UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE FILOSOFIA

UNA RECONSTRUCCION CONJUNTISTA DE LA SEMANTICA DE FREGE

T E S I N A

PARA OPTAR POR EL GRADO DE
LICENCIADO EN FILOSOFIA
JOSE LUIS GONZALEZ CARBAJAL

1 9 7 9

A la Memoria de Hugo Margāin Ch.,

maestro y amigo.

INDICE

UNA RECONSTRUCCION CONJUNTISTA DE LA SEMANTICA DE FREGE

0. Introducción.

En este escrito ofrecemos una reconstrucción conjuntista de la teoría semántica de Frege. Utilizamos el metasistema de Will Harris[1] para hacer una *axiomatización conjuntista informal* o *axiomatización informal definiendo un predicado conjuntista* de la semántica fregeana. Después se podría ver qué entidades satisfacen el predicado definido conjuntistamente o, lo que es lo mismo, cuáles son los modelos de la teoría semántica fregeana así definida. Resulta que una formulación estándar del cálculo de predicados de primer orden es un modelo de una simplificación de la semántica fregeana reconstruida.

El usar la teoría de conjuntos en la reconstrucción nos permite exhibir la estructura matemática de la teoría de Frege. La adecuación material de nuestra reconstrucción se muestra al determinar que los axiomas expresan las tesis que comforman la semántica fregeana. No modificamos en ningún respecto importante la semántica de Frege; creemos que nuestra versión de ella, si no está del todo de acuerdo con la letra de los trabajos de Frege, sí lo está con su espíritu. El enfoque que aquí adoptamos tiene la ventaja, entre otras, de facilitar el uso de la teoría de modelos.

Procedemos de la siguiente manera: primero explicamos brevemente qué se entiende por una axiomatización informal definiendo un predicado conjuntista; después definimos de esa manera -o sea, conjuntistamente- el predicado '*X* es una semántica fregeana'; a continuación, pretendemos mostrar que nuestra reconstrucción axiomática se adecúa materialmente a la teoría semántica de Frege; por último, introducimos el predicado conjuntista '*Y* es una semántica fregeana simplificada' para mostrar que una formulación estándar de la lógica de predicados de primer orden es un modelo de una modificación de la teoría semántica que prescinde del sentido.

1. La axiomatización conjuntista.

Cuando aquí decimos 'reconstrucción axiomática' no queremos referirnos al tipo de reconstrucción como la que hizo Hilbert de la geometría euclideana. No estamos hablando, pues, de la axiomatización clásica a la Hilbert; más bien estamos refiriendonos a un tipo de construcción conjuntista que algunas veces han llamado 'axiomatización'. Patrick Suppes, por ejemplo, dice: "El meollo del procedimiento para axiomatizar teorías dentro de la teoría de conjuntos puede ser descrito muy brevemente: axiomatizar una teoría es definir un predicado en función de nociones de la teoría de conjuntos. Un predicado así definido se llama un predicado conjuntista (*set-theoretic*)."[2]

Axiomatizar una teoría en este sentido significa, pues, definir en términos de la teoría de conjuntos un predicado apropiado. Así, por ejemplo, para axiomatizar la teoría de grupos se introduce una definición del predicado conjuntista 'es un grupo'. A las estipulaciones que componen la definición se les llama 'axiomas' de la teoría. Un axioma es, así, sólo una parte de la definición de un predicado conjuntista. A la suma de las relaciones, si son funciones, entre los elementos de un conjunto introducido que describen los axiomas se le llama la 'estructura matemática' de la teoría. Por un *modelo* se entiende aquí simplemente una *entidad que satisface el predicado conjuntista*, es decir, *que cumple con los axiomas*.

Si el predicado conjuntista es introducido dentro de una teoría axiomática de conjuntos, se habla de una axiomatización formal, en caso contrario, se habla de una axiomatización informal. Nuestra axiomatización de la teoría de Frege será informal, pues no haremos uso de ninguna teoría axiomática de conjuntos.

Como ilustración damos una axiomatización conjuntista de la teoría de grupos:

X es un grupo si y sólo si existen B y o tal que:

(1) $X = \langle B, o \rangle$;

(2) B es un conjunto no vacío;

(3) o es una función con dominio = $B \times B$ y codomonio $\subseteq$ B;

(4) para toda a, b y c en B: a o (b o c) = (a o b) o c;

(5) para toda a y b en B existe c en B tal que a = b o c;

(6) para toda a y b en B existe c en B tal que a = c o b.

Cualquier entidad que cumpla con las seis estipulaciones de la definición anterior es un grupo, o en otras palabras es un modelo de la teoría de grupos así axiomatizada. De esta manera podemos decir significativamente que todos y sólo los grupos son modelos de la teoría axiomática de grupos. Esta afirmación parece circular, pero como explica Stegmüller: "Si (...), una axiomatización de la teoría de grupos es entendida como la introducción del predicado conjuntista 'X es un grupo', y cualquier cosa que satisface este predicado es llamado un grupo, entonces el enunciado asombrosamente simple 'todos los grupos y sólo los grupos son modelos de la axiomatización de la teoría de grupos', no es alguna clase de pretensión circular, sino más bien *una especificación absolutamente precisa de los modelos de la teoría de grupos axiomatizada (...).*"[3]

De la misma manera decimos que cualquier cosa que satisfaga el predicado conjuntista '*Y* es una semántica fregeana simplificada' definido en el parágrafo 4, es una semántica fregeana simplificada o un modelo de cierta simplificación de la teoría semántica de Frege.

