

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

FORMULACIÓN HAMILTONIANA DE LA RELATIVIDAD GENERAL

Tesis que para obtener el grado de
FISICO
presenta

CARLOS ARTURO SOTO CAMPOS

PÁG. DE ORIGEN

Junio de 1990



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Introducción

El propósito del presente trabajo ha sido proveer una introducción amplia de la bibliografía existente en la formulación hamiltoniana de la relatividad general. Además, a lo largo de la tesis se incluyen algunas derivaciones bastante novedosas en los casos en que se consideró que la bibliografía no era suficientemente clara. Con este objetivo en mente introducimos un primer capítulo en el que se discute con detalle el encajamiento de una superficie en una variedad de dimensión mayor. Aquí se introduce el escenario y mucho de la notación que se utilizará más adelante. Son establecidos los conceptos de derivada covariante inducida así como curvatura intrínseca de la superficie vía la métrica inducida. Asimismo la curvatura extrínseca está dada, como veremos, a través de los vectores normales a la superficie (los cuales dependen de la métrica del espacio-tiempo). Esta parte tiene como objeto mostrar hasta que punto la geometría de la variedad es "recuperada" en una vecindad de la superficie. Adicionalmente se da una derivación de las ecuaciones de Gauss-Codazzi-Mainardi (GCM), las cuales como se verá, están determinadas por la geometría intrínseca y extrínseca de la superficie. Veremos como, para el caso de una hipersuperficie dichas ecuaciones determinan varias componentes de las ecuaciones de Einstein.

En el capítulo 2., por otra parte, se discute Los Principios Variacionales, lo cual cae un poco fuera de la línea seguida en esta tesis. La razón que tenemos para introducir este capítulo es que los conceptos involucrados en esta parte, tales como los términos de superficie en la acción gravitacional, serán discutidos más tarde. En particular veremos que en el caso de una región de integración cerrada no siempre podemos despreciar dichos términos de superficie y esto dependerá de que campos fijemos en la frontera de la región. En el caso que estudiaremos tenemos que añadir a la acción gravitacional el *término de Hawking* el cual depende, como veremos, de la traza de la curvatura extrínseca integrada sobre la frontera. La técnica desarrollada aquí para encontrar las ecuaciones de Einstein será utilizada subsecuentemente.

El capítulo 3 es dedicado a discutir la formulación hamiltoniana de la relatividad general tal como fue concebida por Arnowitt, Deser y Misner [5] y Dirac por su parte. No obstante, el enfoque es más moderno. Esta es, en efecto, la parte medular de la tesis. Veremos que dicha formulación hamiltoniana requiere del rompimiento del espacio-tiempo en espacio y tiempo (foliación). En efecto, el primer paso es elegir una función "tiempo" que marca a hipersuperficies de tipo espacial. La foliación entonces define un campo vectorial t^μ en el espacio-tiempo. El campo t^μ puede interpretarse como describiendo el flujo del tiempo. El siguiente paso es encontrar las proyecciones de t^μ tangentes y normal a las hipersuperficies. A estas proyecciones se les da el nombre de funciones *lapse* y función

shift respectivamente y constituyen, junto con la métrica inducida a las hipersuperficies, lo que se conoce como *variables ADM*. El procedimiento descrito rompe claramente la covariancia lo cual provocó que mucha gente se mostrara renuente a aceptarlo. No obstante este método permite separar las constricciones de las ecuaciones de movimiento. Se puede ahora reescribir a la acción de la relatividad general en términos de las variables ADM. Lo que encontraremos para la hamiltoniana de la gravitación es que está constituida por dos funcionales que son puramente constricción. Siguiendo la denominación de Wheeler llamaremos a estas constricciones el superhamiltoniano y supermomento. Además se discute el álgebra que satisfacen estas constricciones.

Al final de este capítulo se incluye una discusión sobre el espacio-tiempo asintóticamente plano, en la que se sigue el enfoque de *Regge y Teitelboim* [10]. Se verá en particular, que el término que debemos agregar a las constricciones para recobrar un hamiltoniano diferenciable es justamente la energía ADM.

Los marcos de referencia móviles (tétradas ó vielbein) son introducidos en el capítulo 4. Casi toda esta sección puede leerse sin necesidad de haber estudiado los primeros tres capítulos. En efecto, la vielbein es introducida por primera vez aquí y la exposición detallada hace innecesario un estudio previo. Como en el cap.1, los objetos matemáticos más complejos como por ejemplo la curvatura, son introducidos después de haber fijado una derivada covariante asociada con la métrica. Además, al estudiar la curvatura y la torsión de la vielbein y su relación con las respectivas estructuras en el espacio-tiempo, surgen de manera natural las así llamadas ecuaciones de Estructura de Cartan. Solamente en las dos últimas secciones de este capítulo se hace referencia a resultados derivados anteriormente. En particular se dá una derivación alternativa de las ecuaciones de GCM y se vuelve a estudiar los principios variacionales utilizando la representación de la vielbein.

El capítulo 5 es un poco extenso. Comienza introduciendo los espinores $SL(2, C)$. De manera análoga a como se hizo en la parte de El Formalismo de la Vielbein, al principio de este capítulo se dan algunos resultados básicos del álgebra de los espinores, para luego introducir conceptos más importantes como la derivada covariante espinorial así como la curvatura asociada a esta derivada. Como en secciones anteriores, queremos encontrar una expresión para la acción que involucre a la representación espinorial. En la sección Variables de Ashtekar se discute nuevamente los principios variacionales (variación a la Palatini).

Convenciones y Signos

A lo largo de esta tesis seguiremos la convención usual de los signos utilizada por ejemplo por Robert M. Wald en su libro *General Relativity*. Para la métrica del espacio-tiempo usamos la signatura $-+++$. Únicamente en la sección de Variables de Ashtekar usaremos la convención alternativa $+- - -$. La razón es que muchos de los artículos y libros de texto usan esta signatura cuando se trabaja con espinores.

La derivada covariante asociada a la métrica de espacio-tiempo será denotada por D_μ . En el capítulo 1 usaremos indistintamente $\nabla_b V^a$ ó $V^a|_b$ para designar a la derivada covariante inducida sobre la superficie encajada en una variedad de dimensión mayor. La convención para el tensor de Riemann es $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\rho\mu} \Gamma^\rho_{\beta\nu} - (\mu \leftrightarrow \nu)$. Así, el tensor de Riemann sobre la superficie está construido con la métrica inducida ${}^{n-1}R^a{}_{bcd} = \partial_c \gamma^a_{bd} + \gamma^a_{ce} \gamma^e_{bd} - (c \leftrightarrow d)$. En la sección de El Formalismo de la Vielbein usamos $R^a{}_{b\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu{}^a{}_b + \omega_\mu{}^a{}_c \omega_\nu{}^c{}_b - (\mu \leftrightarrow \nu)$. La diferencia entre los índices latinos a, b, \dots para denotar a objetos en el subespacio tangente a la superficie (capítulo 1) y para denotar índices de la vielbein será lo suficientemente clara en cada caso, y haremos uso de la notación adicional $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$ para índices de la vielbein únicamente en el caso en que pueda haber lugar a confusión. En este contexto, usaremos D_μ para denotar tanto la derivada covariante de la vielbein como la derivada covariante espinorial, en el entendido de que no habrá lugar a dudas.

Utilizaremos también los símbolos ∇ y ${}^S\nabla$ para los operadores derivada covariante espinorial $SU(2)$ y de Sen en la última sección. No obstante, no existe la posibilidad de confusión con la derivada espacial inducida que mencionamos arriba.

Un último comentario en relación a las unidades es que en esta tesis usamos unidades en las que $G = \frac{1}{16\pi}$. Únicamente en la sección de Variables de Ashtekar del capítulo 5, usamos unidades en las que $G = 1$.

CAPITULO 1

Encajamiento de una Superficie en una Variedad

Introducción

En este capítulo estudiamos una superficie encajada en una variedad de dimensión mayor que para nuestros propósitos será el espacio-tiempo. El principal objetivo es exhibir hasta qué punto la geometría del espacio-tiempo en una vecindad de la superficie se puede reconstruir conociendo la geometría intrínseca (la cual depende de la métrica inducida) y la geometría extrínseca (que depende de las normales). Esta información es resumida en las ecuaciones de Gauss-Codazzi-Mainardi las cuales vamos a derivar aquí. La utilidad de la presente discusión se pondrá de manifiesto en el capítulo siguiente cuando consideremos la descomposición del espacio-tiempo en espacio y tiempo.

Consideremos una superficie general m de dimensión d que está descrita por el encajamiento [1] en el espacio-tiempo M de dimensión n localmente dada por:

$$x^\mu = X^\mu(\xi^a) \quad (1.1)$$

donde x^μ ($\mu = 0, \dots, N-1$) son coordenadas en M y ξ^a ($a = 0, 1, \dots, d$) son coordenadas en m . Sea $g_{\mu\nu}(x)$ la métrica en el espacio-tiempo M , tal que $\text{sign } g = (-, +, \dots, +)$. Estrictamente hablando, deberíamos distinguir entre *immersions* y *embeddings* — un *embedding* es una *immersion* inyectiva (es decir que la superficie tiene prohibido "cruzarse" a sí misma). Asumiremos también que nuestra encajamiento es suficientemente diferenciable de manera que las estructuras usuales del análisis tensorial puedan ser inducidas en la superficie. La métrica inducida en m está dada considerando la restricción a la superficie del elemento de línea ds^2 :

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \Big|_m \\ &= g_{\mu\nu}(X(\xi)) \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^b} d\xi^a d\xi^b \\ &\equiv \gamma_{ab}(\xi) d\xi^a d\xi^b \end{aligned} \quad (1.2)$$

de tal manera que la métrica inducida* es

$$\gamma_{ab} = g_{\mu\nu} X_a^\mu X_b^\nu$$

* Una posibilidad que no consideraremos es el caso en que m ya está dotada con una métrica q_{ab} . La *embedding* es isométrica si la métrica inducida γ_{ab} coincide con q_{ab} .

donde denotamos $X_a^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a}$ a los campos vectoriales de espacio-tiempo tangentes a las curvas coordenadas de tipo espacial ξ^a .

En la formulación hamiltoniana de la Relatividad General estamos interesados en hipersuperficies de tipo espacial ($d = N-1$ y $\text{sign } \gamma = (+, +, \dots, +)$).

Sin embargo tendremos presente que hay otras posibilidades físicamente interesantes incluyendo por ejemplo la teoría de cuerdas. En este caso $d = 2$ y m es de tipo temporal con $\text{sign } \gamma = (-, +)$. En efecto la acción de Nambu para la cuerda es simplemente el área barrida :

$$\int d^2 \xi \sqrt{-\gamma(\xi)}$$

En el caso de la gravitación, la acción es

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4 x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda)$$

y requeriremos la descomposición del escalar de Ricci de espacio-tiempo R en términos de cantidades definidas con respecto a una familia de hipersuperficies $x^\mu = X^\mu(\xi^a, t)$.

Denotemos ahora por $T_x M$ al espacio tangente a M en el punto x . Los d vectores* $\{X_a^\mu\}_{a=1, \dots, d}$ forman una base para el subespacio de $T_x M$ tangente a la superficie, $T_\xi m$ lo cual corresponde a la base coordenada para la hipersuperficie $\{\partial_{\xi^a}\}$. Lo anterior se ilustra en la figura 1 dada a continuación:

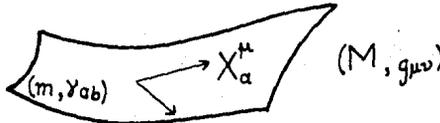


Fig. 1.1. Base de los d vectores X_a^μ para el subespacio tangente $T_\xi m$.

Para completar la base para $T_x M$ construimos el complemento ortogonal $(T_\xi m)^\perp$ de $T_\xi m$ con respecto a la métrica de espacio-tiempo $g_{\mu\nu}$. Este subespacio de $T_x M$ es generado por los $(n-d)$ vectores normales $\{\eta_i^\mu\}_{i=1, \dots, n-d}$ satisfaciendo

$$g_{\mu\nu} \eta_i^\mu X_a^\nu = 0 \quad (1.3)$$

y que están normalizados de modo que

$$g_{\mu\nu} \eta_i^\mu \eta_j^\nu = \eta_{ij}, \quad (1.4)$$

donde $\eta_{ij} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ en el caso en que m es de tipo espacial. Las ecuaciones (1.2) y (1.3) involucran a la métrica $g_{\mu\nu}$. Por lo tanto la definición de las normales depende de

* Estrictamente deberíamos denotarlos por $X_a^\mu \partial_\mu$.

la métrica. Sin embargo estas condiciones no determinan a las normales en forma única. Hay $(N-d)d$ ecuaciones del tipo (1.2) y $\frac{1}{2}(N-d)(N-d+1)$ del tipo (3) o $\frac{1}{2}(N-d)(N+d+1)$ en total. Por otro lado el número de componentes η_i^μ por determinar es $N(N-d)$, tal que $\frac{1}{2}(N-d)(N-d-1)$ componentes no están determinadas. Este es de hecho el número de generadores de $O(N-d-1, 1)$, el grupo de Lorentz en $N-d$ dimensiones lo cual depende únicamente del número de las normales y corresponde a la libertad de rotar las componentes de una $N-d$ ada entre sí mismas. En el caso de una hipersuperficie ($d = N-1$) esta libertad se pierde. Permanece sin embargo la libertad de orientar a las normales $(\pm\eta^\mu)$.

Para puntos en la superficie el conjunto $\{X_a^\mu, \eta_i^\nu\}_{a=1, \dots, d; i=1, \dots, N-d}$ forma ahora una base para vectores tangentes en M . El espacio $T_x M$ puede ser reexpresado como una suma directa $T_\xi m \oplus (T_\xi m)^\perp$. Podemos entonces expresar cualquier vector A^μ en $T_x M$:

$$A^\mu = \bar{A}^a X_a^\mu + \bar{A}^i \eta_i^\mu \quad (1.5)$$

Usando ahora las ecuaciones (2),(3) y (4) encontramos que

$$\bar{A}_i = A_\mu \eta_i^\mu \quad \text{y} \quad \bar{A}_a = A_\mu X_a^\mu. \quad (1.6a)$$

Los índices i, j, k (a, b, c) son subidos con η^{ij} (γ^{ab}) y bajados con η_{ij} (γ_{ab}) esto es $\bar{A}^i = \eta^{ij} \bar{A}_j$ y $\bar{A}_i = \eta_{ij} \bar{A}^j$ ($\bar{A}^a = \gamma^{ab} \bar{A}_b$ y $\bar{A}_a = \gamma_{ab} \bar{A}^b$). En particular si A^μ es tangente a la superficie m

$$A^\mu = \bar{A}^a X_a^\mu, \quad (1.6b)$$

lo que es otra afirmación de la identificación de $T_\xi m$ con el subespacio de $T_x M$ tangente a m . Vale la pena remarcar que las \bar{A}^i y \bar{A}^a son escalares de espacio tiempo. Esto es porque \bar{A}^a y \bar{A}^i son obtenidos mediante la contracción del vector A^μ con los vectores X_a^μ y η_i^μ . Tensores de rango mayor pueden ser expandidos análogamente. Por ejemplo un tensor de segundo rango contravariante $B^{\mu\nu}$ puede ser expresado

$$B^{\mu\nu} = \bar{B}^{ij} \eta_i^\mu \eta_j^\nu + \bar{B}^{ia} \eta_i^\mu X_a^\nu + \bar{B}^{ai} X_a^\mu \eta_i^\nu + \bar{B}^{ab} X_a^\mu X_b^\nu. \quad (1.7a)$$

y de la misma forma que antes encontramos que

$$\bar{B}_{ab} = B_{\mu\nu} X_a^\mu X_b^\nu, \quad \bar{B}_{ai} = B_{\mu\nu} X_a^\mu \eta_i^\nu, \quad \bar{B}_{ia} = B_{\mu\nu} \eta_i^\mu X_a^\nu, \quad \text{y} \quad \bar{B}_{ij} = B_{\mu\nu} \eta_i^\mu \eta_j^\nu. \quad (1.7b)$$

En particular para $g_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ab} &\equiv g_{\mu\nu} X_a^\mu X_b^\nu = \gamma_{ab}, \\ \bar{g}_{ia} &= 0 = \bar{g}_{ai}, \\ \bar{g}_{ij} &= g_{\mu\nu} \eta_i^\mu \eta_j^\nu, \quad \text{y} \quad \bar{g}_{ij} = \eta_{ij} \end{aligned} \quad (1.8a)$$

de manera que

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= \gamma^{ab} X_a^\mu X_b^\nu + \eta^{ij} \eta_i^\mu \eta_j^\nu \\ &\equiv h^{\mu\nu} + \eta^{ij} \eta_i^\mu \eta_j^\nu \end{aligned} \quad (1.8b)$$

$h^{\mu\nu}$ es la primera forma fundamental o *tensor de proyección* sobre m , y es obtenido a partir de γ_{ab} promoviendo ésta como un tensor de espacio-tiempo. Usando la ec.(1.8) se ve fácilmente que $h^{\mu\nu}$ satisface las propiedades de una proyección: su producto con la normal es cero, su cuadrado es ella misma y tiene como traza la dimensión del espacio en el cual proyecta, es decir

$$h^{\mu}_{\nu} \eta^{\nu}_i = 0 \quad (1.9a)$$

$$h^{\mu}_{\nu} h^{\nu}_{\rho} = h^{\mu}_{\rho} \quad (1.9b)$$

$$h^{\mu}_{\mu} = d \quad (1.9c)$$

Supongamos que elegimos como coordenadas en m d coordenadas de M , $\xi^a = x^a$ —las llamaremos *coordenadas adaptadas*. Entonces $\gamma_{ab} = g_{ab}$; mientras que la forma covariante de las normales $\eta_{\mu i}$ tiene componentes espaciales idénticamente cero. Uno debería distinguir entre \bar{g}_{ab} y g_{ab} . La primera expresión, definida en la ecuación (8a) se refiere a sistemas de coordenadas generales tanto en el espacio-tiempo como en la superficie. El segundo se refiere a los elementos de $g_{\mu\nu}$ en un sistema general de coordenadas de espacio-tiempo cuando las coordenadas adaptadas son usadas en m . Subsecuentemente omitiremos la barra en las proyecciones. La situación a la cual nos referimos será (esperamos) suficientemente clara en el contexto en el que nos encontremos trabajando.

La forma contravariante de la proyección es simplemente

$$h^{\mu\nu} = \delta_a^{\mu} \delta_b^{\nu} \gamma^{ab}, \quad (1.10)$$

Por otra parte las formas covariante de la proyección $h_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} h^{\alpha\beta}$ y contravariante de la normal η^{μ} no son tan simples.

Derivadas covariantes inducidas

La derivada covariante en TM asociada con la conexión $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ induce una derivada covariante en el subespacio $T_{\xi}m$ dada por

$$\nabla_b V^a \equiv V^a|_b \equiv X_{\mu}^a X_b^{\nu} V^{\mu};_{\nu}, \quad (1.11)$$

donde $V^{\mu} \equiv X_a^{\mu} V^a$ y $X_a^{\mu} = g_{\mu\nu} \gamma^{ab} X_b^{\nu}$. Esto involucra levantar el vector V^a en $T_{\xi}m$ sobre $T_x M$ tomando entonces su derivada covariante ahí y finalmente proyectar $V^{\mu};_{\nu}$ de regreso sobre la superficie. Podemos reescribir la ecuación (11) de la forma

$$V^a|_b = V^a_{,b} + \gamma_{cb}^a V^c \quad (1.12a)$$

donde

$$\gamma_{bc}^a \equiv X_{\mu}^a X_{b;\nu}^{\mu} X_c^{\nu} \quad (1.12b)$$

y hemos usado el hecho de que V^a satisface que su derivada covariante es exactamente una derivada normal i.e. $V^a_{;\mu} = V^a_{,\mu}$ y como resultado $X_b^{\nu} V^a_{;\nu} = V^a_{,b}$. La ecuación (12b) puede reescribirse

$$\begin{aligned} \gamma_{abc} &\equiv \gamma_{ad} \gamma_{bc}^d \\ &= \Gamma_{\mu\nu\alpha} X_a^{\mu} X_b^{\nu} X_c^{\alpha} + g_{\mu\nu} X_a^{\mu} X_{b,c}^{\nu} \end{aligned} \quad (1.12c)$$

de manera que, en coordenadas adaptadas, γ_{abc} es simplemente Γ_{abc} . Sin embargo debe notarse que γ_{bc}^a no está relacionada de una manera simple con Γ_{bc}^a . Antes de proceder a la derivación de las ecuaciones de Gauss y Weingarten hagamos algunos comentarios acerca de la geometría de la variedad M y de su análogo en la superficie.

Si la condición métrica se satisface en M ($g_{\mu\nu;\gamma} = 0$) entonces también será satisfecha en la superficie m (i.e. $\gamma_{abc} = 0$). La manera más simple para ver esto es aplicar directamente la definición (11) usando la ec.(8) y la ortogonalidad de X_a^μ y η_i^μ

$$\begin{aligned}\gamma_{ab|c} &= X_a^\mu X_b^\nu X_c^\alpha h_{\mu\nu;\alpha} \\ &= X_a^\mu X_b^\nu X_c^\alpha (g_{\mu\nu} - \eta_{ij} \eta_\mu^i \eta_\nu^j)_{;\alpha} \\ &= 0.\end{aligned}\tag{1.13}$$

Si además asumimos que la torsión ($T_{bc}^a = \Gamma_{bc}^a - \Gamma_{cb}^a$) es igual a cero en M tal que $\Gamma = \Gamma_{Christoffel}$ entonces se sigue de la ec.(1.13c) que

$$\gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} \gamma^{ad} (\gamma_{db,c} + \gamma_{dc,b} - \gamma_{bc,d}),\tag{1.14}$$

Esto es, que γ es la conexión de Christoffel sobre m . Recuperamos entonces las propiedades que esperaríamos. En este caso tendríamos justamente bien definida la derivada covariante directamente en términos de la métrica inducida γ_{ab} . En general cuando la torsión $T_{\alpha\beta}^\gamma$ no es cero tendremos

$$\gamma_{ab}^c = \gamma_{ab}^c{}_{Christoffel} - C_{ab}^c\tag{1.15}$$

donde

$$\begin{aligned}C_{ab}^c &= X_\mu^c X_a^\alpha X_b^\beta C_{\alpha\beta}^\mu \\ y \\ C_{\alpha\beta}^\mu &= -(\Gamma_{\alpha\beta}^\mu - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu{}_{Christoffel}) \\ &= \frac{1}{2} (T_{\alpha\beta}^\mu - T_{\beta\alpha}^\mu + T^\mu{}_{\alpha\beta}).\end{aligned}$$

Vemos que la torsión heredada por la superficie es justamente la proyección de la torsión $T_{\alpha\beta}^\mu$ en M .

A continuación estudiamos un resultado muy importante de la geometría diferencial. Con este propósito consideremos ahora los d^2 vectores de espacio-tiempo X_{ab}^μ definidos por

$$X_{ab}^\mu \equiv X_b^\nu X_{a;\nu}^\mu\tag{1.16}$$

Como antes, podemos expandir [2] los X_{ab}^μ en la base $\{X_a^\mu, \eta_i^\mu\}$

$$X_{ab}^\mu = A_{ab}^c X_c^\mu + B_{ab}^i \eta_i^\mu.\tag{1.17}$$

Esto es la generalización de la primera de las ecuaciones de *Frenet Serret* para una curva. En este caso suponemos que $T^\mu \equiv \frac{dX^\mu}{dt}$ es la velocidad a lo largo de la curva $x^\mu = X^\mu(t)$, entonces la aceleración covariante $\dot{T}^\mu \equiv T^\nu T^\mu{}_{;\nu}$ está dada por $\dot{T}^\mu = \alpha T^\mu + \beta^i \eta_i^\mu$. La ec.(1.17) representa la proyección de la derivada covariante de X_a^μ a lo largo de la curva

cuya tangente es X_b^μ en términos de los vectores de la base. En la literatura matemática ésta es referida como la *ecuación de Gauss*, y fue examinada en un principio en el contexto de una superficie de dos dimensiones encajada en \mathbb{R}^3 . La figura 2 abajo ilustra la situación.

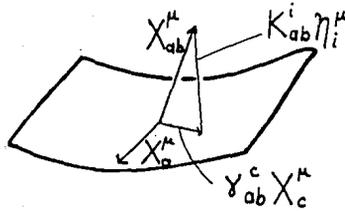


Fig. 1.2. Interpretación geométrica de la ecuación de Gauss.

Encontramos ahora para los coeficientes de la ec.(1.17) que

$$\begin{aligned} A_{ab}^c &= X_a^\mu X_{b;\mu}^\nu X_c^\nu \\ &\equiv \gamma_{ab}^c, \end{aligned} \quad (1.18)$$

y

$$\begin{aligned} B_{ab}^i &= \eta_\mu^i X_{a;\nu}^\mu X_b^\nu \\ &= -X_a^\mu X_{b;\mu}^\nu \eta_{\nu i} \\ &\equiv K_{ab}^i. \end{aligned} \quad (1.19)$$

De manera que podemos reescribir la ecuación 17 (ecuación de Gauss) como

$$X_{ab}^\mu = \gamma_{ab}^c X_c^\mu + K_{ab}^i \eta_i^\mu. \quad (1.17b)$$

Mientras que en el caso de una curva podemos elegir un parámetro afín tal que $g_{\mu\nu} T^\mu T^\nu = 1$, lo que implica $\alpha = 0$ en la ecuación de Frenet-Serret (figura 3), no hay parametrizaciones correspondientes para superficies de mayor dimensión.

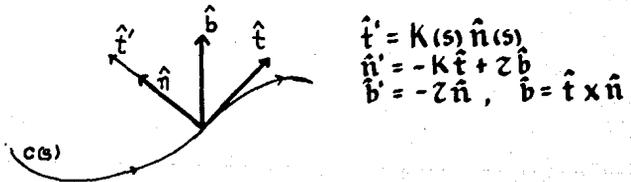


Fig. 1.3. Ecuaciones de Frenet-Serret para una curva. En este caso podemos elegir $t^\mu t_\mu = 1$.

