UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE FILOSOFIA Y LETRAS

CONTROL PRIMARIO PARA LA ELABORACION DE CARTAS GEOGRAFICAS

T E S I S

PARA OPTAR AL TITULO DE

LICENCIADO EN GEOGRAFIA

P R E S E N T A

GRISELDA D. CORDOBA RENDON

México, D. F. 1977

DEDICO ESTE TRABAJO:

A MIS PADRES:

Fernando Córdoba Carbajal.
Margarita Rendón de Córdoba.

A MI ESPOSO:

Rafael Terrés Rocha.

A MIS HERMANOS:

Leticia
Paz
Fernando

DESEO EXPRESAR MI MAS SINCERO RECONOCIMIENTO:

AL ING. JORGE CAIRE LOMELI:

Por su valiosa cooperación para la realización de este trabajo.

AL DR. JORGE A. VIVO ESCOTO:

Por su orientación y apoyo durante toda mi carrera.

A MIS MAESTROS Y
A MIS AMIGOS.

CONTROL PRIMARIO PARA LA ELABORACION DE CARTAS GEOGRAFICAS

GRISELDA D. CORDOBA RENDON.

I N T R O D U C C I O N

La Geografía es la ciencia que se preocupa de analizar los fenómenos que se presentan en la superficie terreste desde el punto de vista de sus causas y de sus consecuencias, es decir, analizándolos cualitativa y cuantitativamente, así como interrelacionándolos entre sí.

Tiene por lo tanto como objetivo principal conocer las características propias de nuestro planeta en relación con el resto del Sistema Solar, para esto la Geografía se auxilia de otras ciencias afines que también estudian a la Tierra tomando de ellas los elementos básicos que le ayudan a definirla. Entre estas ciencias está la Geodesia, la que trata de la determinación de la figura, forma y dimensiones de la superficie de la Tierra a través de la medición de líneas de arco (meridianos y paralelos), determinación de la posición de puntos en dichos arcos, medición de líneas por medio de red de triángulos, los cuales cubren una área y por medio de la medición de la variación de la fuerza de gravedad en diferentes partes de la superficie terreste. Métodos que dan la forma y tamaño de la Tierra, pero no las dimensiones absolutas de la misma.

Son por lo tanto la Geografía y la Geodesia ciencias cuyo tema en común es el estudio de la superficie de la Tierra, pero ambas con diferentes objetivos y metodologías.

De especial significado es para la Geografía el conocimiento exacto de la forma y dimensión de la Tierra ya que uno de los postulados metodológicos de esta ciencia es el de la localización precisa de todos y cada uno de los fenómenos que ella estudia. El géografo que inicia un estudio ya sea local o regional, debe primeramente señalar la localización de dicho fenómeno en relación a los demás hechos que ocurren en el espacio geográfico.

Para dicha localización se auxilia de las coordenadas geográficas para la determinación de la forma y dimensiones de la Tierra.

La determinación de la latitud y longitud de un vértice constituye una de las aplicaciones de la Geodesia a la Geografía, ya que todas las localizaciones están en relación con estos dos aspectos.

Para efectuar la localización de los fenómenos geográficos de una forma gráfica y representativa, la Geografía se vale de las cartas geográficas, las cualès para su elaboración requieren de los conocimientos geodésicos, ya que la Tierra para ser representada sobre un plano requiere la utilización de proyecciones, es decir, ciertas construcciones geométricas convencionales; dichas proyecciones parten de considerar a la Tierra en forma elipsoidica, debiéndose hacer, por lo tanto, mediciones y ajustes por medios geodésicos, de esta manera queda fundamentado que toda construcción de cartas a partir de una proyección, requiere del establecimiento geodésico.

Debe, por lo tanto, el geógrafo conocer dichos procedimientos geodésicos, ya que la carta geográfica es uno de los requisitos indispensables que debe manejar en toda investigación geográfica para la representación e interpretación que estudia. Dicho conocimiento está en relación con aspectos tales como: establecimiento de vértices geodésicos que se encuentran ligados al Datum geodésico por medio de triangulaciones, trilateraciones, poligonales; así como bancos de nivel de precisión ligados al origen establecido como datum y comprobados con los mareógrafos.

Establecida la importancia que tiene para el geógrafo la elaboración de cartas geográficas y señalada la relación de este tópico con la ciencia geodésica, este estudio presenta los diferentes procedimientos necesarios para dicha elaboración y que están fundamentados en los procedimientos geodésicos.

Para tal efecto y poniendo énfasis en el conocimiento geográfico, éste se inicia con una evolución histórica de esta ciencia, a fin de comprender los principios básicos de ella, así como para entender su desarrollo actual. Considerando que las cartas geográficas, a través de sus proyecciones, señalan a la Tierra como un elipsoide, se establece en primer término la determinación de sus elementos tales como: radio de curvatura, radio central, línea geodésica. Ocupan un lugar significativo de este estudio el análisis de las triangulaciones geodésicas, describiéndose las etapas metodológicas para su realización así como sus características y ajustes necesarios para efectuarse, hasta llegar al control y densificación por medio de poligonales geodésicas. Tomando en cuenta que las cartas geográficas son proyecciones del elipse de revolución considerado, se aborda la descripción y análisis de las principales proyecciones cartográficas utilizadas y en especial la Universal Transversa de Mercator, de la que se efectúa una ejemplificación de la carta general de la República Mexicana, escala 1 : 100.000.

CAPITULO I

EVOLUCION HISTORICA DE LA GEODESIA

La Geodesia es una ciencia que requiere de las Matemáticas Aplicadas para la determinación precisa de los puntos situados sobre la superficie terreste e incluye la investigación de la figura y el área de grandes porciones de la superficie de la Tierra. Además, incluye el estudio de las variaciones de la gravedad terrestre y su aplicación, así como de otras propiedades, en la medida exacta de las dimensiones y forma de la Tierra.

Así pués, la Geodesia puede definirse simplemente, como la ciencia que trata de la determinación de las dimensiones exactas y de la forma de la Tierra, así como la localización precisa de puntos sobre la superficie terrestre.

Para su estudio la Geodesia puede dividirse en cuatro ramas, a saber:

1. Geodesia Matemática. Se encarga de la determinación de puntos con toda precisión sobre la superficie terrestre.
2. Geodesia de Posición. Determina las coordenadas geográficas de los puntos geodésicos por medios astronómicos; también determina la desviación de la vertical.

4. Geodesia Superior. Por medio de los resultados de las tres ramas anteriores determina la superficie del Geoide, la desviación de la vertical, anomalías de la gravedad, compensaciones por isostasia y establecimiento de puntos Dato (Datum).

La Geodesia a través de los Pensadores Científicos.

Las apreciaciones más antiguas respecto a la forma y dimensiones de la Tierra, se cree que se deben a los caldeos, quienes cinco siglos antes de Cristo, decían que andando continuamente a pie se daría la vuelta a la Tierra en el mismo tiempo que el Sol.

Parménides afirmaba que la Tierra era esférica y que estaba en el centro del Universo, por lo tanto, estando en equilibrio no se movía en un sentido más que en el otro, por lo que se sostenía sin caerse.

Los antiguos griegos, en su especulación y teorización, comenzaron por el disco plano que proclamaba Homero y terminaron en la figura esférica de Pitágoras, idea apoyada cien años después por Aristóteles. Anaximandro, venerado por los griegos como el padre de la Cartografía, apoyó la idea de un cilindro suspendido verticalmente en el espacio; se le atribuye la invensión del gnomon y fue el primero que dio una descripción de la Tierra. Anaxímenes creyó que la Tierra tenía una forma rectangular.

Como la forma esférica era la más ampliamente conocida durante la era griega, se hicieron esfuerzos para determinar sus dimensiones en forma lógica.

Decirarco de Messinas es el primero que elaboró cartas geográficas, así como el que presentó las posiciones de los puntos por medio de coordenadas rectangulares referidas a dos ejes, tomando como origen a la isla de Rodas.

Eratóstenes se dedicó a realizar medidas más precisas y fue el primero que aplicó un método para determinar las dimensiones de la Tierra. El realizó su experimento en dos ciudades la de Siena y la de Alejandría y además aplicó ciertos hechos conocidos, a saber: 1) El día del solsticio de verano el Sol a mediodía estaba directamente sobre la línea del Trópico de Verano o de Cáncer. Por lo que llegó a la conclusión, mediante su experimento, de que Siena estaba sobre esta línea. 2) La distancia lineal entre Alejandría y Siena se suponía de 5 000 estadios; supuso además que estas dos ciudades quedaban èn una dirección norte - sur. Por la lejanía del Sol supuso que las visuales dirigidas a él desde los dos puntos eran paralelas.

El experimento de Eratóstenes consistía en lo siguiente: En el sosIticio de verano, cuando el Sol está en el cenit, éste iluminaba un pozo en toda su extensión; este hecho lo observaba en Siena, mientras en Alejandría coloca una esfera de vidrio con un vástago de altura igual al radio de la esfera; todo esto lo hace al mismo tiempo y observa que el Sol proyecta sobre la esfera una sombra con un ángulo de 7° 12' o sea la quincuagésima parte de la circunferencia; como conoce la distancia entre las dos ciudades, procede a estimar la circunferencia terrestre mediante el siguiente cálculo:

$$50 \times 5\ 000 = 250\ 000 \text{ estadios} = 45\ 000 \text{ kilómetros}$$

METODO DE ERATOSTENES PARA DETERMINAR EL TAMAÑO DE LA TIERRA

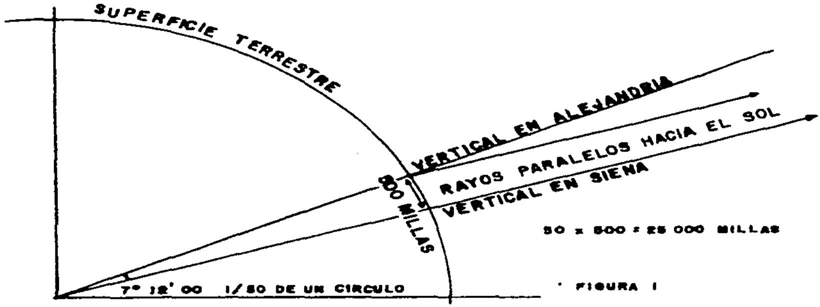


FIGURA 1

Otra angiqua medida de las dimensiones de la Tierra fue realizada por el griego Posidonio, quien notó que la estrella Canopus estaba en el horizonte de Rodas, por lo que midió después la elevación de la misma sobre el horizonte de Alejandría y determinó que el ángulo era igual a 1/48 de la circunferencia. Supuso que la distancia de Alejandría a Rodas era de

5 000 estadios y con estos valores calculó que la circunferencia terrestre era de 240 000 estadios.

MEDIDA DE LA DIMENSION DE LA TIERRA HECHA POR POSIDONIO

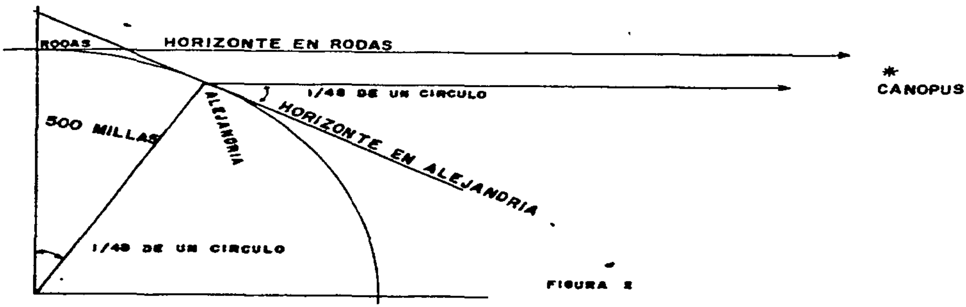


FIGURA 2

Ptolomeo, uno de los astrónomos más notables de principios de la Era Cristiana, escribió una Geografía en la que por primera vez se representaban las posiciones terrestres por medio de latitud y longitud.

Durante la Edad Media se realizaron algunos trabajos en Europa, pero en general no hubo grandes progresos en la Cartografía.

En el siglo XV se da un cambio en el concepto de las dimensiones de la Tierra. Mercator, a quien se acredita haber popularizado la carta que lleva su nombre, hizo sucesivas reducciones a las dimensiones del Mar Mediterráneo y, por lo tanto, a toda Europa.

Las contribuciones del siglo XVII a la Geodesia fueron: el telescopio, las tablas de logaritmos y el método de triangulación. En este siglo el francés Picard llevó a cabo la medida de un arco, siguiendo en ciertos aspectos el método moderno actual. Midió realmente una línea de base con el auxilio de reglas da madera utilizó un telescopio en la medida de los ángulos y calculó su triangulación mediante logaritmos. También determinó el valor de un grado geográfico, las dimensiones del semidiámetro polar y ecuatorial y establece que ambos parámetros están en una relación de 1/230.

Casi simultáneamente a los trabajos realizados por Picard, Richer comprueba esos datos con el péndulo, al cual lo hace batir al segundo en París; después se translada a Cayena en Guayana, América del Sur, y lo hace batir al segundo, allí observa que se atrasa 2 segundos por día; con ésto Richer comprueba la diferencia de presantez.

En 1634 Juan Bautista Riccioli midió el arco comprendido entre Módena y Bolonia, experimento que hizo junto con Grimaldi, y así obtuvieron las diferencias de latitud midiendo las distancias cenitales recíprocas entre los extremos del arco.

Nonwood, casi en la misma época, midió un arco de 2°30' entre Nueva York y Londres, para lo cual utilizó la brújula y la latitud fue determinada mediante el Sol.

A fines del siglo XVII, Maraldi y Cassini midieron un arco de 8°30' a través de Francia, observaron que el arco no tenía la misma longitud en todas las latitudes, sino que iba disminuyendo hacia los polos. Antes de que se hiciera esta medida, Newton ya había descubierto el principio de la Gravedad Universal y Huygens había expuesto la teoría de la Fuerza Centrífuga; estos hechos produjeron una revolución en las ideas científicas imperantes.

A mediados del siglo XVIII, Cassini realizó una triangulación para la formación de la Carta de Francia.

Delambre remide el meridiano de París y lo amplía hasta medir 12°, con lo que determina el valor del cuadrante del meridiano; a su vez con él se establece el patrón y sistema decimal francés.

Estos resultados dieron lugar a una intensa controversia entre los científicos franceses e ingleses; éstos sostenían que la Tierra debía ser achatada, tal como Newton y Huygens lo habían demostrado teóricamente, mientras que los franceses defendían sus propias medidas y se inclinaban a sostener que la Tierra tenía la forma de un huevo.

La controversia tenía que decidirse de modo que en 1735 la Academia de Ciencias Francesas envió una expedición geodésica a Perú para medir la longitud de un grado de meridiano o sea un lugar cercano al Ecuador y otra expedición a Laponia para ejecutar medidas parecidas cerca del círculo Polar Artico; las medidas resultantes probaron concluyentemente que la Tierra era achatada, como Newton y Huygens lo habían predicho.

En Alemania se comenzaron los trabajos geodésicos en 1802; Gauss midió un arco en 1821; este trabajo es notable por haberse aplicado por primera vez el cálculo por el método de Mínimos Cuadrados para una triangulación.

En 1831 Bessel y Bayer unieron por triangulaciones algunas de las cadenas existentes de Europa central.

En Rusia el primer trabajo geodésico se comenzó en 1817; en 1855 se concluyó la medida de un arco de 25°20' entre el río Danubio y el Mar del Norte.

La Coast and Geodestic Survey de E.E.U.U., comenzó sus trabajos en 1817 y desde entonces ha cubierto el territorio americano con cadenas de triángulos que siguen meridianos, paralelos y arcos oblicuos.

En el mismo año comienzan los trabajos del Servicio Geodésico Interamericano y en 1887 se funda la Asociación Geodésica Internacional, la cual pretende llevar a cabo trabajos de Geodesia para la determinación de los parámetros del elipsoide y se invita a todos los países para que integren dicha asociación.

El primer trabajo geodésico que se hizo en México fue realizado en el Valle de México, en el año de 1877, que tuvo por objeto el estudio hidrológico de la cuenca del Valle de México.

En 1898 se funda la Comisión Geodésica Mexicana con el programa de cooperar con las oficinas geodésicas de los Estados Unidos del Norte y Canadá, en la medida de un arco de meridiano de cerca de 60° de amplitud.

Desde el año de 1916 a la fecha las organizaciones que sucedieron a la Comisión Geodésica Mexicana fueron: La Dirección de Estudios Geográficos y Meteorológicos y la Dirección de Geografía y Meteorología.

Al desaparecer la Comisión Geográfica Exploradora en 1914 su material cartográfico pasó a la Comisión Geodésica Mexicana y al Servicio Geográfico Militar. Este último funcionó con este nombre hasta 1938, fecha en que pasa a denominarse Comisión Geográfica Militar. En 1942 adopta el de Servicio Geográfico del Ejército y en 1950 el de Comisión Cartográfica Militar.

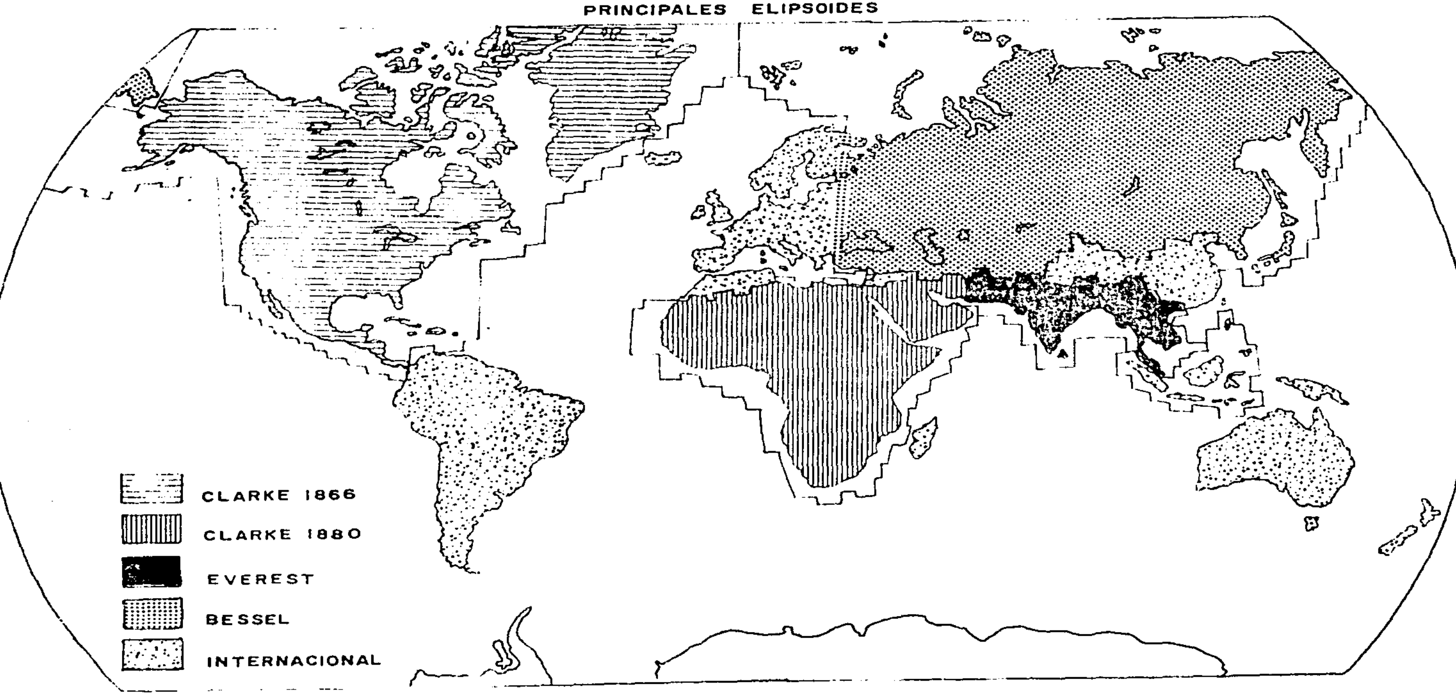
En 1968 se constituye la Comisión de Estudios del Territorio Nacional y Planeación (CETENAP), la que posteriormente cambió su denominación por Comisión de Estudios del Territorio Nacional (CETENAL), la que actualmente está propagando los trabajos geodésicos apoyados en los existentes.

La Geodesia moderna puede llamarse la Era del Geoide, debido a que el elipsoide aproximado de referencia ya no es suficiente, por lo que se ha hecho necesario conocer no sólo los valores precisos de las dimensiones del elipsoide sino también la forma detallada del Geoide; sólo los nuevos métodos pueden vencer esta difícil tarea.

Actualmente se utilizan los siguientes elipsoides de referencia con los parámetros que definen a cada uno. (Ver mapa y cuadro).

NOMBRE ELIPSOIDE	SEMIEJE MAYOR (a)	SEMIEJE MENOR (b)	APLANAMIENTO (f)
Clarke 1866	6 378 206.4000	6 356 583.8000	294.978 698
Clarke 1880	6 378 249.1450	6 356 514.8696	293.465 000
Bessel	6 377 397.1550	6 356 078.9629	299.152 813
Everest	6 377 276.3452	6 356 075.4134	300.801 700
Internacional	6 378 388.0000	6 356 911.9462	297.000 000

CUADRO No. I


PRINCIPALES ELIPSOIDES
CLARKE 1866
CLARKE 1880
EVEREST
BESSEL
INTERNACIONAL

CAPITULO II

DETERMINACION DE LOS ELEMENTOS DEL ELIPSOIDE.

Como se dejó establecido anteriormente la figura matemática que representa la forma de la Tierra con más precisión es un Elipse de Revolución, que se genera al hacer girar una elipse alrededor de su eje menor.

Los elementos de una elipse son: Eje Mayor, Eje Menor y Achatamiento; los cuales están representados en la figura No. 3.

ELEMENTOS DE UNA ELIPSE

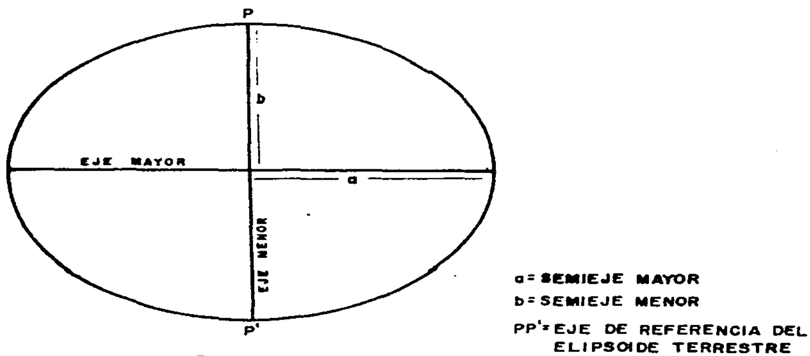


FIGURA No. 3

El tamaño de un elipsoide se designa generalmente por el radio del Ecuador, este radio se llama Semieje mayor; la forma del elipsoide está dada por el achatamiento, además de elegir las dimensiones para el tamaño y forma del elipsoide, la orientación apropiada del mismo con respecto a la Tierra introduce algunos requisitos adicionales. Para orientarlo, su eje de rotación se define siempre como paralelo al eje de rotación de la Tierra; sin embargo, permanece indefinido el centro del elipsoide.

En Geodesia los cálculos de precisión se llevan a cabo utilizando un elipsoide; sin embargo, las mediciones sobre la superficie terrestre no se efectúan sobre un elipsoide matemático sino que están referidas a otra superficie llamada Geoide.

El Geoide es la forma real de una superficie en la que el potencial de la gravedad en cada uno de sus puntos es constante, la superficie es más lisa que la topográfica, pero todavía presenta levantamientos y hundimientos.

Como el elipsoide es una superficie regular y el Geoide es una superficie irregular, las dos superficies no coinciden; las dos superficies se intersectan de modo que sus normales forman un ángulo, que es la desviación de la vertical. Las separaciones entre el Geoide y el elipsoide se llaman Ondulaciones, Separaciones o Alturas del Geoide.

En resumen, se pueden tener tres tipos de superficies, a saber:

1) La superficie topográfica, con las montañas, valles y fondo de los océanos.

2) La superficie matemática, que es la de un elipsoide de revolución escogido para representar el verdadero tamaño y forma de la Tierra y adoptada como la más conveniente para los cálculos matemáticos.

3) El Geoide, al cual están referidas las medidas hechas sobre la superficie de la Tierra.

En relación a lo anterior, se definen tres tipos de latitudes, a saber:

a) Latitud Geodésica, es el ángulo formado por el semieje ecuatorial con la normal al elipsoide.

b) Latitud Geocéntrica, es el ángulo formado por el semieje ecuatorial y la línea que une el centro de la Tierra con el punto sobre la superficie terrestre del que se va a determinar su latitud.

c) Latitud Geodésica - Astronómica, es el ángulo formado por el semieje ecuatorial y la normal al geoide.

En forma genérica a todas las latitudes consideradas anteriormente se les denomina Latitud Geográfica. Estas latitudes están representadas en la figura No. 4.

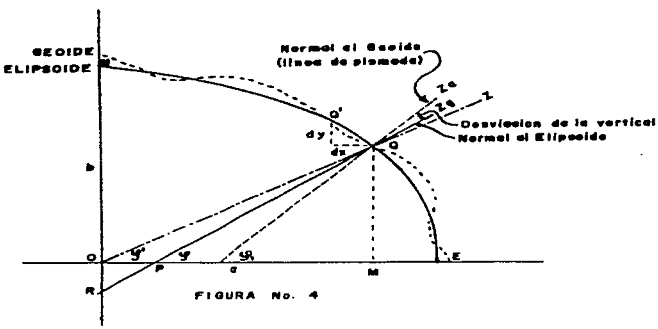


FIGURA No. 4

QR = Normal Mayor

QP = Normal Menor

φ' = Latitud Geocéntrica

φ = Latitud Geodésica

φ_1 = Latitud Geodésica - Astronómica

ON = b = Semidiámetro Polar

OE = a = Semidiámetro Ecuatorial

OQ = Radio Central

En la Figura No. 4 NQE es un cuadrante de meridiano terrestre. Las secciones perpendiculares al eje $\overline{ON}$ son los paralelos y el mayor es el Ecuador de radio $\overline{OE}$, todas las demás secciones que se pueden formar oblicuas o paralelas al eje menor, producen elipses más o menos excéntricas.

Se llama Aplanamiento o Compresión Polar (f) a la diferencia de los semiejes mayor y menor.

$$f = \frac{a - b}{a}$$

Se llama Excentricidad (e) a la distancia que hay del centro de la elipse a uno de los focos, con relación al siemeje mayor.

$$e = \frac{(a^2 - b^2)^{1/2}}{a}$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

ELEMENTOS DEL ELIPSOIDE

Con el fin de poder determinar las posiciones geodésicas a partir de las observaciones realizadas sobre la superficie de la Tierra, se hace necesario el estudio de los elementos constitutivos del elipsoide.

1. NORMALES: MAYOR Y MENOR.

De la ecuación de la excentricidad al cuadrado se tiene:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

$$a^2 e^2 = a^2 - b^2$$

$$a^2 e^2 - a^2 = -b^2$$

$$-a^2 e^2 + a^2 = b^2$$

$$a^2 (1 - e^2) = b^2 \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

Ecuación general de la Elipse:

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

Sustituyendo la ecuación (1)

$$a^2 y^2 + a^2 (1 - e^2) x^2 = a^2 a^2 (1 - e^2)$$

$$y^2 = a^2 (1 - e^2) - x^2 (1 - e^2)$$

$$y^2 = (a^2 - x^2) (1 - e^2) \dots\dots\dots \quad (2)$$

Esta ecuación es la del meridiano terrestre en función de los parámetros semieje mayor (a) y excentricidad al cuadrado (e^2). Si por el punto Q de la figura No. 4 se traza una tangente al elipsoide, las perpendiculares a estos QP y QR, respectivamente, Normal Menor (n) y Normal Mayor (N).

DETERMINACION DE LA NORMAL MAYOR (N).

Diferenciando la ecuación del meridiano, sustituyendo sus proyecciones para el punto Q en función de "N" y dividiendo entre $(1 - e^2)$ se tiene:

$$2y = (1 - e^2)\left(-2x \frac{dx}{dy}\right)$$

$$-\frac{y}{(1 - e^2)x} = \frac{dx}{dy}$$

Si el arco QE crece una cantidad infinitamente pequeña QQ', la ordenada recibe un incremento dy, la abscisa un decremento dx, el ángulo en Q' = Q se tiene:

$$-\frac{y}{(1 - e^2)x} = \frac{dx}{dy} = -\tan\varphi$$

$$\frac{y}{(1 - e^2)x} = \tan\varphi$$

$$y = (1 - e^2)\, x \tan\varphi$$

Como $X = N\cos\varphi$

$$y = (1 - e^2)\, N \cos\varphi \tan\varphi$$

$$y = (1 - e^2)\, N \operatorname{sen}\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$y^2 = (1 - e^2)^2 N^2 \operatorname{sen}^2\varphi$$

$$(a^2 - x^2)(1 - e^2) = (1 - e^2)^2 N^2 \operatorname{sen}^2\varphi$$

$$a^2 - N^2\cos^2\varphi = N^2 \operatorname{sen}^2\varphi - e^2 N^2 \operatorname{sen}^2\varphi$$

$$a^2 = N^2\cos^2\varphi + N^2 \operatorname{sen}^2\varphi - e^2 N^2 \operatorname{sen}^2\varphi$$

$$a^2 = N^2 (\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi - e^2 - \operatorname{sen}^2\varphi)$$

$$a^2 = N^2 (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)$$

$$N^2 = \frac{a^2}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)}$$

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{1/2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Esta ecuación da la normal mayor de un punto si se conoce la latitud del lugar y los parámetros del elipsoide.

<u>Determinación de la Normal Menor (n).</u> De las ecuaciones (3) y (4), así como teniendo en cuenta que $y = n \operatorname{sen} \varphi$ en la figura No. 4 se tiene:

$$n \operatorname{sen} \varphi = (1 - e^2) N \operatorname{sen} \varphi$$

$n = (1 - e^2) N$ (Si se conoce el valor de la normal mayor).

$$n = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{1/2}}$$

En relación con el radio central (R_1) y de la latitud geocéntrica, se pueden calcular la X y la Y.

$$Y = R_1 \operatorname{sen} \varphi'$$

$$X = R_1 \cos \varphi'$$

De la ecuación $y = (1 = e^2) x \tan \varphi$. Sustituyendo las proyecciones en función de la latitud geocéntrica (φ').

$$R_1 \operatorname{sen} \varphi' = (1 - e^2)\, R_1 \cos \varphi' \tan \varphi$$

$$\left.\begin{aligned} \tan \varphi' &= (1 - e^2) \tan \varphi \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \tan \varphi &= \frac{\tan \varphi'}{(1 - e^2)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\rbrace (5)$$

Estas ecuaciones sirven para llevar a cabo la transformación de latitudes geocéntricas o geodésicas y visceversa.

EJEMPLO:

CALCULO DE LAS NORMALES MAYOR Y MENOR Y DE LA LATITUD GEOCENTRICA DE HERMOSILLO, SONORA Y DE TUXTLA GUTIE-- RREZ, CHIAPAS.

El objetivo principal es determinar los valores de la normal mayor y menor por medio de ecuaciones en donde se tienen como datos los parámetros del elipsoide de Clarke de 1866, que son:

Semieje mayor = a = 6 378 206.4000

Semieje menor = b = 6 356 583.8000

Mediante los valores de los semiejes se obtiene el valor de la excentricidad.

Los puntos que se escogieron fueron: Hermosillo, Son. con una latitud de 29°04' 29" y Tuxtla Gutiérrez, Chis. con 16°45' 20", datos que se tomaron del Anuario de 1970.

Teniendo los datos enunciados anteriormente se procede, en primer término, a calcular la excentricidad al cuadrado, para lo cual se utiliza la siguiente ecuación con los parámetros del elipsoide ya mencionado.

$$e^2 = \frac{(6\ 378\ 206.4000)^2 - (6\ 356\ 583.800)^2}{(6\ 378\ 206.4000)^2}$$

2 log 6 378 206.4000	= 6.8046986
log Primer Término	= 13.6093972
2 log 6 356 583.8000	= 6.8032238
Log Segundo Término	= 13.6064476
Primer Término	= 40681523364485.98
Segundo Término	= 40406158878504.67
Numerador	= 275364485981.31
Log Numerador	= 11.4399079
Colog Denominador	= $\overline{14}$.3906028
Log e^2	= $\overline{3}$.8305107
e^2	= 0.006768784375

<u>Hermosillo</u>, <u>Sonora</u>

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{1/2}}$$

Log e^2	= 7.8305026	-10
2 Log sen 29°04'29"	= 9.3731828	
Log Segundo Término	= 7.2036854	-10

Primer Término	=	1.0000000
Segundo Término	=	.0015914
Denominador	=	0.9984016
1/2 Log Denominador	=	9.9993053
	=	9.9996526
Log Numerador	=	6.8046986
Colog Denominador	=	0.0003474
Log N	=	6.8050460
N	=	6 383 310.29

$$n = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{1/2}}$$

Log a $(1 - e^2)$	=	6.8017490
Colog Denominador	=	0.0003474
Log n	=	6.8020964
n	=	6 340 104.34

Latitud Geocéntrica de Hermosillo, Son.

$\operatorname{Tan} \varphi' = (1 - e^2) \tan \varphi$

Log $(1 - e^2)$	=	9.9970504
Log Tan 29° 04' 29"	=	9.7450866
Log Tan φ'	=	9.7421370
φ'	=	28° 54' 35".09

Tuxtla Gutiérrez, Chis.

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{1/2}}$$

Log e^2	=	7.8305026	-10
2 Log sen 16°45'20"	=	$\bar{2}.9196564$	
Log Segundo Término	=	$\bar{4}.7501590$	
Segundo Término	=	.0005625	
Primer Término	=	1.0000000	
Segundo Término	=	0.0005625	
Log Denominador	=	9.9994375	
1/2 Log Denominador	=	9.9997556	
Log Denominador	=	9.9998778	
Log Numerador	=	6.8046986	
Colog Denominador	=	0.0001222	
Log N	=	6.8048208	
N	=	6 380 001.47	

$$n = \frac{a\,(1 - e^2)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{1/2}}$$

Log a $(1 - e^2)$	=	6.8017490
Colog Denominador	=	0.0001222
Log n	=	6.8018712
n	=	6 336 817.39

<u>Latitud Geocéntrica de Tuxtla Gutiérrez, Chis.</u>

$\tan \varphi' = (1 - e^2) \tan \varphi$

$\log (1 - e^2)$	=	9.9970504
$\log \tan 16°45'\ 20''$	=	9.4786698
$\log \tan \varphi'$	=	9.4757202
φ'	=	16° 38' 54".38

2. <u>RADIOS DE CURVATURA</u>.

El radio de curvatura de una curva plana en un punto de coordenadas (X, Y) se determina por medio de la ecuación:

$$r = \frac{\left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2x}{dy^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

El caso general que se presenta en Geodesia es la producción en el elipsoide de una curva formada por la intersección de un plano vertical con dicho elipsoide; la resolución consiste en establecer la ecuación de esa curva en función de los elementos del elipsoide y calcular sus primeras diferenciales para sustituirlas en la ecuación (6).

