986.03	781.90	774.92	777.44	772.39	-4.69	704.29
1986.04	848.50	822.75	806.89	838.60	29.45	767.71
1986.05	803.50	810.24	809.06	811.41	2.18	868.05
1986.06	708.30	743.98	766.76	721.20	-42.31	813.58
1986.07	738.10	740.16	749.47	730.85	-17.29	678.89
1986.08	686.90	705.54	720.91	690.17	-28.55	713.56
1986.09	794.60	763.43	748.55	778.31	27.63	661.61
1986.10	888.10	844.47	810.89	878.04	62.35	805.94
1986.11	901.70	881.67	856.90	906.44	46.00	940.38
1986.12	1021.00	972.23	931.87	1012.60	74.97	952.44
1987.01	899.20	924.76	927.25	922.28	-4.62	1087.57
1987.02	863.90	885.20	899.92	870.49	-27.33	917.66
1987.03	1034.60	982.31	953.47	1011.15	53.56	843.16
1987.04	971.50	975.28	967.65	982.92	14.18	1064.70
1987.05	1061.50	1031.32	1009.04	1053.61	41.39	997.09
1987.06	1099.10	1075.38	1052.16	1098.60	43.12	1095.00
1987.07	981.20	1014.16	1027.46	1000.86	-24.70	1141.72
1987.08	884.80	930.08	964.16	895.99	-63.30	976.16
1987.09	1003.10	977.54	972.86	982.23	8.70	832.69
1987.10	1062.00	1032.44	1011.59	1053.29	38.73	990.92
1987.11	1015.80	1021.62	1018.11	1025.14	6.52	1092.02
1987.12	1149.60	1104.81	1074.46	1135.15	56.35	1031.66
1988.01	1044.00	1065.28	1068.50	1062.07	-5.97	1191.51
1988.02	1191.30	1147.52	1119.86	1175.18	51.37	1056.10
1988.03	1237.10	1205.75	1175.69	1235.81	55.83	1226.54
1988.04	1169.30	1182.06	1179.83	1184.29	4.14	1291.63
1988.05	1226.20	1210.75	1199.93	1221.57	20.10	1188.43
1988.06	1212.60	1211.95	1207.74	1216.16	7.82	1241.67
1988.07	1112.70	1147.44	1168.55	1126.33	-39.20	1223.98
1988.08	1234.60	1204.09	1191.65	1216.54	23.11	1087.13
1988.09	1067.10	1115.05	1141.86	1088.24	-49.79	1239.64
1988.10	1064.50	1082.19	1103.07	1061.31	-38.78	1038.44

TRIPLE SUAVIZAMIENTO EXPONENCIAL
CON UN SOLO PARAMETRO CUADRATICO

Los modelos de triple suavizamiento exponencial son una extensión de los de doble suavizamiento y su aplicación está hacia patrones de series de tiempo que siguen una tendencia cuadrática.

La ecuación que teoricamente asigna los valores de los pronósticos a un tiempo hacia adelante de k periodos es:

$\mu_{t+k} = a + b\,k + \frac{1}{2}\,c\,k^2$ en donde a, b y c son parámetros a estimar, la ecuación anterior es una forma particular de la expansión de la serie de Taylor, y su base matemática es demostrada a través del análisis estadístico de la siguiente forma:

Se parte de que a la serie de tiempo X_t se le aplican tres suavizamientos en forma consecutiva aplicando un suavizamiento exponencial simple con un coeficiente α con las siguientes ecuaciones:

1) $S1_t = \alpha\,X_t + (1 - \alpha)S1_{t-1}$

2) $S2_t = \alpha\,S1_t + (1 - \alpha)S2_{t-1}$

3) $S3_t = \alpha\,S2_t + (1 - \alpha)S3_{t-1}$

Las tres ecuaciones anteriores se pueden escribir de la siguiente manera, considerando que las observaciones de la serie de tiempo tienden a infinito.

4) $S1_t = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \alpha)^k X_{t-k}$

5) $S2_t = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \alpha)^k S1_{t-k}$

6) $S3_t = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \alpha)^k S2_{t-k}$

Si tomanos el valor esperado a cada una de las ecuaciones 4), 5) y 6) se tienen los siguientes resultados:

$$7) \qquad E(S1_t) = E\left(\alpha \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \alpha)^k X_{t-k} \right) =$$

$$E(S1_t) = \alpha \sum (1 - \alpha)^k \left(a - b\,k + \tfrac{1}{2} c\,k^2 \right)$$

$$E(S1_t) = a - [(1 - \alpha)/\alpha]\, b + [(1-\alpha)(2-\alpha)/2\alpha^2]\, c$$

$$E(S2_t) = a - [2(1 - \alpha)/\alpha]\, b + [2(1-\alpha)(3-\alpha)/2\alpha^2]\, c$$

$$E(S3_t) = a - [3(1 - \alpha)/\alpha]\, b + [3(1-\alpha)(4-3\alpha)/2\alpha^2]\, c$$

Utilizando el método de momentos para obtener los valores de a,b y c. se hacen las siguientes sustituciones: $S1_t$, $S2_t$ y $S3_t$ para cada uno de los valores esperados $E(S1_t)$, $E(S2_t)$ y $E(S3_t)$ se tienen tres ecuanes con tres incógnitas que son las siguientes:

$$S1_t = a_t - [(1 - \alpha)/\alpha]\, b_t + [(1 - \alpha)(2 - \alpha)/2\alpha^2]\, c_t$$

$$S2_t = a_t - [2(1 - \alpha)/\alpha]\, b_t + [2(1 - \alpha)(3 - \alpha)/2\alpha^2]\, c_t$$

$$S3_t = a_t - [3(1 - \alpha)/\alpha]\, b_t + [3(1 - \alpha)(4 - 3\alpha)/2\alpha^2]\, c_t$$

resolviendo el sistema de ecuaciones para a_t, b_t y c_t se tienen los siguientes resultados:

$$a_t = 3\, S1_t - 3\, S2_t + 3\, S3_t$$

$$b_t = [\alpha/(1 - \alpha)^2]\, [(6 - 5\alpha)S1_t - (10 - 8\alpha)S2_t + (4 - 3\alpha)S3_t]$$

$$c_t = [\alpha^2/(1 - \alpha)^2]\, [S1_t - 2\, S2_t + S3_t]$$

por lo que ahora la ecuación de pronósticos al tiempo t+k es la expresión siguiente:

$F_{t+k} = a_t + b_t\, k + \tfrac{1}{2} c_t\, k^2$ en donde k son los periodos hacia adelante que se quieren pronosticar.

Para la aplicación de éste método utilizaremos la siguiente serie de tiempo:

IMPORTACIONES TOTALES DE MERCANCIAS
MILLONES DE DOLARES
ENERO 1986 - OCTUBRE DE 1988

	1986	1987	1988
ENE	1052.2000	787.7000	1116.8000
FEB	1002.5000	764.8000	1199.7000
MAR	922.9000	959.6000	1420.3000
ABR	1087.3000	970.4000	1398.0000
MAY	1040.8000	949.5000	1554.4000
JUN	958.3000	995.4000	1632.2000
JUL	1050.3000	1133.1000	1595.5000
AGO	858.4000	1080.2000	1826.3000
SEP	821.3000	1094.7000	1741.7000
OCT	921.5000	1206.3000	1739.4000
NOV	815.4000	1149.3000	---------
DIC	901.4000	1131.5000	---------

FUENTE: CUADERNOS DE INFORMACION OPORTUNA.- INEGI - SPP.- Num 144

Para iniciar éste método los suavizamientos iniciales:

$$S1_1 = S2_1 = S3_1 = X_1 = 1052.20$$

Utilizando un $\alpha = 0.35$ se obtienen los siguientes suavizamientos:

$$S1_2 = 0.35\ X_2 + 0.65\ S1_1 = 0.35(1002.5) + 0.65(1052) = 1034.805$$

$$S2_2 = 0.35\ S1_2 + 0.65\ S2_1 = 0.35(1034.805) + 0.65(1052.2) = 1046.112$$

$$S3_2 = 0.35\ S2_2 + 0.65\ S3_1 = 0.35(1046.112) + 0.65(1052.2) = 1050.069$$

$$S1_3 = 0.35\ X_3 + 0.65\ S1_2 = 0.35(922.90) + 0.65(1034.805) = 995.6382$$

$$S2_3 = 0.35\ S1_3 + 0.65\ S2_2 = 0.35(995.6382) + 0.65(1046.12) = 1028.446$$

$$S3_3 = 0.35\ S2_3 + 0.65\ S3_2 = 0.35(1028.446) + 0.65(1050.069) = 1042.501$$

Y así sucesivamente hasta completar todos los suavizamientos.

En seguida se obtienen los valores de a_t, b_t y c_t. Los coeficientes que multiplican a los valores dados en b_t y c_t se obtienen al sustituir $\alpha = 0.35$ en sus respectivas ecuaciones.

$$a_1 = (\ 3\ S1_1 - 3\ S2_1 + S3_1\ ) = 1052.2$$

$$b_1 = 1.76035\ S1_1 - 2.98224\ S2_1 + 1.22189\ S3_1 = 0$$

$$c_1 = 0.28994\ (\ S1_1 - 2\ S2_1 + S3_1\ ) = 0$$

$a_2 = (3\ S1_2 - 3\ S2_2 + S3_2) = 1016.1480$

$b_2 = 1.76035\ S1_2 - 2.98224\ S2_2 + 1.22189\ S3_2 = - 15.0694$

$c_2 = 0.28994\ (S1_2 - 2\ S2_2 + S3_2) = - 2.1311$

$a_3 = (3\ S1_3 - 3\ S2_3 + S3_3) = 944.0774$

$b_3 = 1.76035\ S1_3 - 2.98224\ S2_3 + 1.22189\ S3_3 = - 40.5799$

$c_3 = 0.28994\ (S1_3 - 2\ S2_3 + S3_3) = - 5.4372$

Los pronósticos para un periodo adelantado se obtienen aplicando la ecuación de pronóstico siguiente:

$F_{t+1} = a_t + b_t(1) + \frac{1}{2} c_t(1)$ ya que en éste caso $m = 1$.

$F_2 = a_1 + b_1 + \frac{1}{2} c_1 = 1052.2000$

$F_3 = a_2 + b_2 + \frac{1}{2} c_2 = 1000.0130$

$F_4 = a_3 + b_3 + \frac{1}{2} c_3 = 900.7787$

Los resultados para el suavizamiento de la serie de Importaciones de Mercancias y sus respectivos valores de a_t, b_t y c_t junto con sus respectivos pronósticos se dan en las siguientes tablas.

Suavizamiento de la serie de tiempo
Importaciones Totales de Mercancias

X_t es la serie importaciones Totales

$S1_t$ $S2_t$ $S3_t$ son los suavizamientos utilizando un $\alpha = 0.35$

Periodo	X_t	$S1_t$	$S2_t$	$S3_t$
1986.01	1052.2000	1052.2000	1052.2000	1052.2000
1986.02	1002.5000	1034.8050	1046.1120	1050.0690
1986.03	922.9000	995.6382	1028.4460	1042.5010
1986.04	1087.3000	1027.7200	1028.1920	1037.4930
1986.05	1040.8000	1032.2980	1029.6290	1034.7410
1986.06	958.3000	1006.3990	1021.4980	1030.1060
1986.07	1050.3000	1021.7640	1021.5910	1027.1260
1986.08	858.4000	964.5866	1001.6390	1018.2060
1986.09	821.3000	914.4363	971.1180	1001.7250
1986.10	921.5000	916.9086	952.1447	984.3719
1986.11	815.4000	881.3806	927.3773	964.4237
1986.12	901.4000	888.3874	913.7308	946.6812
1987.01	787.7000	853.1468	892.5264	927.7270
1987.02	764.8000	822.2254	867.9210	906.7949
1987.03	959.6000	870.3065	868.7559	893.4813
1987.04	970.4000	905.3392	881.5601	889.3089
1987.05	949.5000	920.7954	895.2924	891.4031
1987.06	995.4000	946.9070	913.3575	899.0871
1987.07	1133.1000	1012.0750	947.9086	916.1746
1987.08	1080.2000	1035.9190	978.7122	938.0627
1987.09	1094.7000	1056.4920	1005.9350	961.8180
1987.10	1206.3000	1108.9250	1041.9810	989.8750
1987.11	1149.3000	1123.0560	1070.3570	1018.0440
1987.12	1131.5000	1126.0110	1089.8360	1043.1710
1988.01	1116.8000	1122.7870	1101.3690	1063.5400
1988.02	1199.7000	1149.7070	1118.2870	1082.7010
1988.03	1420.3000	1244.4150	1162.4320	1110.6070
1988.04	1398.0000	1298.1700	1209.9400	1145.3740
1988.05	1554.4000	1387.8500	1272.2080	1189.7660
1988.06	1632.2000	1473.3720	1342.6150	1243.2630
1988.07	1595.5000	1516.1170	1403.3410	1299.2900
1988.08	1826.3000	1624.6810	1480.8100	1362.8220
1988.09	1741.7000	1665.6380	1545.5000	1426.7590
1988.10	1739.4000	1691.4550	1596.5840	1486.1980