2. Axiomatización de la semántica de Frege.

Nuestra versión de la teoría semántica de Frege está conformada por dos supuestos metafísicos que subyacen a tal teoría. Como Harris ha señalado,[4] un supuesto básico de la semántica fregeana consiste en que el lenguaje tiene una estructura idéntica, o al menos muy semejante a la estructura del mundo que describe. Hay, para Frege, un correlato ontológico, objetivo del lenguaje: tal contrapartida ontológica del lenguaje es el "reino del *Bedeutung*".[5] La estructura del lenguaje guarda, pues, una cercana semejanza con la estructura del reino del *Bedeutung*. Este supuesto lleva a Frege, anota Harris, a postular un tipo de entidad para cada tipo básico de expresión. Así, el tipo de *Bedeutung* que corresponde a las expresiones completas son objetos, mientras que el correspondiente a las expresiones incompletas son funciones. Según el tipo de expresión es, pues, el tipo de *Bedeutung*.

De manera similar, encontramos en Frege un segundo reino de entidades relacionadas con el lenguaje, a saber, el reino del sentido (*Sinn*). Para Frege una expresión expresa directamente un sentido y éste, a su vez, está conectado con un *Bedeutung*; la relación que existe entre una expresión y su *Bedeutung* no es, pues, directa, ya que es a través del sentido que una expresión *bedeute*[6] una entidad.[7] Con esta tesis semántica Frege postula el reino del sentido, reino intermediario entre el lenguaje y el reino del *Bedeutung*.

En la reconstrucción de la teoría de Frege postulamos dos entidades correspondientes a los dos reinos anotados. Con tales entidades construimos dos estructuras, a las que agregamos una tercera para el lenguaje. Relacionamos las estructuras entre sí por medio de funciones: tenemos así tres funciones: una para la relación directa entre la estructura del lenguaje y la del sentido; otra para la conexión entre la estructura del sentido y la del *Bedeutung*; una tercera para la relación indirecta entre la estructura del lenguaje y la del *Bedeutung*.

Nuestra *axiomatización intuitiva por definición de un predicado conjuntista de la teoría semántica de Frege* es la siguiente:

X es una *semántica fregeana* si y sólo si existen L, S, B, τ, ρ y σ tales que

(1) $X = \langle L, S, B, \tau, \rho, \sigma \rangle$;

(2) $L = \langle E, N, I, \alpha, \beta \rangle$ tal que

(2.1) E es un conjunto no vacío,

(2.2) $N \subset E$; $I \subset E$; $N \cup I = E$ y $N \cap I$ es vacía;

(2.3) α es una función tal que el dominio $(\alpha) \subset N \times I$ y el codominio $(\alpha) \subset N$;

(2.4) β es una función tal que el dominio $(\beta) \subset N \dot{\times} I \times N$ y el codominio $(\beta) \subset N$;

(3) $S = \langle S, S_n, S_i, \gamma, \psi \rangle$ tal que

(3.1) S es un conjunto no vacío;

(3.2) $S_n \subset S$; $S_i \subset S$; $S_n \cup S_i = S$ y $S_n \cap S_i$ es vacía;

(3.3) γ es una función tal que el dominio $(\gamma) \subset S_n \times S_i$ y el codominio $(\gamma) \subset S_n$;

(3.4) ψ es una función tal que el dominio $(\psi) \subset S_n \times S_i \times S_n$ y el codominio $(\psi) \subset S_n$;

(4) $B = < B, O, F, \omega, \lambda >$ tal que

(4.1) B es un conjunto no vacío;

(4.2) $O \subset B$; $F \subset B$; $O \cup F = B$ y $O \cap F$ es vacía;

(4.3) ω es una función tal que el dominio $(\omega) \subset O \times F$ y el codominio $(\omega) = O$;

(4.4) λ es una función tal que el dominio $(\lambda) \subset O \times F \times O$ el codominio $(\lambda) \subset O$;

(5) $\tau : L \rightarrow S$ definida así

para cada $e \in E$, $\tau(e) \in S$;

para cada $n \in N$, $\tau(n) \in S_n$;

para cada $i \in I$, $\tau(i) \in S_i$;

para cada $< n, i > \in N \times I$,

$\tau (\alpha(< n, i >)) = \gamma(\tau(n), \tau(i))$;

para cada $< n_1, i, n_2 > \in N \times I \times N$,

$\tau(\beta(< n_1, i, n_2 >)) = \psi(\tau(n_1), \tau(i), \tau(n_2))$;

(6) $\rho: S \rightarrow B$ definida así

para cada $s \in S$, $\rho(s) \in B$;

para cada $s_n \in S_n$, $\rho(s_n) \in O$;

para cada $s_i \in S_i$, $\rho(s_i) \in F$;

para cada $< s_n, s_i > \in S_n \times S_i$,

$\rho(\ \gamma(\ <s_n,\ s_i>\ ))\ =\ \omega(\ \rho(s_n),\ \rho(s_i));$

para cada $<s_{n_1},\ s_i,\ s_{n_2}>\ \varepsilon\ S_n\ X\ S_i\ X\ S_n,$

$\rho(\ \psi(\ <s_{n_1},\ s_i,\ s_{n_2}>\ ))\ =\ \lambda(\ \rho(s_{n_1}),\ \rho(s_i),\ \rho(s_{n_2}));$

(7) $\sigma = \rho \circ \tau$ definida así

para cada $e\ \varepsilon\ E,\ \sigma(e) = \rho(\ \tau(e))\ \varepsilon\ B;$

para cada $n\ \varepsilon\ N,\ \sigma(n) = \rho(\ \tau(n))\ \varepsilon\ O;$

para cada $i\ \varepsilon\ I,\ \sigma(i) = \rho(\ \tau(i))\ \varepsilon\ F;$

para cada $<n,\ i>\ \varepsilon\ N\ X\ I,$

$\sigma(\ \alpha(\ <n,\ i>\ ))\ =\ \omega(\ \sigma(n),\ \sigma(i));$

para cada $<n_1,\ i,\ n_2>\ \varepsilon\ N\ X\ I\ X\ N,$

$\sigma(\ \beta(\ <n_1,\ i,\ n_2>\ ))\ =\ \lambda(\ \sigma(n_1),\ \sigma(i),\ \sigma(n_2)).$

Debemos ahora especificar qué es lo que representa cada uno de los componentes de las estructuras (2), (3) y (4) de la definición. En la estructura L, E representa el conjunto de expresiones de un lenguaje dado, N el subconjunto de expresiones completas o nombres propios (en el sentido de Frege), I el subconjunto de expresiones insaturadas o incompletas (en el sentido fregeano). α representa una operación sintáctica, la operación de saturación de Frege, para formar expresiones completas a partir de expresiones completas e incompletas. β representa también una operación sintáctica, igualmente de saturación, para construir expresiones completas.

