UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA

[FACTORIZACIÓN ESPECTRAL : ALGUNOS ALGORÍTMOS PARA SU SOLUCIÓN]

TESIS PROFESIONAL, que presentan:

ANTONIO ALONSO CONCHEIRO
~~LUIS P. M. GRIJALVA LOPEZ~~
HORACIO GONZALEZ DUHART
ALEJANDRO LOPEZ TOLEDO
BERNARD MINKOW WENGERMAN
LUIS RODRIGUEZ VIQUEIRA

Para obtener su título de Ingenieros Mecánicos Electricistas.

1970

1534

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

. U N I C O

MEXICO, D. F. 1970.

R E C O N O C I M I E N T O.

Agradecemos a los Sres. Dres. MARCO A. MURRAY-LASSO, ROBERTO CANALES R. Y RENATO BARRERA R. su valiosa orientación durante el desarrollo del presente trabajo.

Los autores.

INDICE GENERAL

Con admiración a mis buenos amigos, SALVADOR RUIZ VILLEGAS, ARTURO SALAZAR GARCIA, HEBERTO CASTILLO, y demás presos políticos, que en la adversidad, han sabido mantener en pie su espíritu de lucha, e ideales. Como un homenaje a su integridad.

¡HASTA LA VICTORIA SIEMPRE¡

INTRODUCCION.

Dos problemas muy importantes, en los que se hace necesario el resolver el problema de la Factorización Espectral, son el filtrado y el de Compensación Optima.

En este trabajo, se presenta el problema, y se dan algoritmos para su resolución.

Debemos recalcar, que el último de estos (Programa FACTES), resuelve el problema mucho más rapidamente que cualquiera de las soluciones comunmente usadas, y con mayor sencillez.

Se presentan los resultados de computadora de una serie de ejemplos, y el listado del programa.

FACTORIZACION ESPECTRAL

ALGUNOS ALGORITMOS PARA SU SOLUCION.

ANTONIO ALONSO CONCHEIRO

TESIS PROFESIONAL

1

FACTORIZACION ESPECTRAL

El problema que se va a tratar, es indiscutible, que tiene una gran importancia, sobre todo en filtrado y compensación óptima.

En problemas de filtrado deben resolverse las ecuaciones de Wiener-Hopf, que son de la forma (referencia 1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt_1\, \Psi(t_1)\, A(\tau - t_1) - \Gamma(\tau) = 0 \quad \text{Para } \tau \geq 0$$

que debe de cumplirse de tal manera que la realimentación sea óptima y físicamente realizable.

La solución explícita de esta ecuación es

$$\Psi(s) = \frac{\left[\dfrac{\Gamma(s)}{A^-(s)}\right]_+}{A^+(s)}$$

Donde $A^+(s)$ es la parte de $A(s)$, cuyos polos y ceros están en el semiplano izquierdo del plano s, $A^+(s)$ la parte de $A(s)$ cuyos polos y ceros están en el semiplano derecho. Esto es de hecho la factorización espectral.

Además $\left[\quad\right]+$ es el polinomio que resulta de expander en fracciones parciales, y tomar los términos negativos

Definición Formal del Problema.

Sea $g(s)$ un polinomio par, con coeficientes reales y de grado 2n. Si dicho polinomio es mayor o igual a cero, cuando la parte real de s es igual a cero ($R_e\,[s] = 0$), entonces existe otro polinomio, $A(s)$, con coeficientes reales, de grado h, tal que

$$h(s)\,h(-s) = g(s)$$

El dar una prueba heurística de la existencia de este polinomio h(s) es fácil.

Debido a que g(s) es un polinomio par, sus raíces complejas aparecerán en grupos de 4, Simétricas, con respecto a los 2 ejes (real e imaginario). Ahora bien, cuando la parte real de estas raíces es cero, o sea, cuando se localizan en el eje imaginario, el que g(s) sea mayor que cero, nos garantiza que aparecerán dobles, con lo cual demostramos la existencia de un h(s).

El problema de la factorización espectral, es precisamente encontrar dicho polinomio h(s), tal que

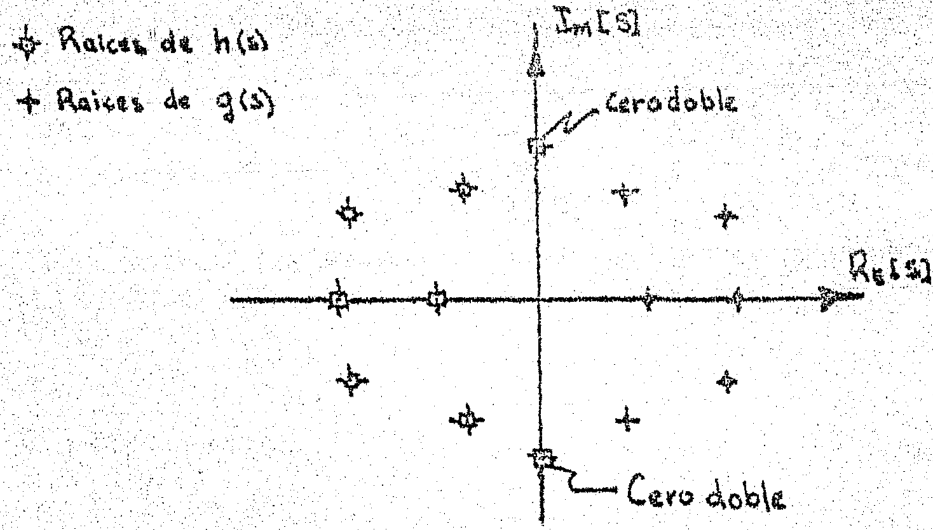
$$h(s) = \left[g(s)\right]^{+}$$

O sea que sus raíces o ceros, esten en el semiplano izquierdo del plano S

$$(R_e(s) \leq 0)$$

En la siguiente figura, se pueden ver las raíces de un polinomio g(s), y las correspondientes a su factor espectral del semiplano izquierdo

$$\left[g(s)\right]^{+}$$



Posteriormente a Wiener, Brockett (referencia 2) al hablar de controles escalares, que minimízan una función cuadrática, se encontró con un problema básicamente igual, puesto que llegó a una ecuación de la forma

$$p(s)p(-s) + q(-s)q(s) = h(s)h(-s) = g(s)$$

En donde dados $p(s)$ y $q(s)$, que son polinomios que no tienen factores comunes, se desea encontrar una solución para $h(s)$, tal que sus raíces tengan parte real menor o igual a cero.

Posibles soluciones al problema

a) Por supuesto la primera solución posible, es obtener todas las raíces del polinomio $g(s)$, por cualquier método estándar, y escoger todas las que se encuentren en el semiplano izquierdo ya que son precisamente estas, las raíces de $\left[g(s)\right]^{+}$

Sin embargo, si se resuelve el problema así, se está encontrando más información de la solicitada, puesto que para conocer $\left[g(s)\right]^{+}$, basta saber el valor de sus coeficientes.

Como es lógico el proporcionar esta información de más, nos lleva más tiempo, por lo que se intentará encontrar una solución que nos de tan solo estos coeficientes, sin la necesidad de encontrar las raíces de g(s).

Debemos hacer notar, sin embargo, que esta forma de resolver el problema, se sigue usando en la actualidad. (referencia 3)

b) El problema podría ser resuelto así mismo, usando la ecuación de Riccati.

Dado

$$\frac{\hat{X}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{q(s)}{p(s)}$$

La

$$u(s)$$

tal que

$$\int_{-j\infty}^{j\infty} \left[\hat{u}(s)\, \hat{u}(-s) + X(\hat{s})\, X(-\hat{s}) \right] ds$$

esta dada por

$$\hat{U}_{OPT.}(s) = \left[P(s) - \left[P(s) P(-s) + q(s) q(-s) \right]^{+} \right] X \rightarrow \text{(Referencia 2)}$$

y esto es equivalente a que si

$$x_1 = x$$

$$x_2 = x^{(1)}$$

$$x_3 = x^{(2)}$$

$$\vdots$$

$$x_n = x^{(n-1)}$$

entonces

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{X}_{n-1} \\ \dot{X}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -P_0 & -P_1 & -P_2 & -P_3 & \cdots & -P_{n-1} & -P_n \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \underline{u}$$

donde

$$X = [q_0 \;\; q_1 \;\; q_2 \;\; \ldots \;\; q_{n-1} \;\; q_n] \; \underline{X} \; .$$

La $\underline{u}$ que minimíza a

$$\int_0^{\infty} [U^2(t) + X^2(t)] \, dt$$

esta dada por

$$U_{opt.} = \underline{b}' \, \underline{K} \, \underline{X} \qquad \text{(referencia 4)}$$

donde $\underline{b}' = [0, 0, \ldots 1]$ y $\underline{k}$ es la matriz solución de la ecuación de Riccati, que es

$$\underline{A}\,\underline{K}' + \underline{K}\,\underline{A} - \underline{K}\,\underline{b}\,\underline{b}'\,\underline{K} = -\underline{c}\,\underline{c}'$$

Así pues es el último renglón de la matriz $\underline{k}$, en el que estaríamos interesados, para la solución de nuestro problema.

Sin embargo, en la solución de la ecuación de Riccati, estamos encontrando toda la matriz $\underline{k}$, por lo que, al igual que en el caso anterior, estamos trabajando de más.

Actualmente es este el método más usado para la resolución de problemas de Control óptimo (equivalente a la factorización espectral).

c) Debido a que las raíces de $h(s)$ son las de

$$\left[g(s)\right]^{+}$$

o sea las que cumplen con

$$R_e\,(s) \leq 0$$

Se podría pensar en alguna transformación, aplicada a la variable s, que, a las raíces de $g(s)$ con parte real positiva ($\left[g(s)\right]^{-}$), las hiciese girar 180° alrededor del eje imaginario, superponiendolas a las que se localizan en el semiplano izquierdo

$$\left(\left[g(s)\right]^{+} \right)$$

Así pues, si $\hat{s}$ es la variable s después de la transformación, se tendrá

$$h(\hat{s}) \quad h(\hat{s}) = h^2(\hat{s}) = g(\hat{s})$$

A continuación tendríamos que encontrar la raíz cuadrada del nuevo polinomio $g(\hat{s})$, y obtendríamos

$$h(\hat{s})$$

polinomio este, cuyas raíces son las de

$$\left[g(s)\right]^{+}$$

Sin embargo, (y sin tener en cuenta la dificultad que pueda tener encontrar la raíz cuadrada de un polinomio), después de intentarlo, no se encontró una transformación satisfactoria.

d) El problema podría verse de la siguiente manera:
Se conocen los coeficientes de

$$g(s),$$

que es un polinomio de grado 2n, lo cual, si sus raíces son

$$\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm\alpha_3, \ldots \pm\alpha_n, \pm\bar{\alpha}_1, \pm\bar{\alpha}_2, \pm\bar{\alpha}_3, \ldots \pm\bar{\alpha}_n$$

equivale a decir que se conocen las siguientes cantidades:

(Para una mayor claridad en el desarrollo, este se hizo suponiendo que todas las raíces de g(s) son reales, pero el resultado no sería mucho más complicado, ni perdería validez, si algunas de ellas fuesen complejas.)

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\cdots\alpha_n^2=g_{2n}$$

$$\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_1^2\alpha_3^2+\cdots+\alpha_1^2\alpha_n^2+\alpha_2^2\alpha_3^2+\cdots+\alpha_2^2\alpha_n^2+\cdots\alpha_{n-2}^2\alpha_{n-1}^2+$$
$$+\alpha_{n-2}^2\alpha_n^2+\alpha_{n-1}^2\alpha_n^2=g_{2n-2}$$

$$\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2+\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_4^2+\cdots+\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_n^2+\alpha_1^2\alpha_3^2\alpha_4^2+\cdots+\alpha_1^2\alpha_3^2\alpha_n^2+\cdots$$
$$+\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4^2+\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_5^2+\cdots+\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_n^2+\alpha_2^2\alpha_4^2\alpha_5^2+\cdots+\alpha_2^2\alpha_4^2\alpha_n^2+\cdots$$
$$+\alpha_{n-3}^2\alpha_{n-2}^2\alpha_{n-1}^2+\alpha_{n-3}^2\alpha_{n-2}^2\alpha_n^2+\alpha_{n-3}^2\alpha_{n-1}^2\alpha_n^2+\alpha_{n-2}^2\alpha_{n-1}^2\alpha_n^2=g_{2n-4}$$

$$\vdots$$

$$\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4^2\cdots\alpha_{n-1}^2\alpha_n^2=g_0$$

Donde g_0 es el término independiente del polinómio $g(s)$, g_2 el coeficiente de S^2 y así sucesivamente, hasta g_{2n}, que es el coeficiente de s^{2n}.

Las cantidades que se desean conocer o sea los coeficientes de

$$\left[g(s)\right]^+$$

serían

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n=h_n$$

$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_1\alpha_n+\alpha_2\alpha_3+\cdots+\alpha_2\alpha_n+\cdots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}+\alpha_{n-2}\alpha_n+$$
$$\alpha_{n-1}\alpha_n=h_{n-1}$$

$$\vdots$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\cdots\alpha_{n-1}\alpha_n=h_0$$

De las cuales, se puede conocer facilmente h_0, ya que

$$h_0=\sqrt{g_0}$$

Para conocer el resto de las h, tendríamos que saber cuáles son las raíces de

$$g(s)$$

o sea las α , cosa que como se dijo en a), se tratará de evitar por no ser eficiente, aunque esto no quiere decir que el problema no pueda resolverse así.

e) Ahora bien, por último, la factorización espectral, puede reducirse a la solución de un sistema de ecuaciones no lineales simultáneas.

Sean

$$g(s) = g_o - g_2 s^2 + g_4 s^4 - g_6 s^6 + \dots + (-1)^n g_{2n} s^{2n}$$

$$h(s) = h_o + h_2 s + h_2 s^2 + h_3 s^3 + \dots + h_n s^n = \left[g(s) \right]^+$$

y

$$h(-s) = h_o - h_1 s + h_2 s^2 - h_3 s^3 + \dots + (-1)^n h_n s^n = \left[g(s) \right]^-$$

Donde tanto las g, como las h, son números reales.

