

**UNIVERSIDAD PANAMERICANA**

ESCUELA DE PEDAGOGIA

INCORPORADA A LA U.N.A.M.

**PLANTEAMIENTOS TEORICO-METODOLOGICOS  
DERIVADOS DE LA PSICOLOGIA GENETICA DE  
PIAGET APLICADOS AL PROCESO  
ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS FRACCIONES  
EN TERCERO Y CUARTO GRADOS DE LA  
ESCUELA PRIMARIA.**

**TESIS PROFESIONAL  
QUE PRESENTA:  
MARTHA ALICIA NOCETTI VILCHIS  
PARA OBTENER EL TITULO DE:  
LICENCIADO EN PEDAGOGIA**

Director de Tesis:

DRA. ELVIA MARVEYA VILLALOBOS TORRES



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# I N D I C E

	Página
<b>INTRODUCCION</b>	<b>1</b>
<b>I. LA PEDAGOGIA Y EL PROCESO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE APLICADO A LAS MATEMATICAS EN LA ESCUELA PRIMARIA.</b>	<b>5</b>
<b>1.1. <u>Concepto de educación</u></b>	
1.1.1. Significación vulgar.....	7
1.1.2. Significación etimológica.....	8
1.1.3. Conciliación entre la concepción vulgar y etimológica de la educación.....	8
1.1.4. Otros conceptos de educación.....	9
<b>1.2. <u>Teleología Pedagógica</u></b> .....	10
1.2.1. Finalidad de la educación en general.....	11
<b>1.3. <u>Didáctica</u></b> .....	13
1.3.1. División de la didáctica.....	14
1.3.2. Elementos de la didáctica.....	16
<b>1.4. <u>La escuela primaria y sus objetivos generales</u></b> .....	20
1.4.1. Objetivo de las matemáticas dentro de la escuela primaria.....	24
<b>1.5. <u>Didáctica de las matemáticas</u></b> .....	28
<b>II. LOS NUMEROS RACIONALES DENTRO DE LAS MATEMATICAS</b>	<b>32</b>
<b>II.1. <u>¿Qué son las matemáticas?</u></b> .....	<b>32</b>
II.1.1. Importancia de las matemáticas en la escuela primaria.....	34

<b>II.2. Ubicación de los números racionales dentro de la matemática</b> .....	36
II.2.1. Números reales.....	36
II.2.2. Números naturales.....	37
II.2.3. Números enteros.....	38
II.2.4. Números racionales.....	39
<b>II.3. Utilidad de los números racionales</b> .....	40
II.3.1. El concepto de fracción en la historia.....	40
II.3.2. Utilidad de los números racionales en la educación.....	41
<b>III. TEORIA OPERATORIA DE LA INTELIGENCIA</b> .....	44
<b>III.1. ¿Quién fue J. Piaget?</b> .....	45
III.1.1. Consideraciones preliminares.....	46
<b>III.2. Piaget y el proceso de aprendizaje</b> .....	48
III.2.1. Asimilación y acomodación.....	56
<b>III.3. Etapas de desarrollo</b> .....	58
III.3.1. Desarrollo cognoscitivo.....	61
III.3.2. Sensomotor.....	62
III.3.2.1. Aspectos generales del período.....	67
III.3.3. Preoperacional.....	70
III.3.4. Operaciones concretas.....	77
III.3.5. Operaciones formales.....	86
<b>IV. FORMACION DE ESTRUCTURAS MENTALES APLICADAS A LAS MATEMATICAS</b> .....	89
<b>IV.1. Objetivos preparatorios para la enseñanza de las matemáticas</b> .....	93
IV.1.1. Principios de desarrollo de los procesos matemáticos.....	94

<b>IV.2. El concepto de número en el niño.....</b>	<b>100</b>
<b>IV.3. Diferencias entre hábito y operación.....</b>	<b>103</b>
<b>V. ORGANIZACION DE LA ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES EN TERCERO Y CUARTO GRADOS DE LA ESCUELA PRIMARIA... 110</b>	
<b>V.1. Momentos didácticos para la enseñanza de las fracciones.....</b>	<b>114</b>
V.1.1. Planeación.....	114
V.1.2. Realización.....	116
V.1.2.1. Actividades para los objetivos de 3º.....	116
V.1.2.2. Actividades para los objetivos de 4º.....	127
V.1.3. Evaluación.....	132
<b>CONCLUSIONES.....</b>	<b>136</b>
<b>BIBLIOGRAFIA BASICA.....</b>	<b>141</b>
<b>BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA.....</b>	<b>145</b>

## INTRODUCCION

Actualmente nuestra civilización exige a todos un mínimo de formación matemática, ya que esta ciencia tiene una doble función, por un lado permite desarrollar ciertas operaciones mentales a través de la ejercitación y por otro, da una serie de conocimientos aplicables a situaciones cotidianas.

Las matemáticas en su enseñanza, al igual que en otras ciencias, llevan una graduación y continuidad, siendo algunos conceptos u operaciones la base de otros más complejos. En consecuencia, es evidente pensar que cuando las bases matemáticas no están bien cimentadas (ya sea por una enseñanza inadecuada o por falta de un proceso de desarrollo en el niño) habrá deficiencias en el aprendizaje posterior.

Seis años de experiencia profesional docente anterior a esta investigación en distintos grados de educación primaria y en diferentes instituciones, han permitido visualizar el reto al que se enfrentan los educadores y educandos particularmente, en el desarrollo del proceso enseñanza-aprendizaje dentro del área de matemáticas.

Es común observar en las escuelas a los educandos que ante un tema, que aparentemente habían aprendido, después de un ciclo escolar, de un período de vacaciones o de un lapso en que dicho tema no se utiliza, encuentran problemas al retomarlo ya que realmente no lo comprendieron y en innumerables ocasiones el educador debe recomenzar como si nunca se hubie-

ra trabajado con esos aprendizajes.

Otra situación común de observar es el problema que presentan los educandos al aplicar sus conocimientos en la resolución de problemas. Independientemente de que la resolución de las operaciones básicas las domine. Esto es debido a que ellos logran mecanizar el proceso de resolución de operaciones, pero en muchos casos no logran razonar adecuadamente para seleccionar los datos a utilizar y la operación conveniente.

Aquí podríamos cuestionarnos, si los contenidos de la enseñanza se hacen llegar al educando en forma adecuada; si se crea en el educando la necesidad de buscar nuevas respuestas a las situaciones que se le presentan; si esos contenidos están adecuados al nivel de desarrollo de los niños en cada edad, para que sean comprendidos, o si tan sólo se pretende que a través de la mecanización y memorización el educando resuelva operaciones modelo.

La investigación documental realizada en este trabajo tiene por objeto analizar cómo se va desarrollando el proceso de conocimiento en el ser humano, para de ahí deducir los principios fundamentales para la enseñanza específicamente del área de matemáticas.

Como las matemáticas tienen un amplio terreno de estudio y es difícil profundizar en todo ello, este trabajo sólo se centrará en la enseñanza de los números racionales en los contenidos específicos de tercero y cuarto grados de primaria. La adecuada conceptualización y manejo de los números racionales en estos grados, servirán de sustento a las operaciones algebraicas de la enseñanza media y superior.