En S, S representa el reino del sentido, S_n al subconjunto de los sentidos correspondientes a los nombres propios y S_i

al de los sentidos que corresponden a las expresiones incompletas. γ y ψ representan operaciones para los sentidos, por medio de las cuales se forman sentidos complejos en base a unos simples.

En la estructura B tenemos que B representa el reino del *Bedeutung*, O el subconjunto de los objetos (en el sentido de Frege) y F el subconjunto de las funciones (en el sentido fregeano). ω y λ representan operaciones entre entidades, las que hay, para Frege, entre los objetos y las funciones cuando aquéllos "caen bajo" éstas.

Las funciones de los axiomas (5), (6) y (7) son morfismos u homomorfismos, es decir, "trasladan" las operaciones de una estructura a otra. Estos morfismos exhiben las conexiones entre las estructuras. La función σ es la composición de las funciones ρ y τ.

Las relaciones establecidas por los axiomas entre los conjuntos, y los miembros de éstos, de cada una de las estructuras, así como entre las estructuras mismas, especificadas por los morfismos, representan la estructura matemática de la teoría.

3. Adecuación material de la axiomatización.

Dada la definición del predicado conjuntista '*X* es una semántica fregeana', podemos ver si tal definición se adecúa materialmente a la teoría semántica de Frege.

Para empezar notemos las distinciones a nivel lingüístico, a nivel de los sentidos y a nivel de las entidades que establecen las cláusulas (2.2), (3.2) y (4.2), respectivamente. (2.2) dice que todo nombre propio es una expresión, que toda expresión insaturada es una expresión, que ninguna expresión es un nombre propio y una expresión incompleta y que toda expresión o es un nombre propio o es una expresión incompleta. Así tenemos la distinción exhaustiva de las expresiones en dos categorías excluyentes. Por su parte, (3.2) establece una distinción entre el sentido de los nombres propios y el de las expresiones insaturadas, distinción paralela a la existente, en la teoría de Frege, entre las expresiones completas e incompletas, y entre los objetos y las funciones. Frege no dio importancia a una tal distinción entre los sentidos, sin embargo, sugirió que a la insaturación de las expresiones incompletas, debía corresponder una insaturación análoga en los sentidos. Por último, (4.2) expresa que hay dos tipos de *Bedeutung*, a saber, objetos y funciones, que nada es objeto y función y que cualquier entidad o es objeto o es función. De esta manera, (4.2) establece la fundamental distinción ontológica de Frege entre los objetos y las funciones.[8]

La función τ del axioma (5) representa la relación entre las expresiones y sus sentidos. (5) establece, entre otras cosas, que toda expresión tiene un sentido y sólo un sentido, ya que τ es una función. Esto concuerda con Frege, quien afirma que: "La conexión regular entre el signo, su sentido y su referencia es tal, que al signo le corresponde un determinado sentido y a éste, a su vez, una determinada referencia, mientras que a una referencia (a un objeto), no le corresponde solamente un signo."[9] El que la función τ no sea inyectiva atiende a la posibilidad que acepta Frege de que dos expresiones tengan el mismo sentido: "El mismo sentido puede expresarse en diferentes lenguas, e incluso en la misma, de diversas maneras."[10] Decidir si la función τ es suprayectiva (esto es, que la imagen coincide con el codominio) o no es difícil, puesto que apunta a la controvertida cuestión del platonismo en Frege.[11] Decir que τ no es suprayectiva equivale a afirmar que hay sentidos no conectados con ninguna expresión, a admitir un mundo platónico independiente del lenguaje. Decir que τ sí es suprayectiva equivale a afirmar que todo sentido está relacionado con alguna expresión. Nosotros dejamos está cuestión abierta, pues rebasa nuestros propósitos en este escrito.

El hecho de que la función τ sea un morfismo significa una importante tesis semántica de Frege, a saber, que el sentido de una expresión compuesta es una función del sentido de sus componentes. Precisamente es esto lo que afirman las igualdades del axioma (5).

Por su parte, la función ρ del axioma (6) representa la relación entre sentido y *Bedeutung*. Que ρ sea una función significa que a un sentido no le corresponden dos entidades como *Bedeutungen*, de manera tal que el sentido determina unívocamente el *Bedeutung*; también significa que a cada sentido le corresponde un *Bedeutung*, lo cual no concuerda con la tesis semántica de Frege según la cual hay expresiones que carecen de *Bedeutung*, lo que sólo puede deberse en la teoría fregeana, a que no existe la relación entre sentido y *Bedeutung*. Nosotros aquí "idealizamos" la teoría de Frege eliminando esta tesis, para hacer corresponder a cada sentido un *Bedeutung*, apoyados en la afirmación de Frege de que en un lenguaje "lógicamente perfecto" no debería haber expresiones sin *Bedeutung*.

La función ρ no es inyectiva puesto que en la semántica fregeana un sólo y el mismo *Bedeutung* puede corresponder a dos expresiones distintas, como es el caso en el famoso ejemplo de Frege de las expresiones 'la estrella matutina' y 'la estrella vespertina'. Así, dado que en la semántica de Frege es vía sentido que expresión designa su *Bedeutung*, permitimos que la función ρ relacione una misma entidad con dos sentidos diferentes. La función ρ tampoco es suprayectiva, esto significa que hay entidades que no están conectadas con alguna expresión, es decir, entidades no nombradas. El axioma (6) expresa además que el sentido de un nombre propio *bedeute* un objeto y el de una expresión insaturada *bedeute* una función. De esta manera se hace la distinción entre el *Bedeutung* correspondiente a las expresiones completas y el que corresponde a las expresiones incompletas. Que la función ρ sea un morfismo significa que el *Bedeutung* de un sentido compuesto es una función del *Bedeutung* de sus componentes.