Periodo	a_t	b_t	c_t	F_{t+1}
1	1052.2000	0.0000	0.0000	0000.0000
2	1016.1480	-15.0694	-2.1311	1052.2000
3	944.0774	-40.5799	-5.4372	1000.0130
4	1036.0770	10.5339	2.5599	900.7789
5	1042.7480	10.9445	2.2560	1047.8910
6	984.8090	-16.0616	-1.8820	1054.8210
7	1027.6450	7.0878	1.6550	967.8065
8	907.0489	-44.9822	-5.9395	1035.5400
9	831.6799	-62.3814	-7.5601	859.0969
10	878.6636	-22.6499	-0.8724	765.5184
11	826.4336	-35.7038	-2.5951	855.5775
12	870.6511	-4.3514	2.2056	789.4323
13	809.5881	-26.3108	-1.2117	867.4025
14	769.7081	-32.9408	-1.9779	782.6715
15	898.1331	32.9414	7.6185	735.7784
16	960.6461	51.3278	9.1412	934.8838
17	967.9121	40.1420	6.2667	1016.5440
18	999.7356	41.6221	5.5898	1011.1870
19	1108.6740	74.1800	9.4035	1044.1530
20	1109.6830	51.0348	4.8006	1187.5560
21	1113.4890	35.0919	1.8672	1163.1180
22	1190.7070	54.1774	4.3022	1149.5150
23	1176.1410	28.8479	0.1119	1247.0360
24	1151.6960	6.6610	-3.0415	1205.0450
25	1127.7940	-8.5198	-4.7582	1156.8360
26	1176.9610	11.8282	-1.2079	1116.6950
27	1356.5560	80.9947	8.7441	1188.1850
28	1410.0640	76.4236	6.8612	1441.9230
29	1536.6920	102.8356	9.6260	1489.9180
30	1635.5340	108.7811	9.1056	1644.3410
31	1637.6180	71.3867	2.5298	1748.8680
32	1794.4350	109.0952	7.5045	1710.2700
33	1787.1730	66.3966	0.4050	1907.2820
34	1770.8110	32.1267	-4.4984	1853.7720

C A P I T U L O IV

MODELOS BOX - JENKINS

GENERALIDADES DE LOS MODELOS BOX - JENKINS

IDENTIFICACION DEL MODELO

ESTIMACION DE PARAMETROS

DIAGNOSTICO

APLICACIONES Y PRONOSTICOS

MODELOS BOX - JENKINS

En el análisis de las series de tiempo ya hemos visto que uno de sus principales objetivos es desarrollar un modelo que explique el comportamiento de la variable temporal a través de su patrón histórico desarrollado por un proceso de realización.

Fundamentalmente hemos estudiado los métodos de descomposición y de suavizamiento exponencial en sus diferentes expresiones, ahora tomando como principio el método de suavizamiento exponencial simple, vamos a construir dos modelos que serán de utilidad para introducirnos a la metodologia de BOX - JENKINS.

Consideremos primero un pronóstico para un valor dado en la serie de tiempo a través de la siguiente expresión :

4.1) $F_{t+1} = F_t + \alpha e_t$ en donde F_{t+1} es el pronóstico con un periodo de adelanto, F_t es el pronóstico al tiempo actual t y e_t es el error al tiempo t actual y α es un coeficiente de ponderación para el error e_t . Aplicando ésta ecuación de manera recursiva se tiene para el pronoóstico para tiempo t :

4.2) $F_t = F_{t-1} + \alpha e_{t-1}$ y sustituyendo ésta última ecuación en la ecuación anterior obtenemos:

4.3) $F_{t+1} = F_{t-1} + \alpha e_{t-1} + \alpha e_t$ ahora calculando el valor para F_{t-1} se tiene $F_{t-1} = F_{t-2} + \alpha e_{t-2}$ y volviendo a sustituir en la ecuación 4.3 se tiene la siguiente expresión :

4.4) $F_{t+1} = F_{t-2} + \alpha e_{t-2} + \alpha e_{t-1} + \alpha e_t$ y continuando el mismo procedimiento obtenemos una ecuación más general, dada por la siguiente expresión :

4.5) $F_{t+1} = F_{t-k} + \alpha e_{t-k} + \alpha e_{t-k+1} + \ldots + \alpha e_{t-2} + \alpha e_{t-1} + \alpha e_t$

ésta última expresión indica que el pronóstico al tiempo t+1 depende del pronóstico al tiempo t-k y de la suma ponderada de los errores e_{t-k} , e_{t-k+1} , ... , e_{t-2} , e_{t-1} , e_t .

Ahora apliquemos el suavizamiento exponencial simple a la siguiente ecuación de pronóstico al tiempo t+1 :

4.6) $F_{t+1} = \alpha X_t + (1 - \alpha) F_t$ ahora haciendo el pronóstico al tiempo t, se tiene :

4.7) $F_t = \alpha X_{t-1} + (1 - \alpha) F_{t-1}$ y después sustituimos en la ecuación 4.6 se obtiene la siguiente expresión :

4.8) $F_{t+1} = \alpha X_t + \alpha (1 - \alpha) X_{t-1} + (1 - \alpha)^2 F_{t-1}$

y si consideramos los pronósticos para los tiempos t, t-1, ... t-k y efectuando las respectivas sustituciones en la ecuación 4.8) podemos obtener la siguiente ecuación para el pronóstico al tiempo t+1 :

4.9) $F_{t+1} = \alpha X_t + \alpha(1-\alpha) X_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 X_{t-2} + \ldots + \alpha(1-\alpha)^k X_{t-k} + \alpha (1-\alpha)^{k+1} F_{t-k}$

La ecuación 4.5) con algunas consideraciones se puede expresar de la siguiente forma:

4.10) $X_t = b_o + b_1 e_{t-1} + b_2 e_{t-2} + \ldots + b_k e_{t-k} + e_t$

la cual indica que el valor actual de la variable X_t depende de sus propios errores rezagados a los tiempos t-1, t-2 ... t-k , a éste tipo de modelos representados por la ecuación 4.10) se les denomina de promedios móviles, asimismo la ecuación 4.9) se puede expresar de la siguiente forma:

4.11) $X_t = b_o + b_1 X_{t-1} + b_2 X_{t-2} + \ldots + b_k X_{t-k} + e_t$

la cual indica que el valor actual de la variable X_t depende de sus propios valores retrasados a los tiempos t-1, t-2, ... t-k , a éste tipo de modelos se les denomina como autorregresivos.

Los modelos representados por las expresiones 4.10) y 4.11) son la base de la metodología de BOX - JENKINS que de una manera conjunta se les llama modelos ARIMA (Autorregresivos|promedios móviles).

Para el análisis de las series de tiempo com modelos ARIMA es necesario que el comportamiento de estas series formen parte de los modelos estocásticos llamados estacionarios. En estos procesos estacionarios se supone que el nivel de la serie permanece en equilibrio próximo a un valor constante que será la media poblacional de la serie de tiempo.

El objetivo de los modelos ARIMA consiste basicamente en obtener movimientos predecibles de las series de tiempo a través de la descomposición de las mismas con los filtros llamados : filtro lineal autorregresivo, filtro lineal de integración y filtro lineal de promedios móviles.

Para entender el término filtro lineal debemos suponer que la serie de tiempo está bajo un comportamiento estocástico y que además es estacionario, esto último debe interpretarse de la siguiente manera . I) Que el valor esperado de las observaciones temporales y que la varianza de éstas mismas permanezcan constantes a través del tiempo, es decir :

$$E(w_t) = E(w_{t+s}) = \mu \qquad var(w_t) = var (w_{t+s}) = \sigma^2$$

siendo la variable w_t la serie estacionaria.

Las series bajo estudio en la realidad no tienen las propiedades de estacionariedad por lo que estás deben transformarse hacia una variable que cumpla las propiedades antes indicadas.

Las operaciones que se le hacen a la serie original de datos son fundamentalmente simples transformaciones algebraicas, primero con el objeto de obtener una serie con varianza constante y después para obtener una serie con media constante.

Para que una serie temporal se pueda transformar en una serie estacionaria con varianza constante, a los valores de está serie se le pueden obtener sus logaritmos naturales o bien sacarles la raiz cuadrada es decir se le pueden aplicar a una serie Y_t de observaciones a cualquier tiempo t las operaciones :

4.12) $$Z_t = \begin{cases} \sqrt{Y_t} \\ \ln Y_t \end{cases}$$ con éstas operaciones entonces

se obtiene la varianza constante.

Ahora aplicando el filtro estacionario se tendrá la serie con media constante, para llevar a cabo esto se efectúan las primeras diferencias de orden n.

Por definición la primera diferencia de una variable temporal se da a través de la siguiente relación:

4.13) $\nabla Z_t = Z_t - Z_{t-1}$ en donde el símbolo ∇ es el operador diferencia . Para obtener una diferencia de segundo orden se le aplica el operador diferencia a la primera diferencia :

$$\nabla^2 Z_t = \nabla(\nabla Z_t) = \nabla(Z_t - Z_{t-1}) = (Z_t - Z_{t-1}) - (Z_{t-1} - Z_{t-2})$$

$$\nabla^2 Z_t = Z_t - 2Z_{t-1} + Z_{t-2}$$

para una diferencia de tercer orden , se aplica el operador diferencia a la diferencia de segundo orden y se obtiene lo siguiente :

$$\nabla(\nabla^2 Z_t) = \nabla(Z_t - 2Z_{t-1} + Z_{t-2}). =$$

$$(Z_t - 2Z_{t-1} + Z_{t-2}) - (Z_{t-1} - 2Z_{t-2} + Z_{t-3}) =$$

$$\nabla^3 Z_t = Z_t - 3Z_{t-1} + 3Z_{t-2} - Z_{t-3}$$

En general si aplicamos diferencias de orden d , éstas serán las que determinen la transformación para que las series tengan las propiedades de estacionariedad. Por lo que la siguiente expresión nos da el filtro lineal estacionario:

4.14) $w_t = \nabla^d Z_t$ que en un esquema podemos interpretar la expresión anterior :

$$Y_t \longrightarrow Z_t \longrightarrow \underset{\text{estacionario}}{\overset{\nabla^d}{\overset{\text{Operador Dif.}}{\text{filtro lineal}}}} \longrightarrow w_t = \nabla^d Z_t$$

El operador de retraso . En la representación de modelos ARIMA es común que se utilice el operador de retraso, éste operador es representado simbólicamente con la letra B . La función que desempeña el operador de retraso sobre una serie de tiempo es las de rezagar un periodo a ésta, por lo que al aplicársele se obtiene la siguiente relación : $B\ Z_t = Z_{t-1}$ y si se sigue aplicando está operación de manera consecutiva se obtienen los resultados que se dan a continuación : $B\ (\ B\ Z_t) = B\ (\ Z_{t-1}) = Z_{t-2} = B^2 Z_t$

$B\ (B^2 Z_t) = B^3 Z_t = B\ (\ Z_{t-2}) = Z_{t-3}$.

por lo que al aplicarse el operador de retraso p veces sobre una variable temporal se tiene:

4.15) $B^p Z_t = Z_{t-p}$. ahora podemos ver la relación que existe entre el operador diferencia ∇ y el operador de retraso B a través de ésta ecuación :

4.16) $\nabla Z_t = Z_t - Z_{t-1} = Z_t - B\ Z_t = (\ 1 - B\ )\ Z_t$

ahora si aplicamos el operador de retraso a la diferencia de segundo orden encontramos la siguiente relación :

4.17) $\nabla^2 Z_t = Z_t - 2\ Z_{t-1} + Z_{t-2} = Z_t - 2\ B\ Z_t + B^2 Z_t$

ésta última expresión se puede representar algebraicamente de la forma siguiente : $\nabla^2 Z_t = (\ 1 - 2B + B^2)\ Z_t = (\ 1 - B\ )^2\ Z_t$ y continuando con la diferencia de tercer orden vemos que hay una relación bien definida que podemos después hacerla de manera más general.

$\nabla^3 Z_t = Z_t - 3\ Z_{t-1} + 3\ Z_{t-2} - Z_{t-3} = Z_t - 3B\ Z_t + 3B^2\ Z_t - B^3\ Z_t$

$\nabla^3 Z_t = (\ 1 - 3B + 3B^2 - B^3\ )\ Z_t = (\ 1 - B\ )^3\ Z_t$ entonces ahora se tiene una expresión que relaciona la operación diferencia con la operación de retraso con la siguiente ecuación :

4.18) $\nabla^d Z_t = (\ 1 - B\ )^d\ Z_t = w_t$ siendo ésta última expresión la del filtro estacionario.