En todo método de enseñanza se considera de suma importancia el papel del educador. Si pedagógicamente educar es desarrollar al máximo las potencialidades humanas, el educador necesita conocer las características de sus alumnos en cada etapa y sobre todo cómo es que en sus mentes van formando los conceptos y operaciones que utilizan a lo largo de su vida.

Para ello este trabajo está apoyado en los estudios realizados por Jean Piaget, quien aunque nunca elaboró un método de enseñanza su labor fue importantísima por la investigación acerca del proceso de conocimiento en el ser humano, lo cual constituye el punto de partida en todo proceso educativo.

Básicamente se ha realizado una investigación documental, inspirada en la necesidad de sensibilizar al educador sobre la importancia de la labor docente en un área determinada. Se resalta de una manera especial que la manipulación y ejercitación con objetos concretos son la base y punto de partida del aprendizaje abstracto.

Fundamentado este trabajo en las observaciones de J. Piaget, se da la posibilidad de ubicar a los educandos en la etapa adecuada para calcular sus posibilidades y necesidades, que permitirán al educador crear las situaciones o proponer las actividades que estimulen su desarrollo y por ende su conocimiento.

Se parte del concepto de educación, del que se deriva lo que nuestro país pretende lograr a este respecto. Además se especifican los objetivos que se relacionan directamente con el área de matemáticas en el tema de

los números racionales. Y se menciona el papel de la Didáctica como auxiliar de la enseñanza.

El segundo capítulo da un marco de referencia general sobre la ubicación de los números racionales en el contexto de las matemáticas.

Una vez presentados los objetivos de educación y los particulares del área estudiada, y ubicados en el nivel de números racionales, se plantea la teoría del conocimiento de J. Piaget, la cual es válida para otros conocimientos, pero que en este caso se aplica al conocimiento lógico-matemático. Además se indica en el capítulo III el papel de la equilibración en el conocimiento, las diversas operaciones mentales que se van formando y cómo van evolucionando para permitir nuevos conocimientos.

El cuarto capítulo especifica la noción del número en el niño, además de mencionar el papel de la organización de las estructuras mentales en el conocimiento.

Por último, el quinto capítulo muestra los momentos de la Didáctica aplicados a la enseñanza de las fracciones, haciendo hincapié en los objetivos específicos de tercero y cuarto grados de primaria, y diversas actividades que se sugieren para estimular algunas de las operaciones mentales en el educando, necesarias para la comprensión de los contenidos que se derivan de dichos objetivos.

## **CAPITULO I.**

### **LA PEDAGOGIA Y EL PROCESO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE APLICADO A LAS MATEMATICAS EN LA ESCUELA PRIMARIA.**

Al analizar lo que implica la Pedagogía, la educación, y el proceso enseñanza-aprendizaje, resulta una labor ardua y controvertida a la vez, debido a que existen numerosas perspectivas desde las que se estudian estos temas. Por ello, es necesario plantear lo que se entenderá de cada uno de ellos en el presente trabajo.

Inicialmente se analizará el concepto de Pedagogía y su objeto: la educación. Posteriormente se establecerán los fines de la misma y los medios para llevarla a cabo en forma general, a través de la didáctica. Ya que esta investigación se centra en el proceso enseñanza-aprendizaje en la escuela primaria y específicamente se dirige al área de matemáticas, se plantearán los fines, los medios y momentos educativos en estos aspectos.

Las ideas relacionadas con la educación son tan antiguas como la cultura misma. Al principio estas ideas no eran dirigidas exclusivamente a la educación; por ejemplo: al consultar obras de Platón y Aristóteles, se encuentra que estaban relacionados con aspectos religiosos, políticos y morales entre otros. Así, hubo de pasar mucho tiempo para que estas ideas referentes a la educación se sistematizaran y se convirtieran en un conjunto

de verdades demostradas acerca de la educación, formando así una nueva ciencia: "La Pedagogía".

Al efectuar el análisis de la palabra Pedagogía, encontramos que etimológicamente, procede de la yuxtaposición de dos raíces griegas:

- pais, paidos     = niño
- ágo, ágein     = dirigir, llevar

De lo cual resulta que para los griegos y en la antigüedad, la Paidología significó la educación de los infantes; no obstante, existía ya la preocupación por la educación en general, a través de obras como las Instituciones Oratorias de Quintiliano.

En los siglos XVI y XVII, se plasman las bases de la Pedagogía en las obras de Luis Vives (Tratado de la Enseñanza) y Comenio (Didáctica Magna). Sin embargo, es hasta el siglo XVIII que se plantea la Pedagogía como un conocimiento sistemático, es decir como una ciencia.

Actualmente en el plano de los conceptos la Pedagogía es un "conjunto de conocimientos sistemáticos relativos al fenómeno educativo". (\*1) Esta ciencia no se concreta a estudiar cómo se lleva a cabo el hecho educativo, sino que va a buscar la forma en que debe realizarse tal hecho: esto lleva implícita una reflexión sobre los procesos educativos que desembocan en una valoración de los mismos.

---

(\* 1) MATTOS, Luiz, Compendio de Didáctica General, p.17.

Aunada a esta parte especulativa de la Pedagogía, se da la aplicación o funcionamiento práctico de los sistemas de educación, y es aquí donde la Pedagogía puede considerarse un arte\* ya que fundamentándose en todo el estudio teórico, ha de dar solución a infinidad de problemas educativos concretos y de muy diversa índole.

Una vez definida la Pedagogía como ciencia, conviene marcar su objeto, fin y circunstancias de estudio. La Pedagogía parte del ser humano y lo estudia biopsicosocialmente (Antropología). Esos conocimientos acerca del hombre los enfoca para llegar a su fin (Teleología). La labor del pedagogo será definir en cada caso, cómo pueden aprovecharse las potencialidades de esos hombres para llegar al fin pretendido.

## **I.1. CONCEPTO DE EDUCACION.**

Antes de profundizar en las partes de la Pedagogía, es necesario ubicar nuestro concepto de educación, ya que esta palabra además de tener diferentes concepciones de acuerdo a la ideología con la que se analiza, puede entenderse desde un aspecto vulgar y desde su etimología.

### **I.1.1. Significación vulgar.**

Vulgarmente, es decir, en el lenguaje cotidiano, se entiende por educación un comportamiento externo adecuado a aceptado socialmente, con ello,

---

\* Debemos entender por arte el conjunto de reglas puestas por la razón para ejecutar bien una cosa.

se equipara el concepto de educación con el de cortesía y/o urbanidad.

"... la educación en el concepto vulgar se ha concebido como el resultado de un proceso que termina en la posesión de determinadas formas de comportamiento social". (\*2)

Concluyendo, esta significación vulgar nos aporta dos notas importantes acerca de la educación; es un resultado y es un comportamiento externo que refleja una relación social.

### **1.1.2. Significación etimológica.**

Educación procede del vocablo latino *educatio*, onis que a su vez deriva del verbo *educare*, formado por *e-* (extraer, sacar de) y *-ducare* (conducir, guiar), con lo que educación sería la acción de sacar algo de dentro del hombre.