Los signos de los terminos de g(s), se escogieron así, tan solo para que la estructura del sistema de ecuaciones no-lineales, fuese más uniforme.

puesto que

$$g(s) = h(s)\, h(-s)$$

Efectuando el producto, e igualando los coeficientes de s del mismo grado en ambos miembros, se llega al siguiente sistema de ecuaciones no-lineales.

$$g_o = h_o^2$$

$$g_2 = h_1^2 - 2h_o h_2$$

$$g_4 = h_2^2 - 2h_1 h_3 + 2h_o h_4$$

$$\vdots$$

$$g_{2n-4} = h_{n-2}^2 - 2h_{n-1} h_{n-3} + 2h_n h_{n-4}$$

$$g_{2n-2} = h_{n-1}^2 - 2\, h_n h_{n-2}$$

$$g_{2n} = h_n^2$$

De donde vemos que la forma general de estas ecuaciones es:

$$g_{2k} = h_k^2 + 2\sum_{I=1}^{k} (-1)^I h_{k-I} h_{k+I}$$

y este sistema de ecuaciones, puede resolverse de diferentes maneras.

Lo primero que se pensó, fue convertir el problema en uno lineal, que pudiese ser resuelto más o menos fácilmente.

por ejemplo

$$h_o^2,\ (h_o+h_2)^2,\quad (h_o+h_2+h_4)^2,\ \dots\ (h_1+h_3)^2,\ (h_1+h_3+h_5)^2\dots$$

Sin llegar a ningún resultado positivo, por lo que se decidió resolver el sistema de ecuaciones no-lineales, por algún método iterativo.

A este efecto, se escribieron varios programas de computadora, en lenguaje FORTRAN , de los cuales se hablará a continuación.

Antes de describir estos programas, conviene mencionar que el problema básico de los métodos iterativos es el de la convergencia. En muchos casos, dependiendo del método y de la función de que se trate, el que una solución converja o no, depende de las condiciones iniciales, o sea de los valores que se asignen a las variables al iniciar el proceso iterativo.

1. Programa negros

En este programa de computadora, el método que se aplica es una variación del método de Southwell modificado. (referencia 5)

Este método propone una función

$$f(x_1,x_2,x_3,\ \dots\ x_n) = f(\underline{x})$$

Sea

$$\underline{x}_o = \left[x_{1,0},x_{2,0},\ \dots\ x_{n,0}\right]$$

La forma general de la variación en cada iteración es

$$X_{I,K+1} = X_{I,K} - \frac{f'(\underline{X})|_{X_0}}{f''(\underline{X})|_{X_0}}$$

Esto es, calcula la primera y la segunda derivada parcial de

$$f(\underline{x})$$

con respecto a

$$x_1$$

y las evalua en

$$\underline{x}_0$$

A continuación evalua la nueva X_1

$$(x_{1,1})$$

de acuerdo a la fórmula general.

Forma el nuevo vector

$$\underline{x}_1 = \left[x_{1,1}, x_{2,0}, x_{3,0} \cdots x_{n,0} \right]$$

Con este vector, evalua la primera y la segunda derivada de f con respecto a la segunda variable y encuentra su nuevo valor.

La variación que utiliza el programa negros, a diferencia del Método de Southwell-modificado cambia todas las variables a la vez en cada iteración.

Es decir, con un vector inicial

$$\underline{h}_o = \left[h_{1,0}, h_{2,0}, h_{3,0}, \cdots h_{n,0} \right]$$

calcula

$$\underline{h}_1 = \left[h_{1,1}, h_{2,1}, \cdots h_{n,1} \right]$$

Aplicando la misma fórmula general.

La función que se propuso

$$f(h_1, h_2, h_3, \cdots h_{n-1})$$

es

$$f = \sum_{K=1}^{n-1} \left[\left(h_K^2 + 2\sum_{I=1}^{K} (-1)^I h_{K-I}\, h_{K+I} \right) - g_{2K} \right]^2 = \sum_{K=1}^{n-1} (E_{2K})^2$$

En donde E_{2I} es el error correspondiente a la ecuación del sistema, en donde h_I aparece elevada al cuadrado,

o sea:

$$E_{2I} = h_I^2 - 2h_{I-I}\, h_{I+I} + 2h_{I-2}\, h_{I+2} \cdots - g_{2I}$$

Notemos que en esta función, que llamaremos de errores cuadráticos, no están consideradas como variables

$$h_o \quad y \quad h_n$$

Ya que estas las conocemos exactamente, por lo que no debemos modificarlas innecesariamente, de iteración a iteración.

(De la primera y la última ecuaciones, sabemos que

$$h_o = \sqrt{g_o}$$

y

$$h_n = \sqrt{g_{2n}} \quad)$$

Los valores iniciales se escogieron como las raíces cuadradas del valor absoluto de las g, esto es

$$h_{I,0} = \sqrt{| g_{2I} |}$$

Que si observamos las ecuaciones del sistema, podemos considerar que son una buena primera aproximación a la solución.

Además, el término de la fórmula general,

$$\frac{f'(\underline{h})}{f''(\underline{h})}$$

está siendo multiplicado por un factor de peso a, que debe ser menor que 1, de tal forma que la variación de iteración a iteración, no sea demasiado grande. En general, se usó una a = 1/2.

Con este programa, estamos conscientes que no garantizamos convergencia, pero trabajó eficientemente en varios ejemplos, y es por eso que lo incluimos.

Ejemplo 1

El polinomio dato fue

$$g(s) = 1 - 9s^2 + 16s^4 - 9s^6 + s^8$$

los valores iniciales

$$h_0 = 1$$

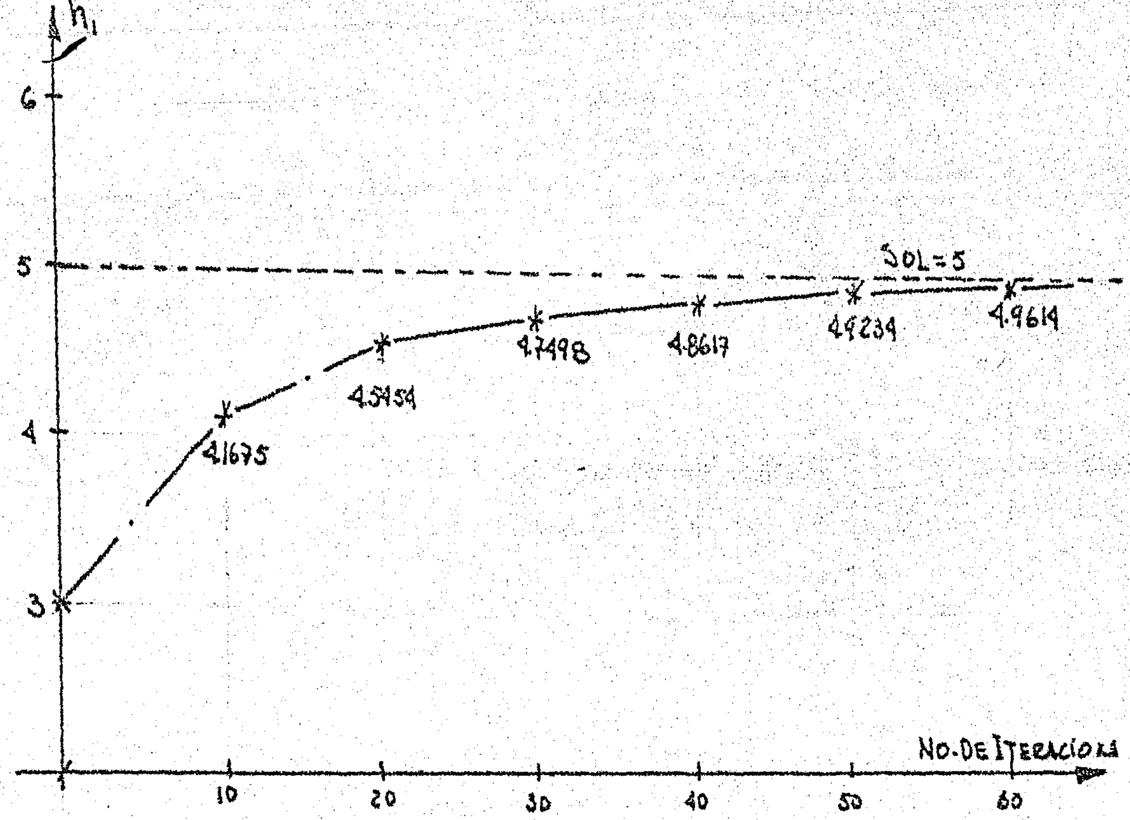
$$h_1 = 3$$

$$h_2 = 4$$

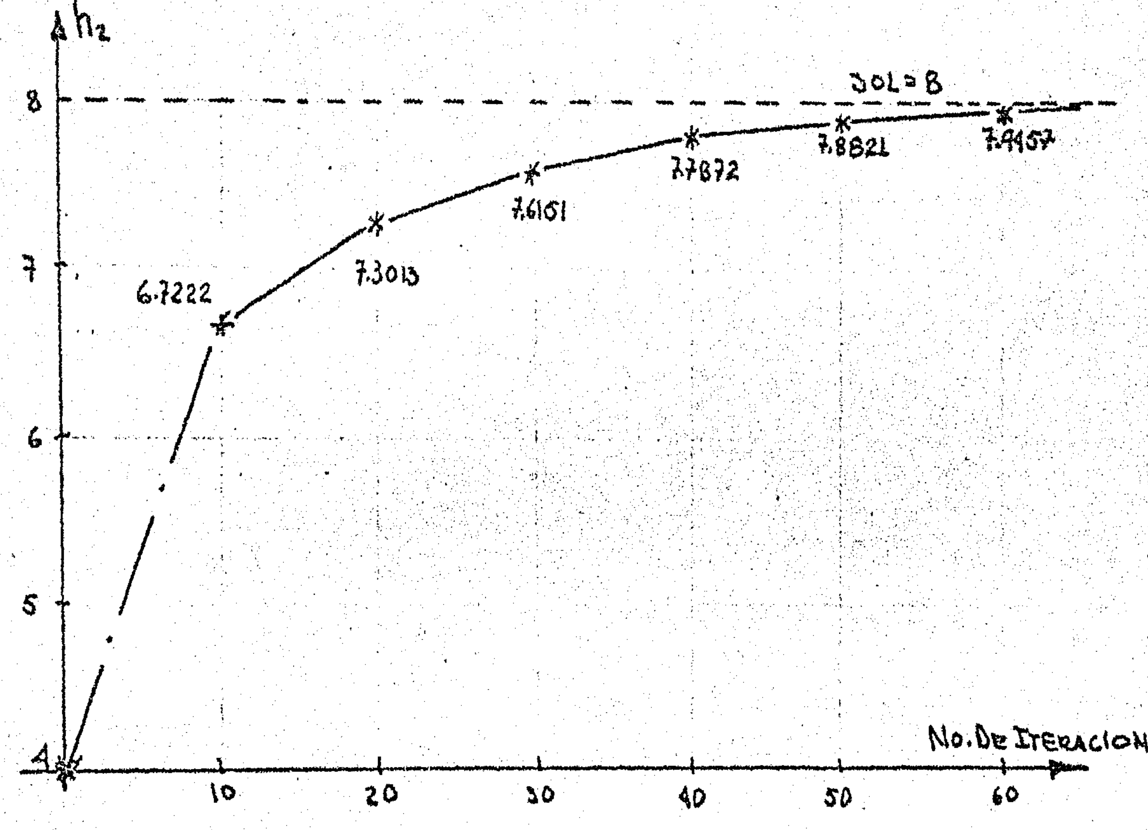
$$h_3 = 3$$

$$h_4 = 1$$

A continuación se muestran 2 gráficas de las variaciones de 2 de las variables, h_1 y h_2 a lo largo del proceso.



h_1
SOL = 5
4.1675
4.5454
4.7498
4.8617
4.9234
4.9614
NO. DE ITERACIONES
10
20
30
40
50
60



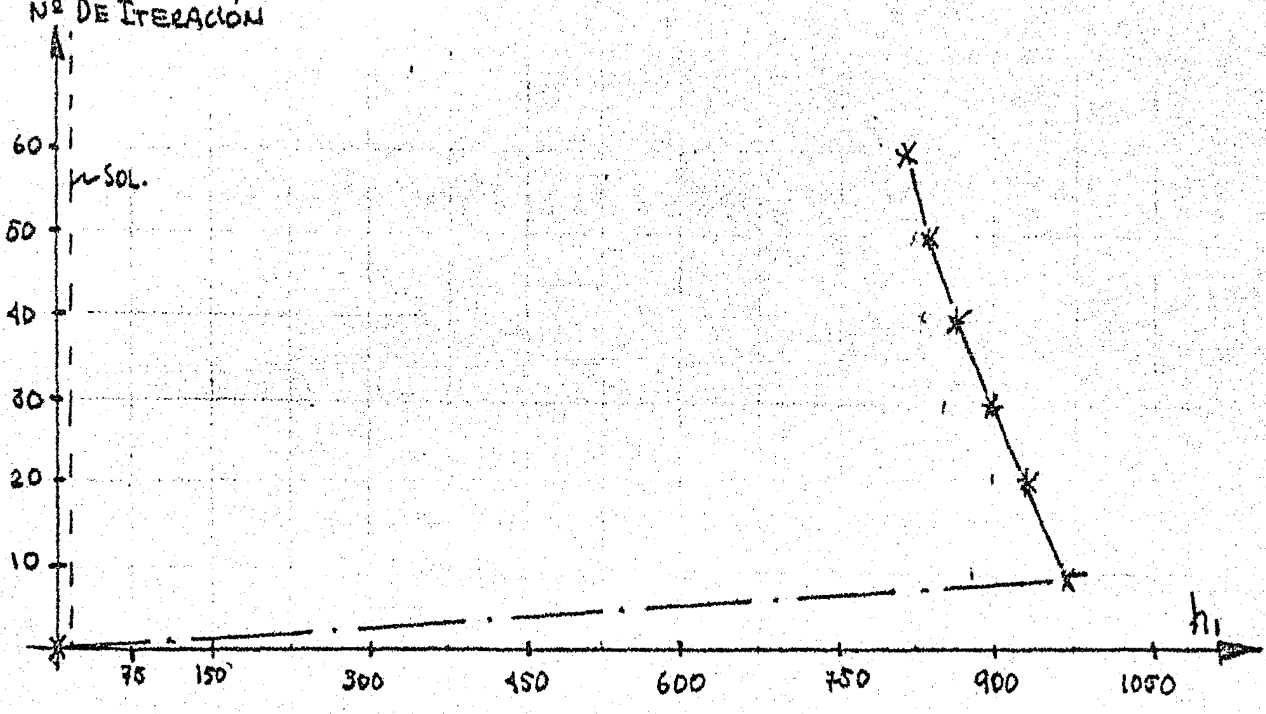
h_2
SOL = 8
6.7222
7.3013
7.6151
7.7872
7.8821
7.9457
NO. DE ITERACION
10
20
30
40
50
60