MODELOS AUTOREGRRESIVOS (AR)

Como ya observamos anteriormente, un modelo autorregresivo queda definido cuando el valor actual de la serie de tiempo depende de sus valores pasados y lo definiremos de la forma dada a continuación :

4.19) $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \ldots + \phi_p X_{t-p} + a_t$

en ésta expresión X_t depende de sus valores rezagados X_{t-1}, X_{t-2} ... X_{t-p} de una variable aleatoria a_t que en términos de los modelos ARIMA se le denomina ruido blanco y que tiene una distribución normal con media igual a coro, y una varianza igual a σ_a^2 , los coeficientes ϕ_1 , ϕ_1 , ...ϕ_p son ponderaciones para las variables X_t, $X_{t-1} \ldots X_{t-p}$. aquí estamos suponiendo que X_t es una variable estócastica de un proceso estacionario. Este proceso queda representado simbólicamente como AR (p,0), ahora si la serie no es estacionaria éste modelo queda representado por AR (p,d) en donde d será el número del orden de diferencias que se tienen que aplicar para que la serie original sea estacionaria, de tal forma que $w_t = \nabla^d Z_t = (1 - B)^d Z_t$. y el modelo representado por 4.19), se puede escribir de la siguiente manera: $(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots \phi_p B^p) (1 - B)^d Z_t = a_t$

4.20) $(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots \phi_p B^p) w_t = a_t$

MODELOS DE PROMEDIOS MOVILES

En los modelos de promedios móviles los valores w_t están relacionados a los errores a_t rezagados q veces en el tiempo y al valor del error a_t actual, a través de la ecuación dada a continuación:

4.21) $w_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \ldots - \theta_q a_{t-q}$ que expresado en términos del operador de retraso queda de la siguiente forma:

4.22) $w_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q) a_t$

Estos modelos simbólicamente se representan como MA (O,q).

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

MODELOS AUTORREGRESIVOS Y DE PROMEDIOS MOVILES

En la mezcla de modelos autorregresivos y promedios móviles el valor de la variable w_t depende de sus valores resagados w_{t-1}, w_{t-2}, w_{t-3}, ... , w_{t-p}, de los valores de los errores pronosticados más recientes a_{t-1}, a_{t-2}, a_{t-3}, ... , a_{t-q} y del ruido blanco actual a_t . La ecuación que representa a éstos modelos es la siguiente :

$$w_t = \phi_1 w_{t-1} + \phi_2 w_{t-2} + .. + \phi_{t-p} w_{t-p} - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - .. - \theta_p a_{t-p} + a_t$$

que se puede expresar de la siguiente forma :

4.23) $(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - .. - \phi_p B^p)(1-B)^d Z_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - ... - \theta_q B^q) a_t$

La expresión 4.23) es la forma convencional de expresar a todos los modelos BOX - JENKINS o ARIMA. en la cual pueden representarse de una manera simple a través de la siguiente nomenclatura ARIMA (p,d,q), en donde p representa el número de coeficientes autorregresivos, para la serie rezagada Z_t, d el número del orden de las diferencias que se tienen que aplicar a Z_t para que ésta se vuelva serie estacionaria y q es el número de los coeficentes de los errores más recientes para los términos de promedios móviles.

Por lo que los modelos mencionados antes como AR (p,0), MA (0,q) y ARMA (p,q) en términos de modelos ARIMA (p,d,q) se expresan de la siguiente forma:

AR (p,0) ⇒ ARIMA (p.0,0) MA (0,q) ⇒ ARIMA (0,0,q)
ARMA (p,q) ⇒ ARIMA (p,0,q) y para cualquier modelo no estacionario su forma será ARIMA (p,d,q) .

Esencialmente en el estudio de los modelos ARIMA cuatro etapas deben de considerarse para llegar al desarrollo del modelo. Estas etapas son denominadas como : Identificación, Estimación, Diagnóstico y Pronóstico.

I) Identificación. El objetivo de esta etapa es seleccionar el modelo ARIMA que pueda ser más apropiado para la la serie de tiempo bajo estudio.

Los datos de la serie son utilizados para generar la función de autocorrelación y con ésta se puede hacer una comparación con ciertos modelos teóricos, cuya función de autocorrelación sea conocida y aquel modelo con el cual los datos u observaciones muestrales tengan un mejor parecido se selecciona e identificamos el modelo ARIMA. Aquí debemos hacer uso del principio de parsimonia y seleccionaremos el modelo que tenga el menor número de coeficientes.

II) Estimación. Seleccionado el modelo se procede a estimar los coeficientes ϕ_i y θ_j, en está estimación se deberán de obtener los coeficientes que tengan el mejor ajuste para los valores observados y que además la suma de los cuadrados de los residuales o errores sean los mínimos más posibles.

III) Diagnostico. Utilizando los resultados de los coeficientes, sus residuales son examinados, un buen ajuste será aquel en el cual los errores residuales esten distribuidos aleatoriamente con media cero y una varianza común, esto puede efectuarse utilizando la función de autocorrelación de los residuales.

IV) Pronósticos. Si se han cumplido los requisitos determinados por las etapas anteriores, se procede a efectuar los pronósticos, por regla general éstos se hacen a partir de la última observacion de la serie y se calculan a k periodos de tiempo hacia adelante, es decir se obtienen pronósticos para F_{t+1}, F_{t+2}, ..., F_{t+k}.

El siguiente esquema presenta el procedimiento a seguir al utilizar las cuatro etapas antes mencionadas:

DATOS U OBSERVACIONES
TOMADAS AL MISMO INTERVALO
DE TIEMPO

GRAFICA DE LOS DATOS
EXAMINAR LAS TRANSFORMACIONES
POSIBLES Y VER EFECTOS ESTACIONALES

SERIE BASE
OBTENER LA FUNCION DE AUTOCORRELACION

ESTACIONARIEDAD
DECIDIR EL ORDEN DE LAS DIFERENCIAS

SERIE DIFERENCIADA
OBTENER LA FUNCION DE AUTOCORRELACION

IDENTIFICAR EL MODELO

ESTIMAR LOS PARAMETROS

DIAGNOSTICO
EL MODELO ES EL ADECUADO

PRONOSTICO
EFECTUAR LOS PRONOSTICOS

IDENTIFICACION

Para determinar el tipo de modelo ARIMA (p,d,q) que mejor pueda representar a la serie de tiempo bajo estudio, una manera, es la de analizar la función de autocorrelación de la serie que está siendo identificada.

Las autocorrelaciones dan una medida de la relación que hay entre las series w_t, $w_{t-1}, \ldots,$ w_{t-k}. La autocorrelación con un rezago de k periodos de tiempo, es la correlación que existe entre las variables w_t y w_{t-k}. Los valores teóricos para las autocorrelaciones denominadas por ρ_k, en donde k = 0,1,2... son para $\rho_0 = 1$ y para los demás valores de k se tiene que : $-1 \leq \rho_k \leq 1$.

Por lo tanto la función de autocorrelación representa la relación de todos los valores de ρ_k sobre todos los valores del rango de k .

Las funciones de autocorrelación son únicas para cada modelo teórico desarrollado y éstas funciones son subsecuentemente utilizadas para identificar el modelo que sea más representativo para la serie de tiempo en proceso de estudio.

Como ya hemos mencionado en el capitulo 1, la covarianza entre dos variables se define como:

4.24) $$COV(X,Y) = E\,[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)$$ y el

coeficiente de correlación se expresa por la siguiente ecuación :

4.25) $$\rho = \frac{E\,[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]}{[\ \sigma_x^2 \quad \sigma_y^2\ ]^{\frac{1}{2}}}$$ ahora aplicando

la ecuación 4.25) a las variables w_t y w_{t-k} podemos obtener el coeficiente de correlación, que se puede representar por la siguiente ecuación:

$$\text{4.26)} \qquad \rho_k = \frac{E\,[w_t - \mu_v)(w_{t-k} - \mu_v)]}{[E\,[(w_t - \mu_v)^2(w_{t-k} - \mu_v)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

Aqui debemos de considerar que $E\,(w_t) = E\,(w_{t-k}) = \mu_v$ por ser la serie de tiempo estacionaria, y que además tambien se tiene que la varianza $Var\,(w_t) = \sigma_v^2 = E\,[(w_t - \mu_v)^2] = E\,[(w_{t-k} - \mu_v)^2]$ y la $COV(w_t, w_{t-k}) = COV(w_{t+m}, w_{t+m-k})$, por la razón antes mencionada. En el estudio de la series de tiempo es común utilizar el símbolo γ_k para denominar a las covarianza de w_t y w_{t-k} , entonces ahora se tiene que: $\gamma_k = COV(w_t, w_{t-k}) = E\,[(w_t - \mu_v)(w_{t-k} - \mu_v)]$, y si $k = 0$ entonces se tiene que $\gamma_o = E\,[(w_t - \mu_v)^2] = Var\,(w_t)$, por lo que ahora el coeficiente de correlación definido por 4.26), quedará expresado por la siguiente ecuación :

$$\text{4.27)} \qquad \rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_o}$$

es de suponerse que ésta ecuación unicamente está definiendo al coeficiente de correlación de una manera puramente teórica, por lo que ρ_k deberá de estimarse a través de los valores de las observaciones muestrales, por lo que la ecuación 4.26) deberá de calcularse por medio de la siguiente expresión :

$$\text{4.28)} \qquad \hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{t} (w_t - \bar{w})(w_{t-k} - \bar{w})}{\sum_{t=1}^{t} (w_t - \bar{w})^2} = r_k$$

Considerando que el número de observaciones en la serie de tiempo es grande, entonces las autocorrelaciones estimadas por 4.27), darán una función de autocorrelación muy aproximada a la función de autocorrelación real de la poblacion.

Es fácil ver que a partir de las definiciones de las funciones de autocorrelación tanto teóricas como estimadas, éstas son simétricas en sus valores obtenidos para un atraso o adelanto de la serie en un periodo de tiempo k por lo que $\rho_k = \rho_{-k}$. Por lo que unicamente es necesario graficar la función de autocorrelacion para los valores positivos de k.

Por supuesto es de utilidad determinar si una autocorrelación r_k estimada es cero, para poder asegurar que la ρ_k verdadera es cero.

En otras ocasiones es necesario probar que para $k > 0$, todas las autocorrelaciones son iguales a cero, si esto es cierto lo que se tiene en éstas series de tiempo un modelo que representa a un ruido blanco. Desde el punto de vista del análisis estádistico se tienen las siguientes pruebas de hipótesis:

Una prueba particular para cada ρ_k

4.29) $H_o : \rho_k = 0$ como hipótesis nula

$H_1 : \rho_k \neq 0$ como hipótesis alternativa.

Una prueba para todas las ρ_k

4.30) $H_o : \rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_k = 0$ como hipótesis nula

H_1 : al menos una $\rho_k \neq 0$ como hipótesis alternativa.

Para la prueba de hipótesis dada en 4.29) se utiliza la prueba de Barttlet, en ésta prueba se supone que si la serie de tiempo en estudio ha sido generada por un ruido blanco y que si tambien consiste de variables aleatorias independientes entonces los coeficientes de autocorrelación están distribuidos de una manera aproximadamente normal con una media igual a cero y una varianza igual $1/t$, en dondo t es el número de observaciones de la serie.

Para la prueba de hipótesis conjunta dada por 4.30) se utiliza la prueba de Box-Pierce, en donde se define un estadistico $Q = t \sum_{k=1}^{m} \rho_k^2$

y éste estadístico Q, tiene aproximadamente una distribución χ^2 con $m - p - q - d$ grados de libertad, para las pruebas antes mencionadas el nivel de significación es por práctica general del 10% .

Estacionalidad y la función de autocorrelación.

La función de autocorrelación además de informar si una serie de tiempo es estacionaria, también nos proporciona la información sobre la existencia de la "estacionalidad" en la serie de tiempo en estudio, por lo que ahora podemos definir los modelos ARIMA estacionales.
Los modelos ARIMA estacionales se representan a través de la siguiente simbología : ARIMA $(p,d,q)\ (P,D,Q)^{E}$ en donde
(p,d,q) se asignan a la parte no estacional del modelo.
(P,D,Q) se asignan a la parte estacional del modelo y E es el número de periodos de tiempo en los cuales la serie bajo estudio muestra un patrón de repetición o el efecto estacional.
Como ejemplo supongamos un modelo ARIMA $(1,1,1)\ (1,1,1)^4$. éste modelo queda representado de la siguiente manera:

$$(1 - \phi_1 B)\ (1 - \Phi_1 B^4)\ (1 - B)\ (1 - B^4)\ Z_t = (1 - \theta_1 B)\ (1 - \Theta_1 B^4)\ a_t$$

$(1 - \phi_1 B)$ es la parte autorregresiva no estacional de orden 1
$(1 - \Phi_1 B^4)$ es la parte autorregresiva estacional de orden 1
$(1 - B)$ es la diferencia no estacional
$(1 - B^4)$ es la diferencia estacional
$(1 - \theta_1 B)$ es la parte no estacional de promedios móviles de orden 1
$(1 - \Theta_1 B^4)$ es la parte estacional de promedios móviles de orden 1

Aquí estamos considerando un efecto estacional que se presenta a cada cuatro valores de las observaciones originales, por lo que estamos suponiendo que la serie consta de valores trimestrales y que el efecto estacional es anual, para el caso de observaciones mensuales el valor de E es de 12, y las ponderaciones para las partes autorregresivas y de promedios móviles serán de acuerdo al tipo de modelo ARIMA estacional bajo estudio.