Los planos verticales que cortan al elipsoide son elipses y una de éstas es la elipse meridiana; si se corta el elipsoide con un plano que forme 90° con el meridiano se forma el primer vertical y su radio de curvatura será la normal mayor (N), para una sección de cualquier azimut que corta al elipsoide por un plano es:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey = F \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Los coeficientes están dados por:

$$A = 1 - e^2 (1 - \cos^2 Az \cos^2 \varphi)$$

$$B = 1 - e^2 \cos^2 \varphi$$

$$C = e^2 \cos Az \operatorname{sen} 2 \varphi$$

$$D = \frac{a\ e^2 (1 - e^2) \cos Az \operatorname{sen} 2 \varphi}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{1/2}}$$

$$E = \frac{2\ a\ e^2 (1 - e^2) \cos^2 \varphi}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{1/2}}$$

$$F = \frac{a^2 (1 - e^2)^2 (1 + e^2 \cos^2 \varphi)}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}$$

RADIOS DE CURVATURA

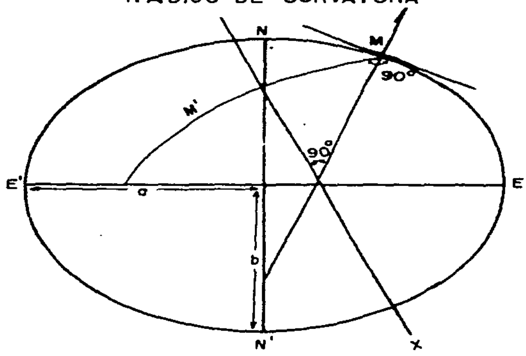


FIGURA No. 5

De la ecuación (7); para la primera diferencial:

$$2Ax\ dx + 2By\ dy + C(xdy + ydx) + D\ (dx) + E(dy) = 0 \quad ..(8)$$

$$2Adx(dx) + 2B(yd^2y + dy^2) + C(xd^2y + dy\ dx) +$$

$$Cdx\ dy + 0 + Ed^2y = 0 \quad .... (9)$$

La ecuación (8) se divide por dx y se tiene:

$$2Ax + 2By \frac{dy}{dx} + Cx \frac{dy}{dx} + Cy + D + E \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2By \frac{dy}{dx} + Cx \frac{dy}{dx} + E \frac{dy}{dx} = -\ (2Ax + Cy + D)$$

$$\frac{dy}{dx} (2By + Cx + E) = -(2Ax + Cy + D)$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{2Ax + Cy + D}{2By + Cx + E} \quad .... (10)$$

De la ecuación (9) se obtiene la segunda derivada y se divide por dx^2:

$$2A(dx)^2 + 2Byd^2y + 2B\ (dy)^2 + 2C\ dx\ dy + Cx\ d^2y +$$

$$E\ d^2y = 0$$

$$2A + 2By \frac{d^2y}{(dx)^2} + 2B \frac{dy^2}{(dx)^2} + 2C \frac{dy}{dx} + Cx \frac{d^2y}{(dx)^2} +$$

$$E \frac{d^2y}{(dx)^2} = 0$$

$$2By \frac{d^2y}{(dx)^2} + Cx \frac{d^2y}{(dx)^2} + E \frac{d^2y}{(dx)^2} = -(2A + 2B \frac{(dy)^2}{(dx)^2} +$$

$$2C \frac{dy}{dx})$$

$$\frac{d^2y}{(dx)^2}(2By + Cx + E) = -\left(2A + 2B\frac{(dy)^2}{(dx)^2} + 2C\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{d^2y}{(dx)^2} = -\frac{2A + 2B\frac{(dy)^2}{(dx)^2} + 2C\frac{dy}{dx}}{2By + Cx + E} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Para obtener el radio de curvatura en un punto cualquiera de la curva, de coordenadas (x, y) se tiene que sustituir los valores de las ecuaciones (10) y (11), en la ecuación (6) para determinar el radio de curvatura correspondiente a la intersección del meridiano con la sección normal de azimut Az, se deben encontrar los valores X, Y que corresponden a dicho punto en la intersección de ambas curvas referidas a un sistema de ejes contenidos en la sección de azimut Az.

En la Figura No. 7 NEN'E' la elipse meridiana y MM' es la sección normal de azimut Az.

$$X = 0$$

$$Y = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \operatorname{sen} \varphi)^{1/2}}$$

Para proyectar el punto M en un sistema de ejes contenido en el plano de la curva MM', se considera como eje de las ordenadas la vertical de M y el eje de las abscisas su perpendicular que pasa por el punto C, con lo cual se obtienen las coordenadas de M que son las escritas anteriormente, siendo la Y la normal menor.

Sustituyendo estas coordenadas y los coeficientes de A, B, C, D y E en las ecuaciones (10) y (11), se tiene:

$$\frac{d^2y}{(dx)^2} = -\frac{2\left[1 - e^2\,(1 - \cos^2 Az\,\cos^2 \varphi)\right]}{\dfrac{2(1 - e^2 \cos \varphi)\; a(1 - e^2)}{(1 - e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi)^{1/2}} + \dfrac{2ae^2\;(1 - e^2)\cos^2 \varphi}{(1 - e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi)^{1/2}}}$$

$$\frac{d^2y}{(dx)^2} = -\frac{\left[1 - e^2\,(1 - \cos^2 Az\,\cos^2 \varphi)\right](1 - e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi)^{1/2}}{(1 - e^2 \cos^2 \varphi)\; a\,(1 - e^2) + ae^2\,(1 - e^2)\,\cos^2 \varphi}$$

$$\frac{d^2y}{(dx)^2} = -\frac{(1 - e^2\mathrm{sen}^2\,\varphi)^{1/2}\left[1 - e^2(1 - \cos^2 Az\,\cos^2 \varphi)\right]}{a(1 - e^2) - a(1 - e^2)\;e^2\cos^2 \varphi + ae^2(1 - e^2)\,\cos^2 \varphi}$$

$$\frac{d^2y}{(dx)^2} = -\frac{(1 - e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi)^{1/2}\left[1 - e^2(1 - \cos^2 Az\,\cos^2 \varphi)\right]}{a(1 - e^2)}$$

$$r = -\frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi)^{1/2}\left[1 - e^2(1 - \cos^2 Az\,\cos^2 \varphi)\right]} \quad ..(12)$$

r = Primer Vertical

De la ecuación (12) se obtiene el radio de curvatura para un punto M, para una sección normal de cualquier azimut, el signo negativo se debe a que cuando aumenta la altitud, la abscisa X decrece. Cuando el azimut vale 90° ó 270° la sección normal se convierte en el primer vertical y r = a la normal mayor.

$$N = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi)^{1/2}\,(1 - e^2)}$$

$$N = \frac{a}{(1 - e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi)^{1/2}} = \text{Primer Vertical.}$$

Cuando el azimut es 0° ó 180° la sección se convierte en el meridiano y designándolo con Rm al radio de curvatura respectivo se tendrá:

$$Rm = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{1/2} \left[1 - e^2(1 - \cos^2 \varphi) \right]}$$

$$Rm = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{1/2} \ (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)}$$

$$Rm = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{3/2}}$$ Para el radio Meridiano.

Para obtener el valor del radio de curvatura de la sección normal de cualquier azimut (ecuación 12) en función de la normal mayor N y del radio medio Rm.

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{1/2} \left[1 - e^2(1 - \cos^2 Az \cos^2 \varphi) \right]}$$

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{1/2}} \quad \therefore \quad a = N(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{1/2}$$

$$r = \frac{N(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{1/2} \ (1 - e^2)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{1/2} \cdot (1 - e^2 + \cos^2 Az \ e^2 \cos^2 \varphi)}$$

$$r = \frac{N(1 - e^2)}{(\operatorname{sen}^2 Az + \cos^2 Az) \left[(1 - e^2) + e^2 \cos^2 Az \cos^2 \varphi \right]}$$

$$r = \frac{N(1- e^2)}{(1 - e^2) \operatorname{sen}^2 Az + (1-e^2) \cos^2 Az + (e^2 \cos^2 Az) (1 - \operatorname{sen}^2 \varphi)}$$

$$r = \frac{N(1 - e^2)}{(1 - e^2)\ sen^2\ Az + (1 - e^2)\ cos^2\ Az + e^2\ cos^2\ Az - e^2\ cos^2\ Az\ \ sen^2\ \varphi\ )}$$

$$r = \frac{N(1 - e^2)}{(1 - e^2)\ sen^2\ Az + cos^2\ Az\ (1 - e^2\ sen^2\ \varphi\ )}$$

$$r = \frac{N}{sen^2\ Az + cos^2\ Az\ \dfrac{(1 - e\ \ sen\ \varphi\ )}{(1 - e^2)}}$$

$$Rm = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2\ sen^2\ \varphi\ )^{3/2}}$$

$$r = \frac{NRm}{Rm(sen^2\ Az) + cos^2\ Az\ \dfrac{1 - e^2\ sen^2\varphi}{(1 - e^2)} \cdot \dfrac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2\ sen^2\varphi)^{3/2}}}$$

$$r = \frac{N\ Rm}{Rm(sen^2\ Az) + cos^2\ Az\ \dfrac{a}{(1 - e^2\ sen^2\ \varphi\ )^{1/2}}}$$

$$r = \frac{N\ Rm}{Rm(sen^2\ Az) + cos^2\ Az\ \dfrac{a}{(1 - e^2\ sen^2\ \varphi\ )^{1/2}}}$$

$$r = \frac{N\ Rm}{Rm(sen^2\ Az) + N(cos^2\ Az)}$$

Esta ecuación permite obtener el valor del radio medio de curvatura de la sección normal de cualquier azimut en función de N y de Rm. (Normal Mayor y Radio de Curvatura del Meridiano, respectivamente).

RADIO MEDIO DE CURVATURA.

El radio medio de curvatura será el promedio de todos los radios de curvatura correspondientes a las secciones normales de 0° a 360°, se representa por las letras: rm.

RADIO MEDIO DE CURVATURA

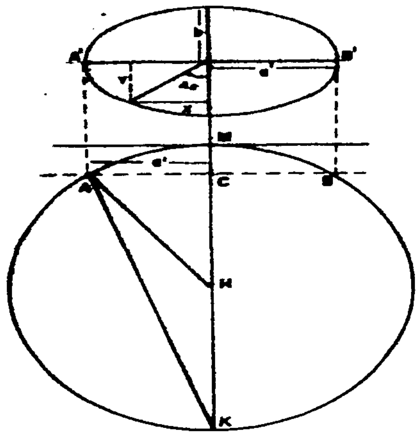


FIGURA No. 6

Si el espacio angular alrededor de cualquier punto M se divide en un gran número de partes pequeñas, cada una de ellas es igual a una diferencial de azimut (dAz) expresada en radiales, el número de esas partes angulares comprendido en un radián estará representado por $\frac{1}{d\ Az}$ y el número total comprendido en una circunferencia se representará por $\frac{2\ \pi}{d\ Az}$.

Como $\overline{MC}$ es infinitesimal:

$$\overline{MC} = \frac{a'^2}{2\ N}$$

Para la sección en el meridiano se tiene:

$$\overline{MC} = \frac{b'^2}{2\ Rm}$$

Para una sección cualquiera, e igualando:

$$\overline{MC} = \frac{s^2}{2\ rm}$$

$$\frac{b'^2}{2\ Rm} = \frac{s^2}{2\ rm} \quad ; \quad \frac{s^2}{b'^2}\ Rm$$

Este valor se sustituye en la integral:

$$rm = \int_0^{2\pi} \frac{rm}{\frac{2\pi}{d\ Az}} = \frac{1}{2\ \pi} \int_0^{2\pi} rm\ d\ Az = \frac{1}{2\ \pi} \int_0^{2\pi} \frac{s^2}{b'^2}\ Rm\ d\ Az$$

$$rm = \frac{Rm}{\pi\ b'^2} - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} s^2\ d\ Az$$

El área de una elipse está dada por la ecuación:

$$1/2 \int_0^{2\pi} s^2\ d\ Az = a'\ b'\ \pi$$

Si se calcula el valor del radio medio de curvatura (rm) para cada una de las secciones de Azimut comprendido entre 0° y 360° la suma de estos valores divididas por el número de valores será el valor medio.

$$\frac{1}{d\ Az} \ ; \ \frac{2\pi}{d\ Az}$$

$$rm = \int_{0}^{2\pi} \frac{rm}{\frac{2\pi}{d\ Az}} = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} rm\ dAz$$

En la figura No. 6 "M" es el punto de contacto entre el elipsoide y una esfera osculadora cuyo radio es MH = HA; un plano tangente en el punto "M" y también un plano paralelo a él que esté colocado a una distancia infinitesimal abajo de él, es el ACB; este segundo plano cortará al elipsoide según una pequeña elipse que se proyecta en A' B'; los puntos A, M y B pertenecen al primer vertical y también al círculo osculador, por lo que el radio de ambas curvas es la normal mayor N y como se trata de una zona muy pequeña se puede considerar que MCA es un triángulo, el cual es semejante al ACK:

$$\frac{\overline{MC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CK}} \qquad \overline{AC}^2 = \overline{MC}\ \overline{CK}$$

$$a^2 = \overline{MC}\ (2N)$$

$$rm = \frac{Rm}{\Pi\ b'^2} \cdot a'\ b'\ \Pi = \frac{Rm}{b'}\ a' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (13)$$

Igualando y sustituyendc:

$$\frac{a'^2}{2\ N} = \frac{b'^2}{2\ Rm} \quad ; \quad \frac{a'^2}{b'^2} = \frac{N}{Rm}$$

$$\frac{a'}{b'} = \sqrt{\frac{N}{Rm}}$$

Este valor se sustituye en la ecuación (13):

$$rm = Rm \sqrt{\frac{N}{Rm}}$$

$$rm = \sqrt{\frac{Rm^2\ \ N}{Rm}}$$

$$rm = \sqrt{Rm\ N}$$

Esta ecuación expresa que el radio medio de curvatura es igual a la medida geométrica de los radios de curvatura principales.

RADIO CENTRAL (Rc).

En el triángulo OQM de la figura No. 4 se tiene:

$$Rc^2 = X^2 + Y^2$$

$$X = N \cos \emptyset \qquad\qquad Y = n \operatorname{sen} \emptyset$$

$$Rc^2 = N^2 \cos^2 \emptyset + n^2 \operatorname{sen2} \emptyset$$

$$Rc^2 = \frac{a^2}{1 - e^2\ \operatorname{sen}^2 \varphi} \cos^2 \varphi +$$

$$\frac{a^2}{1 - e^2\ \operatorname{sen}^2 \varphi} (1-e^2)^2 \operatorname{sen}^2 \varphi$$

$$Rc^2 = \frac{a^2}{1 - e^2 sen^2\ \emptyset} \quad (cos^2\ \emptyset + sen^2\ \emptyset - 2e^2 sen^2\ \emptyset +$$

$$+ e^4\ sen^2\ \emptyset)$$

$$Rc^2 = \frac{a^2}{1 - e^2\ sen^2\ \emptyset} \quad (1 - 2e^2\ sen^2\ \emptyset + e^4\ sen^2\ \emptyset)$$

$$Rc^2 = \frac{a^2}{1 - e^2\ sen^2\ \emptyset} \quad (1 - e^2\ sen^2\ \emptyset - e^2\ sen^2\ \emptyset +$$

$$e^4\ sen^2\ \emptyset)$$

$$Rc^2 = \frac{a^2}{1 - e^2\ sen^2\ \emptyset} \left[1 - e^2\ sen^2\ \emptyset - e^2\ sen^2\ \emptyset\ (1 - e^4)\right]$$

$$Rc^2 = a^2\ (1 - \frac{e^2\ sen^2\ \emptyset\ (1 - e^2)}{1 - e^2\ sen^2\ \emptyset}$$

$$Rc = a \left[1 - \frac{e^2\ sen^2 \emptyset\ (1 - e^2)}{1 - e^2\ sen^2\ \emptyset}\right]^{1/2}$$

Con esta ecuación se determina el radio central (Rc) en función de la latitud geodésica.

3) <u>LINEA GEODESICA:</u>

Si sobre la superficie de la elipse de revolución consideramos dos puntos M y M_1, se tiene:

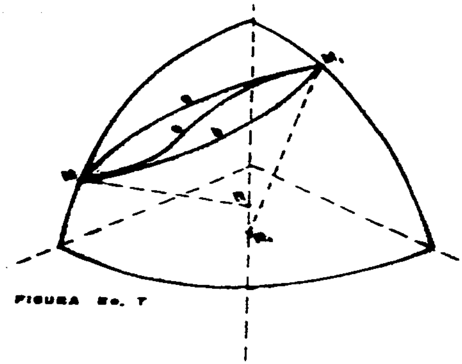


FIGURA No. 7

Las secciones normales de sus diversos puntos no se encuentran en un mismo plano y se forman sobre dicha superficie dos curvas M_aM_1 y M_bM_1. Las normales MR y M_1R_1 no se cortan por estar en distinto plano; para que se corten se necesita que M y M_1 estén en un mismo meridiano o paralelo.

Por definición la Línea Geodésica es la distancia más corta que une dos puntos sobre la superficie del elipsoide M_cM_1. La línea Geodésica en un plano es una recta; en la esfera, un arco de círculo máximo; en el elipsoide, una línea de doble curvatura. En la práctica las líneas geodésicas son pequeñas en relación con el radio del elipsoide, por lo que no se comete error apreciable en suponer que son curvas planas y así es como se tratan, en esta forma las tres curvas M_aM_1, M_bM_1 y M_cM_1, se confunden y las normales se cortan.

<u>Arco de Meridiano</u> (dm).- De la expresión del arco elemental QQ' de una curva, en la figura No. 4, las proyecciones del elemento diferencial y sustituyendo se obtiene

$$dm = (dx^2 + dy^2)^{1/2}$$

$$x = N \cos \varphi = \frac{a}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{1/2}} \cos \varphi$$

$$y = n \cos \varphi = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{1/2}} \operatorname{sen} \varphi$$

$$\frac{dx}{d\emptyset} = \frac{a(1-e^2\operatorname{sen}^2\emptyset)^{1/2}(-\operatorname{sen}\emptyset) - a\cos\varphi\, 1/2(1-e^2\operatorname{sen}^2\emptyset)^{-1/2}(-2e^2\operatorname{sen}\emptyset\ \cos\emptyset)d\emptyset}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \emptyset}$$

$$\frac{dx}{d\emptyset} = \frac{-(1-e^2\operatorname{sen}^2\emptyset)^{1/2}(a \operatorname{sen} \emptyset)\ d\emptyset}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \emptyset} + \frac{a\ e^2\cos^2\emptyset \operatorname{sen} \emptyset\ d\emptyset}{(1 - e^2\operatorname{sen}^2\emptyset)^{3/2}}$$

$$\frac{dx}{d\emptyset} = \frac{-\ a \operatorname{sen}\emptyset(1 - e^2\operatorname{sen}^2\emptyset)\ d\emptyset + ae^2 \cos^2\operatorname{sen}\emptyset\ d\emptyset}{(1 - e^2\operatorname{sen}^2\emptyset)^{3/2}}$$

$$\frac{dx}{d\emptyset} = \frac{-a \operatorname{sen}\emptyset + ae^2\operatorname{sen}^3\emptyset + ae^2\operatorname{sen}\emptyset \cos^2\emptyset}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2\emptyset)^{3/2}}\ d\emptyset$$

$$\frac{dx}{d\emptyset} = \frac{-a \operatorname{sen}\emptyset + ae^2 \operatorname{sen}^3\varphi + (ae^2 \operatorname{sen}\emptyset)\ (1 - \operatorname{sen}^2\emptyset)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}\ \emptyset)^{3/2}}\ d\emptyset$$

$$\frac{dx}{d\emptyset} = \frac{-a \operatorname{sen}\emptyset + ae^2\operatorname{sen}^3\emptyset + ae^2\operatorname{sen}\emptyset - ae^2 \operatorname{sen}^3\emptyset}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \emptyset)^{3/2}}\ d\emptyset$$

$$\frac{dx}{d\emptyset} = \frac{-\ a \operatorname{sen} \emptyset(1 = e^2)\ d\emptyset}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2\emptyset)^{3/2}}$$

$$y = \frac{a(1 - e^2)\operatorname{sen} \emptyset}{(1 - e^2\operatorname{sen}^2\emptyset)^{1/2}}$$

$$\frac{dy}{d\phi} = \frac{(1-e^2\mathrm{sen}^2\phi)^{1/2}a(1-e^2)\cos\phi}{(1-e^2\mathrm{sen}^2\phi)} -$$

$$\frac{a(1-e^2)\mathrm{sen}\phi\ 1/2(1-e^2\mathrm{sen}^2\phi)^{-1/2}(-2e^2\mathrm{sen}\phi\cos\phi)\ d\phi}{(1-e^2\mathrm{sen}^2\phi)}$$

$$\frac{dy}{d\phi} = \frac{a(1-e^2)\cos\phi\ d\phi}{(1-e^2\mathrm{sen}^2\phi)^{1/2}} + \frac{ae^2(1-e^2)\mathrm{sen}^2\phi\cos\phi\ d\phi}{(1-e^2\mathrm{sen}^2\phi)^{3/2}}$$

$$\frac{dy}{d\phi} = \frac{a(1-e^2)\cos\phi}{(1-e^2\mathrm{sen}^2\phi)^{3/2}}\ (1-e^2\ \mathrm{sen}^2\phi + e^2\ \mathrm{sen}^2\phi)\ d\phi$$

$$\frac{dy}{d\phi} = \frac{a(1-e^2)\cos\phi}{(1-e^2\ \mathrm{sen}^2\phi)^{3/2}}\ d\phi$$

$$dm2 = \frac{a^2\mathrm{sen}^2\phi(1-e^2)2d\phi 2}{(1-e^2\ \mathrm{sen}^2\phi)^3} + \frac{a^2(1-e^2)^2\cos^2\phi\ d\phi^2}{(1-e^2\mathrm{sen}^2\phi)^3}$$

$$dm^2 = \frac{a^2(1-e^2)^2(\mathrm{sen}^2\phi+\cos^2\phi)\ d\phi^2}{(1-e^2\ \mathrm{sen}^2\phi)^3}$$

$$dm2 = \frac{a^2(1-e^2)2}{(1-e^2\mathrm{sen}^2\phi)^3}\ d\phi 2$$

$$dm = \frac{a(1-e2)}{(1-e^2\mathrm{sen}^2\phi)^{3/2}}\ d\phi$$

$$dm = Rm\ d\phi$$

Esta ecuación indica que la extensión de un arco pequeño de meridiano es igual al radio de curvatura del meridiano (Rm), por la diferencia de latitudes y para mayor precisión, deberá tomarse en cuenta el radio que corresponde a la latitud del punto medio del arco. En dicha ecuación d$\emptyset$ indica un arco expresado en partes de radio, para obtener el valor del arco en segundos, deberá multiplicarse por el seno de un segundo.

$$dm = Rm\ d\emptyset \text{ sen } 1'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

EJEMPLO (a):

Calcular el tamaño del arco meridiano de un grado, de un minuto y de un segundo a la latitud de 19°16' 12."3.

Para el meridiano:

$dm = Rm\ d\emptyset \text{ sen } 1''$

$$Rm = \frac{a(1 - e^2)}{(1-e^2 sen^2\emptyset)^{3/2}} \quad d\emptyset \text{ sen } 1''$$

log $a(1 - e^2)$	=	6.8017489	log e^2	=	7.8305026
$3/2$colog$(1-e^2sen^2\emptyset)$	=	<u>9.9995116</u>	2log sen$\emptyset$	=	<u>9.0442780</u>
log Rm	=	6.8012605			$\bar{4}$.8747806
			Antilog	=	.00074951551

$3/2$colog. 00074951551 = 0.99925048448

$3/2$log 0.9992505 = <u>9.9996744</u>

= 9.9998372

= 9.9995116

log Rm	= 6.8012606		
log d$\emptyset$ = log 3600	= 3.5563025		
log sen 1"	= <u>4.6855745</u>	−10	
log dm	= 5.0431380		

$$dm° = 110\ 442.9516539 \text{ m.}$$

$$dm' = 1\ 840.716 \text{ m.}$$

$$dm'' = 30.678 \text{ m.}$$

<u>Arco de paralelo</u> (dp). De acuerdo con el elipsoide, cualquier punto de la elipse generatriz describe un círculo que se denomina paralelo del Ecuador. De las proyecciones de la figura No. 4, la proyección en la abscisa $X = N \cos\emptyset$ que es el radio del paralelo en función de la latitud. Obtenida toda la circunferencia se dividirá entre 360° para conocer el valor de un grado del paralelo en cuestión.

Designando por g el número de grados y conociendo que el valor de $\frac{\pi}{180°}$ de radio cuyo logaritmo es: 8.2418774

$$dp = \frac{2\pi N \cos\emptyset}{360°} = \frac{\pi}{180°} N \cos\emptyset \text{ .... (Para un grado)}$$

$$dp = 0.017\ 453\ 293\ g\ N \cos\varphi \text{ .... (15)}$$

Como ejemplo, se determina el valor de un grado, de un minuto y de un segundo para el paralelo de la latitud de 19°26' 12"3

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \text{sen}^2\emptyset)^{1/2}}$$

$\log e^2$	=	7.8305026 -10
$2\log \text{sen}\emptyset$	=	<u>9.0442780</u>
log 2o. término	=	$\overline{4}.8747806$

2o. Término	=	$-.00074952$	
1er. Término	=	$\underline{1.00000000}$	
$(1-e^2 sen^2 \emptyset)$	=	0.9992505	
$1/2 \log(1-e^2 sen^2 \emptyset)$	=	9.9998372	
Colog Denominador	=	0.0001628	
log Numerador	=	$\underline{6.8046986}$	
log N	=	6.8048614	
$\log \frac{\Pi}{180°}$	=	8.2418774	-10
log cos $\emptyset$	=	$\underline{9.9745194}$	
log dp	=	5.0212582	
dp 1°	=	105 016.65859 m.	
dp 1'	=	1 750.27764 m.	
dp 1"	=	29.17129 m.	

<u>Arco de meridiano de gran extensión</u>. Como el meridiano terrestre es elíptico, los arcos de igual amplitud tienen extensiones variables a distintas latitudes, de manera que para obtener la amplitud de un arco de meridiano de gran extensión, es necesario integrar la ecuación (14) entre los límites $\emptyset_1$ y $\emptyset_2$.

$$Dm = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} Rm \, d\emptyset = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{a(1 - e^2)}{(1-e^2 sen^2 \emptyset)^{3/2}} \, d\emptyset = a(1-e^2) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (1-e^2 sen^2 \emptyset)^{-3/2} d\emptyset$$

Del binomio de Newton:

$$(a \pm b)^n = a^n \pm \frac{na^{n-1}}{1!} b \pm \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 \pm$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \quad a^{n-3}b^3 \pm \quad ....$$

$$(1 - e^2 sen^2 \emptyset)^{-3/2} = 1 + \frac{3}{2}\, e^2 sen^2 \emptyset + \frac{15}{8}\, e^4 sen^4\, \emptyset + \frac{35}{16}\, e^6 sen^6\, \emptyset$$

Por Trigonometría Plana se tiene:

$$sen^2\, \emptyset = \frac{1}{2}\, (1 - \cos\, 2\, \emptyset)$$

$$sen^4\, \emptyset = \frac{1}{8}\, (3 - 4\cos\, 2\emptyset + \cos\, 4\emptyset)$$

$$sen^6\, \emptyset = \frac{1}{32}\, (10 - 15\cos\, 2\emptyset + 6\cos\, 4\emptyset - \cos\, 6\emptyset)$$

$$1 + \frac{3}{4}\, e^2(1-\cos^2\emptyset) + \frac{15}{64}\, e^4(3-4\cos\, 2\emptyset + \cos\, 4\emptyset) + \frac{35}{512}\, e^6$$

$$(10-15\, \cos\, 2\emptyset + 6\, \cos\, 4\emptyset - \cos\, 6\emptyset)$$

$$1 + \frac{3}{4}\, e^2 + \frac{45}{64}\, e^4 + \frac{175}{256}\, e^6 + \cos\, 2\emptyset(-\, \frac{3}{4}\, e^2 - \frac{15}{16}\, e^4 - \frac{525}{512}\, e^6) +$$

$$\cos\, 4\emptyset(\, + \frac{15}{64}\, e^4 + \frac{105}{256}\, e^6) + \cos\, 6\emptyset(-\, \frac{35}{512}\, e^6)$$

Formando los coeficientes, resolviéndolos con los parámetros dados por el elipsoide de Clarke de 1866, sustituyéndolos y resolviendo la integral, se tiene:

$$A = 1 + \frac{3}{4}\, e^2 + \frac{45}{64}\, e^4 + \frac{175}{206}\, e^6; \quad \text{logaritmo } A = 0.0022131$$

$$B = \frac{3}{4}\, e^2 + \frac{15}{16}\, e^4 + \frac{525}{512}\, e6 \quad ; \quad \text{logaritmo } B = 7.7092498 -10$$

$$C = \frac{15}{64}\, e^4 + \frac{105}{296}\, e^6 \quad ; \quad \text{logaritmo } C = 5.0360297$$

$$D = \frac{35}{512} e^6 \qquad ; \text{ logaritmo } D = 2.3222193$$

$$Dm = a(1-e^2)\ (A - B\cos 2\phi + C \cos 4\phi - D \cos 6\phi)\ d\phi$$

$$Dm = a(1-e^2)\ A(\phi_1 - \phi_2) - \frac{1}{2}\ B(\text{sen}2\phi_2 - \text{sen}2\phi_1)$$

$$+ \frac{1}{4}\ C(\text{sen}4\phi_2 - \text{sen}4\phi_1) - \frac{1}{6}\ D(\text{sen } 6\phi_2 - \text{sen}6\phi_1)$$

Esta ecuación permite determinar la distancia que existe sobre un meridiano dadas sus latitudes; si se desea obtener la distancia del Ecuador a un punto cualquiera se tendrá que hacer $\phi_1 = 0$. El término $A(\phi_2 - \phi_1)$ está dado en partes de radio trigonométrico.

Si $\phi_1 = 90°$ la ecuación, suministrará el cuadrante meridiano (Q) y que desarrollando la ecuación como anteriormente se ha realizado:

$$Q = a(1 - e^2) \left[A(\frac{\Pi}{2}) \right]$$

Ejemplo (b): Determinar la longitud de un grado de meridiano entre las latitudes 20° y 21°:

$\log a(1 - e^2)$	=	6.8017489
$\log A$	=	0.0022131
$\log(\phi_2 - \phi_1) = \log .017452$	=	8.2418751
log 1er. Término	=	5.0458371
1er. Término	=	111 131.56

log B	= 7.7092869
log $a(1-e^2)$	= 6.8017489
log 0.5	= 9.6989700
log sen 2 $\emptyset_2$	= 9.8255109
log 2o. Término	= 4.0355167
2o. Término	= – 10 852.18
log $a(1 - e^2)$	= 6.8017489
log 0.5	= 9.6989700
log B	= 7.7092869
log sen 2 $\emptyset_1$	= 9.9080674
log 3er. Término	= 4.0180732
3er. Término	= +10 424.94
log $a(1 - e^2)$	= 6.8017489
log 0.25	= 9.3979400
log C	= 5.0334238
log sen 4 $\emptyset_2$	= 9.9976143
log 4o. Término	= 1.2307270
4o. Término	= + 17.01
log $a(1 - e^2)$	= 6.8017489
log 0.25	= 9.3979400
log C	= 5.0334238
log sen 4 $\emptyset_1$	= 9.9933515
log 5o. Término	= 1.226442

5o. Término	=	$-$ 16.84

1er. Término	=	$+$ 111 131.56
2o. Término	=	$-$ 10 852.18
3er. Término	=	$+$ 10 424.94
4o. Término	=	$+$ 17.01
5o. Término	=	$-$ 16.84
Dm	=	110 409.49 m.

De acuerdo con el cálculo desarrollado el arco de meridiano que está comprendido entre los paralelos de 20° a 21° mide 110 409.49 metros.

Ejemplo (c): Determinar el valor de un cuadrante de meridiano.

$$Q = a(1 - e^2)\, A\, \frac{\pi}{2}$$

$\log a(1 - e^2)$	=	6.8017490
$\log A$	=	0.0022131
$\log \pi$	=	0.4971499
colog 2	=	9.6989700
$\log Q$	=	7.0000820
Q	=	10 001 887.333 m.
Q	=	10 001.88733 Km.

Este cálculo demuestra que el valor de un cuadrante terreste geodésicamente mide 10 001.887333 kilómetros.

4) TRANSFORMACION DE LINEAS GEODESICAS A SEGUNDOS Y VISCEVERSA.

En la figura No. 8 AB = s, línea geodésica que por tener un valor relativo pequeño se confunde sensiblemente con el arco trazado con el radio AC = r de su círculo osculador. Por otra parte, si con un radio aC tomado por unidad se describe el arco ab = θ , este arco medirá la amplitud de la distancia s:

LINEA GEODESICA

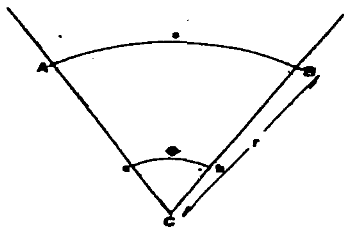


FIGURA 8

$$\frac{1}{\theta} = \frac{r}{s} \quad ; \quad \theta = \frac{s}{r}$$

Como θ se expresa en partes de la unidad, para que esté en segundos, se tendrá que hacerlo factor del seno de un segundo y poniendo el valor de r se tiene:

$$\theta = \frac{s}{\text{sen } 1''} \quad \frac{(1-e^2 \text{sen}^2 \phi)^{1/2} \left[1-e^2(1-\cos^2 Az \cos^2 \phi)\right]}{a(1-e^2)}$$

$$\theta = \frac{s}{\text{sen } 1''} \cdot \frac{Rm \text{ sen}^2 Az + N \cos^2 Az}{N\ Rm} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

<u>Transformación de segundos a metros:</u>

De la relación anterior:

$$\frac{1}{\theta} = \frac{r}{s} \; ; \; s = r\,\theta \text{ sen } 1''$$

$$s = \theta \text{ sen } 1'' \frac{a(1 - e^2)}{(1-e^2 \text{ sen}^2 \varnothing)^{1/2} \left[1 - e^2(1-\cos^2 Az \cos^2 \varnothing) \right]}$$

$$s = \theta \text{ sen } 1'' \frac{N\ Rm}{Rm \text{ sen}^2 \varnothing + N \cos^2 Az}$$

La ecuación (16) permite obtener la determinación en valor angular y la distancia de una línea geodésica dada en unidades lineales, generalmente en metros.

El cálculo inverso, que es comprobación del anterior, tamtambién se utiliza para calcular la distancia de una línea geodésica en unidades lineales, estando en angulares, para lo cual se emplea la ecuación (17)

CAPITULO III

TRIANGULACIONES GEODESICAS

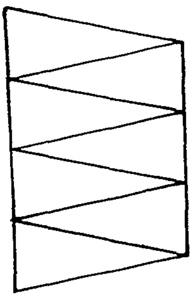
Las triangulaciones geodésicas consisten en el cubrimiento de una zona que se va a levantar por medio de una serie de puntos o vértices geodésicos que están ligados entre sí por medio de visuales directas y forman figuras geométricas cuya resolución proporciona las posiciones de ellas (triángulos). Para ello se tendrá que conocer o determinar la longitud de uno de sus lados (llamada línea base) que servirá para la determinación y propagación de los restantes, pues en cada uno de los vértices de la triangulación se miden los ángulos que forman las direcciones hacia los demás vértices de cada figura.

Las tringulaciones geodésicas tienen por objeto determinar la medida de arcos de meridiano o de paralelo, la medida de grandes líneas, el cubrimiento de áreas para fincar la estructura del control terrestre para diversos usos, entre ellos el cartográfico, fijación de límites fronterizos, determinación de las medidas lineales y angulares de los desplazamientos que experimenta la corteza terrestre.

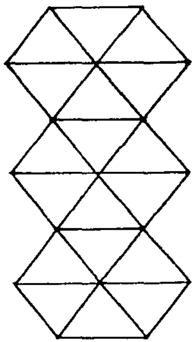
La figura elemental de que está constituída una triangulación geodésica es el triángulo.

El triángulo geodésico es una figura elipsoidica limitada por líneas geodésicas, por lo que resultaría muy difícil su resolución sobre el elipsoide teniendo que recurrir a Trigometría de complejísimos cálculos. Todo esto se simplifica aplicando primero el Teorema de Gauss que dice: "Un elemento de superficie superpuesta flexible se amolda sin extensión, sin desgarradura y sin dobleces, sobre una esfera cuyo radio sea la media geométrica de los radios de curvatura principales de centro del elemento de superficie considerada", y luego el Teorema de Legrange, que dice: "Si se tiene un triángulo esférico de lados poco curvos y un triángulo plano, los ángulos de ambos triángulos difieren una cantidad igual a la tercera parte del exceso esférico", lo cual se reduce en último término al cálculo de un triángulo plano.