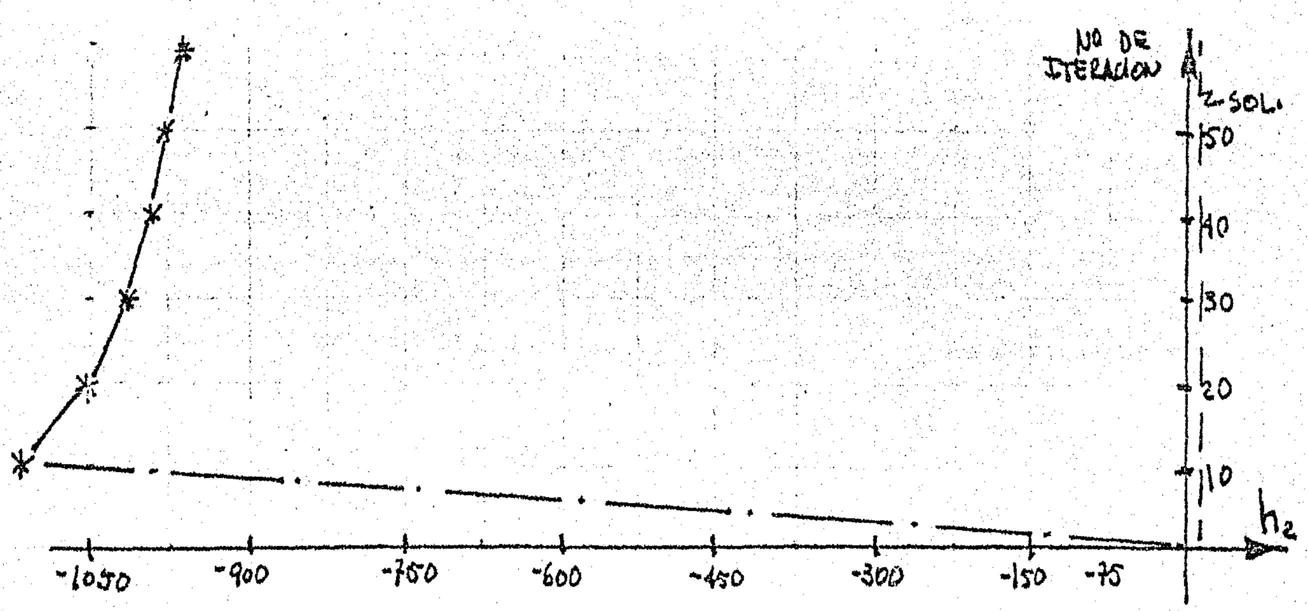
Ejemplo 2.

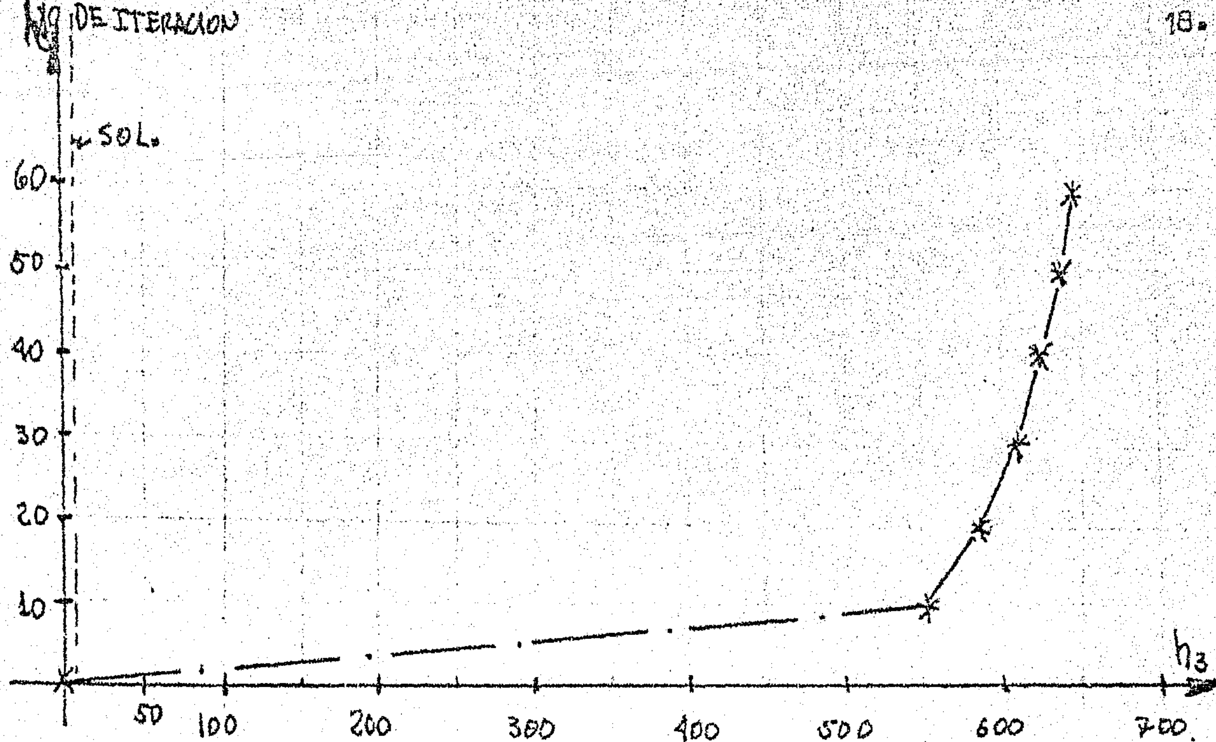
El polinomio dato fue

$$g(s) = 0.01 - 0.4s^{2} + 0.6s^{2} - 0.4235^{6} + 0.55^{8} - 0.45^{10} + 0.01$$

Las gráficas de la variación de h_1, h_2 y h_3, a través del proceso, se muestran a continuación







Como se puede ver, en este ejemplo, el método no converge.

Si siguiesemos el proceso, las h, se irían acercando a la solución, hasta estar suficientemente cerca, disparandose otra vez.

Probablemente el programa funcionaría mejor, con un factor de peso tal como a = 1/20, pero sería mucho más lento.

PROGRAMA "SACADO"

La Filosofía de este programa, es bastante más sencilla que la del anterior, puesto que no necesita ni de las primeras, ni de las segundas derivadas parciales.

Con este programa, se calculan los errores de cada ecuación, esto es

$$E_{2K} = h_K^2 - g_{2K} + \sum_{I=1}^{K} (-1)^I h_{K-I} h_{K+I}$$

donde

El estado inicial, esta dado, al igual que antes por las raíces cuadradas de los valores absolutos de las g

$$h_{k,0} = \sqrt{|g_{2k}|}$$

Las nuevas h, se calculan en cada iteración, de acuerdo a la siguiente

$$h_{k,I} = h_{k,I-1} + \text{signo}\sqrt{|E_{2k,I-1}|}\ a$$

En donde signo será igual a 1, si el error

$$E_{2k}$$

es negativo, e igual a -1

$$\text{signo} = -1$$

si el error es positivo, y a es un factor de peso igual a $1/I$

Esto se aplica, porque estamos suponiendo que el peso del factor cuadrático h_k^2 es el mayor.

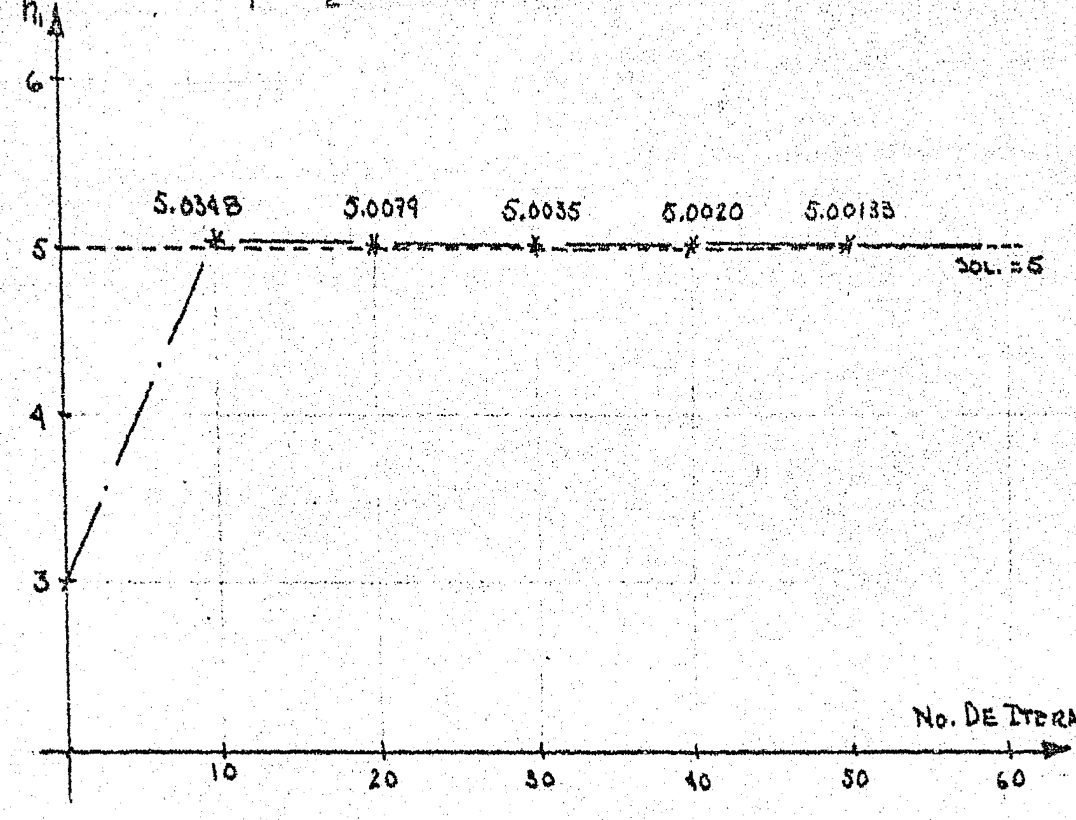
Aquí nuevamente no garantizamos que el método converja, pero sin embargo, en la mayoría de los casos funciona.

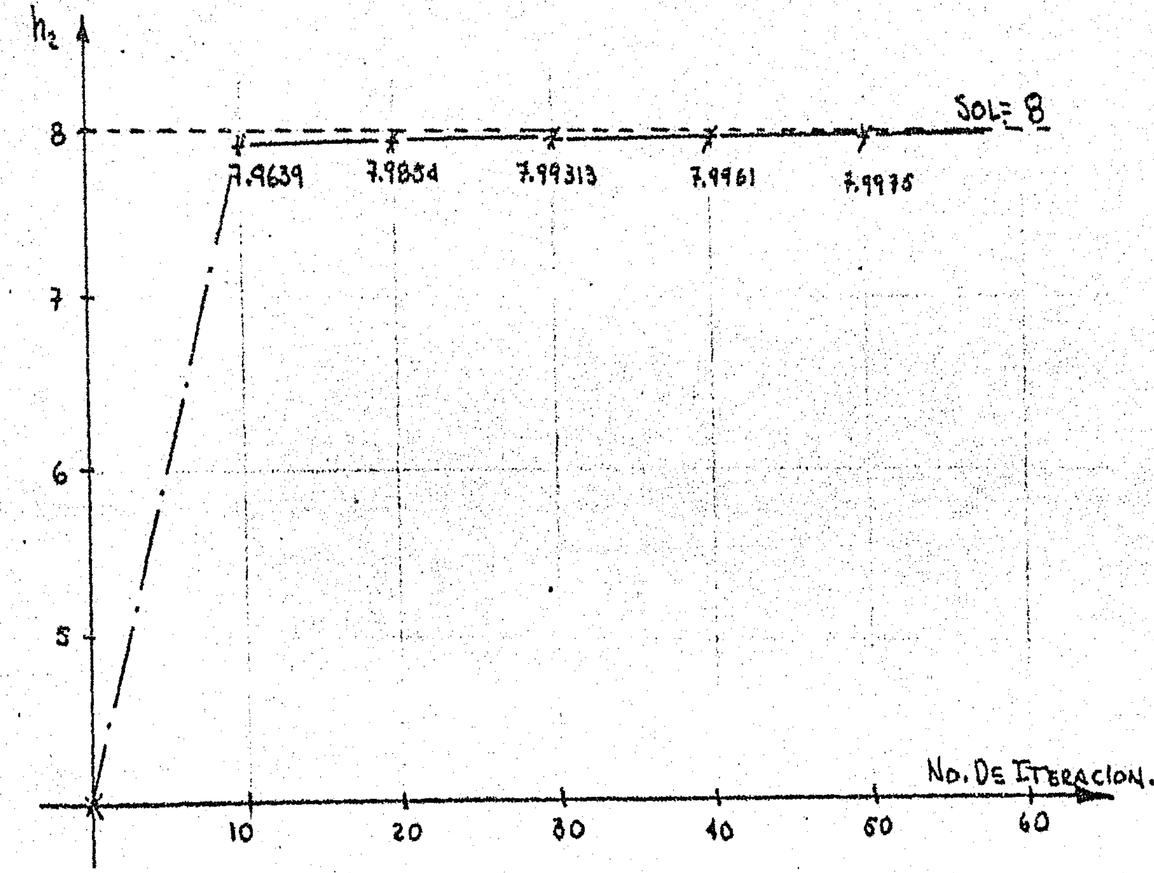
Tiene además la ventaja sobre el anterior, que si converge lo hace más rápidamente, y hace 5 veces menos operaciones.