El modelo anterior ARIMA (1,1,1) $(1,1,1)^4$ que hemos presentado como ejemplo quedará representado de una manera explícita como sigue:

$$\begin{aligned} Z_t = {} & (1 + \phi_1)\, Z_{t-1} + (1 - \Phi_1)\, Z_{t-4} - (1 - \phi_1 + \Phi_1 + \phi_1\Phi_1)\, Z_{t-5} \\ & + (\phi_1 + \phi_1\Phi_1)\, Z_{t-6} - \Phi_1 Z_{t-8} + (\Phi_1 + \phi_1\Phi_1)\, Z_{t-9} - \phi_1\Phi_1 Z_{t-8} \\ & + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \Theta_1 a_{t-4} + \theta_1\Theta_1 a_{t-5} \end{aligned}$$

por lo que en éste modelo los coeficientes ϕ_1, Φ_1, θ_1 y Θ_1 deberán estimarse a partir de las observaciones y después utilizar la forma explícita para obtener los pronósticos.

Funciones de autocorrelación para modelos ARIMA .

Ahora vamos a considerar algunos modelos ARIMA y se van a obtener sus respectivas funciones de autocorrelación. Los modelos que se van a estudiar son los siguientes : ARIMA (1,0,0), ARIMA (2,0,0), ARIMA (0,0,1), ARIMA (0,0,2).

ARIMA (1,0,0) éste modelo queda representado por la siguiente ecuación: 4.31) $w_t = \phi_1 w_{t-1} + a_t$ ahora multiplicando ésta última expresión por w_{t-1} se tiene 4.32) $w_t w_{t-1} = \phi_1 w_{t-1}^2 + a_t w_{t-1}$ tomado el valor esperado a la ecuación 4.32 se tiene:

$E\,[w_t\, w_{t-1}] = E\,[\phi_1 w_{t-1}^2 + a_t w_{t-1}]$ y efectuando las operaciones con el operador de valor esperado se tiene:

$E[w_t w_{t-1}] = COV(w_t, w_{t-1}) = \gamma_1$, $E[\phi_1 w^2_{t-1}] = \phi_1 E[w^2_{t-1}] = \phi_1 \sigma^2_v$

$E[a_t w_{t-1}] = E[a_t]\ E[w_{t-1}] = 0$ ahora sabiendo que la varianza de w_t es γ_0 entonces el coeficiente de correlación $\rho_1 = \gamma_1/\gamma_0$ por lo que se obtiene el valor dado a continuación: $\gamma_1 = \phi_1\ \gamma_0$

$$\rho_1 = \gamma_1/\gamma_0 = \phi_1\ \gamma_0/\gamma_0 = \phi_1$$

ahora considerando el caso más general tenemos la siguiente expresión

$E[w_t\ w_{t-k}] = E[\phi_1 w_{t-1} w_{t-k} + a_t w_{t-k}]$ ésta última relación da como resultado lo siguiente :

$$E[w_t\ w_{t-k}] = COV(w_t, w_{t-k}) = \gamma_k = \phi_1 COV(w_{t-1}, w_{t-k}) = \phi_1\ \gamma_{k-1}$$

ahora obteniendo el coeficiente de autocorrelación se tiene :

$\rho_k = \dfrac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi_1\ \dfrac{\gamma_{k-1}}{\gamma_0} = \phi_1\ \rho_{k-1}$ a partir de está expresión podemos obtener la función de autocorrelación para el modelo ARIMA (1,0,0)

4.33) $\rho_k = \phi_1^k$.

La función de autocorrelación para el modelo ARIMA (2,0,0) se obtiene de manera análoga, el modelo ARIMA (2,0,0) está dado por la ecuación siguiente : $w_t = \phi_1 w_{t-1} + \phi_2 w_{t-2} + a_t$ y multiplicándola por w_{t-1} se tiene: $w_t w_{t-1} = \phi_1 w^2_{t-1} + \phi_2 w_{t-2} w_{t-1} + a_t w_{t-1}$ y luego tomando el valor esperado de la expresión anterior se tiene :

$$E[w_t w_{t-1}] = E[\phi_1 w^2_{t-1} + \phi_2 w_{t-2} w_{t-1} + a_t w_{t-1}] =$$

$$COV(w_t, w_{t-1}) = \phi_1 \sigma^2_w + \phi_2 COV(w_{t-2} w_{t-1}) + E[a_t]\ E[w_{t-1}] =$$

$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_1$ esto implica que $\gamma_1(1 - \phi_2) = \phi_1 \gamma_0$

por lo que el coeficiente de correlación es :

$\rho_1 = \dfrac{\phi_1}{(1 - \phi_2)}$ ahora para el caso más general

se tiene que $w_t w_{t-k} = \phi_1 w_{t-1} w_{t-k} + \phi_2 w_{t-2} w_{t-k} + a_t w_{t-k}$ para $k > 1$ es decir para k = 2, 3...y el valor esperado de la expresión anterior es :

$$E[w_t w_{t-k}] = E[\phi_1 w_{t-1} w_{t-k} + \phi_2 w_{t-2} w_{t-k} + a_t w_{t-k}] =$$

$$COV(w_t, w_{t-k}) = \phi_1 COV(w_{t-1}, w_{t-k}) + \phi_2 COV(w_{t-2}, w_{t-k}) + E(a_t) E(w_{t-k}) =$$

$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2}$ por lo que la función de autocorrelación para el modelo ARIMA (2,0,0) es la siguiente expresión:

4.34) $$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2}$$

La función de autocorrelación para el modelo ARIMA (0,0,1) la obtenemos siguiendo los pasos anteriores, el modelo ARIMA (0,0,1) está dado por la siguiente ecuación :

$w_t = -\theta_1 a_{t-1} + a_t$ si multiplicamos miembro a miembro a ésta ecuación por w_t y por $-\theta_1 a_{t-1} + a_t$ tenemos lo siguiente

$w_t^2 = (-\theta_1 a_{t-1} + a_t)^2 = (\theta_1^2 a_{t-1}^2 -2\theta_1 a_{t-1} a_t + a_t^2)$ a está última ecuación le obtenemos el valor esperado :

$E [w_t^2] = E [(-\theta_1 a_{t-1} + a_t)^2 = (\theta_1^2 a_{t-1}^2 -2\theta_1 a_{t-1} a_t + a_t^2)]$ y da como resultado $\sigma_v^2 = (\theta^2 + 1) \sigma_a^2$ ahora considerando la siguiente relación $w_t w_{t-1} = (-\theta_1 a_{t-1} + a_t)(-\theta_1 a_{t-2} + a_{t-1})$ y tomando su valor esperado :

$$E [w_t w_{t-1}] = E [(-\theta_1 a_{t-1} + a_t)(-\theta_1 a_{t-2} + a_{t-1})]$$ tenemos

$$E [w_t w_{t-1}] = - \theta_1^2 E (a_{t-1} a_{t-2}) - \theta_1 E(a_{t-1}^2) - \theta_1 E(a_t a_{t-2}) + E(a_t a_{t-1})$$

en ésta expresión $E(a_{t-1}^2) = \sigma_a^2$ y los demás valores espertados son iguales a cero, y $E [w_t w_{t-1}] = COV(w_t, w_{t-1}) = \gamma_1$ por lo que

$\gamma_1 = - \theta_1 \sigma_a^2$ y teniendo en cuenta que la varianza de w_t es $\sigma_v^2 = (\theta^2 + 1) \sigma_a^2 = \gamma_0$ ahora ya podemos obtener el valor del coeficiente de correlación $\rho_1 = \gamma_1/\gamma_0$ por lo que sustituyendo sus respectivos valores se tiene que :

$$\rho_1 = \frac{- \theta_1}{\theta_1^2 + 1}$$

continuando de ésta manera tenemos ahora :

$w_t w_{t-2} = (-\theta_1 a_{t-1} + a_t)(-\theta_1 a_{t-3} + a_{t-2})$ y tomando su valor esperado se puede ver de manera sencilla que su valor es cero es decir que $E [w_t w_{t-2}] = 0$

Por lo que el valor de $\rho_2 = 0$ y es fácil demostrar que para valores de $k > 1$ la función de autocorrelación $\rho_k = 0$

Por último se va a obtener la función de autocorrelación para el modelo ARIMA (0,0,2) que está dado por

$w_t = -\theta_1 a_{t-1} \;\; -\theta_2 a_{t-2} + a_t$ la varianza para ésta expresión es $\gamma_0 = \sigma_v^2 = (\theta_1^2 + \theta_2^2 + 1) \sigma_a^2$ para obtener ρ_1 los siguientes tres pasos son considerados :

$$w_t w_{t-1} = (-\theta_1 a_{t-1} \;\; -\theta_2 a_{t-2} + a_t)(-\theta_1 a_{t-2} \;\; -\theta_2 a_{t-3} + a_{t-1})$$

tomado su valor esperado se obtiene la $COV(w_t, w_{t-1}) = \gamma_1$ y entonces

$\gamma_1 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) \sigma_a^2$ por lo que ahora el coeficiente de

de correlación $\rho_1 = \dfrac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$ para obtener ahora ρ_2 los pasos correspondientes son los siguientes :

$$w_t w_{t-2} = (-\theta_1 a_{t-1} \;\; -\theta_2 a_{t-2} + a_t)(-\theta_1 a_{t-3} \;\; -\theta_2 a_{t-4} + a_{t-2})$$

tomado su valor esperado se obtiene la $COV(w_t, w_{t-2}) = \gamma_2$ y entonces

$\gamma_2 = - \theta_2^2 \sigma_a^2$ por lo que ahora el coeficiente de

correlación $\rho_2 = \dfrac{- \theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$ y continuando de éste mismo modo se puede demostrar que para valores de $k > 2$, $\rho_k = 0$

ESTIMACION

En ésta parte, se debe proceder a estimar los parámetros del modelo ARIMA (p,d,q) no estacional, o ARIMA(p,d,q) $(P,D,Q)^{E}$ estacional. Estos coeficientes son estimados ya sea usando los métodos de mínimos cuadrados ordinarios o mínimos cuadrados no lineales.

El método de mínimos cuadrados ordinarios se utiliza para estimar los coeficientes de un modelo ARIMA (p,d,0) es decir soló para modelos autorregresivos puros de la siguiente forma:

$\hat{w} = \sum_{j=1}^{p} \hat{\phi}_j \, w_{t-j}$ el objetivo es obtener los valores de $\hat{\phi}_1 \ldots \hat{\phi}_p$ los cuales generan $\hat{w}_t$ y que dan la mínima suma de los errores residuales al cuadrado.

Entonces se trata de minimizar : $S(a) = \sum (w_t - \hat{w}_t)^2$ como ya hemos visto anteriormente a la expresión $S(a) = \sum (w_t - \hat{w}_t)^2$ se le obtienen sus derivadas parciales con respecto a cada $\hat{\phi}_j$ y se igualan a cero, es decir $\partial S(a)/\partial \hat{\phi}_j = 0$ obteniéndose las siguientes ecuaciones :

$$\sum w_t w_{t-1} = \hat{\phi}_1 \sum w_{t-1}^2 + \hat{\phi}_2 \sum w_{t-2} w_{t-1} + \ldots + \hat{\phi}_p \sum w_{t-p} w_{t-1}$$

$$\sum w_t w_{t-2} = \hat{\phi}_1 \sum w_{t-1} w_{t-2} + \hat{\phi}_2 \sum w_{t-2}^2 + \ldots + \hat{\phi}_p \sum w_{t-p} w_{t-2}$$

....

....

$$\sum w_t w_{t-p} = \hat{\phi}_1 \sum w_{t-1} w_{t-p} + \hat{\phi}_2 \sum w_{t-2} w_{t-p} + \ldots + \hat{\phi}_p \sum w_{t-p}^2$$

Por lo que se tiene un sistema que contiene p ecuaciones con p incognitas que son los coeficientes $\hat{\phi}_j$, y este sistema se puede resolver aplicando métodos matriciales.

Otro procedimiento para obtener los coeficientes para los modelos autorregresivos es a partir de la definición del coeficiente de autocorrelación :

Para un modelo ARIMA (p, 0, 0) estacionario o ARIMA (p, d, 0) no estacionario podemos representarlo de la siguiente forma :

4.35) $w_t = \phi_1 w_{t-1} + \phi_2 w_{t-2} + \phi_3 w_{t-3} + \ldots + \phi_p w_{t-p}$

multiplicando a 4.35) por w_{t-k} se tiene la ecuación:

4.36) $w_t w_{t-k} = \phi_1 w_{t-1} w_{t-k} + \phi_2 w_{t-2} w_{t-k} + \ldots + \phi_p w_{t-p} w_{t-k}$

ahora tomando el valor esperado a 4.37) se tienen las covarianzas :

4.37) $\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \ldots + \phi_p \gamma_{k-p}$ ahora dividiendo ésta última ecuación por la varianza γ_o se tiene el coeficiente de autocorrelación como función de sus propios coeficientes rezagados :

4.38) $\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \phi_3 \rho_{k-3} + \ldots + \phi_p \rho_{k-p}$ si ahora le damos valores a k = 1, 2, 3...p un sistema de ecuaciones se obtiene, a este sistema se le conoce como las ecuaciones de Yule-Walker :

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \phi_3 \rho_2 + \ldots + \phi_p \rho_{p-1}$$

$$\rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \phi_3 \rho_1 + \ldots + \phi_p \rho_{p-2}$$

$$\rho_3 = \phi_1 \rho_2 + \phi_2 \rho_1 + \phi_3 + \ldots + \phi_p \rho_{p-3}$$

....