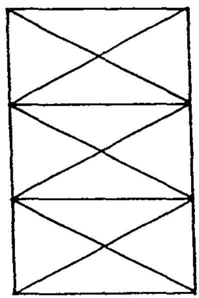
Con los triángulos se forman figuras compuestas que dan origen a la obtención de ecuaciones de condición para ser compensadas por mínimos cuadrados. Entre las figuras compuestas se tienen las siguientes:



9



10



11

FIGURAS GEODESICAS COMPUESTAS

La Figura No. 9 se utiliza en el control fotogramétrico, en la Cartografía para la ubicación de vértices de extensión o bien para determinar la distancia de una línea, aunque no es de gran precisión ofrece rapidez, debido a que se obtienen pocas visuales con respecto a las otras dos figuras, se le denomina Triangulación para Control Suplementario.

La figura No. 10 está diseñada para propagar en todas direcciones y se utiliza para proporcionar puntos de control, sobre una área como la de una ciudad o para llenar las áreas entre arcos de triángulos que formen una red que se extienda en un Condado o Estado, se le denomina Triangulación de Area.

La figura No. 11 es de un ancho limitado, diseñada para propagarse en una sóla dirección general, se efectúa un arco de triángulo con el fin de conectar levantamientos geodésicos muy separados, para coordinar y poner en correlación levantamientos locales a lo largo del arco, para suministrar información en la determinación de un Datum Geodésico y para proveer de una red de puntos de control de un levantamiento de grandes proporciones, se le denomina Arco de Triangulación.

Existen otros métodos, pero son menos usuales como la Triangulación de Tierra a bordo, la cual sirve para extender la triangulación de una costa efectuando observaciones simultáneas desde 3 o más estaciones en tierra, sobre una mira montada en una embarcación; este método se utiliza cuando no resulta práctico establecer una cadena de triángulos o cuadriláteros; Triangulación de Interreflexión, en ella se realizan observaciones simultáneas sobre la iluminación de un paracaídas; este método se ha utilizado para extender la triangulación sobre líneas demasiado largas que no podrían ser observadas mediante métodos corrientes.

En cuanto a la precisión, las triangulaciones geodésicas se dividen en varios órdenes. En 1925 la Board of Surveys and Maps de Estados Unidos adoptó la siguiente clasificación de las triangulaciones por precisión, la cual depende de los instrumentos empleados, de la longitud de los lados de los triángulos, de los métodos de medición, etc.

TRIANGULACIONES

PRIMER ORDEN	SEGUNDO ORDEN	TERCER ORDEN
Promedio en el cierre de los triángulos 1". Tolerancia lineal entre bases 1:25 000.	Promedio en el cierre de los triángulos 3". Tolerancia lineal entre bases 1:10 000.	Promedio en el cierre de los triángulos 5". Tolerancia lineal entre bases 1: 5 000.

Además se tienen tolerancias establecidas para cada una de las triangulaciones geodésicas, las cuales están sintetizadas en la Tabla No. II.

Debe también mencionarse, que con la ayuda de instrumentos electromagnéticos, que se han desarrollado en las últimas décadas, ha sido posible establecer tolerancias más estrictas que han sido aplicadas para el establecimiento de vértices en áreas urbanas, ya que el costo por unidad de terreno es mayor que en el medio rural. Así el primer orden ha sido subdividido en tres clases A, B y C.

Para estas clases se han fijado las tolerancias lineales entre bases 1:100 000, 1:50 000 y 1: 25 000 respectivamente. Como se observa, la clase "C" corresponde al primer orden tradicional.

A continuación se describen cada una de las etapas a seguir para llevar a cabo una triangulación geodésica:

1) RECONOCIMIENTO:

El reconocimiento es una de las etapas más importantes de las triangulaciones geodésicas, y en general de la Geodesia, pués controla la ubicación, la distribución de estaciones, la fuerza de figuras, la conformación de la red de triángulos, la determinación de rutas y ligas en la nivelación para los levantamientos astronómicos, analiza la ubicación de estaciones, accesibilidad, abrigo, estado normal de su cielo. Estas operaciones exigen gran habilidad de los principios y propósitos de los trabajos geodésicos.

Para efectuar el Reconocimiento de una Triangulación Geodésica deben cumplirse con los siguientes requisitos:

A) Requisitos Generales:

1) Buena visibilidad y asegurar la intervisibilidad entre vértices y de preferencia que se tenga un horizonte de 360°.

2) Formar figuras resistentes y que puedan ser ligadas a otros levantamientos.

3) Obtener lados de distancias uniformes.

4) La ubicación del vértice debe hacerse en un lugar seguro.

5) Hacer una descripción para cada vértice.

B) Instrumentos:

1) Un teodolito de minuto.

2) Un barómetro aneroide y un termómetro.

3) Una brújula.

4) Anteojos binoculares.

5) Heliógrafo o pares de espejos planos de 8 x 10 cm.

6) Radios transmisores-receptores.

C) Herramienta:

1) Martillo, cinceles y clavos.

2) Pinzas, serrote y alambre del No. 20.

3) Pintura, pinceles y cemento.

4) Banderolas.

5) Lámparas y baterías.

D) Utiles:

1) Cartera de campo.

2) Mapas y fotografías aéreas, si existen de esa zona.

3) Escuadras, transportador y lápices.

4) Botiquín.

E) Personal:

1) Un Jefe de Brigada.

2) Un ayudante de Jefe de Brigada.

3) Número variable de ayudantes o trabajadores.

Anteproyecto.

Antes de salir al terreno a realizar el reconocimiento, en gabinete se reunirán los mejores mapas de la región, fotografías áreas y catálogos de posiciones geográficas; con esta información se proyectará la red de acuerdo con las necesidades teniendo en cuenta que con la visión estereoscópica se analizará la intervisibilidad y con las cartas la conformación de la figura que será modificada o confirmada con los resultados obtenidos en el campo.

Operación de Campo, para el Reconocimiento.

A partir del anteproyecto, en el terreno se instala el teodolito en uno de los puntos a ser candidato para vértice, observando una reiteración o repetición y sus distancias cenitales en posición directa e inversa, rumbo magnético tanto a los puntos proyectados como a los notables o elevados; si no se dispone del teodolito es necesario tomar los rumbos magnéticos con brújula y las lecturas con aneroide. Transladándose después a cada uno de los puntos ya preseleccionados y se hacen las mismas operaciones. La distancia de un lado por procedimientos rudimentarios se mide para poder estimar la longitud que deben tener los lados de la triangulación para que sirvan mejor como base a las operaciones subsecuentes.

Se debe tener presente que el posible vértice esté sobre terreno firme y que pueda instalarse el teodolito, bien puede ser sobre el tripié o en un poste de concreto. Todo vértice físicamente está representado por un monumento superficial o subterráneo y debe referirse a marcas de referencia establecidas para su localización a través del tiempo; es necesario ver y asegurar que se esté observando la señal para tener confirmada la intervisibilidad, terminadas las operaciones de campo pertenecientes al reconocimiento, a escala se representará la triangulación para obtener un buen croquis en el que se puedan trazar los elementos constitutivos y de esta forma se obtenga un documento gráfico que norme el planteamiento de las operaciones de las etapas siguientes.

<u>Análisis de los triángulos que conforman la Triangulación:</u>

La figura elemental de las triangulaciones es el triángulo, por lo que debe éste ser analizado en cuanto a su forma para lograr mejores precisiones y estar dentro de las tolerancias permisibles.

Para considerar la forma que debe tener el triángulo geodésivo puede tratarse como esférico, en el que sus lados son "a", "b" y "c"; y sus ángulos "A", "B" y "C" (Figura No. 12).

Como los ángulos son los que se observan, y a partir de un lado conocido o determinado se calculan los otros lados, es necesario conocer las dimensiones de los ángulos que conforma al triángulo. Para ello la Ley de los Senos se diferencía suponiendo a todos sus elementos como variables, sustituyendo el valor del "seno a" y como los errores son independientes de los valores de los ángulos supondremos dA = dB, (diferencial de A igual a diferencial de B) sustituyendo el valor del "seno b", puesto que los lados son de poca amplitud angular la relación de sus consenos son sensiblemente igual a la unidad por lo que se omite; se obtendrá el error del "lado a" y similarmente el "lado-c" a partir de la base "lado b".

LEY DE LOS SENOS

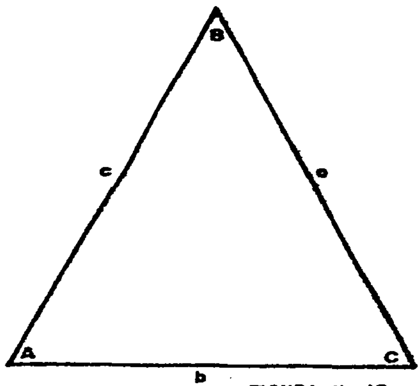


FIGURA № 12

$$\frac{\text{sen } b}{\text{sen } B} = \frac{\text{sen } a}{\text{sen } A} \; ; \quad \text{sen } a = \text{sen } b \, \frac{\text{sen } A}{\text{sen } B}$$

$$\cos a \, da = \text{sen } b \, \frac{\text{sen } B \cos A \, dA - \text{sen } A \cos B \, dB}{\text{sen}^2 B} + \frac{\text{sen } A}{\text{sen } B} \cos b \, db$$

$$da = \frac{\text{sen } b \text{ sen } B \cos A \, dA - \text{sen } b \text{ sen } A \cos B \, dB}{\cos a \text{ sen}^2 B} + \frac{\text{sen } A \cos b \, db}{\text{sen } B \cos a}$$

$$da = \frac{\text{sen } b \text{ sen } B \cos A \, dA - \text{sen } a \text{ sen } B \cos B \, dB}{\cos a \text{ sen}^2 B} + \frac{\text{sen } A \cos b \, db}{\text{sen } B \cos a}$$

$$da = \frac{\frac{\text{sen } a}{\text{sen } A} \text{ sen } B \cos A \, dA - \text{sen } a \cos B \, dB}{\cos a \text{ sen } B} + \frac{\text{sen } A \cos b \, db}{\text{sen } B \cos a}$$

$$da = \frac{\text{sen } A}{\text{sen } B} \, db + \tan a(\cot A - \cot B) \, dB$$

$$dc = \frac{\text{sen } C}{\text{sen } B} \, db + \tan c(\cot C - \cot B) \, dB$$

En estas ecuaciones se observa qué el error de los lados "a" y "c" proviene de los dos términos e indican lo siguiente:

Primer término: $\frac{\text{sen } A}{\text{sen } B} \, db$

El pequeño error que se pueda tener en la base "b", para nulificarlo tendría que ser db = 0 y crecerá o disminuirá según el ángulo opuesto B, a la base sea menor o mayor que el adyacente A. El error que proviene de db para valores cercanos de los ángulos adyacentes a la base (sensiblemente triángulos isósceles) tendrá un mínimo cuando el ángulo B = 90°; pero esta condición hace que los lados disminuyan, para lo cual es necesario partir de una base bastante grande. En los triángulos equiláteros, el error proviene de db, persiste y no aumenta, razón por la cual se debe ir incrementando gradualmente la base; cuando sea menor a la longitud media que se juzgue conveniente dar a los lados de la cadena.

Segundo término: tan a(cot A - cot B) dB

En el segundo término de la ecuación proviene del error angular, cuando los coeficientes de dB sean iguales, es decir, que A = B = C (triángulo equilátero), como es imposible formar en la práctica este tipo de triángulos debe procederse con un criterio general para no salirse de los límites de 30° a 120°. Para llegar a un análisis más detallado y para repartir en una cadena de triángulos convenientemente las bases es necesario tener las siguientes consideraciones:

a) La Teoría de los Errores dice: "El error probable de un lado deducido de una serie de triángulos es:

$$p^2 = \frac{4}{3} e^2 \frac{D - C}{D} \sum (dA^2 + dA\ dB + dB^2)$$

Los elementos que intervienen en esta ecuación están considerados tanto al triángulo como a las otras figuras compuestas que pueden emplearse en las triangulaciones geodésicas: cuadrilátero con dos diagonales y polígonos con punto central.

p = error probable del lado calculado.

e = error probable de la observación de una dirección.

D = número de direcciones observadas.

C = número de ecuaciones de condición.

dA, dB = diferencias logarítmicas en un segundo correspondientes a los ángulos A y B, siendo el primero el ángulo opuesto al lado que se calcula y B el opuesto a la base.

De la ecuación anterior el factor $\frac{4}{3} e^2$ es constante en una triangulación, y depende de la precisión con que se observe, para el primer orden es de 0.4" y el valor de p depende de los factores $\frac{D - C}{D}$ y $\sum(dA^2 + dA\ dB + dB^2)$ cuyo producto mide la eficacia o resistencia de figura (R), para dar una línea calculada con determinada precisión independientemente del error de observación. Con el cálculo de esta resistencia de figura se podrá proporcionar la forma de comparar dos proyectos con el fin de elegir el mejor, de reducir el número de figuras o de localizar una base intermedia.

$$R = \frac{D - C}{D} \sum(dA^2 + dA\ dB + dB^2)$$

Como para cada una de las figuras se pueden calcular dos valores de resistencia, el valor menor será R_1 y corresponderá a la cadena de triángulos mejor formada y el valor mayor R_2 es el resultado de la cadena de triángulos menos conformada.

El primer factor $\frac{D - C}{D}$ será menor para un número dado de direcciones observadas, porque dan lugar a un número mayor de ecuaciones de condición.

Los valores D y C se determinan mediante las siguientes ecuaciones:

$$D = 2L - 2 - K$$

$$D_1 = 2L - K - 1$$

$$C = (L - 2V + 3) + (L' - V' + 1)$$

L = número total de líneas

L' = número de líneas observadas en ambas direcciones

V = número total de vértices

V' = número de vértices ocupados

K = número de líneas que se dejan de observar

La expresión $2L - 2 - K$ se aplica en cualquier caso con excepción de cuando se deja de observar un extremo de la base fija y en cuyo caso se aplica la ecuación dada por D_1; cuando se ocupan todos los vértices de una figura y todas las direcciones son observadas las ecuaciones:

$D = 2L - 2 - K$ y $C = (L - 2V + 3) + (L' - V' + 1)$

toman la siguiente forma:

$D = 2L - 2$

$C = 2L - 3V + 4$

Para llevar a cabo estos cálculos, es necesario tener los ángulos al grado y las diferencias logarítmicas de los senos de un segundo a la sexta cifra decimal.

Para el segundo factor $\sum(dA^2 + dA\ dB + dB^2)$ se puede obtener mediante la tabla correspondiente "Resistencia de Figura" y las limitaciones están consignadas en la tabla No. II "Tolerancias Establecidas para Triangulaciones Geodésicas".

TABLA No. II

TOLERANCIAS ESTABLECIDAS PARA TRIANGULACIONES GEODESICAS

CARACTERISTICAS	1er. ORDEN	2o. ORDEN	3er. ORDEN
Precisión de la línea base medida	1:100 000	1:500 000	1:250 000
Diferencia entre líneas bases	1:25 000	1:10 000	1:5 000
Distancias medias de lados	10 - 40 Km	5 - 20 Km	2 - 8 Km
Límite deseable para $\sum R_1$ entre bases	80	100	125
Límite máximo para $\sum R_1$ entre bases	110	130	175
Límite deseable para R_1 por figura	15	25	25
Límite máximo para R_1 por figura	25	40	50
Límite deseable para R_2 por figura	50	80	120
Límite máximo para R_2 por figura	80	120	170
Cierre medio por triángulo	1 seg.	3 seg.	5 seg.
Cierre máximo por triángulo	3 seg.	5 seg.	10 seg.
Error probable en azimut astronómico	0.5 seg.	2.0 seg.	5.0 seg.
Diferencia de azimut	1 seg. por estación	3 seg. por estación	8 seg. por estación

TRABLA No. III

RESISTENCIA DE FIGURA $\sum(dA^2 + dA\,dB + dB^2)$

	10°	12°	14°	16°	18°	20°	22°	24°	26°	28°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
•																							
10	428	359																					
12	359	295	253																				
14	315	253	214	187																			
16	284	225	167	162	143																		
18	262	204	168	143	126	113																	
20	245	189	153	130	113	100	91																
22	232	177	142	119	103	91	81	74															
24	221	167	134	111	95	83	74	67	61														
26	213	160	126	104	89	77	68	61	56	51													
28	206	153	120	99	83	72	63	57	51	47	43												
30	199	148	115	94	79	68	59	53	48	43	40	33											
35	188	137	106	85	71	60	52	46	41	37	33	27	23										
40	179	129	99	79	65	54	47	41	36	32	29	23	19	16									
45	172	124	93	74	60	50	43	37	32	28	23	20	16	13	11								
50	167	119	89	70	57	47	39	34	29	26	23	18	14	11	9	8							
55	162	115	86	67	54	44	37	32	27	24	21	16	12	10	8	7	5						
60	159	112	83	64	51	42	35	30	25	22	19	14	11	9	7	5	4	4					
65	155	109	80	62	49	40	33	28	24	21	18	13	10	7	6	5	4	3	2				
70	152	106	78	60	48	38	32	27	23	19	17	12	9	7	5	4	3	2	2	1			
75	150	104	76	58	46	37	30	25	21	18	16	11	8	6	4	3	2	2	1	1	1		
80	147	102	74	57	45	36	29	24	20	17	15	10	7	5	4	3	2	1	1	1	0	0	
85	145	100	73	55	43	34	28	23	19	16	14	10	7	5	3	2	2	1	1	0	0	0	0
90	143	98	71	54	42	33	27	22	19	16	13	9	6	4	3	2	1	1	1	0	0	0	0
95	140	96	70	53	41	32	26	22	18	15	13	9	6	4	3	2	1	1	0	0	0	0	
100	138	95	68	51	40	31	25	21	17	14	12	8	6	4	3	2	1	1	0	0	0		
105	136	93	67	50	39	30	25	20	17	14	12	8	5	4	2	2	1	1	0	0			
110	134	91	65	49	38	30	24	19	16	13	11	7	5	3	2	2	1	1	1				
115	132	89	64	48	37	29	23	19	15	13	11	7	5	3	2	2	1	1					
120	129	88	62	46	36	28	22	18	15	12	10	7	5	3	2	2	1						
125	127	86	61	45	35	27	22	18	14	12	10	7	5	4	3	2							
130	125	84	59	44	34	26	21	17	14	12	10	7	5	4	3								
135	122	82	58	43	31	26	21	17	14	12	10	7	5	4									
140	119	80	56	42	32	25	20	17	14	12	10	8	6										
145	116	77	55	41	32	25	21	17	15	13	11	9											
150	112	75	54	40	32	26	21	18	16	15	13												
152	111	75	53	40	32	26	22	19	17	16													
154	110	74	53	41	33	27	23	21	19														
156	108	74	54	42	34	28	25	22															
158	107	74	54	43	35	30	27																
160	107	74	56	45	38	33																	
162	107	76	59	48	42																		
164	109	79	63	54																			
166	113	86	71																				
168	122	98																					
170	143																						

CALCULO PARA EL FACTOR $\frac{D - C}{D}$ DE LAS DISTINTAS FIGURAS QUE RESULTAN EN LAS TRIANGULACIONES GEODESICAS

TRIANGULO SIMPLE

L = 3

V = 3

$$\frac{4 - 1}{4} = 0.75$$

FIGURA 13

CUADRILATERO CON DOS DIAGONALES

L = 6

V = 4

$$\frac{10 - 4}{10} = 0.60$$

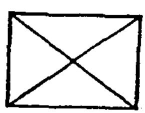


FIGURA 14

CUADRILATERO CON DOS DIAGONALES DEJANDO DE OBSERVAR UN VERTICE DE LA BASE

$L = 6$

$L' = 3$

$V = 4$

$V' = 3$

$K = 3$

$$\frac{8 - 2}{8} = 0.75$$

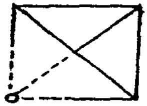


FIGURA 15

CUADRILATERO CON DOS DIAGONALES DEJANDO DE OBSERVAR UN VERTICE

$L = 6$

$L' = 3$

$V = 4$

$V' = 3$

$K = 3$

$$\frac{7 - 2}{7} = 0.71$$

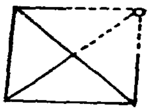


FIGURA 16

TRIANGULO CON PUNTO CENTRAL

L = 6

V = 4

$$\frac{10 - 4}{10} = 0.60$$

FIGURA 17

<u>TRIANGULO CON PUNTO CENTRAL DEJANDO DE OBSERVAR UN VERTICE DE LA BASE</u>

L = 6

L' = 3

V = 4

V' = 3

K = 3

$$\frac{8 - 2}{8} = 0.75$$

FIGURA 18

<u>TRIANGULO CON PUNTO CENTRAL DEJANDO DE OBSERVAR UN VERTICE</u>

L = 3

V = 4

V' = 3

K = 3

$$\frac{7 - 2}{7} = 0.71$$

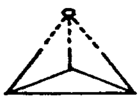


FIGURA 19

CUADRILATERO CON PUNTO CENTRAL

L = 8

V = 5

$$\frac{14 - 5}{14} = 0.64$$

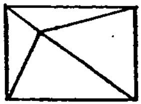


FIGURA 20

CUADRILATERO CON PUNTO CENTRAL DEJANDO DE OBSERVAR UN VERTICE EN LA BASE

L = 8

L' = 5

V = 5

V' = 4

K = 3

$$\frac{12 - 3}{12} = 0.75$$

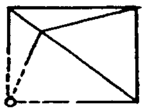


FIGURA 21

CUADRILATERO CON PUNTO CENTRAL DEJANDO DE OBSERVAR UN VERTICE

L = 8

L' = 5

V = 5

V' = 4

K = 3

$$\frac{11 - 3}{11} = 0.73$$

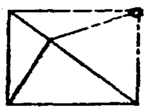


FIGURA 22

CUADRILATERO CON PUNTO CENTRAL DEJANDO DE OBSERVAR EL VERTICE CENTRAL

L = 8

L' = 4

V = 4

V' = 5

K = 4.

$$\frac{10 - 2}{10} = 0.80$$

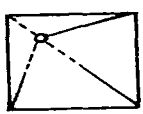


FIGURA 23

CUADRILATERO DE PUNTO CENTRAL CON UNA DIAGONAL

L = 9

V = 5

$$\frac{16 - 7}{16} = 0.56$$

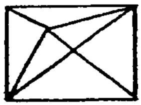


FIGURA 24

CUADRILATERO DE PUNTO CENTRAL CON UNA DIAGONAL DEJANDO DE OBSERVAR EL VERTICE CENTRAL

L = 9

L' = 5

V = 5

V' = 4

K = 4

$$\frac{12 - 4}{12} = 0.67$$

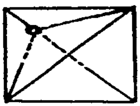


FIGURA 25

PENTAGONO CON PUNTO CENTRAL

L = 10

V = 6

$$\frac{18 - 6}{18} = 0.67$$

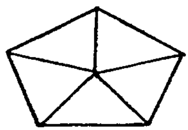


FIGURA 26

PENTAGONO CON PUNTO CENTRAL DEJANDO DE OBSERVAR UN VERTICE EN LA BASE

L = 10

L' = 7

V = 6

V' = 5

K = 3

$$\frac{16 - 4}{16} = 0.75$$

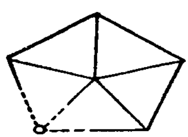


FIGURA 27

PENTAGONO CON PUNTO CENTRAL DEJANDO DE OBSERVAR UN VERTICE

L = 10

L' = 7

V = 6

V' = 5

K = 3

$$\frac{15 - 4}{15} = 0.73$$

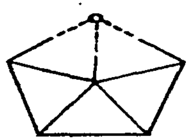


FIGURA 28

PENTAGONO CON PUNTO CENTRAL DEJANDO DE OBSERVAR EL VERTICE CENTRAL

L = 10

L' = 5

V = 6

V' = 5

K = 5

$$\frac{13 - 2}{13} = 0.85$$

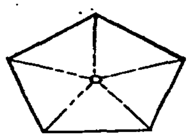


FIGURA 29

EXAGONO CON PUNTO CENTRAL

L = 12

V = 7

$$\frac{22 - 7}{22} = 0.68$$

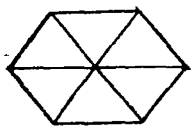


FIGURA 30

EXAGONO CON PUNTO CENTRAL DEJANDO DE OBSERVAR UN VERTICE EN LA BASE

L = 12

L' = 9

V = 7

V' = 6

K = 3

$$\frac{20 - 5}{20} = 0.75$$

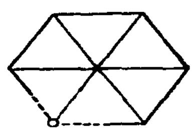


FIGURA 31

EXAGONO CON PUNTO CENTRAL DEJANDO DE OBSERVAR UN VERTICE

L = 12

L' = 9

V = 7

V' = 6

K = 3

$$\frac{19 - 5}{19} = 0.74$$

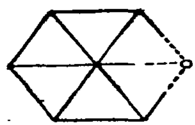


FIGURA 32

EXAGONO CON PUNTO CENTRAL DEJANDO DE OBSERVAR EL VERTICE CENTRAL

L = 12

L' = 6

V = 7

V' = 6

K = 6

$$\frac{16 - 2}{16} = 0.88$$

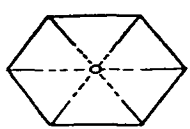


FIGURA 33

En resumen, las figuras mostradas anteriormente son las que con más frecuencia se utilizan en las triangulaciones geodésicas. Para encontrar la resistencia que ofrece el sistema de figuras, es necesario determinar en primer lugar el factor $\frac{D - C}{D}$ y enseguida el factor $\sum(dA^2 + dA\ dB + dB^2)$, que son las diferencias logarítmicas de la base y de la línea al ángulo opuesto que se va a propagar; este factor se aplica indiferentemente para cualquier sistema de figuras, buscando el pase o propagación del lado; sin embargo, el primer factor si tiene variante de acuerdo a cada una de las figuras y si se deja de observar un vértice que no sea la base o si es un extremo de la base.

EJEMPLO:

Determinar la resistencia de cada una de las figuras que integran la triangulación siguiente:

TRIANGULACION

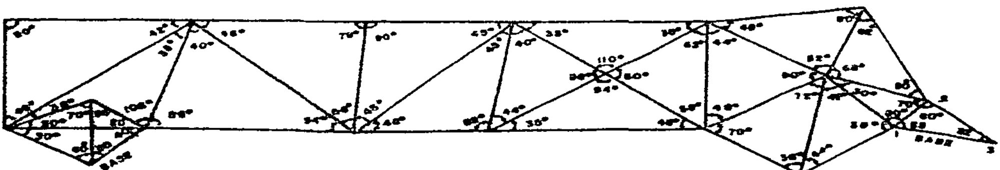


FIGURA No. 34

Cálculo de cada una de las figuras que integran la Triangulación anterior.

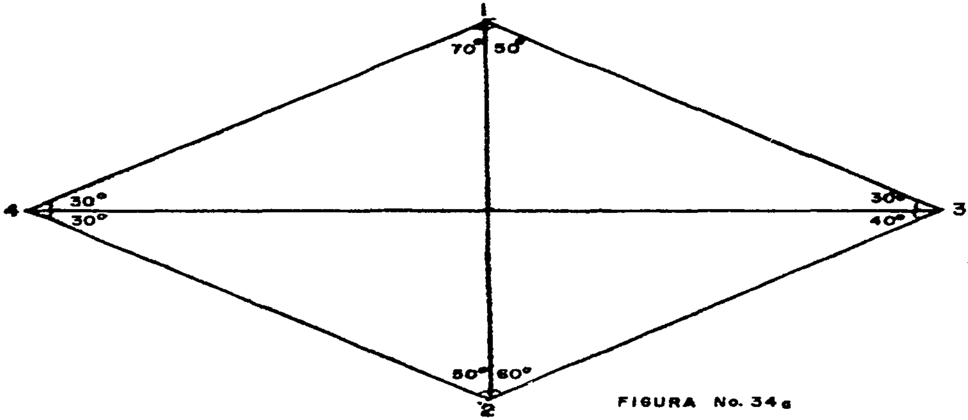


FIGURA No. 34 a

123 - 1.3; 3; 10

123 - 23; 5; 11

214 - 1.4; 7; 10

214 - 42; 3; 11

$$R = \frac{D - C}{D} \leqslant (dA^2 + dA\ dB + dB^2)$$

$D = 2L - 2$.

$C = 2L - 3V + 4$

$R_1 = 123 - 13;\ 7.8$ $(13 \times 0.6 = 7.8)$

$R_2 = 214 - 42;\ 8.4$ $(1.4 \times 0.6 = 8.4)$

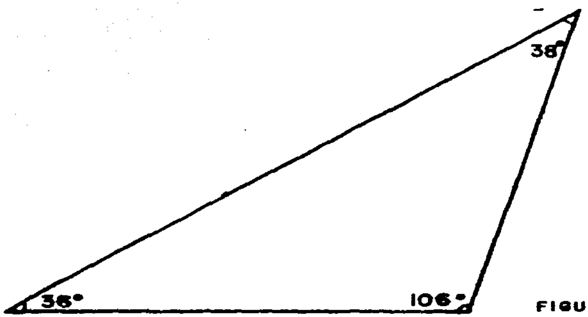


FIGURA No 34b

25.5 x 0.75 = 19.125

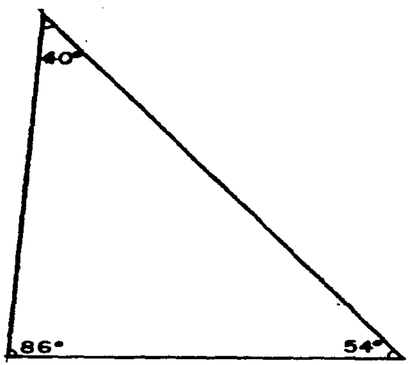


FIGURA No. 34c

2.0 x 0.75 = 1.50

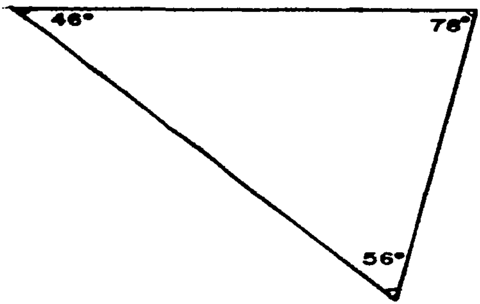


FIGURA No. 34d

6.0 x 0.75 = 4.50

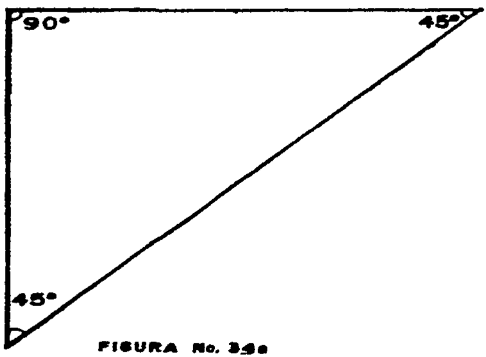


FIGURA No. 34e

4.0 x 0.75 = 3.00

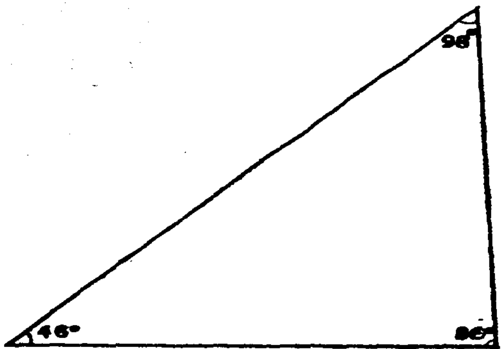


FIGURA No. 34f

5.0 x 0.75 = 3.75

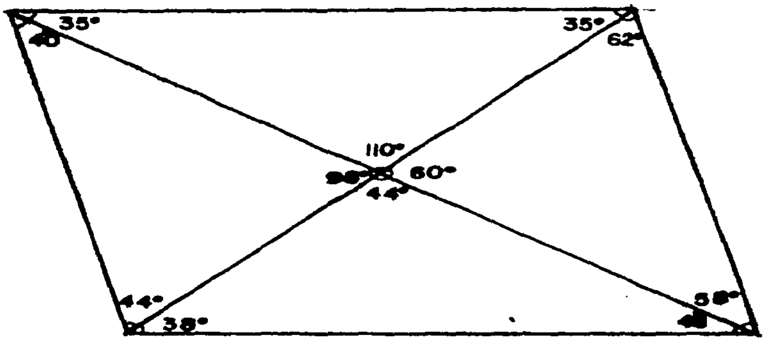


FIGURA No. 34g

120; 01; 6

103; 03; 18

304; 43; 4

120; 20; 4

024; 04; 27

043; 43; 5

$R_1 = 6 + 18 + 4 = 28 \times 0.64 = 17.92$

$R_2 = 4 + 27 + 5 = 36 \times 0.64 = 23.04$

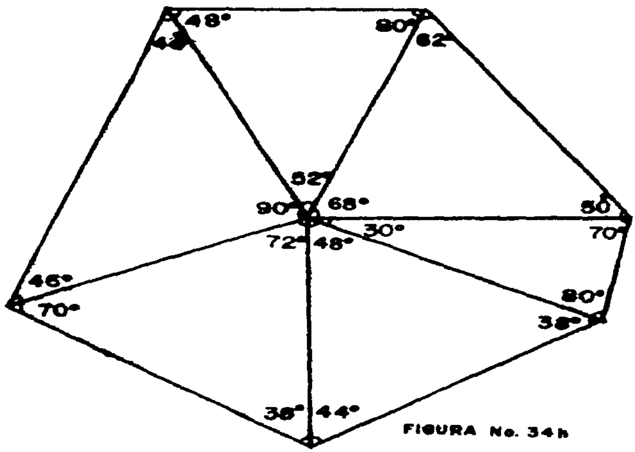


FIGURA No. 34h

120; 10; 4	120; 20; 4
106; 06; 9	023; 03; 4
605; 05; 6	034; 04; 7
504; 45; 17	045; 45; 15

$$R_1 = 4 + 4 + 7 + 15 = 30 \times 0.68 = 20.40$$

$$R_2 = 4 + 9 + 6 + 17 = 33 \times 0.68 = 22.44$$

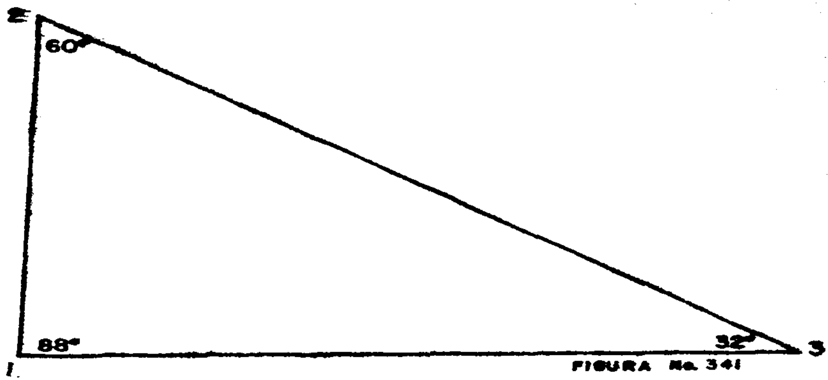


FIGURA No. 341

123; 13; 19 312; 12; 19

19 x 0.75 = 14.25

$\Sigma R_1 = 7.8 + 18.7 + 1.5 + 4.5 + 3.0 + 3.8 + 17.9 + 20.4 + 14.2 = 91.8$

$\Sigma R_2 = 8.4 + 19.1 + 1.5 + 4.5 + 3.0 + 3.8 + 23.0 + 22.4 + 14.2 = 99.9$

El arco de triangulación contenida entre dos líneas bases presenta 91.8 unidades para R_1 y de acuerdo con las tolerancias establecidas (Ver tabla correspondiente) este arco está encuadrado para primer orden en el límite máximo o en el límite deseable si se tratara de una triangulación de segundo orde.