A continuación se darán 3 ejemplos, dos en los que el método funcionó correctamente y otro en el que no lo hizo.

Ejemplo 1. El polinomio dato es $g(s) = 1 - 9s^2 + 16\,s^4 - 9s^6 + s^8$.

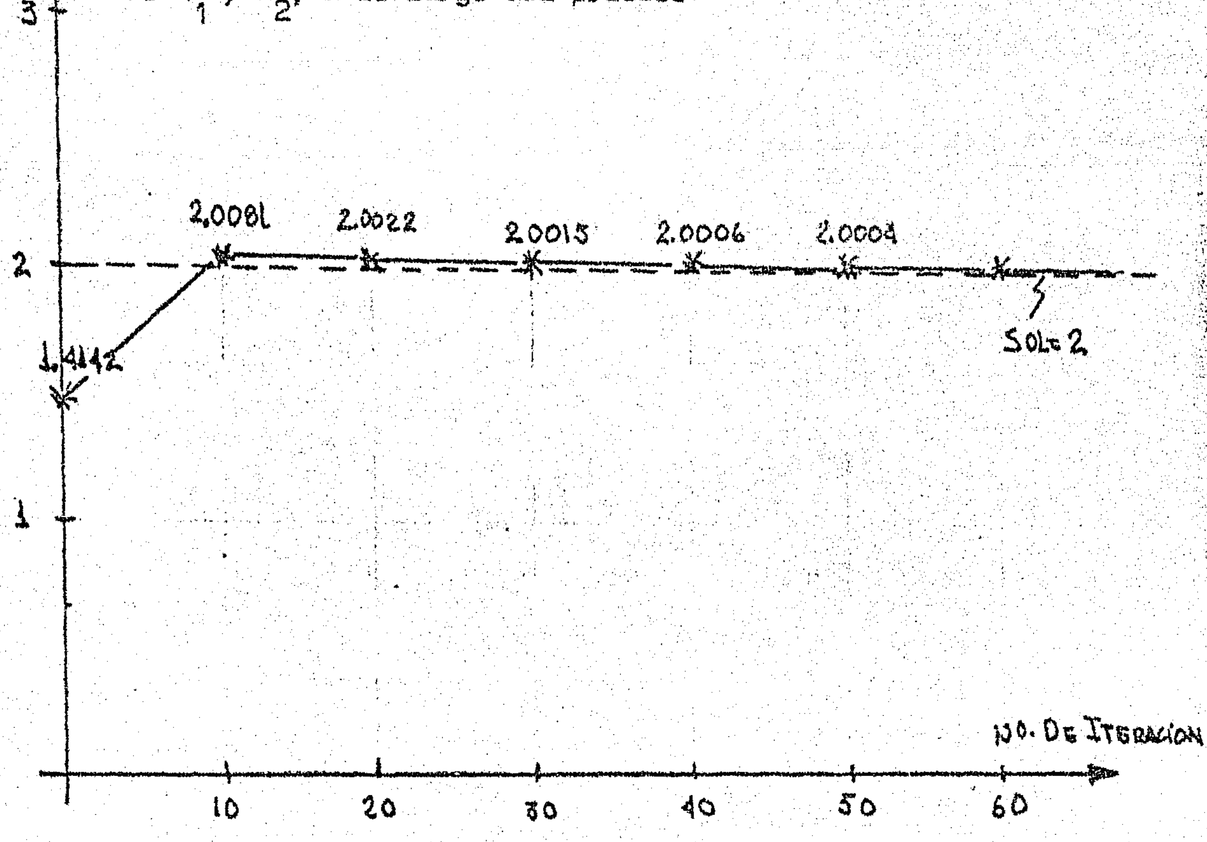
Se graficará h_1 y h_2 a lo largo del proceso.

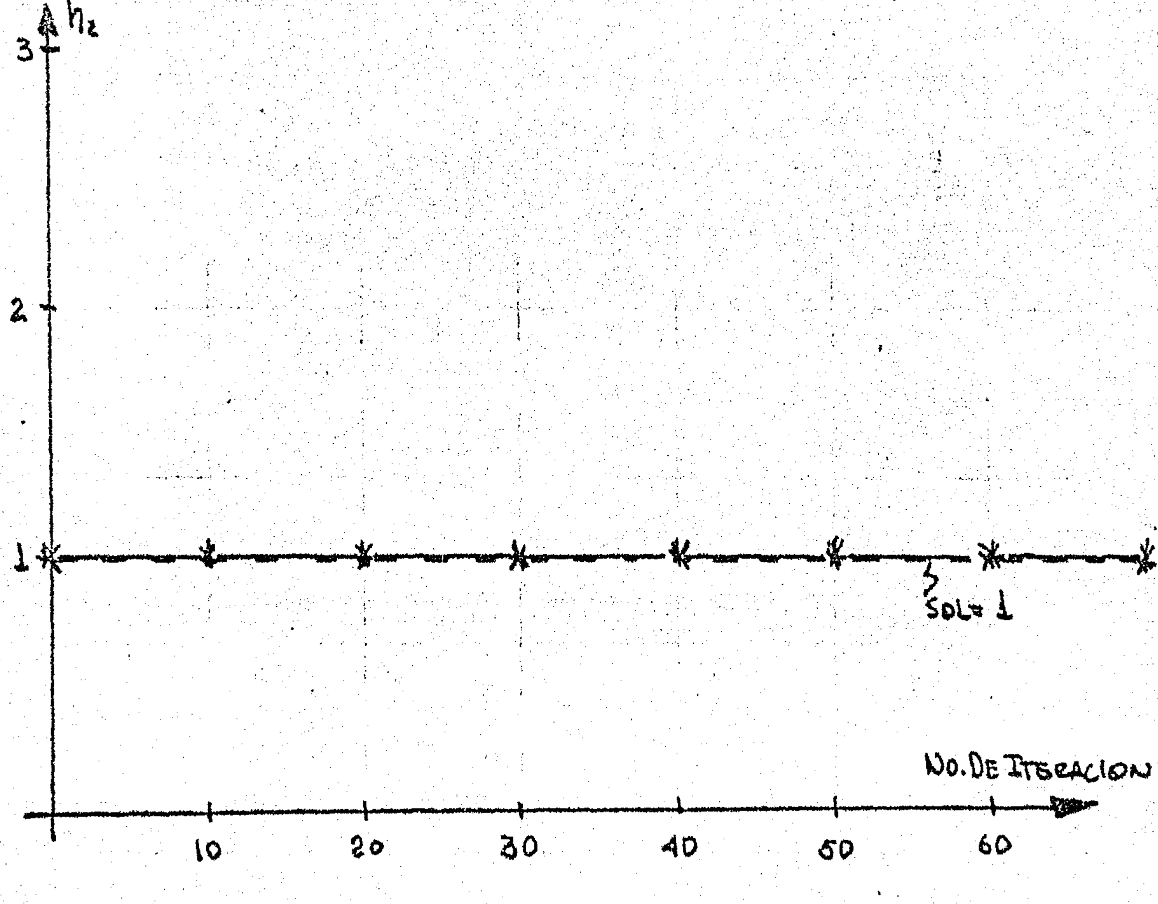




Ejemplo 2. El polinomio dato es $g(s) = 1+2s^2 + s^4 + s^6 + 2s^8 + s^{10}$.

A continuación, se harán 2 gráficas, en las que se muestra la variación de h_1 y h_2, a lo largo del proceso.

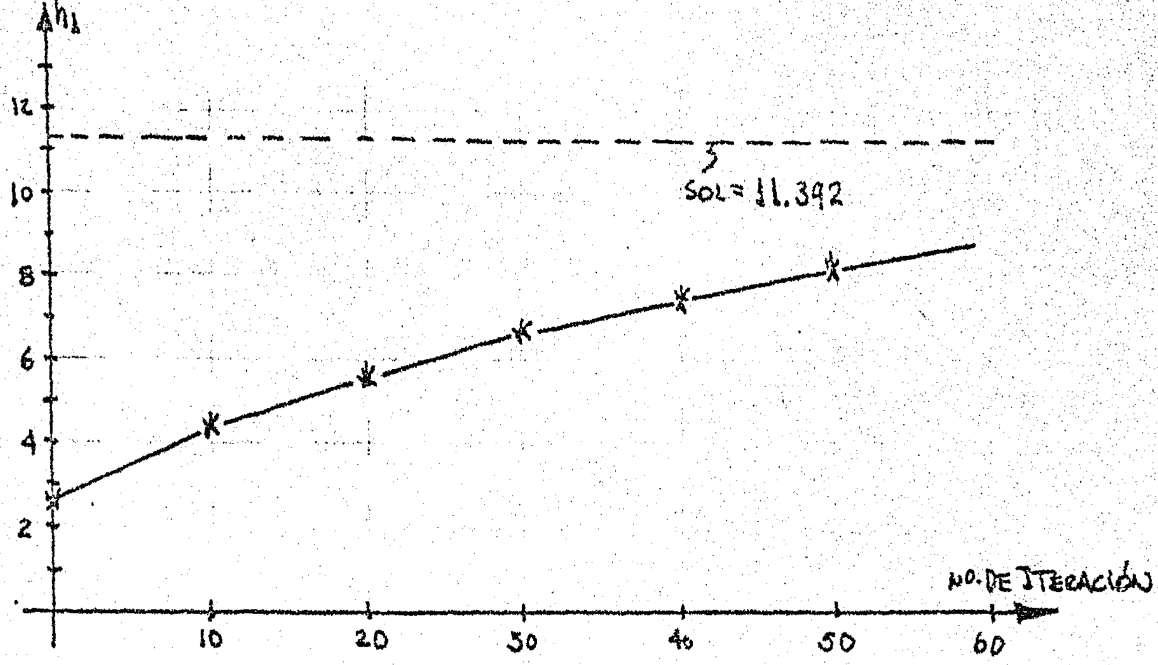


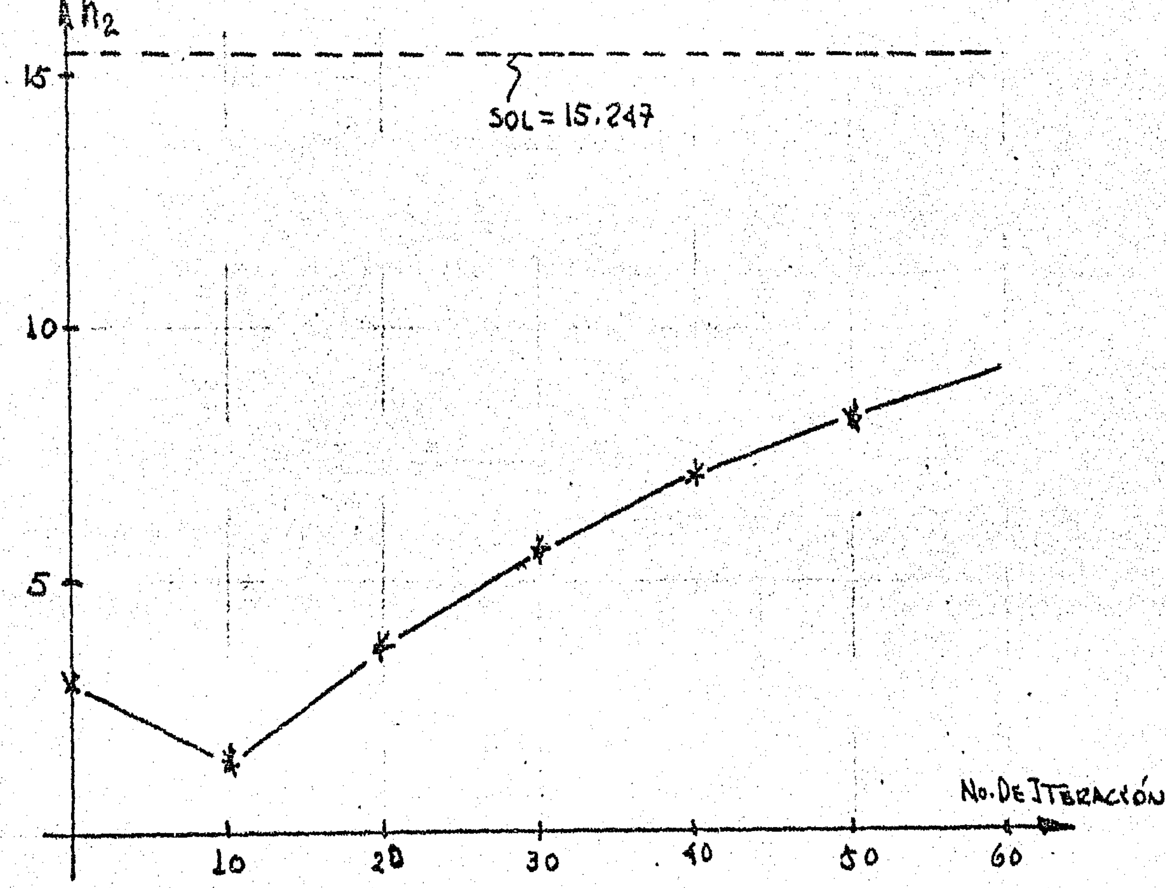


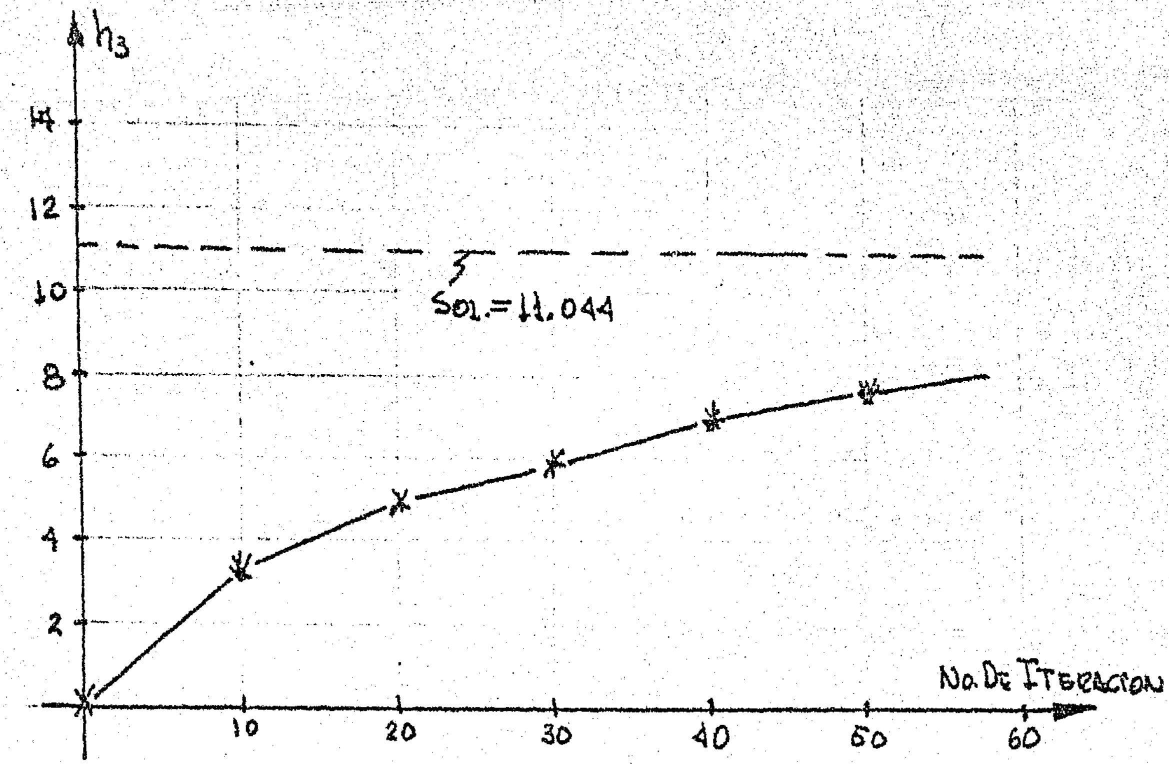
Ejemplo 3. Los datos son

$$g(s) = 16 + 7s^2 + 12s^4 + s^8$$

Las variables que se graficarán son h_1, h_2 y h_3.