....

$$\rho_p = \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \phi_3 \rho_{p-3} + \ldots + \phi_p$$

Los valores ρ_1, ρ_2, ..., ρ_p son teóricos por lo que son desconocidos, pero podemos usar sus respectivas estimaciones r_1, r_2, ... r_p para obtener las estimaciones $\hat{\phi}_1$, $\hat{\phi}_2$, ...$\hat{\phi}_p$. resolviendo el sistema de ecuaciones.

Supongamos que se tiene estimaciones de ρ_1 y de ρ_2 en un modelo AR(2) o ARIMA (2, d, 0), por lo que las ecuaciones de Yule - Walker son : $r_1 = \hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2 r_1$ $\qquad r_2 = \hat{\phi}_1 r_1 + \hat{\phi}_2$

resolviendo este sistema de ecuaciones se tiene :

$$\hat{\phi}_1 = \frac{r_1(1 - r_2)}{1 - r_1^2} \qquad \hat{\phi}_2 = \frac{r_2 - r_1^2}{1 - r_1^2}$$

Estimación de Modelos ARIMA (0,0,q) o ARIMA (0,d,q) no estacionario.

Un modelo ARIMA de promedios móviles de orden q, estacionario o no estacionario es representado por la siguiente ecuación :

4.39) $$W_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \theta_3 a_{t-3} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

ahora si rezagamos la ecuación 4.39) en k periodos de tiempo se tiene la ecuación 4.40) expresada de la forma siguiente :

$$W_{t-k} = a_t - \theta_1 a_{t-k-1} - \theta_2 a_{t-k-2} - \theta_3 a_{t-k-3} - \dots - \theta_q a_{t-k-q}$$

efectuando el producto de las ecuaciones antes mencionadas obtenemos

$$w_t w_{t-k} = [(a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \theta_3 a_{t-3} - \dots - \theta_q a_{t-q})] \times$$
$$[(a_t - \theta_1 a_{t-k-1} - \theta_2 a_{t-k-2} - \theta_3 a_{t-k-3} - \dots - \theta_q a_{t-k-q})]$$

y ahora tomando el valor esperado de la expresión obtenida del producto de $w_t w_{t-k}$ obtenemos la covarianza de estas variables. 4.41)

$$\gamma_k = E [(a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \theta_3 a_{t-3} - \dots - \theta_q a_{t-q}) \times$$
$$(a_t - \theta_1 a_{t-k-1} - \theta_2 a_{t-k-2} - \theta_3 a_{t-k-3} - \dots - \theta_q a_{t-k-q})] =$$

$$\gamma_k = E [(a_t a_{t-k} - \theta_1 a_t a_{t-k-1} - \theta_2 a_t a_{t-k-2} - \theta_3 a_t a_{t-3} - \dots - \theta_q a_t a_{t-k-q}$$
$$- \theta_1 a_{t-1} a_{t-k} + \theta_1^2 a_{t-1} a_{t-k-1} + \theta_1 \theta_2 a_{t-1} a_{t-k-2} + \dots + \theta_1 \theta_q a_{t-1} a_{t-k-q}$$
$$- \theta_2 a_{t-2} a_{t-k} + \theta_2 \theta_1 a_{t-2} a_{t-k-1} + \theta_2^2 a_{t-2} a_{t-3} + \dots + \theta_2 \theta_q a_{t-2} a_{t-k-q}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$- \theta_2 a_{t-2} a_{t-k} + \theta_2 \theta_1 a_{t-2} a_{t-k-1} + \dots + \theta_q^2 a_{t-2} a_{t-k-q})]$$

el valor esperado de la ecuación 4.41) depende de los valores de k de tal forma que si k = 0 obtenemos el siguiente resultado:

$$\gamma_0 = E(a_t a_{t-0}) + \theta_1^2 E(a_{t-1} a_{t-0-1}) + \dots + \theta_q^2 E(a_{t-q} a_{t-0-q})$$

por lo que el valor de la varianza del proceso MA(0,0,q) es :

4.42) $$\gamma_0 = \sigma_a + \theta_1^2 \sigma_a + \theta_2^2 \sigma_a + \dots + \theta_q^2 \sigma_a$$

si σ_a^2 lo tomamos como factor común tenemos que el valor de la varianza es :

4.43) $$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 + \ldots + \theta_q^2) \sigma_a^2$$

en general para k = k la ecuación 4.41) nos da como resultado el valor para γ_k que es el siguiente :

4.44) $$\gamma_k = (- \theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \theta_2 \theta_{k+2} + \ldots + \theta_{q-k} \theta_q) \sigma_a^2$$

como ya hemos visto el coeficiente de autocorrelación es $\rho_k = \gamma_k / \gamma_0$

por lo tanto la función de autocorrelación para un modelo ARIMA (0,0,q) está dada por :

4.45) $$\rho_k = \frac{(- \theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \theta_2 \theta_{k+2} + \ldots + \theta_{q-k} \theta_q)}{(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 + \ldots + \theta_q^2) \sigma_a^2}$$

si q = 1 la ecuación 4.45) nos da el siguiente resultado para un modelo ARIMA (0,0,1) :

4.46) $$\rho_1 = \frac{- \theta_1}{1 + \theta_1^2}$$ ésta ecuación puede resolverse para estimar el valor del coeficiente θ_1 , de tal forma que utilizando el valor de r_1 para estimar ρ_1 se tiene :

$r_1 \hat{\theta}_1^2 + \hat{\theta}_1 + r_1 = 0$ resolviendo ésta ecuación se obtiene el valor de estimado de θ_1 .

Para un modelo ARIMA (0,0,2) la función de autocorrelación nos da como resultado :

$$\rho_1 = \frac{- \theta_1 + \theta_1 \theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \qquad 4.47)$$

$$\rho_2 = \frac{- \theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \qquad 4.48)$$

Para un modelo ARIMA (0, 0, 3) la función de autocorrelación da como resultado las siguientes ecuaciones :

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_3}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \qquad 4.49)$$

$$\rho_2 = \frac{-\theta_2 + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \qquad 4.50)$$

$$\rho_3 = \frac{-\theta_3}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \qquad 4.51))$$

Las ecuaciones 4.47) y 4.48) utilizando las estimaciones para ρ_1 y ρ_2 por medio de sus autocorrelaciones muestrales r_1 y r_2, y resolviendo el sistema de ecuaciones resultante se obtienen las estimaciones para θ_1 y θ_2, lo mismo puede decirse para las ecuaciones 4.49), 4.50) y 4.51). Pero vemos que esté tipo de sistema de ecuaciones constituyen un sistema de ecuaciones simultaneas no lineales y sus solucióne s no son triviales. Por lo que se tienen que utilizar métodos numéricos para llegar a una solución aproximada.

Estimación de parámetros para modelos ARIMA (p, 0, q) estacionarios o ARIMA (p, d, q) no estacionarios.

Como ya hemos visto anteriormente un modelo ARIMA (p, d, q), es representado de la siguiente manera: 4.52)

$$w_t = \phi_1 w_{t-1} + \phi_2 w_{t-2} + .. + \phi_{t-p} w_{t-p} - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - .. - \theta_p a_{t-p} + a_t$$

si a la ecuación anterior la rezagamos k periodos se tiene la siguiente expresión : 4.53)

$$w_{t-k} = \phi_1 w_{t-k-1} + \phi_2 w_{t-k-2} + .. + \phi_{t-p} w_{t-k-p} +$$
$$\theta_1 a_{t-k-1} - \theta_2 a_{t-k-2} - .. - \theta_p a_{t-k-p} + a_{t-k}$$

Si efectuamos el producto de las ecuaciones representadas por 4.52) y 4.53) y después tomamos su valor esperado tenemos que la covarianza queda representada por la siguiente ecuación :

4.54) $$\gamma_k = \phi_1 E(w_t w_{t-k}) + \ldots + \phi_p E(w_{t-p} w_{t-k}) + E(a_t w_{t-k})$$
$$- \theta_1 E(a_{t-1} w_{t-k}) - \ldots - \theta_q E(a_{t-q} w_{t-k})$$

si $k > q$ los términos $E(a_t w_{t-k})$ son iguales a cero y si $k < q$ los errores pasados y los valores rezagados estarán correlacionados y las autocovarianza entonces dependerán por la parte correspondiente a los promedios móviles.

Para ver la aplicacion de la ecuación 4.54) unicamente vamos a estudiar el caso de un modelo ARIMA (1,0,1) o un modelo ARIMA (1,1,1) La varianza y autocovarianza para un modelo ARIMA (1,1,1) se obtienen de la manera siguiente :

$w_t = \phi_1 w_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1}$ y multiplicando a ésta expresión por la variable rezagada w_{t-k} se tiene :

$$w_t w_{t-k} = \phi_1 w_{t-1} w_{t-k} + a_t w_{t-k} - \theta_1 a_{t-1} w_{t-k} \qquad 4.55)$$

tomando el valor esperado a la ecuación 4.55), se tiene

$$E(w_t w_{t-k}) = \phi_1 E(w_{t-1} w_{t-k}) + E(a_t w_{t-k}) - \theta_1 E(a_{t-1} w_{t-k}) \qquad 4.56)$$

si $k = 0$ se tiene :

$E(w_t w_t) = \phi_1 E(w_{t-1} w_t) + E(a_t w_t) - \theta_1 E(a_{t-1} w_t)$ y como

$w_t = \phi_1 w_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1}$ se tiene que la varianza es :

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + E\,[(\phi_1 w_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1})a_t]$$
$$-\theta_1 E\,[(\phi_1 w_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1})a_{t-1}] \qquad 4.57)$$

el resultado de la ecuación 4.57) finalmente queda de la siguiente manera : $\quad \gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \sigma_a^2 - \theta_1 (\phi_1 - \theta_1) \sigma_a^2 \qquad 4.59)$

de manera semejante , si $k = 1$ se tiene que el resultado es :

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma_a^2 \qquad 4.60)$$

ahora resolviendo el sistema de ecuaciones formado por 4.59) y 4.60) para los valores de γ_o y γ_1 se tienen los siguientes resultados :

$$\gamma_o = \frac{1 + \theta_1^2 - 2\,\phi_1\theta_1}{1 - \theta_1^2} \qquad 4.61)$$

$$\gamma_1 = \frac{(1 - \phi_1\theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{1 - \theta_1^2} \qquad 4.62)$$

dividiendo γ_1 entre γ_o se tiene el coeficiente de correlacion

$$\rho_1 = \frac{(1 - \phi_1\theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{1 + \theta_1^2 - 2\,\phi_1\theta_1} \qquad 4.63)$$

finalmente si k = 2 la función de autocorrelación da como resultado $\rho_2 = \phi_1\rho_1$ o $\phi_1 = \rho_2 / \rho_1$ 4.64

ahora de las estimaciones de $\hat{\rho}_1 = r_1$ y de $\hat{\rho}_2 = r_2$ aplicando estos resultados a las ecuaciones 4.64) y 4.63) se pueden obtener los valores estimados de $\hat{\phi}_1$ y $\hat{\theta}_1$ pero la solución de la ecuación 4.63) no es sencilla y requiere la aplicación de métodos iterativos que resuelvan tal ecuación, un procediemiento muy común en el análisis de modelos ARIMA es utilizar el Algoritmo de *MARQUARDT*(*) el cual es de gran ayuda para la solución de sistemas de ecuaciones de mínimos cuadrados no lineales.

(*) Marquardt, D. W. - "An algorithm for least squares stimation of nolinear parameters". - Journal of the Society for Industrial and applied Mathematics. - Vol 11. - pag (431-441). - 1963

Ahora ya sabemos que la parte medular del análisis de series de tiempo por la metodología de BOX - JENKINS, es la estimación de los parámetros, así como la identificación del modelo misma que origina toda una concepción de bases y fundamentos que de alguna manera nos dan las pautas a seguir para la estimación de los parámetros del modelo en estudio, claro está que la solución de los sistemas de ecuaciones que resultan de estas suposiciones no son de fáciles de resolver. Una vez que se han obtenido las estimaciones pertinentes de los parámetros del modelo en estudio, es bueno verificar si cumplen con el principio de parsimonia, es decir que debemos obtener un modelo que contenga el menor numero de parámetros posibles, para esto vamos a ver que un modelo bajo estudio puede tener tantos o más parámetros si se hace bajo ciertas condiciones que otro que solo tenga algunas consideraciones que también expliquen el modelo.

Para poder mostrar mejor este hecho vamos a suponer que tengamos un modelo ARIMA (0,0,1) el cual está representado por :

$w_t = a_t - \theta_1 a_{t-1}$ ahora si lo resolvemos en términos de a_t nos queda representado por $a_t = w_t + \theta_1 a_{t-1}$, tambien a partir de ésta última relación tenemos $a_{t-1} = w_{t-1} + \theta_1 a_{t-2}$ y por último esta expresión la sustituimos en la expresión original del modelo ARIMA (0,0,1) y obtenemos $w_t = -\theta_1 w_{t-1} - \theta_1^2 a_{t-2} + a_t$ y continuando con la sustitución de a_{t-2}, a_{t-3}, etc ... tenemos que el modelo ARIMA (0,0,1) puede ser expresado como :

$$w_t = -\theta_1 w_{t-1} - \theta_1^2 w_{t-2} - \theta_1^3 w_{t-3} - \theta_1^4 w_{t-4} - \dots + a_t \qquad 4.65)$$

a la ecuación 4.65) se le llama la forma invertida de un modelo de promedios móviles, el cual es representado por un proceso autorregresivo con un número infinito de términos y sin ningún término de error rezagado.