K_{ab}^i es la i -ésima curvatura extrínseca o segunda forma fundamental. Esto es menos la proyección en las direcciones tangentes X_a^μ y X_b^μ de la derivada covariante espacio temporal

de la normal η_i^μ . La parte antisimétrica de K_{ab}^i está dada por $K_{[ab]}^i = \frac{1}{2} T_{\alpha\beta}^\mu X^\alpha_a X^\beta_b \eta_\mu^i$ tal que si $T_{\alpha\beta}^\mu = 0$ entonces K_{ab}^i es simétrica. Un hecho que vale la pena remarcar es que la identidad de Gauss, que relaciona la proyección espacial del tensor de curvatura con el tensor de curvatura sobre la superficie y la curvatura extrínseca, es insensible de la antisimetrización de K_{ab}^i .

Antes de continuar mencionaremos una definición espacio temporal de la derivada covariante superficial inducida

$$\nabla_\mu T_\nu \equiv h_{\mu\alpha} h_{\nu\beta} D^\alpha T^\beta \quad (1.20)$$

Cuando T^β está en el espacio tangente a la superficie m , $T^\alpha = X^\alpha_a T^a$, entonces

$$\nabla_\mu T_\nu = X_\mu^b X_\nu^a T_{a|b}$$

En particular la condición métrica es

$$\nabla_\mu h_{\alpha\beta} = 0. \quad (1.21)$$

La definición ec.(1.21) puede extenderse para proveer una derivada covariante espacial para todos los vectores de $T_x M$ por ejemplo:

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu}^i &= -\nabla_\nu \eta_\mu^i \\ &= -h_{\nu\beta} h_{\mu\alpha} D^\beta \eta^\alpha_i \end{aligned}$$

así que, claramente

$$K_{\mu\nu}^i = X_\mu^a X_\nu^b K_{ab}^i$$

es la derivada covariante de η_i^μ proyectada sobre la superficie (K_{ab}^i coincide con la curvatura extrínseca introducida anteriormente). Cuando $d = N-1$ esto simplemente da

$$K_{\mu\nu} = -h_{\nu\beta} D^\beta \eta_\mu.$$

La traza de $K_{\mu\nu}$ es simplemente la divergencia de la normal. Para una superficie extremal $D_\mu \eta^\mu = 0$.

De manera análoga a como hemos hecho en el caso de la ecuación de Gauss, consideremos ahora los $d(N-d)$ vectores η_{ia}^μ definidos por $\eta_{ia}^\mu \equiv \eta_{i;\nu}^\mu X_a^\nu$, y expandemos η_{ia}^μ en la base:

$$\eta_{ia}^\mu = A_{ia}^b X_b^\mu + B_{ia}^j \eta_j^\mu \quad (1.22)$$

Encontramos que $A_{ia}^b = -K_{ia}^b$ y

$$\begin{aligned} B_{ia}^j &= \eta_{i;\nu}^j \eta_{ia}^\nu X_a^\nu, \\ &= -\eta_i^\mu X_a^\nu \eta_{\mu;\nu}^j. \end{aligned}$$

De manera que finalmente podemos reescribir la ec.(1.22) como

$$\eta_{ia}^\mu = -K_{ia}^b X_b^\mu + T_{ia}^j \eta_j^\mu \quad (1.22a)$$

Estas son las generalizaciones a la superficie de las ecuaciones de Frenet Serret para las velocidades de las normales a lo largo de una curva $\dot{\eta}_i^\mu = \gamma T^\mu + \delta^i \eta_i^\mu$. Ello representa las proyecciones de las derivadas covariantes de las normales a lo largo de X_a^μ en términos de la base X_a^μ, η_i^μ . La ec.(1.22a) es conocida como ecuación de Weingarten. Por convención, definimos la *forma normal*

$$T_{a i}^j \equiv -B_{i a}^j. \quad (1.23)$$

$T_a^i j$ es la proyección en η_j^μ de la proyección en la dirección tangente a X_a^μ de la derivada covariante de la normal η_i^μ . La simetría $T_{a i j} = -T_{a j i}$ sigue de la definición. Claramente $T_{i a}^j$ es cero si $d = N - 1$.

De manera natural uno podría preguntarse acerca de la existencia de una derivada covariante normal a la superficie. En el caso de una foliación* es evidente que podemos definir bien una derivada covariante normal (ya que sabemos cómo evoluciona el vector normal). Esto será estudiado más adelante, en la sección de la Formulación Hamiltoniana de la Relatividad General. Ahí veremos el ejemplo de una foliación en la que en efecto, calculamos componentes normales de derivadas covariantes. No obstante el panorama se complica radicalmente cuando la dimensión de la superficie encajada es menor que $n - 1$. No estudiaremos esto en lo que sigue.

Para resumir hemos encontrado tres estructuras asociadas al encajamiento de m en M :

$$\begin{aligned} \gamma_{abc} &= X_{a\mu} X_{b\nu} X_c^\nu, \\ K_{iab} &= -X_a^\mu X_b^\nu \eta_{i\mu;\nu}, \\ T_{a i j} &= \eta_i^\mu X_a^\nu \eta_{j\mu;\nu}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

con las siguientes simetrías

$$T_{a i j} = -T_{a j i}.$$

y cuando la torsión desaparece

$$K_{iab} = K_{iba}.$$

El objetivo de este capítulo y el siguiente es "preparar el terreno" para estudiar la parte verdaderamente importante de esta tesis y que es la formulación hamiltoniana de la gravitación. Es importante remarcar que todo el formalismo que se desarrolla a lo largo de esta tesis es con el objeto de lograr la separación de las ecuaciones dinámicas de las ecuaciones de constricciones. Esta discusión será más clara en el contexto de los capítulos siguientes. La siguiente sección por otra parte, viene a completar los resultados de la geometría diferencial que necesitaremos en el capítulo 3.

* Esto es, cuando la superficie general m puede ser descompuesta como el producto directo de hipersuperficies de tipo espacial caracterizadas por un parámetro, digamos t .

Las Ecuaciones de Gauss-Codazzi-Mainardi.

Podemos ahora asociar un tensor de curvatura $R^a{}_{bcd}$ con la conexión inducida $\gamma_{ab}{}^c$ a través del conmutador de la derivada covariante asociada. Supongamos que V^a está en $T_{\xi}m$, entonces

$$[\nabla_c, \nabla_d]V^a = {}^d R^a{}_{bcd}V^d + T_{cd}^e \nabla_e V^a, \quad (1.25)$$

donde definimos

$${}^d R^a{}_{bcd} = \gamma^a{}_{bc,d} + \gamma^a{}_{be} \gamma^e{}_{cd} - (c \leftrightarrow d), \quad (1.26)$$

y $T^e{}_{cd}$ es la proyección espacial de la torsión de espacio-tiempo $T^\gamma{}_{\alpha\beta}$. El tensor de Riemann de espacio-tiempo puede ser expandido como un tensor de rango 4 en términos de los vectores de la base X_a^μ y η_i^ν . Las varias proyecciones que aparecen son

$$R_{abcd} \equiv X_a^\mu X_b^\nu X_c^\alpha X_d^\beta R_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (i)$$

$$R_{ibcd} \equiv \eta_i^\mu X_b^\nu X_c^\alpha X_d^\beta R_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (ii)$$

$$R_{ijcd} \equiv \eta_i^\mu \eta_j^\nu X_c^\alpha X_d^\beta R_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (iii)$$

$$R_{iajb} \equiv \eta_i^\mu X_a^\nu \eta_j^\alpha X_b^\beta R_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (iv)$$

$$R_{ijkl} \equiv \eta_i^\mu \eta_j^\nu \eta_k^\alpha \eta_l^\beta R_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (v)$$

$$R_{ijkl} \equiv \eta_i^\mu \eta_j^\nu \eta_k^\alpha \eta_l^\beta R_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (vi)$$

Contemos ahora las componentes algebraicamente independientes dentro de cada clase. Para hacer esto es útil primero recordar las simetrías del tensor de Riemann [3].

De la identidad de Ricci (para la cual habrá en general un término proporcional a la torsión distinto de cero)

$$[D_\mu, D_\nu]V^\alpha = R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}V^\beta + T_{\mu\nu}^\gamma D_\gamma V^\alpha,$$

es inmediato que

$$R_{\beta[\mu\nu]}^\alpha = 0 \quad (1.27)$$

Además la primera de las identidades de Bianchi restringen adicionalmente las componentes del tensor de curvatura*

$$R_{\alpha[\beta\mu\nu]} + \text{términos antisim. en la torsión} = 0 \quad (1.28)$$

donde recuperamos la identidad de Bianchi tradicional cuando la torsión desaparece. Esto da $n(n+1)/2 - n{}^n C_3 = n^2(n^2-1)/3$ componentes independientes donde hemos usado la notación ${}^n C_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ para el coeficiente binomial. Si la condición métrica, $D_\mu g_{\alpha\beta} = 0$ se cumple, entonces

$$R_{[\alpha\beta]\mu\nu} = 0, \quad (1.29)$$

* Ver la pág. 50

superficie*:

$$X_c^\beta (X_{ab}^\mu)_{;\beta} = X_c^\beta (\gamma_{ab}^e X_e^\mu + K_{ab}^i \eta_i^\mu)_{;\beta}$$

ó

$$\begin{aligned} X_c^\beta X_b^\alpha (X_a^\mu)_{;\alpha\beta} + X_{bc}^\alpha X_a^\mu{}_{;\alpha} &= \gamma_{ab,c}^e X_e^\mu + \gamma_{ab}^e X_c^\beta X_{e;\beta}^\mu + K_{ab,c}^i \eta_i^\mu + K_{ab}^i X_c^\beta \eta_{i;\beta}^\mu, \\ &= (\gamma_{ab,c}^e + \gamma_{ab}^e \gamma_{ec}^d + K_{ab}^i K_{ice}) X_d^\mu \\ &\quad + (K_{ab,c}^i - \gamma_{ab}^e K_{ec}^i + K_{ab}^i T_c^j) \eta_i^\mu. \end{aligned}$$

y al antisimetrizar en los índices b, c , obtenemos

$$\begin{aligned} X_c^\beta X_b^\alpha X_a^\nu R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} + (X_c^\beta X_b^\alpha T_{\alpha\beta}^\gamma D_\gamma X_a^\mu + 2 X_{[bc]}^\alpha X_{a;\alpha}^\mu) \\ = [{}^d R^d{}_{abc} + (K^i{}_{ab} K_{idc} - (b \leftrightarrow c))] X_\mu^d \\ + [K_{ab,c}^i - \gamma_{ab}^e K_{ec}^i + K_{ab}^i T_c^j - (b \leftrightarrow c)] \eta_i^\mu. \end{aligned} \quad (1.30)$$

El término en paréntesis en el lado izquierdo es cero. Para ver esto notamos que el segundo término en el paréntesis puede reescribirse $2 X_{[bc]}^\alpha X_{a;\alpha}^\mu = 2 (\gamma_{[bc]}^d X_d^\alpha + K_{[bc]}^i \eta_i^\alpha) X_{a;\alpha}^\mu$. Usando las expresiones para las partes antisimétricas de γ_{bc}^α y K_{bc}^i en términos de la torsión de espacio-tiempo el resultado sigue.

Tomamos ahora las dos proyecciones de la ec.(1.30). Proyectando sobre la superficie m recuperamos la ecuación de *Gauss-Codazzi*:

$$R^d{}_{abc} = {}^d R^d{}_{abc} + (K^i{}_{ab} K_{idc} - (b \leftrightarrow c)), \quad (1.31)$$

La proyección normal, por otra parte dá la ecuación de *Codazzi-Mainardi*

$$R^j{}_{abc} = K^i{}_{ab} T_c^j{}_i + K^j{}_{ab,c} - \gamma_{ab}^d K^j{}_{dc} - (b \leftrightarrow c), \quad (1.32)$$

y como en el caso anterior, los términos entre paréntesis se cancelan.

Jugamos el mismo juego con las ecuaciones de Weingarten.* Para obtener ésta empezamos con la proyección sobre la superficie de la derivada covariante de $\eta_{i;\alpha}^\mu$

$$X_c^\beta (\eta_{ia}^\mu)_{;\beta} = X_c^\beta (-K_{ia}{}^b X_b^\mu + T_{ai}{}^j \eta_j^\mu)_{;\beta},$$

ó más explícitamente

$$\begin{aligned} X_c^\beta (X_a^\alpha (\eta_i^\mu)_{;\alpha\beta} + \eta_{i;\alpha}^\mu X_{a;\beta}^\alpha) &= -K_{ia}{}^b X_c^\beta X_{b;\beta}^\mu - K_{ia,c}{}^b X_b^\mu + T_{ai}{}^j X_c^\beta \eta_{j;\beta}^\mu + T_{ai}{}^j{}_{|c} \eta_j^\mu, \\ &= (-K_{ia}{}^b \gamma_{bc}^d - K_{ia,c}{}^b + T_{ai}{}^j K^j{}_{bc}) X_d^\mu \\ &\quad + (-K_{ia}{}^b K^k{}_{bc} + T_{ai}{}^j T_{c;j}{}^k + T_{ai}{}^k{}_{,c}) \eta_k^\mu \end{aligned} \quad (1.33)$$

* De esta manera podemos definir los campos vectoriales de espacio-tiempo $X_{abc}^\mu \equiv X_c^\beta (X_{ab}^\mu)_{;\beta}$.

* El objeto $\eta_{iab}^\mu \equiv X_b^\beta (\eta_{ia}^\mu)_{;\beta}$ es un vector de espacio-tiempo.

CAPITULO 2

Principios Variacionales

En este capítulo y el anterior se desarrollan gran parte de los resultados matemáticos que serán de utilidad en la formulación hamiltoniana de la gravitación. En esta sección derivaremos las ecuaciones de Einstein a partir del lagrangiano de la gravitación. Tenemos a la mano tres representaciones: tensorial, espinorial y tétradas. En el capítulo siguiente veremos que en la formulación hamiltoniana existen dos casos que tradicionalmente han sido de interés. Aquí estudiaremos uno de estos casos, así pues, en lo que sigue asumiremos que estamos trabajando en un universo cerrado, de manera que tiene sentido hablar de la frontera de la región de integración (figura 2.1a).

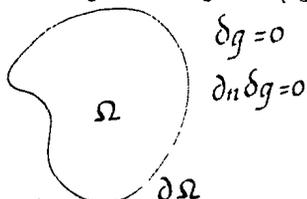


Fig. 2.1a. Si exigimos $\delta g_{\mu\nu} = \partial_n \delta g_{\mu\nu} = 0$ no hay termino de superficie.

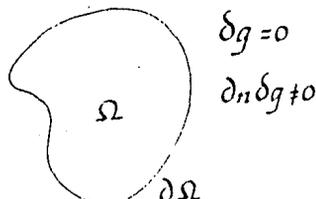


Fig. 2.1b. Bajo variaciones menos restrictivas si tenemos términos de superficie.

El caso de un espacio tiempo asintóticamente plano se estudia al final del capítulo 3. Existen varias versiones para obtener las ecuaciones [4]. Aquí veremos dos derivaciones utilizando la representación tensorial. A continuación daremos una versión alternativa del formalismo de segundo orden.

Consideremos la acción de la gravitación

$$S_0 = \frac{1}{16\pi G} \int d^n x \sqrt{-g} (g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - 2\Lambda) \quad (2.1)$$

donde definimos el tensor de Riemann como es usual

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\rho\mu} \Gamma^\rho_{\beta\nu} - (\mu \leftrightarrow \nu). \quad (2.2)$$

De ahora en adelante usaremos la convención $1/16\pi G = 1$. Hacemos ahora la variación de la acción considerando que $\Gamma = \Gamma(g)$ de manera que

$$\delta S_0 = \int d^n x \delta \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + \sqrt{-g} \delta R, \quad (2.3)$$

Para ver esto notamos que

$$\begin{aligned}
 \eta^\mu V_\mu &= \eta^\mu (g^{\alpha\beta} D_\beta \delta g_{\mu\alpha} - g^{\alpha\beta} D_\mu \delta g_{\alpha\beta}), \\
 &= \eta^\mu (h^{\alpha\beta} \pm \eta^\alpha \eta^\beta) (D_\beta \delta g_{\mu\alpha} - D_\mu \delta g_{\alpha\beta}), \\
 &= -\eta^\mu h^{\alpha\beta} D_\mu \delta g_{\alpha\beta} + \eta^\mu \{g^{\alpha\beta} D_\beta \delta g_{\mu\alpha} \mp \eta^\alpha \eta^\beta D_\mu \delta g_{\alpha\beta}\}, \\
 &= -\eta^\mu h^{\alpha\beta} D_\mu \delta g_{\alpha\beta} + \eta^\mu h^{\alpha\beta} D_\beta \delta g_{\mu\alpha},
 \end{aligned}$$

y el segundo término en la última igualdad se cancela idénticamente. Introducimos ahora la curvatura extrínseca $K_\alpha^\beta = -D_\alpha \eta^\beta$. Por otra parte tenemos que, en la frontera

$$\begin{aligned}
 \delta K &= -h^{\alpha\beta} \delta (D_\alpha \eta_\beta), \\
 &= h^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\beta\alpha}^\sigma \eta_\sigma,
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

donde K es la traza de la curvatura extrínseca $K \equiv K_\alpha^\alpha = h^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}$. En la derivación de la ec.(2.10) se ha usado el hecho que las variaciones de la normal se anulan en la frontera. Utilizando ahora la expresión para la variación de la conexión afín ec.(2.7) tenemos que la ec.(2.9) puede ahora ser reescrita como

$$\delta S_0 \Big|_{\partial} = -2 \int_{\partial} d^{n-1} x \sqrt{h} \delta K.$$

Así que, a menos que exijamos $\delta g = 0 = \partial_n \delta g$ en la frontera, en general tendremos que añadir un término que cancele al término de superficie ec.(2.8). Este es conocido como *término de Hawking* [11]

$$2 \int_{\partial} d^{n-1} x \sqrt{h} K \tag{2.11}$$

el cual tiene el efecto de cancelar segundas derivadas de la métrica de una manera invariante de norma†. Por tanto, si vamos a considerar términos de superficie, entonces la acción gravitacional adecuada será

$$S'_0 = S_0 + 2 \int_{\partial} d^{n-1} x \sqrt{h} K. \tag{2.1a}$$

Si ahora acoplamos una acción de materia a la acción gravitacional ($S_0 \rightarrow S_0 + S_m$) tendremos que toda la derivación anterior sigue siendo válida, únicamente que tendremos un término distinto de cero del lado derecho que sólo involucra campos de materia. Las ecuaciones de Einstein se escriben ahora

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R + g^{\alpha\beta} \Lambda = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g_{\alpha\beta}}, \tag{2.5b}$$

† El término de Hawking fue introducido en el contexto del formalismo de integrales de trayectoria. El objeto es tener una acción que dependa únicamente de primeras derivadas de la métrica.

donde definimos ahora el tensor de stress como

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\alpha\beta}}.$$

Consideremos ahora la derivación a la *Palatini*. Nuevamente, partimos de acción de gravedad ec.(2.1). Supondremos ahora que la curvatura sólo depende de la conexión $R = R(\Gamma)$. Asumimos también que la condición métrica sigue siendo válida aún cuando pueda haber torsión esto es $\Gamma_{[\mu\nu]}^\alpha \neq 0$. De manera que, tomando la variación del tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ nos da

$$\delta R_{\alpha\beta}(\Gamma) = D_\mu \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu - D_\beta \delta \Gamma_{\alpha\mu}^\mu + T_{\nu\beta}^\mu \delta \Gamma_{\alpha\mu}^\nu. \quad (2.12)$$

Si ahora contraemos ambos lados de esta ecuación con $g^{\mu\nu}$ obtenemos

$$g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} = 2D_\mu \left(g^{\alpha[\beta} \delta^{\mu]}_{\nu} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \right) + g^{\alpha\beta} T_{\nu\beta}^\mu \delta \Gamma_{\alpha\mu}^\nu. \quad (2.13a)$$

Usando ahora la identidad $\Gamma_{\rho\alpha}^\rho = \partial_\alpha \ln \sqrt{-g}$ en la ecuación anterior

$$\sqrt{-g} D_\mu V^\mu = \partial_\mu (\sqrt{-g} V^\mu) + (\Gamma_{\nu\mu}^\mu \sqrt{-g} - \partial_\nu \sqrt{-g}) V^\nu \quad (2.13b)$$

obtenemos que

$$\sqrt{-g} D_\mu V^\mu = \sqrt{-g} T_{\mu\nu}^\mu V^\nu + \text{término de superficie}, \quad (2.13c)$$

de manera que $g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta}$ no es puramente un término de superficie. Dejando a un lado por el momento los términos de superficie, sigue ahora que la variación de la acción de gravedad S_0 es

$$\delta S_0 = \int d^n x \sqrt{-g} \left(T_{\nu\alpha}^\beta g^{\sigma\alpha} + 4T_{\rho\mu}^\rho g^{\alpha[\beta} \delta^{\mu]}_{\nu} \right) \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\nu, \quad (2.14a)$$

Definimos ahora el tensor

$$K^{\alpha\beta}_{\nu} \equiv g^{\alpha\sigma} T_{\sigma\nu}^\beta - g^{\alpha\beta} T_{\rho\nu}^\rho - \frac{1}{n-1} \delta^\alpha_{\nu} g^{\sigma\beta} T_{\rho\sigma}^\rho, \quad (2.15)$$

y en términos de éste la variación se reescribe como

$$\delta S_0 = \int d^n x \sqrt{-g} \left(\delta^\beta_{\nu} K^{\alpha\rho}_{\rho} - K^{\alpha\beta}_{\nu} \right) \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\nu. \quad (2.14b)$$

Si ahora consideramos la acción de materia S_m ($S = S_0 + S_m$) tenemos que, la condición $\delta S / \delta \Gamma = 0$ implica

$$K^{\alpha\beta}_{\nu} - \delta^\beta_{\nu} K^{\alpha\rho}_{\rho} = \frac{\delta S_m}{\delta \Gamma_{\alpha\beta}^\nu}, \quad (2.16)$$

Para la gravitación pura $K^{\alpha\beta}_{\nu} = 0$, lo que implica $T = 0$. Las ecuaciones (2.16) no son obviamente las ecuaciones de Einstein.

Hasta este momento no hemos tomado en cuenta los efectos de los términos de superficie en la derivación anterior. Considerando ahora la ec.(2.13) dada arriba vemos que la integral (sobre la frontera de la región de interés) de los términos de superficie nos dá la contribución de éstos a δS_0

$$\delta S_0 = 2 \int_{\partial} d^{n-1} x \sqrt{h} \eta_{\mu\nu} g^{\alpha(\beta} \delta_{\nu}^{\mu)} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}, \quad (2.17)$$

donde $h_{\alpha\beta}$ es la métrica en la frontera. Vemos pues que, si imponemos $\delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} = 0$ en la frontera de la superficie es evidente que no habrá contribución de los términos de superficie a la variación de la acción. Sin embargo, si consideramos la condición menos restrictiva

$$\delta T \Big|_{\partial} = 0,$$

obtenemos que

$$\delta \Gamma \equiv \delta \Gamma_{Christoffel}, \quad (2.18)$$

y el problema del término de superficie se reduce al del formalismo de segundo orden.

CAPITULO 3

Formulación Hamiltoniana de la Gravitación

Introducción

Para la construcción de un hamiltoniano requeriremos primero la descomposición del espacio tiempo en una familia de superficies espaciales (foliación) [3]. Los momenta canónicos son definidos ahora como las variaciones de la lagrangiana con respecto a las velocidades de la métrica $g_{\mu\nu}$ (dichas velocidades son tomadas respecto del parámetro t caracterizando a cada superficie). En el proceso descrito arriba, la covariancia manifiesta se pierde. Mientras que a primera vista uno podría sentirse abatido por esta pérdida de una las piedras angulares de la Relatividad General, no obstante, la transformación de Legendre del lagrangiano al hamiltoniano no ha destruido de hecho la covariancia — las ecuaciones de Hamilton con las constricciones reproducen exactamente las ecuaciones de Einstein [5].

A continuación veremos de que manera podemos estudiar la evolución de la métrica del espacio tiempo riemanniano cortando a la variedad de espacio tiempo en una foliación y proyectando las componentes de la métrica en las direcciones normal y tangentes a las superficies. Lo que sigue es ver cómo evolucionan las superficies (y por tanto las proyecciones). Tanto Dirac como Arnowitt, Deser y Misner (ADM) usaron un lenguaje que depende de las coordenadas, aquí haremos lo mismo. En dicho lenguaje, el cambio de las coordenadas de espacio tiempo $x^\mu \rightarrow x'^\mu(x^\mu)$ induce el cambio en la foliación. La foliación de las hipersuperficies espaciales es una curva en el superespacio (aunque no toda curva en el superespacio es una foliación dado que en ésta prohibiremos que las superficies individuales se corten). Veremos que el procedimiento anterior define un campo vectorial t^μ que puede ser identificado con el "flujo del tiempo". Las proyecciones espaciales (función *shift*) y normal (función *lapse*) del vector t^μ constituyen, junto con la métrica inducida, el conjunto de variables ADM. El hamiltoniano de la relatividad general será ahora construido con estas variables.

Variables ADM

Asumimos que el espacio tiempo puede ser foliado [2] por una familia uniparamétrica de superficies de tipo espacial localmente definidas por $x^\mu = X^\mu(\xi^a, t)$. Si adicionalmente suponemos que M es globalmente hiperbólico entonces $M = m_t \times \mathbb{R}$. Esto es una restricción sobre la topología del espacio tiempo. Como consecuencia, el cambio de topología no puede ser acomodado dentro de este formalismo. La foliación define un campo vectorial $t^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial t}$ que sirve para marcar el tiempo t , de manera que t^μ puede ser identificado con ∂_t (fig. 3.1a).