Probablemente, si se le hubiese dado tiempo para realizar más iteraciones, se hubiese llegado al resultado correcto.

Sin embargo, a pesar de haber fallado en algún problema en particular, podemos considerar que el método es ventajoso.

PROGRAMA FACTES (Factorización Espectral)

En la realización de este programa, se usa un método de relajación, que se describe a continuación.

Como en los casos anteriores, los valores iniciales de las h están dados por la raíz cuadrada de los valores absolutos de las g.

$$h_{I,0} = \sqrt{|g_{2I}|}$$

Las nuevas h_1 se calculan, en cada iteración, mediante el uso de

$$h_{I,NUEVA} = \frac{h^2_{I,ANT.} + g_{2I} + 2\sum_{L=1}^{n-1}(-1)^{L+1} h_{I-L,ANT.}\, h_{I+L,ANT.}}{2\, h_{I,ANTERIOR}}$$

Para evitar una división por cero, cuando alguna de las variables es nula el programa le asigna el valor 1, y por otra parte, si en una iteración, alguna de las h toma un valor negativo, le cambia de signo, de tal manera que todas sean positivas, puesto que estas es una ondición necesaria para que el polinomio g(s) sea Hourwitz. (referencia 6)

El agoritmo anterior, se obtuvo al tratar de encontrar uno de contracción, (referencia 7), o sea, cuando

$$x_I = F(x_1, x_2, \ldots x_I, \ldots x_n)$$

y se cumple que

$$\sum_{I=1}^{n} \left| \frac{\partial F}{\partial x_I} \right| < 1 \quad .\text{—}(a)$$

El método nos garantiza convergencia a la solución; Sin embargo, la condición (a), es suficiente pero no necesaria y en nuestro caso,

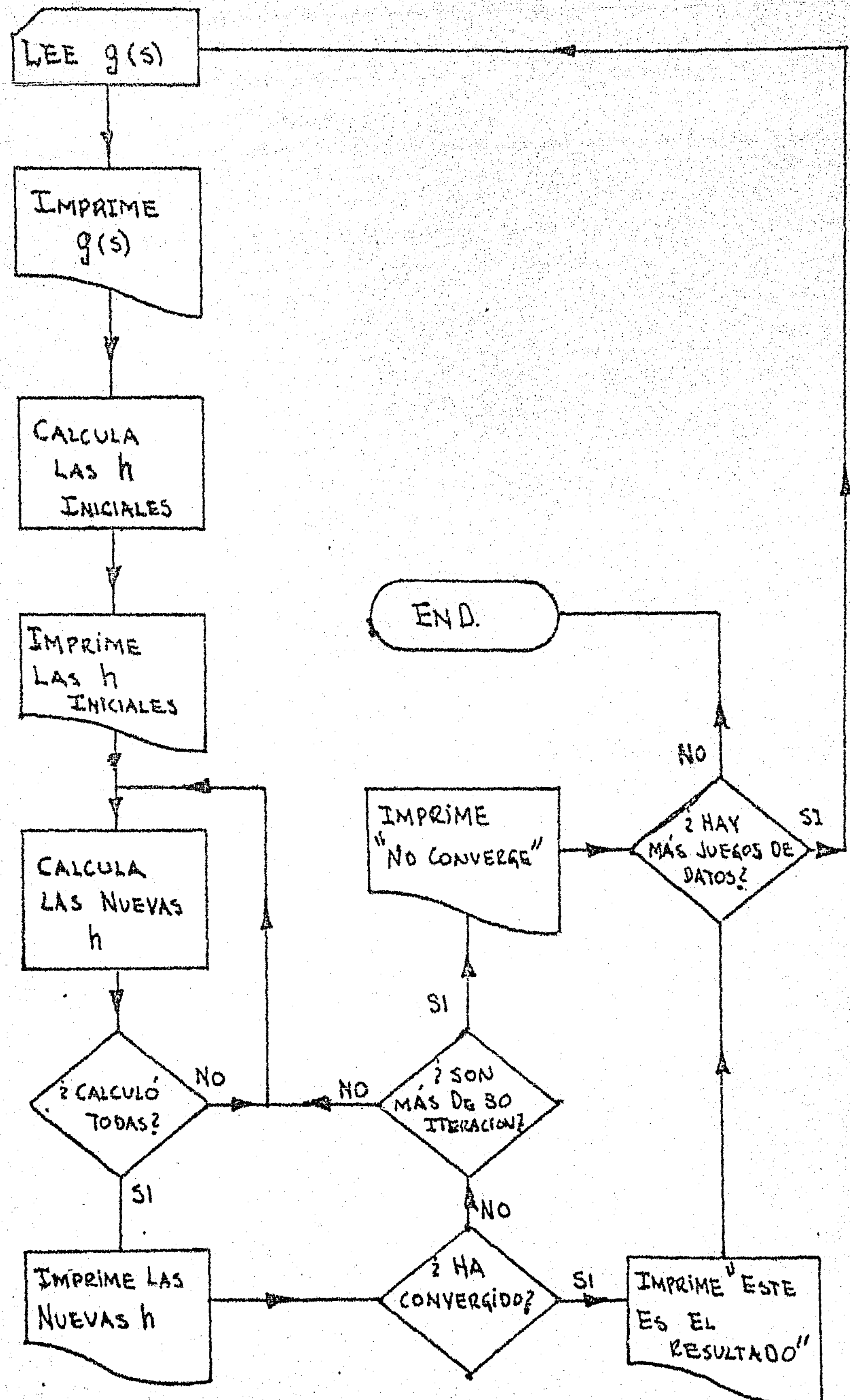
$$\sum_{I=1}^{n} \left| \frac{\partial F}{\partial x_I} \right| = 0$$

En la solución, lo cual nos garantiza que si empezamos en la solución, permanecemos ahí.

Hasta el momento, este método nunca ha fallado y se espera que converja en el caso general, cosa que se intentará probar en investigaciones futuras. Así mismo se verá la forma de acelerar la convergencia.

A continuación, se presentan algunos de los ejemplos que se resolvieron, así como una aplicación de resolución de problemas de reguladores. Los resultados de este, se compararán con los obtenidos con la ecuación de Riccati, (referencia 8).

DIAGRAMA DE FLUJO.-



B 5 5 0 0   F O R T R A N   C O M P I L A T I O N

```
C       PROGRAMA PARA RESOLVER FACTORIZACION ESPECTRAL, USANDO UN
C       METODO DE RELAJACION, HACIENDO LA SUBSTITUCION SIGUIENTE
C        H(I)= G(2I)+H(I)**2+2H(I-1)*H(I+1)..../2H(I)
C
        DIMENSION G(30),H(30),A(30),B(30)
   412  READ 100,N
   100  FORMAT (I4)
        READ 101,(G(K),K=2,22,2)
   101  FORMAT (7F10.5)
        PRINT 201,N
        PRINT 101,(G(K),K=2,N+2,2)
   201  FORMAT (5X,"LOS DATOS DE G(0) A G(",I2,")",//)
        I=0
        PRINT 202
   202  FORMAT (5X,"LAS H(I) INICIALES SON",//)
        DO 50 K=2,N+2,2
        I=I+1
        H(I)=SQRT(ABS(G(K)))
        IF (H(I))50,10,50
    10  H(I)=1
    50  CONTINUE
        DO 60 I=1,N/2+1
        L=I-1
    60  PRINT 102,L,H(I)
   102  FORMAT (5X,"H(",I2,")=",F10.5)
        PRINT 7215
  7215  FORMAT (1H ,//)
        M=1
  1000  CONTINUE
```

```
      DO 40 J=2,N/2
   40 B(J)=H(J)
      DO 51 K=4,N,2
      SIG=1
      J=K/2
      A(K)=G(K)+H(J)**2
      DO 52 I=1,J
      IF (J-I)52,52,2
    2 IF ((J+I)-(N/2+1))3,3,52
    3 A(K)=A(K)+2*SIG*H(J-I)*H(J+I)
      SIG=-SIG
   52 CONTINUE
      H(J)=A(K)/(2*H(J))
      IF (H(J))12,11,51
   11 H(J)=1
      GO TO 51
   12 H(J)=-H(J)
   51 CONTINUE
      PRINT 206,M
  206 FORMAT (5X,"RESULTADO EN LA ITERACION",I2,//)
      DO 61 J=1,N/2+1
      NK=J-1
   61 PRINT 111,NK,H(J)
  111 FORMAT (5X,"H(",I2,")=",F15.5)
      PRINT 7216
 7216 FORMAT (1H ,//)
      IYA=1
      DO 81 J=2,N/2
      IF (ABS(1-B(J)/H(J))-0.01)80,80,81
   80 IYA=IYA+1
   81 CONTINUE
```

```
      IF (IYA-N/2)82,83,83
   82 M=M+1
      IF (M-30)84,84,85
   84 GO TO 1000
   85 PRINT 300
  300 FORMAT ("NO CONVERGE",////)
      GO TO 1001
   83 PRINT 301
  301 FORMAT ("ESTE ES EL RESULTADO",////)
 1001 READ 100,KLAVE
      IF (KLAVE)411,412,411
  411 CALL EXIT
      END
```

Ejemplo.— APLICACIÓN EN UN PROBLEMA DE CONTROL OPTIMO.- (No 1).

Dado el sistema

$$x + 4x = u$$

$$y = 2\,x - 1$$

y las condiciones iniciales

$$x(0) = x_0 \;;\; x(0) = x_1$$

Se desea encontrar una ley de realimentación

$$u(s) = n(s)\,\hat{x}\,(s)$$

tal que

$$\int_0^\infty \left[u^2(t) + y^2(t)\right] dt$$

Sea un mínimo.

La solución a dicho problema, como se vió anteriormente, sería

$$n(s) = s^2+4 - \left[\,(s^2+4)(s^2+4)+(2s-1)(-2s-1)\right]^+$$

$$n\,(s) = s^2+4 - \left[s^4+4s^2+17\right]^+$$

Así pues, el polinomio dato para nuestro programa será

$$g(s) = s^4 + 4s^2 + 17$$

Los resultados del programa "FACTES", (ver apéndice de ejemplos), en la iteración número 2, que es la final, es

$$\left[s^4 + 4s^2 + 17\right]^+ = s^2 + 2.05s + 4.123$$

por lo que

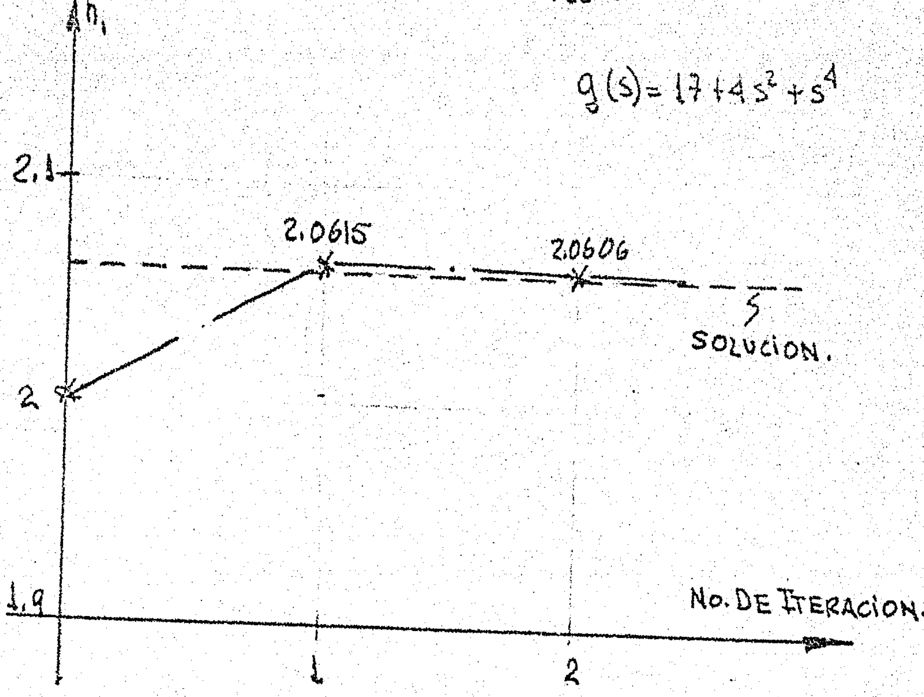
$$n(s) = 2.06s + 0.123$$

El resultado para el mismo problema, usando la ecuación de Riccati es (referencia 8).