El límite deseable para primer orden es de 80 unidades, si se quisiera alcanzar esta característica erá necesario mejorar las figuras o reducir una figura en las contenidas entre las dos bases.

2) MONUMENTACION Y SEÑALES:

Una vez terminado y concluido el reconocimiento se procede a llevar a cabo la monumentación; la cual es la representación física de cada uno de los vértices y la constituyen diferentes tipos, a saber:

A) Monumento con Torre de Manpostería.

B) Monumentación a Flor de Tierra.

C) Monumentación de Tipo Subterráneo.

D) Monumentación en Terreno Rocoso.

En cada vértice de triangulación además de establecer el monumento que defina al vértice en cuestión, se fijan otras marcas: de referencia y de azimut.

Las especificaciones para monumentos y placas que recomienda el Coast and Geodetic Survey en Estados Unidos, y que se aplican en México, son:

1) Cada vértice de triangulación que no sea una marca permanente (faros, monumentos, tanques, etc.) debe referenciarse y marcarse de modo permanente y siguiendo las especificaciones siguientes:

2) Las estaciones de una triangulación deben marcarse con placas de bronce de tamaño estandar en forma definitiva de manera

que no pueda extraerse, ni que cambie en su posición por elevación o giro.

3) El nombre de la estación y año en que se determinó, deben aparecer claramente en la placa grabados preferentemente antes de insertarla en la roca o monumento. Una estación debe tener: placa en el vértice, placas o marcas de referencia y placa o marca azimutal.

Para el nombre del vértice de una triangulación, normalmente se toma el de la localidad aunque también suele usarse para designar la estación, el nombre del propietario del terreno. El uso de nombres dobles es poco práctico porque causa trabajo extra en los registros y formas de cálculo, asimismo, los nombres que están compuestos de palabras como: "Pico, Montaña, Punto, etc". que no son necesarios, aunque en la descripción de la estación se enfatiza que se localiza en el Pico, Montaña o punto de ese nombre.

4) Reglas y Ejemplos para marcar Estaciones.

a) Cada nueva estación en una triangulación debe marcarse con su respectiva placa del tamaño estandar con el nombre de la estación y año en que se determina.

b) Cada placa de referencia deberá tener nombre del vértice, número de marca de referencia y año.

c) Cada estación reconstruida (ya sea por destrucción de monumento o pérdida de placa) debe remarcarse con su nombre original, fecha original de su establecimiento y el año en que fue reconstruida.

d) Nuevas marcas (adicionales) de referencia deben establecerse cuando una estación es reconstruida y recuperada. El nombre, fecha o fechas de las marcas de referencia deben ser las mismas en que la estación fue determinada.

e) No deben renovarse las marcas viejas de referencia. Si se encuentran en malas condiciones se refuerzan o destruyen y se coloca una marca nueva de referencia con el número progresivo que le corresponda.

f) La abreviación "Exc" (excéntrico) nunca debe grabarse en la placa. Esta se usa solamente en records de cálculo para indicar que las observaciones hechas en ese punto; deben reducirse al centro de la estación para cerrar los triángulos antes de usarse en los cálculos subsecuentes.

g) Todas las placas de una estación deben troquelarse a 3/16".

Los ejemplos siguientes relativos al grabado de las placas de las estaciones y referencias deben seguirse estrictamente.

CASO I) Establecimiento de Vértice Nuevo.

En el centro de la placa para una estación se graba un pequeño triángulo, el año en que se determinó en un lado y el nombre de la estación en el vértice opuesto. Dos placas de referencia grabadas con el nombre de la estación, número y año. Las placas de referencia se numeran en forma progresiva en el sentido de las manecillas del reloj a partir del norte, colocadas de tal manera que la flecha grabada apunte hacia la placa de la estación o vértice. La placa de la marca azimutal se graba con el nombre de la estación y año de su determinación. La distancia que separa la placa del vértice de las marcas de referencia es menor a 50 metros; mientras que la marca azimutal es de 400 a 1 000 metros.

EJEMPLO: Estación "EAGLE" establecida en 1940. Las placas deberán grabarse.

Placa de estación: "EAGLE 1940".

Placa de Referencia: "EAGLE No. 1 (6.2) 1940"

Placa Azimutal: "EAGLE 1940".

CASO II)

Las placas de estación, referencia o azimutal podrán reforzarse pero no remarcarse o removerse de su sitio original. Si alguna o todas las marcas son reforzadas solamente, el grabado original de las placas debe conservarse sin cambios, alteraciones o informaciones adicionales.

CASO III)

Cuando la estación es remarcada en su posición original y se establece una nueva referencia.

El nombre original y fecha del vértice debe conservarse y solo se incorpora el año en que la estación fue remarcada abajo de la fecha anterior. Al remarcar la estación debe colocarse placa nueva si es que la original no puede ya usarse.

Si las dos placas de referencia están en buenas condiciones y, si no existe peligro de destrucción inmediata, pueden no alterarse.

EJEMPLO: Estación "TABLE 1925" fue remarcada en 1940 y por lo tanto se estableció una marca nueva de referencia.

Placa de Estación: "TABLE 1925-1940".

Placa nueva de referencia: "TABLE No. 3 (o el siguiente número consecutivo) 1925-1940".

CASO IV)

Cuando sólo el vértice se ha movido.

Si una estación ha sido alterada, es generalmente más práctico establecer una marca nueva en una localización nueva y destruir la antigua. No cambia el nombre del vértice pero deberá adicionársele el número 2 y la fecha en que la estación es nuevamente establecida. Si fuese necesario usar las mismas placas antiguas deberá de borrarse la fecha original y se grabará la nueva fecha y el número "2" enseguida del nombre.

Al menos una marca de referencia deberá establecerse con el nuevo nombre de estación, año en que se ocupó y el número siguiente progresivo usado para las referencias.

EJEMPLO: La placa de la estación "LUTKE 1925" fue removida en 1940, pero las marcas de referencia no fueron movidas.

La nueva placa se grabará "LUTKE 2 1940". Si existen las placas de referencia, se establece una tercera con la inscripción "LUTKE 2 No. 3 1940".

CASO V)

Cuando la placa del vértice y una o más marcas de referencia o azimut son movidas.

La estación se tratará como se explica en el Caso IV. Las nuevas referencias se graban con nombre, su correspondiente número consecutivo y fecha de reinstalación.

EJEMPLO: El vértice "SITKA 1925" y su referencia 2, fueron reinstalados en 1940.

En la placa del vértice queda "SITKA 2 1940". La referencia 1 se conserva igual pero la 2 se coloca en nuevo lugar y se graba "SITKA 2 No. 3 (o el siguiente consecutivo) 1940" Si la placa azimutal es movida se marca también como "SITKA 2 1940". No debe remarcarse ninguna placa antigua a menos que sea movida o quitada.

CASO VI)

La estación no ha sido alterada pero una o más referencias han sido movidas o se han colocado nuevas referencias.

No se altera el nombre de la estación pero el número de las referencias movidas se cancelan y se graban números nuevos progresivos.

EJEMPLO: La referencia 2 de "RAVEN 1925" fue desplazada en 1940. La referencia se graba "RAVEN No. 3 (o número consecutivo) 1925". Si las dos referencias fueron movidas, las nuevas se designan con 3 y 4 (o números consecutivos) y el año 1925.

Esta regla se aplica aún cuando las dos marcas antiguas de referencia estén en buenas condiciones y sus posiciones no hayan sido alteradas.

CASO VII)

La placa del vértice no ha sido alterada pero si la azimutal. La marca azimutal debe grabarse con el nombre del vértice, año de su determinación original y año en que fue movida.

EJEMPLO: El disco de la marca de azimut para "MIAMI 1925" quedará "MIAMI 1925 RESET 1940".

5) MARCAS EN LA ESTACION:

Las placas que determinan un vértice contienen un pequeño triángulo al centro. Si las condiciones lo permiten y, cuando la estación se encuentre entre campos de cultivo, se coloca bajo la superficie del terreno la estación subterránea.

6) <u>MARCAS DE REFERENCIA</u>:

Cada vértice de triangulación debe tener cuando menos dos marcas de referencia. En la placa debe estar grabada una flecha que señala hacia el lugar en que se encuentra la estación, nombre del vértice, fecha de su determinación y numeradas en serie progresiva a partir del norte en el sentido retrógrado.

Si es necesario monumentar las placas de referencia; éstos se construyen iguales al monumento que señala la estación, pero pueden ser (2 pulgadas) más pequeños en su diámetro.

En las marcas de referencia no se usan monumentos subterráneos. Las direcciones de las dos marcas de referencia para cada nueva estación deben intersectarse en buen ángulo de preferencia cerca de 90° o pueden estar alineados con la estación. Las marcas de referencia deben localizarse en lugares donde sufran menos disturbios; también donde pueda medirse la distancia a la estación y donde la visual del instrumento a la referencia sea clara desde la parte alta de la torre. La distancia entre la estación y las marcas de referencia debe ser preferentemente de menos de 30 metros para facilitar medirla con cinta.

Es de la responsabilidad del personal encargado de monumentar, observar que las visuales y medidas a las referencias, no toquen las patas de las torres o algunas otras obstrucciones. Pueden establecerse marcas adicionales al recuperar estaciones donde se necesite asegurar 2 ó más buenas marcas de referencia a cada estación.

7) <u>MARCA AZIMUTAL</u>:

El disco o placa de la marca azimutal está grabada con "MARCA AZIMUTAL" (Azimut Mark) y con una flecha dirigida hacia la placa de la estación. El monumento se construye igual a los de referencia. Cada estación debe poseer una marca azimutal establecida a no menos de 400 metros de distancia con visibilidad libre al vértice establecido.

El principal propósito de la marca azimutal es la de proporcionar un azimut en cada estación que esté disponible para los trabajos locales sin la necesidad de construir torres.

Las marcas azimutales frecuentemente se sitúan cerca o sobre la línea del cercado del camino que llega a la estación.

8) <u>POSTES INDICADORES</u>:

Para auxiliar la preservación de monumentos establecidos, suelen ponerse postes de madera junto al monumento que marque la estación y cerca de alguna referencia, pero especialmente o de preferencia junto a la estación. El poste se construye de 4 x 4 pulgadas por un metro de largo o proyectado de tal manera que sobresalga unos 30 centímetros sobre la superficie del terreno que podría pintarse de blanco con leyenda en letras negras "U.S.A.". Estos postes deberán colocarse junto a monumentos establecidos principalmente en carreteras, distritos rurales, a lo largo de líneas de playa, ríos o lagos.

9) MARCAS DE OTROS ORGANISMOS:

Si la estación fue ocupada por otra organización anteriormente y se encuentra en buen estado, debe usarse sin ninguna alteración como si fuese nueva estación. Las marcas de referencia y azimutal pueden colocarse, si es necesario, conservando lo establecido en los números 6, 7 y 8.

Si la placa de la estación no está en buenas condiciones, debe establecerse otra estación en la vecindad del disco y usarse como marca extra de referencia. El grabado de marcas adicionales puede hacerse como se indicó en el párrafo No. 3.

Debe tenerse cuidado en no remover horizontal ni verticalmente las placas anteriores. La placa no debe alterarse sin el permiso del organismo que estableció la estación originalmente.

10) COLOCACION DE PLACAS:

La localización de la estación, composición del terreno o presencia de rocas y la disponibilidad de material, dan lugar a la selección general de las diferentes maneras de situar los discos metálicos ya sea en monumentos de concreto o taladrando agujeros en roca.

Debe enfatizarse que el valor continuo de una triangulación depende de la permanencia de las placas o marcas. O bien que al establecer una estación cada marca será permanente hasta donde sea posible.

MONUMENTO DE CONCRETO

El monumento de concreto se vacía en el mismo lugar en que se hizo el agujero en el campo. La perforación se realiza con una profundidad de 1 a 1.50 metros que puede ser en forma cuadrada o circular y de aproximadamente 35 centímetros de diámetro.

Monumento para vértices de Triangulación Escala 1:20

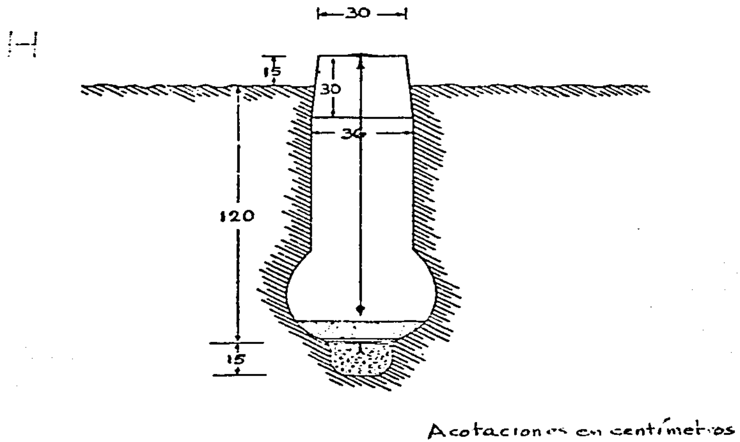


FIGURA No. 35

El punto debe plomearse directamente sobre el centro de la marca subterránea. Este punto se mantiene durante el vaciado del monumento superficial de tal manera que la placa superficial esté a plomo con la marca de la estación subterránea (ver Figura No. 35). La estación subterránea se cubre con una tabla delgada para evitar que se destruya y sobre ésta, algunas pulgadas de arena o tierra; más hacia arriba se agranda el agujero en 2 pulgadas más en su radio para darle la forma de campana y se rellena hasta dejarlo sobresalir de 5 a 15 centímetros del nivel del suelo. La parte que sobresale puede formar un cono o pirámide truncada o un cilindro (generalmente se hacen de 25 a 30 centímetros) de tal manera que las pirámides truncadas midan 30 centímetros por lado en la parte superior y 35 centímetros en su base.

Cuando el vaciado y el apisonado están completos se coloca el disco a plomo en la parte superior del monumento.

En forma de resumen se establece que la etapa del Reconocimiento como eslabón de la Triangulación Geodésica es de gran importancia, pués de ello emanan los éxitos de las operaciones siguientes. Además debe tenerse presente que para la ejecución del Reconocimiento se requiere la experiencia de las personas que integran este equipo, en lo concerniente al desplazamiento en el terreno a través de una carta geográfica o de un croquis.

Los resultados del Reconocimiento que incluye intervisibilidad, resistencia de figuras, líneas y base por observar, establecimiento de hitos referenciados, descripción e itinerario de cada vértice son la base de la etapa de Observación.

3) OBSERVACION.

La observación que se realiza con teodolito de alta precisión (un décimo de segundo de lectura directa en ambos círculos) en cada vértice es generalmente realizada por la noche con el objeto de reducir el fenómeno de refracción; lo cual demanda de señales luminosas por medio de lámparas geodésicas. Cuando llegan a realizarse los trabajos durante las horas de sol, las señales utilizadas pueden ser opacas o luminosas, dependiendo de las distancias.

Lámparas Geodésicas: Son lámparas que se encuentran enmarcadas en cubos de fierro de 20 centímetros por lado (ver Figura No. 36). Están dispuestas de un foco intercambiable y de una pantalla de forma parabólica, ésta siendo fija, el sistema donde se encuentra el foco puede ser desalojado por medio de un dispositivo motivando que el diámetro del rayo de luz que se muestre pueda ser controlado a solicitud del observador. La lámpara geodésica, además, cuenta con un sistema de puntería para hacer posible el control de la dirección. En cada lámpara concéntricamente tienen un dispositivo de rosca y tornillo para estar en condiciones de establecer el número de ellas que sea necesario y que tenga la particularidad de establecerlas en un punto dado (generalmente en pequeña torre sobre el vértice) a plomo. Las lámparas geodésicas tienen un interruptor que es utilizado para comunicarse de un vértice a otro empleando la clave Morse.

LAMPARA GEODESICA

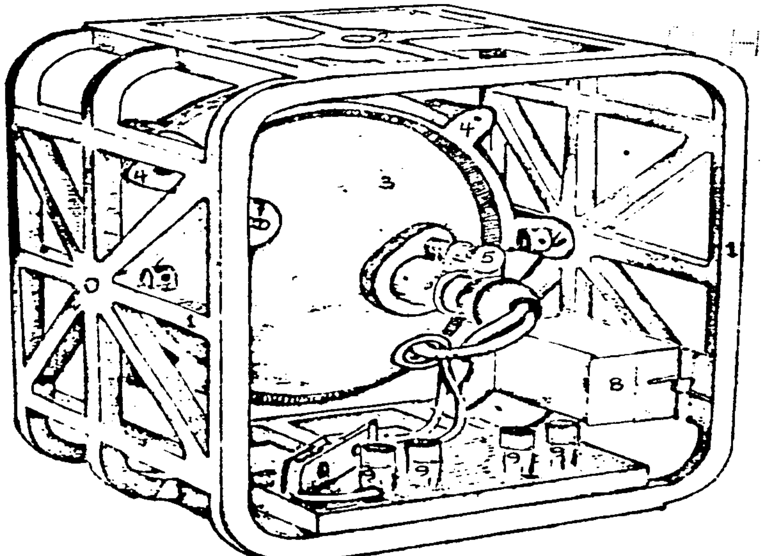


FIGURA No. 36

1. Cubo bastidor de 20 cm. de lado.
2. Conexión con otras lámparas o con el tripié.
3. Cuerpo de lámpara, parte posterior.
4. Sujetadores del cristal de la lámpara para hacer intercambiable el foco de bayoneta, parte posterior.
5. Tornillo para controlar la salida del rayo luminoso.
6. Tornillos sujetadores de la lámpara al bastidor.
7. Tornillo del movimiento vertical.
8. Caja para guardar los focos de repuesto.
9. Bornes de conexión.

Entre cada vértice se hace necesario la intercomunicación que generalmente se realiza por medio de radio transmisor-receptor, aunque también se ha establecido la clave Morse para ocasiones especiales en que no sea posible el empleo del radio. Enseguida se muestra dicha clave, así como algunas otras empleadas por el Servicio Geodésico Interamericano:

"CLAVE MORSE"

A	. -	M	- -	Y	-.--
B	- ...	N	- .	Z	-- ..
C	-.-.	Ñ	.. --	1	. ----
D	- ..	O	---	2	.. ---
E	.	P	.--.	3	... --
F	..-.	Q	--.-	4	.... -
G	-- .	R	.-.	5	.....
H	- ...	S	...	6	- ....
I	..	T	-	7	-- ...
J	. ---	U	.. -	8	--- ..
K	-.-.	V	... -	9	---- .
L	. - ..	W	. --	0	-----
		X	-..-		

"CLAVES DEL SERVICIO GEODESICO INTERAMERICANO"

DG: Abandonen el vértice.

THD: Bueno por esta noche.

Z: Empezar a trabajar.

1/Z: Enterado que va a empezar.

R: Repite.

AA: Espere un rato.

M: Menos luz.

N: Más luz.

L: Siguen letras.

3a). REITERACIONES:

La forma de operar consta de dos partes: a) Determinación de ángulos internos y b) Determinación de ángulos externos.

Se coloca el tripié y sobre de él el teodolito, se nivela y se procede a realizar la serie de 6 lecturas de ángulos horizontales.

Para hacer la primera lectura se coloca el instrumento en 10 segundos y en 0°0', por medio del tambor micrométrico, pero antes se habrá visado y centrado la señal, entonces se hace coincidir las líneas de los números y se lee la lectura, se aflojan los tornillos del círculo horizontal y vertical; se visa la señal número 2, se aprietan los tornillos y se centra la señal, se hacen coincidir las líneas y se lee, se da vuelta de campana al anteojo y el círculo horizontal se gira 180°, se vuelve a visar la señal número 2, se centra, se hacen coincidir las líneas y se lee; se regresa a la estación número 1, se visa, se centra y se lee, con esto se habrá terminado la primera reiteración.

Después sin mover el instrumento se coloca en 10" y 225°00', se vuelve a hacer el ajuste de las líneas de los números y se lee, con ésto se hace una reiteración más.

Para las demás reiteraciones se coloca el instrumento en 90°00" 10" y el procedimiento es el mismo.

Posteriormente, se obtienen los ángulos externos, para lo cual se sigue el mismo procedimiento, pero ahora se empieza con la señal número 2.

Ya que se tienen las reiteraciones, se restan la 2 de la 1 cuando el círculo vertical del instrumento quede a la izquierda y la 1 de la 2 cuando quede a la derecha. Para cada reiteración se tienen dos valores, de los cuales se obtiene un promedio para determinar el valor del ángulo. Ejemplo:

FECHA 14/JULIO/71 ESTACION 0 HOJA 60

	Grupo	Vuelta	Posición CV	PV	Indice	Tambor de Segs	Direcciones	1 Horizontales 2 Verticales
01		1	I	1	00° 00'	00"		54° 29' 45"
02			I	2	54° 29'	50"	50	45
03			D	2	234° 29'	49"	41	
04			D	1	180° 00'	08"		
05								
06		2	D	1	225° 00'	10"		
07			D	2	279° 29'	19"	09"	36"
08			I	2	99° 29'	19"	64	
09			I	1	44° 59'	15"		
10								
11		3	I	1	90° 00'	12"		
12			I	2	144° 30'	20"	68	
13			D	2	324° 30'	15"	24	46"
14			D	1	270° 00'	51"		
15								
16		4	D	1	315° 00'	04"		
17			D	2	09° 29'	42"	38	41"
18			I	2	189° 29'	44"	44	
19			I	1	135° 00'	00"		
20								
21		5	I	1	22° 00'	18"		
22			I	2	76° 30'	22"	64	41"
23			D	2	256° 30'	17"	27	
24			D	1	202° 00'	50"		
25								
26		6	D	1	267° 00'	00"		
27			D	2	321° 29'	19"	19	41"
28			I	2	141° 29'	46"	63	
29			I	1	86° 59'	43"		
30								

Valores Limites 57" y 4 54° 29' 49"

4) TRIANGULACION GEODESICA:

Las triangulaciones geodésicas consisten en el cubrimiento de una zona que se va a levantar por medio de una serie de puntos o vértices geodésicos ligados entre sí por visuales directas y que formen figuras geométricas cuya resolución proporciona las posiciones de ellas; para ésto se tendrá que conocer o determinar la longitud de uno de sus lados (Línea Base), que - servirá para la determinación y propagación de los restantes.

Una vez realizado el Reconocimiento se acude al campo a fin de llevar a cabo las observaciones angulares horizontales y verticales; siendo las primeras las más importantes ya que es indispensable realizar 16 reiteraciones con instrumento de lectura de un décimo de lectura directa. Debido a la alta precisión que se requiere se trata de evitar la refracción horizontal y de observar con toda claridad las señales, motivo por el cual se realizan las observaciones por la noche.

Las observaciones se anotan en los registros correspondientes calculando las direcciones y con éstas los ángulos que conforman la red geodésica.

Antes de emplear estos ángulos en la resolución de los triángulos se deben examinar para ver si satisfacen las condiciones geométricas que existen entre ellos; lo cual debe efectuarse antes de la compensación angular, para tener los valores más probables de los ángulos; con los ángulos compensados y la base, se procede a efectuar el cálculo de los triángulos. Para calcular el cierre angular se utiliza el Teorema de Lagrange, el cual considera la sustitución del triángulo esférico por un triángulo plano equivalente; el teorema dice:

"Si se tiene un triángulo esférico de lados poco curvos y un triángulo plano cuyos lados sean iguales en extensión lineal a los del triángulo esférico, los ángulos de uno y otro difieren una cantidad igual y que es precisamente la tercera parte del exceso esférico".

Calculando el exceso esférico y sumado a 180° se obtiene la suma interna angular del triángulo esférico, ésta restada de la suma angular observada arroja el error de cierre angular:

Error de cierre angular = 180° + e − Σ angular observada

e = Exceso esférico.

$$e = \frac{s}{R'^2 \text{ sen } 1''}$$

e = Exceso esférico.

s = Superficie del triángulo.

R'^2 sen 1" = m; e = s m (El logaritmo de m está tabulado).

R' varía de acuerdo con la latitud.

Las tolerancias para el cierre angular que están establecidas para las triangulaciones geodésicas son:

PRIMER ORDEN: un segundo y cada 10 figuras 3 segundos.

SEGUNDO ORDEN: tres segundos y cada 10 figuras cinco segundos.

Si el error de cierre angular no está dentro de la tolerancia se tendrá que repetir la observación; pero si son aceptadas por estas condicionantes se procede a llevar el cálculo completo de la triangulación geodésica; teniendo en cuenta que la condición lineal sea aceptada, es decir que a partir de diferentes ángulos en una misma figura se calcule un mismo lado y que la diferencia sea mínima. Para triangulaciones de primer orden se acepta hasta cien unidades de la séptima cifra logarítmica.

Los pasos que implica el cálculo de la triangulación geodésica son:

a) Reducción de las direcciones al nivel del mar.

b) Cálculo del exceso esférico.

c) Compensación por mínimos cuadrados.

d) Cálculo de las longitudes de los lados de un cuadrilátero (Teorema de Lagrange).

e) Cálculo de las coordenadas geodésicas.

f) Cálculo inverso o Comprobación del cálculo anterior.

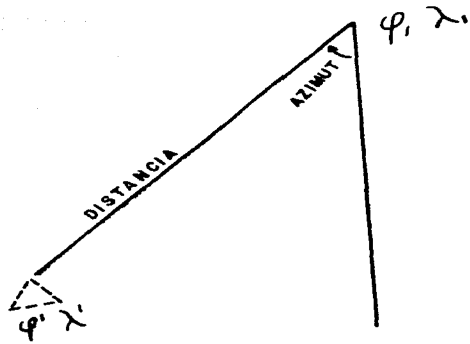


FIGURA No 37

a) <u>Reducción de las direcciones al nivel del mar</u>.

La reducción de las direcciones al nivel del mar en el caso de que la altitud de las estaciones de la triangulación sea muy grande, se les debe aplicar una corrección para poder reducirlas al nivel del mar; esta corrección únicamente se aplica a las triangulaciones de primer orden, ya que sólo resulta de algunos centésimos de segundo; la expresión de dicha corrección es:

$$c = \frac{e^2 \cos^2 \varphi \; h \; \mathrm{sen}\; 2\, Az}{2\, N \; \mathrm{sen}\; 1''}$$

En esta ecuación se tiene:

c = corrección angular en segundos.

h = altitud a la estación observada en metros.

Az = azimut de la dirección contado a partir del sur y en sentido de las manecillas del reloj.

O = Latitud a la estación en que se observa.

N = Normal Mayor.

e^2 = excentricidad del elipsoide: $\frac{a^2 - b^2}{a^2}$

Una vez que se tiene esta corrección, se aplica a las direcciones observadas; siempre es una cantidad muy pequeña, por lo que el quebrado $\frac{e^2}{2\ N\ \text{sen}\ 1''}$ de la ecuación anterior, puede considerarse como una constante para una estación considerada; por la misma razón se puede considerar constante $\cos^2$ O para las latitudes de la República Mexicana y su valor es 0.00011.

Con este parámetro la ecuación se simplifica:

$c = 0\overset{''}{.}00011\ h \cos^2 0 \text{ sen } 2\ Az$

<u>EJEMPLO</u>: Cuadrilátero formado por los vértices:

1) CHILE, 2) LUCERO, 3) ALMIRES y 4) CABALLO

Estado de CHIHUAHUA.

Se procede a calcular los azimutes, ya que sólo se tiene como datos el azimut directo e inverso de la base 1-2 y las direcciones observadas.

Se toma el azimut 1-2 y se le suma la diferencia de las direcciones 1-4 y 1-2, el resultado es el azimut 1-4.

Después se toma el azimut 1-2 y se le suma la diferencia de las direcciones 1-2 y 1-3; el resultado, es el azimut 1-3.

Mediante estos cálculos se obtendrán los valores de los azimut del primer vértice.

Para calcular el segundo grupo de azimuts, se toma el azimut 2-1 y se le suma la diferencia de las direcciones 2-1 y 2-3, con lo cual se tendrá el azimut 2-3; al azimut 2-1 se le suma la diferencia de las direcciones 2-4 y 2-1 para obtener el azimut 2-4.

El tercer grupo se calcula mediante el azimut 2-3 al cual se le suman 180° para obtener el azimut 3-2, que es el que se necesita como base para calcular los otros dos; al azimut 3-2 se le suma la diferencia de las direcciones 3-1 y 3-2 para obtener el azimut 3-1; al azimut 3-2 se le suma la diferencia de las direccionès 3-2 y 3-4 para obtener el valor del azimut 3-4.

Para calcular los azimutes del cuarto y último grupo se le suman 180° al azimut 1-4 para obtener el azimut 4-1, al cual se le suman las diferencias de las direcciones correspondientes. Un método más rápido para calcular este grupo de azimutes es el siguiente: como se conocen los azimutes 2-4 y 3-4, lo único que hay que hacer es sumarle a cada uno 180° para obtener los azimutes 4-2 y 4-3, respectivamente.

Enseguida, se calcula la corrección, para lo cual se requieren como datos la altura y las latitudes de los puntos.

Se obtiene el logaritmo de la constante 0.00011 y el de la altura de dicho vértice, se suman y el resultado, se coloca en la columna correspondiente; se obtiene el logaritmo seno del doble del azimut, tomando en consideración el signo, para lo cual, debe saberse que si el ángulo es mayor de 180° será negativo el logaritmo y si es menor será positivo. El siguiente paso a seguir, es la obtención del logaritmo coseno de la latitud y éste multiplicarlo por 2; ya que se tienen estos valores se suman y se calcula el antilogaritmo, obteniendo así la corrección; este mismo procedimiento se sigue para cada uno de los vértices.

Las correcciones se suman algebraicamente a las direcciones observadas para obtener las direcciones reducidas al nivel del mar.

Debe tenerse cuidado en el signo que le corresponde al doble del azimut, así como en el coseno cuadrado de la latitud, pués primero, se debe obtener el logaritmo de la latitud y después multiplicarlo por dos.

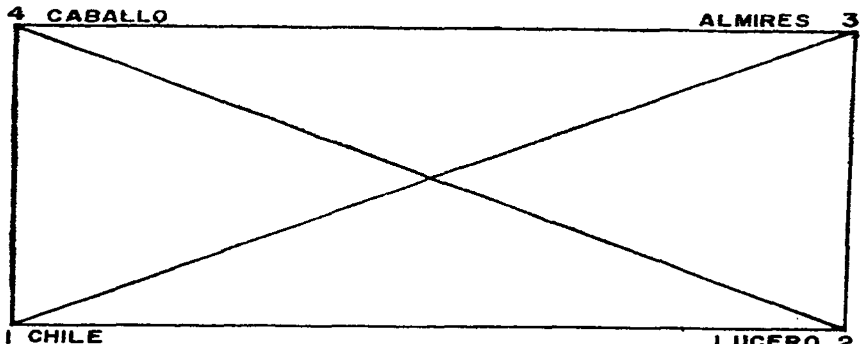


FIGURA No 38

DATOS:

CHILE: Ø = 30°35' 30"095 = 107°01' 45"312

h = 1 824.09 m

LUCERO: Ø = 30°41' 20"645 = 106°41' 24"044

h = 1 953.45 m

Distancia: 1 - 2 = 34 265.40 m.

Azimut 1 - 2 = 251°33' 01"62

Azimut 2 - 1 = 71°43' 24"04

Direcciones:

	4 = 00°00' 00"00			
1	3 = 45°56' 12"45	h = 1.84 Km.		
	2 = 82°48' 36"62			
	1 = 83°13' 48"85			
2	4 = 120°51' 29"15	h = 1.85 Km.		
	3 = 165°04' 40"37			
	2 = 00°00' 00"00			
3	1 = 61°16' 47"01	h = 1.34 Km.		
	4 = 99°55' 41"95	Ø = 30°53'		
	3 = 81°33' 44"10			
4	2 = 117°24' 52"08	h = 1.30 Km.		
	1 = 176°58' 39"06	Ø = 30°48'		

Cálculo de Azimutes:

Direcciones:

1 - 4 = 00°00' 00"00
1 - 2 = 82°48' 00"00
82°48' 00"00

1 - 2 = 82°48'
1 - 3 = 45°56'
36°52'

Azimut:

1 - 2 = 251°33'
− 82°48'
1 - 4 = 168°45'

1 - 2 = 251°33'
− 36°52'
1 - 3 = 214°41'

Direcciones:

2 - 3 = 155°05'
−
2 - 1 = 83°14'
81°51'

2 - 4 = 120°51'
−
2 - 1 = 83°14'
37°37'

3 - 2 = 333°34'
+
3 - 1 = 61°17'
394°54'

Azimut:

2 - 1 = 71°43'
+
81°51'
2 - 3 = 153°34'

2 - 1 = 71°43'
+
37°37'
2 - 4 = 109°20'

3 - 2 = 333°34'
+
3 - 4 = 99°56'
433°30'

Azimut:

394°50'
360°00'
Az2-3= 34°51'

2 - 3 = 153°34'
180°00'
3 - 2 = 33°34'

2 - 4 = 109°21'
180°00'
4 - 2 = 289°21

Azimut:

433°30'
360°00'
Az. 3-4= 73°30'

2 - 3 = 168°45'
180°00'
4 - 2 = 348°45'

3 - 4 = 73°30'
180°00'
4 - 3 = 253°30'

Cálculos correspondientes al cuadro de registro de Reducciones de las Direcciones al nivel del mar.

log .00011	=	6.0413927	−10	log .00011	=	6.0413927	−10
log 1300	=	3.1139434		log 1340	=	3.1271048	
		9.1553361				9.1684975	

log..00011	=	6.0413927	−10	log .00011	=	6.0413927	−10
log 1953	=	3.2908023		log 1824.09	=	3.2610462	
		9.3321950				9.3024389	

Vértice No. 1

log sen 2 Az.:

168°45'	360°00'	214°41'	429°22'
x 2	337°30'	x 2	360°00'
337°30'	22°30'	429°22'	69°22'

log sen 22°30' = 9.5828397
log sen 69°22' = 9.9712084
log sen 36°54' = 9.7784553

Vértice No. 2

log sen 2 Az.:

153°34'	360°00'	109°21'	218°42'	71°43'	180°00'
x 2	307°08'	x 2	180°00'	x 2	143°26'
307°08'	52°52'	218°42'	38°42'	143°26'	36°34'

log sen 52°52' = 9.9015852
log sen 38°42' = 9.7960486
log sen 36°54' = 9.7750697

Vértice No. 3

333°34'	667°08'	360°00'	34°51'	73°30'	180°00'
x 2	360°00'	307°08'	x 2	x 2	147°00'
667°08'	307°08'	62°52'	69°42'	147°00'	33°00'

log sen 62°52' = 9.9495852
log sen 69°42' = 9.9721514
log sen 33°00' = 9.7361088

Vértice No. 4

348°45'	697°30'	360°00'	289°21'	578°42'	253°30'
x 2	360°00'	337°08'	x 2	360°00'	x 2
697°30'	337°30'	22°30'	578°42'	218°42'	507°00'
				180°00'	360°00'
				38°42'	147°00'

180°00'
147°00'
33°00'

log sen 22°30' = 9.5828397
log sen 38°42' = 9.7960486
log sen 33°00' = 9.7361088

Vértice No. 1

2 log cos Ø

2 log cos 30°48' = 9.9339729
x 2
9.86894476

2 log cos 30°53' = 9.9335957
x 2
9.8698208

b) <u>Exceso Esférico</u>:

Exceso esférico es aquella cantidad que rebasa a los 180° y que depende de: 1) La superficie que tenga el triángulo y 2) La curvatura donde se encuentre dicho triángulo.

Los datos que se requieren para calcular el exceso esférico son:

1) Latitud media, la cual se obtiene por medio de cartas geográficas.

2) Angulos observados.

3) Distancia, por medio de la cual se calcula la superficie del triángulo.