En el axioma (7) tenemos que la función σ representa la relación indirecta entre una expresión y su *Bedeutung*. Esta última función, composición de τ y ρ , expresa que a cada expresión corresponde un y sólo un *Bedeutung*. Por supuesto, la composición σ no es suprayectiva ni inyectiva. Que σ no sea inyectuva significa que una misma entidad puede corresponder a dos expresiones distintas.

El hecho de que σ sea una composición de τ y ρ significa la importante tesis fregeana de que es a través del sentido que una expresión designa su *Bedeutung*. Además, la fundamental tesis semántica de Frege de que el *Bedeutung* de una expresión compuesta es una función de los *Bedeutungen* de sus componentes está expresada por las igualdades del axioma (7), a saber, $\sigma(\alpha(< n, i >)) = \omega(\sigma(n), \sigma(i))$ y $\sigma(\beta(< n_1, i, n_2 >)) = \lambda(\sigma(n_1), \sigma(i), \sigma(n_2))$. Por ejemplo, la primera dice que el *Bedeutung* de la expresión compuesta $\alpha(< n, i >)$ es una función de los *Bedeutungen* de las expresiones n e i. Tenemos además que, como Harris lo ha mostrado,[12] el morfismo σ nos da el principio de sustitubilidad de los idénticos, el cual afirma que dado que dos expresiones tienen el mismo *Bedeutung*, se puede sustituir una por la otra en una expresión compuesta sin cambiar el *Bedeutung* de ésta. Así, supóngase que:

$$\sigma(n_1) = \sigma(n_2),$$

entonces

$$\omega(\sigma(n_1), \sigma(i)) = \omega(\sigma(n_2), \sigma(i)),$$

de donde, por el axioma (7)

$$\sigma(\alpha(<n_1, i>)) = \sigma(\alpha(<n_2, i>)).$$

Esta derivación muestra que el principio de sustitubilidad de los idénticos vale en general.

Recapitulemos las tesis semánticas de Frege hasta aquí anotadas. Tenemos:

(i) cada expresión tiene un sentido;

(ii) cada expresión tiene un *Bedeutung*;

(iii) el sentido determina el *Bedeutung*;

(iv) el *Bedeutung* de una expresión completa (o nombre propio) es un objeto, mientras que el de una expresión incompleta (o insaturada) es una función;

(v) el sentido de una expresión compuesta es una función del sentido de sus componentes;

(vi) es a través del sentido que una expresión designa a su *Bedeutung*;

(vii) el *Bedeutung* de una expresión compuesta es una función del *Bedeutung* de sus componentes;

(viii) si dos expresiones tienen el mismo *Bedeutung*, podemos en una expresión compuesta, sustituir una por la otra sin alterar el *Bedeutung* de la expresión compuesta.

Por supuesto, las anteriores no son todas las tesis semánticas de Frege. La tesis fregeana de la distinción entre el sentido y el *Bedeutung* de una expresión no está expresada por ninguno de los axiomas, más bien se encuentra implícita en la definición; es más esta distinción, y los reinos correspondientes, comforman nuestra definición conjuntista. Por otro lado, algunas tesis fregeanas no pueden formar parte de nuestra definición, debido a que o son ontológicas o refieren a un lenguaje particular dado. Por ejemplo, Frege sostiene que el *Bedeutung* de un enunciado es su valor de verdad. Pero no es posible que establezcamos esta tesis, puesto que la definición de enunciado es relativa a un lenguaje particular y nosotros no tenemos, ni podemos tener, en la reconstrucción ningún lenguaje determinado. Como puede verse, en un modelo de esta axiomatización los enunciados pertenecerían a las imagenes de α y β. En tal modelo podría especificarse, una vez definidos los enunciados como expresiones completas, que el *Bedeutung* de los enunciados es su valor de verdad, de donde sería necesario que los valores veritativos fueran elementos del conjunto O, lo que implicaría la tesis ontológica de Frege de que los valores veritativos son objetos. Pero lo anterior sólo puede hacerse en un modelo, donde se cuente con un lenguaje determinado y con una definición de verdad para los enunciados del lenguaje, y no es una versión abstracta de la teoría semántica fregeana.

Además, en los axiomas de nuestra definición no están expresadas aquellas tesis de Frege que se refieren al discurso indirecto, a contextos de creencia, a contextos modales, en general a contextos oblicuos. En estos contextos no valen ciertas tesis semánticas fregeanas, a saber, (vii) y (viii) de nuestra anterior lista. Nuestra reconstrucción está diseñada para aquellos lenguajes en los que sí valen las tesis (vii) y (viii); aquellos lenguajes que se han llamado 'extensionales'.

4. Un modelo de una teoría semántica fregeana simplificada.

En *~~Frege~~ Philosophy of Language*, M. Dummett afirma que la noción fregeana de referencia (*Bedeutung*) no es otra sino la noción de interpretación de la semántica de la lógica matemática actual. Así, Dummett nos dice: "La mejor vía de acceso a la noción de referencia de Frege es la semántica que él introdujo para las fórmulas del lenguaje de la lógica de predicados. Una interpretación de una fórmula tal (o conjunto de fórmulas) se ob-tiene asignando entidades de clases adecuadas a las constantes primitivas no-lógicas que figuran en la fórmula."[13]; "Tal semántica -tal noción de 'interpretación' aplicada a oraciones construidas según el patrón del lenguaje simbólico de Frege- nos da una explicación de las condiciones de verdad de las oraciones del lenguaje que es enteramente adecuada a los propósitos del lógico, y que le permite definir así la noción semántica de consecuencia lógica y fabricar las concepciones de corrección y completud para un conjunto dado de reglas formales de deducción. Es precisamente tal noción de interpretación que Frege tiene en mente cuando habla de 'referencia'. En verdad, esto es poner la cuestión de manera errónea. Más bien, él usa la misma noción de referencia en sus discusiones filosóficas del lenguaje -de la teoría del significado- y en su exposición de la interpretación pretendida (*intended*) de su sistema formal en *Grundgesetze der Arithmetik*, es decir, en la prosa que acompaña al texto simbólico que establece la semántica del sistema. Es así claro que su noción de referencia coincide con la noción de interpretación para las fórmulas de la lógica de predicados como comunmente se emplea en la lógica matemática."[14]