En éste modelo de promedios móviles considerado el coeficiente θ_1 debe de tener algunas restricciones y ésta es que $|\theta_1| < 0$

APLICACIONES DEL METODO DE BOX - JENKINS

Para la aplicación del método de BOX - JENKINS vamos a utilizar la serie que en el capítulo anterior, nos sirvió para el modelo senoidal, ésta serie es la de los Ingresos por servicios turísticos, aquí vamos a tratar de aplicar las etapas que se tienen que llevar a cabo para poder determinar un Modelo de BOX - JENKINS.

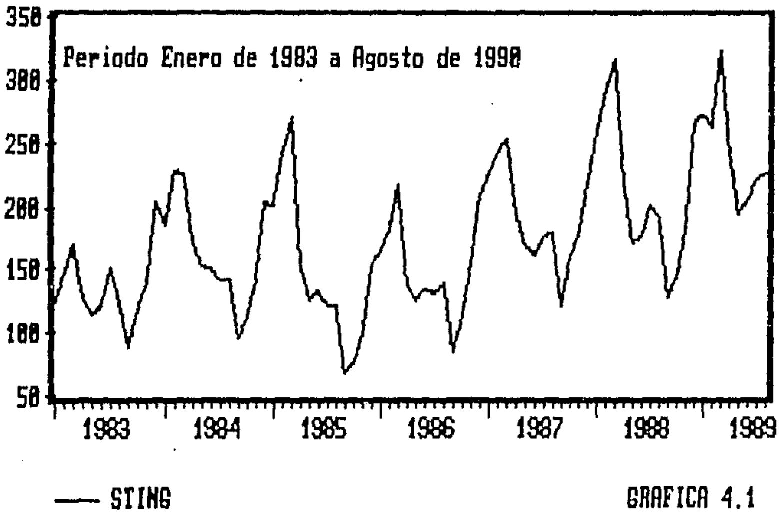
INGRESOS POR SERVICIOS TURISTICOS
(MILLONES DE DOLARES)

	1983	1984	1985	1986
ENE	122.50	185.40	200.80	164.10
FEB	146.70	229.10	242.80	181.50
MAR	168.50	227.40	269.70	218.20
ABR	128.40	171.60	154.90	138.50
MAY	114.70	152.20	126.70	125.20
JUN	120.40	151.30	133.00	134.90
JUL	149.80	142.00	120.00	129.80
AGO	123.00	142.20	121.30	138.60
SEP	88.50	96.50	68.70	83.40
OCT	119.20	111.40	74.90	114.40
NOV	139.00	142.00	98.10	154.70
DIC	203.00	202.30	152.70	208.60

	1987	1988	1989
ENE	226.40	257.70	272.30
FEB	242.40	293.70	262.40
MAR	254.90	316.50	322.80
ABR	194.90	219.80	241.30
MAY	168.40	172.00	194.80
JUN	161.40	174.90	206.70
JUL	176.60	200.20	221.70
AGO	177.10	192.50	227.00
SEP	120.00	128.20	
OCT	159.10	143.10	
NOV	176.30	180.80	
DIC	217.10	264.90	

Para comenzar con nuestro modelo, vamos primeramente a ver el comportamiento de su gráfica, para analizar si existe tendencia, o si la serie es estacionaria.

INGRESOS POR SERVICIOS TURISTICOS (MILLONES DE DOLARES)



GRAFICA 4.1

La gráfica (4.1) nos muestra que existe una ligera tendencia a lo largo del periodo de la serie bajo estudio. además que es notorio el efecto estacional, por razones que son bastante obvias dentro del sector de servicios turisticos

El paso siguiente es de identificar el tipo de modelo que se tratará de ajustar a nuestro caso de estudio, por lo cual se deben de obtener las autocorrelaciones y su función correspondiente, éstas fueron obtenidas usando el paquete computacional TSP versión 4.1 , los resultados se muestran a continuación, para ello se utilizó primeramente la serie original, nombrada para su tratamiento en el TSP como STING. (Gráfica. 4.2)

```
SMPL  1983.01 - 1989.08
80 Observations
IDENT STING
=================================================================
    Autocorrelations  Partial Autocorrelations        ac       pac
=================================================================
|           |********  |           |********  |  1   0.7543   0.7543
|           |*****     |        ***|          |  2   0.4580  -0.2550
|           |**        |           |          |  3   0.2362  -0.0146
|           |*         |          *|          |  4   0.0645  -0.0906
|          *|          |           |          |  5  -0.0556  -0.0458
|         **|          |         **|          |  6  -0.1823  -0.1778
|          *|          |           |***       |  7  -0.1225   0.3320
|           |          |          *|          |  8  -0.0483  -0.1370
|           |*         |           |**        |  9   0.0641   0.2476
|           |**        |           |**        | 10   0.2424   0.1882
|           |*****     |           |****      | 11   0.4577   0.3854
|           |*******   |           |**        | 12   0.6508   0.1506
|           |*****     |      *****|          | 13   0.4837  -0.5283
|           |**        |           |          | 14   0.2486   0.0158
|           |*         |          *|          | 15   0.0633  -0.1096
|          *|          |           |*         | 16  -0.0772   0.0883
|         **|          |           |          | 17  -0.1607  -0.0038
|        ***|          |           |          | 18  -0.2675   0.0295
|         **|          |           |          | 19  -0.2189  -0.0156
|         **|          |           |          | 20  -0.1509  -0.0236
=================================================================
 S.E. of Correlations  .1118034        Q-Stat. (20 lags)  165.0307
=================================================================
```

Observando los resultados y su respectiva gráfica se puede concluir que el efecto estacional está presente ya que la gráfica muestra onda senoidal completa, con un periodo aproximado de 12 meses, lo mismo puede decirse de las autocorrelaciones parciales .

Una vez identificado el modelo a considerar, se va a proponer el Modelo ARIMA $(0,0,0)(1,0,1)^{12}$, es decir vamos a considerar que la serie es estacionaria y que no requiere de ninguna diferencia para que cumpla los requisitos de estacionariedad y solo existe la diferencia estacional.

Entonces el modelo bajo estudio sera :

$$(1 - \Phi_1 B^{12}) y_t = (1 - \Theta_1 B^{12}) a_t$$

Que puesto en una forma explicita es de la forma siguiente :

$y_t - \Phi_1 y_{t-12} = a_t - \Theta_1 a_{t-12}$ por lo que el modelo tendrá como coeficientes Φ_1 y Θ_1. Utilizando el paquete del TSP. se obtuvieron las siguientes estimaciones de los parámetros :

$$\hat{\Phi}_1 = 1.0759408 \quad y \quad \hat{\Theta} = - 0.8709330$$

Por lo que las estimaciones para los pronósticos se dan de acuerdo a la siguiente ecuación :

$$\hat{y} = 1.0759408\ \hat{y}_{t-12} + \hat{a}_t + 0.8709330\ \hat{a}_{t-12} \qquad (4.66)$$

$\hat{y}_{t-12}$ representa los valores de la serie original rezagados por un periodo de 12 meses.

$\hat{a}_t$ representa los valores de los residuales, que resultan al resolverse el modelo.

$\hat{a}_{t-12}$ representa los valores de los residuales rezagados por un periodo de 12 meses.

En la tabla de resultados STING representa a los valores y_t AT1 representa a los valores de a_t y ZT a los valores del pronóstico $\hat{y}$.

Los pronósticos para después de Agosto de 1989, se consideran que los errores aleatorios (residuales) tienen como valor esperado $E(a_t) = 0$, y para obtener éstos se utiliza la ecuación (4.66).

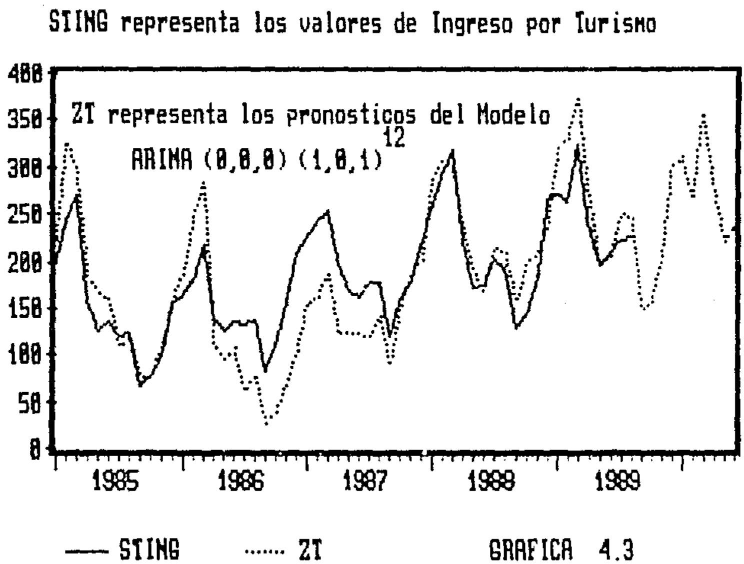
Las siguientes tablas muestran los resultados obtenidos al efectuar las estimaciones de los parámetros con el TSP.

La gráfica (4.3) presenta la serie Ingresos por Turismo y sus respectivos pronósticos. (En TSP , STING es la serie ingresos por servicios turisticos y ZT sus pronósticos).

SMPL 1984.01 - 1989.08
68 Observations
LS // Dependent Variable is STING
Convergence achieved after 15 iterations

VARIABLE	COEFFICIENT	STD. ERROR	T-STAT.	2-TAIL SIG.
MA(12)	-0.8709330	0.1217392	-7.1540902	0.000
AR(12)	1.0759408	0.0464244	23.176169	0.000

R-squared	0.818385	Mean of dependent var	180.5412
Adjusted R-squared	0.815633	S.D. of dependent var	57.28890
S.E. of regression	24.59870	Sum of squared resid	39936.35
Durbin-Watson stat	0.463403	Log likelihood	-313.2560


STING representa los valores de Ingreso por Turismo
ZT representa los pronosticos del Modelo
ARIMA (0,0,0) (1,0,1)
12
400
350
300
250
200
150
100
50
0
1985
1986
1987
1988
1989
STING
ZT
GRAFICA 4.3

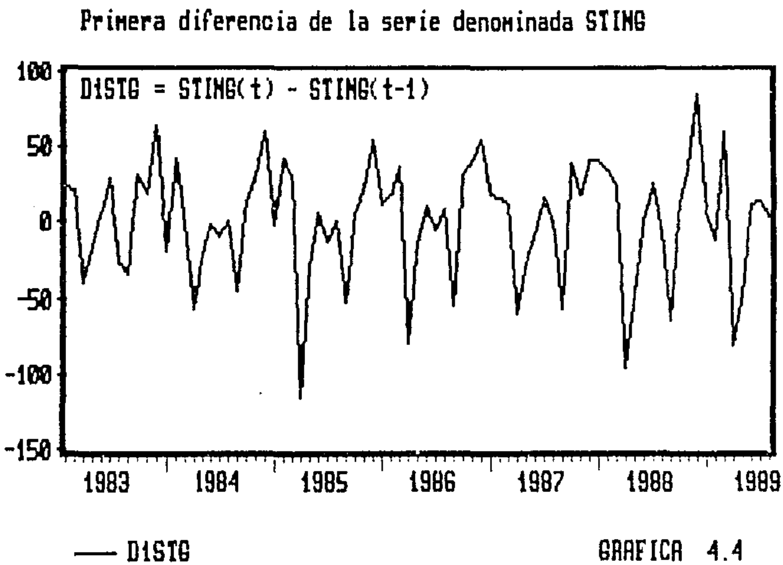
obs	STING	AT1	ZT
1983.01	122.5000	NA	NA
1983.02	146.7000	NA	NA
1983.03	168.5000	NA	NA
1983.04	128.4000	NA	NA
1983.05	114.7000	NA	NA
1983.06	120.4000	NA	NA
1983.07	149.8000	NA	NA
1983.08	123.0000	NA	NA
1983.09	88.50000	NA	NA
1983.10	119.2000	NA	NA
1983.11	139.0000	NA	NA
1983.12	203.0000	NA	NA
1984.01	185.4000	12.71789	NA
1984.02	229.1000	47.93827	NA
1984.03	227.4000	14.23032	NA
1984.04	171.6000	14.69582	NA
1984.05	152.2000	21.25794	NA
1984.06	151.3000	13.92482	NA
1984.07	142.0000	-6.720275	NA
1984.08	142.2000	-3.758287	NA
1984.09	96.50000	3.291305	NA
1984.10	111.4000	0.388032	NA
1984.11	142.0000	4.964012	NA
1984.12	202.3000	3.546599	NA
1985.01	200.8000	12.39701	222.9529
1985.02	242.8000	38.05299	326.3021
1985.03	269.7000	37.42474	294.4873
1985.04	154.9000	-16.93238	180.4981
1985.05	126.7000	-18.54385	163.7285
1985.06	133.0000	-17.66226	157.2552
1985.07	120.0000	-40.37837	104.8104
1985.08	121.3000	-34.97199	114.7536
1985.09	68.70000	-32.26178	74.43301
1985.10	74.90000	-44.62185	75.57591
1985.11	98.10000	-50.36027	106.7466
1985.12	152.7000	-61.87398	158.8777
1986.01	164.1000	-41.15194	185.6939
1986.02	181.5000	-46.59683	247.7832
1986.03	218.2000	-39.38681	283.3889
1986.04	138.5000	-42.91019	109.0061
1986.05	125.2000	-27.27223	92.89893
1986.06	134.9000	-23.58278	104.1347
1986.07	129.6000	-34.47974	59.46630
1986.08	138.6000	-22.36888	77.68348
1986.09	83.40000	-18.61498	27.20430
1986.10	114.4000	-5.050610	36.67472
1986.11	154.7000	5.289785	66.97915
1986.12	208.6000	-9.584237	100.8238