Para conocer el cierre angular de cada triángulo, se deben sumar los ángulos que se obtienen por medio de las direcciones observadas, las cuales se reducen al nivel del mar y a ésto se le resta 180° + e.

$$\sum ang - (180° + e) = w_1$$

Primero, se debe determinar el exceso esférico, mediante el uso de la siguiente ecuación:

$$e = ab \text{ sen } C \text{ m.}$$

ab sen C significa dos veces la superficie de un triángulo.

m es el factor que multiplicado por dos veces la superficie del triángulo da el exceso esférico.

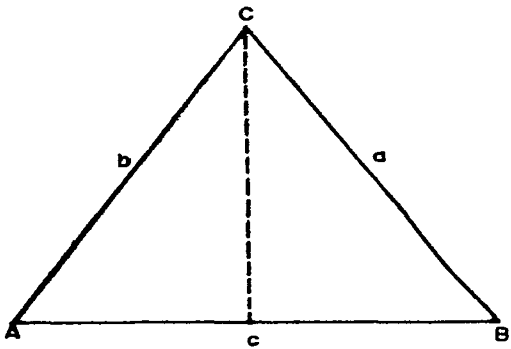


FIGURA No 39

En la figura No. 39 se tiene:

$$\text{sen } C = \frac{h}{b} \quad ; \quad h = b \text{ sen } C$$

$$2\,S = ab \text{ sen } C$$

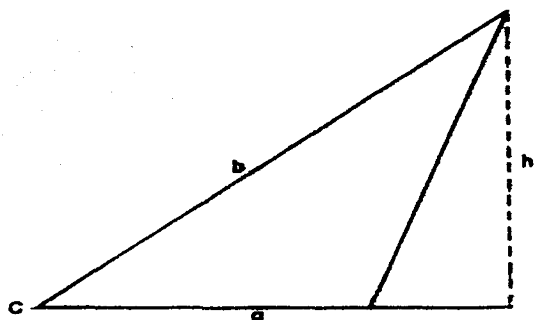


FIGURA No 40

En la Figura No. 40 la suma de los excesos 1 y 3 debe ser igual a la suma de los excesos 2 y 4.

Determinación del Exceso Esférico:

$$\text{sen}^2 \frac{a}{2} = - \frac{\cos S \cos (S - A)}{\text{sen } B \text{ sen } C}$$

$$\text{sen}^2 \frac{b}{2} = - \frac{\cos S \cos (S - B)}{\text{sen } A \text{ sen } C}$$

$$\text{sen}^2 \frac{c}{2} = - \frac{\cos (S - A) \cos (S - B)}{\text{sen } A \text{ sen } B}$$

$$2S = A + B + C = 180° + e$$

$$S = 90° + \frac{1}{2} e$$

Sustituyendo este valor:

$$\cos S = \cos (90° + \frac{e}{2})$$

$$\cos S = \cos 90° \cos \frac{e}{2} - \text{sen } 90° \text{sen } \frac{e}{2}$$

$$\cos S = - \text{sen } \frac{e}{2}$$

$$\cos (S-A) = \cos S \cos A + \text{sen } S . \text{sen } A$$

$$\cos (S-A) = - \text{sen } \frac{e}{2} \cos A + \cos \frac{e}{2} \text{ sen } A$$

$$\cos (S-A) = \text{sen } (\frac{e}{2} - A)$$

$$\text{sen}^2 \frac{a}{2} = - \frac{-\text{sen } \frac{e}{2} \text{ sen } (\frac{e}{2} - A)}{\text{sen } B \text{ en } C} \quad ....(1)$$

$$\text{sen}^2 \frac{b}{2} = - \frac{-\text{sen } \frac{e}{2} \text{ sen } (\frac{e}{2} - B)}{\text{sen } A \text{ sen } C} \quad ....(2)$$

$$\text{sen}2\ \frac{c}{2} = \frac{\text{sen}\ (\frac{e}{2} - A)\ \text{sen}\ (\frac{e}{2} - B)}{\text{sen A} \quad \text{sen B}} \ \ldots\ldots.(3)$$

Multiplicando (1) por (2) y dividiendo por (3), se tiene:

$$\underline{\text{sen}^2\ \frac{a}{2} = \text{sen}^2\ \frac{b}{2} = \text{sen}^2\ \frac{c}{2} = \frac{\text{sen}\ \frac{e}{2}\ (\text{sen}\ \frac{e}{2} - A)}{\text{sen B sen C}} \quad \frac{\text{sen}\ \frac{e}{2}\ \text{sen}\ (\frac{e}{2} - B)}{\text{sen A sen C}}}$$

$$\cos^2 \frac{c}{2} = \frac{\text{sen}\ (\frac{e}{2} - A)\ \text{sen}\ (\frac{e}{2} - B)}{\text{sen A} \quad \text{sen B}}$$

$$\frac{\text{sen}^2\ \frac{a}{2} \quad \text{sen}^2\ \frac{b}{2}}{\cos^2\ \frac{c}{2}} = \frac{\text{sen}^2\ \frac{e}{2}}{\text{sen}^2\ C}$$

$$\text{sen}\ \frac{e}{2} = \frac{\text{sen}\ \frac{a}{2} \quad \text{sen}\ \frac{b}{2}}{\cos\ \frac{e}{2}}\ \text{sen C}$$

$$\text{sen}\ \frac{1}{2}\ e = \frac{\text{sen}\ \frac{1}{2}\ a \quad \text{sen}\ \frac{1}{2}\ b}{\cos\ \frac{1}{2}\ c}\ \text{sen C}$$

Cálculo de los ángulos observados:

Triángulo 123:

Direcciones:		Direcciones:		Direcciones:	
1-2 =	− 82°48'	2-3 =	− 165°04'	3-2 =	+ 00°00'
1-3 =	45°56'	2-1 =	83°13'	3-1 =	61°17'
Ang 1 =	36°52'	Ang 2 =	81°51'	Ang 3 =	61°17'

Triángulo 234:

Direcciones:	Direcciones:	Direcciones:
2-3 = 165°04'	3-2 = 00°00'	4-2 = 117°24'
2-4 = − 120°51'	3-4 = + 99°56'	4-3 = − 81°33'
Ang 2 = 44°13'	Ang 3 = 99°56'	Ang 4 = 35°51'

Triángulo 341:

Direcciones:	Direcciones:	Direcciones:
3-4 = 99°55'	4-1 = 176°58'	1-4 = 00°00'
3-1 = − 61°16'	4-3 = − 81°33'	1-3 = + 45°56'
Ang 3 = 38°39'	Ang 4 = 95°25'	Ang 1 = 45°56'

Triángulo 412:

Direcciones:	Direcciones:	Direcciones:
4-1 = 176°58'	1-2 = 82°48'	2-4 = 120°51'
4-2 = − 117°24'	1-4 = + 00°00'	2-1 = − 83°13'
Ang 2 = 59°34'	Ang 1 = 82°48'	Ang 2 = 37°38'

Cálculo de la Latitud Media:

$\phi_1 = 30°35'$

$\phi_2 = 30°41'$

$\phi_3 = 30°53'$

$\phi_4 = \underline{30°48'}$

$\phi = 122°57'/4$

$\phi_m = 30°44'\ 15''$

c) <u>Compensación por mínimos cuadrados de un Cuadrilátero</u>.

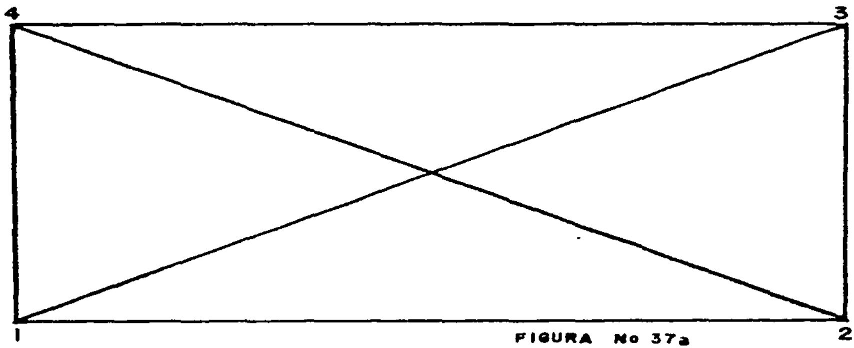


FIGURA No 37a

<u>Cálculo:</u>

El primer paso es el cálculo de los errores de cierre angular (w); se suman los ángulos que integran cada uno de los triángulos en que se ha dividido el cuadrilátero con dos diagonales; dicha suma será mayor o menor de 180°00' 00."00, lo que sobre o falte se restará de la cantidad anterior más el exceso esférico.

Después, se buscan los logaritmos senos de los ángulos del numerador y al mismo tiempo se colocan las diferencias logarítmicas de un segundo y el cuadrado de las mismas; las sumas de los logaritmos senos deben ser iguales, como en este ejemplo no lo son, las diferencias que hay entre ellas es w_1. También se suman las diferencias logarítmicas al cuadrado.

Se procede a cálcular las sumatorias que se simbolizan mediante la Notación de Gauss.

Para calcular $\boxed{aa}$ se suma algebraicamente el doble de los cuadrados de las diferencias logarítmicas de los ángulos 4 y 2 más el cuadrado de las diferencias primas de dichos ángulos, más -1 elevado a n-1 más la suma de la diferencia logarítmica por la diferencia logarítmica prima de los mismos ángulos.

$\boxed{ab}$ es igual a la suma algebraica de la diferencia logarítmica del ángulo 2 menos el doble de la diferencia logarítmica prima del mismo ángulo más el doble de la diferencia logagarítmica del ángulo 3 más la diferencia logarítmica prima del mismo ángulo.

$\boxed{ac}$ es igual a la suma algebraica de menos la diferencia logarítmica del ángulo 3 menos el doble de la diferencia logarítmica prima de dicho ángulo más el doble de la diferencia logarítmica del ángulo 4 menos la diferencia logarítmica prima de dicho ángulo.

$\boxed{ad}$ es igual al doble producto de la diferencia logarítmica del ángulo 2 menos la diferencia logarítmica prima del mismo ángulo más la diferencia logarítmica del ángulo 4 menos el doble de la diferencia logarítmica del mismo ángulo.

Cálculo de "P":

P_1 = el doble de [ab] + [ac] + [ad]

P_2 = [ab] + el doble de [ac] - [ad]

P_3 = el doble de [ad] - [ab] - [ac]

Después se calcula Q que es igual a P_1 por la notación de Gauss [ab] + P_2 por la notación de Gauss [ac] + P_3 por la notación de Gauss [ad] .

Cálculo de "K":

K_1 = 8 veces el error que resulta de la diferencia de la suma de los logaritmos senos de los ángulos del numerador menos la suma de los ángulos del denominador menos el producto de P_1 por el error de cierre que hay en el primer triángulo menos P_2 por el error de cierre que hay en el segundo triángulo menos el producto de P_3 por el error de cierre que hay en el tercer triángulo, todo entre 8 veces la notación de Gauss [aa] .

K_2 = a la octava parte de la suma algebraica del doble del error de cierre del primer triángulo más el producto del error de cierre del segundo triángulo por el error de cierre del cuarto triángulo menos el producto de P_1 por K_1.

K_3 = a la octava parte de la suma algebraica del doble del cierre del tercer triángulo más el error de cierre del segundo triángulo menos el error de cierre del cuarto triángulo menos el producto de P_2 por K_1.

K_4 = a la octava parte de la suma algebraica del doble del error de cierre del cuarto triángulo menos el error de cierre del tercer triángulo menos el error de cierre del segundo triángulo menos el producto P_3 por K_1.

Cálculo de los Errores: (V):

Para calcular V_{1-2} se suman algebraicamente K_2 y K_4; para V_{1-3} se suman $-K_2$ y K_3; para V_{1-4} se suma algebraicamente $-K_3 - K_4$; para V_{2-1} se suma algebraicamente el producto de K_1 y la resta de las diferencias logarítmicas del ángulo 2 menos K_2, menos K_4; para V_{2-3} se suma algebraicamente el producto de menos la diferencia logarítmica del ángulo 2 por K_1 más K_4; V_{3-1} es igual a la suma algebraica del producto de la suma de las diferencias logarítmicas del ángulo 3 por K_1 más K_2 menos K_3; V_{3-2} es igual a menos la diferencia logarítmica del ángulo 3 por K_1 menos K_2; V_{3-4} es igual a menos la diferencia logarítmica prima del ángulo 3 por K_1 más K_3; V_{4-1} es igual a la suma algebraica del producto de la resta de las diferencias logarítmicas del ángulo 4 por K_1 más K_3 más K_4; V_{4-2} es igual a la diferencia logarítmica prima del ángulo 4 por K_1 menos K_4 y V_{4-3} es igual a la diferencia logarítmica prima del ángulo 4 por K_1 menos K_3.

Estas correcciones se suman algebraicamente a las diferencias observadas para obtener las direcciones compensadas.

Por último con las direcciones compensadas se calculan los ángulos compensados y con éstos se procede a calcular el cierre de los triángulos, el cual debe ser igual a 180° más el exceso esférico, con esto se realiza el cierre lineal de los ángulos compensados o sea la suma de los logaritmos seno de los ángulos del numerador y del denominador; esta suma debe ser igual en ambos casos, con lo cual se habrá realizado el error de cierre lineal.

Las comprobaciones que se realizan son al sumar los ángulos compensados, la cual debe ser igual a 180° más el exceso esférico, es decir al calcular el error de cierre de los triángulos. La otra comprobación es al efectuar la suma de los logaritmos senos de los ángulos del numerador y la de los del denominador, las cuales deben ser iguales, ésto es el cierre lineal.

d) Cálculo de las longitudes de los lados de un Cuadrilátero por el Método de Legrange.

Cálculo:

Teniendo como datos las coordenadas de la base del cuadrilátero, su longitud y los ángulos compensados, los cuales se reducen a planos y se les aplica la diferencia de un tercio del exceso esférico, con el fin de que cada triángulo tenga 180° mediante la suma de sus ángulos internos.

Después mediante la Ley de los Senos, se procede a calcular la longitud del siguiente lado del cuadrilátero con dos diagonales y así se prosigue para poder calcular todos los lados del cuadrilátero; al mismo tiempo se calculan las longitudes de las diagonales tanto en un sentido como en el otro.

Las comprobaciones que se hacen son: al sumar los ángulos planos reducidos, cuya suma debe ser igual a 180°00' 00" y otra comprobación se realiza al calcular las longitudes de las diagonales del cuadrilátero en ambos sentidos, ya que estos - valores deben ser iguales o variar en la última cifra logarítmica una unidad.

Debe hacerse notar que al calcular las longitudes de los lados, debe hacerse con cuidado ya que en base a un lado se calculan los restantes y si en alguno se comete algún error, éste se irá propagando.

Los pasos a seguirse para este cálculo se encuentran en el cuadro de registro correspondiente.

e) Cálculo de las Coordenadas Geodésicas.

Tanto para calcular las coordenadas geodésicas como el azimut, se requiere calcular primero un incremento de la latitud el cual se suma algebraicamente a la latitud de origen; así como un incremento de la longitud y uno del azimut, el cual se suma al azimut inverso más 180°.

El objetivo de este cálculo es dar posición geodésica a los vértices establecidos, para lo cual es requisito indispensable contar con los datos siguientes:

1) Azimut Geodésico

2) Distancia geodésica.

Estos datos deben estar referidos a un punto cuyas coordenadas geodésicas se conozcan.

El cálculo del azimut se hace en función de un azimut de línea conocida más o menos según el caso, el ángulo comprendido entre la línea que une el punto cuyas coordenadas se van a determinar; las ecuaciones que se emplean para determinar la posición geodésica son:

$$\phi' = \phi + \Delta\phi \qquad \lambda' = \lambda + \Delta\lambda$$

$$\alpha' = 180° + \alpha + \Delta\alpha$$

ϕ' = El punto cuyas coordenadas se quieren determinar.

ϕ = La latitud del punto conocido.

$\Delta\phi$ = Incremento de latitud entre el punto origen y el punto que se desea determinar.

Ecuaciones empleadas:

$$-\Delta\phi = s \cos\alpha\, B + s^2 \operatorname{sen}^2\alpha\, C + (\delta\varphi)^2 D - h \operatorname{sen}^2\alpha\, s^2 E$$

$$-\frac{1}{2} s^2 K E + 3/2\, s^2 \cos^2 K E +$$

$$1/2\, s^2 \cos^2 \sec\phi\, A'^2 K \operatorname{sen}^2 1'' \ldots\ldots\ (1)$$

$$\log\Delta\lambda = \log s + C_{\log\Delta\lambda} - C_{\log s} + \log \operatorname{sen}\alpha + \log A' +$$

$$\log \sec\phi'$$

$$-\Delta\alpha = \Delta\lambda \operatorname{sen} 1/2\, (\phi' + \phi) \sec 1/2\, (\Delta\phi) + (\Delta\lambda)\, 3\, F$$

En la ecuación (1), generalmente se utilizan los 4 primeros términos, los 3 últimos se utilizan para trabajos de alta precisión.

Además se emplean los coeficientes A, B, C, D, E, y F, los cuales están dados por las siguientes ecuaciones:

$$A = \frac{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \emptyset)^{1/2}}{a \operatorname{sen} 1''}$$

$$B = \frac{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \emptyset)^{3/2}}{d(1 - e^2) \operatorname{sen} 1''}$$

$$C = \frac{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \emptyset) \tan \emptyset}{2 a^2 (1 - e^2) \operatorname{sen} 1''}$$

$$D = \frac{3/2 (e^2 \operatorname{sen} \emptyset \cos \emptyset \operatorname{sen} 1'')}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \emptyset}$$

$$E = \frac{(1 + 3 \tan^2 \emptyset)(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \emptyset)}{6 a^2}$$

$$F = 1/12 (\operatorname{sen} \emptyset \cos^2 \emptyset \operatorname{sen}^2 1'')$$

La planilla de cálculo se encuentra dividida en dos partes ya que el cálculo de las coordenadas se hacen desde el vértice 2 al 3 de la Figura No. 37 y del 3 al 2, lo cual constituye una comprobación.

Como datos se tienen: el azimut de Lucero a Chile o sea del vértice 2 al 3 y el ángulo de 1 a 3, el cual en la primera parte se suma y en la segunda se resta, con lo cual se tiene el azimut de 2-1 o sea de Lucero a Almires, también se tienen las coordenadas del vértice Lucero.

Procedimiento:

1) Se obtiene el logaritmo de la distancia 2-3 del cálculo de las longitudes de los lados mediante el Método de Legrange; el logaritmo coseno del azimut de 2-1 y el logaritmo del coeficiente B, el cual se obtiene por medio de la latitud dato, calculándose hasta centésimas de segundo por medio de la interpolación, se suman y se obtiene el primer término de la ecuación.

2) Se eleva al cuadrado el logaritmo de la distancia, se obtiene el logaritmo del seno al cuadrado del azimut y el logaritmo del coeficiente C, también por medio de la latitud origen, se suman y se obtiene el segundo término denominado K.

3) Al término h, al cual se le cambia de signo en la primera parte de la ecuación, al logaritmo del producto de la distancia al cuadrado se multiplica por el seno cuadrado del azimut y el logaritmo del coeficiente E, se suman y se obtiene el cuarto término.

4) Se suman con sus signos los antilogaritmos de los términos h, K y el cuarto.

5) A dicha suma se le saca logaritmo y se eleva al cuadrado, se le suma el coeficiente D, para obtener el tercer término.

6) Se tiene como constante el logaritmo de un medio, logaritmo de la distancia al cuadrado, logaritmo K, logaritmo del coeficiente E, se realiza la suma y se obtiene el quinto término.

7) Logaritmo del término quinto, logaritmo de la constante 3, logaritmo del coseno cuadrado del azimut, lo cual da el sexto término.

8) Logaritmo del sexto término, cologaritmo del coeficiente E, logaritmo de la constante $\frac{A^2 \text{ arc}^2\ 1''}{3}$, logaritmo de la secante cuadrada de la latitud y la suma da el séptimo término.

9) Se suma algebraicamente del lo. al 7o. término, para obtener el incremento de la latitud, el cual es negativo y estará dado en segundos, por lo cual debe convertirse en minutos; a éste se le suma algebraicamente la latitud origen, para obtener así la latitud del vértice Almires.

10) Logaritmo de la distancia, logaritmo seno del azimut, logaritmo del coeficiente A, el cual se obtiene mediante la latitud del vértice anterior, logaritmo secante de la latitud prima, todo se suma.

11) Para calcular el arco seno corregido se recurre a las tablas correspondientes, primero se busca el valor para la distancia y después para la suma obtenida en el inciso anterior.

mires o sea al azimut directo y a 180°, lo cual da el azimut inverso o sea de Almires a Lucero.

17) Se obtiene el antilogaritmo del incremento de longitud y se hace la conversión correspondiente.

18) El incremento de longitud se suma algebraicamente a la longitud de Lucero, con lo cual se obtiene la longitud de Almires.

En la segunda parte de la planilla se hace un cálculo semejante, con datos distintos, sin embargo el resultado debe ser el mismo, como datos se tendrán: Azimut de Chile a Lucero, las coordenadas de Chile, el ángulo de Chile a Almires y a Lucero y la distancia 1-3.

La latitud y la longitud que se obtienen deben ser iguales o cuando mucho variar en la última cifra decimal dos unidades.

Dentro de las recomendaciones se debe hacer notar la importancia de conocer cuando las funciones seno y coseno son positivas o negativas; los cosenos son negativos cuando se encuentran en el segundo y tercer cuadrante; los senos son negativos cuando se encuentran entre 180° y 270°; esto es importante puesto que determina el signo del primer término de la ecuación, el cual interviene en el cálculo del 4o. término; además en la suma que determina el incremento de la latitud.

También debe tenerse cuidado para llevar a cabo el calculo de los arcos senos corregidos sobre todo en las interpolaciones.

Los resultados obtenidos son bastante buenos ya que los datos que se obtuvieron en la primera parte de la planilla corresponden en todo a los obtenidos en la segunda parte, esto se debe a que se hicieron las aproximaciones exactas y el empleo de las tablas fue correcto.

f) <u>Cálculo Inverso de Posiciones Geodésicas</u>.

Este cálculo se realiza para comprobar los resultados obtenidos en el cálculo directo de latitud y longitud geodésica, también es aplicado cuando se requieren la distancia, azimut directo e inverso conocidas las coordenadas.

<u>Cálculo:</u>

Los datos con los que se cuenta son: Coordenadas de los vértices Caballo y Almires.

Se resta la latitud prima de la latitud y se obtiene el incremento de la latitud, lo mismo se hace con la longitud; a los incrementos se les saca mitad y el resultado se suma a la latitud del vértice 1 y a la longitud del mismo vértice; para obtener la latitud media. Los incrementos de la latitud y de longitud se convierten a segundos.

Se obtiene su logaritmo, se busca el arco seno corregido para ambos casos empleando el logaritmo obtenido anteriormente, haciendo la interpolación correspondiente se restan y se obtiene el logaritmo de un incremento denominado l, tanto de latitud como de longitud, al cual se le suma el logaritmo coseno de la mitad del incremento de la longitud y el cologaritmo del coeficiente B; que se obtiene por medio de la latitud media, se hace la suma y se obtiene el logaritmo del producto de la distancia l por el coseno del azimut más la mitad del incremento del azimut o convergencia de meridianos, al cual se le da signo contrario al incremento de la latitud.

Obtenido el logaritmo del incremento de longitud se suma con el logaritmo coseno de la latitud media y con el cologaritmo del coeficiente A, el cual se obtiene mediante la latitud media, el resultado es el logaritmo del producto de la distancia l por el seno de la suma del azimut más la mitad del incremento del azimut.

Ya que se tienen los logaritmos de la distancia l por el seno y coseno se restan y resulta el logaritmo tangente de la suma del azimut más el incremento del azimut, al cual se le saca el antilogaritmo tangente y al resultado se le suman 180° ya que al formar un eje de coordenadas cartesianas y colocar los valores que se tienen como dato; se observa que lo que se está calculando es el ángulo comprendido entre la línea que une las coordenadas y el eje de las abscisas por lo que se le devo, se obtiene la mitad del incremento y el antilogaritmo, puesto que se suma algebraicamente a la suma del azimut más la mitad del incremento del azimut, el resultado es el azimut de Caballo a Almires o sea el azimut directo; a este azimut se le suma el incremento del azimut y 180° para obtener el azimut inverso o sean de Almires a Caballo.

La primera comprobación que se realiza es al restar el logaritmo del azimut más la mitad del incremento del azimut menos el logaritmo seno del producto de la distancia 1 por el seno de la suma del azimut más el incremento del azimut entre 2 y la resta también de los cosenos; los resultados de ambas restas deben ser iguales, con lo cual se obtiene el logaritmo de la distancia 1.

Otra comprobación que se lleva a cabo es al calcular los azimuts directo e inverso, ya que éstos se conocen por el cálculo anterior; el azimut de Almires a Lucero; a éste se le suma el ángulo compensado correspondiente de 2-3, con lo cual se obtiene el azimut inverso o sea de Almires a Caballo; para el directo se utiliza el azimut de Caballo a Chile y se le suma el ángulo compensado 4 que visa a 1 y a 3, con lo cual se obtiene el azimut de Caballo a Almires.

Az Caballo - Chile		348° 42' 54".51
	−	
Ang $\overset{1}{\underset{3}{4}}$		95° 24' 54".54
Az Caballo-Almires		253° 17' 59".97
Az Almires - Lucero		333° 30' 53".98
		99° 55' 42".07
		433° 26' 36".05
	−	
		360° 00' 00".00
Az Almires-Caballo		73° 26' 36".05

Dentro de las recomendaciones que deben hacerse están: tener cuidado al realizar la resta de las latitudes y longitudes de partida, puesto que el incremento de latitud o longitud pueden resultar negativos, lo cual hará que el logaritmo sea negativo también; otra recomendación es en la interpolación para obtener el arco seno corregido y que en la primera parte del cálculo se resta y en la segunda se suma; una más, es al obtener el ángulo tangente, ya que en este caso lo que se obtuvo fue el ángulo y no el azimut, para ésto se recomienda hacer una representación utilizando los datos.

Resumiendo, se asienta que para establecer vértices de triangulación geodésica se requiere en orden cronológico llevar a cabo las siguientes etapas:

a) Determinación y ubicación del área por estudiar.

b) Recolección de toda la información existente en el área como lo son cartas geográficas, vértices geodésicos dentro y colindante, fotografía aérea, vías de comunicación en general, etc.

c) Selección de la información, para formar el diagnóstico.

d) Anteproyecto, utilizando la información filtrada o seleccionada.

.e) Reconocimiento en el terreno, en el cual se ha verificado la intervisibilidad y la resistencia de figuras, estableciendo la monumentación de vértices y bases en forma definitiva. Esta etapa es de campo.

f) Observación de los vértices a través de reiteraciones, cálculo del estado de direcciones, cálculo angular y análisis de cierres angulares para saber si hay que llevar a cabo repeticiones en las observaciones. Aquí también se incluye la medida de las líneas base, por ser toda etapa de campo.

g) Cálculo de la triangulación, en la cual siempre se debe partir de orígenes conocidos; para el ejemplo que se cita son las coordenadas geodésicas de los vértices Chile y Lucero en el Estado de Chihuahua, la distancia entre ellos, azimut directo e inverso. Este cálculo se ha elaborado por medio de planillas de cálculo, que son las siguientes:

1) Información de origen y las direcciones observadas en el terreno.

2) Reducción de las direcciones al nivel del mar.

3) Cálculo del exceso esférico.

4) Compensación del cuadrilátero (en tres hojas)

5) Cálculo de triángulos.

6) Cálculo de Coordenadas geodésicas.

7) Resumen final.

TRIANGULACION GEODESICA DE CHIHUAHUA

VERTICE CHILE 1

φ = 30°35'30".95
λ = 107°01'45".312
h = 1824.09

VERTICE LUCERO 3

φ = 30°41'20".645
λ = 106°41'24".044
h = 1953.45

VERTICE ALMIRES 3

φ = 30°52'
λ = 106°47'
h = 1350

VERTICE CABALLO 4

φ = 30°48'
λ = 107°04'
h = 1300

Az 1-2 = 251°33'01".62
Az 2-1 = 71°43'24".04
D 1-2 = 34 265.40 m
log D 1-2 = 4.5348558

DIRECCIONES OBSERVADAS LUCERO

CHILE	83°13'	48".85
CABALLO	120°51'	29".15
ALMIRES	165°04'	40".37

CHILE

CABALLO	00°00'	00".00
ALMIRES	45°56'	12".45
LUCERO	82°48'	36".62

CABALLO

ALMIRES	81°33'	44".10
LUCERO	117°24'	52".08
CHILE	176°58'	39".06

ALMIRES

LUCERO	00°00'	00".00
CHILE	61°16'	47".01
CABALLO	99°55'	41".95

Las direcciones se consideran en sentido retrógrado

REDUCCION DE LAS DIRECCIONES AL NIVEL DEL MAR

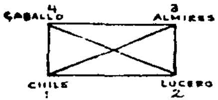
$$C = \frac{e^2 h}{2a \operatorname{sen} 1''} \cos^2\varphi \operatorname{sen} 2 Az$$

$$C = 0''.000\,109\, h \cos^2\varphi \operatorname{sen} 2 Az$$

C = corrección en seg.
φ = latitud visada
Az. = Azimut directo de la dirección
h = Altura visada en metros

$\log 0.000109 = 6.03743$

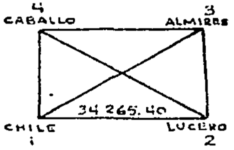
Δ	LADOS	log. 0.000109 h	log. $\cos^2\varphi$	Azimut Az	log sen 2 Az	log Suma	Correccion	Direcciones observadas	Direcciones corregidas
2	LUCERO								
	1 CHILE	9.29845	9.86982	71° 43'	9.77507	8.94334	+ 0.09	83 13 48.85	83 13 48.94
	4 CABALLO	9.15137	9.86795	109° 21'	9.79605(n)	8.81537(n)	− 0.07	120 51 29.15	120 51 29.08
	3 ALMIRES	9.16776	9.86734	153° 34'	9.90158 (n)	8.93668(n)	− 0.09	165 04 40.37	165 04 40.28
1	CHILE								
	4 CABALLO	9.15137	9.86795	168° 44'	9.58345(n)	8.60277(n)	− 0.04	00 00 00.00	359 59 59.96
	3 ALMIRES	9.16776	9.86734	214° 41'	9.97121	9.00631	+ 0.10	45 56 12.45	45 56 12.55
	2 LUCERO	9.32823	9.86894	251° 33'	9.77846	8.97563	+ 0.09	82 48 36.62	82 48 36.71
4	CABALLO								
	3 ALMIRES	9.16776	9.86734	253° 19'	9.73688	8.77198	+ 0.06	81 33 44.10	81 33 44.16
	2 LUCERO	9.32823	9.86894	289° 10'	9.79256 (n)	8.98973 (n)	− 0.10	117 24 52.08	117 24 51.98
	1 CHILE	9.29848	9.86982	348° 44'	9.58345(n)	8.75175 (n)	− 0.06	176 58 39.06	176 58 39.00
3	ALMIRES								
	2 LUCERO	9.32823	9.86894	333° 34'	9.90157 (n)	9.09876(n)	− 0.13	00 00 00.00	359 59 59.87
	1 CHILE	9.29848	9.86982	34° 51'	9.97215	9.14045	+ 0.14	61 16 47.01	61 16 47.15
	4 CABALLO	9.15137	9.86795	73° 30'	9.73611	8.75543	+ 0.06	99 55 41.95	99 55 42.01



CALCULO DEL EXCESO ESFERICO "e"

$e = \frac{1}{R^2 \text{ sen } 1''} \, a\,b \text{ sen} C$ $m = \frac{1}{R^2 \text{ sen } 1''}$ $S = a\,b \text{ sen} C$ $e = m\,S$

S = superficie del triángulo en Km^2

LATITUD	log. m	TRIANGULOS	ANGULOS OBSERVADOS	CALCULO APROX. DE LADOS	CALCULO EXCESO ESFERICO
29° 30' 29° 40' 29° 50' 30° 00' 30° 10' 30° 20' 30° 30' 30° 40' 30° 50' 31° 00' 31° 10' 31° 20' 31° 30'	9.405 52 51 49 9.405 48 46 45 9.405 42 42 40 9.405 39 37 36 9.405 34	1 CHILE 2 LUCERO 3 ALMIRES	36° 52' 81° 51' 61° 17' Σ= 180° 00'	log 1-2 = 4.534 86 log csc 3 = 0.057 00 log sen 1 = 9.778 12 log 2-3 = 4.369 98 log csc 4 = 0.232 35 log sen 2 = 9.843 47	log 3-1 = 4.587 45 log 3-2 = 4.369 98 log sen 3 = 9.943 00 log m = 1.405 41 log e = 0.305 84 e = 02".02
		2 LUCERO 3 ALMIRES 4 CABALLO	44° 13 99° 56 35 51 Σ= 180° 00	log 3-4 = 4.445 80 log csc 1 = 0.143 56 log sen 3 = 9.795 57 log 4-1 = 4.384 73 log csc 2 = 0.214 40 log sen 4 = 9.935 62	log 4-2 = 4.595 77 log 4-3 = 4.445 80 log sen 4 = 9.767 65 log m = 1.405 41 log e = 0.214 63 e = 01".64
		3 ALMIRES 4 CABALLO 1 CHILE	38° 39' 95° 25' 45° 56' Σ= 180° 00'	log 1-2 = 4.534 86 log csc 3 = 0.057 00 log sen 2 = 9.995 59 log 1-3 = 4.587 45	log 1-3 = 4.587 45 log 1-4 = 4.384 73 log sen 1 = 9.856 44 log m = 1.405 41 log e = 0.234 23 e = 01".72
		4 CABALLO 1 CHILE 2 LUCERO	59° 34' 82° 49' 37° 37' Σ= 180° 00'	log 2-3 = 4.369 98 log csc 4 = 0.232 35 log sen 3 = 9.993 44 log 2-4 = 4.595 77	log 2-4 = 4.595 77 log 2-1 = 4.534 86 log sen 2 = 9.785 60 log m = 1.405 41 log e = 0.321 64 e = 02".10

Comprobación

2".02	1".64
1".72	2".10
3".74	3".74

COMPENSACION DEL CUADRILATERO POR EL METODO DE MINIMOS CUADRADOS

DIRECCIONES REDUCIDAS AL NIVEL DEL MAR	ECUACIONES DE CONDICION DE ANGULOS			CALCULO DE LAS W
1-2 = 82 48 36.71 1-3 = 45 56 12.55 1-4 = 359 59 59.96	1^2_3 = 36 52 24.16 2^3_1 = 81 50 51.34 3^1_2 = 61 16 47.28	3^4_1 = 38 38 54 86 4^1_3 = 95 24 54.84 1^3_4 = 45 56 12.59	1^2_4 = 82 48 36.75 2^4_1 = 37 37 40.14 4^1_2 = 59 33 47.02	2^3_4 = 44 13 11.20 3^4_2 = 99 55 42.14 4^2_3 = 35 51 07.82
2-1 = 83 13 48.94 2-3 = 165 04 40 28 2-4 = 120 51 29.08	Σ = 180 00 02.78 180+e = 180 00 02.02 W_2 = − 0.76	Σ = 180 00 02.29 180+e = 180 00 01.72 W_3 = − 0.57	Σ = 180 00 03.91 180+e = 180 00 02.10 W_4 = − 1.81	Σ = 180 00 01 16 180+e = 180 00 01 64 Cierre = + 0.48

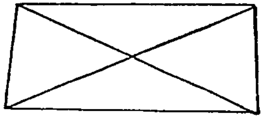
	ECUACIONES DE CONDICION DE LADOS W_1								
3-1 = 61 16 47.15 3-2 = 359 59 59.87 3-4 = 99 55 42.01	Ang	log. sen Ang. numerador	Diferencias log 1" d	d^2	Ang.	log sen Ang. denominador	Diferencias log. 1" d'	d'^2	d d'
4-1 = 176 58 34.00	2^4_1	9 785 7067.8	27.4	750.76	2^3_1	9.995 5888.1	3.1	9.61	84.94
4-2 = 117 24 51.98	3^1_2	9.942 9880.7	11.5	132.25	3^4_1	9.795 5615.8	26.3	691.69	302.45
4-3 = 81 33 44 16	4^1_3	9.998 0573.3	−2.0	4.00	4^1_2	9.935 6016.0	12.4	153.76	−24.80