Nosotros seguimos esta idea de Dummett -de la identificación de la noción fregeana de *Bedeutung* y la noción de interpretación de la lógica- para hacer una modificación de la teoría semántica de Frege y construir un modelo de tal teoría modificada en el que se muestra que la función que representa la relación de

Bedeutung -es decir, la relación entre el lenguaje y el reino del *Bedeutung*- es la misma que la función que asigna entidades a las constantes no-lógicas de las fórmulas. Es más, la función *Bedeutung*, a saber σ', de nuestro modelo también asigna un valor de verdad a las fórmulas (= enunciados) del lenguaje en el modelo. Así, la función σ' asigna como *Bedeutung* una entidad a las constantes no-lógicas y a las fórmulas.

Así, proponemos la siguiente modificación de la teoría semántica de Frege:

Υ es una *semántica fregeana simplificada* si y sólo si existen $\mathbb{L}$, $\mathbb{B}$ y σ tal que

(1) $\Upsilon = \langle \mathbb{L}, \mathbb{B}, \sigma \rangle$;

(2) $\mathbb{L} = \langle E, N, I, \alpha, \beta \rangle$ tal que

(2.1) E es un conjunto no vacío;

(2.2) $N \subset E$, $I \subset E$, $N \cup I = E$ y $N \cap I$ es vacía;

(2.3) α es una función tal que el dominio de $(\alpha) \subset N \times I$ y el codominio $(\alpha) \subset N$;

(2.4) β es una función tal que el dominio $(\beta) \subset N \times I \times N$ y el codominio $(\beta) \subset N$;

(3) $\mathbb{B} = \langle B, O, F, \omega, \lambda \rangle$ tal que

(3.1) B es un conjunto no vacío;

(3.2) $O \subset B$, $F \subset B$, $O \cup F = B$ y $O \cap F$ es vacía;

(3.3) ω es una función tal que el dominio $(\omega) \subset O \times F$ y el codominio $(\omega) \subset O$;

(3.4) λ es una función tal que el dominio $(\lambda) \subset O \times F \times O$ y el codominio $(\lambda) \subset O$;

(4) $\sigma : \mathbb{L} \to \mathbb{B}$ definida así

para cada $e \in E$, $\sigma(e) \in B$,

para cada $n \in N$, $\sigma(n) \in O$;

para cada $i \in I$, $\sigma(i) \in F$;

para cada $< n, i > \in N \times I$,

$\sigma(\alpha(< n, i >)) = \omega(\sigma(n), \sigma(i))$;

para cada $< n_1, i, n_2 > \in N \times I \times N$,

$\sigma(\beta(< n_1, i, n_2 >)) = \lambda(\sigma(n_1), \sigma(i), \sigma(n_2))$.

Lo que representan los componentes de las estructuras $\mathbb{L}$ y $\mathbb{B}$ es igual que aquello que representan en la definición ' X es una semántica fregeana'. En esta última definición, la función σ ya no es una composición, aunque sigue siendo un morfismo. Obviamente, las diferencias entre las dos definiciones consisten en que la última carece de la estructura S, la correspondiente al sentido, y, por tanto, de las funciones γ y ψ ; en esto precisamente consiste la modificación, la cual resulta ser una simplificación.

Al simplificar la primera definición hemos eliminado todas las tesis concernientes al sentido. De esta manera, lo que obtenemos es una semántica en la que sólo hay el *Bedeutung* de las expresiones. Por supuesto, se conservan las tesis referentes al

Bedeutung, a saber, las tesis (ii), (iv), (vii) y (viii) de nuestra anterior lista.

A continuación formulamos la lógica de predicados de primer orden que será nuestro modelo de la teoría recién definida. Nuestra formulación prescinde de letras enunciativas (o letras predicativas de grado 0) y de letras funtoriales. Así, construimos una lógica simple y pura. Además eliminamos, para simplificar, todas las letras predicativas de grado mayor a 2. Primero construimos un lenguaje formalizado, al que llamamos $\mathbb{L}$ después ofrecemos un procedimiento sistemático de interpretación y una definición de verdad para ese lenguaje. Así, la exposición de $\mathbb{L}$ consta de dos partes, a saber, la gramática y la semántica.

Gramática de $\mathbb{L}$.

Símbolos de $\mathbb{L}$.

variables: x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2,

constantes:

lógicas: negación ' $\sim$ ', conjunción ' $\wedge$ ' y cuantificador existencial ' $\bigvee$ ';

no lógicas:

constantes individuales: a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, ...

letras predicativas unarias: F^1, G^1, H^1, F^1_1, G^1_1, H^1_1, F^1_2, ...

letras predicativas binarias: F^2, G^2, H^2, F^2_1, G^2_1, H^2_1, F^2_2, ...

símbolos de agrupación: paréntesis '(' y ')'.