obs	STING	AT1	ZT
1987.01	226.4000	13.99752	154.7188
1987.02	242.4000	6.534029	161.2346
1987.03	254.9000	-14.17355	186.2935
1987.04	194.9000	8.510297	120.1562
1987.05	168.4000	9.939922	120.8954
1987.06	161.4000	-4.283432	120.3220
1987.07	176.6000	6.913339	116.5409
1987.08	177.1000	8.491943	138.1347
1987.09	120.0000	14.05414	87.57520
1987.10	159.1000	31.61364	150.3025
1987.11	176.3000	14.45901	185.5141
1987.12	217.1000	-15.68848	200.4055
1988.01	257.7000	26.29792	282.0818
1988.02	293.7000	38.58267	305.0814
1988.03	316.5000	29.89848	291.8116
1988.04	219.8000	17.51105	234.6238
1988.05	172.0000	-0.531416	189.3140
1988.06	174.9000	-2.487426	167.4388
1988.07	200.2000	16.20980	212.2421
1988.08	192.5000	9.346793	207.2918
1988.09	128.2000	11.32731	152.6804
1988.10	143.1000	-0.548821	198.1667
1988.11	180.8000	3.704471	205.9857
1988.12	264.9000	17.64963	237.5728
1989.01	272.3000	17.93376	318.1075
1989.02	262.4000	-20.00091	329.6058
1989.03	322.8000	8.304302	374.8792
1989.04	241.3000	20.05916	271.8019
1989.05	194.8000	9.275359	193.8743
1989.06	206.7000	16.35158	202.3672
1989.07	221.7000	20.41439	249.9355
1989.08	227.0000	28.02183	243.2809

Ahora consideraremos un modelo que contemple una diferencia de primer orden, y se va definir la primera diferencia como :

$\nabla y_t = (1 - B) y_t = w_t$ en el TSP se tiene definida como D1STG = $STING_t - STING_{t-1}$. Con el objeto de que la serie bajo estudio sea estacionaria.

La gráfica de ésta nueva serie se da a continuación :



GRAFICA 4.4

En el análisis de la gráfica (4.4) se puede observar que existe efecto estacional por periodos aproximadamente de 12 meses misma que ya se había considerado anticipadamente por el tipo de datos que se están analizando.

De los resultados obtenidos de las correlaciones y su función correspondiente se contempla el efecto estacional ya que las autocorrelaciones sufren una contracción rápida desde el inicio y después de un periodo de 12 meses aproximadamente vuelven crecer y decaer nuevamente. (Gráfica 4.5)

```
SMPL  1983.02 - 1989.08
79 Observations
IDENT DISTG
==========================================================================
     Autocorrelations  Partial Autocorrelations          ac        pac
==========================================================================
:            |*        :           |*         :  1    0.1177    0.1177
:           *|         :         **|          |  2   -0.1388   -0.1548
:           *|         :          *|          :  3   -0.1216   -0.0878
:           *|         :          *|          |  4   -0.1387   -0.1396
:            |         :           |          |  5   -0.0228   -0.0221
:        ****|         :       ****|          :  6   -0.3584   -0.4319
:            |         :           |          :  7   -0.0489   -0.0065
:           *|         :        ***|          :  8   -0.0951   -0.3393
:           *|         :         **|          :  9   -0.0899   -0.2398
:           *|         :      *****|          | 10   -0.0532   -0.4693
:            |*        :        ***|          : 11    0.0827   -0.2752
:            |*******  :           |****      : 12    0.7305    0.4329
:            |**       :           |          : 13    0.1610   -0.0319
:           *|         :           |          : 14   -0.0953    0.0391
:           *|         :           |          : 15   -0.1186   -0.0327
:          **|         :           |          : 16   -0.1528   -0.0308
:            |         :           |          : 17    0.0036    0.0078
:         ***|         :          *|          : 18   -0.3272   -0.0698
:            |         :           |*         : 19   -0.0264    0.0976
:            |         :           |*         : 20   -0.0171    0.0820
==========================================================================
 S.E. of Correlations  .1125088           Q-Stat. (20 lags)  74.2107
==========================================================================
```

Gráfica 4.5

Con la identificación que hemos hechos del modelos a través de de su análisis, propondrémos un modelo ARIMA (0,1,0) $(1,0,1)^{12}$

Ahora el modelo bajo estudio será :

$$(1 - B) (1 - \Phi_1 B^{12}) y_t = (1 - \Theta_1 B^{12}) a_t$$

que tratándolo de una manera algebraica se tiene :

$$(1 - B - \Phi_1 B^{12} + \Phi_1 B^{13}) y_t = (1 - \Theta_1 B^{12}) a_t$$

ahora éste modelo puesto en forma explícita es :

$$y_t = y_{t-1} + \Phi_1 (y_{t-12} - y_{t-13}) - \Theta_1 a_{t-12} + a_t$$

El modelo tendrá como coeficientes Φ_1 y Θ_1 cuyas estimaciones fueron obtenidas por el TSP. y los resultados son los siguiente :

$$\hat{\Phi}_1 = 1.0496130 \quad \text{y} \quad \hat{\Theta} = - 0.8135594$$

Por lo que la ecuación de pronósticos es la dada por : (4.67)

$$\hat{y}_t = \hat{y}_{t-1} + 1.0496130 (\hat{y}_{t-12} - \hat{y}_{t-13}) + 0.8135594 \hat{a}_{t-12} + \hat{a}_t$$

$\hat{y}_{t-12}$ y $\hat{y}_{t-13}$ representan a los valores de la serie estimada y rezagados por un periodo de 12 y 13 meses respectivamente.

$\hat{a}_t$ representa los valores de los residuales, que resultan al resolverse el modelo.

$\hat{a}_{t-12}$ representa los valores de los residuales rezagados por un periodo de 12 meses.

En la tabla de resultados STING representa a los valores y_t AT2 representa a los valores de a_t, XT a los valores del pronóstico $\hat{y}$, y WT a los pronósticos de la primera diferencia.

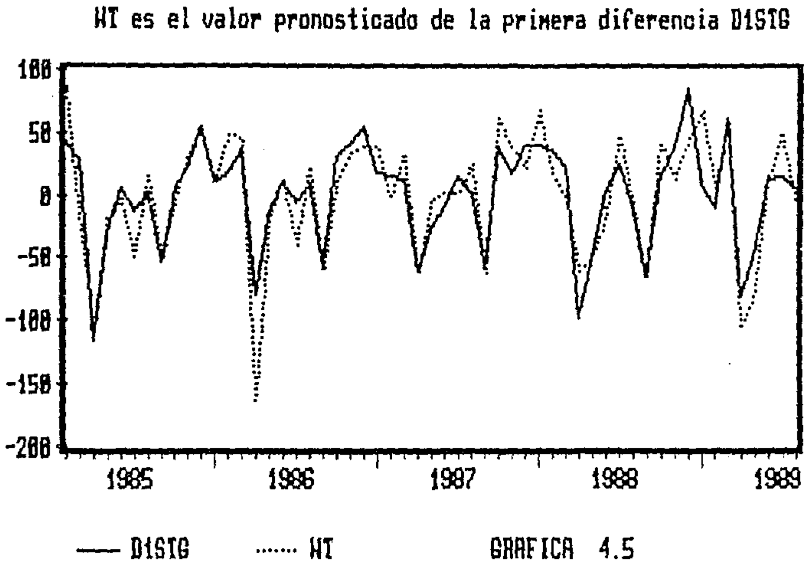
Los pronósticos para después de Agosto de 1989, se consideran que los errores aleatorios (residuales) tienen como valor esperado $E(a_t) = 0.$, y para obtener éstos se utiliza la ecuación (4.67).

Un resumen de los resultados al analizar éste modelo se da a continuación.

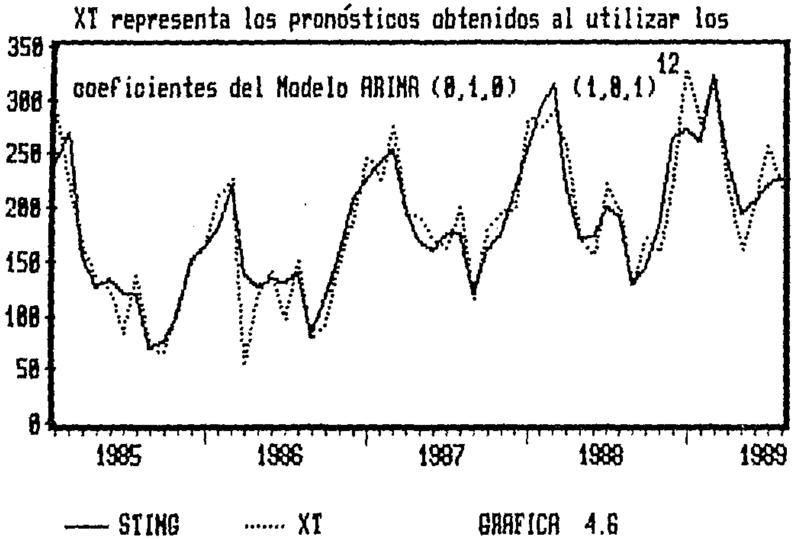
```
SMPL  1984.02 - 1989.08
67 Observations
LS // Dependent Variable is D1STG
Convergence achieved after 8 iterations
```

VARIABLE	COEFFICIENT	STD. ERROR	T-STAT.	2-TAIL SIG.
MA(12)	-0.8135594	0.1586215	-5.1289348	0.000
AR(12)	1.0496130	0.1143727	9.1771272	0.000

R-squared	0.842641	Mean of dependent var	0.620896
Adjusted R-squared	0.840220	S.D. of dependent var	40.09636
S.E. of regression	16.02752	Sum of squared resid	16697.28
Durbin-Watson stat	2.380417	Log likelihood	-279.9322

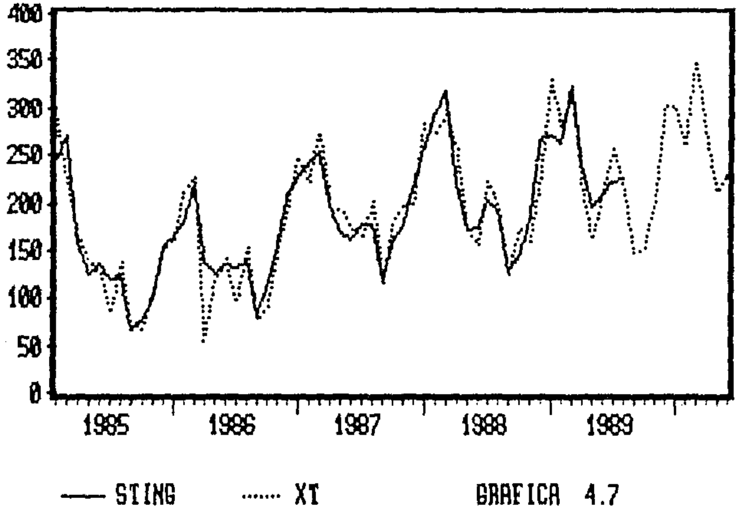

HT es el valor pronosticado de la primera diferencia D1STG
100
50
0
-50
-100
-150
-200
1985
1986
1987
1988
1989
D1STG
HT

GRAFICA 4.5


XT representa los pronósticos obtenidos al utilizar los
coeficientes del Modelo ARIMA (0,1,0) (1,0,1)12
350
300
250
200
150
100
50
0
1985
1986
1987
1988
1989
STING
XT