$W_1 = S_2 - S_1 = -1.9$ $\quad S_1 = 9.7267521.8$ $\quad [d^2] = 887.01$ $\quad S_2 = 9.7267519.9$ $\quad [d'^2] = 855.06$

Cálculo de [aa] $= 2([d^2]^4_2 + [d'^2]^4_2 + (-1)^{n-1}[dd']^4_2)$	Cálculo de [ab] $= d_2 - 2d'_2 + 2d_3 + d'_3$	Cálculo de [ac] $= -d_3 - 2d'_3 + 2d_4 - d'_4$	Cálculo de [ad] $= 2d_2 - d'_2 + d_4 - 2d'_4$	Calculo de P_1 $= 2[ab] + [ac] - [ad]$
$[d^2]^4_2 + [d'^2]^4_2 = 1742.07$ $(-1)^{n-1}[dd']^4_2 = 242.31$ $\frac{1}{2}[aa] = 1984.38$ $[aa] = 3968.76$	$d_2 - 2d'_2 = 21.2$ $2d_3 + d'_3 = 49.3$ $[ab] = 70.50$	$-d_3 - 2d'_3 = -64.1$ $2d_4 - d'_4 = -16.4$ $[ac] = -80.50$	$2d_2 - d'_2 = 51.7$ $d_4 - 2d'_4 = -26.8$ $[ad] = 24.90$	$2[ab] = 141.00$ $[ac] = -80.50$ $-[ad] = -24\ 90$ $P_1 = 35.60$

Calculo de P_2 $=[ab]+2[ac]-[ad]$	Calculo de P_3 $=2[ad]-[ab]-[ac]$	Calculo de Q $=P_1[ab]+P_2[ac]+P_3[ad]$	Calculo de K_1 $=(8W_1-P_1W_2-P_2W_3-P_3W_4):(8[aa]-Q)$	
$[ab]=70.50$ $2[ac]=-161.00$ $-[ad]=-24.90$ $P_2=-115.40$	$2[ad]=49.80$ $-[ab]=-70.50$ $-[ac]=80.50$ $P_3=59.80$	$P_1[ab]=2509.80$ $P_2[ac]=9289.70$ $P_3[ad]=1489.02$ $Q=13288.52$	$8W_1=-15.200$ $-P_1W_2=27.056$ $-P_2W_3=-65.778$ $-P_3W_4=108.238$ Numerador = 54.316	$8[aa]=31750.08$ $-Q=-13288.52$ Denominador = 18461.56 $K_1=0.0029421$

Calculo de K_2 $=\frac{1}{8}(2W_2+W_3-W_4-P_1K_1)$	Calculo de K_3 $=\frac{1}{8}(2W_3+W_2-W_4-P_2K_1)$	Calculo de K_4 $=\frac{1}{8}(2W_4-W_3-W_2-P_3K_1)$
$2W_2=-1.520$ $W_3=-0.570$ $-W_4=1.810$ $-P_1K_1=-0.105$ $8K_2=-0.385$ $K_2=-0.048$	$2W_3=-1.140$ $W_2=-0.760$ $-W_4=1.810$ $-P_2K_1=0.339$ $8K_3=0.249$ $K_3=0.031$	$2W_4=-3.620$ $-W_3=0.570$ $-W_2=0.760$ $-P_3K_1=-0.176$ $8K_4=-2.466$ $K_4=-0.308$



CALCULO DE LAS CORRECCIONES

$V_{1-2}=K_2+K_4$	$V_{1-3}=-K_2+K_3$	$V_{1-4}=-K_3-K_4$	$V_{2-1}=(d'_2-d_2)K_1-K_2-K_4$	$V_{2-3}=-d'_2K_1+K_2$
$K_2=-0,048$ $K_4=-0.308$ $V_{1-2}=-0,356$	$-K_2=0.048$ $K_3=0.031$ $V_{1-3}=0.079$	$-K_3=-0.031$ $-K_4=0.308$ $V_{1-4}=0.277$	$(d'_2-d)K_1=-0.071$ $-K_2=0.048$ $-K_4=0.308$ $V_{2-1}=0.285$	$-d'_2K_1=-0.009$ $K_2=-0.048$ $V_{2-3}=-0.057$

$V_{2-4} = d_2K_1 + K_4$	$V_{3-1} = (d_3+d'_3)K_1 + K_2 - K_3$	$V_{3-2} = -d_3K_1 - K_2$	$V_{3-4} = -d'_3K_1 + K_3$	$V_{4-1} = (d_4-d'_4)K_1 + K_3 + K_4$
$d_2K_1 = 0.081$ $K_4 = -0.308$	$(d_3+d'_3)K_1 = 0.111$ $K_2 = -0.048$ $-K_3 = -0.031$	$-d_3K_1 = -0.034$ $-K_2 = 0.048$	$-d'_3K_1 = -0.077$ $K_3 = 0.031$	$(d_4-d'_4)K_1 = -0.042$ $K_3 = 0.031$ $K_4 = -0.308$
$V_{2-4} = -0.227$	$V_{3-1} = 0.032$	$V_{3-2} = 0.014$	$V_{3-4} = -0.046$	$V_{4-1} = -0.319$

$V_{4-2} = d'_4K_1 - K_4$	$V_{4-3} = -d_4K_1 - K_3$
$d'_4K_1 = 0.036$ $-K_4 = 0.308$	$-d_4K_1 = 0.006$ $-K_3 = -0.031$
$V_{4-2} = 0.344$	$V_{4-3} = -0.025$

TRIANGULOS CON ANGULOS COMPENSADOS

$1^3_3 = 36\ 52\ 23.725$	$3^4_1 = 38\ 38\ 54.782$
$2^3_1 = 81\ 50\ 50.998$	$4^1_3 = 95\ 24\ 54.546$
$3^1_2 = 61\ 16\ 47.298$	$1^3_4 = 45\ 56\ 12.392$
$\Sigma = 02.021$	$\Sigma = 01.720$
$1^2_4 = 82\ 48\ 36.117$	$2^3_4 = 44\ 13\ 11.370$
$2^4_1 = 37\ 37\ 39.628$	$3^4_2 = 99\ 55\ 42.080$
$4^1_2 = 59\ 33\ 46.357$	$4^2_3 = 35\ 51\ 08.189$
$\Sigma = 02.102$	$\Sigma = 01.639$

CIERRE LINEAL CON ANGULOS COMPENSADOS

ANG	log. sen ang.	ANG.	log. sen ang.
2^4_1	$= 9.7857054$	2^3_1	$= 9.9955887$
3^1_2	$= 9.942\ 9881$	3^4_1	$= 9.7955614$
4^1_3	$= 9.998\ 0574$	4^1_2	$= 9.935\ 6008$
S_1	$= 9.7267509$	S_2	$= 9.7267509$

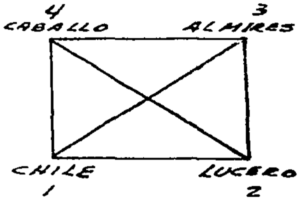
APLICACION DE LAS CORRECCIONES

V	correccion	direcciones compensadas
V_{1-2}	-0.356	82 48 36. 354
V_{1-3}	0.079	45 56 12. 629
V_{1-4}	0.277	00 00 00. 237
V_{2-1}	0.285	83 13 49.225
V_{2-3}	-0.057	165 04 40. 223
V_{2-4}	-0.227	120 51 28. 853
V_{3-1}	0.032	61 16 47.182
V_{3-2}	0.014	359 59 59. 884
V_{3-4}	-0.046	99 55 41.964
V_{4-1}	-0.319	176 58 38. 681
V_{4-2}	0.344	117 24 52.324
V_{4-3}	-0.025	81 33 44. 135

TRIANGULACION GEODESICA

CALCULO DE TRIANGULOS

TRIANGULOS	ANG. COMPENSADOS	ANG. REDUCIDOS	CALCULO DE LADOS	LONGITUD DE LADOS
			log. 1-2 = 4.534 8558	
1 CHILE	-36 52 23.72	36 52 23.05	log csc 3 = 0.0570127	
2 LUCERO	81 50 51.00	81 50 50.33	log sen 1 = 9.778 1833	1-2 = 34 265.40 m
3 ALMIRES	61 16 47.30	61 16 46.62		
				2-3 = 23 445.09
	Σ=180 00 02.02	Σ=180 00 00.00	log. 2-3 = 4.370 0518	
			log. csc 4 = 0.232 3283	3-4 = 27 917.02
2 LUCERO	44 13 11.37	44 13 10.83	log sen 2 = 9.843 4889	
3 ALMIRES	99 55 42.08	99 55 41.53		1-4 = 24 263.93
4 CABALLO	35 51 08.19	35 51 07.64		
			log 3-4 = 4.445 8690	1-3 = 38 677.38
	Σ=180 00 01.64	Σ=180 00 00.00	log csc 1 = 0.143 5304	
			log sen 3 = 9.795 5599	2-4 = 39 430.04
3 ALMIRES	38 38 54.78	38 38 54.21		
4 CABALLO	95 24 54.55	95 24 53.98		
1 CHILE	45 56 12.39	45 56 11.81	log. 4-1 = 4.384 9593	
			log. csc 2 = 0.214 2966	
	Σ=180 00 01.73	Σ=180 00 00.00	log. sen 4 = 9.935 5999	
4 CABALLO	59 33 46.36	59 33 45.66		
1 CHILE	82 48 36.11	82 48 35.41	log 1-2 = 4.534 8558	
2 LUCERO	37 37 39.63	37 37 38.93	log csc 3 = 0.0570127	
			log. sen 2 = 9.9955885	
	Σ=180 00 02.10	Σ=180 00 00.00	log. 1-3 = 4.5874570	
			log. 2-3 = 4.3700518	
			log csc 4 = 0.2323283	
			log. sen 3 = 9.9954471	
			log. 2-4 = 4.5958272	



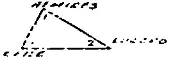
CALCULO DE COORDENADAS GEODESICAS

		°	'	"			°	'	"
α	2 LUCERO a 3 CHILE	71	43	24.04	α	3 CHILE a 2 LUCERO	251	33	01.62
2° Δ	y	+81	50	50.99	3° Δ	y	−36	52	23.72
α	2 LUCERO a 1 ALMIRES	153	34	15.03	α	3 CHILE a 1 ALMIRES	214	40	37.90
Δα			−3	21.06	Δα			−7	03.99
		180	00	00.00			180	00	00.00
α'	1 ALMIRES a 2 LUCERO	333	30	53.97	α'	1 ALMIRES a 3 CHILE	34	33	33.97

	°	'	"			°	'	"
φ	30	41	20.645	2 LUCERO	λ	106	41	24.044
Δφ	+	11	21.593		Δλ	+	6	32.845
φ'	30	52	42.238	1 ALMIRES	λ'	106	47	56.889

	logaritmos		"		logs		° ' "
s	4.370 0518	(1)	−681.7684	s	3.699	½(φ+φ')	30 47 01.452
cos α	9.952 0585	(2)	+ 0.1644	s²	8.740	logaritmos	
B	8.511 5265		681.6040	K	9.216	s	4.3700518
(1)=h	2.833 6368(n)	(3)	+ 0.0100	E	5.925	sen α	9.648 4488
s²	8.740 1036	(4)	+ 0.0006	(5)	3.580	A'	8.5093592
sen²α	9.296 8976	(5)	− 0.0000	3	0.477	sec φ'	0.0663819
C	1.178 8400	(6)	+ 0.0000	cos²α	9.904	Σ	2.5942217
(2)=K	9.215 8412	(7)	+ 0.0000	(6)	3.961	Arc−sen corr.	− 7
(δφ)²	5.667 0650	−Δφ	−681.5934	(colog)E	4.075	Δλ	2.5942210
D	2.335 3000	Δφ/2	−340.7967	A″ arc 1″/3	8.912	sen ½(φ+φ')	9.7090994
(3)	8.002 3650			sec²φ	0.191	sec Δφ/2	0.0000006
−h	2.833 6368			(7)	4.079	(aprox.) −Δα	2.3053210
s² sen²α	8.0370012					Ant. log.	201."057
E	5.924 9000	Arc−sen corr.				(8)	0."000
(4)	6.795 5380	Para φ	− 9.7	(Δλ)²	7.783	−Δα	201."057
		Para Δλ	+ 2.6	F	7.870		392.845
		Total	−7.1	(8)	5.653	Δλ	6' 32."845

	logaritmos		"		logs		° ' "
s	4.587 4570	(1)	−1032.8985	s	3.699	½(φ+φ')	30 44 06.166
cos α	9.915 0676(n)	(2)	+ 0.7281	s²	9.175	logaritmos	
B	8.511 5331		−1032.1704	K	9.862	s	4.5874570
(1)=h	3.014 0577(n)	(3)	+ 0.0230	E	5.923	sen α	9.7550758(n)
s²	9.174 9140	(4)	0.0041	(5)	4.659	A'	8.5093392
sen²α	9.510 1516	(5)	− 0.0000	3	0.477	sec φ'	0.0663819
C	1.177 1500	(6)	+ 0.0000	cos²α	9.830	Σ	2.9182539(n)
(2)=K	9.862 2156	(7)	+ 0.0000	(6)	4.966	Arc−sen corr.	15
(δφ)²	6.027 4994	−Δφ	−1032.1435	(colog)E	4.077	Δλ	2.9182529
D	2.334 5000	Δφ/2	516.0716	A″ arc 1″/3	5.912	sen ½(φ+φ')	9.7090994
(3)	8.361 9994			sec²φ	0.130	sec Δφ/2	0.0000006
−h	3.014 0577			(7)	6.085	(aprox.) −Δα	2.6273524
s² sen²α	8.685 0656					Ant. log.	423."986
E	5.923 1000	Arc−sen corr.				(8)	0."000
(4)	7.622 2233	Para φ	−26.5	(Δλ)²	8.755	−Δα	423."986
		Para Δλ	+ 11.7	F	7.870		−828.423
		Total	−14.8	(8)	6.625	Δλ	−13' 48."423



$$-\Delta\phi = s\cos\alpha\, B + s^2 \operatorname{sen}^2\alpha\, C + (\delta\phi)^2 D - h\, s^2 \operatorname{sen}^2\alpha\, E - \tfrac{1}{2} s^2 k E + \tfrac{1}{2} s^2 \cos^2\alpha\, k\, E + \tfrac{1}{2} s^2 \cos^2\alpha \sec^2\phi\, A''^2\, k \operatorname{sen}^2 1''$$

$$\log\Delta\lambda = \log s + C_{\log\Delta\lambda} - C_{\log s} + \log \operatorname{sen}\alpha + \log A' + \log \sec\phi'$$

$$-\Delta\alpha = \Delta\lambda \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\phi'+\phi)\sec\tfrac{1}{2}(\Delta\phi) + (\Delta\lambda)^3 F$$

CALCULO INVERSO DE POSICIONES GEODESICAS

$$s_1 \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}\right) = \frac{\Delta\lambda_1 \cos \phi_m}{A_m}$$

$$s_1 \cos\left(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}\right) = \frac{-\Delta\phi_1 \cos \frac{\Delta\lambda}{2}}{B_m}$$

$$-\Delta\alpha = \Delta\lambda \operatorname{sen} \phi_m \sec \frac{\Delta\phi}{2} + F(\Delta\lambda)^3$$

	° ' "			Nombre de la Estacion	° ' "
1. ϕ	30 48 22.821			CABALLO — λ	107 04 43.531
2. ϕ'	30 52 42.238			ALMIRES — λ'	106 47 56.889
$\Delta\phi = (\phi' - \phi)$	04 19.417			$\Delta\lambda = (\lambda' - \lambda)$	— 16 46.642
$\frac{\Delta\phi}{2}$	02 09.708			$\frac{\Delta\lambda}{2}$	— 08 23.321
$\phi_m = \left(\phi + \frac{\Delta\phi}{2}\right)$	30 50 32.529				
$\Delta\phi$ (seg)	259.417			$\Delta\lambda$ (seg)	-1006.642
log $\Delta\phi$	2.4139985			log $\Delta\lambda$	3.0028750 (n)
cor. arc. — sen	— 0			cor. arc. — sen	— 4
log $\Delta\phi_1$	2.4139985			log $\Delta\lambda_1$	3.0028746 (n)
log cos $\frac{\Delta\lambda}{2}$	9.9999987			log cos ϕ_m	9.9337813
colog B_m	1.4884838			colog A_m	1.4906601
log $\left\{s_1 \cos\left(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}\right)\right\}$	3.9024810 (signo contrario a $\Delta\phi$)			log $\left\{s_1 \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}\right)\right\}$	4.4273160 (n)
				log $\left\{s_1 \cos\left(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}\right)\right\}$	3.9024810 (n)
log $\Delta\lambda$	3.0028750 (n)	3 log $\Delta\lambda$	9.009(n)	log tan $\left(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}\right)$	0.5248350
log sen ϕ_m	9.7098446	log F	7.870	$\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}$	253° 22' 17.956"
log sec $\frac{\Delta\phi}{2}$	0.0000001	log b	6.879(n)	log sen $\left(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}\right)$	9.9814476 (n)
log a	2.7127197 (n)			log cos $\left(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}\right)$	9.4566126 (n)
a	-516.0832			log s_1	4.4458684
b	- .0007			cor. arc — sen	+ 4
$-\Delta\alpha$ (seg)	-516.0839			log s	4.4458688
$-\frac{\Delta\alpha}{2}$	-258.0419			s	27917.006
	— 0° 04' 18.042"				
$\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}$	253 22 17.956				
α (1 a 2)	253 17 59.914				253° 17' 59.97"
$\Delta\alpha$	+ 08 36.083				
	180 00 00.000				
α' (2 a 1)	73° 26' 35.997				73 26 36.05

Valores [illegible] por k angula

RESUMEN FINAL

VERTICE	LATITUD	LONGITUD	VERTICES VISADOS	DISTANCIA	LOG s	AZIMUT	AZIMUT INVERSO
LUCERO	30°41'20".645	106°41'24".044	CHILE	34 265.40	4.5348559	71°43'24".04	251°33'01".62
			CABALLO	39 430.03	4.5958271	109°21'03".67	289°09'08".17
			ALMIRES	23 445.09	4.3700519	153°34'15".03	333°30'53".97
ALMIRES	30°52'42".238	106°47'56".889	CABALLO	27 917.02	4.4458691	73°26'36".05	253°17'59".97
			CHILE	38 677.37	4.5874570	34°33'33".97	214°40'37".90
			LUCERO	23 445.09	4.3700519	333°30'53".97	153°34'15".03
CABALLO	30°48'22".821	107°04'43".531	CHILE	24 263.83	4.3849594	348°42'54".52	168°44'25".51
			LUCERO	39 430.03	4.5948271	289°09'08".17	109°21'03".67
			ALMIRES	27 917.02	4.4458691	253°17'59".97	73°26'36".05
CHILE	30°35'30".095	107°01'45".318	LUCERO	34 265.40	4.5348558	251°33'01".62	71°43'24".04
			ALMIRES	38 677.37	4.5874570	214°40'37".90	34°33'33".97
			CABALLO	24 263.83	4.3849594	168°44'25".51	348°42'54".52

CAPITULO IV

DENSIFICACION DEL CONTROL

Mediante la introducción de instrumentos electromagnéticos medidores de distancias aparecen nuevos métodos como son las poligonales geodésicas y las trilateraciones topográficas y geodesicas.

Las trilateraciones geodésicas sirven para cubrir una zona por medio de una serie de puntos o vértices geodésicos ligados entre sí por visuales directas que forman figuras geométricas triangulares, cuya resolución fija sus posiciones. Para realizar la fijación se miden las longitudes de los lados de cada uno de los triángulos, lo cual servirá para la determinación angular. Con estos datos y los de orígen (φ, λ y h) se obtienen las posiciones geodésicas de cada vértice con relación al Ecuador y al Meridiano de Greenwich, así como sus altitudes con relación al nivel medio de los océanos.

Hay varias clases de trilateraciones de acuerdo a las figuras que se formen:

a) Triángulo.

b) Cuadrilátero con dos diagonales.

c) Cuadrilátero con punto central.

d) Pentágono con punto central.

e) Exágono con punto central.

Los cuatro últimos se utilizan para levantamientos geodésicos de Primer Orden.

Para emplear métodos directos o indirectos (Fotogramétricos) en la construcción de cartas geográficas base, es necesario contar con un control terrestre adecuado a partir de vértices o puntos geodésicos.

De la información geodésica de cada área se deriva el sistema que ha de emplearse para establecer el control terrestre:

A. Propagación.

B. Extensión.

C. Densificación.

A. Propagación: es el proceso que permite transportar las posiciones geodésicas a través de grandes áreas, por medio de triangulaciones geodésicas (medidas angulares).

B. Extensión: es el proceso que se apoya en el método de propagación, permitiendo extender el control geodésico a través de áreas limitadas por triangulaciones. La extensión se lleva a cabo por medio de trilateraciones.

La introducción de aparatos electrónicos para medir distancias, requiere la utilización de ecuaciones especiales para la compensación de redes formadas por figuras rígidas de trilateraciones.

C. Densificación: es la compactación de puntos necesarios para establecer un control, es decir el cociente que resulta de dividir el número total de vértices geodésicos entre la superficie en kilómetros cuadrados que cubren.

En este sistema se emplean como auxiliares poligonales apoyadas, intersecciones y resecciones.

Actualmente se sigue investigando sobre los procesos del método moderno de las trilateraciones, el cual consiste primordialmente en la medida de los tres lados de un triángulo, así como de las distancias cenitales.

El Servicio Geodésico Interamericano ha llevado a cabo estudios y trabajos geodésicos, de los cuales se han derivado especificaciones para levantemientos geodésicos, destinados a satisfacer los requisitos de Primer Orden, consecuencia del uso de instrumentos electromagnéticos para medir distancias. Las especificaciones son:

1. Las trilateraciones deben iniciarse y cerrarse sobre triangulaciones de Primer Orden o sobre estaciones de poligonales de Primer Orden ya existentes.

2. El proyecto de trilateración debe incluir observaciones de control azimutal y el error probable de una dirección compensada utilizada para control azimutal, pocas veces debe exceder de $\pm 0\overset{''}{.}6$.

3. El problema del trazado de una trilateración de Primer Orden, no puede tomarse en cuenta en forma tan casual como se haría con otro tipo de levantamientos de Primer Orden.

4. La figura básica de la trilateración es el exágono regular, midiéndose sus lados y todas sus diagonales. No existe ninguna guía para indicar la fuerza de una figura, pero la norma principal es la regularidad o simetría de la figura.

5. Las trilateraciones no presentan condiciones geométricas que permitan el suficiente refuerzo interno, a menos que se empleen figuras complejas.

La propagación, la extensión y la densificación sirven para propagar el control terrestre a partir de las triangulaciones geodésicas o de las poligonales. En el capítulo anterior se realizó el cálculo de una triangulación, por lo que en este capítulo se hará el de una poligonal geodésica.

CALCULO DE UNA POLIGONAL GEODESICA.

Los Datos Origen son:

Latitud de t_1 = 30°21' 19".777 norte

Longitud de t_1 = 106°57' 33".839 oeste

Latitud de t_2 = 30°24' 34".418 norte

Longitud de t_2 = 106°37' 27".739 oeste

Azimut t_1-t_2 = 259°22' 18".04

Azimut t_2-t_1 = 79°22' 28".05

Angulos:			Distancias:				
t_1	=	28°17' 05".66	t_1	–	A	=	7 033.569
A	=	170°57' 17".91	A	–	B	=	4 931.745
B	=	211°17' 32".67	B	–	C	=	7 130.327
C	=	193°53' 25".10	C	–	D	=	7 196.845
D	=	88°59 58".26	D	–	E	=	4 805.190
E	=	184°27' 09".20	E	–	F	=	4 075.511
F	=	163°41' 44".64	F	–	G	=	11 524.097
G	=	189°34' 47".27	G	–	H	=	7 596.936
I	=	52°21' 52".40	H	–	I	=	7 713.718
t_2	=	203°08' 34".58	I	–	t_2	=	12 371.765

Teniendo los ângulos se calcula la deflexión, de la siguiente manera: Si el ángulo es menor de 180° permanece igual pero si el ángulo es mayor de ese valor se resta de él siendo el resultado negativo.

Ya que se tienen las deflexiones se procede a calcular los azimutes, para lo cual se suma o resta según el signo que tenga cada deflexión, al primer azimut y después al zimut calculado y así sucesivamente. Sin embargo al llegar al último azimut va a haber una diferencia, la cual es el error de azimut, resultado que se coloca en la columna No. 9 de la planilla de cálculo.

En la columna No. 2 se coloca el logaritmo de la distancia, el logaritmo coseno del azimut calculado y el coeficiente B, que se obtiene mediante tablas, y se realiza la suma.

En la columna No. 3 se coloca el antilogaritmo de la columna No. 2, el valor que se obtenga está dado en segundos por lo que si es necesario se convierte a minutos, además se debe tomar en cuenta el signo del coseno del azimut.

En la columna No. 4 se calcula por medio de la latitud dada y de la columna No. 3, una latitud preliminar y después la latitud media.

En la columna No. 5 se calcula la convergencia, se coloca el producto del logaritmo de la distancia por el logaritmo seno del azimut, en el siguiente renglón se coloca el coeficiente A, que se busca por medio de tablas utilizando la latitud media por el logaritmo tangente de la latitud media, se suman y se obtiene el antilogaritmo con el signo dado por el seno de la latitud.

En la columna No. 6 se coloca la suma de la convergencia el primer renglón tendrá 0' 00"; el siguiente será la suma de los términos anteriores y así sucesivamente.

Para tener la columna No. 7 se calcula antes el error unitario por medio del error del azimut y así se obtiene el primer valor que se coloca en el primer espacio y que es la corrección angular, este valor es acumultivo por lo que en el último espacio se tendrá el valor total del error.

En la columna No. 8 se coloca la suma de la convergencia más la corrección angular.

En la columna No. 10 se calcula el azimut corregido, el cual se obtiene sumando la columna No. 8 y el zimut preliminar.

En la columna No. 11 se calcula el azimut medio, el cual se obtiene mediante la semisuma del azimut preliminar más el azimut corregido.

Las columnas Nos. 13 y 14 son, respectivamente, el coseno y el seno del azimut medio; estas columnas se obtuvieron mediante el empleo de tablas de funciones naturales y por medio de una calculadora electrónica.

En la columna No. 15 se calcula el factor de latitud por medio de las tablas correspondientes, para obtener este factor se utiliza la latitud media preliminar, siendo suficiente utilizar hasta minutos.

La columna No. 16 da la latitud calculada, para lo cual se inicia con la latutud dato y teniendo en cuenta el signo que resulta de multiplicar la distancia por el coseno del azimut medio y eso dividiendolo por el seno de 1", el resultado da en segundos, por lo que si es necesario debe convertirse a minutos. Cuando se llega a la otra latitud dato se observa que no es la misma por lo que se tiene un error en la latitud, el cual se divide por la suma de las distancias, para obtener el error unitario y éste se multiplica por cada una de las distancias para obtener la corrección.

En la columna No. 17 se coloca la corrección parcial en el primer renglón y en el segundo la corrección acumulativa que es la que se suma o resta a la latitud calculada.

En la columna No. 18 se coloca la latitud compensada, la cual se obtiene mediante la suma algebraica de la corrección y de la latitud calculada.

En la columna No. 19 se coloca en el primer renglón la latitud media compensada, la cual se obtiene mediante la semisuma de la latitud compensada y la latitud calculada; en el segundo renglón se coloca el factor de longitud, el cual se obtiene mediante tablas y con la latitud compensada media hasta centésimas de segundos. El valor que se obtiene de la interpolación se multiplica por la distancia para obtener el factor de escala.

El factor de escala es el dividendo del producto de la distancia por el seno del azimut medio, respetando el signo del seno, el valor que resulta está dado en segundos lo que es necesario convertirlo a minutos, ese valor se suma algebraicamente a la longitud dato para obtener la longitud del siguiente vértice y así sucesivamente hasta llegar a la longitud calculada del último vértice, el cual es dato también, estos valores no coinciden por lo que se restan para encontrar el error en longitud, este se divide entre la suma de las distancias y el valor que se tenga es el error unitario. Esto se coloca en la columna No. 20.

La columna No. 21 contiene la corrección en longitud, la cual se obtiene multiplicando el error unitario por cada una de las distancias, el resultado se coloca en el primer renglón y en el siguiente el acumulativo.

En la columna No. 22 se coloca la longitud compensada, la cual se obtiene sumando algebraicamente el error acumulativo más la longitud calculada.

Dentro de las comprobaciones se pueden colocar el error lineal y la precisión que se tuvo en todo el desarrollo de la poligonal geodésica; para obtener cada uno de éstos se procedió de la siguiente manera:

$$\text{Error lineal} = \left[(\varphi \text{ en metros})^2 + (\lambda \text{ en metros})^2 \right]^{1/2}$$

$$\varphi \text{ en metros} = (30.792875 \times 0''.022)^2$$

$$\lambda \text{ en metros} = (26.71173553 \times 0''.006)^2$$

Para convertir en metros a la latitud y a la longitud se emplean las sumas de los factores y se multiplican por el error de cada uno de ellas, el resultado se eleva al cuadrado y los valores se suman y al resultado se le extrae raíz cuadrada. Todo esto se hizo mediante el empleo de calculadora electrónica.

En la calculadora se coloca el número al que se le va a extraer raíz cuadrada y se guarda en la memoria 1, después se escoge un número probable que sea el resultado y se guarda en la memoria 11, después se divide la memoria 1 entre la 11, el resultado se divide entre dos y se obtiene un nuevo valor el cual se guarda en la memoria y se divide entre dos, obteniéndose otro nuevo valor, operación que se realiza hasta obtener un mismo valor dos veces, y ese valor será el resultado de la raíz cuadrada.

TABLA No. IV

(8)

ESTACIÓN DE / A	S / Cos Az / B	−Δφ / Δφ''	φ / φm	Convergencia ΔC	Σ conver	corr ω	corr Az / Σ correcciones	Deflexión / Az preliminar / Az de triangulación T_1-T_2	Az corr. (Az Direc.)	Azm (Az + $\frac{\Delta S}{2}$)	distancia red	coseno Az	seno Az	Factor de latitud	Latitud calculada / −Δφ / φ+Δφ / φ de T_1
T_1 / T_2			30° 21' 19.77					259 22 12.04							30 21 19.77
T_1 / A	[illegible]	−69".8 −1' 09.37	30° 20' 11 30° 20 45.9	[illegible] (+) +2' 00".[illegible]	0' 00".00	0".57	+0.570	+ 28 17 05.66 287 39 23.70	287 39 24.280	287° 40' 27".699	7033.569	.303[illegible]	.952797462	30.792733	− 1 09.348 30 20 10.429
A / B	[illegible]	−22".91 − 24.00	30° [illegible] 43 30° 19 57.0	[illegible] (+) +1' 33".190	+2' 06".199	1".16	2.01959	− 09 02 42.09 278 36 41.61	278° 38' 49.569	278° 39' 38".404	4931.345	.150569067	.988599492	30.792867	− 29.115 30 19 46.314
B / C	[illegible]	−197.9 −2' 29"	30° [illegible] 30° 17 32.5	[illegible] (+) +2' 27".216	+3' 38.910	1".90	5'.40".129	+ 31 17 32.67 309 59 14.28	309° 57' 55".009	309° 58' 46".647	9130.327	.642515107	.766272788	30.792700	− 2 28.380 30 17 17.934
C / D	[illegible]	−188.6 −3' 09"	30° [illegible] 00 30° 15 41.9	[illegible] (+) +1' 28.138	+5' 22".256	2.781	5 24.516	+ 13 53 25.10 323 47 39.38	323° 53' 07.966	323° 58' 46.[illegible]	8196.745	.807944308	.589251154	30.792533	− 3 08.139 30 14 08.701
D / E	[illegible]	−94.36 +1' 34"	30° [illegible] 43 30° 14 56.0	[illegible] (+) +1' 17".116	+6' 43.414	2.901	6 45.340	− 91 00 01.74 232 47 37.64	232° 54' 22".664	232° 54' 59.022	4115.140	.602929735	.797786504	30.792467	+ 1 34.[illegible] 30 15 42.[illegible]
E / F	[illegible]	+71.60 +1' 12"	30° [illegible] 55 30° 12 19.0	[illegible] (+) +1' 08".[illegible]	+7' 54.530	3.481	7 58.010	+ 4 27 09.30 233 14 46.84	237° 22' 44".160	237° 23' 17".199	4035.511	.538945670	.842340516	30.792533	+ 1 11.3381 30 16 54.1[illegible]
F / G	[illegible]	+282.7 +4' 42"	30° 21 38 30° [illegible] 16.5	[illegible] (+) +2' 22".339	+8' 59".184	4.0[illegible]	9 03.219	− 16 18 15.36 220 56 31.48	221° 05' 34.709	221° 06' 46".098	14524.097	.753416464	.657543630	30.792867	+ 4 41.96[illegible] 30 21 36.09[illegible]
G / H	[illegible]	+156.8 +2' 37	30° 24 19 30° 22 56.3	[illegible] (+) +1' 31.078	+11' 21".933	4.6[illegible]	11 26.583	+ 9 34 47.21 230 31 11.69	230° 41' 45".233	230° 43' 46".816	7596.936	.633002566	.774149680	30.793100	+ 2 36.16[illegible] 30 24 12.[illegible]
H / I	[illegible]	+250.1 +4 10	30° 28 35 30° 26 20	[illegible] (+) +0' 03".310	+13' 13".018	5.2[illegible]	13 18.269	− 47 39 51.31 182 51 47.35	183° 05' 05".629	183° 05' 09".2[illegible]	7713.718	.998544436	.053133307	30.793333	+ 4 10.1[illegible] 30 28 22.3[illegible]
I / T_2	[illegible]	−229.1 −3' 49".1	30° 29 36 30° 26' 30.9	[illegible] −3' 19".032	+13' 20".321	5.7[illegible]	13 26.199	−127 38 07.60 55 13 39.78	55° 23' 05.923	55° 25' 29".408	12 331.865	.567086897	.823382433	30.793017	− 3 47.9[illegible] 30 24 34.3[illegible]
T_2 / T_1					+10' 09".308	6.3[illegible]	10 13.690	24 08 34.58 34 22 14.36 + 10 03.302 74 32 31.662 74 32 21.090 Dif. [illegible]	74° 32' 21.050	74° 32' 21.0[illegible]	74331.303			Σ=307.928250 Promedio=30.792825	φ T_1 = 30 21 19.7[illegible] Error − 0".0[illegible]
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

$\frac{-0.022}{74331.303}$ = −0.0000003[illegible]

TABLA No. IV

(2)