Suponemos dado un orden en las constantes individuales y en las variables, y una correspondencia 1-1 entre los conjuntos de ambos símbolos, de manera tal que podemos determinar cuál constante individual corresponde a una variable dada y viceversa. Indicamos la correspondencia:

$$\begin{array}{cccccccccc} a & b & c & a_1 & b_1 & c_1 & a_2, & \ldots, & a_n, & \\ | & | & | & | & | & | & | & & | & \\ x & y & z & x_1 & y_1 & z_1 & x_2, & , & x_n, & \ldots \end{array}$$

Definición de fórmula. [15]

(DF1) si s es una constante individual y P^1 es una letra predicativa unaria, entonces P^1s es una fórmula;

(DF2) si s_i y s_j son constantes individuales (no necesariamente distintas) y P^2 es una letra predicativa binaria, entonces $P^2s_is_j$ es una fórmula;

(DF3) si A es una fórmula, entonces $\sim A$ es una fórmula;

(DF4) si A y B son fórmulas (no necesariamente distintas), entonces $(A \wedge B)$ es una fórmula;

(DF5) si A es una fórmula, en la que la constante individual s_n ocurre, entonces $\bigvee t_n \, As_n/t_n$, donde t_n es la variable que corresponde a s_n, es una fórmula. [16]

Tódas y sólo las fórmulas generadas por las cláusulas anteriores son fórmulas de $\mathbb{L}$. [17]

Las fórmulas generadas por (DF1) y (DF2) son fórmulas atómicas. Las expresiones completas (en adelante, EC) de $\mathbb{L}$ son las constantes individuales y las fórmulas de $\mathbb{L}$. Las expresiones

incompletas (en adelante EI) de $\mathbb{L}$ son las letras predicativas de $\mathbb{L}$. Las expresiones (en adelante D) de $\mathbb{L}$ son las expresiones completas e incompletas.

Semántica de $\mathbb{L}$.

Definición de interpretación.

Una interpretación $\mathbb{I}$ de $\mathbb{L}$ es igual a $< U, \sigma' >$ tal que

(i) U es un conjunto (donde $\{ \top, \bot \} \subset U$), llamado el universo de discurso de la interpretación.[18]

(ii) σ' es una función con dominio $(\sigma') = D$ y codominio $(\sigma') = C = U \cup \mathbb{P}U \cup \mathbb{P}(U \times U)$ tal que

si s es una constante individual, $\sigma'(s) \in U' = U - \{\top, \bot\}$;

si P^1 es una letra predicativa unaria, $\sigma'(P^1) \in \mathbb{P}U'$;

si P^2 es una letra predicativa binaria, $\sigma'(P^2) \subset U' \times U'$;

si A es una fórmula, $\sigma'(A) \in \{\top, \bot\}$.

Especificar cómo la función σ' asigna a las fórmulas de $\mathbb{L}$ un elemento de $\{\top, \bot\}$ equivale a definir el concepto de verdad en $\mathbb{L}$. Para ello debemos considerar todas las formas lógicas posibles de las fórmulas de $\mathbb{L}$. Así,

Definición de verdad.

(DV1) $\sigma'(P^1 s) = \top$ si y sólo si $\sigma'(s) \in \sigma'(P^1)$, en caso contrario $\sigma'(P^1 s) = \bot$;

(DV2) $\sigma'(P^2 s_i s_j) = \top$ si y sólo si $< \sigma'(s_i), \sigma'(s_j) > \in \sigma'(P^2)$, en caso contrario $\sigma'(P^2 s_i s_j) = \bot$;

(DV3) $\sigma'(\sim A)$ = T si y sólo si $\sigma'(A) = \perp$, en caso contrario $\sigma'(\sim A) = \perp$;

(DV4) $\sigma'((A \wedge B))$ = T si y sólo si $\sigma'(A)$ = T y $\sigma'(B)$ = T, en caso contrario $\sigma'((A \wedge B)) = \perp$.

(DV5) $\sigma'(\forall t\ A)$ = T si y sólo si $\sigma'(At/s)$ = T, para alguna variante en s, en caso contrario $\sigma'(\forall t\ A) = \perp$.[19]

Para mostrar que la lógica brevemente descrita es una semántica fregeana simplificada, es decir, un modelo de la teoría definida por el predicado conjuntista 'Y es una semántica fregeana simplificada' construiremos en base a $\mathbb{L}$ una estructura Y' correspondiente a Y del axioma (1).

Primero notemos que: $\mathbb{L}$ corresponde a $\mathbb{L}$, D a E, EC a N, EI a I, C a B, U a O y $\mathbb{P}$U U $\mathbb{P}$(U X U) a F. Adviértase también que en la definición de fórmula, en las cláusulas (DF1) y (DF2) están definidas dos operaciones sintácticas que corresponden a las funciones α y β. En efecto, por (DF1) a cada elemento de un subconjunto de EC X EI está asociado un elemento de EC. Y, por (DF2) a cada elemento de un subconjunto de EC X EI X EC se le asocia un elemento de EC. Llamemos a tales operaciones α' y β', respectivamente.

Además, en la definición de verdad en $\mathbb{L}$ tenemos en la cláusula (DV1) que 'ε' es una operación que a cada elemento de un subconjunto de U' X $\mathbb{P}$U' le asigna un elemento de $\{T, \perp\}$.

Así, 'ε' en (DV1) corresponde a la función ω. Similarmente, en la cláusula (DV2) 'ε' asigna a cada elemento de un subconjunto de $U' \times U' \times \mathbb{P}(U' \times U')$ un elemento de $\{\top, \bot\}$. Llamemos ε' a esta operación que corresponde a λ. De esta manera: α' corresponde a α, β' a β, ε a ω y ε' a λ.

Ahora podemos construir las estructuras:

$\mathbb{L} = \langle D, EC, EC, \alpha', \beta' \rangle$ en donde

D es un conjunto no vacío, $EC \subset D$, $EI \subset D$, $EC \cup EI = D$ y $EC \cap EI$ es vacía; y

$\mathbb{B} = \langle C, U, \mathbb{P}U \cup \mathbb{P}(U \times U), \varepsilon, \varepsilon' \rangle$ en donde

C es un conjunto no vacío, $U \subset C$, $\mathbb{P}U \cup \mathbb{P}(U \times U) \subset C$, $U \cup (\mathbb{P}U \cup \mathbb{P}(U \times U)) = C$ y $U \cap (\mathbb{P}U \cup \mathbb{P}(U \times U))$ es vacía. Por lo tanto, los axiomas (2) y (3) de la definición de $\mathcal{Y}$ se satisfacen.