GRAFICA 4.6

Pronósticos para XT de Septiembre de 1989 a Junio de 1990

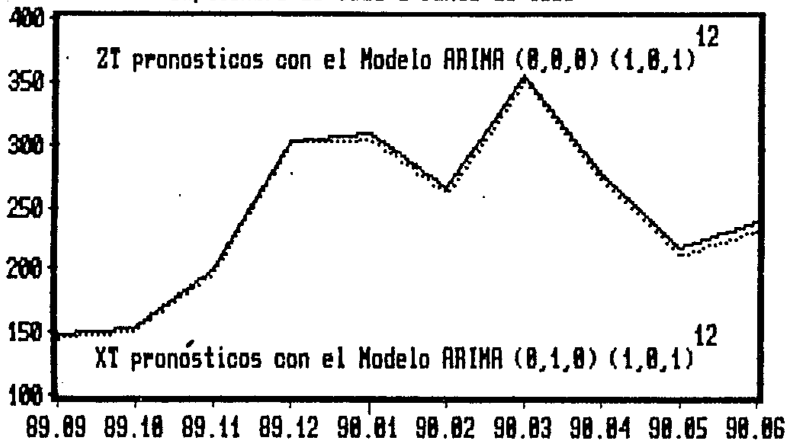


GRAFICA 4.7

obs	STING	DISTG	AT2	WT	XT
1983.01	122.5000	NA	NA	NA	NA
1983.02	146.7000	24.20000	NA	NA	NA
1983.03	168.5000	21.80000	NA	NA	NA
1983.04	128.4000	-40.10001	NA	NA	NA
1983.05	114.7000	-13.70000	NA	NA	NA
1983.06	120.4000	5.700005	NA	NA	NA
1983.07	149.8000	29.40000	NA	NA	NA
1983.08	123.0000	-26.80000	NA	NA	NA
1983.09	88.50000	-34.50000	NA	NA	NA
1983.10	119.2000	30.70000	NA	NA	NA
1983.11	139.0000	19.80000	NA	NA	NA
1983.12	203.0000	64.00000	NA	NA	NA
1984.01	185.4000	-17.60001	NA	NA	NA
1984.02	229.1000	43.70001	26.44672	NA	NA
1984.03	227.4000	-1.700012	-29.60168	NA	NA
1984.04	171.6000	-55.79999	4.402211	NA	NA
1984.05	152.2000	-19.40001	4.780671	NA	NA
1984.06	151.3000	-0.899994	-6.517767	NA	NA
1984.07	142.0000	-9.300003	-22.88729	NA	NA
1984.08	142.2000	0.199997	8.076323	NA	NA
1984.09	96.50000	-45.70000	0.249545	NA	NA
1984.10	111.4000	14.90000	-6.263487	NA	NA
1984.11	142.0000	30.60000	4.383695	NA	NA
1984.12	202.3000	60.30000	-2.497266	NA	NA
1985.01	200.8000	-1.500000	-1.404059	NA	NA
1985.02	242.8000	42.00000	17.64788	85.03196	285.8320
1985.03	269.7000	26.90001	4.601635	-21.26545	221.5346
1985.04	154.9000	-114.8000	-52.65015	-107.6371	162.0629
1985.05	126.7000	-28.20000	-3.948139	-20.42128	134.4787
1985.06	133.0000	6.300003	1.942058	-4.305178	122.3948
1985.07	120.0000	-13.00000	-21.85876	-50.24033	82.75967
1985.08	121.3000	1.300003	7.660652	14.44114	134.4411
1985.09	68.70000	-52.60001	-4.429676	-52.19397	69.10603
1985.10	74.90000	6.200005	-14.53495	-3.991436	64.70857
1985.11	98.10000	23.20000	-5.351761	30.33279	105.2328
1985.12	152.7000	54.60000	-10.72334	50.53665	148.6367
1986.01	164.1000	11.40001	11.83214	9.115435	161.8154
1986.02	181.5000	17.39999	-12.32616	46.11519	210.2152
1986.03	218.2000	36.70000	12.20910	44.18740	225.6874
1986.04	138.5000	-79.70000	-2.038446	-165.3680	52.03193
1986.05	125.2000	-13.30000	13.08704	-19.72409	118.7759
1986.06	134.9000	9.699997	4.667411	12.85996	138.0600
1986.07	129.8000	-5.099991	-9.238424	-40.66679	94.23320
1986.08	138.6000	8.800003	13.66790	21.26480	151.0648
1986.09	83.40000	-55.20001	-3.594159	-62.40762	76.19239
1986.10	114.4000	31.00000	12.66735	7.349910	90.74991
1986.11	154.7000	40.30000	11.59500	31.59205	145.9921
1986.12	208.6000	53.90001	-12.13293	36.45186	191.1519

obs	STING	DISTG	AT2	WT	XT
1987.01	226.4000	17.79999	15.46054	37.05229	245.6523
1987.02	242.4000	16.00000	-12.29132	-4.056129	222.3439
1987.03	254.9000	12.50000	-16.08797	32.36565	274.7657
1987.04	194.9000	-60.00000	21.99575	-63.31680	191.5832
1987.05	168.4000	-26.50000	-1.893060	-5.205828	189.6942
1987.06	161.4000	-7.000000	-13.38403	0.594429	168.9944
1987.07	176.6000	15.20001	13.03702	0.167996	161.5680
1987.08	177.1000	0.500000	2.383050	22.73930	199.3393
1987.09	120.0000	-57.10001	-2.085425	-62.94813	114.1519
1987.10	159.1000	39.10001	16.86765	59.71129	179.7113
1987.11	176.3000	17.20000	-15.66618	36.06644	195.1664
1987.12	217.1000	40.80000	-25.64501	21.05828	197.3583
1988.01	257.7000	40.60001	34.49498	65.75615	282.8561
1988.02	293.7000	36.00000	9.206474	16.00056	273.7006
1988.03	316.5000	22.79999	-3.408688	-3.377046	290.3230
1988.04	219.8000	-96.70000	-15.82836	-60.91029	255.5897
1988.05	172.0000	-47.80000	-21.52537	-50.88023	168.9198
1988.06	174.9000	2.899994	-0.641415	-18.87741	153.1226
1988.07	200.2000	25.30000	19.95226	46.51278	221.4128
1988.08	192.5000	-7.699997	-6.286050	-3.822491	196.3775
1988.09	128.2000	-64.30000	-6.063708	-67.69324	124.8068
1988.10	143.1000	14.90001	-12.41703	42.34568	170.5457
1988.11	180.8000	37.70000	6.901289	-12.20926	155.3093
1988.12	264.9000	84.09999	20.41204	42.37251	223.1725
1989.01	272.3000	7.399994	-7.150590	63.52742	328.4274
1989.02	262.4000	-9.899994	-40.19605	5.080033	277.3800
1989.03	322.8000	60.39999	33.69566	54.85365	317.2536
1989.04	241.3000	-81.49999	7.120267	-107.2546	215.5454
1989.05	194.8000	-46.50000	-13.84067	-81.52434	159.7757
1989.06	206.7000	11.89999	8.334290	10.85633	205.6563
1989.07	221.7000	15.00000	4.677142	47.46470	254.1647
1989.08	227.0000	5.300003	8.267944	-4.928148	216.7719
1989.09	NA	NA	0.000000	NA	144.3486
1989.10	NA	NA	0.000000	NA	149.8858
1989.11	NA	NA	0.000000	NA	195.0708
1989.12	NA	NA	0.000000	NA	299.9497
1990.01	NA	NA	0.000000	NA	301.8994
1990.02	NA	NA	0.000000	NA	258.8064
1990.03	NA	NA	0.000000	NA	349.6164
1990.04	NA	NA	0.000000	NA	269.8657
1990.05	NA	NA	0.000000	NA	209.7985
1990.06	NA	NA	0.000000	NA	229.0693

Comparacion de los pronósticos del periodo
Septiembre de 1989 a Junio de 1990



—— ZT ······ XT

GRAFICA 4.8

Como ya hemos visto a través de la aplicación de la metodologia para series de tiempo de Box - Jenkins, se ha descrito el proceso para la construcción de un modelo adecuado para la serie temporal del Ingreso por Servicios Turisticos.

Ya que por medio de éste renglón importante se obtienen divisas que son necesarias para el desarrollo de nuestro pais.

En la construcción del modelo, se ha tratado que con la aplicación se tenga una idea precisa, de las bondades de ésta metodología. Por lo que se llegó a la identificación de dos modelos que se pueden ajustar a las observaciones dadas en el periodo Enero de 1983 a Agosto de 1989 de la serie de tiempo Ingresos por turismo.

La comparación de ellos se puede observar precisamente en los pronósticos que se obtienen al efectuar el desarrollo de cada uno de éstos modelos. (ver gráfica 4.8)

A nivel de aplicación podemos decir que por los pocos parámetros que fueron estimados, cumplieron el principio de parsimonia y que son lo bastante aceptables ambos para efectuar pronósticos.

Unicamente queda por aclarar que se podrían haber efectuado un sin número de identificaciones y estimaciones de modelos para esta misma serie de tiempo, pero que al final se tendría que adoptar la decisión de sólo considerar aquellos que tuvieran el mínimo de parámetros en sus respectivas estimaciones.

C O N C L U S I O N E S

CONCLUSIONES

En el desarrollo del presente trabajo hemos visto que en la interpretación de los fenómenos económicos que envuelven a la sociedad en su conjunto, éstos mismos tienen su efecto a través de movimientos que socialmente se traducen en variables cuantitativas, que en su mayoría tratan de comprobarse por medio de la Teoría Económica, y el *Economista* es un profesional que debe de tomar decisiones para un mejoramiento de la sociedad, por lo que éste debe tener un amplio conocimiento de la herramienta básica que le le ayude a la interpretación de los fenómenos económicos; siendo que las Matemáticas son en si tal herramienta.

Todo *Economista* en si tiene que tener los conocimientos mínimos y necesarios dentro del aspecto de las Matemáticas, especialmente aquellas que le sirvan para tomar e interpretar decisiones que sean de utilidad, tales como los principios del Análisis Matemático, Algebra Lineal, Probabilidad y Estadistica.

Por lo que en éste breve trabajo se dejó ver como prioridad para los que profesen la carrera de Economía, los puntos más importantes y relevantes del instrumental matemático.

Siendo las series de tiempo una de las maneras de interpre-las variables económicas, éstas mismas deben de estudiarse, y fomentar su uso como herramienta de apoyo en cualquier toma de decisiones.

En el desarrollo del contenido de las series de tiempo, de éste trabajo, vimos que se pueden usar metódos simplos para que a través de éstos se puedan efectuar pronósticos, asimismo se dió una revisión a otras metodologias de analisis de series de tiempo, comenzando con el método tradicional o de descomposición con el propósito de considerar posteriormente otros métodos, los cuales sus bases y principios no son de uso común, pero en sus aplicaciones llegan a ser muy efectivos, como lo son los métodos de suavizamiento exponencial, terminando con el método más ampliamente usado, que en sus principios y bases utiliza la teoría de Probabilidad y Estadística en grado óptimo, siendo éste método la técnica de BOX - JENKINS.

Con respecto a la metodología de BOX - JENKINS, pudimos apreciar las bondades que ofrece, para poder utilizarse como una manera de obtener buenos pronósticos.

Ahora que también es de tomar en consideración que en la actualidad, para poder utilizar las series de tiempo como un instrumento de ayuda en las decisiones, es necesario tener como un instrumento de trabajo las computadoras personales, ya que en el manejo de la gran cantidad de datos, se tiene que hacer uso de programas o softwares disponibles que evitan una serie de cálculos largos. En el presente trabajo se utilizaron los paquetes o softwares para computadoras personales siguientes : LOTUS, TSP y RATS y el procesador de textos CHIWRITER mismo con que fue escrito el presente trabajo, esto último debe considerarase como una necesidad para el *Economista* en la actualidad.

B I B L I O G R A F I A

1 NERLOVE, GRETHER CARVALHO — Análisis de Series Temporales Económicas.- Fondo de Cultura Económica.- Mexico.D.F. 1988

2 BAUMOL. W.J — Teoria Económica y Análisis de Operaciones.- Ed. Herrero Hnos.- México.D.F.- 1976

3 ZBGNIEW. K — Técnicas de Planificación Macroecónomica.- Ed. Trillas.- México.D.F.- 1988

4 MADDALA. G.S — Econometria.- McGraw-Hill de México. México.D.F.- 1985

5 PYNDYCK. R.S RUBINFELD — Econometric Models and Forecast.- McGraw-Hill Book Co.- Singapur. Malasia.- 1988

6 GUJARATI. D — Econometria Básica.- McGraw-Hill de Mexico.- México.D.F.- 1986

7 WHELL. W MAKRIDAKIS. S — Forecasting Methods of Management.- J. Wiley and Sons.- New York. USA.- 1983

8 BROWN. R.G — Smoothing Forescasting and Prediction of discrete Time Series.- Prentice-Hall Inc.- Englewood Cliffs.- New Jersey. USA.- 1973

9 VANDAELE. W — Applied Time Series and Box Jenkins Models.- Academic Press.- N.H. USA.- 1975

10 COLIN. G.J — Metodos Matemáticos para Economistas.- McGraw-Hill Latinoamericana.- Bogotá. Colombia .- 1982

11 GUERRERO. V — Modelos Estadisticos para Series de Tiempo Univariadas.- CINESTAV. IPN.- 1987

12 BOX. G.E.P — Time Series Analysis, Forecasting and Control.- Holden-Day.- San Francisco. Cal USA.- 1970

13 THOMOPOULOS. N.T — Applied Forecasting Methods.- Prentice-Hall Inc.-Englewood Cliffs.- N.Jersey. USA..-1980

14 BANCO DE MEXICO — Indicadores Económicos.

15 SRIA. DE PROG. y PRESUPUESTO — Cuadernos de Información Oportuna.- INEGI