Podemos ahora descomponer t^μ en dos partes [6]: una paralela y otra normal a las superficies

$$\begin{aligned} t^\mu &= -(t \cdot \eta) \eta^\mu + (t \cdot X_b) \gamma^{ab} X_a^\mu \\ &= -(t \cdot \eta) \eta^\mu + h^\mu{}_\nu t^\nu \\ &\equiv N \eta^\mu + N^\alpha. \end{aligned} \quad (3.1)$$

El escalar N (*lapse*) representa la proyección de t^μ sobre la normal η^μ mientras que el vector espacial N^α (*shift*) representa las proyecciones tangenciales (fig. 3.1b).

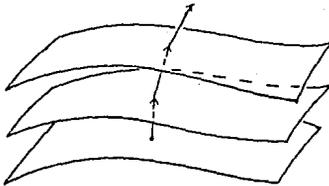


Fig. 3.1a . Foliación del espacio tiempo en hipersuperficies de tipo espacial.

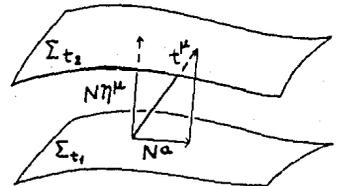


Fig. 3.1b. Las funciones shift y lapse

Físicamente η^μ corresponde a la velocidad de un observador instantáneamente en reposo sobre la superficie. Si ahora introducimos las coordenadas adaptadas (x^α, t) en M entonces el vector contravariante t^μ no tiene componentes espaciales

$$t^\mu = (1, 0). \quad (3.2)$$

En cada punto tenemos ahora que

$$t^\mu \partial_\mu t = 1. \quad (3.3)$$

De manera similar, el vector normal covariante, el cual es proporcional al gradiente de t es simplemente

$$\eta_\mu = N(1, 0), \quad (3.4)$$

donde N es en general, una función de proporcionalidad.

Por otro lado, como una consecuencia del hecho que $\eta_\mu N^\mu = 0$ sigue que N^μ es puramente espacial esto es

$$N^\mu = (0, N^\alpha). \quad (3.5)$$

Ahora elegimos como nuestras variables básicas las $\frac{n(n+1)}{2}$ variables ADM, γ_{ab}, N y N^α . La idea es que debería de ser posible reconstruir el espacio tiempo descrito por la métrica $g_{\mu\nu}(x^\alpha, t)$ prescribiendo, para cada tiempo t , la métrica espacial $\gamma_{ab}(x^\alpha, t)$ y especificando las funciones lapse y shift. Al final estaremos en una posición de dar una interpretación geométrica a las variables N y N^α . Se verá que representan la medida de la deformación de la superficie descompuesta en dos partes: qué tan rápido se mueve en la dirección normal

(N) y qué tanto se elonga en la dirección tangencial (N^a). Ahora expresamos $g_{\mu\nu}$ y su inversa $g^{\mu\nu}$ en términos de las nuevas variables. Se tiene primero que

$$g_{ab} = \gamma_{ab}. \quad (3.6)$$

g_{0a} puede determinarse usando ec.(1.1) para t^μ y ecs.(1.9) del primer capítulo para el proyector $h^{\mu\nu}$ en coordenadas adaptadas. Encontramos que

$$\begin{aligned} N^a &= h^a{}_\mu t^\mu \\ &= \gamma^{ab} g_{b0}, \end{aligned}$$

lo cual puede entonces ser invertido para dar la componente g_{0a}

$$g_{a0} = \gamma_{ab} N^b \equiv N_a. \quad (3.7)$$

No es inmediato encontrar g_{00} . En la práctica prueba ser más directo encontrar g^{00} y luego explotar el hecho que $g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = \delta_\mu{}^\rho$ para encontrar g^{00} y las demás componentes de $g^{\mu\nu}$.

Encontramos que

$$g^{00} = -\frac{1}{N^2}. \quad (3.8)$$

sigue de la condición de normalización $g^{\mu\nu} \eta_\mu \eta_\nu = -1$ y del hecho de que $N = -N$ (esto puede verse de la definición de N y de las ecs.(3 y 4)).

Finalmente para determinar las restantes componentes desconocidas g_{00}, g^{0a}, g^{ab} examinemos la identidad

$$\begin{pmatrix} g_{00} & N_a \\ N_a & \gamma_{ac} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/N^2 & g^{0b} \\ g^{b0} & g^{cb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_a{}^b \end{pmatrix}$$

de lo que resulta

$$g_{00} = N_a N^a - N^2, \quad g^{0a} = \frac{N^a}{N^2} \quad \text{y} \quad g^{ab} = \gamma^{ab} - \frac{N^a N^b}{N^2}. \quad (3.9)$$

Comentarios

(i) Mientras que N^μ es simple en nuestro sistema de coordenadas, N_μ no lo es

$$N_\mu = (N_b N^b, N_a)$$

(ii) No obstante que subsecuentemente haremos uso de la notación $N^\mu \equiv (N, N^a)$ este objeto sin embargo no representa un cuadrivector.

(iii) Hemos visto que

$$\eta_\mu = (-N, 0).$$

El signo en la ecuación (3.7) es elegido tal que η^μ apunte hacia el futuro cuando N es positivo. Una derivación alternativa para encontrar la forma covariante de las normales es explotar la definición dada en el capítulo 1, $X_a^\mu \eta_\mu \equiv 0$. El vector covariante normal es independiente (hasta una normalización) de la métrica del espacio tiempo en un sistema de coordenadas adaptadas. La forma contravariante de η_μ es obviamente

$$\eta^\mu = \frac{1}{N}(1, -N^a). \quad (3.10)$$

(iv) El elemento de línea en este formalismo puede reescribirse como

$$ds^2 = -(N dt)^2 + \gamma_{ab}(dx^a + N^a dt)(dx^b + N^b dt). \quad (3.11)$$

El hamiltoniano

Como hemos visto en el capítulo anterior, la gravitación es ahora descrita por la acción de Einstein-Hilbert:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) \quad (3.12)$$

donde R es el escalar de Riemann $R = R^\mu{}_\mu$ y Λ es la constante cosmológica. La integración es efectuada sobre todos los puntos espaciales x y todos los tiempos entre algún cierto tiempo inicial t_i y un tiempo final t_f .

Mientras que es una práctica común en la actualidad incluir el término de *Hawking* el cual es la traza de la curvatura extrínseca integrada sobre la frontera de la región de interés:

$$2 \int_{\partial} d^3x \sqrt{h} K, \quad (3.13)$$

esto tiene el efecto de cancelar segundas derivadas de la métrica en una manera invariante de norma. En la presente discusión no incluiremos dicho término, otorgándonos licencia a nosotros mismos para desarrollar las integraciones parciales necesarias con el fin de tener S como queramos. En general sin embargo, no siempre podremos ignorar términos de superficie.

Convencionalmente hay dos casos en los cuales la formulación hamiltoniana ha sido estudiada: 1. Cosmologías cerradas; y 2. Espacio tiempo asintóticamente plano (puede haber más de una región asintóticamente plana). Este será estudiado al final del presente capítulo. No obstante hay casos interesantes no incluidos en esta clasificación. Sin embargo no es claro si el formalismo está bien definido en estos casos. Técnicamente el caso 1 es el más simple (no hay términos de superficie) aunque conceptualmente prueba ser el más difícil. Esto se ha estudiado en el capítulo anterior. Lo que a sido encontrado en el caso 2 es que varios términos de superficie deben ser añadidos dependiendo de las condiciones de frontera impuestas en γ_{ab} , Π_{ab} y N_μ . Esta es la característica que hace a la gravitación tan especial. Para los presentes propósitos vamos a despreciar todos los términos de superficie. Una vez que hallamos "quitado el polvo" usaremos el criterio de

la diferenciabilidad para restaurar dichos términos de superficie de la manera que mejor convenga a nuestros propósitos*

Antes de proceder expresemos la curvatura extrínseca en términos de las variables ADM. En coordenadas adaptadas la curvatura extrínseca (ec.(1.24) del capítulo 1) es

$$\begin{aligned} K_{ab} &= -\eta_{a;b} \\ &= -\eta_{a,b} + \Gamma_{ab}^{\rho} \eta_{\rho}. \end{aligned}$$

Haciendo uso de la ec.(3.8) esto se reduce a

$$\begin{aligned} K_{ab} &= -N\Gamma_{ab}^0 \\ &= -N(g^{00}\Gamma_{0ab} + g^{0c}\Gamma_{cab}) \\ &= -N \left\{ -\frac{1}{2}N^{-2}(N_{a,b} + N_{b,a} - \dot{\gamma}_{ab}) + N^{-2}N^c\Gamma_{cab} \right\} \\ &= \frac{1}{2N}(N_{a|b} + N_{b|a} - \dot{\gamma}_{ab}). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Lo que notamos inmediatamente es que K_{ab} no depende de las derivadas temporales de N^{μ} . El concepto de curvatura extrínseca (K) es una noción distinta de la curvatura intrínseca (R). K_{ab} no tiene sentido por sí misma para una geometría. Depende en general del encajamiento (en este caso de la foliación). Podemos decir que K_{ab} mide la curvatura de las superficies relativa a la geometría del espacio tiempo. Esto se ha ilustrado en la fig. 3.2. La diferencia de η^{μ} definida en el punto q y η^{μ} definida en p y transportada paralelamente a lo largo de una geodésica hasta q nos dá una noción intuitiva de "qué tan curvada está nuestra superficie".

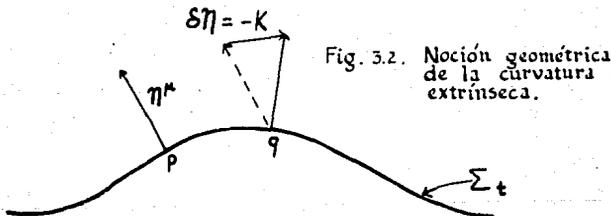


Fig. 3.2. Noción geométrica de la curvatura extrínseca.

Aplicamos ahora la ecuación de Gauss-Codacci para expresar la acción en términos de las variables básicas asociadas con la foliación. Recordemos que estas ecuaciones involucran las proyecciones normal y tangenciales del tensor de Riemann. El vector t^{μ} no figura. Es claro que por tratarse de una hipersuperficie solo hay una curvatura extrínseca (dado que solo hay un vector normal). Además la torsión de la superficie es idénticamente cero. Entonces en el caso de una hipersuperficie solamente las primeras dos ecuaciones son no

* Véase por ejemplo la sección al final de este capítulo.

vacías:

$$R_{abcd} = {}^d R_{abcd} + K_{ac}K_{bd} - K_{ad}K_{bc} \quad , \quad (3.15a)$$

$$R_{abc\perp} = \nabla_b K_{ac} - \nabla_a K_{bc} \quad . \quad (3.15b)$$

donde se usó la notación $V^\perp \equiv V^\mu \eta_\mu$. Hay $d^2(d^2 - 1)/12$ componentes algebraicamente independientes del tipo R_{abcd} . En tres dimensiones esto es igual a seis lo cual es el mismo número de componentes del tensor de Ricci y corresponde al hecho de que, en este caso, el tensor de Ricci contiene la misma información que el tensor de Riemann $R_{abcd} = 2\gamma_{a[c}R_{d]b} + 2\gamma_{b[d}R_{c]a} + \gamma_{a[d}\gamma_{c]b}R$. Adicionalmente hay $d(d^2 - 1)/3$ del tipo $R_{abc\perp}$, esto es, ocho en tres dimensiones. Juntas, estas ecuaciones proveen 14 de las veinte componentes algebraicamente independientes del tensor de Riemann en términos de la geometría de la superficie m_t inmersa en el espacio tiempo caracterizada por γ_{ab} y K_{ab} .

El *escalar de Ricci* puede además ser descompuesto [3] como

$$R \equiv R^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = R^{ab}{}_{ab} + 2R^{\mu\perp}{}_{\mu\perp} \quad . \quad (3.16a)$$

Usando una vez más las ecuaciones de Gauss-Codacci podemos reescribir el primer término de la derecha en la ecuación (3.16a)

$$R^{ab}{}_{ab} = {}^d R + K^2 - K^{ab}K_{ab} \quad , \quad K = K^a{}_a \quad . \quad (3.16b)$$

donde ${}^d R$ es el escalar de Ricci construido con la métrica espacial γ_{ab} . El segundo término en el lado derecho de ec.(3.16a) no está dado directamente por las ecuaciones de Gauss-Codacci, sin embargo podemos evaluarlo usando la identidad de Ricci aplicada a la normal

$$R^\perp{}_{\mu\nu\lambda} = \eta_{\mu;\nu\lambda} - \eta_{\mu;\lambda\nu} \quad .$$

Si ahora contraemos esta ecuación en μ y λ y luego contraemos con la normal, obtenemos que

$$\begin{aligned} R^\perp{}_{\perp\mu}{}^\mu &\equiv \eta^\nu R^\perp{}_{\nu\mu}{}^\mu = \eta^\nu (\eta^\lambda{}_{;\lambda;\nu} - \eta^\lambda{}_{;\nu;\lambda}) \\ &= (\eta^\nu \eta^\mu{}_{;\mu})_{;\nu} - (\eta^\nu \eta^\mu{}_{;\nu})_{;\mu} - \eta^\nu{}_{;\nu} \eta^\mu{}_{;\mu} + \eta^\nu{}_{;\mu} \eta^\mu{}_{;\nu} \\ &= (\eta^\nu \eta^\mu{}_{;\mu} - \eta^\mu \eta^\nu{}_{;\mu})_{;\nu} - \eta^\nu{}_{;\nu} \eta^\mu{}_{;\mu} + \eta^\nu{}_{;\mu} \eta^\mu{}_{;\nu} \quad . \end{aligned} \quad (3.17)$$

Donde los últimos dos términos pueden ser identificados con los escalares de la curvatura extrínseca $\eta^\mu{}_{;\mu} = -K$ y $\eta^\nu{}_{;\mu} \eta^\mu{}_{;\nu} = K_{ab}K^{ab}$. Finalmente el término entre paréntesis es una divergencia, de tal manera que

$$R^\perp{}_{\perp\mu}{}^\mu = -K^2 + K^{ab}K_{ab} + \text{término de la divergencia} \quad . \quad (3.16c)$$

Notemos ahora que, en general $R_{\perp a \perp b}$ involucra (como puede verse de las ecuaciones de campo) segundas derivadas de la métrica, de manera que no esperaríamos que esté constreñido por las condiciones iniciales. La forma contraída $R^\perp{}_{\perp a}$ sin embargo, sólo involucra segundas derivadas en un término que es una divergencia. Antes de proceder a

reescribir la acción en nuestras nuevas variables demostramos que n de las ecuaciones de Einstein en el vacío

$$G^{\perp}_{\mu} + \delta^{\perp}_{\mu} \Lambda = 0 \quad (3.18)$$

corresponden a las contracciones de (3.15a) y (3.15b)

$$G^{\perp}_{\perp} = -\frac{1}{2} ({}^d R + K^2 - K_{ab} K^{ab} - 2\Lambda) = 0 \quad (3.19a)$$

$$G^{\perp}_a = \nabla_b (K_a{}^b - \gamma_a{}^b K) = 0. \quad (3.19b)$$

las cuales son sencillas de establecer, en el primer caso:

$$G^{\perp}_{\perp} = R^{\perp}_{\perp} - \frac{1}{2} R + \Lambda = -\frac{1}{2} R^{ab}{}_{ab} + \Lambda.$$

donde hemos usado ec.(3.16a). Usando esto y ec.(3.16b) además del hecho que $R^a{}_{\perp} = R^{\perp b}{}_{ab}$ obtenemos ec.(3.19.b). Notemos como los segundos términos conteniendo dos derivadas temporales se cancelan.

Las otras seis ($d(d+1)/2$ en una hipersuperficie general) ecuaciones de Einstein que nos faltan son exactamente lo que se requiere para determinar las restantes seis componentes del tensor de Riemann, $R_{\perp a \perp b}$, las cuales dependerán, como hemos visto en el primer capítulo (ecuación de Ricci), no sólo de γ_{ab} y K_{ab} sino también de \dot{K}_{ab} .

Podemos ahora reescribir la acción

$$S = \int dt d^d x \mathcal{L} \quad , \quad (3.20)$$

donde la densidad lagrangiana $\mathcal{L} = \sqrt{\gamma} (K^{ab} K_{ab} - K^2 + {}^d R - 2\Lambda)$. \mathcal{L} no depende de las velocidades \dot{N}^{μ} , de manera que los N^{μ} juegan el papel de los multiplicadores de Lagrange. Como consecuencia los momenta conjugados a N^{μ} deben desaparecer

$$P_{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}^{\mu}} = 0 \quad . \quad (3.21)$$

En la terminología de Dirac estos momenta representan a las constricciones primarias.

Para propósitos posteriores es conveniente introducir alguna notación para reescribir el término cuadrático en K en la forma

$$K_{ab} K^{ab} - K^2 \equiv K_{ab} G^{abcd}(\gamma) K_{cd} \quad . \quad (3.22)$$

Definimos la *supermétrica* G^{abcd} :

$$\begin{aligned} G^{abcd} &\equiv \frac{1}{2} (\gamma^{ac} \gamma^{bd} + \gamma^{ad} \gamma^{bc}) - \gamma^{ab} \gamma^{cd} \\ &= \mathbf{1}^{abcd} - \gamma^{ab} \gamma^{cd}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde $\mathbf{1}^{abcd} = 1/2 (\gamma^{ac}\gamma^{bd} + \gamma^{ad}\gamma^{bc})$ es la matriz identidad actuando en el espacio de dim $\frac{d}{2}(d+1)$ de matrices $d \times d$ simétricas y satisface

$$\begin{aligned} \mathbf{1}^{ab}{}_{cd} \mathbf{1}^{cd}{}_{ef} &= \mathbf{1}^{ab}{}_{ef} \quad , \\ \mathbf{1}^{ab}{}_{cd} \gamma^{cd} &= \gamma^{ab} . \end{aligned} \quad (3.24)$$

La densidad hamiltoniana canónica está ahora definida por la transformación de Legendre

$$\mathcal{H} \{N^\mu; \Pi^{ab}, \gamma_{ab}\} = \Pi^{ab} \dot{\gamma}_{ab} - \mathcal{L} , \quad (3.25a)$$

de manera que podemos entonces escribir la acción como

$$S = \int dt d^d x \{ \Pi^{ab} \dot{\gamma}_{ab} - \mathcal{H} \} . \quad (3.25b)$$

El momento conjugado a γ^{ab} es

$$\begin{aligned} \Pi^{ab} &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}_{ab}} , \\ &= 2N \gamma^{1/2} G^{cdef} K_{ef} \frac{\partial K_{cd}}{\partial \dot{\gamma}_{ab}} . \end{aligned}$$

Se sigue de la ec.(3.14) que

$$\frac{\partial K_{cd}}{\partial \dot{\gamma}_{ab}} = -\frac{1}{2N} \delta_{cd}^{ab}$$

por tanto

$$\Pi^{ab} = -\gamma^{1/2} G^{abcd} K_{cd} \quad (3.26)$$

lo que es una densidad tensorial de peso 1. Esta es una característica general de las teorías de campo, el que los momenta son densidades. Π^{ab} es obtenido a partir de K_{ab} simplemente subiendo sus índices con la supermétrica. Para construir la hamiltoniana tenemos que invertir la ec.(3.26) para $\dot{\gamma}$ en términos de Π^{ab} . La manera más eficiente de lograr esto es encontrar la supermétrica inversa G_{abcd} definida por $G_{abcd} G^{cdef} = \delta^{ef}{}_{ab}$. Hay una manera estándar para invertir matrices de esta forma. Esto involucra darse cuenta que la expresión más general que G_{abcd} puede tomar es

$$G_{abcd} = \alpha \mathbf{1}_{abcd} + \beta \gamma_{ab} \gamma_{cd} . \quad (3.27)$$

Del requerimiento de que ésta sea la inversa de G^{abcd} encontramos fácilmente que $\alpha = 1$ y $\beta = -\frac{1}{n-2}$, de manera que*

$$G_{abcd} = \mathbf{1}_{abcd} - \frac{1}{n-2} \gamma_{ab} \gamma_{cd} . \quad (3.28)$$

* Notamos que G^{abcd} no es invertible cuando $n = 2$. En este caso ${}^1R = 0$ y $K_{11} K^{11} - K^2 = 0$, -- la acción es una divergencia total. Esto significa que no hay gravitación de Einstein en dos dimensiones.

En particular notamos que G_{abcd} no es simplemente G^{abcd} con los índices abajo. Afortunadamente jamás tendremos que bajar los índices de G^{abcd} , así que no hay posibilidad para confusión.

Podemos ahora expresar la velocidad $\dot{\gamma}_{ab}$ en términos de Π^{ab} , γ_{ab} y N^μ . Para hacer esto notamos que

$$\dot{\gamma}_{ab} = N_{a|b} + N_{b|a} - 2NK_{ab}, \quad (3.29)$$

como consecuencia de la ec.(3.14) donde K_{ab} está ahora dada en términos de Π^{ab} por

$$K_{ab} = -\gamma^{-1/2} G_{abcd} \Pi^{cd}. \quad (3.30)$$

Estamos finalmente en posición de escribir para la densidad hamiltoniana

$$\mathcal{H}(\gamma_{ab}, N^\mu, \Pi^{ab}) = N\{\gamma^{-1/2} \Pi^{ab} G_{abcd} \Pi^{cd} - \gamma^{1/2} ({}^dR - 2\Lambda)\} + \Pi^{ab} (N_{a|b} + N_{b|a}). \quad (3.31)$$

Podemos reescribir el término lineal en Π^{ab} como

$$\int d^d x \gamma^{1/2} \Pi^{ab} (\nabla_a N_b + \nabla_b N_a) = -2 \int d^d x \gamma^{1/2} \nabla_a \left(\frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{\gamma}} \right) N_b \quad (3.32)$$

módulo términos de superficie. Notemos que la derivada covariante de la densidad tensorial de peso 1 está definida por

$$\nabla_a \Pi^{ab} = \sqrt{\gamma} \nabla_a \left(\frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{\gamma}} \right). \quad (3.33)$$

Vale la pena hacer notar que la derivada covariante que utilizamos en la ec. (3.33) es la derivada inducida en las hipersuperficies espaciales. El hamiltoniano puede entonces ser escrito* en la siguiente forma:

$$H = \int d^d x N^\mu \mathcal{H}_\mu. \quad (3.34)$$

donde $\mathcal{H}_0 = \gamma^{-1/2} \Pi^{ab} G_{abcd} \Pi^{cd} - \gamma^{1/2} ({}^dR - 2\Lambda)$ y $\mathcal{H}_a = -2\nabla_b \Pi^{ab}$. El hamiltoniano H es ahora un funcional sobre el espacio fase descrito por las coordenadas γ_{ab} y sus momenta canónicos Π^{ab} que satisfacen los paréntesis de Poisson canónicos

$$\{\gamma_{ab}(x), \Pi^{cd}(y)\} = \delta_{ab}^{cd} \delta(x, y). \quad (3.35)$$

La función $\delta(x, y)$ que aparece aquí está definida sin referencia a la métrica

$$f(x) = \int d^d y f(y) \delta(x, y). \quad (3.36)$$

* No obstante que usamos notación vectorial para \mathcal{H}_μ , éste no es por supuesto un n vector. \mathcal{H}_0 es, sin embargo una densidad escalar, y \mathcal{H}_a es una $n - 1$ densidad vectorial.

Más generalmente definimos los paréntesis de Poisson entre dos funcionales en el espacio fase como

$$\{A(x), B(y)\} = \int d^d z \frac{\delta A(x)}{\delta \gamma_{ab}(z)} \frac{\delta B(y)}{\delta \Pi^{ab}(z)} - \frac{\delta A(x)}{\delta \Pi^{ab}(z)} \frac{\delta B(y)}{\delta \gamma_{ab}(z)}. \quad (3.37)$$

Las ecuaciones de movimiento describiendo la evolución de una función en el espacio fase están entonces dadas por

$$\dot{O}[\gamma_{ab}, \Pi^{ab}; t] = \{O, H\} + \partial_t O. \quad (3.38)$$

Las ecuaciones de movimiento para los multiplicadores N^μ implican las constricciones

$$\mathcal{H}_\mu = 0. \quad (3.39)$$

Alternativamente, más apegado a la prescripción de Dirac, pudimos haber introducido el hamiltoniano primario

$$H_p = H + \int d^d x P_\mu \dot{N}^\mu, \quad (3.40)$$

operando en un espacio fase extendido involucrando las P_μ 's y las N^μ 's satisfaciendo los paréntesis de Poisson canónicos†

$$\{N^\mu(x), P_\nu(y)\} = \delta^\mu_\nu \delta(x, y). \quad (3.41)$$

Entonces el requerimiento que las constricciones primarias $P_\mu = 0$ deben ser conservadas por el hamiltoniano implica

$$\{P_\mu(x), H_p(y)\} = 0 \quad (3.42)$$

de donde siguen las n (así llamadas) *constricciones secundarias*. Mientras que estas constricciones implican que H es numéricamente cero (es una combinación lineal de las constricciones módulo términos de superficie) no obstante esto no implica una evolución en el tiempo trivial dado que los paréntesis de Poisson de H con las variables canónicas no son cero. En el lenguaje de Dirac se dice que \mathcal{H}_μ es cero solo "débilmente".

El papel de las constricciones

Las constricciones $\mathcal{H}_\mu = 0$ son exactamente las ecuaciones de Einstein* $G_\mu^0 = 0$ en forma hamiltoniana. Las constricciones lineales en el momento

$$\mathcal{H}^b \equiv -2\nabla_a \Pi^{ab} = 0. \quad (3.43)$$

† Mientras que la introducción de las constricciones primarias asociadas con los multiplicadores aparecen aquí como un carga innecesaria, en el espacio fase extendido involucrando a la simetría BRST éstas aparecen con creces y juegan un papel central.