Al analizar esta significación resulta que la educación no plantea un resultado inmediato, ya que al llevar al hombre de un estado a otro (conducir) hace referencia a un proceso, a un movimiento paulatino que brota dentro del hombre y se refleja en su exterior.

### **1.1.3. Conciliación entre la concepción vulgar y etimológica de educación.**

---

(\*2) GARCIA HOZ, Víctor, Principios de Pedagogía Sistemática, p. 16.

Ambas significaciones tienen razón, ya que el hecho educativo es tan amplio que da cabida a estas características.

Es individual, porque cada hombre debe ir adquiriendo, modificando o perfeccionando ciertas conductas, es decir, la educación implica un cambio.

Es social, porque el hombre como individuo se halla inmerso en una sociedad donde ha de desarrollarse y respetar cierta normativa.

#### **1.1.4. Otros conceptos sobre educación.**

La determinación de los fines de la educación va estrechamente ligada a la consideración del valor y la jerarquía de valores. Durante el desarrollo de la Pedagogía, diferentes educadores, filósofos y psicólogos entre otros han definido la educación. A continuación aparecen resumidas las ideas de educación que algunos pensadores han tenido en el transcurso de la historia:

PLATON	Dar al cuerpo y al alma toda la perfección de que sean susceptibles.
ROUSSEAU	La perfección según la naturaleza.
SOCRATES	Desvanecer el error y descubrir la verdad.
STUART MILL	Acercarnos a la perfección de nuestra naturaleza.
HERMAN HORNE	"... proceso externo de superior ajuste del ser humano físicamente desarrollado, libre y consciente a Dios, según se manifiesta en el ambiente intelectual, emocional y volitivo del hombre". (*3)

---

(\*3) cfr. GARIBAY, Luis, ¿Qué es la educación?, p. 2.

GARCIA HOZ      Perfeccionamiento intencional de las potencias específicamente humanas.

Cada una de estas ideas, nos marca que la educación tiende a la perfección, y que implica un cambio paulatino, es decir es un proceso. Además debido a que el hombre es un ser libre, es el único que puede por su decisión tender a ésta, por tanto considero que la última idea de educación es la que resume el contenido de las demás.

Educación será entendida, como un proceso intencional de perfeccionamiento de las facultades humanas dentro de un marco individual y social.

## **1.2. TELEOLOGIA PEDAGOGICA.**

La teleología pedagógica es la parte de la axiología pedagógica que se ocupa del problema de la finalidad de la Educación.

Es necesario establecer la diferencia entre finalidad y los objetivos. Finalidad expresa en términos abstractos y generales, los ideales de la vida y de educación. Indica rumbos de acción educativa sin especificar y los objetivos marcan concretamente metas particulares e inmediatas.

"Las finalidades expresan en síntesis, los resultados finales deseados. Los objetivos especifican las etapas necesarias y los pasos intermedios para conseguir, poco a poco, esos resultados finales". (\*4)

---

(\*4) MATTOS, Luiz, op. cit. p. 44

### **1.2.1. Finalidad de la educación en general.**

Según Nerici, los fines de la educación tienen una triple expresión:

SOCIAL

INDIVIDUAL

TRASCENDENTAL

Dentro del ámbito social se pretende:

- Preparar nuevas generaciones para proteger la herencia cultural.
- Promover el desenvolvimiento económico y social, disminuyendo privilegios.
- Beneficiar a mayor número de individuos con la civilización.

Dentro del ámbito individual, pretende:

- Favorecer el desarrollo y desenvolvimiento de cada individuo.
- Inculcar el sentimiento de grupo para cooperar con sus semejantes.

Finalmente en el ámbito trascendental:

- Orientar al individuo hacia la aprehensión del sentido estético y práctico de las cosas y de los fenómenos humanos.
- Llevarlo a tomar conciencia y a reflexionar sobre los grandes problemas y misterios de las cosas, de la vida y del cosmos, a fin de proporcionar vivencias profundas.

Estos fines de la educación pueden concretarse en los siguientes objetivos:

- Transmitir y enriquecer el legado cultural a través de las generaciones.

- Preparar al individuo, intelectual y técnicamente para provocar una integración social.
- Ubicar al hombre en su realidad, para desarrollar mejor su personalidad y ocupe un lugar en la sociedad.
- Desarrollar la iniciativa, creatividad y espíritu crítico del hombre.
- Lograr una formación estética, moral y religiosa.

Al ubicarse en el contexto educativo de México, el artículo 2 de la Ley Federal de Educación, menciona además que a través de la educación se contribuye al desarrollo del individuo de manera que tenga sentido de solidaridad social y a la transformación de la sociedad misma.

La forma como se aplican estos fines de la educación se plantea en el artículo 45 de la Ley Federal de Educación, donde se indica que "el contenido de la educación en México, se definirá en los planes y programas, los cuales se formularán con miras a que el educando:

- I. Desarrolle su capacidad de observación, análisis, interrelación y deducción;
- II. Reciba armónicamente los conocimientos teóricos y prácticos de la educación.
- III. Adquiera visión de lo general y de lo particular.
- IV. Ejercite la reflexión crítica.
- V. Acreciente su aptitud de actualizar y mejorar los conocimientos, y.
- VI. Se capacite para el trabajo socialmente útil". (\*5)

---

(\*5) VELAZQUEZ, José de Jesús, VADEMECUM del maestro de escuela primaria, p. 203

Una vez planteados los fines de la educación, es necesario referirse a los medios que harán posible alcanzar esas metas, para lo cual el apoyo corresponde a la Didáctica.

### **1.3. DIDACTICA.**

Etimológicamente, la Didáctica viene del griego *didaskaim* (enseñar) y *tékne* (arte): esto es, arte de enseñar o instruir. En un sentido más amplio, se trata de una disciplina pedagógica de carácter práctico normativo; integrado por un conjunto de principios, normas y procedimientos que se han de aplicar para incentivar y orientar eficaz y eficientemente a los alumnos en su aprendizaje. Su objeto de estudio es el proceso enseñanza-aprendizaje.

Antiguamente enseñar era básicamente un proceso de transmisión y aprender era un proceso de recepción. En este binomio enseñar-aprender el papel del educador era el de trasmisor y el del educando el de receptor.

Actualmente la dinámica de la educación concibe a la enseñanza no como un proceso de dar, sino de "promover en forma intencionada y sistemática el proceso del aprendizaje que debe originarse en el alumno. (\*6). Asimismo, el aprender no implica tan sólo recibir, sino transformar y crear el conocimiento. El aprendizaje sería entonces un proceso que se realiza en el interior del hombre en el que existen momentos de ruptura y reconstrucción de su propio conocimiento. Visto el aprendizaje así son de gran impor-

---

(\*6) MORENO Bayardo, Ma. Gpe. Didáctica Fundamentación y Práctica. p. 19

tancia las situaciones de aprendizaje ya que ellas promueven el conocimiento.