Deflexión Az preliminar de triangulación T_1-T_2	Az corr (Az Direc.)	Azm (Az De $\frac{\Delta S}{2}$)	distancia (m)	coseno Az	seno Az	Factor de latitud	Latitud calculada $\Delta\phi$; $\phi+\Delta\phi$	Lat. corr para cerrar	Latitud compensada	Lat media como factor de longitud	Longitud calculada $\Delta\lambda$; $\lambda+\Delta\lambda$	Long corr para cerrar	Longitud compensada	Nombre de Estación	N O T A S
259 22 18.04							ϕ de T_1 30 21 19.33		30 21 19.333		λ T_1 106 53 33.839		106 53 33.839	T_1	
+ 28 17 05.66 287 39 23.70	287 39 24.180	287° 40' 27."684	7033.569	.303600632	.952797462	30.792733	− 1 09.348 30 20 10.429	+.002 +.002	30 20 10.431	30 20 45.104 26.30826310	− 4 10.912 106 53 22.927	−.0041 −.001	106 53 22.926	A	Error lineal: $[(\phi m -)^2+(\lambda m -)^2]^{1/2}$
− 09 02 42.09 278 36 41.61	278° 38' 49.549	278° 39' 38."684	4431.745	..50569067	.911599492	30.792867	− 29.115 30 19 46.314	+.001 +.004	30 19 46.318	30 19 58.374 26.31258687	− 3 02.519 106 50 20.408	−.006 −.0071	106 50 20.401	B	ϕm = 30.792815 × 0.022 = (0.677493251)^2 λm = 26.31173353 × 0.006 = 0.1682...
+ 31 13 32.67 309 54 .4 28	309° 57' 35.009	309° 58' 40."649	9130.327	.642515147	.766272988	30.792700	− 2 28.780 30 17 17.534	+.002 +.006	30 17 17.540	30 18 31.949 26.71889962	− 3 24.491 106 46 55.917	−.001 −.0002	106 46 55.915	C	Error lineal: .45193520 + .0256... = √ ...
+ 13 53 25.10 323 47 39.38	323° 51' 01.964	325° 58' 46.0...	9196.845	.807944308	.589251154	30.792533	− 3 08.139 30 14 08.7021	+.002 +.008	30 14 08.709	30 15 43.124 26.23160950	− 2 31.644 106 44 17.273	−.000 −.002	106 44 17.271	D	error lineal: .69214366
− 91 00 01.74 232 47 37.64	232° 54' 22.060	231° 54' 59.082	4185.190	.602419735	.797856504	30.792467	+ 1 34.098 30 15 42.794	+.001 +.004	30 15 42.805	30 14 55.157 26.23513358	− 2 23.383 106 41 53.890	−.002 −.003	106 41 53.111	E	$P = \frac{E}{\Sigma d}$ = $\frac{.69213366}{74339.103}$
+ 4 27 54.20 233 14 46.19	237° 22' 44.160	237° 23' 17."199	4075.511	.538945670	.842340516	30.792533	+ 1 11.341 30 16 54.147	+.001 +.010	30 16 54.147	30 16 18.471 26.22895010	− 2 08.436 106 39 45.454	−.00[illegible] −.003	106 39 45.451	F	
− 16 18 15.36 220 56 3.47	221° 05' 34.709	221° 06' 46."096	14534.097	.753416464	.657543630	30.792167	+ 4 41.963 30 21 36.090	+.003 +.014	30 21 36.104	30 19 15.120 26.71564633	− 4 43.637 106 35 01.815	−.001 −.004	106 35 01.811	G	Precisión = $\frac{1}{106823}$
+ 9 34 47.21 230 31 18.69	230° 41' 45."238	230° 43' 40."116	7596.936	.633002566	.774149680	30.793100	+ 2 36.167 30 24 12.2[illegible]	+.002 +.016	30 24 12.233	30 22 54.188 26.69912211	− 3 40.336 106 31 21.539	−.001 −.005	106 31 21.534	H	
− 47 39 31.31 182 51 47.38	183° 05' 05."629	183° 05' 09."278	7713.718	9975 49936	.053133307	30.793333	+ 4 10.136 30 28 22.393	+.002 +.018	30 28 22.411	30 26 17.342 26.68336789	− 15.567 106 31 05.977	−.002 −.005	106 31 05.972	I	
− 123 38 07.60 55 13 39.78	55° 27' 05.423	55° 28' 29."[illegible]	12 371.965	.567416896	.823382431	30.793417	− 3 47.9[illegible]3 30 24 34.3[illegible]	+.00[illegible] +.0[illegible]	30 24 34.417	30 26 28.419 26.68293258	+ 6 21.764 106 37 27.745	−.001 −.006	106 37 27.739	T_2	
24 08 34.51 79 22 14.36 18 07.301 77 32 51.862 00.312	79° 32' 21.050	79° 32' 22 [illegible]	74339.103			Σ = 369.512350 Promedio = 30.792279	ϕT_2 = 30 24 34.3[illegible] error − 0".022			Σ = 369.11733... Prom = 26.31173353	106 37 27.739 error + 0.006				
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

$= \frac{-0.022}{74339.103} = -.00000...$

$\frac{.006}{74339.103} = .0000000806[illegible]$

CALCULO DISTANCIA EN EL ESFEROIDE

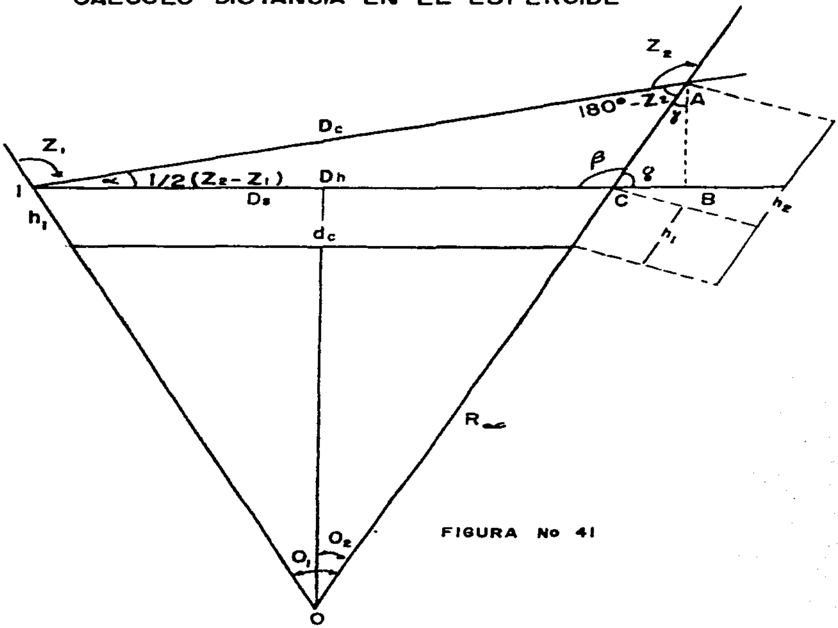


FIGURA No 41

O = Centro de la Tierra.

Z_1 y Z_2 = Distancias cenitales de los puntos 1 y 2.

rm = Radio Medio.

h_1 y h_2 = Altitud de los puntos 1 y 2.

Dc = Distancia inclinada medida con aparatos como el Geodímetro y el Telurómetro corregida por refracción.

dh = Distancia horizontal a la altura del punto 1.

dc = Distancia horizontal al nivel del mar.

Para determinar:

$$\alpha = 180° - (\beta + 180° - Z_2)$$

$$\alpha = 180° - \beta - 180° - Z_2$$

$$\alpha = Z_2 - \beta$$

$$\beta = 180° - (\alpha + 180° - Z_2)$$

$$\beta = 180° - \alpha - 180° + Z_2$$

$$\beta = Z_2 - \alpha$$

$$\varphi = Z_2 - (180° - Z_1)$$

$$\varphi = Z_2 - 180° + Z_1$$

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} (Z_2 - Z_1) - 90° = \gamma$$

$$\delta = 90° - \gamma$$

$$\delta = 90° - \frac{1}{2} (Z_2 - Z_1) - 90°$$

$$\delta = 180° - \frac{1}{2} (Z_2 - Z_1) = 180° - \frac{Z_2 - Z_1}{2}$$

$$\alpha = 180° - (\beta + 180° - Z_2)$$

$$\alpha = 180° - \beta - 180° + Z_2)$$

$$\alpha = - (180° - \beta) + Z_2$$

$$\alpha = - 180° - \left[(180° - \frac{1}{2} (Z_2 - Z_1) \right] + Z_2$$

$$\alpha = - 180° - 180° + \frac{1}{2} (Z_2 + Z_1) + Z_2$$

$$\alpha = -\left[180° + 180° - \frac{1}{2} (Z_2 + Z_1) \right] + Z_2$$

$$\alpha = - \frac{1}{2} (Z_2 + Z_1) + Z_2$$

$$\alpha = Z_2 - \frac{1}{2} (Z_2 + Z_1)$$

$$\alpha = \frac{2\ Z_2}{2} - \frac{Z_2}{2} - \frac{Z_1}{2}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} (Z_2 - Z_1)$$

$$\beta = 180° - (\alpha + 180° - Z_2)$$

$$\beta = 180° - \frac{1}{2} (Z_2 - Z_1) + 180° - Z_2$$

$$\beta = 180° - \frac{Z_2}{2} - \frac{Z_1}{2} + 180° - \frac{2\ Z_2}{2}$$

$$\beta = 180° - \frac{2\ Z_2}{2} + \frac{Z_1}{2} - 180° + \frac{2\ Z_2}{2}$$

$$\beta = \frac{Z_2}{2} + \frac{Z_1}{2} \quad ; \quad B = \frac{1}{2} (Z_2 + Z_1)$$

$$\text{sen}\, \alpha = \frac{AB}{DC} \quad ; \quad AB = Dc \ \text{sen}\, \alpha$$

$$AB = Dc \ \text{sen}\, \frac{Z_2 - Z_1}{2} \quad ; \quad AB = Dc \ \text{sen}\, \frac{1}{2} (Z_2 - Z_1)$$

$$\beta = 90° + \gamma$$

LEY COSENOS

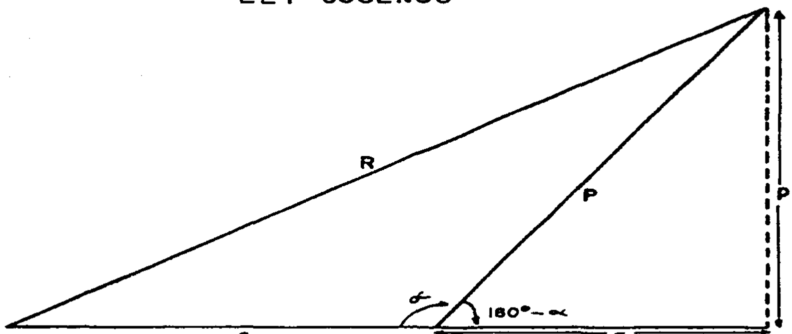


FIGURA No 42

$$\cos \quad 180° - \alpha = \frac{q}{p}$$

$$q = P \cos (180° - \alpha)$$

$$p = P \operatorname{sen} (180° + \alpha)$$

$$q = - P \cos \alpha$$

$$p = P \operatorname{sen} \alpha$$

Por Trigonometría se tiene:

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = - \cos \beta$$

$$\operatorname{sen} (\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cos \alpha = + \operatorname{sen} \beta$$

$$R^2 = (Q - P \cos \alpha)^2 + (P \operatorname{sen} \alpha)^2$$

$$R^2 = Q^2 - 2QP \cos \alpha + P^2 \cos^2 \alpha + P^2 \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$R^2 = Q^2 - 2QP\cos\alpha + P^2(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha)$$

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos\alpha$$ ....Ley de los Cosenos

Aplicando esta fórmula al triángulo 1OA:

$\overline{1O} = P$, $\overline{OA} = Q$ y $Dc = R$

$\overline{O1} = rm + h_1$; $\overline{OA} = rm + h_2$

$$Dc^2 = (rm + h_1)^2 + (rm + h_2)^2 - 2(rm + h_1)(rm + h_2)\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{Dc^2 - (rm + h_1)^2 - (rm + h_2)^2}{-2(rm + h_1)(rm + h_2)}$$

$$\cos\varphi = \frac{-Dc^2 + (rm + h_1)^2 + (rm + h_2)^2}{2(rm + h_1)(rm + h_2)}$$

$$\varphi = \frac{Ds}{rm} \; ; \quad Ds = \varphi\, rm$$

$$Ds = rm \text{ arco cos } \frac{(rm + h_1)^2 + (rm + h_2)^2 - Dc^2}{2(rm + h_1)(rm + h_2)} \quad \ldots\ldots(1)$$

Con la ecuación (1) se determina la distancia geodésica.

DETERMINACION DEL DESNIVEL:

$h_2 - h_1$ = Desnivel entre los 2 puntos = $\overline{AC}$

$$\frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{Dc}{\operatorname{sen}\beta}$$

$$\overline{AC} = Dc \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta}$$

$$\overline{AC} = Dc \frac{\operatorname{sen} 1/2 \ (Z_2 - Z_1)}{\operatorname{sen} 1/2 \ (Z_2 + Z_1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

EJEMPLO: Se ha medido una distancia con telurómetro, corrigiéndose por refracción, d = 55 245.84 metros; con una altitud en 1 igual a 234.51 metros; altitud en 2 = 3 893.76 metros; teniendo un radio de curvatura medio de 6 895 748.74 metros. Determinar la distancia geodésica que separa a los dos puntos.

DATOS:

$rm = 6\ 895\ 748.74$ m.

$h_1 = 234.51$ m.

$h_2 = 3\ 893.76$ m.

$Dc = 55\ 245.84$ m.

ECUACION:

$$Ds = rm \text{ arco cos } \frac{(rm + h_1)^2 + (rm + h_2)^2 - Dc}{2(rm + h_1)\ (rm + h_2)}$$

$$Ds = 6\ 895\ 748.74 \text{ arco cos } \frac{(6895748.74 + 234.51)^2 +}{2(6895748.74 + 234.51)}$$

$$\frac{(6895748.74 + 3893.76)^2 - (55245.84)}{(6895748.74 + 3893.76)}$$

$$Ds = 6895748.74 \text{ arco cos } \frac{(6895983.25)^2 + (6899642.50)^2 - (55245.84)^2}{2(68955983.25)\ (6899642.50)}$$

$$\begin{aligned}
2 \log 6895983.25 &= 6.8385962 \\
&\ \underline{\ x\qquad\quad 2} \\
\text{antilog} &= 13.6771924 = 47554582417582.41
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 \log 6899642.50 &= 6.8388266 \\
&\ \underline{\ x\qquad\quad 2} \\
\text{antilog} &= 13.6776532 = 47605065934065.93
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 \log 55245.84 &= 4.7422996 \\
&\ \underline{x\qquad\quad 2} \\
\text{antilog} &= 9.4845992 = 3052102816.90
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rr}
 & 47554582417582.41 \\
+ & \underline{47605065934065.93} \\
 & 95159648351648.34 \\
- & \underline{3052102816.90} \\
\text{num} = & 95156596248831.44
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcr}
\log 2 & = & 0.3010300 \\
\log\ 895983.25 & = & 6.8385962 \\
\log\ 6899642.5 & = & \underline{6.8388266} \\
\log \text{ denom.} & = & 13.9784528 \\
\text{colog} & = & 14.0215472
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcr}
\log \cos & = & 9.9999861 \\
\log rm & = & \underline{6.8385815} \\
\log Ds & = & 6.8385676
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcrl}
\log rm & = & 6.8385815 & \\
\log O=1650'' & = & 3.2174839 & \\
\log \text{sen } 1'' & = & \underline{4.6855749} & -\ 10 \\
\log Ds & = & 4.7416403 & \\
Ds & = & 55\ 162.037 & \text{metros.}
\end{array}$$

<u>Cálculo del Desnivel</u>:

DATOS:

$Z_2 = 90°58'45''$

$Z_1 = 89°04'23''$

$Dc = 55\ 245.84$ metros.

Ecuación:

$$\overline{AC} = Dc \frac{\text{sen } 1/2 \ (Z_2 - Z_1)}{\text{sen } 1/2 \ (Z_2 + Z_1)}$$

$$\overline{AC} = 55245.84 \frac{\text{sen } 1/2 \ (90°58'45" - 89°04'23")}{\text{sen } 1/2 \ (90°58'45" + 89°04'23")}$$

$$\overline{AC} = 55245.84 \frac{\text{sen } 1/2 \ (1°54'22")}{\text{sen } 1/2 \ (180°03'08")}$$

log sen 0°57'11".5 = 8.2210386

log sen 89°58'26" = 9.9999999

colog = 0.0000001

log num.	=	8.2210386
colog denom.	=	0.0000001
		8.2210387
log 55245.84	=	4.7422996
log $\overline{AC}$	=	2.9633383
$\overline{AC}$	=	919.04 metros.

COMPENSACION DE LOS DESNIVELES POR EL METODO DE MINIMOS CUADRADOS.

Si se tienen los desniveles, se deben compensar por el método que hasta ahora es el más preciso, es el llamado de Mínimos Cuadrados.

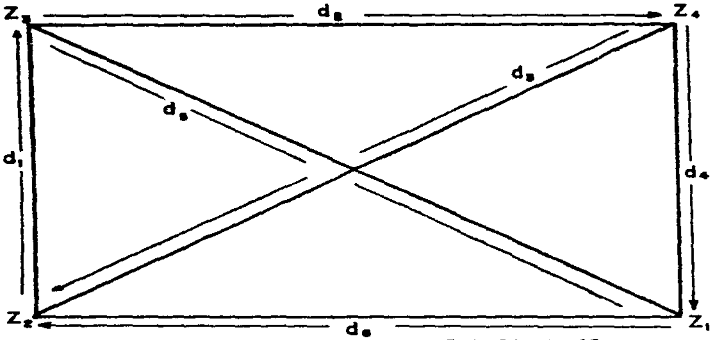


FIGURA No 43

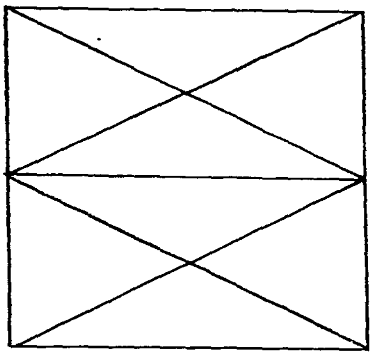


FIGURA No 44

$$Z_1 = Z_1 \qquad\qquad Z_2 = Z_2$$
$$Z_3 = Z_2 + d_1 + V_1 \qquad\qquad Z_4 = Z_3 + d_2 + V_2$$
$$Z_4 = Z_3 + d_4 + V_4 \qquad\qquad Z_3 = Z_1 + d_5 + V_5$$
$$Z_4 = Z_2 + d_3 + V_3$$

La suma de los desniveles debe ser igual a cero.

Ecuaciones de condición:

$$d_1 + d_2 + d_4 + d_6 = 0$$
$$d_1 - d_5 + d_6 = 0$$
$$-d_3 + d_4 + d_6 = 0$$

$$d_1 + V_1 + d_2 + V_2 + d_4 + V_4 + d_6 = 0 \;\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$d_1 + V_1 - d_5 - V_5 + d_6 = 0 \;\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$-d_3 - V_3 + d_4 + V_4 + d_6 = 0 \;\ldots\ldots\ldots (3)$$

(1) $V_1 + V_2 + V_4 = M_1$; $M_1 = -d_1 - d_2 - d_4 - d_6$

(2) $V_1 - V_5 = M_2$; $M_2 = -d_1 + d_5 - d_6$

(3) $-V_3 + V_4 = M_3$; $M_3 = d_3 - d_4 - d_6$

Notación de Gauss; las ecuaciones siguientes resultan de la Teoría de los Errores.

$$[aa]\, K_1 + [ab]\, K_2 + [ac]\, K_3 = M_1$$
$$[ab]\, K_1 + [bb]\, K_2 + [bc]\, K_3 = M_2$$
$$[ac]\, K_1 + [bc]\, K_2 + [cc]\, K_3 = M_3$$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	M
a	1	1	0	1	0	M_1
b	1	0	0	0	−1	M_2
c	0	0	−1	1	0	M_3

$$[aa] = 3 \qquad [ab] = 1 \qquad [ac] = 1$$

$$[bb] = 2 \qquad [bc] = 0 \qquad [cc] = 2$$

$$3K_1 + K_2 + K_3 = M_1 \qquad K_1 = \frac{2M_1 - M_3 - M_2}{4}$$

$$K_1 + 2K_2 = M_2 \qquad K_2 = \frac{5M_2 + M_3 - 2M_1}{8}$$

$$K_1 + 2K_3 = M_3 \qquad K_3 = \frac{5M_3 + M_2 - 2M_2}{8}$$

$$K_1 = \frac{\begin{vmatrix} M_1 & 1 & 1 \\ M_2 & 2 & 0 \\ M_3 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{4M_1 - 2M_3 - 2M_2}{12 - 2 - 2} = \frac{2M_1 - M_3 - M_2}{4}$$

$$K_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & M_1 & 1 \\ 1 & M_2 & 0 \\ 1 & M_3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{6M_2 + M_3 - M_2 - 2M_1}{12 - 2 - 2} = \frac{5M_2 + M_3 - 2M_1}{8}$$

$$K_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & M_1 \\ 1 & 2 & M_2 \\ 1 & 0 & M_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{6M_3 + M_2 - 2M_1 - M_3}{12 - 2 - 2} = \frac{5M_3 + M_2 - 2M_1}{8}$$

$$V_1 = a_1K_1 + b_1K_2 + c_1K_3 = K_1 + K_2$$
$$V_2 = a_2K_1 + b_2K_2 + c_2K_3 = K_1$$
$$V_3 = a_3K_1 + b_3K_2 + c_3K_3 = -K_3$$
$$V_4 = a_4K_1 + b_4K_2 + c_4K_3 = K_1 + K_3$$

$$V_5 = a_5K_1 + b_5K_2 + c_5K_3 = -K_2$$

$$V_1 = \frac{4M_1 - 2M_2 - 2M_3 + 5M_2 + M_3 - 2M_1}{8} = \frac{2M_1 + 3M_2 - M_3}{8}$$

$$V_1 = 1/8\ (2M_1 + 3M_2 - M_3)$$
$$V_2 = 1/4\ (2M_1 - M_2 - M_3)$$
$$V_3 = 1/8\ (5M_1 + M_2 - 2M_1)$$
$$V_4 = \frac{4M_1 - 2M_2 - 2M_3 + 5M_3 + M_2 - 2M_1}{8} = \frac{2M_1 - M_2 + 3M_3}{8}$$
$$V_4 = 1/8\ (2M_1 - 2M_2 + 3M_3)$$
$$V_5 = -1/8\ (5M_3 - M_2 + 2M_1)$$

Para probar las ecuaciones que se han deducido se muestra la figura siguiente en la cual el desnivel d_6 es la base y no debe alterarse, es decir que se compensarán los otros cinco, constituyentes de dicha figura y la base permanecerá innamovible debido a que como tal fue procesada en la figura anterior.

$$d_1 = -\ 492.714$$
$$d_2 = +\ 76.547$$
$$d_3 = +\ 415.477$$
$$d_4 = +\ 536.824$$
$$d_5 = -\ 621.800$$
$$d_6 = -\ 129.360$$

TABLA No. V

	− 492.714
	+ 76.597
	+ 415.477
3	+ 536.824
5	− 621.800
6	− 129.360

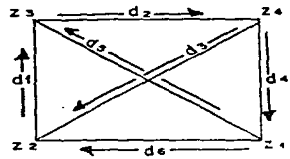


FIGURA No. 45

$M_1 = -d_1 - d_2 - d_4 - d_6$	$M_2 = -d_1 + d_5 - d_6$	$M_3 = d_3 - d_4 - d_6$	$Z_1 = 1953.450$
+ 8.703	+ 0.274	+ 8.013	$Z_2 = 1824.090$

$2M_1 = +17.406$	$2M_1 = +17.406$	$2M_1 = +17.406$	$2M_1 = +17.406$	$2M_1 = +17.406$
$3M_2 = +0.822$	$-M_2 = -0.274$	$-M_2 = -0.274$	$-M_2 = -0.274$	$-5M_2 = -1.370$
$-M_3 = -8.013$	$-M_3 = -8.013$	$-5M_3 = -40.065$	$3M_3 = +24.039$	$-M_3 = -8.013$
$8V_1 = +10.215$	$4V_2 = +9.119$	$8V_3 = -22.933$	$8V_4 = +41.171$	$8V_5 = +8.023$
$V_1 = +1.277$	$V_2 = +2.780$	$V_3 = -2.867$	$V_4 = +5.146$	$V_5 = +1.003$

$V_1 = +1.277$	$V_2 = +2.280$	$V_3 = -2.867$	$V_4 = +5.146$	$V_5 = +1.003$
$d_1 = -492.719$	$d_2 = +76.597$	$d_3 = +415.477$	$d_4 = 536.824$	$d_5 = -621.800$
$Z_2 = 1824.090$	$Z_3 = 1332.653$	$Z_4 = +1911.480$	$Z_4 = 1911.480$	$Z_1 = 1953.450$
$Z_3 = 1332.653$	$Z_4 = 1911.480$	$Z_2 = 1824.090$	$Z_1 = 1953.950$	$Z_3 = 1332.653$

ECUACIONES EMPLEADAS

$M_1 = -d_1 - d_2 - d_4 - d_6$

$M_2 = -d_1 + d_5 - d_6$

$M_3 = +d_3 - d_4 - d_6$

$V_1 = \frac{1}{8}(2M_1 + 3M_2 - M_3)$

$V_2 = \frac{1}{4}(2M_1 - M_2 - M_3)$

$V_3 = \frac{1}{8}(-5M_3 - M_2 + 2M_1)$

$V_4 = \frac{1}{8}(2M_1 - M_2 + 3M_3)$

$V_5 = \frac{1}{8}(-5M_2 - M_3 + 2M_1)$

CAPITULO V

PROYECCIONES CARTOGRAFICAS

El problema que se presenta en la construcción de cartas bases, es la representación de la superficie de la esfera en un plano (ninguna parte de la superficie de una esfera puede extenderse sobre un plano sin aumentarla o desgarrarla).

Por lo cual se debe recurrir al empleo de una figura matemática susceptible de ser desarrollada mediante cálculos matemáticos.

Se llama proyección a la representación sobre un plano de una parte o del conjunto de la superficie terrestre. Existen varias clases de proyecciones, cada una de las cuales tiene características propias, las cuales deben conocerse para poder determinar que proyección se va a utilizar, dependiendo, claro está, de los objetivos o necesidades para los cuales se elabora la carta geográfica.

La parte importante para el dibujo de una carta geográfica es la construcción de la gradícula, formada por las líneas que representan en el mapa los paralelos y los meridianos de la superficie terrestre.

Las proyecciones más utilizadas en la actualidad son:

1. Policónica con dos paralelos tipo.
2. Universal Transversa de Mercator.

1. PROYECCION POLICONICA CON DOS PARALELOS TIPOS.

En esta proyección dos paralelos, uno arriba y otro abajo del centro del mapa, se dibujan en verdadera magnitud a escala. Las magnitudes de los meridianos se conservan a escala, así es que la distancia entre dos paralelos es igual al arco rectificado de círculo meridiano que los separa en la esfera modelo; por lo tanto, la proyección es equidistante sobre los meridianos.

Los meridianos están representados por líneas convergentes en un punto, que es el vértice del cono que se considera.

Como datos para elaborar la gradícula se requieren los siguientes:

A. Radio del paralelo tipo superior en el modelo de la esfera.

B. Radio del paralelo tipo superior en la proyección.

C. Su latitud.

D. Radio del paralelo tipo inferior en el modelo de la esfera.

E. Radio del paralelo tipo inferior en la proyección.

F. Su latitud.

A continuación se ejemplifica la proyección antes mencionada.

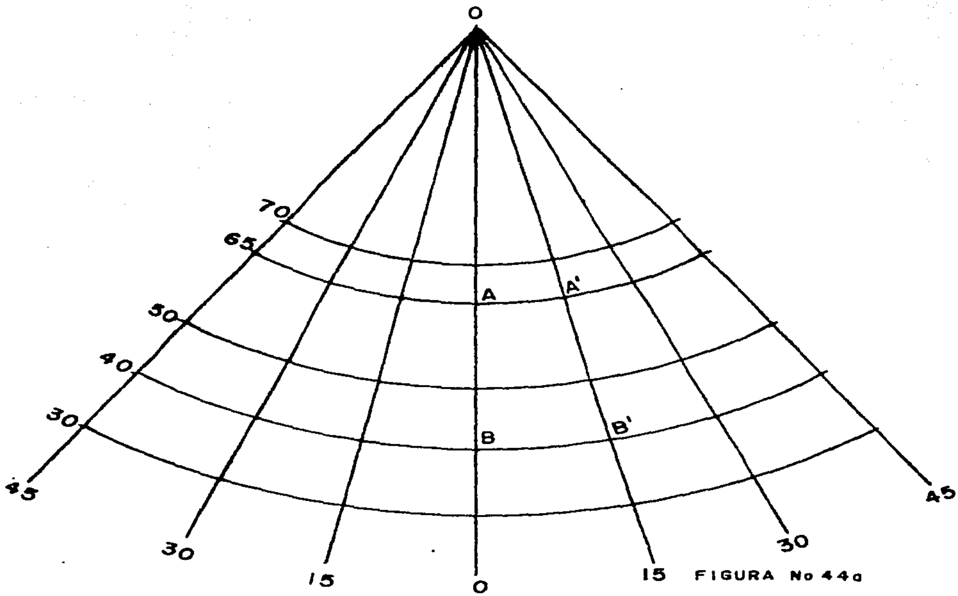


FIGURA No 44a

AA' y BB' son segmentos de los paralelos patrones, por lo tanto:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{AA'}{BB'}$$

Por la segunda condición:

$$AA' = r_s \Delta\lambda = RE \cos \varphi_s . \Delta\lambda$$
$$BB' = r_1 \Delta\lambda = RE \cos \varphi_1 \Delta\lambda$$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\cos \varphi_s}{\cos \varphi_1} \quad y \quad \frac{\overline{OA}}{\overline{OB} - \overline{OA}} = \frac{\cos \varphi_s}{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_3}$$

Por la tercera condición:

$\overline{OB} = \overline{OA} = \overline{AB} = RE(\varphi_s - \varphi_1)$ sen 1° ($\varphi_s - \varphi_1$ expresadas en grados)

$$r'_s = \overline{OA} = RE(\varphi_s - \varphi_1) \text{ sen } 1° \frac{\cos \varphi_1}{2 \text{ sen } 1/2 \ (\varphi_s + \varphi_1) \text{ sen } 1/2 \ (\varphi_s - \varphi_1)}$$

$$r'_1 = \overline{OB} = RE(\varphi_s - \varphi_1) \text{ sen } 1° \frac{\cos \varphi_1}{2 \text{ sen } 1/2(\varphi_s - \varphi_1) \text{ sen } 1/2(\varphi_s - \varphi_1)}$$

r'_s y r'_1 son los radios de los paralelos tipos.

El radio de un paralelo cualquiera en la proyección será:

$$r' = r'_s - RE(\varphi - \varphi_1) \text{ sen } 1° = RE \frac{(\varphi_s - \varphi_1) \cos \varphi_s}{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_s} - (\varphi - \varphi_s) \text{ sen } 1°$$

$$r' = RE \frac{\cos \varphi_s \ (\varphi - \varphi_1) - \cos \varphi_1 \ (\varphi - \varphi_s)}{2 \text{ sen } 1/2 \ (\varphi_s - \varphi_1) \text{ sen } 1/2 \ (\varphi_s - \varphi_1)} . \text{ sen } 1°$$

Para trazar la gradícula se tiene que dibujar primero el meridiano central y sobre de él se marcan los puntos por los que deben pasar los paralelos. Se trazan los arcos de círculo que representan a éstos y se dividen en partes iguales, por los puntos de división se hacen pasar rectas que representarán a los meridianos.

En esta proyección el polo está representado por un arco de círculo en vez de por un punto, lo que hace que las áreas y las formas sufran alteraciones de consideración en las regiones polares.

El factor de escala para los paralelos queda expresado por la relación entre la longitud de un arco de paralelo en la proyección y en la esfera. Este factor para los paralelos tipos es igual a la unidad; para los intermedios es menor que la unidad y mayor que ella en los que quedan fuera de la zona comprendida entre los paralelos tipo.

CALCULO DE LA PROYECCION POLICONICA CON DOS PARALELOS TIPO.

Se ha procedido a calcular una proyección cónica con dos paralelos tipo a la escala 1:10 000 000, para un mapa de México comprendido entre los paralelos 14°norte y 29°norte de latitud.

$$r'_1 = RE\ (\varphi_s - \varphi_1)\ \text{sen}\ 1° \quad \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_1 - \cos \varphi'_s}$$

$$n = \frac{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_s}{(\varphi_s - \varphi_1)\ \text{sen}\ 1°}$$

RE = 63.66 cm. para cada caso.

$$n = \frac{\cos 19° - \cos 29°}{10 \times 0.01745} = \frac{0.94552 - 0.87462}{0.1745} = 0.4063$$

$$r'_1 = \frac{RE \cos 19°}{0.4063} = \frac{63.66 \times 0.94552}{0.4063} = 148.15 \text{ cm.}$$

Es el radio del paralelo de 19° norte. El radio de los otros paralelos se derivan de él inmediatamente, teniendo en cuenta que, a la escala 10^{-7}, un grado de meridiano vale 1.111 cm.

Por consiguiente, el r" del círculo que representa el polo que será útil encontrar para compararlo con los resultados de los siguientes ejemplos es:

r" = 148.15 - 78.89 = 69.26 cm.

Segundo Caso: Cuando se toma en cuenta la condición "a" para fijar los paralelos tipo. Se deberá tener presente que el error absoluto en la longitud de cualquier paralelo es evidentemente la diferencia de valores de un elemento de paralelo considerado en la esfera modelo y en la proyección, diferencia expresada en la ecuación siguiente, en la que a este error se le ha llamado E.

$$E = r' \varphi - r = r' n - RE \cos \varphi$$

Sacando a como factor común:

$$E = \varphi (r' n - RE \cos \varphi)$$

Para cada uno de los tres paralelos considerados, los dos extremos y el medio, variarán únicamente en la ecuación del error abosluto, la r' y la . Encontramos, pués el valor de r' para cada paralelo, teniendo en cuenta que la latitud del paralelo extremo superior vale 34°, la del medio 24°y la del extremo interior 14°.

$$r' = r'' + z\ RE \text{ sen } 1°$$

En la que z es la colatitud en grados del paralelo que se considere y RE sen 1° el arco de meridiano correspondiente a un grado de latitud. Sustituyendo este valor de r' y los de y z correspondientes a cada uno de los paralelos considerados, en el valor de E se obtendrán los errores absolutos E_{34} , E_{24} y E_{14} que, según la condición impuesta, deben ser iguales.

$$E_{34} = n(r'' + 56\ RE \text{ sen } 1°) - RE \cos 34°$$

$$E_{24} = n(r'' + 66\ RE \text{ sen } 1°) - RE \cos 24°$$

$$E_{14} = n(r'' + 76\ RE \text{ sen } 1°) - RE \cos 14°$$

Igualando estos valores queda:

$$n(r'' + 56 \text{ RE sen } 1°) - \text{RE cos } 34° = -n(r'' + 66 \text{ RE sen } 1°) + \text{RE cos } 24°$$
$$n(r'' + 56 \text{ RE sen } 1°) - \text{RE cos } 34° = n(r'' + 76 \text{ RE sen } 1°) - \text{RE cos } 14°$$

Cuando r" esté expresado en centímetros, RE sen 1°, vale según se expresó 1.111 cm. y RE 63.66 cm.; sustituyendo estos valores queda:

$$n\, r'' + 62.216\, n - 52.777 = -n\, r'' - 73.326\, n +\text{-} 58.156$$
$$n\, r'' + 62.216\, n - 52.777 = n\, r'' + 84.436\, n - 61.769$$

De la segunda de estas ecuaciones, se obtiene:

$$n = \frac{8.992}{22.220} = 0.4046$$

Sustituyendo este valor en la primera, se tiene:

$$r'' = \frac{110.933 - 54.846}{0.8092} = 69.31 \text{ cm.}$$

Con este valor de r" se puede, por medio de la ecuación general para un radio cualquiera, obtener los valores para los diversos radios que se deseen.