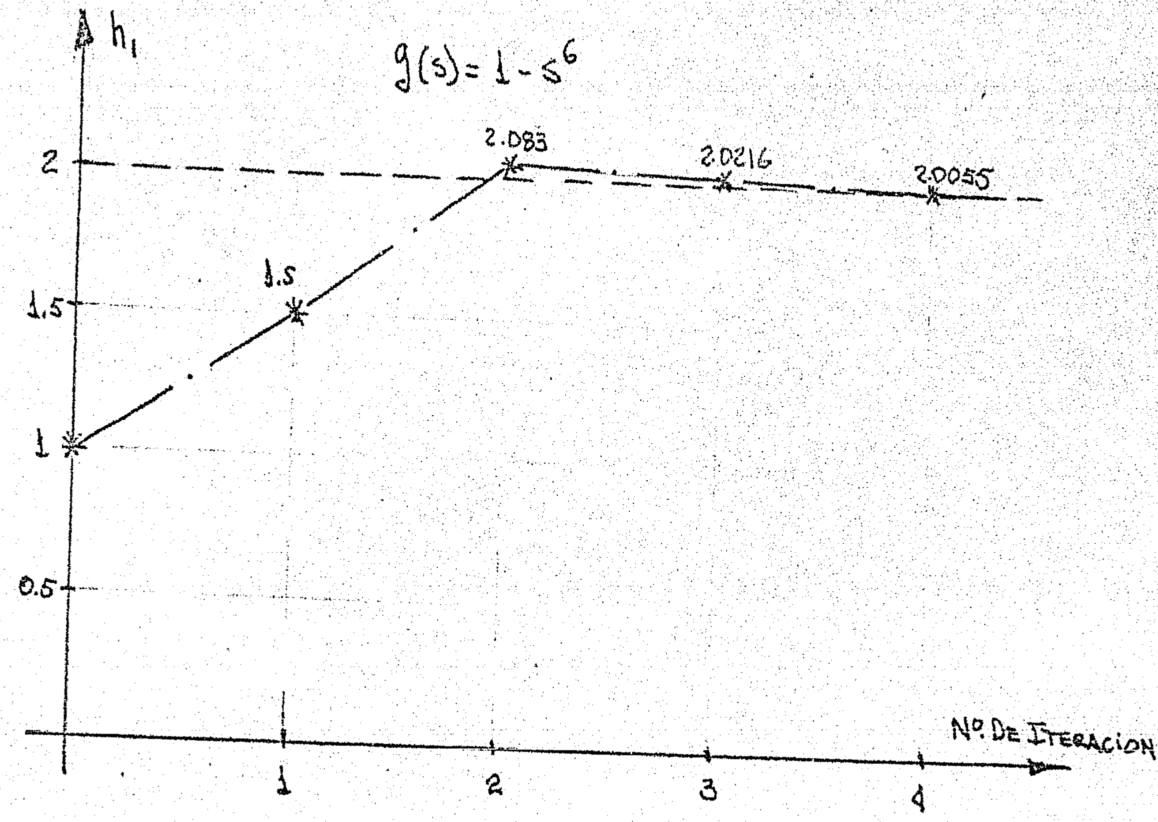
$$n(s) = 2.072s + 0.114526$$

Como se puede ver claramente, en problemas de este tipo, el programa "FACTES", resultó mucho más eficiente.

GRÁFICA EJEMPLO 1.-



EJEMPLO 2.-



```
LOS DATOS DE G(0) A G( 4)
```

EJEMPLO 1.-

```
17.00000  -4.00000   1.00000
   LAS H(I) INICIALES SON

   H( 0)=    4.12311
   H( 1)=    2.00000
   H( 2)=    1.00000


   RESULTADO EN LA ITERACION 1

   H( 0)=           4.12311
   H( 1)=           2.06155
   H( 2)=           1.00000


   RESULTADO EN LA ITERACION 2

   H( 0)=           4.12311
   H( 1)=           2.06063
   H( 2)=           1.00000


ESTE ES EL RESULTADO


   LOS DATOS DE G(0) A G( 6)
```

EJEMPLO 2.-

```
 1.00000   0.00000   0.00000   1.00000
   LAS H(I) INICIALES SON

   H( 0)=    1.00000
   H( 1)=    1.00000
   H( 2)=    1.00000
   H( 3)=    1.00000


   RESULTADO EN LA ITERACION 1

   H( 0)=           1.00000
   H( 1)=           1.50000
   H( 2)=           2.00000
   H( 3)=           1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 2

```
H( 0)=          1.00000
H( 1)=          2.08333
H( 2)=          2.04167
H( 3)=          1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 3

```
H( 0)=          1.00000
H( 1)=          2.02167
H( 2)=          2.01104
H( 3)=          1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 4

```
H( 0)=          1.00000
H( 1)=          2.00558
H( 2)=          2.00280
H( 3)=          1.00000
```

ESTE ES EL RESULTADO

LOS DATOS DE G(0) A G(8)

EJEMPLO 3.-

```
4.00000  16.00000  20.00000  40.00000   1.00000
```

LAS H(I) INICIALES SON

```
H( 0)=   2.00000
H( 1)=   4.00000
H( 2)=   4.47214
H( 3)=   6.32456
H( 4)=   1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 1

```
H( 0)=          2.00000
H( 1)=          6.23607
H( 2)=         12.84405
H( 3)=          8.35538
H( 4)=          1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 2

```
H( 0)=        2.00000
H( 1)=        8.52017
H( 2)=       12.58747
H( 3)=        8.07787
H( 4)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 3

```
H( 0)=        2.00000
H( 1)=        8.15378
H( 2)=       12.16188
H( 3)=        8.02042
H( 4)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 4

```
H( 0)=        2.00000
H( 1)=        8.04116
H( 2)=       12.04165
H( 3)=        8.00522
H( 4)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 5

```
H( 0)=        2.00000
H( 1)=        8.01046
H( 2)=       12.01050
H( 3)=        8.00131
H( 4)=        1.00000
```

ESTE ES EL RESULTADO

LOS DATOS DE G(0) A G(8)   EJEMPLO 4.-

```
1.00000    1.00000    0.00000    1.00000    1.00000
 LAS H(I) INICIALES SON

 H( 0)=   1.00000
 H( 1)=   1.00000
```

```
H( 2)=   1.00000
H( 3)=   1.00000
H( 4)=   1.00000


RESULTADO EN LA ITERACION 1

H( 0)=        1.00000
H( 1)=        2.00000
H( 2)=        1.50000
H( 3)=        2.50000
H( 4)=        1.00000


RESULTADO EN LA ITERACION 2

H( 0)=        1.00000
H( 1)=        2.00000
H( 2)=        3.41667
H( 3)=        2.81667
H( 4)=        1.00000


RESULTADO EN LA ITERACION 3

H( 0)=        1.00000
H( 1)=        2.95833
H( 2)=        3.85447
H( 3)=        2.95430
H( 4)=        1.00000


RESULTADO EN LA ITERACION 4

H( 0)=        1.00000
H( 1)=        2.95110
H( 2)=        3.92970
H( 3)=        2.97656
H( 4)=        1.00000


RESULTADO EN LA ITERACION 5

H( 0)=        1.00000
H( 1)=        2.97658
H( 2)=        3.96429
H( 3)=        2.98833
H( 4)=        1.00000
```

ESTE ES EL RESULTADO

LOS DATOS DE G(0) A G(8)

EJEMPLO 5.-

```
1.00000   9.00000  16.00000   9.00000   1.00000
  LAS H(I) INICIALES SON

  H( 0)=   1.00000
  H( 1)=   3.00000
  H( 2)=   4.00000
  H( 3)=   3.00000
  H( 4)=   1.00000


  RESULTADO EN LA ITERACION 1

  H( 0)=        1.00000
  H( 1)=        4.33333
  H( 2)=        7.00000
  H( 3)=        5.33333
  H( 4)=        1.00000


  RESULTADO EN LA ITERACION 2

  H( 0)=        1.00000
  H( 1)=        4.82051
  H( 2)=        8.17277
  H( 3)=        5.04281
  H( 4)=        1.00000


  RESULTADO EN LA ITERACION 3

  H( 0)=        1.00000
  H( 1)=        5.03918
  H( 2)=        8.05219
  H( 3)=        5.01053
  H( 4)=        1.00000


  RESULTADO EN LA ITERACION 4

  H( 0)=        1.00000
  H( 1)=        5.01051
  H( 2)=        8.01325
```

```
H( 3)=        5.00266
H( 4)=        1.00000
```

ESTE ES EL RESULTADO

```
LOS DATOS DE G(0) A G( 4)
```

EJEMPLO 6.-

```
9.00000   3.00000   1.00000   3.00000   9.00000
LAS H(I) INICIALES SON

H( 0)=    3.00000
H( 1)=    1.73205
H( 2)=    1.00000
H( 3)=    1.73205
H( 4)=    3.00000


RESULTADO EN LA ITERACION 1

H( 0)=        3.00000
H( 1)=        3.46410
H( 2)=        2.00000
H( 3)=        5.19615
H( 4)=        3.00000


RESULTADO EN LA ITERACION 2

H( 0)=        3.00000
H( 1)=        3.89711
H( 2)=        6.87500
H( 3)=        6.85603
H( 4)=        3.00000


RESULTADO EN LA ITERACION 3

H( 0)=        3.00000
H( 1)=        7.62583
H( 2)=        9.80593
H( 3)=        7.93759
H( 4)=        3.00000


RESULTADO EN LA ITERACION 4
```

```
H( 0)=        3.00000
H( 1)=        7.86727
H( 2)=       10.40445
H( 3)=        8.09011
H( 4)=        3.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 5

```
H( 0)=        3.00000
H( 1)=        8.09179
H( 2)=       10.67714
H( 3)=        8.18980
H( 4)=        3.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 6

```
H( 0)=        3.00000
H( 1)=        8.18978
H( 2)=       10.82437
H( 3)=        8.24312
H( 4)=        3.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 7

```
H( 0)=        3.00000
H( 1)=        8.24312
H( 2)=       10.90433
H( 3)=        8.27205
H( 4)=        3.00000
```

ESTE ES EL RESULTADO

LOS DATOS DE G(0) A G(8)

EJEMPLO 7.-

```
16.00000   7.00000  12.00000   0.00000  16.00000
LAS H(I) INICIALES SON

H( 0)=   4.00000
H( 1)=   2.64575
H( 2)=   3.46410
H( 3)=   1.00000
H( 4)=   4.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 1

```
H( 0)=        4.00000
H( 1)=        7.80298
H( 2)=        1.12092
H( 3)=        4.98368
H( 4)=        4.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 2

```
H( 0)=        4.00000
H( 1)=        4.95426
H( 2)=       13.66618
H( 3)=       13.46059
H( 4)=        4.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 3

```
H( 0)=        4.00000
H( 1)=       14.21747
H( 2)=       20.10494
H( 3)=       12.70476
H( 4)=        4.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 4

```
H( 0)=        4.00000
H( 1)=       13.01132
H( 2)=       17.77722
H( 3)=       11.94941
H( 4)=        4.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 5

```
H( 0)=        4.00000
H( 1)=       12.23981
H( 2)=       16.55339
H( 3)=       11.51586
H( 4)=        4.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 6

```
H( 0)=        4.00000
H( 1)=       11.81555
H( 2)=       15.89243
H( 3)=       11.27812
H( 4)=        4.00000


RESULTADO EN LA ITERACION 7


H( 0)=        4.00000
H( 1)=       11.58417
H( 2)=       15.53773
H( 3)=       11.14981
H( 4)=        4.00000


RESULTADO EN LA ITERACION 8


H( 0)=        4.00000
H( 1)=       11.45938
H( 2)=       15.34848
H( 3)=       11.08118
H( 4)=        4.00000


RESULTADO EN LA ITERACION 9


H( 0)=        4.00000
H( 1)=       11.39264
H( 2)=       15.24788
H( 3)=       11.04465
H( 4)=        4.00000


ESTE ES EL RESULTADO


LOS DATOS DE G(0) A G(10)
```

EJEMPLO 8.—

```
 1.00000   2.00000   1.00000   1.00000   2.00000   1.00000
   LAS H(I) INICIALES SnN


H( 0)=   1.00000
H( 1)=   1.41421
H( 2)=   1.00000
H( 3)=   1.00000
H( 4)=   1.41421
H( 5)=   1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 1

H(0)= 1.00000
H(1)= 2.12132
H(2)= 1.70711
H(3)= 1.29289
H(4)= 2.32843
H(5)= 1.00000

RESULTADO EN LA ITERACION 2

H(0)= 1.00000
H(1)= 2.33680
H(2)= 1.55228
H(3)= 2.02133
H(4)= 2.46180
H(5)= 1.00000

RESULTADO EN LA ITERACION 3

H(0)= 1.00000
H(1)= 2.26061
H(2)= 2.45602
H(3)= 3.13086
H(4)= 2.90888
H(5)= 1.00000

RESULTADO EN LA ITERACION 4

H(0)= 1.00000
H(1)= 2.65910
H(2)= 3.63695
H(3)= 4.25490
H(4)= 3.26094
H(5)= 1.00000

RESULTADO EN LA ITERACION 5

H(0)= 1.00000
H(1)= 3.07335
H(2)= 4.65488
H(3)= 5.09014
H(4)= 3.49807
H(5)= 1.00000

RESULTADO EN LA ITERACION 6

```
H( 0)=        1.00000
H( 1)=        3.37665
H( 2)=        5.37575
H( 3)=        5.67428
H( 4)=        3.65702
H( 5)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 7

```
H( 0)=        1.00000
H( 1)=        3.57651
H( 2)=        5.87573
H( 3)=        6.08181
H( 4)=        3.76501
H( 5)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 8

```
H( 0)=        1.00000
H( 1)=        3.71072
H( 2)=        6.22306
H( 3)=        6.36543
H( 4)=        3.83879
H( 5)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 9