* $\mathcal{H}_0 = -\sqrt{\gamma} G^{\perp}_{\perp}$ y $\mathcal{H}_a = 2\sqrt{\gamma} R^{\perp}_a$.

son los análogos de la ley de Gauss en la teoría de Yang-Mills. Sin embargo en esta teoría $\vec{\Phi}^a \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}^a$ juega también el papel del generador de transformaciones de norma por medio de la transformación canónica infinitesimal en el espacio fase

$$\begin{aligned} \delta A^i_a(x) &= \int \varepsilon_b(y) \{A^i_a(x), \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}^b(y)\} d^3y \\ &= \nabla^i \varepsilon_a(x) \quad , \end{aligned} \quad (3.44)$$

mientras que los campos eléctricos Π_i^a transforman como tensores

$$\delta \Pi_i^a = \varepsilon_b f_c^{ab} \Pi_i^c. \quad (3.45)$$

Para la gravitación \mathcal{H}_a genera de la misma manera transformaciones de coordenadas espaciales infinitesimales en el espacio fase a través de los paréntesis de Poisson de γ_{ab} y Π^{ab} con \mathcal{H}_a :

$$\begin{aligned} \delta \gamma_{ab}(x) &= \int d^d x \xi^a \{\gamma_{ab}(x), \mathcal{H}_a\} = -\mathcal{L}_\xi \gamma_{ab}(x), \\ \delta \Pi^{ab}(x) &= \int d^d x \xi^a \{\Pi^{ab}(x), \mathcal{H}_a\} = -\mathcal{L}_\xi \Pi^{ab}(x), \end{aligned} \quad (3.46)$$

donde \mathcal{L}_ξ es la derivada de Lie en la dirección de ξ satisfaciendo $\mathcal{L}_\xi \gamma_{ab} = \xi_a|_b + \xi_b|_a$.

Las constricciones en la teoría de Yang-Mills

$$\{\Phi^a(x), \Phi^b(y)\} = f_c^{ab} \Phi^c(x) \delta(x, y) \quad ,$$

proveen, por medio de sus paréntesis de Poisson, una representación del álgebra de Lie del grupo de norma. De manera que en ambas teorías la formulación hamiltoniana lleva una representación de un grupo de Lie subyacente.

La pregunta inmediata es hasta qué punto entonces proporcionan las constricciones una representación del grupo de difeomorfismos de espacio tiempo $Diff M$. Teniendo en cuenta la ec.(3.40) esperaríamos que el álgebra de las constricciones lineales en la Relatividad General reproducirían el álgebra de Lie del grupo de difeomorfismos espaciales $diff m$.

Encontramos que

$$\{\mathcal{H}_a(x), \mathcal{H}_b(y)\} = [\mathcal{H}_b(x) \partial_a + \mathcal{H}_a(y) \partial_b] \delta(x, y). \quad (3.47)$$

lo cual justifica nuestras esperanzas†. Claramente es \mathcal{H}_0 el que lleva el contenido de la dinámica de la teoría. Mientras \mathcal{H}_a es lineal en el momento, el superhamiltoniano \mathcal{H}_0 es

† Los elementos de $diff m$ pueden ser identificados con campos vectoriales $\xi^a(x)$ satisfaciendo el álgebra del bracket de Lie

$$[\xi, \eta]^\alpha = \xi^\beta \partial_\beta \eta^\alpha - \eta^\beta \partial_\beta \xi^\alpha.$$

cuadrático, para lo cual no hay correspondencia en la teoría de Yang-Mills. Si \mathcal{H}_μ no fuese cero, se vería como un hamiltoniano regular de un sistema mecánico simple — la energía cinética cuadrática en el momento más un término de energía potencial. Sin embargo el término cinético no es positivo definido. Para ver esto examinaremos la signatura de la supermétrica. Esto está dado por los signos de los eigenvalores de G_{abcd} los cuales son obtenidos resolviendo la ecuación de eigenvalores

$$G_{ab}^{cd} t_{cd} = \lambda t_{ab}. \quad (3.48)$$

Estos eigenvalores están determinados por la condición $\det (G_{ab}^{cd} - \lambda \delta_{ab}^{cd}) = 0$. Para evaluar este determinante usamos la identidad $\det A = e^{\text{Tr} \ln A}$. Encontramos así que

$$\ln A \equiv \ln [\delta_{ab}^{cd} (1 - \lambda) - \frac{1}{n-2} \gamma_{ab} \gamma^{cd}] = \ln [\delta_{ab}^{cd} (1 - \lambda)] + \ln [\delta_{ab}^{cd} - \frac{\gamma_{ab} \gamma^{cd}}{(1 - \lambda)(n-2)}].$$

El primer término es igual a $\delta_{ab}^{cd} \ln(1 - \lambda)$. El segundo término se encuentra después de un poco de álgebra

$$\frac{1}{d} \ln [1 - \frac{d}{n-2} \frac{1}{1-\lambda}] \gamma_{ab} \gamma^{cd}.$$

donde hemos usado la notación $d \equiv n-1$. Adicionalmente $\text{Tr} \delta_{ab}^{cd} = \frac{1}{2} n(d)$, y $\text{Tr} \gamma_{ab} \gamma^{cd} = d$, de modo que

$$e^{\text{Tr} \ln A} = (1 - \lambda)^{\frac{n(d)}{2} - 1} \left(1 - \frac{d}{n-2} - \lambda \right).$$

La condición $e^{\text{Tr} \ln A} = 0$ implica que $\lambda = 1, \frac{n(d)}{2} - 1$ veces, y $\lambda = 1 - \frac{d}{n-2}$ una sola vez. Notamos pues que los signos de G_{ab}^{cd} son 1, $\frac{n(d)}{2} - 1$ veces y -1 una sola vez. A este respecto la restricción \mathcal{H}_0 es análoga a la restricción sobre el momento cuadridimensional de una partícula libre relativista (gravitación en cero dimensiones)

$$H = \eta^{\mu\nu} P_\mu P_\nu + m^2 = 0$$

Vale la pena notar que la supermétrica tiene signatura lorentziana, no obstante que está construida en términos de matrices con signatura euclidiana. Un hecho curioso es que la signatura lorentziana de la supermétrica no parece jugar un papel muy prominente en la teoría clásica, mientras que en la teoría cuántica esta presenta un mayor reto para la comprensión de la teoría. El cálculo de arriba ha demostrado sin embargo que las posibilidades son más reducidas que lo que podríamos haber imaginado. Las únicas signaturas admitidas por una métrica de la forma $\mathbf{1}^{abcd} + \beta \gamma^{ab} \gamma^{cd}$ son lorentzianas ó euclidianas.

Para completar el álgebra de los Paréntesis de Poisson entre las restricciones evaluamos

$$\{\mathcal{H}_0(x), \mathcal{H}_a(y)\} = \mathcal{H}_0(y) \partial_a \delta(x, y), \quad (3.49)$$

Esto equivale a decir que \mathcal{H}_0 se transforma como densidad escalar bajo transformaciones espaciales infinitesimales

$$\text{i.e.} \quad \delta \mathcal{H}_0(x) = \int d^d x \xi^a(y) \{\mathcal{H}_0(x), \mathcal{H}_a(y)\} = -\xi^a \partial_a \mathcal{H}_0.$$

lo cual era de esperarse dado que el superhamiltoniano es de hecho una densidad escalar. El elemento no trivial del álgebra de constricciones es

$$\{\mathcal{H}_0(x), \mathcal{H}_0(y)\} = [\gamma^{ab} \mathcal{H}_b(x) + \gamma^{ab} \mathcal{H}_b(y)] \partial_a \delta(x, y). \quad (3.50)$$

Funciones de estructura no triviales involucrando a la métrica inversa aparecen en el lado derecho de la ec.(3.50). Por lo tanto el álgebra de los paréntesis de Poisson no proporciona una representación del grupo completo de difeomorfismos del espacio tiempo. Esto quizá no debería sorprendernos ya que el procedimieto canónico involucra una elección específica de las superficies espaciales.

El álgebra de las constricciones ecs.(3.47,49 y 50) claramente forma un álgebra de primera clase en la terminología de Dirac. Lo que esto significa es que

$$\{\mathcal{H}_\mu(x), \mathcal{H}_\nu(y)\} \approx C_{\mu\nu}^\lambda \mathcal{H}_\lambda \quad (51)$$

— el paréntesis de Poisson de dos constricciones es combinación lineal de las mismas constricciones. Los funcionales de estructura pueden ser funciones arbitrarias en el espacio fase; en el caso gravitacional estos funcionales dependen solamente de las γ_{ab} 's. En el caso de la teoría de Yang-Mills hemos visto que éstas son constantes. El significado de dicha álgebra es que entonces las constricciones son preservadas por las ecuaciones de movimiento

$$\dot{\mathcal{H}}_\mu(x) = \int dy \mathcal{N}^\nu(y) \{\mathcal{H}_\mu(x), \mathcal{H}_\nu(y)\} = 0. \quad (3.52)$$

Si γ_{ab} y Π^{ab} son elegidos tales que $\mathcal{H}_\mu = 0$ a $t = 0$, entonces \mathcal{H}_μ seguirá siendo cero para cualquier tiempo posterior. Equivalentemente si las ecuaciones de Einstein $G_\mu^0 = 0$ se satisfacen a $t = 0$, entonces se mantienen para cualquier t subsecuente. En la formulación lagrangiana esto sigue como una consecuencia de las identidades contraídas de Bianchi $G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ y de las ecuaciones de movimiento $G_a{}^b + \Lambda \delta_a{}^b = 0$. Si escribimos las identidades de Bianchi

$$G_{\mu}{}^0{}_{,0} + G_{\mu}{}^a{}_{,a} + \Gamma_{\alpha\nu}^\nu G_{\mu}{}^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha G_{\alpha}{}^\nu, \quad (3.53)$$

vemos que el segundo término es cero. De igual forma el tercero y cuarto términos se cancelan idénticamente. Para ver el argumento anterior usamos el hecho de que las derivadas espaciales de las ecuaciones de movimiento son también cero. Además, $G_\mu^0 = 0$ a $t = 0$ implica que $G_0{}^\mu = 0$ a $t = 0$. De manera que $G_\mu^0 = 0$ si inicialmente lo es. Inversamente como demostraremos más adelante, si $G_0{}^\mu$ es igual a cero para todo tiempo entonces podemos mostrar que las demás ecuaciones de Einstein se satisfacen.

Es posible argüir que la forma explícita del álgebra de las constricciones

$$\begin{aligned} \{\mathcal{H}_0(x), \mathcal{H}_a(y)\} &= \mathcal{H}_0(y) \partial_a \delta(x, y), \\ \{\mathcal{H}_0(x), \mathcal{H}_0(y)\} &= [\gamma^{ab} \mathcal{H}_b(x) + \gamma^{ab} \mathcal{H}_b(y)] \partial_a \delta(x, y), \\ \{\mathcal{H}_a(x), \mathcal{H}_b(y)\} &= \mathcal{H}_a(y) \partial_b \delta(x, y) + \mathcal{H}_b(y) \partial_a \delta(x, y), \end{aligned}$$

es una consecuencia de la "consistencia" de la dinámica hamiltoniana con la cinética de las deformaciones [7]. Para ver esto introduzcamos unas cuantas definiciones.

Denotaremos el *hiperespacio* por \mathbf{H} el cual es el conjunto de todas las hipersuperficies m de tipo espacial y está caracterizado por la supermétrica G^{abcd} . Una hipersuperficie de tipo espacial es representada por un punto en \mathbf{H} . Las N funciones $X^\mu(\xi^a)$ de las $N-1$ coordenadas con la restricción que la métrica $\gamma_{ab} = g_{\mu\nu} X^\mu_a X^\nu_b$ sea positiva definida son coordenadas locales en \mathbf{H} .

Una deformación arbitraria de una superficie es un vector tangente en \mathbf{H} y puede ser descompuesta en sus partes normal y tangentes a la superficie. Infinitesimalmente se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \delta X^\mu &= \varepsilon t^\mu \\ &= \varepsilon (N \eta^\mu + N^a X^\mu_a), \end{aligned} \quad (3.54)$$

Una *deformación normal* involucra tomar un punto de la superficie y moverlo a lo largo de una geodésica normal a la superficie y está caracterizada infinitesimalmente por una sola función N (lapse). Esta función es exponenciada para dar el tiempo propio $\tau(\xi^a)$.

Por otra parte, las *deformaciones tangentes* ó *elongaciones* involucran una reetiquetación del espacio de los puntos en la superficie inmersa. Esta operación implica tomar el punto ξ^a de la superficie y despazarlo a lo largo de ésta a otra posición. Una elongación es un difeomorfismo en la superficie inmersa y está caracterizada infinitesimalmente por el vector (shift) N^a que exponencia a $\xi^a(\xi)$.

Una foliación (es decir una familia uniparametrizada de inmersiones X^μ) representa una curva en el hiperespacio \mathbf{H} y su campo vectorial tangente t^μ define una deformación infinitesimal para todo tiempo t . Consideremos ahora el caso de funcionales F definidos en la hipersuperficie, $F = F[X^\mu(\xi^a)]$ (F es entonces una función en \mathbf{H}). Bajo una deformación infinitesimal δX^μ , F cambia en la cantidad

$$\delta F = \int d^d \xi \frac{\delta F}{\delta X^\mu(\xi)} \delta X^\mu(\xi) \quad (3.55)$$

En particular se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F[X^\mu(\xi, t)] &= \int d^d \xi \frac{\partial X^\mu}{\partial t} \frac{\delta F}{\delta X^\mu} \\ &\equiv \int d^d \xi (N \delta_0 + N^a \delta_a) F, \end{aligned} \quad (3.56)$$

donde los generadores de deformaciones infinitesimales normal y espaciales, δ_0 y δ_a están dados por

$$\delta_0 \equiv \eta^\mu(\xi) \frac{\delta}{\delta X^\mu(\xi)} \quad \text{y} \quad \delta_a \equiv X^\mu_a(\xi) \frac{\delta}{\delta X^\mu(\xi)} \quad (3.57)$$

Notamos que sólo δ_0 involucra a la métrica espacio temporal. Es ahora directo demostrar que el álgebra de los brackets de Lie de los generadores de deformaciones δ_μ es la misma que el álgebra de las constricciones ecs.(3.47, 49 y 50). Mientras $\{\frac{\delta}{\delta X^\mu(\xi)}\}$ forma una base coordenada para el subespacio $T_x \mathbf{H}$, los generadores δ_0 y δ_a forman una base no holonómica y como consecuencia esperaríamos que el álgebra sea no trivial.

Adicionalmente puede demostrarse que si el álgebra de los paréntesis de Poisson se satisface, entonces los generadores \mathcal{H}_0 y \mathcal{H}_a asumirán las formas dadas. Entonces en particular la supermétrica debe ser lorentziana (no euclidiana) y el término potencial debe ser ${}^dR - 2\Lambda$ y no por ejemplo algún término cuadrático en ${}^dR_{abcd}$ [7].

Fijando la norma

El problema de valores iniciales involucra especificar γ_{ab} y Π^{ab} satisfaciendo las constricciones sobre una superficie espacial. La evolución subsecuente de las coordenadas en el espacio fase físico está determinada por las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_{ab} &\equiv \{\gamma_{ab}, H\} \\ &= -2NK_{ab} + N_{a|b} + N_{b|a}.\end{aligned}\quad (3.29)$$

$$\begin{aligned}\dot{\Pi}^{ab} &\equiv \{\Pi^{ab}, H\} \\ &= -N\gamma^{1/2}(R^{ab} - \frac{1}{2}\gamma^{ab}R) + \frac{1}{2}N\gamma^{-1/2}\gamma^{ab}(\Pi^{cd}\Pi_{cd} - \frac{1}{2}\Pi^2) \\ &\quad - 2N\gamma^{-1/2}(\Pi^{ac}\Pi_c{}^b - \frac{1}{2}\Pi\Pi^{ab}) + \gamma^{1/2}(N^{lab} - \gamma^{ab}N^c{}_{|c}) \\ &\quad + (\Pi^{ab}N^c)_{|c} - N^a{}_{|c}\Pi^{cd} - N^b{}_{|c}\Pi^{ca}.\end{aligned}\quad (3.58)$$

La ecuación de movimiento para γ_{ab} simplemente reproduce la definición del momento canónico mientras que las ecuaciones para Π^{ab} reproducen las ecuaciones $G^a{}_b + \Lambda\delta^a{}_b = 0$. Como hemos visto las constricciones son preservadas por las ecuaciones de movimiento.

Los movimientos en el espacio fase inicial de dim $2N$ están restringidos por las M ecuaciones de las constricciones. Además, sin embargo las soluciones de las ecuaciones de Einstein involucran a los multiplicadores de Lagrange N^μ los cuales son funciones arbitrarias de t que no están determinadas por las condiciones iniciales.

Como se sabe del ejemplo de la teoría de Yang-Mills*, habremos de identificar los movimientos en esta superficie de dimensión $2N - M$ que están relacionados por transformaciones canónicas generadas por las constricciones. Entonces las constricciones juegan dos papeles. El espacio fase físico representando los grados de libertad reales está entonces identificado con las clases de equivalencia de las soluciones de las ecuaciones de movimiento.

Si consideramos que podemos elegir una configuración inicial a un cierto tiempo dado, tenemos entonces que desechar la norma $N^\mu = 0$ dado que ésta representa una singularidad de las coordenadas (no habría evolución de los datos iniciales). Esto debería de ser contrastado con el caso de la teoría de Yang-Mills con \mathcal{H}_c distinto de cero. Parametrizamos el espacio fase eligiendo un representante de cada clase†.

* Véase por ejemplo el Apéndice A.

† Desafortunadamente no es generalmente posible fijar la norma de manera global en el espacio fase. Lo que esto significa es que la condición de la norma (véase más adelante) no fijará un miembro único en cada clase de equivalencia u órbita del grupo de norma (ambigüedad de *Gribov*).

Entonces la dimensión del espacio fase físico es $2(N - M)$. Por lo tanto en cuatro dimensiones el espacio fase físico ó reducido de la relatividad general es cuatridimensional correspondiendo a los dos grados de libertad reales del campo gravitacional. En la formulación lagrangiana n condiciones coordenadas son elegidas para romper la invariancia bajo difeomorfismos de espacio tiempo $\text{Diff } M$. En cuatro dimensiones hay seis ecuaciones dinámicas, que sujetas a las cuatro condiciones dejan dos ecuaciones independientes las cuales de nuevo corresponden a los dos grados de libertad físicos. Esto se ilustra en la figura de abajo:

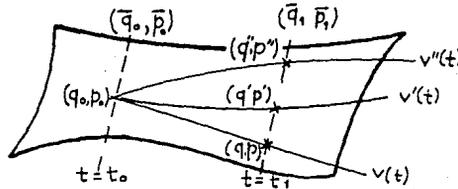


Fig. 3.3. Para $t > t_0$ obtenemos diferentes valores de (q, p) dependiendo de la elección de los $v(t)$.

Un método de fijar la norma involucra imponer M condiciones adicionales (llamadas *normas canónicas*) de la forma

$$\Omega^\alpha(\gamma, \Pi, t) = 0, \quad (3.59)$$

los cuales satisfacen

$$\text{Det} \{ \Omega^\alpha, \chi_\mu \} \neq 0, \quad (3.61)$$

donde Det representa un determinante funcional. Una característica de una norma canónica es que no involucra a los multiplicadores de Lagrange. En el formalismo de Dirac la ec.(61) equivale convertir las constricciones de primera clase χ_μ en constricciones de segunda clase, pidiendo que el paréntesis de Poisson del hamiltoniano con las normas sea cero sólo débilmente.

Supogamos que $\{ \Omega^\alpha, \Omega^\beta \} = 0$. Entonces podremos identificar cada Ω^α con los miembros de un par canónicamente conjugado, digamos Q^α . El requerimiento de que el determinante de los paréntesis de Poisson sea distinto de cero implica que las constricciones $\chi_\alpha = 0$ pueden ser resueltas para los asociados P_α . Sean los restantes pares canónicamente conjugados q^A, Π_A , entonces el espacio fase reducido está parametrizado por q^A, Π_A (los grados de libertad físicos)

$$\begin{aligned} Q^\alpha &= 0 \\ P_\alpha &= P_\alpha(q^A, \Pi_A, t). \end{aligned} \quad (61)$$

En la práctica, sin embargo, esta reducción nunca ha sido explícitamente realizada.

Antes de discutir nuestro caso consideremos la situación en la teoría de Yang-Mills. En esta teoría vemos que A^0 juega el papel de un multiplicador de Lagrange (Apéndice A). Para fijar A^0 la norma canónica debe tener paréntesis de Poisson distintos de cero con las constricciones de Gauss. No se necesita una dependencia temporal explícita porque

$H_c \neq 0$. La norma de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, por ejemplo, satisfará generalmente estas propiedades. En efecto, en esta norma $A^0 = 0$ en ausencia de materia ya que

$$\{H_c, \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\} \sim \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} = 0.$$

Más generalmente, A^0 es dada en términos de la componente cero de la densidad de carga. A^0 es frecuentemente llamada la *Norma Temporal*. Mientras que en el marco en cual hemos estado trabajando, $A^0 = 0$ no es propiamente una norma, sin embargo en el marco de un espacio fase más grande donde A^0 y su momento conjugado son agregados a \vec{A} y $\vec{\Pi}$, el término sería apropiado. Las condiciones $A^0 = 0$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ (en ausencia de materia) constituyen la norma de radiación. Otro ejemplo es provisto por $\hat{n} \cdot \vec{A} = 0$ (*Norma Axial*). Ahora A_0 es fijado de manera que sea la solución a la ecuación diferencial

$$\hat{n} \cdot \vec{\Pi} + \hat{n} \cdot \vec{\nabla} A_0 = 0.$$

Los pares conjugados no constreñidos A_i, Π^i , ($i=1,2$) son buenas coordenadas en el espacio fase reducido.

Lo que complica la situación en el caso de teorías invariantes bajo reparametrizaciones es que el hamiltoniano es enteramente una restricción, de manera que en general una dependencia explícita del tiempo será requerida en la norma para fijar los multiplicadores.

En el caso de la gravitación la dependencia temporal de las N^μ está determinada de una vez por todas por el requerimiento de que las Ω^α sean preservadas. Lo que esto implica es que

$$\int dy \{ \Omega^\alpha(x,t), \mathcal{H}_\beta(y) \} N^\beta(y) + \partial_t \Omega^\alpha(x,t) = 0. \quad (3.62)$$

Esta ecuación se puede ahora invertir, en principio, para los multiplicadores dado que el determinante ec.(3.61) es distinto de cero. Diferentes selecciones de norma determinan diferentes foliaciones del espacio tiempo. Encontramos aquí una característica general de una teoría invariante bajo reparametrizaciones. La norma canónica debe tener en general al menos un miembro con una dependencia explícita del tiempo. Si no fuese así la dinámica estaría "congelada". Esto es estrictamente cierto únicamente en un universo cerrado. En el caso de un espacio asintóticamente plano esto no es cierto. Hay normas canónicas independientes del tiempo en donde la condición $N \rightarrow 1$ y $N^a \rightarrow 0$ en coordenadas asintóticamente euclidianas en la frontera, determina de manera única a N^μ en términos de las variables canónicas. En tales casos, N representa una eigenfunción nula de $\{ \Omega^\alpha, \mathcal{H}_\mu \}$ de manera que la condición ec.(3.61) no se satisface. Por ejemplo, la norma de Dirac

$$\Omega^0 = K = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \gamma_{ab} \Pi^{ab} = 0,$$

$$\Omega^a \equiv (\sqrt{\gamma} \gamma^{ab})_{|b} = 0,$$

la cual corresponde a un deslizamiento por una superficie maximal descrita por coordenadas armónicas. La conservación de Ω^μ implica

$$\nabla^2 N - {}^d R N = 0, \\ \left[\sqrt{\gamma} (N^{ab|b} + N^{b|a} - \gamma^{ab} N^c{}_{|c}) + 2N \Pi^{ab} \right]_{|b} = 0$$

Estas ecuaciones pueden ser resueltas para N^μ sujeta a las condiciones de frontera en un espacio tiempo asintóticamente plano. En un espacio compacto ${}^dR \neq 0$, ya sea que no haya solución física admisible ó que no haya solución alguna. En tal tipo de espacio una condición de la forma $K - ct = 0$ sería una adecuada elección de norma.

Consideremos ahora una condición de norma canónica de la forma $\Omega^\alpha(\gamma, t) = 0$. Esto no involucra los momenta de manera que pueden ser considerados como condiciones de norma en el espacio de configuración — superespacio. Estas condiciones definen una familia uniparamétrica de superficies de dos dimensiones ($6-4=2$) en el superespacio \mathcal{S} . Estas superficies pueden ser en principio parametrizadas por los dos grados de libertad físicos. Lo que es interesante acerca de esto es que no hay nada que indique que éstas superficies son de un tipo en especial, temporal ó espacial.

Las normas no canónicas involucrando directamente a los multiplicadores de Lagrange son frecuentemente escritas en la forma

$$\tilde{N}^\mu = \chi^\mu(\gamma, \pi, N, t). \quad (3.63a)$$

De esta manera es claro que estos corresponden a las así llamadas normas relativistas en el caso de la teoría de Yang-Mills. Por ejemplo la norma de Lorentz

$$\tilde{A}^0 = \partial \cdot \vec{A}$$

Debería notarse sin embargo que no podemos tener una norma canónica covariante en la teoría completa de la relatividad general. Para nuestros propósitos clásicos esto sirve tan bien como escribir la ec.(3.64a) en una forma “canónica”

$$\Omega^\mu(\gamma, \Pi, N, t) = 0 \quad (3.63b)$$

ó resolviendo para N , es decir $N^\mu = \Psi^\mu(\gamma, \Pi, t)$. La dependencia explícita de t no es ya esencial.

En gravitación la norma no canónica más útil es la *norma de tiempo propio* que corresponde a $\chi^\mu = 0$ ó explícitamente

$$N^0 = 1 \quad \text{y} \quad N^a = 0. \quad (3.64)$$

En este caso la métrica toma la forma

$$ds^2 = -dt^2 + \gamma_{ab}(x, t) dx^a dx^b. \quad (3.65)$$

Para x constante t es entonces el tiempo propio. Estas son entonces coordenadas gaussianas construidas sobre la superficie. La curvatura extrínseca tiene una expresión particularmente simple en estas coordenadas

$$K_{ab} = -\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ab}, \quad (3.66)$$

la curvatura extrínseca es justamente la velocidad de la métrica γ_{ab} . En particular la traza de la curvatura es $K = \ln \sqrt{\gamma}$. Más generalmente, la curvatura extrínseca tiene una bonita interpretación geométrica como el cambio de la métrica espacial cuando la superficie es “empujada” en una unidad de distancia propia en la dirección de la normal. Así, si la curvatura K_{ab} desaparece, diremos que m es estática. Por otra parte, si solo $K = \gamma^{ab} K_{ab}$ es cero, entonces decimos que m es una superficie extremal —el elemento de volumen local es un máximo ó un mínimo.