### **1.3.1. División de la didáctica.**

Al finalizar el campo de estudio de la didáctica, se observa una clasificación importante:

DIDACTICA GENERAL

DIDACTICA ESPECIAL

- A). La Didáctica General: Trata de ver a la enseñanza como un todo, no se detiene a particularizar. Establece la teoría fundamental para la enseñanza y da los principios generales para regular la labor docente y discente. Además marca tres momentos indispensables para llevar a cabo el proceso enseñanza-aprendizaje.

PLANEACION

REALIZACION

EVALUACION

En la PLANEACION se toman en cuenta todos los elementos que se requieren en este proceso, enfocados a alcanzar ciertos objetivos basados en las necesidades de los educandos y su entorno.

La planeación didáctica es una actividad en la que los factores que participan en el proceso enseñanza-aprendizaje se organizan para facilitar el desarrollo de conocimientos, hábitos, habilidades, etc... Sin embargo, esta pla

neación, debe ser replanteada de acuerdo con los resultados de un proceso de evaluación. Para el desarrollo de esta planeación se pueden marcar tres pasos.

- Organización de factores que intervienen en el proceso enseñanza-aprendizaje sin conocer las características particulares de los educandos.
- Una vez detectada la situación real de los educandos (Intereses, nivel de desarrollo intelectual, etc...) se valora la eficiencia de la planeación hecha.
- A partir de la valoración se reformula la planeación, tomando en cuenta los factores reales: objetivos alcanzables, contenidos adecuados, actividades y situaciones de aprendizaje acordes a los educandos y la evaluación.

En el momento de la REALIZACION, se lleva a cabo todo lo planeado anteriormente a través del desarrollo de las actividades escolares y extraescolares.

Finalmente la EVALUACION se establece para destacar la diferencia entre lo que se va logrando durante el proceso y los objetivos iniciales que se pretenden alcanzar al término.

Se considera una actividad que si es bien planeada y ejecutada puede coadyuvar a mejorar la calidad de la enseñanza dentro del proceso enseñanza-aprendizaje; existen varios momentos en los que la evaluación adquiere una función diferente:

- a) **Diagnóstica:** Es un sondeo inicial con el objeto de situar en qué nivel de conocimiento se encuentra el educando, además de que a través de éstas pueden proyectarse características personales de éste.
  
- b) **Progresiva:** se realiza a lo largo del proceso enseñanza-aprendizaje a través de cuestiones, problemas o actividades que den al educador una idea de en qué medida se ha asimilado un contenido. Con base en los resultados se puede rectificar una planeación para dar opción a los educandos de realizar otras actividades que los lleven a la asimilación y comprensión deseada.
  
- c) **Sumativa:** Indica en qué grado se cumplieron los objetivos de aprendizaje, si se lograron y en qué medida.

Es importante que la evaluación no se confunda con una medición, ya que ésta última no retroalimenta, tan sólo marca el nivel en que cubrieron los educandos los objetivos. La evaluación por el contrario da cabida a la reflexión sobre el proceso de aprender, incluyendo factores que ayudan o retardan dicho proceso.

- B) **Didáctica Especial:** Se encarga de aplicar todos los principios y normas de la Didáctica general a circunstancias específicas que pueden relacionarse con el tipo de educando, el lugar (rural o urbano), el nivel educativo (preescolar, primaria, secundaria, etc...), las asignaturas, etc...

### **1.3.2. Elementos de la Didáctica.**

La didáctica tiene que tomar en cuenta seis elementos fundamentales que participan y influyen en el proceso enseñanza-aprendizaje. Ellos son:

- a) EDUCANDO
- b) OBJETIVOS
- c) EDUCADOR
- d) MATERIA
- e) METODOS Y TECNICAS
- f) MEDIO AMBIENTE

a) EDUCANDO:

Podría decirse que es el centro del proceso enseñanza-aprendizaje, ya que es en él, en quien recae la acción educativa. Esta acción debe ir adecuada a la edad evolutiva, características personales, necesidades e intereses del educando en particular.

En los capítulos tercero y cuarto de esta investigación, se hace un análisis del educando desde el ángulo de su desarrollo cognoscitivo, que es un factor determinante dentro del proceso enseñanza-aprendizaje.

b) OBJETIVOS:

Son la expresión clara de lo que se pretende alcanzar. Ellos dan sentido a cualquier actividad humana ya que determinan la intencionalidad o finalidad, en este caso del acto educativo.

Dentro de la programación didáctica permiten planear, evaluar y organizar los contenidos en dirección a esas metas. Además de que son un instrumento para que el educador elija los procedimientos y recursos didácticos que contribuyan a fundamentar cada paso hacia el logro de esos objetivos. Es conveniente que al elaborarlos se tenga cuidado de plantear

aprendizajes realmente importantes en la formación de los educandos y no quedarse tan sólo en la redacción de objetivos conductuales técnicamente perfectos.

Los objetivos son una herramienta básica del educador, siendo éstos una pauta indicativa, flexible y dinámica.

c) EDUCADOR:

El papel del educador es sumamente importante, ya que es él quien guiará al educando a la asimilación de los contenidos de la educación. Su labor más que la de un transmisor de información debe ser de orientador y guía, propiciando las situaciones educativas que despierten en el educando la necesidad de desarrollar un conocimiento.

Posteriormente se hace referencia a la labor del educador en el área de conocimiento que se desarrolla en este trabajo: las matemáticas.

d) MATERIA:

Es el contenido de la enseñanza, el que se va a enseñar para alcanzar los objetivos planteados.

Actualmente resulta complejo seleccionar dentro de todo el saber humano los conocimientos que son útiles y ayudan a desarrollar las operaciones mentales en los educandos. Además de que debido a la cantidad y variedad de conocimientos se ha optado por fraccionar y romper la unidad de los contenidos.

Es necesario también, realizar una actualización periódica de los contenidos que se han seleccionado como objetivos de aprendizaje, ya que toda información está sujeta a cambios y al enriquecimiento continuo.

Conviene que durante el proceso enseñanza-aprendizaje, los contenidos

se manejen lo menos fragmentadamente posible y promover actividades que desarrollen operaciones mentales de análisis y síntesis.

#### e) METODOS Y TECNICAS:

Etimológicamente método quiere decir "camino para llegar a un fin". Aplicado a la educación "es el conjunto de momentos y técnicas lógicamente coordinados para dirigir el aprendizaje del alumno hacia determinados objetivos". (\*7)

El método es más general que la técnica. Esta última, en la enseñanza, es un medio didáctico utilizado para concretar una parte del método en la realización del aprendizaje.

El método se concreta a través de las técnicas. La enseñanza de cada materia, al igual que en cada edad, requiere la utilización de técnicas específicas.

El educador ha de cerciorarse de que las técnicas utilizadas logren que los contenidos causen una experiencia a los educandos.

#### f) MEDIO AMBIENTE:

Es importante que la didáctica abarque este factor, pues el educador al considerarlo orientará su enseñanza a satisfacer necesidades reales y a situar en un contexto real económico, cultural, geográfico y social al educando. Además de provocar en éste, la toma de conciencia de la realidad que le rodea y con la que convive.

Estos seis elementos tienen una participación diferente dentro del proceso enseñanza-aprendizaje, que se lleva a cabo en cada edad y con cada

---

(\*7) NERICI, Imideo, Hacia una didáctica general dinámica, p. 237

contenido.