```
H( 0)=        1.00000
H( 1)=        3.80190
H( 2)=        6.46389
H( 3)=        6.56216
H( 4)=        3.88933
H( 5)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION10

```
H( 0)=        1.00000
H( 1)=        3.86415
H( 2)=        6.63049
H( 3)=        6.69825
H( 4)=        3.92399
H( 5)=        1.00000
```

```
RESULTADO EN LA ITERACION11

H( 0)=        1.00000
H( 1)=        3.90676
H( 2)=        6.74553
H( 3)=        6.79221
H( 4)=        3.94778
H( 5)=        1.00000


RESULTADO EN LA ITERACION12

H( 0)=        1.00000
H( 1)=        3.93598
H( 2)=        6.82486
H( 3)=        6.85690
H( 4)=        3.96412
H( 5)=        1.00000


RESULTADO EN LA ITERACION13

H( 0)=        1.00000
H( 1)=        3.95602
H( 2)=        6.87951
H( 3)=        6.90162
H( 4)=        3.97534
H( 5)=        1.00000
```

ESTE ES EL RESULTADO

```
LOS DATOS DE G(0) A G(12)
```

EJEMPLO 9.-

```
1.00000   2.00000   3.00000   4.00000   3.00000   2.00000   1.00000
LAS H(I) INICIALES SON

H( 0)=   1.00000
H( 1)=   1.41421
H( 2)=   1.73205
H( 3)=   2.00000
H( 4)=   1.73205
H( 5)=   1.41421
H( 6)=   1.00000
```

```
RESULTADO EN LA ITERACION 1


H( 0)=        1.00000
H( 1)=        2.63896
H( 2)=        3.77926
H( 3)=        3.90691
H( 4)=        2.74097
H( 5)=        3.35174
H( 6)=        1.00000


RESULTADO EN LA ITERACION 2


H( 0)=        1.00000
H( 1)=        3.13052
H( 2)=        4.79776
H( 3)=        3.40051
H( 4)=        4.32612
H( 5)=        3.26493
H( 6)=        1.00000


RESULTADO EN LA ITERACION 3


H( 0)=        1.00000
H( 1)=        3.41727
H( 2)=        4.23189
H( 3)=        4.68525
H( 4)=        5.06754
H( 5)=        3.49036
H( 6)=        1.00000


RESULTADO EN LA ITERACION 4


H( 0)=        1.00000
H( 1)=        3.23965
H( 2)=        4.85964
H( 3)=        5.82531
H( 4)=        5.88366
H( 5)=        3.71734
H( 6)=        1.00000


RESULTADO EN LA ITERACION 5


H( 0)=        1.00000
H( 1)=        3.42855
H( 2)=        5.63761
H( 3)=        6.93385
H( 4)=        6.61945
```

```
H( 5)=        3.90838
H( 6)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 6

```
H( 0)=        1.00000
H( 1)=        3.65026
H( 2)=        6.40027
H( 3)=        7.95212
H( 4)=        7.26468
H( 5)=        4.06879
H( 6)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 7

```
H( 0)=        1.00000
H( 1)=        3.85246
H( 2)=        7.08599
H( 3)=        8.85559
H( 4)=        7.82324
H( 5)=        4.20291
H( 6)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 8

```
H( 0)=        1.00000
H( 1)=        4.02515
H( 2)=        7.68099
H( 3)=        9.64178
H( 4)=        8.30143
H( 5)=        4.31455
H( 6)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 9

```
H( 0)=        1.00000
H( 1)=        4.16926
H( 2)=        8.18859
H( 3)=       10.31661
H( 4)=        8.70621
H( 5)=        4.40708
H( 6)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION10

```
H( 0)=        1.00000
H( 1)=        4.28652
H( 2)=        8.61719
H( 3)=       10.80976
H( 4)=        9.04799
H( 5)=        4.48351
H( 6)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION11

```
H( 0)=        1.00000
H( 1)=        4.38680
H( 2)=        8.97639
H( 3)=       11.37247
H( 4)=        9.33303
H( 5)=        4.54643
H( 6)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION12

```
H( 0)=        1.00000
H( 1)=        4.46758
H( 2)=        9.27569
H( 3)=       11.77627
H( 4)=        9.56999
H( 5)=        4.59811
H( 6)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION13

```
H( 0)=        1.00000
H( 1)=        4.53385
H( 2)=        9.52393
H( 3)=       12.11225
H( 4)=        9.76615
H( 5)=        4.64048
H( 6)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION14

```
H( 0)=        1.00000
H( 1)=        4.58812
H( 2)=        9.72906
H( 3)=       12.39056
H( 4)=        9.92796
H( 5)=        4.67516
H( 6)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION15

```
H( 0)=        1.00000
H( 1)=        4.63250
H( 2)=        9.89804
H( 3)=       12.62931
H( 4)=       10.06109
H( 5)=        4.70351
H( 6)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION16

```
H( 0)=        1.00000
H( 1)=        4.66877
H( 2)=       10.03692
H( 3)=       12.80942
H( 4)=       10.17038
H( 5)=        4.72666
H( 6)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION17

```
H( 0)=        1.00000
H( 1)=        4.69837
H( 2)=       10.15082
H( 3)=       12.96473
H( 4)=       10.25993
H( 5)=        4.74555
H( 6)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION18

```
H( 0)=        1.00000
H( 1)=        4.72252
H( 2)=       10.24409
H( 3)=       13.09204
H( 4)=       10.33320
H( 5)=        4.76095
H( 6)=        1.00000
```

ESTE ES EL RESULTADO

LOS DATOS DE G(0) A G(12)   EJEMPLO 10.-

1.00000 2.00000 3.00000 4.00000 3.00000 2.00000 1.00000
LAS H(I) INICIALES SON

```
H( 0)=   1.00000
H( 1)=   1.41421
H( 2)=   1.73205
H( 3)=   2.00000
H( 4)=   1.73205
H( 5)=   1.41421
H( 6)=   1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 1

```
H( 0)=        1.00000
H( 1)=        2.63896
H( 2)=        3.77926
H( 3)=        3.90691
H( 4)=        2.74007
H( 5)=        3.35174
H( 6)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 2

```
H( 0)=        1.00000
H( 1)=        3.13052
H( 2)=        4.79776
H( 3)=        3.40051
H( 4)=        4.32612
H( 5)=        3.26493
H( 6)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 3

```
H( 0)=        1.00000
H( 1)=        3.41727
H( 2)=        4.23189
H( 3)=        4.68525
H( 4)=        5.06754
H( 5)=        3.49086
H( 6)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 4

```
H( 0)=        1.00000
H( 1)=        3.23965
```

```
H( 2)=        4.85964
H( 3)=        5.82531
H( 4)=        5.88346
H( 5)=        3.71734
H( 6)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 5

```
H( 0)=        1.00000
H( 1)=        3.42855
H( 2)=        5.63761
H( 3)=        6.93385
H( 4)=        6.61945
H( 5)=        3.90838
H( 6)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 6

```
H( 0)=        1.00000
H( 1)=        3.65026
H( 2)=        6.40027
H( 3)=        7.95212
H( 4)=        7.26468
H( 5)=        4.06879
H( 6)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 7

```
H( 0)=        1.00000
H( 1)=        3.85236
H( 2)=        7.08599
H( 3)=        8.85559
H( 4)=        7.82324
H( 5)=        4.20291
H( 6)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 8

```
H( 0)=        1.00000
H( 1)=        4.02515
H( 2)=        7.68099
H( 3)=        9.64178
H( 4)=        8.30143
H( 5)=        4.31455
H( 6)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 9

H(0)=	1.00000
H(1)=	4.15926
H(2)=	8.16859
H(3)=	10.31661
H(4)=	8.70691
H(5)=	4.40708
H(6)=	1.00000

RESULTADO EN LA ITERACION10

H(0)=	1.00000
H(1)=	4.28852
H(2)=	8.61719
H(3)=	10.88976
H(4)=	9.04799
H(5)=	4.48351
H(6)=	1.00000

RESULTADO EN LA ITERACION11

H(0)=	1.00000
H(1)=	4.38680
H(2)=	8.97639
H(3)=	11.37247
H(4)=	9.33303
H(5)=	4.54643
H(6)=	1.00000

RESULTADO EN LA ITERACION12

H(0)=	1.00000
H(1)=	4.46758
H(2)=	9.27569
H(3)=	11.77627
H(4)=	9.56999
H(5)=	4.59811
H(6)=	1.00000

RESULTADO EN LA ITERACION13

H(0)=	1.00000
H(1)=	4.53385
H(2)=	9.52393
H(3)=	12.11225
H(4)=	9.76615

```
H( 5)=       4.64048
H( 6)=       1.00000


RESULTADO EN LA ITERACION14


H( 0)=       1.00000
H( 1)=       4.58812
H( 2)=       9.72906
H( 3)=      12.39056
H( 4)=       9.92796
H( 5)=       4.67516
H( 6)=       1.00000


RESULTADO EN LA ITERACION15


H( 0)=       1.00000
H( 1)=       4.63250
H( 2)=       9.89804
H( 3)=      12.62031
H( 4)=      10.06100
H( 5)=       4.70351
H( 6)=       1.00000


RESULTADO EN LA ITERACION16


H( 0)=       1.00000
H( 1)=       4.66877
H( 2)=      10.03692
H( 3)=      12.80942
H( 4)=      10.17038
H( 5)=       4.72666
H( 6)=       1.00000


RESULTADO EN LA ITERACION17


H( 0)=       1.00000
H( 1)=       4.69837
H( 2)=      10.15082
H( 3)=      12.96473
H( 4)=      10.25993
H( 5)=       4.74555
H( 6)=       1.00000


RESULTADO EN LA ITERACION18
```

```
H( 0)=        1.00000
H( 1)=        4.72259
H( 2)=       10.24609
H( 3)=       13.09204
H( 4)=       10.33320
H( 5)=        4.76095
H( 6)=        1.00000
```

ESTE ES EL RESULTADO

```
LOS DATOS DE G(0) A G(12)
```

EJEMPLO 11.-

```
0.01000   0.40000   0.60000   4.23000   0.60000   0.40000   0.01000
LAS H(I) INICIALES SON

H( 0)=   0.10000
H( 1)=   0.63246
H( 2)=   0.77460
H( 3)=   2.05670
H( 4)=   0.77460
H( 5)=   0.63246
H( 6)=   0.10000


RESULTADO EN LA ITERACION 1

H( 0)=        0.10000
H( 1)=        0.75493
H( 2)=        2.67907
H( 3)=        2.83841
H( 4)=        2.74628
H( 5)=        1.06668
H( 6)=        0.10000


RESULTADO EN LA ITERACION 2

H( 0)=        0.10000
H( 1)=        0.99727
H( 2)=        2.40559
H( 3)=        4.12059
H( 4)=        2.99526
H( 5)=        1.00164
H( 6)=        0.10000


RESULTADO EN LA ITERACION 3
```

```
H( 0)=          0.10000
H( 1)=          0.94040
H( 2)=          2.81383
H( 3)=          4.39278
H( 4)=          2.97283
H( 5)=          0.99729
H( 6)=          0.10000


RESULTADO EN LA ITERACION 4


H( 0)=          0.10000
H( 1)=          0.98209
H( 2)=          2.94106
H( 3)=          4.44755
H( 4)=          2.98041
H( 5)=          0.99804
H( 6)=          0.10000


RESULTADO EN LA ITERACION 5


H( 0)=          0.10000
H( 1)=          0.99416
H( 2)=          2.97459
H( 3)=          4.47182
H( 4)=          2.98852
H( 5)=          0.99685
H( 6)=          0.10000


RESULTADO EN LA ITERACION 6


H( 0)=          0.10000
H( 1)=          0.99746
H( 2)=          2.98720
H( 3)=          4.48466
H( 4)=          2.99359
H( 5)=          0.99936
H( 6)=          0.10000


ESTE ES EL RESULTADO


LOS DATOS DE G(0) A G(16)
```

EJEMPLO 12.-

```
2.00000   2.00000   2.00000   2.00000   2.00000   2.00000   2.00000
2.00000   2.00000
```

LAS H(I) INICIALES SON

H(0)=	1.41421
H(1)=	1.41421
H(2)=	1.41421
H(3)=	1.41421
H(4)=	1.41421
H(5)=	1.41421
H(6)=	1.41421
H(7)=	1.41421
H(8)=	1.41421

RESULTADO EN LA ITERACION 1

H(0)=	1.41421
H(1)=	2.82843
H(2)=	2.82843
H(3)=	2.82843
H(4)=	2.82843
H(5)=	4.24264
H(6)=	2.82843
H(7)=	4.24264
H(8)=	1.41421

RESULTADO EN LA ITERACION 2

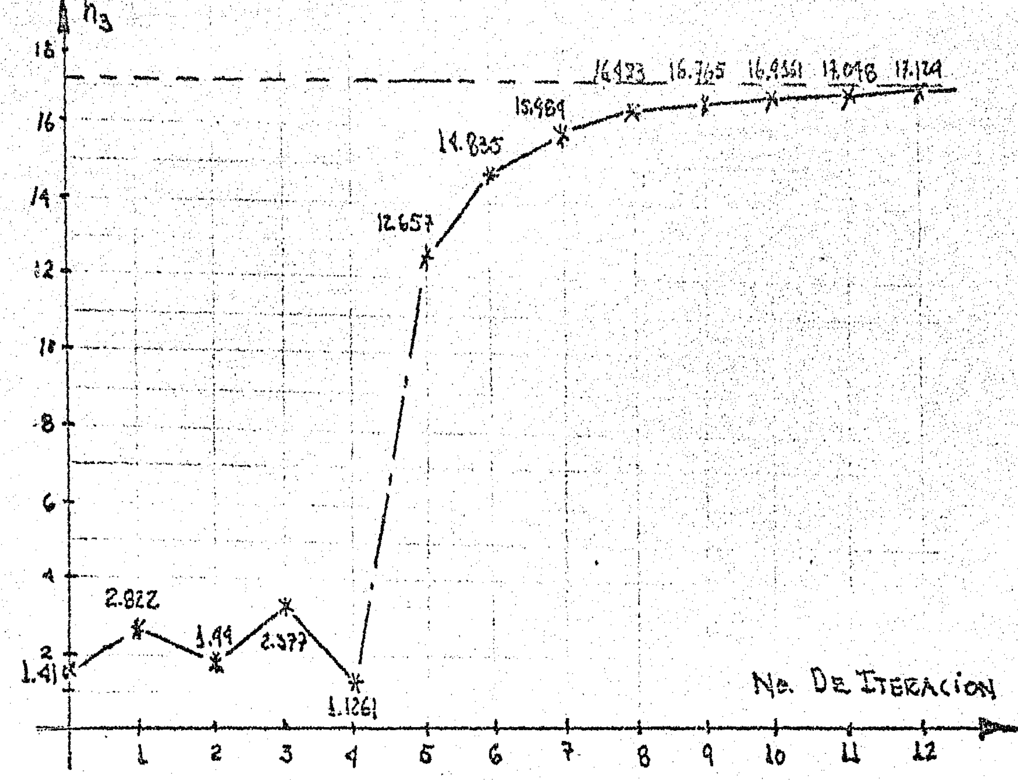
H(0)=	1.41421
H(1)=	3.18198
H(2)=	3.53553
H(3)=	1.94454
H(4)=	5.21491
H(5)=	5.06760
H(6)=	6.76171
H(7)=	4.61093
H(8)=	1.41421