Espacio Tiempo asintóticamente plano y Términos de Superficie

El espacio fase es descrito por las coordenadas γ_{ab} y sus momenta canónicos Π^{ab} . En un espacio tiempo asintóticamente plano describiendo un sistema gravitacional aislado, una métrica físicamente razonable tiene la forma de Schwarzschild en el infinito espacial [10]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left(\delta_{ab} + \frac{M}{r^2} x_a x_b \right) dx^a dx^b. \quad (3.67)$$

Más específicamente, supondremos que fuera de un conjunto compacto, m_t es difeomorfa a algún número de copias de \mathbf{R}^3 menos un conjunto compacto.

Sea r una coordenada radial en la métrica euclidiana sobre \mathbf{R}^3 . Entonces requeriremos que γ_{ab} tenga la forma

$$\gamma_{ab}(x^a) = \delta_{ab} + \frac{1}{r} S_{ab}(\hat{x}^a) + \mathcal{O}(r^{2+\epsilon}). \quad (3.68)$$

S_{ab} es suave sobre S^2 , el término restante decae más rápido que $1/r$. Requeriremos que S tenga paridad par, es decir

$$S_{ab}(\hat{x}^c) = S_{ab}(-\hat{x}^c). \quad (3.69)$$

Nótese que esto es menos restrictivo que el requerimiento de que γ_{ab} tome la forma de la métrica de Schwarzschild en el infinito espacial. Un decaimiento más rápido de la condición sobre γ daría energía cero (ver más abajo). El teorema de la positividad de la energía entra entonces en el juego — requiriendo que la solución de las constricciones sea el espacio plano. Un decaimiento menos rápido daría, por otra parte una integral de la energía divergente.

Para completar la especificación del espacio fase físico requeriremos la condición de decaimiento de los momenta Π^{ab}

$$\Pi^{ab} = \frac{1}{r^2} t^{ab}(\hat{x}^c) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{2+\epsilon}}\right), \quad (3.70)$$

donde t^{ab} es suave sobre S^2 , y requeriremos además que tenga paridad impar

$$t^{ab}(\hat{x}^c) = -t^{ab}(-\hat{x}^c). \quad (3.71)$$

El decaimiento de Π^{ab} permite que el término en

$$\int d^d x \Pi^{ab} \dot{\gamma}_{ab}, \quad (3.72)$$

diverja logarítmicamente. Sin embargo en infinito la integral se reduce a una función par por otra impar lo que integra a cero. La condición de paridad en γ y Π no puede ser revertida. Una paridad impar en γ daría una integral de la energía cero.

Por otra parte si el hamiltoniano H va a dar las ecuaciones de movimiento correctas, entonces tiene que ser diferenciable:

$$\delta H = \int d^d x \left\{ \left(\frac{\delta H}{\delta \gamma_{ab}} \right) \delta \gamma_{ab} + \left(\frac{\delta H}{\delta \Pi^{ab}} \right) \delta \Pi^{ab} \right\}. \quad (3.73)$$

Para H puramente constricción

$$H = \int d^d x \mathbf{N}^\mu \mathcal{H}_\mu, \quad (3.74)$$

encontramos que

$$\begin{aligned} \delta H = \int d^d x \{ A^{ab} \delta \gamma_{ab} + B_{ab} \delta \Pi^{ab} \} - \int dS_d \sqrt{\gamma} G^{abcd} (N \delta \gamma_{ab|c} - N_c \delta \gamma_{ab}) \\ - \int dS_d [2N_c \delta \Pi^{cd} + (2N^c \Pi^{bd} - N^d \Pi^{bc}) \delta \gamma_{bc}] \end{aligned} \quad (3.75)$$

Los términos de superficie desaparecen si $\mathbf{N}^\mu = k^\mu(\hat{x}^\mu) + \mathcal{O}(r^{-\epsilon})$, donde k^μ es impar en S^2 . Tales variaciones son propias. El problema es que estas condiciones de frontera en N no corresponden a la situación física donde

$$N^0 \approx 1 + \mathcal{O}(r^{-1}), \quad N^i \approx \mathcal{O}(r^{-1})$$

Mientras que el decaimiento de N^i es más fuerte, el de N^0 es más débil. Un término de superficie sobrevive. Entonces

$$\begin{aligned} - \int dS_d \sqrt{\gamma} G^{abcd} \delta \gamma_{ab|c} = -\delta \int dS_b (\gamma_{ab,a} - \gamma_{aa,b}) \\ \equiv -\delta E[\gamma]. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Para recobrar un hamiltoniano diferenciable, simplemente agregamos $E[\gamma]$ al hamiltoniano que consta únicamente de las constricciones

$$\bar{H} = H + E[\gamma]. \quad (3.77)$$

Entonces $A^{ab} = \frac{\delta \bar{H}}{\delta \Pi^{ab}}$ y $B_{ab} = \frac{\delta \bar{H}}{\delta \gamma_{ab}}$, y las ecuaciones de movimiento se siguen de

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{ab} &= \{ \gamma_{ab}, \bar{H} \} \\ \dot{\Pi}^{ab} &= \{ \Pi^{ab}, \bar{H} \} \end{aligned} \quad (3.78)$$

E es entonces la energía ADM y su valor es exactamente M .

En la misma manera en que la relajación de N^0 involucra la introducción de la energía ADM, \mathbf{N}^μ puede ser adicionalmente relajada y dar aún un hamiltoniano H diferenciable con la adición de términos de superficie adicionales.

CAPITULO 4

El formalismo de la Vielbein

En esta sección introducimos los marcos móviles (ó vielbein) vía el Principio de Equivalencia. Asumimos pues que, el espacio tiempo es localmente Minkowskiano. Podemos entonces referir las estructuras del espacio tiempo general, a un marco localmente inercial. En particular, cuando consideramos el caso de la curvatura y la torsión esto nos lleva, naturalmente a lo que en la literatura se conoce como las ecuaciones de estructura de Cartan.

En cualquier punto x_0 del espacio tiempo siempre podemos construir (Principio de Equivalencia) un conjunto de coordenadas localmente inercial tal que la métrica toma la forma de Minkowski

$$ds^2 = \eta_{ab} d\xi_{x_0}^a(x) d\xi_{x_0}^b(x). \quad (4.1)$$

en el punto x_0 . Estas coordenadas son únicas hasta transformaciones de Lorentz:

$$\xi_{x_0}^{\prime a}(x_0) = \Lambda^a_b(x_0) \xi^b(x_0)$$

donde

$$\eta_{ab} \Lambda^a_c \Lambda^b_d = \eta_{cd}.$$

Para describir la física en otros sistemas de coordenadas $\{x^\mu\}$ hacemos una transformación de coordenadas de $\xi_{x_0}^a$ a x^μ . En particular

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x_0) &= \left(\frac{\partial \xi_{x_0}^a(x)}{\partial x^\mu} \right)_{x=x_0} \left(\frac{\partial \xi_{x_0}^b(x)}{\partial x^\nu} \right)_{x=x_0} \eta_{ab}, \\ &\equiv e^a_\mu(x_0) e^b_\nu(x_0) \eta_{ab}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Definimos entonces una *vielbein* como sigue

$$e^a_\mu(x_0) \equiv \left(\frac{\partial \xi_{x_0}^a(x)}{\partial x^\mu} \right)_{x=x_0}. \quad (4.3)$$

y su inversa e^μ_a

$$e^a_\mu e^\mu_b = \delta^a_b, \quad (4.4)$$

$$e^a_\mu e^\nu_a = \delta^\nu_\mu, \quad (4.5)$$

e^{μ}_b es obtenida a partir de e^a_{μ} subiendo y bajando índices de la ecuación (4.2) es decir $e^{\mu}_a = g_{\mu\nu} \eta_{ab} e^b_{\nu}$. El tensor de la métrica $g_{\mu\nu}$ ($g^{\mu\nu}$) sirve para bajar (subir) índices de espacio tiempo mientras que la matriz η_{ab} (η^{ab}) sirve para bajar (subir) índices de Lorentz. Vale la pena detenerse un poco aquí para examinar lo que hemos hecho. Construir una vielbein significa que en cada punto x_0 de nuestra N -variedad estamos fijando d campos vectoriales $e^a_{\mu}(x_0)$ (si la variedad es el espacio tiempo cuadridimensional de la Relatividad entonces fijamos cuatro campos vectoriales, la tetrad) que constituyen una base para dicha variedad en el punto. De manera que el índice latino de la vielbein es una etiqueta ó "índice interno". La utilidad del presente formalismo radica en que nosotros podemos proyectar sobre estos campos vectoriales a cualquier objeto definido en la variedad, de manera que podemos calcular componentes de campos sobre la variedad. La situación se ilustra en figura siguiente:

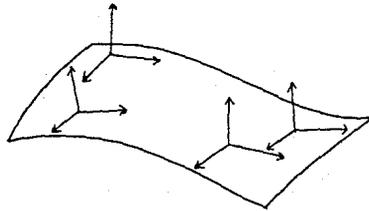


Fig. 4.1. La base de la vielbein.

Imaginemos ahora que hacemos una elección continua de la vielbein e^a_{μ} en cada punto del espacio tiempo†. Esto nos permite calcular componentes, es decir escalares, de objetos en la variedad, y es, regularmente, más fácil trabajar con escalares. El precio que tenemos que pagar es que la vielbein se transformará, en general de una manera no trivial de un punto a otro.

La vielbein se transforma como un tensor contravariante de Lorentz y como un tensor covariante de espacio tiempo [4]. Podemos reescribir las ecs.(4.4- 4.5) como sigue:

$$e^a_{\mu} e^b_{\nu} g^{\mu\nu} = \eta^{ab}, \quad (4.6)$$

$$g_{\mu\nu} = e^a_{\mu} e^b_{\nu} \eta_{ab}. \quad (4.7)$$

Geoméricamente la ecuación (4.6) representa el hecho que e^a_{μ} forma una base ortogonal para el espacio tangente mientras que la ec.(4.7) establece la completez de la base, lo que nos permite también identificar a e^a_{μ} como la raíz cuadrada de la métrica.

Usando entonces la vielbein es posible expresar cualquier tensor de espacio tiempo en términos de tensores de Lorentz y viceversa.

† Estrictamente hablando, no siempre podemos hacer esto. Asumimos aquí que la N -variedad es lo suficientemente "suave" como para aceptar tal elección continua.

$$T_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_m} = e^{\mu_1 a_1} \dots e^{b_n \nu_n} T_{b_1 \dots b_n}^{a_1 \dots a_m}.$$

Tenemos ahora dos principios de invariancia:

- (i) Covariancia General
- (ii) Invariancia Local de Lorentz

Por una parte hay tensores de espacio-tiempo que transforman bajo la transformación de coordenadas $x'^{\mu} = x'^{\mu}(\dot{x})$ como sigue

$$T'_{\beta_1 \dots \beta_n}{}^{\alpha_1 \dots \alpha_m}(x') = \frac{\partial x'^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_n}}{\partial x'^{\beta_n}} T_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_m}(x).$$

Tenemos también campos que transforman bajo varias representaciones $\mathcal{D}(\Lambda)$ del grupo local de Lorentz* en el punto x

$$T'^A(x) = \mathcal{D}(\Lambda(x)){}^A{}_B T^B(x). \quad (4.8)$$

El tensor de Lorentz T^A es un escalar de espacio tiempo. Si Λ_1 y Λ_2 son dos transformaciones de coordenadas de Lorentz la representación \mathcal{D} satisface

$$\mathcal{D}(\Lambda_1 \Lambda_2){}^A{}_B \equiv \mathcal{D}(\Lambda_1){}^A{}_C \mathcal{D}(\Lambda_2){}^C{}_B. \quad (4.9)$$

Los índices A, B, \dots son usados aquí a manera de "taquigrafía" para representar los índices de Lorentz relevantes. La introducción de una derivada covariante de Lorentz se sigue de la misma manera que para la derivada covariante de espacio tiempo. Por razones de comparación revisemos primero como es introducida la derivada covariante de espacio tiempo. Bajo una transformación de coordenadas las derivadas de los campos tensoriales se transforman como

$$\partial'_\rho V'^{\alpha}(x') = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\rho} \left\{ \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^\mu} \partial_\sigma V^\mu(x) + \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^\sigma \partial x^\mu} V^\mu(x) \right\}. \quad (4.10)$$

Con el objeto de eliminar el segundo término dentro de las llaves en la ec.(4.6) introducimos la *conexión afín* $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ que transforma de manera que cancela este término

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x) \rightarrow \Gamma'_{\alpha\beta}{}^{\mu}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\beta}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\nu}(x) - \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}}. \quad (4.11)$$

El término inhomogéneo en la transformación de $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x)$ es simétrico en α, β (ec.(4.7)), de manera que *la torsión*

$$T_{\alpha\beta}^\mu \equiv \Gamma_{\alpha\beta}^\mu - \Gamma_{\beta\alpha}^\mu \quad (4.12)$$

* En contraste con una transformación genuina de Lorentz de un campo tensorial en el espacio tiempo de Minkowski

$$T'^A(x') = \mathcal{D}(\Lambda(x)){}^A{}_B T^B(x) \quad , \quad x' = \Lambda x.$$

La ecuación (4.8) es el análogo de una transformación tensorial en una teoría de norma.

es un tensor. Ahora definimos la derivada covariante como

$$D_{\alpha}V^{\beta} \equiv \partial_{\alpha}V^{\beta} + \Gamma_{\gamma\alpha}^{\beta}V^{\gamma}. \quad (4.13)$$

la cual transforma como tensor. Por analogía con el caso anterior ahora construimos una derivada covariante de Lorentz. Bajo una transformación local de Lorentz la derivada de los campos transforma como sigue:

$$\partial_{\mu}V^A \rightarrow D(\Lambda(x))^A_B \partial_{\mu}V^B + D(\Lambda(x))^A_B D^{-1}(\Lambda(x))^B_C \partial_{\mu}D(\Lambda(x))^C_D V^D. \quad (4.14)$$

Una vez más, para cancelar los términos adicionales en la derivada introducimos la conexión Ω_{μ} que transforma tal que cancela el término no tensorial en ec.(4.14), esto es bajo transformaciones locales de Lorentz

$$d(\Omega_{\mu}(x)) \rightarrow D(\Lambda(x))d(\Omega_{\mu})D^{-1}(\Lambda(x)) - \partial_{\mu}D(\Lambda(x))D^{-1}(\Lambda(x)). \quad (4.15)$$

Ω_{μ} es un vector covariante de espacio tiempo. Ahora la derivada covariante definida por

$$D_{\mu}V^A \equiv \partial_{\mu}V^A + d(\Omega_{\mu})^A_B V^B. \quad (4.16)$$

se transformará como un tensor bajo transformaciones locales de Lorentz. Además, cada uno de los términos en la ec.(4.16) es un vector de espacio tiempo. Como veremos más adelante $d(\Omega)$ está definida en el álgebra de Lie d correspondiente a la representación D del grupo de Lorentz. Si un campo tensorial lleva tanto índices de espacio tiempo como de índices de Lorentz, entonces la derivada covariante tendrá un término de conexión para cada tipo de índice, por ejemplo

$$D_{\mu}V_{\nu}^A = \partial_{\mu}V_{\nu}^A + d(\Omega_{\mu})^A_B V_{\nu}^B - \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}V_{\alpha}^A. \quad (4.17)$$

Vale la pena remarcar que hasta este momento hemos encontrado dos operadores derivada que actúan sobre campos distintos; por una parte la derivada covariante usual ec.(4.13) la cual actúa sobre tensores de espacio tiempo y que denotamos por D_{μ} . Además, asociada a campos de Lorentz tenemos la derivada D_{μ} . Por último, la derivada D_{μ} actúa tanto sobre índices de espacio tiempo como sobre índices de Lorentz. En lo que resta de esta sección mantendremos las convenciones anteriores.

Con el propósito de construir una base para la representación del álgebra de Lie d examinemos primero las transformaciones locales infinitesimales de Lorentz:

$$\Lambda^a_b(x) = \delta^a_b + \theta^a_b(x), \quad \text{donde } \theta_{ab} = -\theta_{ba}. \quad (4.18)$$

La representación $D(\Lambda)$ puede escribirse como

$$D(\Lambda)^A_B = \delta^A_B + \frac{1}{2}\theta^{ab}(x)[\sigma_{ab}]^A_B + \dots \quad (4.19)$$

Las matrices de espín σ_{ab} son antisimétricas en a, b y satisfacen la siguiente álgebra [4]

$$[\sigma_{ab}, \sigma_{cd}] = \eta_{cb}\sigma_{ad} - \eta_{ca}\sigma_{bd} + \eta_{db}\sigma_{ca} - \eta_{da}\sigma_{cb}. \quad (4.20)$$

σ_{ab} forma una base para d . En la representación definida por ec.(4.18), $\theta^{mn} = \frac{1}{2}\theta^{ab}(\sigma_{ab})^{mn}$ de manera que

$$(\sigma_{ab})^{mn} = \delta_a^m \delta_b^n - \delta_a^n \delta_b^m. \quad (4.21)$$

En general podemos expandir $d(\Omega_\mu)$ en la base de las σ_{ab}

$$d(\Omega_\mu)^A{}_B \equiv \frac{1}{2}\omega_\mu^{ab}(\sigma_{ab})^A{}_B. \quad (4.22)$$

Como consecuencia de la antisimetría de las matrices σ_{ab} sigue la antisimetría de ω_μ^{ab} , $\omega_\mu^{ab} \equiv -\omega_\mu^{ba}$, ó equivalentemente $D_\mu \eta^{ab} = 0$. La versión infinitesimal de la ley de transformación ec.(4.15) es

$$\delta d(\Omega_\mu) = \frac{1}{2}\theta^{ab}[\sigma_{ab}, d(\Omega_\mu)] - \frac{1}{2}\sigma_{ab}\partial_\mu\theta^{ab}. \quad (4.23)$$

En términos de ω_μ^{ab} podemos escribir las ecuaciones ec.(4.15) y ec.(4.23)

$$\omega'_{\mu}{}^a{}_b = \Lambda^a{}_c \omega_\mu{}^c{}_d (\Lambda^{-1})^d{}_b - \partial_\mu \Lambda^a{}_c (\Lambda^{-1})^c{}_b. \quad (4.24)$$

Curvatura de la Vielbein

Definimos la curvatura a través de la identidad de Ricci. Esto involucra tomar el conmutador de las derivadas covariantes sobre un tensor de Lorentz. Mediante un cálculo directo encontramos

$$[D_\mu, D_\nu]V^A = \frac{1}{2}(\sigma_{ab})^A{}_B(\partial_\mu\omega_\nu{}^{ab} - \partial_\nu\omega_\mu{}^{ab})V^B + \frac{1}{4}[\sigma_{cd}, \sigma_{ab}]^A{}_B\omega_\mu{}^{cd}\omega_\nu{}^{ab}V^B + T_{\mu\nu}^\rho D_\rho V^A. \quad (4.25)$$

Haciendo ahora uso del álgebra de Lie (ec.(4.20)) podemos combinar los términos lineales y cuadráticos en $\omega_\mu{}^a{}_b$ de manera que

$$[D_\mu, D_\nu]V^A = \frac{1}{2}R^{ab}{}_{\mu\nu}(\sigma_{ab})^A{}_B V^B + T_{\mu\nu}^\rho D_\rho V^A. \quad (4.26)$$

donde definimos el *tensor de curvatura*:

$$R^a{}_{b\mu\nu} \equiv \partial_\mu\omega_\nu{}^a{}_b + \omega_\mu{}^a{}_c\omega_\nu{}^c{}_b - (\mu \leftrightarrow \nu). \quad (4.27)$$

La simetría $R_{ab\mu\nu} = -R_{ab\nu\mu}$ sigue debido a la antisimetría de $\omega_\mu{}^{ab}$ independientemente de la torsión $T_{\mu\nu}$.

Hasta el momento el grupo de Lorentz no ha jugado un papel muy diferente de los grupos de norma en las teorías de Yang-Mills. Lo que distingue a la teoría de norma de

Lorentz de otras teorías de norma es la existencia de la vielbein e_a^μ la cual nos permite convertir índices de Lorentz en índices de espacio tiempo y viceversa

$$V^\mu \equiv e_a^\mu V^a, \quad \text{e inversamente } V_\mu = e_\mu^a V_a. \quad (4.28)$$

Hasta este punto tenemos dos conexiones independientes, ω_μ^{ab} correspondiente al grupo de Lorentz y $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ asociada al grupo $GL(n, \mathbf{R})$. Estas están relacionadas por el requerimiento que la diferenciación covariante conmute con la operación de intercambiar índices de Lorentz con índices de espacio tiempo, lo que implica que la derivada covariante de la vielbein desaparece $D_\mu e_a^\nu = 0$, ó explícitamente

$$\partial_\mu e_a^\nu + \Gamma_{\alpha\mu}^\nu e_a^\alpha - \omega_\mu^b{}_a e_b^\nu = 0. \quad (4.29)$$

Como consecuencia la conexión ω_μ^{ab} puede expresarse en términos de la conexión $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ y de la derivada de la vielbein:

$$\begin{aligned} \omega_\mu^{ab} &= e_\nu^a \{ \partial_\mu e_b^\nu + \Gamma_{\alpha\mu}^\nu e_b^\alpha \}, \\ &= e_\nu^a D_\mu e_b^\nu. \end{aligned} \quad (4.30)$$

En esta expresión D_μ actúa únicamente sobre índices de espacio tiempo.

La *condición métrica* $D_\mu e_a^\nu = 0$ implica la condición métrica usual $D_\mu g_{\alpha\beta} = 0$ en el espacio tiempo. Notemos que si ω_μ^{ab} no hubiese pertenecido a un álgebra de Lie, lo que implica que $\omega_{\mu[ab]} = 0$, de todas formas la condición métrica recobraría la antisimetría en a, b , lo que puede verse de la ec.(4.30).

La condición métrica también permite relacionar la curvatura en la vielbein $R^{ab}{}_{\mu\nu}$ con la curvatura en el espacio tiempo $R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}$. Para ver esto comparamos dos formas de las identidades de Ricci:

$$[D_\mu, D_\nu]V^a = R^a{}_{b\mu\nu}V^b + T_{\mu\nu}{}^\rho D_\rho V^a, \quad (4.31a)$$

$$[D_\mu, D_\nu]V^\alpha = R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}V^\beta + T_{\mu\nu}{}^\rho D_\rho V^\alpha, \quad (4.31b)$$

de las cuales es fácil ver que

$$R^a{}_{b\mu\nu} = e_\alpha^a e_b^\beta R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}. \quad (4.32)$$

La ec.(4.32) sigue más directamente si aplicamos el conmutador $[D_\mu, D_\nu]$ a la vielbein. La condición métrica entonces implica $[D_\mu, D_\nu]e^\alpha{}_\alpha = 0$, de modo que

$$R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} e^\beta{}_\alpha + R^{\alpha}{}_{b\mu\nu} e^{\alpha b} = 0,$$

lo que es equivalente a la ec.(4.32).

Torsión

En capítulos anteriores hemos examinado ocasionalmente los efectos de la torsión. En esta sección presentamos un resumen de algunas de las propiedades más conocidas de la torsión. Regresemos a la condición métrica:

$$D_{\alpha}g_{\mu\nu} = \partial_{\alpha}g_{\mu\nu} - \Gamma_{\nu\mu\alpha} - \Gamma_{\mu\nu\alpha} = 0.$$

donde $\Gamma_{\alpha\beta\gamma} \equiv \Gamma_{\beta\gamma}^{\rho}g_{\rho\alpha}$. De manera estándar tomamos las permutaciones en los tres índices α, β, γ :

$$\begin{aligned} (i) & \quad \partial_{\alpha}g_{\mu\nu} - \Gamma_{\nu\mu\alpha} - \Gamma_{\mu\nu\alpha} = 0, \\ (ii) & \quad \partial_{\mu}g_{\nu\alpha} - \Gamma_{\alpha\nu\mu} - \Gamma_{\nu\alpha\mu} = 0, \\ (iii) & \quad \partial_{\nu}g_{\alpha\mu} - \Gamma_{\mu\alpha\nu} - \Gamma_{\alpha\mu\nu} = 0. \end{aligned}$$

y tomamos la combinación (i) - (ii) + (iii) en la ecuación anterior para obtener

$$-2\Gamma_{\mu\nu\alpha} - T_{\mu\nu\alpha} - T_{\alpha\mu\nu} - T_{\nu\mu\alpha} = -(\partial_{\alpha}g_{\mu\nu} - \partial_{\mu}g_{\nu\alpha} + \partial_{\nu}g_{\alpha\mu}). \quad (4.33)$$

donde

$$T_{\alpha\beta\mu} \equiv g_{\mu\nu}T_{\alpha\beta}^{\nu}.$$

Esto puede entonces reescribirse

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \text{ Christoffel} - C_{\beta\alpha}^{\mu}$$

donde la *contorsión* $C_{\alpha\beta}^{\mu}$ está definida por

$$C_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta}^{\mu} - T_{\beta}^{\mu}{}_{\alpha} + T^{\mu}{}_{\alpha\beta}). \quad (4.34)$$

Hagamos algunos comentarios sobre la derivación anterior:

Notamos que, a diferencia de la torsión, la contorsión no es antisimétrica en los primeros dos índices

$$C_{\alpha\beta}^{\mu} \neq -C_{\beta\alpha}^{\mu}$$

Lo es sin embargo si $T_{\alpha\beta\mu}$ es totalmente antisimétrico. Vemos también que la parte simétrica de la conexión, $\Gamma_{(\alpha\beta)}^{\mu}$ no es $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ de Christoffel. Hay en general una contribución torsional.