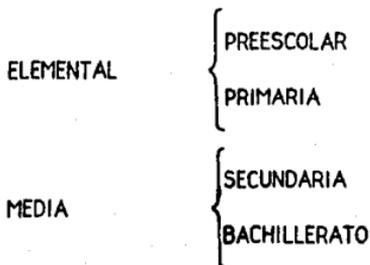
En este trabajo la didáctica se enfocará al ciclo escolar de la primaria dentro del contexto de las matemáticas. Por ello se profundizará la información de algunos elementos mencionados anteriormente.

#### **1. 4. LA ESCUELA PRIMARIA Y SUS OBJETIVOS GENERALES.**

Escuela viene del griego "scholé" que significa "gozo por lo no material". Es considerada como una de las más importantes instituciones creadas por el hombre, que tiene como función impartir los beneficios de la enseñanza, propagar la cultura y educar a la persona.

En México, el artículo tercero constitucional y la Ley Federal de la Educación marcan la estructura, lineamientos y objetivos que persigue la educación.

La Ley Federal de Educación divide la educación escolarizada o sistematizada en:



SUPERIOR

LICENCIATURA

MAESTRIA

DOCTORADO

El análisis que se pretende hacer en este trabajo se enmarca dentro de la escuela primaria, que en este país tiene un carácter de obligatoriedad, la Secretaría de Educación Pública, basándose en el artículo quinto de la Ley Federal de la Educación, establece los objetivos generales que pretende que alcancen los alumnos al término de la educación primaria, a continuación se enlistan.

- Conocerse y tener confianza en sí mismo, para aprovechar adecuadamente sus capacidades como ser humano.
- Lograr un desarrollo físico, intelectual y afectivo sano.
- Desarrollar el pensamiento reflexivo y la conciencia crítica.
- Comunicar su pensamiento y afectividad.
- Tener criterio personal y participar activa y racionalmente en la toma de decisiones individuales y sociales.
- Participar en forma organizada y cooperativa en grupos de trabajo.
- Integrarse a la familia, la escuela y la sociedad.
- Identificar, plantear y resolver problemas.
- Asimilar, enriquecer y transmitir su cultura, respetando a la vez, otras manifestaciones culturales.
- Adquirir y mantener la práctica y gusto por la lectura.
- Combatir la ignorancia y todo tipo de injusticia, dogmatismo y prejuicio.

- Comprender que las posibilidades de aprendizaje y creación no están condicionadas por el hecho de ser hombre o mujer.
- Considerar igualmente valiosos el trabajo físico y el intelectual.
- Contribuir activamente al mantenimiento del equilibrio ecológico.
- Conocer la situación actual en México como resultado de los diversos procesos nacionales e internacionales que le han dado origen.
- Conocer y apreciar los valores nacionales y afirmar su amor a la patria.
- Desarrollar un sentimiento de solidaridad nacional e internacional, basado en la igualdad de derechos de todos los seres humanos y de todas las naciones.
- Integrar y relacionar los conocimientos adquiridos en todas las áreas de aprendizaje.
- Aprender por sí mismo y de manera continua, para convertirse en agente de su propio desenvolvimiento". (\*8)

Actualmente la educación primaria en México, se encuentra organizada en siete áreas de aprendizaje, las cuales pretenden "conseguir el desarrollo integral de la personalidad del educando, a medida que alcance objetivos progresivos en los campos cognoscitivo, afectivo y psicomotor". (\*9)

Las siete áreas de formación son:

ESPAÑOL

MATEMATICAS

CIENCIAS NATURALES

---

(\*8) SEP, Libro para el maestro 4º, p. 10-11

(\*9) SEP, Programa de Educación Primaria 1º grado, p. 12

CIENCIAS SOCIALES  
 EDUCACION TECNOLOGICA  
 EDUCACION ARTISTICA  
 EDUCACION FISICA

Para cada una de las áreas el Consejo Nacional Técnico de la Educación ha aprobado planes y programas específicos.

Los programas de las áreas se dividen en ocho unidades que corresponden a ocho meses de trabajo escolar. Existen en cada una, objetivos particulares y específicos, además de actividades sugeridas para el logro de los objetivos.

Los objetivos generales de cada área en la escuela primaria en forma resumida son:

- ESPAÑOL
  - Desarrollar su capacidad de comunicación oral, lectura y escritura.
  - Conocer las funciones y estructura de la lengua además de desarrollar sensibilidad y gusto por la lectura.
- CIENCIAS NATURALES:
  - Investigar el medio natural a través de la ciencia.
  - Promover el uso de conocimiento científico para el mejoramiento y conservación del medio natural.
  - Aprovechar en forma racional al medio natural.

CIENCIAS SOCIALES	-Reconocerse como ser individual y social. -Conocer las características geográficas y socioeconómicas de la comunidad. -Analizar el proceso histórico.
EDUCACION TECNOLOGICA	-Despertar creatividad a través del trabajo manual y desarrollar la destreza en diversas técnicas.
EDUCACION DE LA SALUD	-Adquirir hábitos de higiene individual y colectiva en beneficio de la salud.
EDUCACION ARTISTICA	-Desarrollar sus sentidos para percibir formas, colores, ritmos y movimientos, espacios, tiempos que se encuentran en la vida diaria, relacionándolos para expresarse.
EDUCACION FISICA	-Encontrar en la práctica sistemática y habitual del movimiento físico, un medio a su alcance para conservar la salud.

El área de formación que interesa detallarse de acuerdo al planteamiento de este trabajo es el de las matemáticas.

#### **1.4.1. Objetivo de las matemáticas dentro de la escuela primaria.**

El objetivo general del área de matemáticas es "propiciar en el alumno el desarrollo del pensamiento cuantitativo y relacional, como instrumento de comprensión, interpretación, expresión y transformación, de los fenóme

nos sociales, científicos y artísticos del mundo". (\*10)

Al analizar este objetivo resalta que las matemáticas son un aspecto importante del conocimiento general del mundo en sí mismo y a la vez de una herramienta de dicho conocimiento.

Los contenidos del área de matemáticas en los seis grados de la educación primaria se han organizado en los siguientes aspectos:

OPERACIONES CON NUMEROS NATURALES

NUMERACION

FRACCIONES Y SUS OPERACIONES

GEOMETRIA

PROBABILIDAD

ESTADISTICA

Cada uno de los aspectos mencionados tiene su propio objetivo general, en este trabajo sólo nos referiremos al desarrollo de la noción y manejo de las operaciones con fracciones en el tercero y cuarto grado de educación primaria.

Se han elegido estos dos grados intermedios, porque en primero y segundo, los contenidos en el área de fracciones se dirigen a una introducción, mediante la visualización, identificación, equivalencias y seriaciones de fracciones exclusivamente con  $\frac{1}{2}$  y  $\frac{1}{4}$ . Es en los programas de tercero y cuarto donde se pretende que los niños comiencen a operar con estos

---

(\*10) SEP, Libro del maestro, 4º grado, p. 60

números, realizando comparaciones, discriminaciones, seriaciones, conversiones, adiciones y sustracciones con aplicación a situaciones reales; por ello es básica la mayor comprensión del niño hacia estos números, ya que es en estos grados donde se hallan los cimientos de aprendizajes posteriores.