Falta mostrar que también se satisface el axioma (4), y con ello el axioma (1). Tenemos por la definición de interpretación en $\mathbb{L}$ que:

a cada elemento de D, a cada expresión de $\mathbb{L}$, σ' le asigna un elemento de C, el reino del *Bedeutung* en $\mathcal{Y}'$;

a cada elemento de EC, a cada expresión completa de $\mathbb{L}$, σ' le asigna un elemento de U, el conjunto de los objetos en $\mathcal{Y}'$; y

a cada elemento de EI, a cada expresión incompleta de $\mathbb{L}$, σ' le asigna un elemento de $\mathbb{P}U \cup \mathbb{P}(U \times U)$, el conjunto de las funciones de $\mathcal{Y}'$. Además tenemos que:

$\sigma'(P^1 s)$, el *Bedeutung* (valor d
la forma $P^1 s$ de $\mathbb{L}$, es una fun
cir, de los *Bedeutungen* de s y
el *Bedeutung* (valor de verdad)
$P^2 s_i s_j$ de $\mathbb{L}$, es una función de
es, de los *Bedeutungen* de s_i, s
nos conjuntistas:

$\sigma'(\alpha'(s, P^1)) = \varepsilon(\sigma'(s), \sigma'(P^1)$

$\sigma'(\beta'(s_i, s_j, P^2)) = \varepsilon'(\sigma'(s_i),$

De esta manera, la función σ' c
truir la estructura $Y' = < \mathbb{L}$,
y (4) se satisfacen.

Al ser satisfechos los cua
da por $'Y$ es una semántica frege
ra Y' construida a partir de nue
de predicados de primer orden re

Por otro lado, las tesis se
(vii) y (viii) de nuestra lista
(ii), a saber, cada expresión ti
satisfacción del axioma (4). La
una expresión completa es un obj
presión incompleta es una funció
por el axioma (4). La tesis fun

Frege, es decir (vii), de que el *Bedeutung* de una expresión compuesta es una función de los *Bedeutungen* de sus componentes vale para las fórmulas atómicas[20] de $\mathbb{L}$ como lo muestra el hecho de que σ' sea un morfismo para las operaciones α' y ε así como para β' y ε'. Entonces, el valor de verdad de las fórmulas atómicas de $\mathbb{L}$ es una función de los *Bedeutungen* de sus componentes. La última tesis enlistada, a saber, el principio de sustitubilidad de los idénticos vale también en nuestro modelo, como lo muestran las siguientes derivaciones:

si $\sigma'(s_i) = \sigma'(s_j)$, entonces

$\varepsilon(\sigma'(s_i), \sigma'(P^1)) = \varepsilon(\sigma'(s_j), \sigma'(P^1))$, y por (4)

$\sigma'(\alpha'(s_i, P^1)) = \sigma'(\alpha'(s_j, P^1))$; igualmente,

si $\sigma'(s_i) = \sigma'(s_j)$, entonces

$\varepsilon'(\sigma'(s_k), \sigma'(s_i), \sigma'(P^2)) = \varepsilon'(\sigma'(s_k), \sigma'(s_j), \sigma'(P^2))$

de donde, por el axioma (4),

$\sigma'(\beta'(s_k, s_i, P^2)) = \sigma'(\beta'(s_k, s_j, P^2))$.

Queremos señalar en este momento que lo que se demuestra con la validez de esas tesis en nuestro modelo Y' es que tales tesis comforman, en buena medida, la semántica de la lógica de predicados de primer orden.

5. Consideraciones ũlteriores.

Es necesario ahora hacer algunas consideraciones sobre algunos componentes de *Y*' y aspectos de $\mathbb{L}$ que no se han tomado en cuenta hasta aquí.

Así como las cláusulas (DF1) y (DF2) definen unas operaciones sintácticas, las demás cláusulas de la definición de fórmula definen otras operaciones semejantes. Las operaciones en cuestión generan fórmulas compuestas a partir de otras fórmulas, simples o compuestas. Estas operaciones responden a la necesidad de contar con una base adecuada de constantes lógicas para la construcción de la lógica de predicados. En la definición de '*Y* es una semántica fregeana simplificada' no hay funciones a las que correspondan estas operaciones del modelo. Consideramos que no es preciso introducirlas puesto que tales operaciones son intrínsecas al modelo, es decir, a la lógica de predicados, y no a la teoría que se define. Es por esta razón que no incluimos en la definición de *Y* las operaciones correspondientes a las construcciones sintácticas de las cláusulas (DF3) - (DF5).

Por otro lado, encontramos definidas tres funciones en las cláusulas (DV3) - (DV5) de la definición de verdad en $\mathbb{L}$

Las dos primeras son, claramente, funciones veritativas, en el sentido de que tanto sus argumentos como sus valores son valores veritativos. Podrían introducirse en la definición de '*Y* es una semántica fregeana simplificada' unas funciones que correspondierán a estas dos del modelo; hacer ésto complicaría un poco el asunto, pero no traería dificultades consigo, puesto que el axioma (4) podría ser satisfecho con esos agregagos, y las tesis (vii) y (viii) seguirían valiendo. La razón por la que no se introducen tales funciones en la definición consiste en que, de nuevo, éstas no son propias de la teoría semántica de Frege, sino más bien son intrínsecas al modelo construido.