Las ecuaciones de estructura de Cartan

Es posible definir una *conexión 1-forma* con valores en el álgebra de Lie

$$\Omega \equiv \Omega^{\mu} dx^{\mu}. \quad (4.35)$$

ó equivalentemente si $d(\Omega)^A{}_B \equiv (\sigma_{ab})^A{}_B \omega^{ab}$, entonces

$$\omega^a{}_b \equiv \omega_\mu{}^a{}_b dx^\mu. \quad (4.36)$$

Hemos visto (ec.(4.24)) que bajo una transformación local de Lorentz, $\omega_\mu{}^a{}_b$ transforma como sigue

$$\omega'{}_\mu{}^a{}_b = \Lambda^a{}_c \omega_\mu{}^c{}_d (\Lambda^{-1})^d{}_b - \partial_\mu \Lambda^a{}_c (\Lambda^{-1})^c{}_b.$$

Introducimos adicionalmente la vielbein 1-forma $e^a \equiv e_\mu{}^a dx^\mu$ que transforma como sigue

$$e_\mu{}^a \rightarrow e'_\mu{}^a = \Lambda^a{}_b e_\mu{}^b. \quad (4.37)$$

Podemos construir la torsión $T_{\alpha\beta}{}^\mu$ y la curvatura como dos-formas a partir de e^a y $\omega^a{}_b$ tal que se transformen como tensores bajo transformaciones locales de Lorentz. Examinemos la dos-forma de Torsión (suprimimos los índices de Lorentz)

$$T \equiv de + \omega \wedge e. \quad (4.38)$$

Bajo una transformación de Lorentz

$$de' = \Lambda de + d\Lambda \wedge e,$$

mientras que $\omega \wedge e$ transforma como

$$\begin{aligned} \omega' \wedge e' &= (\Lambda\omega\Lambda^{-1} - d\Lambda\Lambda^{-1}) \wedge \Lambda e, \\ &= \Lambda\omega \wedge e - d\Lambda \wedge e. \end{aligned} \quad (4.39)$$

donde d es la derivada exterior, de lo anterior sigue que

$$de' + \omega' \wedge e' = \Lambda(de + \omega \wedge e). \quad (4.40a)$$

esto es $de + \omega \wedge e$ transforma como un tensor de Lorentz. Escribamos ahora la dos forma de torsión más explícitamente

$$T^a = de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b, \quad (4.40b)$$

$$= 2e_{[\mu,\nu]}^a dx^\nu \wedge dx^\mu + 2\omega_{[\mu}{}^a{}_{\nu]} e_\nu^b dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (4.40c)$$

se tiene que

$$T^a = T_{\mu\nu}^a dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (4.41)$$

donde

$$T_{\mu\nu}^a = 2e_{[\mu,\nu]}^a + 2\omega_{[\mu}{}^a{}_{\nu]} e_\nu^b \equiv 2D_{[\mu} e_{\nu]}^a. \quad (4.42)$$

Aquí el operador derivada covariante es justamente el asociado a ω y no actúa sobre índices de espacio tiempo.

Por otra parte de la condición métrica tenemos que

$$D_{[\mu} e_{\nu]}^{\alpha} - \Gamma_{[\nu\mu]}^{\alpha} e_{\alpha}^{\alpha} = 0, \quad (4.43)$$

de lo que sigue que esta definición de la torsión concuerda con la dada anteriormente. De la misma manera en que la conexión afin $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ está dada en términos de $g_{\mu\nu}$, $\partial_{\alpha} g_{\mu\nu}$ y $T_{\mu\nu}^{\alpha}$ (ec.(4.43)) podremos expresar la conexión $\omega_{\mu}^a{}_b$ en función de e , ∂e y T :

$$\omega_{\mu}^a{}_b = \omega_{\mu}^a{}_b[e] + C^a{}_{b\mu}. \quad (4.44)$$

Curvatura

De manera análoga a como hemos hecho en la sección anterior, examinemos la dos-forma curvatura R definida por

$$R \equiv d\omega + \omega \wedge \omega. \quad (4.45)$$

que se transforma como un tensor bajo una transformación de Lorentz

$$d\omega' + \omega' \wedge \omega' = \Lambda(d\omega + \omega \wedge \omega). \quad (4.46)$$

Si ahora restauramos los índices de Lorentz se obtiene

$$R^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b. \quad (4.47)$$

lo cual es equivalente a la definición anterior. Las ecuaciones ec.(4.41) y ec.(4.47) son las ecuaciones de *Estructura de Cartan*.

Las identidades de Bianchi

Las identidades de Bianchi son identidades diferenciales involucrando la curvatura R y la torsión T . La primera identidad sigue cuando tomamos la derivada exterior de la dos-forma de torsión ec.(4.41)

$$dT^a = R^a{}_b \wedge e^b - \omega^a{}_b \wedge T^b, \quad (4.48)$$

es decir

$$dT^a + \omega^a{}_b \wedge T^b = R^a{}_b \wedge e^b.$$

de manera análoga ahora tomamos la derivada exterior de la dos-forma de curvatura

$$\begin{aligned} dR^a{}_b &= d\omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b - \omega^a{}_c \wedge d\omega^c{}_b. \\ &= R^a{}_c \wedge \omega^c{}_b - \omega^a{}_c R^c{}_b. \end{aligned}$$

ó equivalentemente

$$dR^a{}_b + [\Omega, R]^a{}_b = 0. \quad (4.49)$$

En esta última ecuación se sobreentiende que hacemos uso del operador \wedge dentro del conmutador $[\Omega, R]$. Paralelamente podemos recobrar las ecuaciones de Bianchi en forma

tensorial si analizamos la forma explícita de las ecuaciones anteriores. Para la primera ecuación por ejemplo, es fácil ver que

$$T_{[\mu\nu;\alpha]}^a + \omega_{[\alpha]^a b} T_{|\mu\nu]}^b = R^a{}_{[\alpha\mu\nu]}. \quad (4.50)$$

Por otra parte si tomamos la derivada covariante de $T_{\mu\nu}^a$ obtenemos

$$T_{\mu\nu;\alpha}^a = T_{\mu\nu,\alpha}^a + \omega_{\alpha}{}^a{}_b T_{\mu\nu}^b - \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} T_{\mu\beta}^a - \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} T_{\beta\nu}^a,$$

de manera que

$$T_{[\mu\nu;\alpha]}^a = T_{[\mu\nu,\alpha]}^a + \omega_{[\alpha]^a b} T_{|\mu\nu]}^b - \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} T_{\mu\beta}^a - \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} T_{\beta\nu}^a,$$

y finalmente

$$T_{[\mu\nu;\alpha]}^a + T_{\beta[\mu}^a T_{\nu\alpha]}^{\beta} - R^a{}_{[\mu\nu\alpha]} = 0. \quad (4.51)$$

y en el caso en que la torsión es cero esta última ecuación se reduce a la conocida antisimetría del tensor de Riemann en sus tres últimos índices.

Adicionalmente, tomando la derivada del tensor de Riemann $D_{\alpha} R^a{}_{b\mu\nu}$ obtenemos, antisimetrizando en los índices μ, ν, α , que

$$R^a{}_{b[\mu\nu;\alpha]} + \omega_{[\mu]^a c} R^c{}_{b|\nu\alpha]} - \omega_{[\mu]^c b} R^a{}_{c|\nu\alpha]} = 0,$$

entonces

$$R^a{}_{b[\mu\nu;\alpha]} + R^a{}_{b\beta[\mu} T_{\nu\alpha]}^{\beta} = 0. \quad (4.52)$$

y si consideramos nuevamente el caso en que la torsión es cero recobramos la identidad usual de Bianchi.

Ecuaciones de Gauss Codazzi con Vielbein

Quando cambiamos a marcos móviles nos encontramos en una situación distinta de la que consideramos en el capítulo 1. Aquí llegaremos a las ecuaciones de Gauss-Codazzi desde otro enfoque.

Esto debería de ser contrastado con el criterio de la integrabilidad que fue explotado en el cap1. Veremos en el presente enfoque los cálculos son tan simples que los resultados se siguen de una manera natural (y, ciertamente, directa.) [1].

Usando la métrica espacial γ_{ab} inducida en la hipersuperficie se puede introducir una d -ada satisfaciendo $e^a_{\mathbf{a}} e^b_{\mathbf{b}} \gamma_{ab} = \eta_{\mathbf{a}\mathbf{b}}$ y $e^a_{\mathbf{a}} e^{ab} = \gamma^{ab}$. Aquí los índices en negritas indican índices de la vielbein. Los miembros de esta d -ada pueden ser entonces promovidos en vectores de espacio-tiempo contrayendo el índice espacial de la vielbein con los vectores del espacio TM de la siguiente manera

$$E_{\mathbf{a}}^{\mu} = X_{\mathbf{a}}^{\mu} e_{\mathbf{a}}^{\mu}. \quad (4.53)$$

Es fácil ver que junto con las η_i^{μ} 's, estos vectores forman ahora una vielbein para M esto es $E_{\mathbf{A}}^{\mu} = \{E_{\mathbf{a}}^{\mu}, \eta_i^{\mu}\}$ forma ahora un conjunto completo en cada punto X^{μ} de M .

Como hemos visto, la condición métrica en M

$$[\mathbf{D}_{\mu}, \mathbf{D}_{\nu}] E^{\mathbf{a}\alpha} = {}^N R^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{b}\mu\nu} E^{\mathbf{b}\alpha} + {}^N R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} E^{\mathbf{a}\beta}, \quad (4.54)$$

implica

$${}^N R^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{b}\mu\nu} = E^{\mathbf{a}}{}_{\alpha} E_{\mathbf{b}}{}^{\beta} {}^N R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}, \quad (4.55)$$

donde la curvatura de la vielbein está dada por

$${}^N R^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{b}\mu\nu} \equiv \partial_{\mu} \omega_{\nu}{}^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{b}} + \omega_{\mu}{}^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{c}} \omega_{\nu}{}^{\mathbf{c}}{}_{\mathbf{b}} - (\mu \leftrightarrow \nu).$$

y $\omega_{\mu}{}^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{b}} = E_{\nu}^{\mathbf{a}} \mathbf{D}_{\mu} E_{\mathbf{b}}^{\nu}$, (más adelante veremos que, en el caso de la representación espinorial tenemos un comportamiento análogo para la conexión asociada a la derivada covariante). La derivada covariante usada aquí sólo actúa sobre índices de espacio-tiempo mientras que la derivada que aparece en la ec.(4.54) actúa tanto sobre índices de espacio tiempo como sobre índices de la vielbein.

Ahora la derivada covariante definida en m está dada por

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{a}} V^{\mathbf{a}} &= X_{\mathbf{a}}^{\mu} D_{\mu} V^{\mathbf{a}} \\ &= X_{\mathbf{a}}^{\mu} (\partial_{\mu} V^{\mathbf{a}} + \omega_{\mu}{}^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{b}} V^{\mathbf{b}}) \\ &= \partial_{\mathbf{a}} V^{\mathbf{a}} + \omega_{\mathbf{a}}{}^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{b}} V^{\mathbf{b}}, \end{aligned} \quad (4.56)$$

donde $\omega_{\mathbf{a}}{}^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{b}} \equiv X_{\mathbf{a}}^{\mu} \omega_{\mu}{}^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{b}}$. De manera análoga a como hemos hecho en el capítulo 1, requeriremos diversas proyecciones de la conexión ω :

$$\begin{aligned} X_{\mathbf{a}}^{\mu} \omega_{\mu}{}^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{b}} &= \omega_{\mathbf{a}}{}^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{b}}, \\ X_{\mathbf{a}}^{\mu} \omega_{\mu}{}^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{i}} &= X_{\mathbf{a}}^{\mu} E_{\nu}^{\mathbf{a}} D_{\mu} \eta_{\mathbf{i}}^{\nu} = -K_{\mathbf{i}}{}^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{a}}, \\ X_{\mathbf{a}}^{\mu} \omega_{\mu}{}^{\mathbf{i}}{}_{\mathbf{a}} &= X_{\mathbf{a}}^{\mu} \eta_{\nu}^{\mathbf{i}} D_{\mu} E_{\mathbf{a}}^{\nu} = K^{\mathbf{i}}{}_{\mathbf{a}\mathbf{a}}, \\ X_{\mathbf{a}}^{\mu} \omega_{\mu}{}^{\mathbf{i}}{}_{\mathbf{j}} &= X_{\mathbf{a}}^{\mu} \eta_{\nu}^{\mathbf{i}} D_{\mu} \eta_{\mathbf{j}}^{\nu} = T_{\mathbf{a}}{}^{\mathbf{i}}{}_{\mathbf{j}}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Ahora consideramos las proyecciones relevantes del tensor de Riemann que hemos considerado anteriormente. Empezamos tomando las proyecciones espaciales

$${}^N R^a{}_{b\mu\nu} X_a^\mu X_b^\nu = {}^N R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} E_a^\alpha E_b^\beta X_a^\mu X_b^\nu, \quad (4.58)$$

y haciendo uso de las estructuras enlistadas arriba encontramos que

$$\begin{aligned} {}^N R^a{}_{b\mu\nu} X_a^\mu X_b^\nu &= X_a^\mu \partial_\mu \omega_b^a{}_b + \omega_a^a{}_c \omega_b^c{}_b \\ &\quad - (\partial_a X_b^\mu) \omega_\mu^a{}_b + X_a^\mu \omega_\mu^a{}_i X_b^\nu \omega_\nu^i{}_b - (a \leftrightarrow b) \\ &= {}^d R^a{}_{bab} - \{K_i^a{}_a K^i{}_{bb} - (a \leftrightarrow b)\}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

lo cual corresponde obviamente a la ecuación de Gauss Codazzi derivada anteriormente. Tomemos ahora la contracción con la normal del índice contravariante del tensor de Riemann

$${}^N R^i{}_{a\mu\nu} = \eta_\alpha^i E_a^\alpha E_\beta{}^\mu R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} \quad (4.60)$$

Nuevamente encontramos, identificando términos, que

$${}^N R^i{}_{a\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu^i{}_a + \omega_\mu^i{}_b \omega_\nu^b{}_a + \omega_\mu^i{}_j \omega_\nu^j{}_a - (\mu \leftrightarrow \nu),$$

multiplicando ambos miembros de esta ecuación por $X_a^\mu X_b^\nu$, encontramos finalmente que

$$\begin{aligned} {}^N R^i{}_{a\mu\nu} X_a^\mu X_b^\nu &= \partial_a \omega_b^i{}_a + \omega_a^i{}_b \omega_b^b{}_a + \omega_a^i{}_j \omega_b^j{}_a - (a \leftrightarrow b), \\ &= \nabla_a K^i{}_{ab} - K^i{}_{ab} T_a^i{}_j - (a \leftrightarrow b). \end{aligned} \quad (4.61)$$

que es la ecuación de Codazzi-Mainardi. La última proyección que consideramos es la ecuación de Ricci ${}^N R^i{}_{jab}$. Luego de contraer al tensor de Riemann dos veces en la dirección normal antisimetrizamos en a y b , de lo que sigue

$${}^N R^i{}_{j\mu\nu} X_a^\mu X_b^\nu = \partial_a T_b^i(j) + T_a^i{}_k T_b^k{}_j - K^i{}_{aa} K_j^a{}_b - (a \leftrightarrow b). \quad (4.62)$$

La acción en el formalismo de la Vielbein

De manera análoga a como hemos hecho en el capítulo 2, derivamos las ecuaciones de Einstein a partir de la acción. Usamos ahora la representación de la vielbein. La acción de gravedad viene aquí dada por

$$S_0 = \int d^n x e e_a^\mu e^{\nu b} R^a{}_{b\mu\nu}(\omega), \quad (4.63)$$

donde nuestra convención para la curvatura de la vielbein $R^a{}_{b\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu^a{}_b + \omega_\mu^a{}_c \omega_\nu^c{}_b - (\mu \leftrightarrow \nu)$. Considerando ahora que R sólo depende de ω es fácil ver que

$$\delta R^a{}_{b\mu\nu}(\omega) = 2D_{[\mu} \omega_{\nu]}^a{}_b + 2T_{\rho[\nu}^\rho \delta \omega_{\mu]}^a{}_b, \quad (4.64)$$

sustituyendo esto en la variación de la acción S_0 y luego de una integración por partes obtenemos

$$\delta S_0 = 2 \int d^n x e \left\{ T_{\rho\mu}^{\rho} e^{|\mu}_a e^{\nu|b} - D_\mu e^{|\mu}_a e^{\nu|b} \right\} \delta \omega_\nu^{ab} + 2 \int_{\partial} d^{n-1} x \tilde{e} e^{|\mu}_a e^{\nu|b} \delta \omega_\nu^{ab}, \quad (4.65)$$

donde \tilde{e} es el análogo de \sqrt{h} en el formalismo de primer orden, esto es, que $\tilde{e}_{a\mu} \tilde{e}^a{}_\nu$ es la métrica en la frontera de la región. Introduciendo como antes una acción demateria y tomando ahora la variación de la acción total respecto a la conexión (despreciando los términos de superficie) sigue que

$$\frac{\delta S}{\delta \omega_\nu^{ab}} = 0$$

implica

$$2e^{|\mu}_a D_\nu e^{\nu|b} - T_{\rho\nu}^{\rho} e^{|\mu}_a e^{\nu|b} = \frac{1}{2} \frac{\delta S_m}{\delta \omega_\mu^{ab}}. \quad (4.66)$$

En el caso en que

$$\frac{\delta S_m}{\delta \omega_\mu^{ab}} = 0,$$

tendremos, claramente que $T = 0$. Paralelamente la variación de la acción respecto de la vielbein nos da

$$\delta S_0 = \int d^n x e \left\{ 2R^a{}_\mu - e^a{}_\mu R \right\} \delta e^\mu{}_a, \quad (4.67a)$$

y finalmente $\delta S_0 / \delta e^\mu{}_a$ nos conduce a las ecuaciones de Einstein exactamente de la misma forma que en el caso de la representación tensorial (cap.2),

$$R^a{}_\mu - \frac{1}{2} e^a{}_\mu R = \frac{1}{2} T^a{}_\mu, \quad (4.67b)$$

donde $T^a{}_\mu \equiv \frac{2}{e} \delta S_m / \delta e^\mu{}_a$ es el tensor de stress.

CAPITULO 5

Espinores en espacios curvos

Introducimos ahora la formulación espinorial. Empezaremos estableciendo algunos resultados algebraicos elementales para posteriormente estudiar la relación entre espinores $SL(2, C)$ y los espinores $SU(2)$. El enfoque que seguimos aquí es el usado por *Ashstekar* [8]. El objetivo es, como en secciones anteriores, expresar el hamiltoniano de la relatividad así como las constricciones. Adicionalmente veremos, que, como en el formalismo de vielbein, podremos expresar las estructuras algebraicas relevantes en la representación tensorial en términos de sus equivalentes espinoriales.

Podemos introducir espinores $SL(2, C)$ de la siguiente manera. Sea V un espacio vectorial complejo bidimensional (y su espacio dual V^*). Denotemos por ξ^A (ξ_A) a los elementos de V (V^*) donde por convención $A = 0, 1$. Fijamos ahora una dos-forma antisimétrica ϵ_{AB}

$$\epsilon_{AB} = -\epsilon_{BA}. \quad (5.1)$$

Entonces ϵ provee una forma bilineal no singular, antisimétrica sobre V . Convencionalmente la inversa de ϵ_{AB} está definida* por

$$\epsilon_{AC}\epsilon^{CB} = \delta_A^B. \quad (5.2)$$

La dos forma ϵ provee un isomorfismo entre V y V^* a través de la operación de subir y bajar índices

$$\begin{aligned} \xi^A &= \epsilon^{AB} \xi_B, \\ \xi_A &= \xi^B \epsilon_{BC}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

De esta manera ϵ juega un papel para espinores parecido al jugado por la métrica $g_{\mu\nu}$ para tensores. Notemos que la contracción en ambos casos es entre el índice superior izquierdo y el índice inferior derecho y que la convención para subir y bajar índices es consistente con la definición de la inversa ec.(5.2). Adicionalmente veamos que

$$\begin{aligned} \epsilon^A_B &= \epsilon^{AC} \epsilon_{CB} = -\delta^A_B \\ \epsilon_A^B &= \epsilon^{CB} \epsilon_{AB} = \delta_A^B, \end{aligned}$$

mientras

de modo que en particular

$$\epsilon_A^B = -\epsilon^B_A.$$

* Esto no está de acuerdo con la convención usual de la matriz inversa.

Debido a la antisimetría de ϵ_{AB} debe tenerse cuidado con la posición de los índices. En particular notamos que:

$$\xi^A \eta_A = -\xi_A \eta^A$$

Sea L una matriz arbitraria en $GL(2, C)$ preservando la "métrica" ϵ_{AB} es decir

$$\epsilon_{AB} L^A{}_C L^B{}_D = \epsilon_{CD},$$

Consecuentemente $\det L = 1$, esto es, L es un elemento de $SL(2, C)$. Tiene entonces sentido el fijar a ϵ de una vez por todas. Podemos elegir

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

Introducimos adicionalmente los espacios vectoriales complejos conjugados \bar{V} y \bar{V}^* con elementos $\bar{\xi}^A$ y $\bar{\xi}_{A'}$ respectivamente cuyos índices pueden subirse y bajarse con $\bar{\epsilon}^{A'B'}$ y $\bar{\epsilon}_{A'B'}$.

Como consecuencia del hecho que ϵ es una 2-forma sobre un espacio vectorial bidimensional, satisface la siguiente identidad

$$\epsilon_{A|B} \epsilon_{CD} = 0. \quad (5.5)$$

Para mostrar que esto es así notamos que el lado izquierdo es antisimetrizado en tres índices, cada uno de los cuales puede tomar dos valores. Como consecuencia de la ec.(5.5) tenemos la identidad para cualquier 2- espinor

$$V_{AB} = V_{(AB)} + \frac{1}{2} \epsilon_{AB} V_C{}^C. \quad (5.6)$$

Esto sigue únicamente multiplicando la ecuación (5.5) por V^{CD}

$$(\epsilon_{AB} \epsilon_{CD} + \epsilon_{AD} \epsilon_{BC} + \epsilon_{AC} \epsilon_{DB}) V^{CD} = 0$$

tal que

$$2V_{[AB]} = \epsilon_{AB} V_C{}^C.$$

De hecho cualquier espinor puede ser expresado como la suma de un espinor simétrico y una suma de términos multiplicados por todas las contracciones simétricas del mismo espinor.

El punto crucial ahora es que puede establecerse un isomorfismo entre vectores complejos en un espacio tiempo de Minkowski y espinores en $\bar{V} \otimes V^*$ de manera que

$$V^{AB'} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} V^0 + V^3 & V^1 + iV^2 \\ V^1 - iV^2 & V^0 - V^3 \end{pmatrix} \quad (5.7a)$$

$$\equiv \sigma_a^{AB'} V^a. \quad (5.7b)$$

donde las matrices $\sigma_a^{AB'}$ son antihermitianas ($\bar{\sigma}_a^{B'A} = \overline{\sigma_a^{BA'}} = -\sigma_a^{AB'}$)

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma_1 &= \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_2 &= \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_3 &= \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (5.7c)$$

Si V^a es real entonces $V^{AB'}$ es antihermitiano

$$\bar{V}^{B'A} = -V^{AB'}.\quad (5.8)$$

La transformación de Lorentz

$$V'^a = L^a_b V^b$$

es reemplazada por

$$V'^{AB'} = L^A_C \bar{L}^{B'}_{D'} V^{CD'}$$

donde $L^A_B \bar{L}^{C'}_{D'} = \sigma_a^{AC'} \sigma^b_{B'D'} L^a_b$.

El equivalente espinorial de la métrica de Lorentz está dado por $\varepsilon_{AC} \varepsilon_{B'D'}$. Un método para ver esto es notar que:

$$\begin{aligned}\det V^{AB'} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{AC} \varepsilon_{B'D'} V^{AB'} V^{CD'}, \\ &= \frac{1}{2} \eta_{ab} V^a V^b,\end{aligned}\quad (5.9)$$

con $\eta_{ab} = \text{diag}(-, +, +, +)$.

Vale la pena mencionar que si hubiéramos elegido σ_a hermitiana entonces el determinante correspondería al negativo de la normalización de Minkowski. La ecuación (5.9) es equivalente al hecho

$$\eta_{ab} \equiv \varepsilon_{AC} \varepsilon_{B'D'} \sigma_a^{AB'} \sigma_b^{CD'},\quad (5.10)$$

lo que puede reescribirse como

$$\delta_a^b = \sigma_a^{AB'} \sigma^b_{AB'},\quad (5.11)$$

ó en otras palabras, $\sigma^a_{AB'}$ (con el índice de Lorentz subido con η^{ab} , y los índices espinoriales bajados con ε_{AB}) es la inversa de $\sigma_a^{AB'}$ contrayendo sobre índices espinoriales. Podemos ahora invertir la ec.(5.7b) como

$$V^a = \sigma^a_{AB'} V^{AB'}.\quad (5.12)$$

Es entonces claro que la inversa de $\sigma_a^{AB'}$ definida contrayendo en índices lorentzianos está dada por

$$\sigma_a^{AB'} \sigma^a_{CD'} = \delta^A_C \delta^{B'}_{D'},\quad (5.13a)$$

ó equivalentemente

$$\sigma_a^{AB'} \sigma^a_{CD'} = \varepsilon^{AC} \varepsilon_{B'D'}.\quad (5.13b)$$

En la práctica, la ec.(5.12a) prueba ser mas útil dado que la antisimetría de ϵ no figura.