Los objetivos generales que plantea la SEP en este aspecto de fracciones y sus operaciones en tercero y cuarto, son los siguientes:

#### TERCERO:

"Resolver problemas relacionados con su entorno que requieren sumar o restar fracciones de igual denominador". (\*11)

#### CUARTO:

"Resolver problemas relacionados con su vida diaria que impliquen adición o sustracción de números racionales, expresados en forma fraccionaria y decimal". (\*12)

A continuación se enumeran los objetivos específicos del aspecto de fracciones en los grados antes mencionados:

---

#### UNIDAD

#### OBJETIVOS DE TERCER GRADO

---

- |   |  |
|---|--|
| 1 | Aplicar la noción de las fracciones $1/2$ , $1/3$ , $1/4$ , $1/5$ , y $1/6$ en la resolución de algunos problemas. |
|---|--|
- 

(\*11) SEP, Libro del maestro, 3º grado, p. 64

(\*12) cfr. Libro del maestro, 4º grado, p. 64

## UNIDAD

## OBJETIVOS DE TERCER GRADO

- 
- 2 -----
- 3 Resolver problemas que impliquen adición de fracciones de igual denominador sin que éste exceda de 10.
- 4 Resolver problemas que impliquen sustracción de fracciones de igual denominador, sin que éste exceda de 10.
- 5 Expresar números naturales como fracciones y algunas fracciones como números naturales.
- 6 Expresar algunas fracciones como números mixtos y mixtos como fracciones.
- 7 Identificar pares de fracciones equivalentes.
- 8 Expresar fracciones de denominador 10 ó 100 como decimales, y algunos decimales como fracciones de denominador 10 ó 100.
- 

## UNIDAD

## OBJETIVOS DE CUARTO GRADO

- 
- 1 -----
- 2 Efectuar adiciones con fracciones de igual denominador.
- 3 Establecer relación de orden entre fracciones, utilizando los signos mayor que y menor que.
- 4 Efectuar adiciones y sustracciones de fracciones con diferente denominador.
- 5 Efectuar adiciones y sustracciones de fracciones con diferente denominador. Convertir fracciones de distinto denominador a fracciones equivalentes de igual denominador.

- 6 Establecer relaciones entre fracciones comunes y decimales. Efectuar adiciones y sustracciones con fracciones comunes y decimales.
  - 7 Resolver problemas que impliquen adición y sustracción de fracciones y enteros.
  - 8 Manejar medidas de peso y volumen, usando fracciones.
- 

### **I.5. DIDACTICA DE LAS MATEMATICAS.**

Una vez planteados los objetivos generales, particulares y específicos de las Matemáticas y en concreto de las fracciones, en el Sistema Educativo Nacional, es necesario recurrir a la Didáctica para seleccionar las pautas que regirán el proceso enseñanza-aprendizaje.

La enseñanza de las matemáticas se enfrenta con algunos obstáculos desde tiempo atrás. Se ha observado con frecuencia casos de muchachos que teniendo un coeficiente intelectual normal o superior y que además son bien dotados para la elaboración y utilización de estructuras lógico-matemáticas espontáneas, se encuentran carentes de habilidad para el manejo de esas mismas estructuras derivadas en operaciones o problemas matemáticos.

La didáctica especial de las matemáticas se enfrenta a este problema y cuestiona cuál es el factor que está fallando en la enseñanza y aprendizaje de esas operaciones.

Dentro de la escuela primaria tradicionalmente, las matemáticas se han enseñado como si fueran un conjunto de verdades aprendidas sólo mediante un lenguaje abstracto, es decir, se da prioridad al lenguaje y al símbolo y se deja de lado la manipulación y comprensión, esto puede ser debido a la presión de tiempo que tienen los maestros para cumplir un programa de trabajo establecido, o bien, por falta de conocimiento sobre la estructura cognoscitiva que posibilita el aprendizaje en cada etapa de la vida.

"El aprendizaje de la matemática en la escuela primaria no implica el aprendizaje de una axiomática, sino la ejercitación gradual del razonamiento a través del significado concreto de las operaciones aritméticas fundamentales" (\*13)

El aprendizaje de las matemáticas aplicadas debe ser correcto y completo, comprendiendo el significado concreto de las operaciones matemáticas fundamentales, con el fin de solucionar problemas de la vida corriente.

En la medida en que el niño encuentre por sí mismo formas de operar con material concreto, desarrollará su capacidad de análisis y síntesis y descubrirá por sí mismo, modos de operar y las consecuencias de su aplicación a una situación real.

Dentro del proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, el binomio educando-educador debe tener una participación activa en todo momento. Es conveniente que el educador conozca el desarrollo de los procesos in-

---

(\*13) OÑATIVIA, Oscar. Método Integral para el aprendizaje de la matemática inicial, p. 22

telectuales en el ser humano, desde la infancia, ya que con la comprensión de los mismos, podrá adecuar y dosificar los contenidos a enseñar.

Esto evitaría que los maestros enseñaran conceptos que aún los niños no están preparados para aprender; o bien, prepararían a la Inteligencia de sus alumnos para recibir y asimilar dichos conocimientos.

Es necesario también, que el educador no pretenda tan sólo transmitir sus conocimientos, sino que promueva la participación en el desarrollo del proceso matemático dentro de un ambiente de creatividad y descubrimiento, procurando partir de lo más imaginable y concreto a lo más abstracto y teórico.

Si el aprendizaje de las matemáticas no implica exclusivamente un desarrollo memorístico, sino un desarrollo gradual del razonamiento, la labor del maestro es propiciar situaciones para que el niño tenga oportunidad de ir construyendo las estructuras mentales que sustentan el conocimiento matemático.

El educador debe enseñar a razonar y ayudar a desarrollar las habilidades operacionales.

Por su parte, el educando en lugar de esforzarse por memorizar y aplicar fórmulas, es necesario motivarle para que se ejercite en comprender qué significa lo que hace y cómo obtiene resultados. Sin embargo, no basta con la motivación, el educando debe estar preparado con ciertas operaciones mentales que va construyendo y que le permiten adquirir nuevos conoci-

mientos y aplicarlos. A este punto se referirán capítulos posteriores.

Igualmente el planteamiento de la materia de enseñanza al que se orienta este trabajo, está especificado brevemente en el siguiente capítulo.

Dentro de los recursos didácticos usados para la enseñanza de las matemáticas, se recomienda que las técnicas sean capaces de hacer participar al educando en forma dinámica, tanto en el trabajo manual como en el mental. El educador será guía y asesor, coadyuvando al redescubrimiento de los ejercicios y conocimientos.

Los materiales son otro recurso a utilizar, son un medio que ayuda al educando a formar conceptos. Deben ser modelos dinámicos multivalentes y reversibles, que al ser manejados de acuerdo con una secuencia, dejen "en sus manos y sus mentes" las ideas matemáticas de la situación que se les plantea.