Tercer Caso: Atendiendo a la condición "b". Llamando η a la diferencia entre el factor de escala de un paralelo y la unidad se tiene:

$$\eta = \frac{r'\, n}{\text{RE cos}\,\varphi} - 1 = \frac{r'\, n - \text{RE cos}\,\varphi}{\text{RE cos}\,\varphi} = \frac{\varepsilon}{\text{RE cos}\,\varphi}$$

Teniendo esto en cuenta, se puede derivar los valores de cada uno de los paralelos considerados, de los valores correspondientes de ε, obtenidos en el caso anterior, dividiéndolos respectivamente por los valores apropiados de RE cos φ. Entonces se tendrán los siguientes valores:

$$\varepsilon_{34} = \frac{n\ r'' + 62.216\ n - 52.777}{52.777}$$

$$\varepsilon_{24} = \frac{-\ n\ r'' - 73.326\ n + 58.157}{58.157}$$

$$\varepsilon_{14} = \frac{n\ r'' + 84.436\ n - 61.769}{61.769}$$

Igualando estos valores queda:

$$58.157\ nr'' + 3618.295\ n - 3069.352 = -52.777\ nr'' - 3869.926\ n + 3069.352$$

$$61.769\ nr'' + 3843.020\ n - 3259.983 = 52.777\ nr'' + 4456.279\ n - 3259.983$$

De la segunda ecuación:

$$r'' = \frac{613.259}{8.992} = 68.20 \text{ cm.}$$

Sustituyendo en la primera ecuación se tiene:

$$n = \frac{6138.704}{15053.975} = 0.4078$$

Cuarto Caso: De acuerdo con la condición "d". Igualando el valor de área, en la esfera modelo y en la proyección, de una extensión de la esfera modelo comprendida entre dos meridianos cuya diferencia de longitud sea λ y limitada por dos paralelos cualesquiera que suponemos de latitudes φ_A y φ_B respectivamente.

El área en la esfera es:

$$2 \pi RE \frac{\lambda}{360°} h, \text{ siendo } h = RE(\operatorname{sen} \varphi_B - \operatorname{sen} \varphi_A)$$

Por tanto:

$$2 \pi RE \frac{\lambda}{360°} h = 2 \pi RE^2 E^2 \frac{\lambda}{360°} (\operatorname{sen} \varphi_B - \operatorname{sen} \varphi_A)$$

Esa misma área considerada en la proyección es si llamamos r'_A y r'_B los radios de los paralelos considerados es la proyección:

$$\pi ({r'_A}^2 - {r'_B}^2) \frac{\lambda}{360°}$$

Estas dos áreas deben ser iguales:

$$2 \pi RE^2 E^2 \frac{\lambda}{360°} (\operatorname{sen} \varphi_B - \operatorname{sen} \varphi_A) = \pi \frac{\lambda}{360°} ({r'_A}^2 - {r'_B}^2)$$

en donde:

$$2E^2 R^2(\operatorname{sen} \varphi_B - \operatorname{sen} \varphi_A) = n({r'_A}^2 - {r'_B}^2) = n(r'_A + r'_B)(r'_A - r'_B)$$

Como en nuestro caso $\varphi_A = 14°$ y $\varphi_B = 34°$N.; si se sustituye en esta última ecuación los valores apropiados de r'_A y r'_B, obtenidos de la ecuación general para un radio cualquiera r' y considerando todos los valores de las distancias en centímetros, se tiene:

$$2\ (63.66)^2\ (0.55919 - 0.24192) = 22.220\ n(2\ r'' + 146.652)$$

Haciendo las operaciones indicadas:

$$2371.534 = 44.44\ n\ r'' + 3258.607\ n$$

Ahora bien, los factores de escala en los paralelos extremos serán:

$$F_{34} = n\ \frac{r'' + \text{RE sen } 1°}{\text{RE cos } \varphi} = n\ \frac{r'' + 56\quad (1.111)}{(63.66)\quad (.82904)}$$

$$F_{14} = n\ \frac{r'' + 76\quad (1.111)}{(63.66)\quad (0.97030)}$$

Resultados que deben ser iguales para satisfacer la segunda parte de la condición que se estudia, por tanto:

$$0.97030\ r'' + 60.368 = 0.82904\ r'' + 70.001$$

$$r'' = \frac{9.633}{0.14126} = 68.19 \text{ cm.}$$

Al sustituir este valor de r'' en la ecuación que resultó de igualar las áreas, para obtener el valor de n:

$$2571.534 = 6289.122\ n \text{ ; de donde:}$$

$$n = 0.4089$$

Quinto Caso: Al encontrar el valor del factor mínimo de escala, que corresponde a un paralelo comprendido entre los patrones para satisfacer la condición "d", que establece la igualdad entre las diferencias con la unidad, tanto de tal factor como de los factores correspondientes a los paralelos extremos.

El factor de escala de un paralelo cualquiera es:

$$F = \frac{n\ r''}{RE \cos \varphi}$$

Para encontrar el valor mínimo, se iguala a cero la derivada respecto a $\varphi°$.

$$\frac{dF}{d\varphi} = \frac{n\ RE \cos \varphi \frac{dr'}{d\varphi} + n\ r'\ RE \operatorname{sen} \varphi}{R^2\ E^2 \cos^2 \varphi} = \varphi$$

de donde:

$$\frac{\cos}{\operatorname{sen}} = - \frac{r'}{\frac{d\ r'}{d}}$$

$$r' = r'' + (90° - \varphi)\ RE \operatorname{sen} 1° \text{ y } \frac{dr'}{d\varphi} = - RE$$

Sustituyendo estos valores en $\dfrac{\cos \varphi}{\text{sen } \varphi}$ queda:

$$\frac{\cos \varphi}{\text{sen } \varphi} = \frac{r'' + (90° - \varphi)\ \text{RE sen } 1°}{\text{RE}} = \text{..........(1)}$$

La ecuación (1) es la condición para que el valor de F sea mínimo.

La diferencia con la unidad del factor de escala es:

$$1 - \frac{n\ r''}{\text{RE} \cos \varphi}$$

Por las condiciones impuestas, esta diferencia cuando F es mínimo, debe ser igual a los valores de ε_{34} y ε_{14}, encontrados anteriormente, al tratar el tercer caso. Así pués, las siguientes ecuaciones:

$$1 - \frac{n\ r}{\text{RE} \cos \varphi} = \frac{n\ r - 62.216\ n - 52.777}{52.777} \text{........(2)}$$

$$1 - \frac{n\ r'}{\text{RE} \cos \varphi} \qquad \frac{n\ r''\ 84.436\ n - 61.769}{61.769} \text{........(3)}$$

Las ecuaciones (1), (2) y (3) servirán para obtener los valores de n, φ y r"

Como el cálculo aritmético es largo se anotará únicamente los resultados que se obtuvieron para el ejemplo que se está determinando.

$$n = 0.408$$

$$r'' = 68.20 \text{ cm.}$$

$$\varphi = 24° \, 15' \, 54''$$

Como se observa esta latitud difiere cerca de 16° de la del paralelo central.

Al comparar el primer caso, en el que los paralelos tipor fueron escogidos de antemano; con los otros casos, en los cuales la posición de dichos paralelos quedó sujeta a determinadas condiciones, se notará que, para un mapa como el que se estudia es prácticamente indiferente seguir cualquiera de los métodos indicados, pues los diversos valores de n y r" difieren poco entre sí.

Para cartas de regiones más extensas en latitud o más alejadas del Ecuador, los errores de escala serán mayores. Para tales casos, prácticamente basta escoger los paralelos patrones de modo que la diferencia entre la latitud de cada uno de ellos y la del paralelo extremo inmediato no sea muy grande.

Se acepta generalmente que tal diferencia sea la sexta o la séptima parte de la que haya entre las latitudes extremas.

b) PROYECCION UNIVERSAL TRANSVERSA DE MERCATOR.

Primeramente se conoció como Proyección Conforme de Gauss: la cual se utilizó principalmente en navegación. Después L. Kruger, en Berlín introduce las bandas meridianas para que se conserven los ángulos en el paso del esferoide al plano y así se le denomina Proyección de Gauss-Kruger.

La proyección de Gauss es una generalización de la de Mercator, en la cual el eje del cilindro coincide con el Ecuador; se reproduce conservando su longitud el meridiano medio.

Las bandas se pueden extender cuanto sea necesario en dirección norte-sur; en cambio en la dirección este-oeste es - limitada. Estas bandas meridianas tienen 3° de longitud desde el Meridiano Medio Central o Principal; nuevamente se aplica un cilindro para evitar deformaciones laterales debido a que la distancia es mayor de 1°30' del Meridiano Central de contacto.

Las ordenadas de la red mantienen distancias iguales en el Meridiano Central, lo cual constituye una característica de la Proyección de Mercator; los meridianos tienen una inclinación mutua tal que, se anual finalmente en el polo. Cuando más se alejan las abscisas del Meridiano Central, tanto mayor es la diferencia entre el norte geográfico y el de la red de coordenadas; a esta diferencia se le llama Convergencia de Meridianos.

Posteriormente, a esta proyección de Gauss-Kruger; los Estados Unidos de América le hicieron otras modificaciones y establecen la Proyección Universal Transversa de Mercator, también llamada Cuadrícula Universal de Mercator.

Dichas modificaciones consisten en tomar meridianos centrales tangentes al cilindro cada 6°, siendo dichos meridianos perpendicualares al eje del cilindro; dándoles a éstos el valor de 500 000 m. y se les llama Falsa Abscisa, lo cual se hace con el objeto de que no existan número negativos. Otra modificación realizada después de una serie de estudios es que el cilindro se colocará en condición secante en lugar de tangente como se había venido trabajando, con lo cual dicho cilindro tocará dos puntos de la esfera o dos bandas separadas 180 000 m. al este y al oeste del Meridiano Central, por supuesto que estas bandas no coinciden con ningún meridiano en toda su extensión puesto que son paralelas al Meridiano Central.

La condición secante que presenta esta proyección cartográfica hace que en el Meridiano Central se tengan dos características.

a. Es el lugar en donde se acentúa con mayor intensidad el factor de escala siendo de 0.9996.

b. Es el único meridiano de la carta geográfica que coincide con el Meridiano Verdadero.

De la Figura No. 45 se tiene que una distancia medida en la superficie terrestre como lo es $\overline{TM}$ al proyectar al cilindro en $\overline{JN}$ se reduce, el punto B que es donde coincide la superficie terrestre con el cilindro el factor de escala es uno, es decir no tiene amplificación ni tampoco reducción; la distancia sobre la superficie terrestre $\overline{EG}$ al proyectarla al cilindro en $\overline{HI}$ se amplifica, y mientras más separación del Meridiano Central irá descendiendo hasta llegar a un factor de escala de 1.0004, puesto que a 3° de longitud será el límite, más allá se utiliza otro meridiano central.

De lo anteriormente expuesto se deduce que la Tierra se proyecta al cilindro utilizando 60 meridianos centrales y que el factor de escala es la cantidad, por la que debe multiplicarse las distancias medidas en el terreno para ser proyectadas al cilindro en condición secante, es decir a la proyección cartográfica Universal Transversa de Mercator.

En estas condiciones a partir del meridiano central y hasta cada una de las bandas tangentes al cilindro con 180 000 m. de distancia, el factor de escala será menor a la unidad y alejándose de las bandas será mayor de la unidad.

Al igual que hay una abscisa falsa, hay una ordenada falsa, ya que, en el hemisferio norte, al Ecuador se le da el valor de 0 m. y en el hemisferio sur de 10 000 000 m.

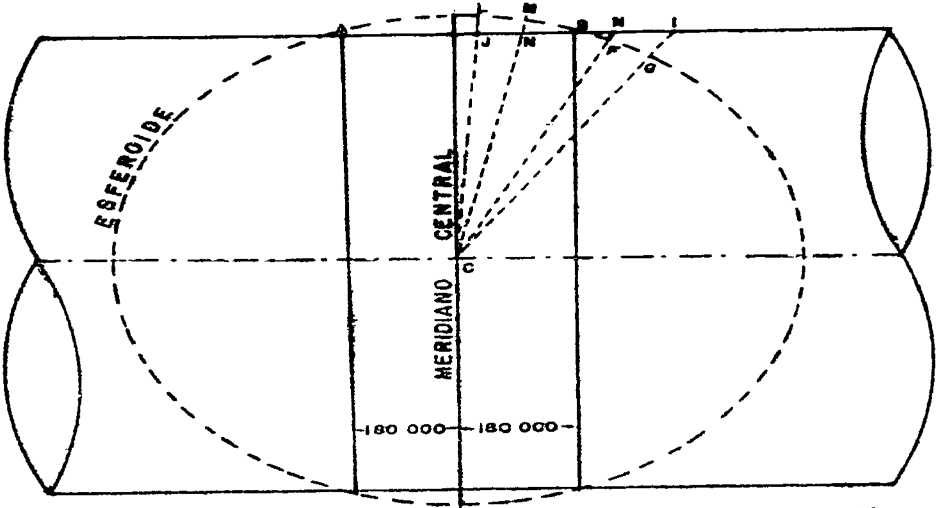


FIGURA No 45

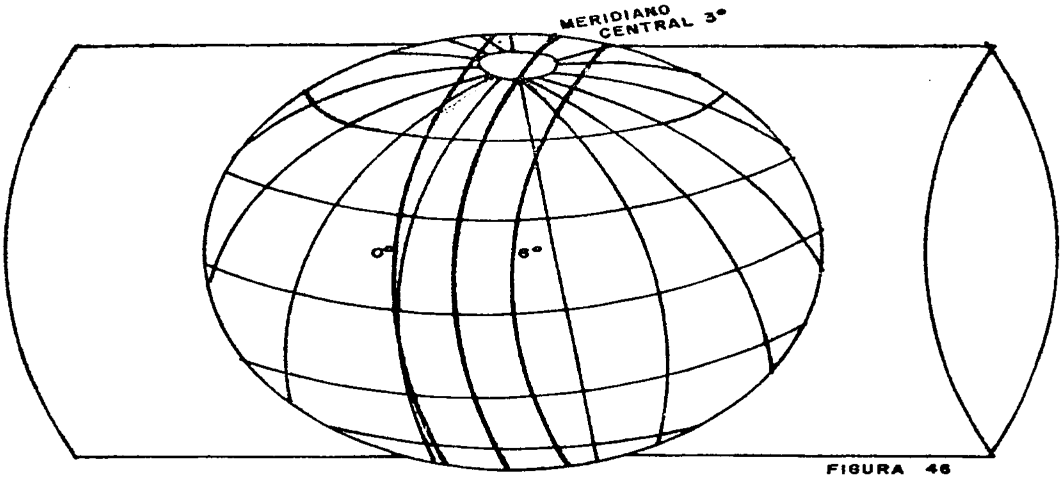


FIGURA 46

En la Figura No. 46, (1) Las secciones rectas del cilindro son elipses con los parámetros del elipsoide, pero más pequeño y proporcional.

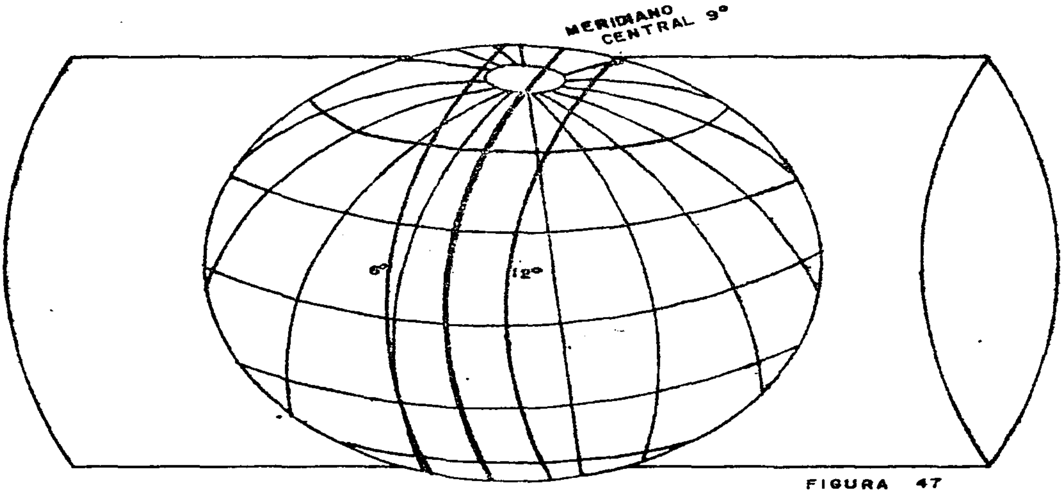


FIGURA 47

En la Figura No. 47 se giró el cilindro 6° para estar en la zona adyacente con respecto al anterior.

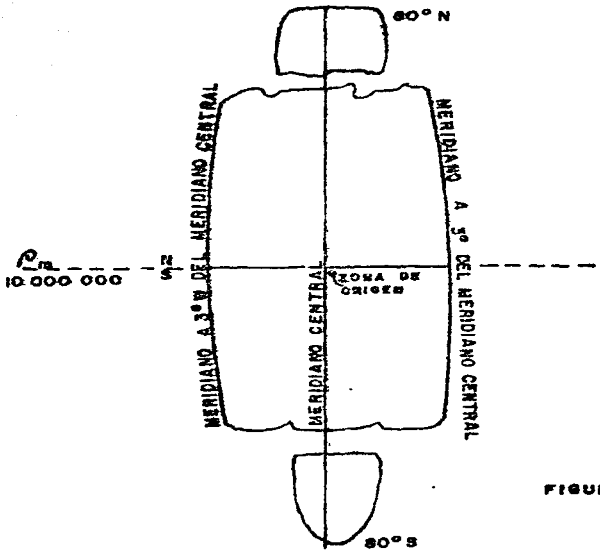
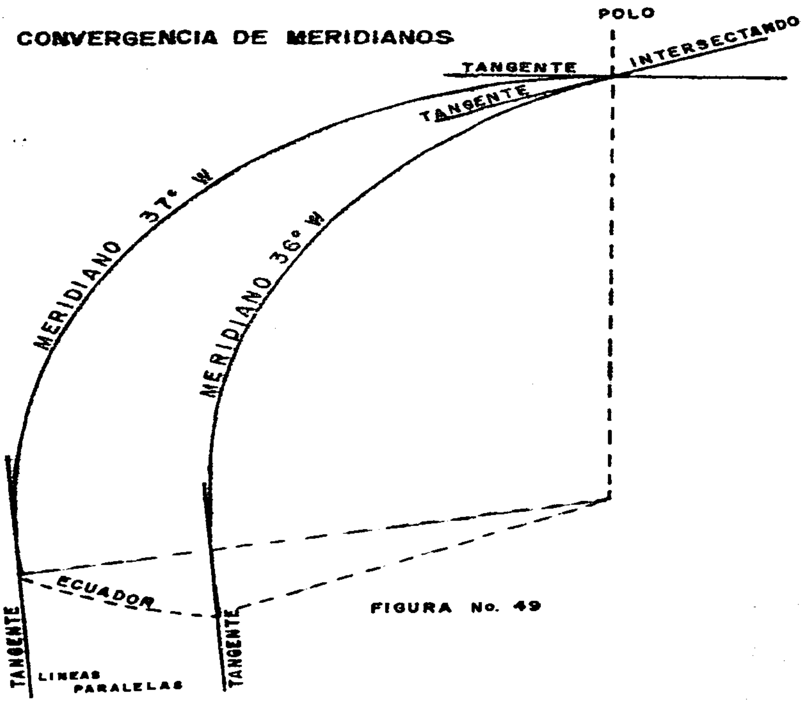

80° N
MERIDIANO A 3° W DEL MERIDIANO CENTRAL
MERIDIANO CENTRAL
MERIDIANO A 3° DEL MERIDIANO CENTRAL
ZONA DE ORIGEN
10.000 000
80° S

FIGURA No 48



CONVERGENCIA DE MERIDIANOS
POLO
TANGENTE
INTERSECTANDO
TANGENTE
MERIDIANO 37° W
MERIDIANO 36° W
ECUADOR
TANGENTE
LINEAS PARALELAS
TANGENTE

FIGURA No. 49

Notaciones para la Proyección U. T. M.:

φ = Latitud

λ = Longitud

φ' = Latitud al pie de la perpendicualr del punto al meridiano central.

λ_o = Longitud al origen (o sea al meridiano central).

$\lambda - \lambda_o$ = Diferencia de longitud al meridiano central.

a = Semieje Mayor.

b = Semieje Menor.

$\lambda - \lambda_o$ al este del meridiano central.

$\lambda_o - \lambda$ al oeste del meridiano central.

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$ = Excentricidad al cuadrado.

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{e^2}{1 - e^2}$$ = El cuadrado de la Excentricidad del Eje Menor.

ρ = Radio de Curvatura en el meridiano $= \dfrac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \text{ sen}^2 \varphi)}$

r = Radio de curvatura de Primer Vertical, también se denomina como la Normal del Esferoide.

$$r = \frac{a}{(1 - e^2 \text{ sen}^2 \varphi)^{1/2}} = (1 + e'^2 \cos^2 \varphi)$$

s = Distancia verdadera sobre el meridiano desde el Ecuador.

K_o = Factor de Escala en el meridiano central = 0.9996

K = Factor de Escala.

F.N. = Falsa Ordenada.

F.E. = Falsa Abscisa.

E' = Distancia en la cuadrícula al meridiano central.

E = Eje de las "X".

N = Eje de las "Y".

N = Norte de cuadrícula.

t = Azimut plano medido desde el norte de la cuadrícula.

Elementos de la Proyección Universal Transversa de Mercator.

Hemisferio Norte

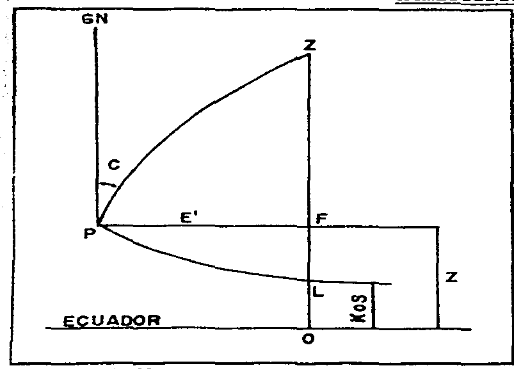


FIGURA No 50

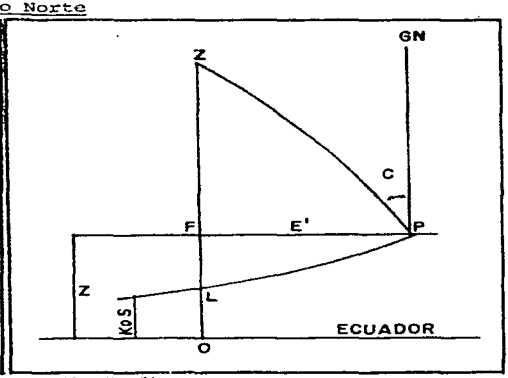


FIGURA No 51

Hemisferio Sur

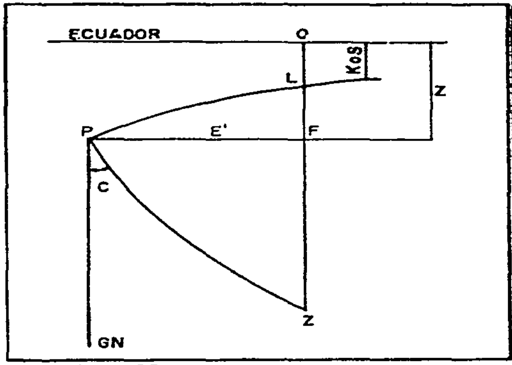


FIGURA No 52

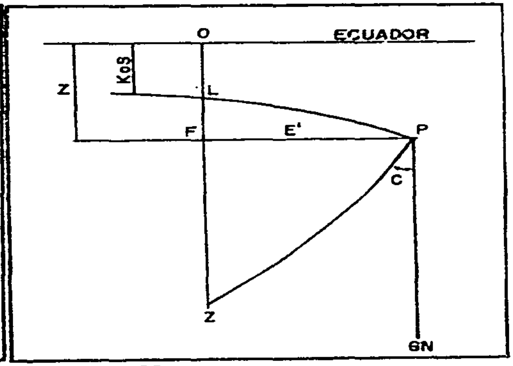


FIGURA No 53

P = Punto bajo consideración.

F = Pie de la perpendicular desde P hasta el meridiano central.

O = Origen.

OZ = Meridiano Central.

LP = Paralelo de la latitud P.

ZP = Meridiana de P.

OL = Factor de Escala.

LF = Curvatura ordinaria.

OF = N. Cuadrícula Norte.

FP = E'. Distancia de la Cuadrícula desde el meridiano Central.

GN = Norte de la Cuadrícula.

C = Convergencia de meridianos; i.e., Angulo entre el norte verdadero y el norte de la cuadrícula.

<u>Forma en que se divide la Tierra según la Cuadrícula de la Proyección Universal Transversa de Mercator</u>.

Teniendo en cuenta los 60 meridianos centrales y las limitaciones de 80° de latitud norte a 80° de latitud sur se establecen en total 60 x 20 = 1 200 zonas, de 6° de longitud por 8° de longitud. Estos cuadrángulos están designados por números en el sentido horizontal y por letras en el vertical con el objeto de asignarles su clasificación y con ella su identificación.

A partir de esta zonificación se subdividen en tantas partes como sea necesario en función de la escala adoptada. Las instituciones que utilizan esta proyección, a cada carta geográfica, además del nombre geográfico, les asigna las siglas que se utilizan para su archivo, banco de datos cartográficos, índice de cartas geográficas y la integración cartográfica.

En la Figura No. 54 se hace resaltar una zona que le corresponde a la 3P, el 3 por la numeración consecutiva horizontal y P por el orden alfabético vertical.

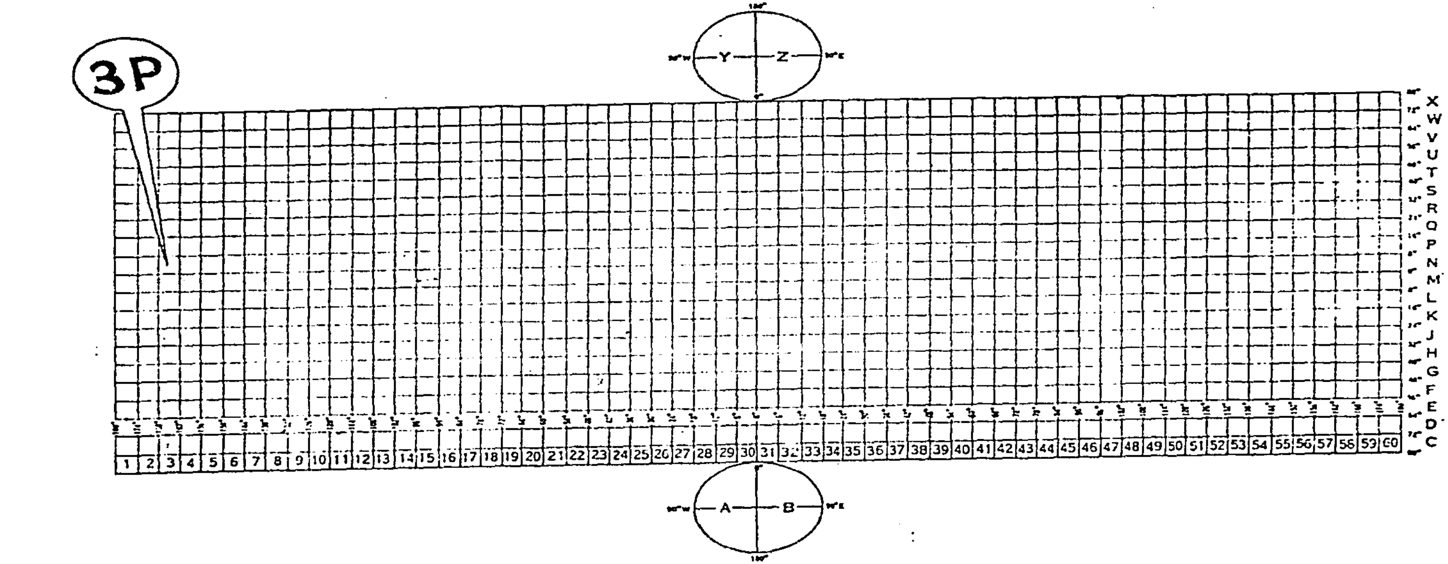


FIGURA NO. 54

ELABORACION DE UNA CARTA GEOGRAFICA 1: 100 000 EN LA "PROYECCION UNIVERSAL TRANSVERSA DE MERCATOR".

Para llevar a cabo la construcción de cartas geográficas utilizando la Proyección Transversa de Mercator, es necesario realizar las siguientes etapas:

1. Obtención de toda la información geodésica existente en el área de estudio.
2. Análisis y selección de la información.
3. Trabajos geodésicos como suelen ser las ligas, extensiones y densificaciones.
4. Construcción de la proyección cartográfica adoptada, en este caso la Universal Transversa de Mercator.

Para llevar a cabo la construcción de la citada proyección se traza primero la cuadrícula y apoya en ésta, se sitúan por coordenadas previamente calculadas las intersecciones de meridianos y paralelos que a la escala 1 : 100 000, cada cuadro es de 10 centímetros y el intervalo de gradícula de 5'. Además, debe considerarse que la carta geográfica es de 30' de latitud por 40' de longitud con el objeto de que sea de tamaño manuable para las diferentes operaciones.

Las líneas del cuadriculado se dibujan en series de cuadrados perfectos sobre material estable y la proyección mediante marcas de intersecciones, dando lugar a que los contornos de la carta geográfica esté delimitada por sus valores geográficos; éstos se determinan llevando a cabo su transformación utilizando las tablas contenidas en el Manual Técnico No. 3 publicado por Army Map Service del Corps of Engineers. Washington.

El control geodésico se sitúa por coordenadas previamente transformadas a la proyección.

Según cada caso se ejecutan las restituciones fotogramétricas, o con la información existente se realizan las compilaciones apoyándose siempre en el control geodésico.

Es fundamental que la carta geográfica contenga la información marginal que es requisito para poder establecer la apreciación y lectura del mapa considerado. La información marginal está compuesta de:

a. Los valores geográficos en cada carta en sus cuatro extremos (grados y minutos) y a las intersecciones de meridianos y paralelos cada cinco minutos.

b. Los valores de la cuadrícula, en que cada diez centímetros, le corresponden 10 kilómetros en la escala 1 : 100 000.

c. La leyenda, consistente en expresar los métodos, equipos, fecha de la toma fotográfica área, referencias de la información, etc.

d. Declinaciones magnética y de cuadrícula, con el objeto de poderse emplear adecuadamente en el terreno para sus aplicaciones correspondientes.

e. El nombre y número que le corresponden a la carta geográfica.

f. En ciertos casos es recomendable inscribir el listado de las coordenadas geodésicas.

g. La escala numérica y gráfica; ésta sobre todo cuando la carta se ha hecho con ideas de reducción.

h. El sello, que es un recuadro donde contiene la autoridad que la elaboró, tema, fecha, proyección, escala numérica, etc.

i. Para la localización de las cartas adyacentes es necesario graficar el índice o diagrama de localización.

j. La simbología empleada en la carta geográfica.

Lo expresado anteriormente, se considera el mapa base siempre y cuando no este muy densificado de detalles, lo que permite tenerla como matriz generadora por medio de copias en las que en cada una de ellas se elaborará un tema geográfico (según objetivos predeterminados), dando con ésto una temática cartográfica, conducente a los estudios geográficos, indispensable para el investigador de las ciencias de la Tierra.

CONCLUSIONES

El estúdio de la forma y dimensiones de la Tierra son de interés para el geógrafo, pero mas aún cuando se trata de la localización y la cuantificación de los hechos y fenómenos geográficos, que se realizan por métodos geodésicos.

Dentro de una de sus ramas la Geodesia se encarga del establecimiento de puntos llamados vértices o bancos, con los cuales es posible llevar a cabo con la precisión que amerita, las regiones, estados y países para diversas aplicaciones, entre ellas pueden citarse las siguientes:

1. Control geodésico para la elaboración de cartas geográficas.
2. Límites de las fronteras internacionales y nacionales.
3. Determinación de la deriva de continentes a través de observaciones geodésicas en lapsos de tiempo.
4. Fijación o establecimiento de paralelos o meridianos trazados directamente sobre la superficie de la Tierra.
5. Evaluación superficial de grandes áreas, como lo constituye un país, un estado o una zona en especial.
6. De lo anterior se deduce que para llevar a cabo la evaluación de los recursos naturales, base para la Planeación, es indispensable utilizar los métodos geodésicos.

7. La aplicación a la Geografía Urbana, para lo cual se han realizado los trabajos geodésicos de mayor precisión por el valor del suelo, para la detección y evaluación superficial del uso del suelo en catastros, planos directores y planos regulares.
8. Para elaborar el catastro rural, y las relaciones con el medio físico, a través de la evaluación hidrológica superficial y del recurso suelo.

Si de los estudios geodésicos, entre otros aspectos tienen los que con anterioridad se citan, es de concluirse que para el desarrollo de un país requiere de una infraestructura geodésica con tal densidad que le permita aplicarse con precisión a los estudios de planeación que realizan profesionistas, como lo son el geógrafo, economista, hidrólogo, forestal, agrónomo, geólogo, etc.

Por la importancia que siempre ha tenido la Geodesia, ésta ha sido llevada al campo bélico, lo que ha conducido a que en muchos países, como México, estuviera en manos de militares sin poderse aprovechar por considerársele de orden táctico.

BIBLIOGRAFIA

CAIRE LOMELI JORGE. COMPRENSACION DE COTAS EN TRILATERACIONES GEODESICAS. Instituto Panamericano de Geografía e Historia. Revista Cartográfica No. 24 y 25. México 1973.

CAIRE LOMELI JORGE. LA PROYECCION CARTOGRAFICA PARA PETROLEOS MEXICANOS. Edición Especial Boletín de la Asociación Mexicana de Geólogos Petroleros. Volumen XXVI. México 1974.

DIAZ C. FRANCISCO. TRATADO ELEMENTAL DE TOPOGRAFIA, GEODESIA Y ASTRONOMIA. Tomo II. Tercera Edición. Oficina Tipográfica Secretaría de Fomento. México 1899.

GANDARIAS VICENTE. GEODESIA E HIDROGRAFIA. Editorial Dossat. Madrid, 1956.

GOMEZ P. GUILLERMO. EL MANTEMIMIENTO AL DIA DE LOS MAPAS DE AREAS URBANAS. Simposium Levantamientos y Mapas Urbanos. I.P.G.H. México, 1969.

HOSMER L. GEORGE. GEODESY. Second Edition. New York, 1919. Published by John Wiley and Sons. Inc. Second Edition. Cambridge 1929.

INSTITUTO PANAMERICANO DE GEOGRAFIA E HISTORIA. Estudio sobre Recursos Naturales en las Américas. Tomo IV. México 1954.

INSTITUTO PANAMERICANO DE GEOGRAFIA E HISTORIA. La Geodesia al Alcance de todos. Publicación 291. Buenos Aires 1962.

JORDAN WILHELM. Tratado General de Topografía. Rev. y ampliado por C. Reinhertz y O. Eggert. Versión de la 9a. Edición Alemana por José Ma. Mantero 3a. Edición Barcelona G. Gili 1961.

LOPEZ V. ERASMO. Monumentación y Mantemiento de los puntos de referencia de levantamientos de áreas urbanas. Simposium Levantamientos y Mapas Urbanos I.P.G.H. México 1969.

MEDINA P. MANUEL. Enseñanza de la Geodesia en México Memoria del Primer Congreso Panamericano. Tercero Nacional. Sociedad Mexicana de Fotogrametría, Fotointerpretación y Geodesia. México 1974.

MEDINA P. MANUEL. Manual Elemental de Geodesia Geométrica. U.N.A.M. (Mimeografiado). México 1969.

RUIZ C. ALEJANDRO. Historia General de las Ciencias Geodésicas. Tomo 1. Editorial Cultura. La Habana, 1941.

SANCHEZ C. PEDRO y OCTAVIO BUSTAMANTE. Apuntes sobre Cartografía. Talleres de Fotozincografía. Dirección General de Geografía y Meteorología, S.A.G. 1964.

SANCHEZ C. PEDRO. La Geodesia en México. Publicación 74 I.P.G.H. México 1945.

SANCHEZ C. PEDRO. Medida del Meridiano de Longitud 98°W. de Greenwich. Tomo 1. Imprenta de la Secretaría de Fomento. México 1913.

TOSCANO RICARDO. Geodesia Elemental. Segunda Edición Talleres Gráficos de la Secretaría de Agricultura. México 1936.

INDICE