Si introducimos una tétrada e_{μ}^a en cada punto del espacio tiempo, podemos identificar el espacio tangente con $V \otimes V^*$

$$V^{AB'} = \sigma_{\mu}^{AB'} V^{\mu}, \quad (5.14)$$

donde $\sigma_{\mu}^{AB'} = \sigma_{\alpha}^{AB'} e_{\mu}^{\alpha}$. La matriz $\sigma_{\mu}^{AB'}$ es una $SL(2, C)$ "forma de soldadura" satisfaciendo:

$$\sigma_{\mu}^{AB'} \sigma_{\nu AB'} = g_{\mu\nu}, \quad (5.15a)$$

$$\sigma_{\mu}^{AB'} \sigma^{\mu CD'} = \epsilon^{AC} \epsilon^{B'D'}. \quad (5.15b)$$

En un marco de referencia localmente inercial $\sigma_{\mu}^{AB'}$ toma la forma de la ec.(5.7c). Podemos ahora interpretar a $\sigma_{\mu}^{AB'}$ como la raíz cuadrada de $g_{\mu\nu}$ exactamente como se hizo con la tétrada e_{μ}^a . Generalizamos el isomorfismo que provee $\sigma_{\mu}^{AB'}$ a tensores arbitrarios, por ejemplo

$$T^{AB'CD'} = \sigma_{\mu}^{AC} \sigma_{\nu}^{B'D'} T^{\mu\nu}. \quad (5.16)$$

En particular cuando $T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ esto reproduce la ec. (5.15a).

Vectores Nulos

Sea V^{μ} un vector de espacio tiempo. Si V^{μ} es nulo entonces

$$V^{AB'} = \alpha^A \beta^{B'}. \quad (5.17)$$

Para ver esto notamos simplemente que si $\text{rango } V^{AB'} \leq 2$ entonces $V^{AB'}$ debe tener esta forma. Inversamente, si $V^{AB'}$ tiene la forma de la ec.(5.17) es entonces obvio que V^{μ} es nulo. En particular si V^{μ} es real, entonces

$$\bar{\alpha}^{B'} \bar{\beta}^A = -\alpha^A \beta^{B'}. \quad (5.18)$$

lo que implica $\beta^{A'} = \pm i \bar{\alpha}^{A'}$, de modo que

$$V^{AB'} = \pm i \alpha^A \bar{\alpha}^{B'}. \quad (5.19)$$

Para todos los vectores de signo positivo ($W^{AB'} = i \gamma^A \bar{\gamma}^{B'}$)

$$V \cdot W = -|\alpha^A \gamma_A| \leq 0, \quad (5.20)$$

de manera que todos estos vectores están del mismo lado del cono de luz. Los vectores con el signo contrario están en el lado opuesto del cono de luz. De esta manera todos los vectores nulos estan divididos en dos clases (pasado y futuro). Usaremos el signo menos en la ec.(5.19) para representar el futuro.

Derivada Covariante Espinorial

Definimos ahora la derivada covariante de un espinor covariante ξ_A como sigue

$$D_\mu \xi_A = \frac{\partial \xi_A}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\mu A}{}^B \xi_B \quad (5.21)$$

donde $\Gamma_{\mu A}{}^B$ es la conexión espinorial afín la cual transforma de manera inhomogénea

$$\Gamma'_{\mu A}{}^B = L_A{}^C \Gamma_{\mu C}{}^D L_D{}^B - L^{-1}{}_A{}^C \partial_\mu L_C{}^B$$

bajo transformaciones locales $SL(2, C)$, de manera que $D_\mu V$ transforma como un tensor. Se sigue que la derivada covariante de espinores complejos conjugados $\bar{\xi}_A$, está dada por la compleja conjugada de la ec.(21).

Del hecho que la derivada covariante D_μ es igual a la derivada ordinaria ∂_μ cuando actúa sobre un escalar sigue que

$$D_\mu \xi_A \xi^A = \partial_\mu (\xi_A \xi^A)$$

de tal manera que la derivada covariante de espinores contravariantes es

$$D_\mu \xi^A = \frac{\partial \xi^A}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu B}{}^A \xi^B, \quad (5.22)$$

Estas definiciones se extienden de manera obvia para espinores con varios índices, por ejemplo

$$D_\mu V^{AB'} = \frac{\partial V^{AB'}}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu C}{}^A V^{CB'} + \bar{\Gamma}_{\mu C'}{}^{B'} V^{AC'}$$

Para fijar la conexión primero requeriremos que el proceso de subir o bajar índices conmute con la derivada covariante

$$D_\mu \xi_A = \varepsilon_{AB} D_\mu \xi^B,$$

lo que equivale a decir

$$D_\mu \varepsilon_{AB} = 0 \quad (5.23)$$

ó

$$\partial_\mu \varepsilon_{AB} - \Gamma_{\mu A}{}^C \varepsilon_{CB} - \Gamma_{\mu B}{}^C \varepsilon_{AC} = 0.$$

El primer término de esta ecuación es cero. Entonces $\Gamma_{\mu BA} = \Gamma_{\mu AB}$ ó equivalentemente

$$\Gamma_{\mu A}{}^A = 0 \quad (5.24)$$

— la conexión espinorial es simétrica. Requeriremos adicionalmente que la derivada covariante espinorial sea consistente con la derivada covariante tensorial actuando en tensores de tal manera que

$$D_\mu V^\mu = \sigma_{AB'}^\mu D_\mu V^{AB'}, \quad (5.25)$$

lo que implica

$$D_\mu \sigma_{AB'}^\mu = 0. \quad (5.26)$$

Esta ecuación junto con la ecuación para ε^{AB} son el equivalente de la condición métrica en la representación espinorial. Estas dos ecuaciones determinan de manera única a la conexión espinorial. Para ver esto escribimos

$$\partial_\mu \sigma_{AB'}^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu \sigma_{AB'}^\rho - \Gamma_{\mu A}^C \sigma_{CB'}^\nu - \bar{\Gamma}_{\mu B'}^{C'} \sigma_{AC'}^\nu = 0.$$

Si ahora contraemos con la matriz $\sigma_{\nu}^{EB'}$ llegamos a

$$\sigma_{\nu}^{EB'} \partial_\mu \sigma_{AB'}^\nu + \sigma_{\nu}^{EB'} \Gamma_{\mu\rho}^\nu \sigma_{AB'}^\rho - 2\Gamma_{\mu A}^E = 0,$$

donde se usó la identidad $\sigma_{\nu}^{EB'} \sigma_{AC'}^\nu = \delta_A^E \delta^{B'C'}$ y el hecho que $\Gamma_{\mu A}^A = 0$, así que finalmente podemos escribir $\Gamma_{\mu A}^E$ en términos de la condición métrica y las formas de soldadura

$$\Gamma_{\mu A}^E = \frac{1}{2} \sigma_{\nu}^{EB'} D_\mu \sigma_{AB'}^\nu. \quad (5.27)$$

En esta ecuación D_μ es la derivada covariante que actúa sólo sobre índices tensoriales.

Claramente la ecuación (5.27) es el equivalente espinorial de la ecuación (5.29) en el formalismo de la tetrada. Inversamente podemos escribir la conexión tensorial ordinaria en términos de la conexión espinorial

$$\Gamma_{\alpha\mu}^\rho = \frac{1}{2} \sigma_{AB'}^\rho \partial_\mu \sigma_{\alpha}^{AB'} + \Gamma_{\mu A}^C \sigma_{\alpha}^{CB'} \sigma_{AB'}^\rho. \quad (5.28)$$

Curvatura espinorial.

Podemos asociar una curvatura con la conexión espinorial $\Gamma_{\mu A}^B$. Con este propósito examinamos la acción del conmutador de las derivadas covariantes espinoriales sobre un espinor $[D_\nu, D_\mu] \xi_A$. Mediante un cálculo directo encontramos

$$[D_\mu, D_\nu] V_A \equiv R_{\mu\nu}^B{}_{\alpha} V_B + T_{\mu\nu}^\alpha D_\alpha V_A \quad (5.29)$$

donde definimos la *curvatura espinorial*

$$R_{\mu\nu}^B{}_{\alpha} \equiv \partial_\mu \Gamma_{\nu A}^B - \Gamma_{\mu A}^C \Gamma_{\nu C}^B - (\mu \leftrightarrow \nu). \quad (5.30)$$

La simetría $R_{AB\mu\nu} = R_{BA\mu\nu}$ es una consecuencia directa de la simetría de $\Gamma_{\mu AB} = \Gamma_{\mu BA}$. De la misma manera podemos introducir una curvatura espinorial asociada con la conexión primada. En nuestro enfoque la curvatura espinorial natural tiene dos índices espinoriales y dos índices de espacio tiempo.

Cuando la condición métrica se satisface las curvaturas tensorial y espinoriales están relacionadas. Esto es establecido más simplemente aplicando el conmutador $[D_\mu, D_\nu]$ a la forma de soldadura $SL(2, C)$ como sigue:

$$0 = [D_\mu, D_\nu] \sigma_{AB'}^\alpha = R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} \sigma_{AB'}^\beta + R_{\mu\nu}^C{}_{\alpha} \sigma_{CB'}^\alpha + \bar{R}_{B'}{}^{D'}{}_{\mu\nu} \sigma_{AD'}^\alpha.$$

Resolviendo ahora para la curvatura tensorial encontramos que

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = R_A{}^C{}_{\mu\nu}\sigma_{CB'}^\alpha\sigma_\beta^{AB'} + \bar{R}_{B'}{}^{D'}{}_{\mu\nu}\sigma_{AD'}^\alpha\sigma_\beta^{AB'}. \quad (5.31)$$

Inversamente

$$2R_A{}^C{}_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}\sigma_\alpha^{CB'}\sigma_{AB'}^\beta. \quad (5.32)$$

Para nuestros propósitos es conveniente ahora introducir el equivalente espinorial del símbolo totalmente antisimétrico de Levi-Civita en cuatro dimensiones $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$. Recordemos que el símbolo de Levi-Civita es una densidad tensorial de peso 1, es decir $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} = \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}/\sqrt{-g}$ es un tensor con $\varepsilon^{0123} = 1 (= -\varepsilon_{0123})$. Ahora, el determinante de una matriz es definido por

$$\det\tau^{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\tau^{0\mu}{}_\tau^{1\nu}{}_\tau^{2\rho}{}_\tau^{3\sigma} \quad (5.33)$$

de lo cual sigue que

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\det\tau = -\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\tau^{\alpha\mu}{}_\tau^{\beta\nu}{}_\tau^{\gamma\rho}{}_\tau^{\delta\sigma}. \quad (5.34)$$

Usando ahora la ecuación anterior tenemos que, para las matrices $\sigma_\mu^{AB'}$

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\sigma_\mu^{MN'}\sigma_\nu^{PQ'}\sigma_\alpha^{AB'}\sigma_\beta^{CD'} = \sigma\varepsilon^{MN'PQ'AB'CD'}, \quad (5.35)$$

donde $\varepsilon^{MN'PQ'AB'CD'}$ es el símbolo de Levi-Civita en los cuatro pares de índices MN' , PQ' , AB' , CD' con cada par tomando los cuatro valores $00'$, $01'$, $10'$, $11'$; $y, \sigma = \det\sigma_\mu^{AB'} = \sqrt{g} = -i\sqrt{-g}$. En una formulación euclidiana no aparecen factores de i . Podemos ahora mostrar que

$$\varepsilon^{MN'PQ'AB'CD'} = -\left(\varepsilon^{AM}\varepsilon^{B'Q'}\varepsilon^{CP}\varepsilon^{D'N'} - \frac{P \leftrightarrow M}{Q' \leftrightarrow N'}\right), \quad (5.36)$$

de manera que el equivalente espinorial de $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ puede ser expresado por

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\sigma_\mu^{MN'}\sigma_\nu^{PQ'}\sigma_\alpha^{AB'}\sigma_\beta^{CD'} = i\sqrt{g}\left(\varepsilon^{AM}\varepsilon^{B'Q'}\varepsilon^{CP}\varepsilon^{D'N'} - \frac{M \leftrightarrow P}{Q' \leftrightarrow N'}\right). \quad (5.37)$$

Más usual para nuestros propósitos posteriores será $\varepsilon_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}$ (el cual es un tensor)

$$\varepsilon_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}}g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}\varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta}, \quad (5.38a)$$

invirtiendo la ec.(5.37) obtenemos

$$\varepsilon_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} = i\sigma_\mu^{AB'}\sigma_\nu^{CD'}(\sigma^\alpha{}_{AD'}\sigma^\beta{}_{CB'} - \beta \leftrightarrow \alpha). \quad (5.38b)$$

El dual izquierdo del tensor de Riemann está definido por

$${}^*R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma\mu\nu}. \quad (5.39)$$

Un dual derecho puede entonces ser definido haciendo la contracción con ϵ en los índices de la derecha. Definimos entonces el auto-dual (anti-autodual) del tensor de Riemann por

$$\pm R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta} \pm i^* R_{\alpha\beta\mu\nu} \quad (5.40)$$

encontramos que

$${}^+R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_A{}^B{}_{\mu\nu}\sigma_{\alpha C'}^A\sigma_{\beta}{}^{C'}{}_B, \quad (5.41a)$$

$${}^-R_{\alpha\beta\mu\nu} = \bar{R}_{A'}{}^{B'}{}_{\mu\nu}\sigma_{\alpha C'}^{A'}\sigma_{\beta}{}^{C'}{}_{B'}. \quad (5.41b)$$

$R_A{}^B{}_{\mu\nu}$ ($\bar{R}_{A'}{}^{B'}{}_{\mu\nu}$) es la representación espinorial del autodual (antiautodual) del tensor de Riemann.

Espinores $SU(2)$

Como antes introducimos espacios vectoriales complejos V, V^* ; \bar{V}, \bar{V}^* y los espinores antisimétricos ϵ_{AB} y $\epsilon_{A'B'}$. Adicionalmente introducimos un producto interno positivo definido $G_{A'B}$ normalizado como sigue

$$G_{A'B}G^{A'C} = \delta_B{}^C. \quad (5.42)$$

Para nuestros propósitos construimos $G_{A'B}$ mediante la proyección de las formas de soldadura $\sigma^\mu{}_{AB'}$ sobre la normal

$$G_{A'B} \equiv \sqrt{2} i \bar{\eta}_{A'B}, \quad (5.43)$$

donde $\eta^{AB'} \equiv \sigma_\mu{}^{AB'} \eta^\mu$ es el equivalente espinorial del vector normal.

La hermiticidad de $G_{A'B}$ se satisface debido a la antihermiticidad de las matrices $\sigma_\mu{}^{AB'}$, esto es, $\overline{\sigma_\mu{}^{AB'}} = -\sigma_\mu{}^{B'A}$ mientras que la positividad sigue del hecho que para cualquier V_A , $-i V^A \bar{V}^{A'}$ representa un espinor que apunta hacia el futuro y $\eta^{AA'}$ es un espinor de tipo temporal que apunta hacia el futuro. El producto interno $G_{A'B}$ provee un isomorfismo entre V y V^* , de manera que los espinores primados pueden ser identificados con los no primados. Si L es una matriz del grupo $SL(2, C)$ que preserva el producto interno hermitiano definido por $G_{A'B}$ entonces L es unitaria.

Introducimos ahora una forma $SU(2)$ de soldadura $\sigma_\mu{}^{AB}$ definida en términos de la forma $SL(2, C)$ como sigue

$$\sigma_\mu{}^{AB} = i\sqrt{2} \sigma^\mu(A|M' \eta^{|B\rangle})_{M'}. \quad (5.44)$$

Por construcción, $\sigma_\mu{}^{AB}$ es simétrica. Adicionalmente es ortogonal a η_μ ($\sigma^\mu{}^{AB} \eta_\mu = 0$). Para ver esto es útil primero establecer algunas identidades. Notamos que para cada vector V^α se tiene que

$$V_{AB'} V^{AB'} = V^\alpha V_\alpha. \quad (5.45)$$

En particular, para los vectores normales $\eta_{AB'} \eta^{AB'} = -1$. Además

$$\begin{aligned} V^A{}_{C'} V^{BC'} &= \frac{1}{2} (V^A{}_{D'} V^{BD'} - V^B{}_{D'} V^{AD'}) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^{AB} V_{CD'} V^{CD'}, \end{aligned} \quad (5.46)$$

tal que $\eta^A{}_{C'}\eta^{BC'} = -1/2 \varepsilon^{AB}$. Entonces

$$(\sigma^{\mu AM'}\eta^B{}_{M'} + \sigma^{\mu BM'}\eta^A{}_{M'})\eta_{\mu} = \eta^{AM'}\eta^B{}_{M'} + \eta^{BM'}\eta^A{}_{M'} = 0. \quad (5.47)$$

$\sigma^{\mu AB}$ ahora provee un isomorfismo entre vectores espaciales y espinores simétricos de dos componentes.

Podemos ahora invertir la definición de la forma $SU(2)$ para expresar $\sigma_{\mu}{}^{AB'}$ en términos de $\sigma_{\mu}{}^{AB}$ y del espinor normal

$$\sigma_{\mu}{}^{AB'} = i\sqrt{2}\sigma_{\mu}{}^{AM}\eta_M{}^{B'} - \eta_{\mu}\eta^{AB'}. \quad (5.48)$$

Como un preliminar para establecer esta identidad la contraemos con $\sigma_{\mu}{}^{CD'}$ de manera que obtenemos

$$\varepsilon^{AC}\varepsilon^{B'D'} = i\sqrt{2}\sigma^{\mu AM}\eta_M{}^{B'}\sigma_{\mu}{}^{CD'} - \eta^{AB'}\eta^{CD'}$$

Por el momento supongamos que esta ecuación es cierta, entonces el lado izquierdo es el equivalente espinorial de la métrica de espacio tiempo, mientras que el segundo término del lado derecho es el equivalente espinorial de $\eta^{\mu}\eta^{\nu}$. Esto es entonces la representación espinorial de la descomposición de la métrica en términos de la proyección $h_{\mu\nu}$ y la normal, $g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \eta_{\mu}\eta_{\nu}$, de manera que el equivalente espinorial de $h^{\mu\nu}$ es

$$h^{AB'CD'} \equiv i\sqrt{2}\sigma^{\mu AM}\eta_M{}^{B'}\sigma_{\mu}{}^{CD'}. \quad (5.49)$$

La demostración sigue directamente de la definición de $\sigma^{\mu AM}$ y de algunas identidades ahora familiares

$$\begin{aligned} h^{AB'CD'} &= i\sqrt{2}\left(\frac{i}{\sqrt{2}}(\sigma^{\mu AN'}\eta^M{}_{N'} + \sigma^{\mu MN'}\eta^A{}_{N'})\right)\eta_M{}^{B'}\sigma_{\mu}{}^{CD'} \\ &= -\varepsilon^{AC}\varepsilon^{N'D'}\frac{1}{2}\delta_{N'}{}^{B'} - \varepsilon^{MC}\varepsilon^{N'D'}(\eta^A{}_{N'}\eta_M{}^{B'}) \\ &= -\left\{\varepsilon^{AC}\varepsilon^{B'D'} + \eta^{AD'}\eta^{CB'}\right\}. \end{aligned}$$

el orden de los índices en el segundo término no es correcto. Sin embargo

$$\begin{aligned} \eta^{AD'}\eta^{CB'} &= \eta^{AB'}\eta^{CD'} - \varepsilon^{D'B'}\eta^A{}_{E'}\eta^{CE'} \\ &= \eta^{AB'}\eta^{CD'} + \frac{1}{2}\varepsilon^{AC}\varepsilon^{BD'} \end{aligned}$$

lo que completa la prueba.

Adicionalmente la forma de soldadura $\sigma_{\mu}{}^{AB}$ satisface las siguientes identidades:

1. $\sigma^{\mu AB}\sigma^{\nu}{}_{AB} = h^{\mu\nu}$ ó equivalentemente $\text{tr}\sigma^{\mu}\sigma^{\nu} = -h^{\mu\nu}$,
2. $\sigma^{\mu AB}\sigma_{\mu}{}^{CD} = \frac{1}{2}(\varepsilon^{AC}\varepsilon^{BD} + \varepsilon^{AD}\varepsilon^{BC})$, y
3. $\text{Tr}\sigma^{\alpha}\sigma^{\beta}\sigma^{\gamma} = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\eta_{\delta}$.

Las primeras dos son los equivalentes $SU(2)$ de las ecs.(5.15a-b) para espinores $SL(2, C)$. La última no tiene análogo $SL(2, C)$. Para establecer la primera de las identidades notamos que la ec.(5.50) puede ser reescrita como

$$h^{AB'CD'} = -\sigma^{\mu AM} \eta_M^{B'} \sigma_{\mu}^{CN} \eta_N^{D'},$$

el resultado es inmediato contrayendo con $\sigma^{\alpha AB'} \sigma^{\beta CD'}$. La derivación de la segunda de las identidades es directa. Finalmente la tercera identidad es una consecuencia de la ec.(35).

La conexión de Sen

La conexión simétrica compatible $SL(2, C)$ puede ser descompuesta en la siguiente forma:

$$\Gamma_{\mu A}{}^B = \gamma_{\mu A}{}^B - \frac{i}{\sqrt{2}} \sigma_{\nu A}{}^B D_{\mu} \eta^{\nu}, \quad (5.50)$$

donde $\gamma_{\mu A}{}^B \equiv 1/2 \sigma_{\nu}{}^{BC} D_{\mu} \sigma^{\nu}{}_{AC}$ y D_{μ} actúa sólo sobre índices tensoriales. Una manera de ver esto es partir de la expresión para Γ en términos de las formas de soldadura $SL(2, C)$ y de la derivada covariante tensorial D_{μ} ec.(5.27)

$$\Gamma_{\mu A}{}^B = \frac{1}{2} \sigma_{\nu}{}^{B D'} D_{\mu} \sigma^{\nu}{}_{A D'}, \quad (5.27)$$

y ahora usamos la descomposición de $\sigma_{\mu}^{AB'}$ ec.(5.48), de manera que

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu A}{}^B &= -\sigma_{\nu}{}^{BE} D_{\mu} \sigma^{\nu}{}_{A}{}^F (\eta_E^{D'} \eta_{F D'}) - \frac{i}{\sqrt{2}} \sigma_{\nu}{}^{BE} D_{\mu} \eta^{\nu} (\eta_E^{D'} \eta_{A D'}) \\ &\quad - \frac{i}{\sqrt{2}} \eta_{\nu} D_{\mu} \sigma^{\nu}{}_{A}{}^F (\eta^{B D'} \eta_{F D'}) + \frac{1}{2} \eta_{\nu} D_{\mu} \eta^{\nu} (\eta^{B D'} \eta_{A D'}) \end{aligned}$$

finalmente usando el hecho que $\eta^A{}_C \eta^{BC'} = -1/2 \varepsilon^{AB}$, el resultado se sigue.

En consideración al hecho que $\sigma^{\mu AB}$ es ortogonal a η^{μ} es posible expandirla en términos de la base espacial X_{α}^{μ} como sigue

$$\sigma^{\mu AB} = \sigma^{\alpha AB} X_{\alpha}^{\mu}. \quad (5.51)$$

Claramente $\sigma^{\alpha AB}$ es simétrica y permite identificar vectores espaciales V^{α} con espinores de dos componentes simétricos

$$V^{AB} = \sigma^{\alpha AB} V_{\alpha}.$$

Spongamos que ahora introducimos una derivada covariante espinorial $SU(2)$

$$\nabla_{\alpha} \lambda_A = \partial_{\alpha} \lambda_A - \gamma_{\alpha A}{}^B \lambda_B. \quad (5.52)$$

Entonces el requerimiento de que ∇_{α} anule ε_{AB} y a γ_{AB}^{α} implica ahora

$$2\gamma_{\alpha A}{}^B = -\sigma_{AC}^b \nabla_{\alpha} \sigma_b^{BC},$$

donde ∇_a actúa únicamente sobre índices tensoriales espaciales. Es ahora simple demostrar que

$$\gamma_{aA}{}^B = X_a^\mu \gamma_{\mu A}{}^B, \quad (5.53)$$

una forma de ver esto es a partir de

$$\begin{aligned} 2\gamma_{\mu A}{}^B &= \sigma_\nu^{BC} D_\mu \sigma_{AC}^\nu \\ &= \sigma_a^{BC} X_\nu^a D_\mu X_b^\nu \sigma_{AC}^b \\ &= \sigma_a^{BC} \{ \delta_b^a \partial_\mu \sigma_{AC}^b + \sigma_{AC}^b X_\nu^a D_\mu X_b^\nu \}. \end{aligned}$$

proyectado con X_a^μ esto nos dá precisamente lo que buscamos.

Definimos ahora la *Conexión de Sen* como la proyección espacial de la conexión simétrica $SL(2, C)$ que es compatible con la métrica

$$A_{aA}{}^B \equiv X_a^\mu \Gamma_{\mu A}{}^B, \quad (5.54)$$

La derivada covariante asociada a esta conexión es entonces dada por

$$\begin{aligned} {}^S\nabla_a V_A &\equiv \partial_a V_A - A_{aA}{}^B V_B \\ &= \partial_a V_A - \gamma_{aA}{}^B V_B + \frac{i}{\sqrt{2}} \sigma^b{}_A{}^B K_{ab} V_B. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Es posible definir ahora una curvatura asociada con la derivada covariante ${}^S\nabla_a$. Para hacer esto procedemos de manera estándar a partir de la identidad de Ricci (torsión cero),

$$[{}^S\nabla_a, {}^S\nabla_b] \lambda_A = {}^S R_{AB}{}^C \lambda_C. \quad (5.56)$$

donde ${}^S R_{AB}{}^C$ está dado por

$${}^S R_{AB}{}^C = R_{AB}{}^C - K_{[aA}{}^C K_{b]C}{}^B + \sqrt{2}i \nabla_{[a} K_{b]A}{}^B.$$

$R_{AB}{}^C$ es la curvatura espacial $SU(2)$ y K_{ab} es la curvatura extrínseca referida a la base espinorial en un índice

$$K_{aM}{}^N = \sigma^b{}_M{}^N K_{ab}.$$

Para nuestros propósitos es ahora conveniente definir los tensores de curvatura de tres índices ${}^S R_{abc}$ y R_{abc} asociados con γ y A . Definimos

$$\begin{aligned} {}^S R_{abc}^+ &\equiv -{}^S R_{AB}{}^C \sigma_c B^A \\ &= R_{abc} - \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_{cde} K_{[a}{}^d K_{b]}{}^e + \sqrt{2}i \nabla_{[a} K_{b]c}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

De lo anterior tenemos ahora que

$$\gamma^{bcS} R_{abc} = -\sigma^b{}_A{}^B \sigma^c{}_B{}^A \left(R_{abc} - \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_{cde} K_{[a}{}^d K_{b]}{}^e + \sqrt{2}i \nabla_{[a} K_{b]c} \right)$$

y el último término dá

$$\gamma^{bc} S R_{abc} = -\frac{i}{\sqrt{2}} \nabla^b (K_{ab} - K \gamma_{ab}) \quad (5.58a)$$

Por otra parte

$$\epsilon^{abc} S R_{abc} = \sqrt{2} \sigma^a_A \sigma^b_B \sigma^c_D \epsilon^A S R_{abc}$$

de donde obténemos

$$\epsilon^{abc} S R_{abc} = \frac{1}{\sqrt{2}} (K^{ab} K_{ab} - K^2 - R). \quad (5.58b)$$

R es la curvatura asociada con la $SU(2)$ derivada ∇_a . Las ecs.(5.58a-b) representan a las ecuaciones de las constricciones cuando son igualadas a cero.