Frecuentemente se cae en el error de pensar que este material multivalente, multisensorial y reversible es necesario sólo al inicio de un conocimiento o exclusivo en los primeros grados de escolaridad. Sin embargo, se observan excelentes resultados cuando en forma sistemática y adecuada se manejan en cada etapa del desarrollo del educando.

Ya que el niño promedio ubicado en la escuela primaria se halla en una etapa en la que no puede abstraer automáticamente, el material utilizado será una herramienta clave para la mejor concepción de los conocimientos.

## **CAPITULO II.**

### **LOS NUMEROS RACIONALES DENTRO DE LAS MATEMATICAS.**

Este capítulo pretende en forma muy breve que se identifique dentro de las áreas del saber a las matemáticas, ya que son el contenido de los objetivos analizados en el presente trabajo. Posteriormente habría que ubicar dentro de las matemáticas los números fraccionarios y su importancia, debido a que en los próximos capítulos se dará una especial atención a ellos.

#### **II.1. ¿QUE SON LAS MATEMATICAS?**

La matemática es una ciencia que estudia la cantidad; organiza las cosas y los hechos dentro de un orden general. Esta ciencia:

- Estudia las relaciones que existen entre objetos y fenómenos reales en forma práctica.
- Señala el proceso para deducir conclusiones lógicas de objetos materiales.

La matemática en términos generales, se divide en: aritmética, álgebra, geometría, probabilidad, estadística, geometría analítica, trigonometría, cálculo infinitesimal.

Este trabajo básicamente se fundamenta dentro de la aritmética, que "es la ciencia que tiene por objeto exponer, calcular y estudiar las propiedades de los números y las cantidades consideradas como tales". (\*14)

La cantidad es todo lo que es susceptible de aumento o disminución y también toda magnitud que puede ser medida exacta o aproximadamente. Medir una cantidad es compararla con otra conocida de su misma especie a la que se le conoce como unidad.

Actualmente, en algunos congresos llevados a cabo para mejorar la enseñanza de esta ciencia dentro de la educación escolarizada, se ha considerado que la matemática también es:

- Una disciplina cultural.
- Un método de investigación.
- Un cuerpo de conocimientos, principios y conceptos.
- Una forma de desarrollar las capacidades necesarias para adquirir cualquier saber.

Las matemáticas además tienen un doble valor: formal y real.

- A) VALOR FORMAL: Tienen un valor intelectual puro, ya que no participa en esta ciencia la consideración del orden material. Además resulta ser independiente de las demás ciencias y es sin embargo un apoyo conveniente y necesario para muchas de ellas.

---

(\*14) POSTIGO, Luis, Matemáticas, p. 11

Existe rigor y secuencia en sus demostraciones y éstas son basadas en abstracciones puras.

- B) VALOR REAL: Asigna a las matemáticas una intervención señalada en todos los actos de la vida práctica, en los estudios científicos y en las actividades de tipo artístico.

A partir de esos valores, se desprenden otros que se desarrollan a través de planes de estudio, como el ser: formativo e informativo.

#### FORMATIVO:

Desarrolla funciones mentales y el razonamiento en particular. La capacidad de abstraer y generalizar encuentra en la adquisición, elaboración y expresión de las nociones matemáticas fundamentales la mejor oportunidad para ejercitarse y desarrollarse. Además por medio de sus operaciones se logra el desarrollo de habilidades, hábitos, creatividad, etc... de los educandos.

#### INFORMATIVO:

El aprendizaje de las matemáticas da un conjunto de conocimientos, habilidades y cualidades matemáticas útiles o indispensables en la resolución de problemas impuestos por el medio y que se refieren a la cantidad en alguna de sus infinitas formas.

#### **II.1.1. Importancia de las Matemáticas en la escuela primaria.**

La Matemática sirve entre otras cosas para entender la naturaleza o

las leyes físicas, ya que se expresan mediante fórmulas matemáticas y a través del pensamiento deductivo se pueden comprender o predecir a veces algunos de dichos fenómenos naturales.

En estas ciencias se da una aplicación de la Matemática, sin embargo, para llegar a entenderla y aplicarla necesitamos haber desarrollado en los individuos una capacidad de observación y reflexión, en la que la matemática por ser un ciencia sistemática y exacta pueda ayudar a que la persona conozca y aplique ciertas leyes lógicas no contradictorias y que se ajusten entre sí de manera igual al ser seguidas por todos los hombres.

Tanto en la matemática tradicional, como en la moderna se dan un gran número de procesos psicológicos análogos que los educadores deben conocer. La escuela moderna utiliza el poder formativo de la matemática y su influencia en el desarrollo de la capacidad de razonar deductivamente, dando a ese razonamiento una base de inducción que es necesario que se sustente con una intuición sensible que al desarrollarse y habilitarse organizará el pensamiento lógico de la persona sobre el mundo material que la rodea.

La escuela primaria elige y selecciona las nociones matemáticas que teniendo un valor formativo e informativo a la vez, están de acuerdo a la capacidad del niño y sobre todo tienen una aplicación práctica inmediata.

Lo anterior puede reafirmarse con el pensamiento de algunos estudiosos del conocimiento humano que buscan desarrollar una especie de disposición para el número, en lugar de las conquistas matemáticas en sí mismas. Además indican que el estudio evolutivo de los fundamentos de las operacio-

nes numéricas deben tener una base muy amplia que incluiría estudios sobre la comprensión que el niño tiene acerca de conceptos tales como numeración, secuencia, ordenación, cardinación, etc..., con base en estos estudios las operaciones numéricas tendrían aplicación con el fin de provocar en la mente del niño una situación de progreso o ejercitación de su pensamiento; para que llegado el momento tenga fácil acceso a conceptos teórico-abstractos.

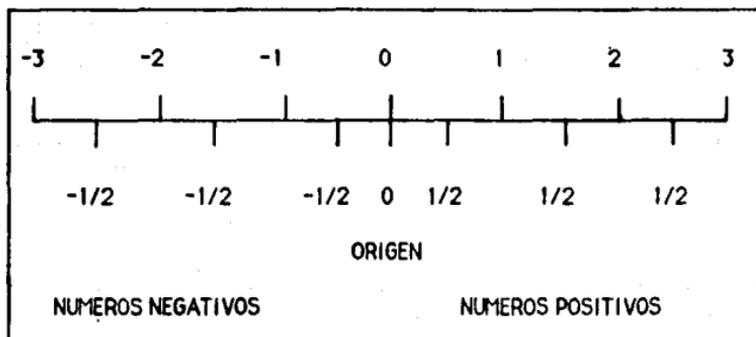
Por tanto, la escuela primaria debe tomar en cuenta para selección del contenido matemático los objetivos de aprendizaje en cada grado; y para su ordenamiento, las etapas de desarrollo del niño. Todo ello enfocado a propiciar un desarrollo correlativo, acumulativo y progresivo del pensamiento de cada uno de nuestros educandos.

## **11.2. UBICACION DE LOS NUMEROS RACIONALES DENTRO DE LA MATEMATICA.**

### **11.2.1. Números Reales.**

Una de las propiedades más importantes de los números reales, es poderlos representar por puntos en una línea recta. En la figura, se muestra un punto llamado origen para representar el 0, y otros puntos por lo común a la derecha de éste se denominan positivos y los puntos situados a la izquierda se denominan negativos. Resulta así una correspondencia entre los puntos de la recta y los números reales; es decir, cada punto representa número real único, que representa un punto único e irrepetible. Este conjunto

matemáticamente se denomina  $\mathbb{Z}$ .