La otra cláusula de la definición de verdad, la (DV5), ofrece ligeras complicaciones. La dificultad consiste en concebir la función que corresponde a ésta cláusula como una función a nivel ontológico, a nivel de entidades, y tal que las tesis semánticas fregeanas que determinan a los lenguajes extensionales siguierán cumpliendose en el modelo. Para ello, podemos considerar a una fórmula cuantificada existencialmente, una fórmula de la forma $\bigvee t\ A$, como equivalente al conjunto de todos sus casos de sustitución, es decir, de las fórmulas At/s, para toda variante en s. Lo que nos permite hacer ésto es el hecho de que el rango que recorre la s, según la noción de variante en s, es el mismo conjunto que el rango de los valores de una cuantificación existencial. Así conceptualizada una cuantificación existencial, puede pensarse en una función, a la que llamaremos χ, tal que su dominio es igual al conjunto de todos los valores de verdad de los casos de sustitución de una cuantificación, es decir, dominio $(\chi) = \{ T_i : T_i = \sigma(At/s)$, donde $\sigma(s) \in U \}$, y codominio $(\chi) = \{T, \perp\}$. Para definir esta función establezcamos que el máximo de un conjunto de valores veritativos es T, si hay al menos un T, y es $\perp$ si todos son $\perp$, esto es, convengamos en que $\perp < T$ o $\perp = T$. Ahora, podemos definir a χ así

$\chi(\forall t\ A) = T$ si y sólo si máx$\{ T_i : T_i = \sigma(At/s)$, donde $\sigma(s) \in U \} = T$, y

$\chi(\forall t\ A) = \perp$ si y sólo si máx$\{ T_i : T_i = \sigma(At/s)$, donde $\sigma(s) \in U \} = \perp$.

Construida así la función correspondiente a la cláusula (DV5), se podría incluir en la definición de '*Y* es una semántica fregeana simplificada' sin problema alguno para los axiomas que la componen. Es más, lo que se logrã con ésto es adecuar del todo a nuestro modelo con las tesis semánticas fregeanas.

Notas

1. "A Formal Metasystem for Frege's Semantics", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. XVI, núm. 1, 1975.

2. *Introduction to logic*, D. Van Nostrand, N.J., 1975, § 12.2. Véase también, P. Suppes, *Set-theoretic Structures in Science*, Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, Stanford University, vol. 1, (versión mimeográfiada), 1967.

3. *The Structure and Dynamics of Theories*, Springer Verlag, New York, 1976, p. 35.

4. *Ob. cit.*, p. 89.

5. Frege distinguió en varios lugares entre el *Sinn* y el *Bedeutung* de una expresión. '*Sinn*' se traduce literalmente por 'sentido', pero la traducción de '*Bedeutung*' presenta dificultades. Su traducción literal es 'significado', sin embargo, pocas veces se ha traducido así. H. Padilla lo traduce por 'significado' en *Conceptografía Los fundamentos de la aritmética, otros ensayos filosóficos*, (UNAM, México, 1972); en cambio, U. Moulines lo traduce por 'referencia' en *Estudios sobre semántica*, (Ariel, Barcelona, 1971); y E. Rabossi y E. Bulygin lo traducen por 'denotación' en *Semántica filosófica: problemas y discusiones*, T.M. Simpson (comp.), (Siglo XXI, Bs. As., 1973). En las traducciones inglesas de los trabajos de Frege encontramos una situación similar. P. Geach y M. Black traducen '*Bedeutung*' por '*reference*' en *Translations from Philosophical writings of Gottlob Frege*, (Oxford, 1960); A. Church usa '*denotation*' como traducción de '*Bedeutung*' en *Introduction to Mathematical logic*, (Princeton UP, Princeton, N. J., 1965), en cambio,

R. Carnap propuso traducir '*Bedeutung*' por '*nominatum*', mientras que B. Russell usó '*meaning*' por '*Sinn*'. Nosotros preferimos conservar el término original alemán de Frege.

6. '*bedeute*' es el verbo asociado a '*Bedeutung*', su traducción literal es 'significa'.

7. Ver, Gottlob Frege, "Sobre sentido y referencia" traducción de *Uber Sinn und Bedeutung* por Ulises Moulines en *Estudios sobre Semántica*, Barcelona, Ariel, 1971.

8. Ver, "Sobre concepto y objeto" y "Qué es una función?".

9. "Sobre sentido y referencia", *Ob. cit.*, p. 52.

10. *Loc. cit.*

11. Ver, por ejemplo, E.D. Klemke (ed.), *Essays on Frege* , Urbana, University of Illinois Press, 1968, la. parte.

12. *Ob. cit.*

13. Duckworth, London, 1973, p. 89.

14. *Ob. cit.*, p. 90.

15. Usaremos como metavariables los siguientes símbolos: '*s*' para constantes individuales, '*t*' para variables, 'P^1' para letras predicativas unarias, 'P^2' para las binarias y '*A*' y '*B*' para fórmulas.

16. '*As/t*' significa que todas las ocurrencias de la constante individual *s* en la fórmula *A* se sustituyen por ocurrencias de la variable *t*. Similarmente para '*At/s*'.

17. Un lenguaje formal similar al presentado aquí se encuentra en M. Garrido, *Lógica Simbólica*, Tecnos, Madrid, 1974, c. 3.

18. 'T' representa el valor veritativo 'verdad' y '⊥' el valor veritativo 'falsedad'.

19. La definición de 'variante en *s*' es la siguiente: Sean *II* e *II'* interpretaciones de *IL* y sea *s* una constante individual; entonces *II* es una *variante en s* de *II'* si y sólo si *II* e *II'* son idénticas o difieren únicamente en lo que asignan a *s*. Tomada de B. Mates, *Lógica matemática elemental*, trad. cast. Carmen García Trevijano, Tecnos, Madrid, 1974, p. 77.

20. También vale para las fórmulas no atómicas. Véase último parágrafo.

Bibliografía.

Dummett, Michael; *Frege Philosophy of Language*, Duckworth, London, 1973.

Frege, Gottlob; *Estudios sobre semántica*, trad. cast. Ulises Moulines, Ariel, Barcelona, 1971.

_____; *Conceptografía*, trad. cast. Hugo Padilla, UNAM, México, 1972.

Harris Will; "A Formal Metasystem for Frege's Semantics", *Notre Dame Journal of formal logic*, vol. XVI, núm. 1, 1975.