Introducción a las Variables de Ashtekar

Recientemente *Ashtekar* [8] ha introducido variables espinoriales para describir el espacio fase de la Relatividad General las cuales esclarecen la estructura de la teoría. En esta sección seguiremos el enfoque de *Jacobson* y *Smolin* [9]. El propósito es derivar los resultados de Ashtekar directamente de una acción cuatridimensional para la relatividad general en lugar de llegar a las ecuaciones de Einstein haciendo una transformación canónica en el espacio fase. Procediendo de este modo se esclarecen ciertos aspectos que en la derivación de Ashtekar permanecen ocultos. Con este propósito en mente consideremos la representación en la vielbein para la acción de Einstein-Hilbert:

$$S[e, \omega] = \int d^4 x e e^\mu_a e^{\nu b} R^a_{b\mu\nu}(\omega) \quad (5.59a)$$

donde

$$R^a_{b\mu\nu}(\omega) = \partial_\mu \omega_\nu^a{}_b + \omega_\mu^a{}_c \omega_\nu^c{}_b - (\mu \leftrightarrow \nu)$$

Lo que mostraremos es que las ecuaciones de Einstein pueden también obtenerse de una acción construída de la parte autodual del tensor de Riemann

$$S[e, {}^+\omega] = \int d^4 x e e^\mu_a e^{\nu b} R^a_{b\mu\nu}[{}^+\omega], \quad (5.59b)$$

donde las partes autodual (${}^+\omega$) y anti autodual (${}^-\omega$) de la conexión ω son dadas por

$$\pm \omega_\mu^{ab} = \frac{1}{2} (\omega_\mu^{ab} \mp i {}^* \omega_\mu^{ab}). \quad (5.60)$$

y ${}^* \omega_\mu^{ab} = \frac{1}{2} \epsilon^{ab}{}_{cd} \omega_\mu^{cd}$ es el dual de ω_μ^{ab} sobre índices de la tétrada. El hecho crucial en esta demostración es la identidad

$$R^a_{b\mu\nu}(\omega) = R^a_{b\mu\nu}({}^+\omega) + R^a_{b\mu\nu}({}^-\omega). \quad (5.61)$$

esto es que la curvatura es la suma de las partes autodual y anti autodual de ω^\dagger . Para ver esto expandemos cada término

$$R^a{}_{b\mu\nu}(\pm\omega) = \frac{1}{2}\partial_\mu(\omega_\nu{}^a{}_b \mp i^*\omega_\nu{}^a{}_b) + \frac{1}{4}(\omega_\mu{}^a{}_c\omega_\nu{}^c{}_b - {}^*\omega_\mu{}^a{}_c{}^*\omega_\nu{}^c{}_b) \\ \mp \frac{i}{4}(\omega_\mu{}^a{}_c{}^*\omega_\nu{}^c{}_b + {}^*\omega_\mu{}^a{}_c\omega_\nu{}^c{}_b) - (\mu \leftrightarrow \nu).$$

Cuando sumamos $R^a{}_{b\mu\nu}(+\omega)$ y $R^a{}_{b\mu\nu}(-\omega)$, los términos que dependen del signo se cancelan. Queda por demostrar que el término que resta es justamente $R^a{}_{b\mu\nu}(\omega)$. Para ver esto invertimos la parte cuadrática en ${}^*\omega$ en términos de ω :

$${}^*\omega_\mu{}^a{}_c{}^*\omega_\nu{}^c{}_b = \frac{1}{4}\varepsilon^{acrs}\varepsilon_{cbuv}\omega_\mu{}^r{}_s\omega_\nu{}^{uv} \\ = \frac{1}{4}(2\delta_b^a\omega_\mu{}^r{}_s\omega_\nu{}^s{}_r - 4\omega_\mu{}^a{}_c\omega_\nu{}^c{}_b)$$

donde hemos usado la identidad $\varepsilon^{acrs}\varepsilon_{cbuv} = \delta_{bu}^{ar}$. La primera parte es simétrica en los índices μ y ν y se cancela cuando antisimetrizamos. La segunda parte se suma al término en ω^2 de modo que la ecuación (5.61) se sigue. En la misma forma podemos mostrar que

$${}^*R(\omega) = i(R(+\omega) - R(-\omega)). \quad (5.62)$$

Se sigue de las ecs.(5.61-62) la importante identidad

$$R^a{}_{b\mu\nu}(+\omega) = \frac{1}{2}(R^a{}_{b\mu\nu}(\omega) - i{}^*R^a{}_{b\mu\nu}(\omega)). \quad (5.63)$$

Como consecuencia la acción $S[e, +\omega]$ es compleja con $\text{Re } S[e, +\omega] = \frac{1}{2}S[e, \omega]$. Debido al hecho de que $+\omega$ es compleja debíamos esperar que $\frac{\delta S}{\delta +\omega}$ imponga demasiadas constricciones sobre los campos. Para ver que no es así notamos que

$$\frac{\delta S}{\delta +\omega} = 0 \quad \text{implica} \quad +\omega = +\omega(e). \quad (5.64)$$

-la conexión de tétradas autodual sin torsión (requerimos $\delta^+\omega$ autodual en δS)-. Módulo las ecuaciones de campo la acción $S[e, +\omega]$ es simplemente $\frac{1}{2}S[e, \omega]$ es decir la parte imaginaria es cero. Esto es porque

$$e_a^\mu e_b^\nu {}^*R^a{}_{b\mu\nu}(\omega(e)) = \frac{1}{2}e_a^\mu e_b^\nu \varepsilon^{abcd}R_{cd\mu\nu} \\ = \frac{1}{2}\varepsilon^{abcd}R_{cdab} = 0. \quad (5.65)$$

donde hemos usado identidad de Bianchi (Torsión=0) en la última línea. Se desprende de lo anterior que las ecuaciones de Einstein siguen tomando la variación de $S[e, +\omega]$ con

† Al principio (ec.5.41) estudiamos la dualidad en índices tensoriales.

respecto a ϵ . Un hecho que vale la pena mencionar es que si el tensor de curvatura es autodual es decir $R^a{}_{b\mu\nu} = {}^*R^a{}_{b\mu\nu}$, entonces satisface automáticamente las ecuaciones de Einstein.

Reproducimos a continuación el mismo argumento usando la expresión espinorial para la acción autodual de Einstein:

$$S[\sigma, \Gamma] = \int d^4 x \sigma \sigma^{\mu\lambda M'} \sigma^\nu{}_{BM'} R_A{}^B{}_{\mu\nu}, \quad (5.66)$$

donde

$$R_A{}^B{}_{\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu A}^B + \Gamma_{\mu A}^C \Gamma_{\nu C}^B - (\mu \leftrightarrow \nu)$$

lo cual no depende de la forma de soldadura $\sigma_\mu{}^{AB}$. Ahora, la variación del espinor de curvatura está dada por

$$\delta R_A{}^B{}_{\mu\nu} = D_{[\mu} \delta \Gamma_{\nu] A}{}^B$$

Tenemos pues

$$\delta S = \int d^4 x \sigma \sigma^\mu{}_{AM'} \sigma^\nu{}_{BM'} D_{[\mu} \delta \Gamma_{\nu] A}{}^B, \quad (5.67)$$

de tal manera que

$$\begin{aligned} \delta S &= 2 \int d^4 x \sigma \sigma^{\mu\lambda M'} \sigma^\nu{}_{BM'} D_{[\mu} \delta \Gamma_{\nu] A}{}^B \\ &= 2 \int d^4 x \sigma \left\{ T_{\rho\mu}{}^\rho \sigma^{[\mu\lambda M'} \sigma^{\nu]}{}_{BM'} - D_\mu \sigma^{[\mu\lambda M'} \sigma^{\nu]}{}_{BM'} \right\} \delta \Gamma_{\nu A}{}^B, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{\delta S}{\delta \Gamma_{\mu A}{}^B} = 0 \quad \text{implica} \quad T = 0. \quad (5.68)$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \sigma^\rho{}_{CD'}} &= \int d^4 x \sigma \left(\sigma^\mu{}_{AM'} \delta^\nu{}_\rho \delta^{CD'}{}_{BM'} + \sigma^\nu{}_{BM'} \delta^\mu{}_\rho \delta^{CD'}{}_{AM'} \right) R_A{}^B{}_{\mu\nu} \\ &\quad + \int d^4 x \frac{\delta \sigma}{\delta \sigma^\rho{}_{CD'}} \left(\sigma^{\mu\lambda B'} \sigma^\nu{}_{BM'} R_A{}^B{}_{\mu\nu} \right) \end{aligned}$$

donde

$$\frac{\delta \sigma}{\delta \sigma^\rho{}_{CD'}} = -\sigma g_{\mu\nu} \sigma^{\mu CD'} \delta^\nu{}_\rho.$$

Finalmente $\delta S / \delta \sigma^\mu{}_{BC'} = 0$ nos lleva a las ecuaciones de Einstein

$$\sigma^{\alpha\lambda C'} R_A{}^B{}_{\mu\alpha} - \frac{1}{2} \sigma_\mu{}^{BC'} \sigma^{\alpha RM'} \sigma^\beta{}_{SM'} R_R{}^S{}_{\alpha\beta} = 0. \quad (5.69)$$

Ahora examinemos la formulación hamiltoniana de la relatividad general usando la representación espinorial. Para la acción tomamos la expresión dada por ec.(5.66)

$$S[\sigma, \Gamma] = \int d^4 x \sigma \sigma^{\mu\lambda C'} \sigma^\nu{}_{BC'} R_A{}^B{}_{\mu\nu}.$$

Usando la descomposición de la forma $SL(2, C)$ de soldadura $\sigma_\mu^{AB'}$ en términos de la forma $SU(2)$ y el espinor normal (ec.(5.48))

$$\int d^4 x \sigma^\mu{}_{AC'} \sigma^\nu{}_{BC'} R_A{}^B{}_{\mu\nu} = \int d^4 x \sigma \left\{ i \sqrt{2} \eta^\mu \sigma^{\nu A}{}_B R_A{}^B{}_{\mu\nu} - \sigma^\mu{}_{A^B} \sigma^\nu{}_{B^C} R_C{}^A{}_{\mu\nu} \right\}. \quad (5.66a)$$

donde se usó $\eta^\mu \eta^\nu R_A{}^B{}_{\mu\nu} = 0$, y la identidad $\eta^{AC'} \eta_{BC'} = \frac{1}{2} \delta_B^A$. $R_A{}^B{}_{\mu\nu}$ es la curvatura espinorial definida arriba (ec.(5.66)). Hemos visto antes que en términos de las funciones "lapse" y "shift" N y N^a , el vector de flujo de tiempo se escribe $t^a = N^a + N \eta^a$. Además, en términos de las variables ADM en coordenadas adaptadas

$$\begin{aligned} \eta^\mu &= \frac{1}{N} (1, -N^a), \\ \sigma^{\mu AB} &= (0, \sigma^a{}^{AB}), \\ |\sigma| &= \sqrt{g} = -i N \gamma^{1/2}. \end{aligned}$$

y

de tal manera que

$$S = \sqrt{2} \int d^4 x \left\{ \bar{\sigma}^a{}^A{}_B R_A{}^B{}_{0a} - N^a \bar{\sigma}^b{}_B{}^A R_A{}^B{}_{ab} - \underline{N} \bar{\sigma}^a{}_A{}^B \bar{\sigma}^b{}_B{}^C R_C{}^A{}_{ab} \right\}. \quad (5.66b)$$

donde $\underline{N} = -iN/\sqrt{2\gamma}$ y $\bar{\sigma} = \sqrt{\gamma}\sigma$. Adicionalmente vemos que aparece $R_A{}^B{}_{0a}$ en la acción. En términos de sus componentes esto queda:

$$\begin{aligned} R_A{}^B{}_{0a} &= \dot{\Gamma}_{aA}{}^B - \partial_a \Gamma_{0A}{}^B + (\Gamma_{0A}{}^C \Gamma_{aC}{}^B - 0 \leftrightarrow a) \\ &= \dot{\Gamma}_{aA}{}^B - {}^S \nabla_a \Gamma_{0A}{}^B. \end{aligned}$$

donde ${}^S \nabla_a$ es la derivada covariante asociada con la conexión de Sen. De este modo podemos reexpresar el primer término en ec.(5.66b) en la forma $\bar{\sigma}^a{}_A{}^B \dot{\Gamma}_{aB}{}^A - \bar{\sigma}^a{}_A{}^B {}^S \nabla_a \Gamma_{0A}{}^B$. Para nuestros propósitos introducimos la notación

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}_{aB}{}^A &\equiv \dot{A}_{aB}{}^A, \\ \Gamma_{0A}{}^B &\equiv -N_A{}^B, \end{aligned}$$

Realizando ahora una integración parcial en el segundo término que involucra a la derivada covariante de la conexión $\Gamma_{0A}{}^B$ y descartando el término de superficie, la acción puede reescribirse en la forma canónica

$$S[\bar{\sigma}, \dot{A}] = \sqrt{2} \int d^4 x \left\{ \sigma^a{}_A{}^B \dot{A}_{aB}{}^A - N^A{}_B C_A{}^B - N^a C_a - \underline{N} C \right\} \quad (5.66c)$$

donde hemos definido

$$C_A{}^B = {}^S \nabla_a \bar{\sigma}^a{}_A{}^B, \quad (5.70a)$$

$$C_b = \bar{\sigma}^a{}_A{}^B R_B{}^A{}_{ab}, \quad (5.70b)$$

$$C = \bar{\sigma}^a{}_A{}^B \bar{\sigma}^b{}_B{}^C R_C{}^A{}_{ab}. \quad (5.70c)$$

Procediendo de manera análoga al capítulo 3, hacemos ahora la transformación de Legendre del lagrangiano al hamiltoniano, ésta viene dada por

$$H = \int d^3x \{ N^A {}_B C_A^B + N^a C_a + \underline{N} C \}. \quad (5.71)$$

Vemos que las N 's juegan el papel de multiplicadores de Lagrange así que variando la acción respecto de ellos, obtenemos las ecuaciones de las constricciones $C_A^B = 0$, $C^a = 0$ y $C = 0$. $C^a = 0$ y $C = 0$ como hemos visto, corresponden al supermomento y al superhamiltoniano respectivamente. Las tres del tipo $C_A^B = 0$ surgen por la invariancia de la acción ante rotaciones $SU(2)$. Nuevamente vemos que, como en la representación tensorial tradicional, el hamiltoniano ec.(5.71) es puramente constricción.

Podemos ver de la forma de la acción ec.(5.66c) que A_a juega el papel de la variable de configuración y $\tilde{\sigma}^a$ juega el papel del momento satisfaciendo el álgebra del paréntesis de Poisson†

$$\begin{aligned} \{ \tilde{\sigma}^{bCD}(x), A_{aAB}(x') \} &= \delta_a^b \delta_{AB}^{CD} \delta(x, x'), \\ \{ A_a, A_b \} &= 0 = \{ \tilde{\sigma}^a, \tilde{\sigma}^b \}, \end{aligned} \quad (5.72)$$

Correspondiendo a cada punto x^a hay 9 campos A_{aA}^B dando 18 grados de libertad en el espacio fase. Esto debe compararse con los 12 de la representación métrica (γ_{ab}, Π^{ab}) . Junto con las tres condiciones de norma necesarias para fijar las N_A^B recuperamos el mismo número de grados de libertad que tuvimos en la representación métrica.

Para concluir hagamos algunos comentarios acerca de la presente exposición:

1. Esta elección de nuevas variables $(\tilde{\sigma}^a, A_a)$, es análoga a la elección de variables $(p_i, \xi_i \equiv q_i + i p_i)$ en el caso del oscilador armónico clásico. Con respecto a esta analogía vale la pena también remarcar que a pesar de que $\tilde{\sigma}$ y A tienen una relación canónica de paréntesis de Poisson, no son, sin embargo, un par canónico en el sentido tradicional ya que mientras que $\tilde{\sigma}^a$ es real, A_{aAB} es complejo.
2. Como una consecuencia de que la acción original (ec.(5.66)) es compleja, el hamiltoniano será, en general, complejo. En la introducción de esta sección vimos que, en la representación de la vielbein, la acción (ec.(5.59)) la cual es equivalente a la ec.(5.66), es real si el autodual de la conexión depende explícitamente de la vielbein (${}^+ \omega = {}^+ \omega(e)$) asumiendo que la vielbein es real. Volviendo a la analogía con el oscilador armónico, vemos que sólo aquellas parejas para las que $\xi_i \equiv (m\omega)^{1/2} q_i + i (m\omega)^{1/2} p_i$ con p_i real corresponden a puntos en el espacio fase real.

† Es importante remarcar que no tenemos que calcular los paréntesis de Poisson de la ec.(5.67) dado que para un lagrangiano de la forma $p\dot{q} - H$ las ecs.(5.72) se siguen por construcción.

APENDICE A

Teoría de Yang-Mills

Como un ejercicio revisemos ahora la formulación de la teoría de Yang Mills descrita por la acción

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4 x F_a^{\mu\nu} F_{a\mu\nu} \quad (1)$$

donde el tensor $F_a^{\mu\nu} = \partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu + f_c^{bc} A_b^\mu A_c^\nu$. Los momenta canónicos están dados por

$$\Pi_\mu^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_a^\mu} = -F^a{}_{\mu 0} \quad , \quad (2)$$

La velocidad \dot{A}_a^0 no aparece de manera que $\Pi_a^0 = 0$ Entonces el A_a^0 juega el papel del multiplicador de Lagrange. El hamiltoniano es entonces

$$\begin{aligned} H &= \int d^3 x (\Pi_i^a \dot{A}_a^i - \mathcal{L}) \\ &= \int d^3 x \left(\Pi^a \cdot \Pi^a + (\nabla^a \times A^a)^2 + A_a^0 (\nabla \cdot \Pi^a) \right) \\ &= \int d^3 x (\mathcal{H}_c + A_a^0 \Phi^a) \quad , \end{aligned} \quad (3)$$

donde $\mathcal{H}_c = \Pi^a \cdot \Pi^a + (\nabla^a \times A^a)^2$ y $\Phi^a = \nabla \cdot \Pi^a$.

APENDICE B

La Ecuación de Hamilton-Jacobi.

Sea $S[\gamma]$ un funcional escalar tal que

$$\Pi^{ab} = \frac{\delta S}{\delta \gamma_{ab}} \quad (1)$$

Entonces tendremos que S satisface la ecuación funcional diferencial parcial

$$\mathcal{H}_0 \left(\gamma_{ab}, \frac{\delta S}{\delta \gamma_{ab}} \right) = 0, \quad (2)$$

ó

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} G_{abcd} \left(\frac{\delta S}{\delta \gamma_{ab}} \right) \left(\frac{\delta S}{\delta \gamma_{cd}} \right) - \sqrt{\gamma} {}^d R[\gamma] = 0.$$

Similarmente del hecho que S es un escalar sigue que

$$\nabla_a \frac{\delta S}{\delta \gamma_{ab}} = 0.$$

Esto puede ser demostrado por medio de un argumento estándar. Bajo una transformación de coordenadas $x^a \rightarrow x^a + \xi^a$ la métrica γ_{ab} es transformada por la derivada de Lie de ξ^a , $\delta \gamma_{ab} = \xi_{a|b} + \xi_{b|a}$ mientras $\delta S[\gamma] = 0$ lo que implica

ó

$$\int d x \frac{\delta S[\gamma]}{\delta \gamma_{ab}} \delta \gamma_{ab} = 0,$$

$$2 \int d x \frac{\delta S[\gamma]}{\delta \gamma_{ab}} \nabla_a \xi_b = 0.$$

y después de una integración parcial donde el término de superficie es despreciado esto puede ser escrito

$$\int d x \sqrt{\gamma} \nabla_a \left[\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(\frac{\delta S[\gamma]}{\delta \gamma_{ab}} \right) \right] \xi_b = 0. \quad (3)$$

(recordamos que Π^{ab} es una densidad tensorial de peso 1, por lo tanto $\delta S/\delta \gamma$ también lo es). Además dado que ξ^a es arbitrario tenemos que

$$\sqrt{\gamma} \nabla_a \left[\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\delta S}{\delta \gamma_{ab}} \right] = 0. \quad (4)$$

Siguiendo el argumento dado por de Witt introducimos el campo vectorial en S

$$\partial_t = \int \left(2D \nabla_a N_b - \frac{2N}{\sqrt{\gamma}} G_{abcd} \frac{\delta S}{\delta \gamma_{cd}} \right) \frac{\delta}{\delta \gamma_{ab}}. \quad (5)$$

Actuando sobre γ_{ab} , esta ecuación reproduce el momento Π^{ab} en términos de $\dot{\gamma}$, γ y N^a . Se puede demostrar que las ecuaciones de Einstein son obtenidas al tomar la derivada de la ecuación de Hamilton-Jacobi a lo largo del campo vectorial ∂_t . Equivalentemente, si las ecuaciones de Einstein con constricciones se satisfacen para todo tiempo, entonces las ecuaciones dinámicas son automáticamente satisfechas.

APENDICE C

El espinor de Campo Electromagnético

Examinemos ahora el equivalente espinorial $R_A^B{}_{CD'EF'}$ del espinor de curvatura $R_A^B{}_{\mu\nu}$:

$$R_A^B{}_{\mu\nu} \equiv R_A^B{}_{CD'EF'} \sigma_\mu{}^{CD'} \sigma_\nu{}^{EF'}$$

Los índices espinoriales A, B no juegan por el momento un papel activo. A manera de ejercicio ilustrativo examinemos ahora el equivalente espinorial de un tensor antisimétrico $F_{\mu\nu}$. Podemos pensar en $F_{\mu\nu}$ como el tensor de Faraday en electromagnetismo:

$$F_{\mu\nu} \equiv F_{CD'EF'} \sigma_\mu{}^{CD'} \sigma_\nu{}^{EF'}$$

claramente $F_{CD'EF'} = -F_{EF'CD'}$, como una consecuencia de la antisimetría de $F_{\mu\nu}$. Por lo tanto mediante el procedimiento de sumar y restar una misma cantidad a $F_{CD'EF'}$ vemos que

$$F_{CD'EF'} = \frac{1}{2}(F_{CD'EF'} - F_{ED'CF'}) + \frac{1}{2}(F_{ED'CF'} - F_{EF'CD'})$$

esto se reduce, mediante la utilización de $\varepsilon_{AB} V^C = 2V_{[AB]}$ a lo siguiente

$$\begin{aligned} F_{CD'EF'} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{CE} F_{HE'}{}^H{}_{F'} + \varepsilon_{D'F'} F_{EJ'}{}^J{}_{C'}) \\ &\equiv \varepsilon_{CE} \bar{\phi}_{D'F'} + \varepsilon_{D'F'} \phi_{CE} \end{aligned}$$

Seguimos la convención en electromagnetismo donde $\phi_{A'B'}$ está relacionada con ϕ_{AB} mediante la operación de tomar el conjugado, teniendo presente que el tensor $F_{\mu\nu}$ es real

$$\phi_{BA} = \frac{1}{2} F_{BC'A}{}^{C'} = -\frac{1}{2} F_b{}^{C'}{}_{AC'} = \frac{1}{2} F_{AC'B}{}^{C'} = \phi_{AB}.$$

Más generalmente estos dos espinores no estarían relacionados.

Exactamente en la misma forma podemos ver que $R_A^B{}_{CD'EF'}$ es descompuesto como sigue:

$$R_A^B{}_{CD'EF'} = -\{ \chi_A^B{}_{CE} \varepsilon_{D'F'} + \Phi_A^B{}_{D'F'} \varepsilon_{CE} \},$$

donde

$$\begin{aligned} \chi_A^B{}_{CE} &\equiv -\frac{1}{2} R_A^B{}_{CD'E}{}^{D'} \\ \Phi_A^B{}_{D'F'} &\equiv -\frac{1}{2} R_A^B{}_{CD'}{}^C{}_{F'}. \end{aligned}$$

Notemos que $\Phi_A^B{}_{D'F'}$ y $\chi_A^B{}_{CE}$ no guardan ninguna relación entre sí.

REFERENCIAS

- [1] M. Spivak: "Diferential Geometry" (A Comprehensive Introduction to), Vol. 4 pp(1-31), Publish or Perish Inc. Boston, Mass. U. S. A.
- [2] K. Sundermeyer: "Constrained Dynamics", Springer Verlag, (1982).
- [3] C. Misner, K. Thorne, J.A. Wheeler: "Gravitation ", W.H. Freeman and Co. New York, (1971).
- [4] S. Weinberg: "Gravitation and Cosmology", John Wiley and Sons, (1972).
- [5] R. Arnowitt, S. Deser, C. Misner: "The Dynamics of General Relativity" en "Gravitation: an introduction to current research", L. Witten (ed).
- [6] K. Kuchař: Journal of Math. Phys., 17, 777-820 (1976).
- [7] S. Hojman, K. Kuchař, C. Teitelboim: Annals of Physics, 96, 88-135 (1976).
- [8] A. Ashtekar: Physical Review, D 38, 1587-1602, (1987).
- [9] T. Jacobson y L. Smolin: Class. Quantum Grav., 5, 583-594, (1988).
- [10] T. Regge y C. Teitelboim: Annals of Physics, 88, 286-318 (1974).
- [11] R. M. Wald: "General Relativity", The University of Chicago Press, (1984).