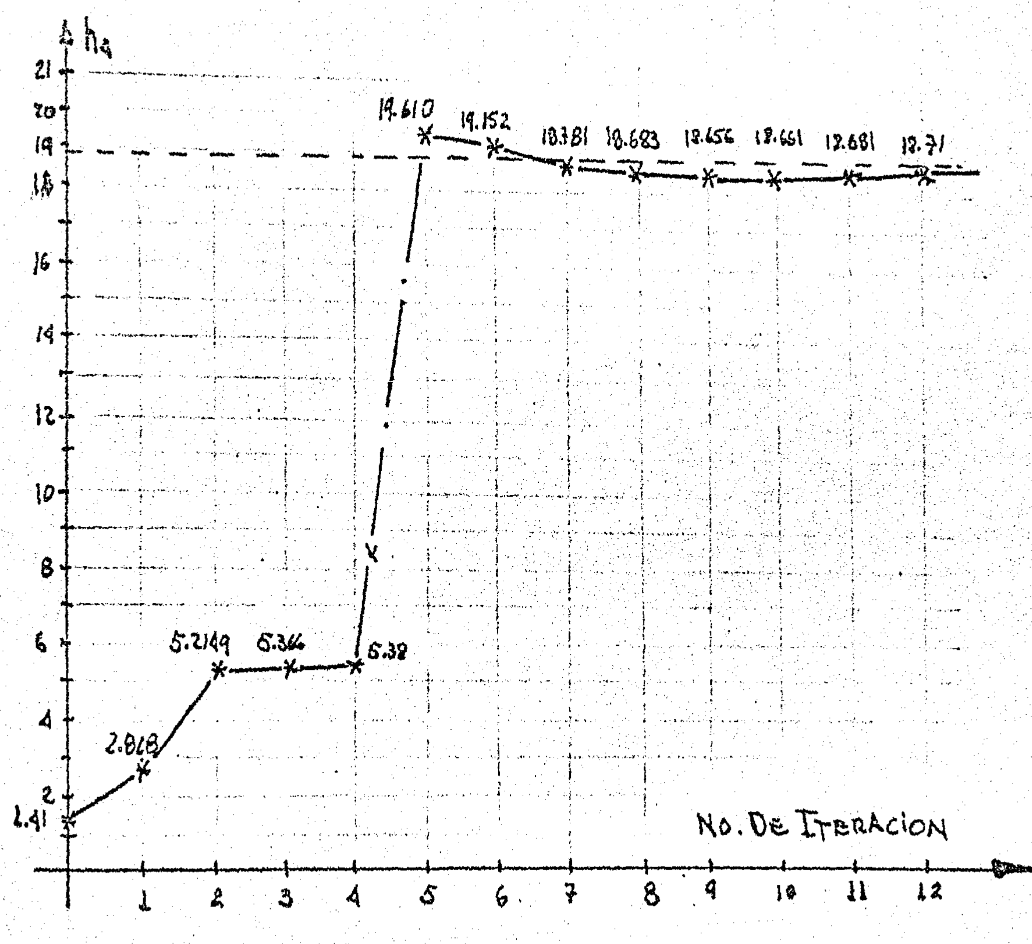
RESULTADO EN LA ITERACION 3

H(0)=	1.41421
H(1)=	3.47661
H(2)=	1.87678
H(3)=	2.37707
H(4)=	5.36612
H(5)=	8.25205
H(6)=	8.03364
H(7)=	4.98633
H(8)=	1.41421

EJEMPLO 12.-

$$g(s)=2-2s^2+2s^4-2s^6+2s^8-2s^{10}+2s^{12}-2s^{14}+2s^{16}$$





RESULTADO EN LA ITERACION 4

```
H( 0)=     1.41421
H( 1)=     2.78938
H( 2)=     0.96061
H( 3)=     1.12611
H( 4)=     5.38227
H( 5)=     8.97119
H( 6)=     8.76207
H( 7)=     5.17880
H( 8)=     1.41421
```

RESULTADO EN LA ITERACION 5

```
H( 0)=     1.41421
H( 1)=     2.24022
H( 2)=     3.77632
H( 3)=    12.65704
H( 4)=    19.61002
H( 5)=    17.03874
H( 6)=    11.40077
H( 7)=     5.89579
H( 8)=     1.41421
```

RESULTADO EN LA ITERACION 6

```
H( 0)=     1.41421
H( 1)=     3.95042
H( 2)=     8.04969
H( 3)=    14.83505
H( 4)=    19.15170
H( 5)=    16.92749
H( 6)=    12.16629
H( 7)=     6.03582
H( 8)=     1.41421
```

RESULTADO EN LA ITERACION 7

```
H( 0)=     1.41421
H( 1)=     5.11006
H( 2)=    10.20190
H( 3)=    15.98433
H( 4)=    18.78123
H( 5)=    17.17426
H( 6)=    12.50252
H( 7)=     6.11297
H( 8)=     1.41421
```

RESULTADO EN LA ITERACION 8

H(0)=	1.41421
H(1)=	5.57411
H(2)=	11.32898
H(3)=	16.48312
H(4)=	18.68281
H(5)=	17.31199
H(6)=	12.68246
H(7)=	6.15411
H(8)=	1.41421

RESULTADO EN LA ITERACION 9

H(0)=	1.41421
H(1)=	5.84074
H(2)=	11.91856
H(3)=	16.76500
H(4)=	18.65604
H(5)=	17.39480
H(6)=	12.78051
H(7)=	6.17651
H(8)=	1.41421

RESULTADO EN LA ITERACION10

H(0)=	1.41421
H(1)=	5.97741
H(2)=	12.23753
H(3)=	16.93617
H(4)=	18.66114
H(5)=	17.44700
H(6)=	12.83532
H(7)=	6.18902
H(8)=	1.41421

RESULTADO EN LA ITERACION11

H(0)=	1.41421
H(1)=	6.05132
H(2)=	12.41867
H(3)=	17.04857
H(4)=	18.68166
H(5)=	17.48339
H(6)=	12.86745
H(7)=	6.19635
H(8)=	1.41421

```
RESULTADO EN LA ITERACION12

H( 0)=        1.41421
H( 1)=        6.09325
H( 2)=       12.52728
H( 3)=       17.12890
H( 4)=       18.71014
H( 5)=       17.51178
H( 6)=       12.88791
H( 7)=        6.20101
H( 8)=        1.41421


STE ES EL RESULTADO


LOS DATOS DE G(0) A G( 4)
```

EJEMPLO 13.-

```
4.00000  -4.00000   1.00000
LAS H(I) INICIALES SON

H( 0)=   2.00000
H( 1)=   2.00000
H( 2)=   1.00000


RESULTADO EN LA ITERACION 1

H( 0)=        2.00000
H( 1)=        1.00000
H( 2)=        1.00000


RESULTADO EN LA ITERACION 2

H( 0)=        2.00000
H( 1)=        0.50000
H( 2)=        1.00000


RESULTADO EN LA ITERACION 3

H( 0)=        2.00000
H( 1)=        0.25000
H( 2)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 4

```
H( 0)=        2.00000
H( 1)=        0.12500
H( 2)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 5

```
H( 0)=        2.00000
H( 1)=        0.06250
H( 2)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 6

```
H( 0)=        2.00000
H( 1)=        0.03125
H( 2)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 7

```
H( 0)=        2.00000
H( 1)=        0.01563
H( 2)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 8

```
H( 0)=        2.00000
H( 1)=        0.00781
H( 2)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 9

```
H( 0)=        2.00000
H( 1)=        0.00391
H( 2)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION10

```
H( 0)=        2.00000
H( 1)=        0.00195
H( 2)=        1.00000
```

```
RESULTADO EN LA ITERACION11

H( 0)=        2.00000
H( 1)=        0.00098
H( 2)=        1.00000


RESULTADO EN LA ITERACION12

H( 0)=        2.00000
H( 1)=        0.00049
H( 2)=        1.00000


RESULTADO EN LA ITERACION13

H( 0)=        2.00000
H( 1)=        0.00024
H( 2)=        1.00000


RESULTADO EN LA ITERACION14

H( 0)=        2.00000
H( 1)=        0.00012
H( 2)=        1.00000


RESULTADO EN LA ITERACION15

H( 0)=        2.00000
H( 1)=        0.00006
H( 2)=        1.00000


RESULTADO EN LA ITERACION16

H( 0)=        2.00000
H( 1)=        0.00003
H( 2)=        1.00000


RESULTADO EN LA ITERACION17
```

```
H( 0)=        2.00000
H( 1)=        0.00002
H( 2)=        1.00000


RESULTADO EN LA ITERACION18

H( 0)=        2.00000
H( 1)=        0.00001
H( 2)=        1.00000


RESULTADO EN LA ITERACION19

H( 0)=        2.00000
H( 1)=        0.00000
H( 2)=        1.00000


RESULTADO EN LA ITERACION20

H( 0)=        2.00000
H( 1)=        0.00000
H( 2)=        1.00000
```

ESTE ES EL RESULTADO.

LOS DATOS DE G(0) A G(4) EJEMPLO 14.-

18.00000 -7.00000 -1.00000
LAS H(I) INICIALES SON

H(0)= 4.24264
H(1)= 2.64575
H(2)= 1.00000

RESULTADO EN LA ITERACION 1

H(0)= 4.24264
H(1)= 1.60357
H(2)= 1.00000

RESULTADO EN LA ITERACION 2

H(0)= 4.24264
H(1)= 1.26490
H(2)= 1.00000

RESULTADO EN LA ITERACION 3

H(0)= 4.24264
H(1)= 1.21956
H(2)= 1.00000

RESULTADO EN LA ITERACION 4

H(0)= 4.24264
H(1)= 1.21872
H(2)= 1.00000

ESTE ES EL RESULTADO

LOS DATOS DE G(0) A G(6) EJEMPLO 15.-

```
4.00000   0.00000  -3.00000   1.00000
 LAS H(I) INICIALES SON


 H( 0)=   2.00000
 H( 1)=   1.00000
 H( 2)=   1.73205
 H( 3)=   1.00000


 RESULTADO EN LA ITERACION 1


 H( 0)=        2.00000
 H( 1)=        3.96410
 H( 2)=        2.28868
 H( 3)=        1.00000


 RESULTADO EN LA ITERACION 2


 H( 0)=        2.00000
 H( 1)=        3.13675
 H( 2)=        1.85949
 H( 3)=        1.00000


 RESULTADO EN LA ITERACION 3


 H( 0)=        2.00000
 H( 1)=        2.75399
 H( 2)=        1.60412
 H( 3)=        1.00000


 RESULTADO EN LA ITERACION 4


 H( 0)=        2.00000
 H( 1)=        2.54194
 H( 2)=        1.45160
 H( 3)=        1.00000


 RESULTADO EN LA ITERACION 5


 H( 0)=        2.00000
 H( 1)=        2.41309
 H( 2)=        1.35482
 H( 3)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 6

```
H( 0)=        2.00000
H( 1)=        2.32944
H( 2)=        1.28962
H( 3)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 7

```
H( 0)=        2.00000
H( 1)=        2.27196
H( 2)=        1.24340
H( 3)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 8

```
H( 0)=        2.00000
H( 1)=        2.23054
H( 2)=        1.20924
H( 3)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION 9

```
H( 0)=        2.00000
H( 1)=        2.19953
H( 2)=        1.18310
H( 3)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION10

```
H( 0)=        2.00000
H( 1)=        2.17554
H( 2)=        1.16254
H( 3)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION11

```
H( 0)=        2.00000
H( 1)=        2.15651
H( 2)=        1.14599
H( 3)=        1.00000
```

RESULTADO EN LA ITERACION12

H(0)=	2.00000
H(1)=	2.14108
H(2)=	1.13240
H(3)=	1.00000

RESULTADO EN LA ITERACION13

H(0)=	2.00000
H(1)=	2.12833
H(2)=	1.12106
H(3)=	1.00000

RESULTADO EN LA ITERACION14

H(0)=	2.00000
H(1)=	2.11763
H(2)=	1.11147
H(3)=	1.00000

ESTE ES EL RESULTADO

REFERENCIAS

1. G. C. Newton, L. A. Gould, J. F. Kaiser. "Analitical Design of Linear Feedback Controls" J. Wiley, 1957
2. Roger W. Brockett. "Finite Dimensional Linear Systems" J. Wiley. en Prensa.
3. David R. Vaughan, "A non Recursive Algebraic Solution for the Discrete Riccati Equation" presentado en la tercera conferencia de Asilomar, Pacific Grove. 1969.
4. R. W. Brockett, R. Barrera, R. Canales, "Introducción a la teoría Moderna del control" División de Estudios Superiores, Fac. de Ingeniería UNAM. 1969.
5. D. A. Pierre "Optimization Theory with Applications" J. Wiley. 1969.
6. D'Azzo & Houpis "Feedback Control System Analysis and Synthesis" Mc Graw-Hill, Edición 1966.
7. B. Carnahan, H. A. Luther; J. O. Wilkes. "Applied Numerical Methods. J. Wiley, 1969
8. B. Minkow. W., "Solución Digital de algunos Programas de Control" tesis profesional, Facultad de Ingeniería, UNAM. 1970.