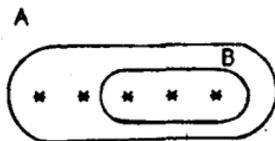


### 11.2.2. Números naturales.

Los números naturales encuentran aplicación de dos maneras:

- a) Ordinal
- b) Cardinal

El número cardinal indica simbólicamente el número de elementos que forman cada uno de los elementos coordinables. A cada número cardinal se le ha asignado un símbolo y un número. A este símbolo se le denomina numeral.



Observamos que  $B \cap A$ ; por lo que la cardinalidad de B, es menor que la de A. De acuerdo con esto, ordenamos de menor a mayor el conjunto de los números cardinales, de este modo, obtenemos un conjunto ordenado al que

denominamos conjunto de números naturales, que en matemáticas se representa con la letra  $N$ . "El conjunto  $N$  de números naturales, es el conjunto de números cardinales ordenado por la relación de menor a mayor". (\*15)

El conjunto de los números naturales no tiene un último elemento, por lo tanto es infinito.

### 11.2.3. Número entero.

Los números naturales  $N$  son empleados como números enteros positivos ( $Z^+$ ). Se utilizan para representar cantidades y magnitudes en los problemas matemáticos. Al resolver estos problemas, se han observado ciertas imposibilidades que dieran lugar al número entero negativo ( $Z^-$ ). Estas son:

- En la operación de sustracción  $5-8 =$  , no existe un entero positivo que indique el resultado.
- La representación numérica de temperaturas menores que cero en la escala termométrica.
- La representación numérica de profundidades.
- La representación numérica de pérdidas, descuentos, desfalcos, etc.

En estos casos la única solución posible se indica con los números negativos ( $Z^-$ ). Se ha marcado anteriormente que los enteros positivos se encuentran a la derecha del 0 ó punto de origen, que constituye el único conjunto vacío, ya que a la izquierda se encuentran los números enteros negativos. Por lo tanto cualquier número negativo será menor que cero, y a su vez,

---

(\*15) PARRA, Luis; M. Jesús, Matemática I, pp. 42-43

cualquier entero positivo será mayor que cero.

El conjunto de números positivos  $Z$  y el de número naturales  $N$  son equivalentes:  $1 = (+1)$ ;  $2 = (+2)$ ;  $3 = (+3)$ , etc...

#### 11.2.4. Números racionales.

Los números racionales son los números reales que se pueden expresar como razón de dos enteros. Se denota el conjunto de los números racionales por  $Q$ , así que:

$$Q = \{x/x = p/q, \text{ donde } p \in Z, q \in Z\}$$

Obsérvese que todo entero es un número racional, ya que por ejemplo:  $5 = 5/1$ , por tanto  $Z$  es subconjunto de  $Q$ .

Los números racionales son cerrados no sólo respecto de las operaciones de adición, multiplicación y sustracción, sino también respecto a la división (excepto por el 0). Es decir, que suma, producto, diferencia y cociente de dos números racionales es un número racional nuevamente.

Número racional, número fraccionario, fracción o quebrado, generalmente se toman como sinónimos. Debemos establecer la diferencia entre número y numeral.

El número nos indica cuánto o cuántos tenemos, es la medida de una cantidad. Los numerales son las representaciones que a través del tiempo la humanidad ha ido inventando arbitrariamente para designar los números.

En cada cultura puede cambiar, por ejemplo: la numeración maya, los números romanos, etc... Por lo tanto, el número racional es el número en sí mismo, y la fracción, o quebrado es el numeral, es decir, la forma de representar al racional.

La fracción o quebrado representa a un número racional, como ya se ha dicho, y expresa una o varias partes de la unidad:

$$\frac{a}{b}$$

Dada esta fracción, llamamos numerador a  $a$ , y denominador a  $b$ ,  $a$  y  $b$  pueden ser cualquier número natural.

### **11.3. UTILIDAD DE LOS NUMEROS RACIONALES.**

#### **11.3.1. El concepto de fracción en la historia.**

La necesidad de introducir este símbolo se sentía ya hacia el año de 1600 antes de Cristo; del trabajo de un hombre o de la colectividad, el PAPYRUS RHIND nos da testimonio de una crisis de vasto alcance que estaba despertando la inteligencia de los pensadores egipcios y era un reflejo de los problemas prácticos que la vida diaria imponía a una nueva sociedad, los muchos problemas que encontramos en este papiro nos revelan interrogantes de divisiones en cierto número de partes iguales, por ejemplo: dividir dos panes entre cinco personas, nos testifica que la humanidad no podía seguir utilizando solamente los números naturales. Esto llevó al hombre a crear un nuevo símbolo: la fracción.

Los griegos fueron quienes estructuraron los conocimientos matemáticos dentro de un sistema científico, y fue Pitágoras quien vinculó la filosofía y confirió a la matemática caracteres metafísicos.

### **11.3.2. Utilidad de los números racionales en la educación.**

En la escuela primaria fundamentalmente se desarrolla la aritmética con las operaciones de los números naturales, sin embargo, se introduce el manejo de los números racionales por dos razones:

- a) Porque los niños experimentan la idea del número racional a muy temprana edad. Saben que los números naturales no bastan para expresar algunos aspectos. Oyen palabras como un medio, mitad, un cuarto, etc... aplicadas a un pastel, una fruta o al comprar carne.
- b) Es preferible presentarles suficiente material para dejarles una base para aplicaciones que desarrollarán posteriormente.

Este concepto, fracción, es uno de los conceptos más difíciles de entender para el alumno en sus primeros años. Muchos niños cuando inician un estudio sistemático tienen algún conocimiento obtenido por la experiencia con las fracciones, al partir fruta u objetos. Después de sistematizado, en uno o dos años de enseñanza y ejercicios, se verifica que el alumno no acepta relacionar el valor de una diferencia y hace uso de la mecanización, utilizando una sustracción en la que "debe reducir las dos fracciones al mismo denominador".

Pero si llevamos su atención al problema concreto, es decir que se tomen los modelos reales, por ejemplo: leche en vasos que tenga que comparar, fácilmente dirá los resultados adecuados o le será más fácil comprender lo que se le pide.

Esta falta de comprensión de las mecanizaciones que simplemente realiza el niño, pueden ser causadas porque aún hay operaciones mentales que se han estructurado parcialmente o no se han comenzado a formar, y es difícil que el niño logre trasladar una experiencia específica a un problema concreto.

Por ejemplo: un niño que puede a los siete años identificar que dos bolitas de masa tienen la misma cantidad, aunque su forma sea diferente, no puede identificar que  $3/4 = 21/28$ . (Falta la operación de conservación).

O bien, un niño que ante un conjunto de figuras geométricas puede clasificar los triángulos grandes y los pequeños; pero no es capaz de establecer la proporción de 3 a 1 como  $3/1$ . (Falta madurar la inclusión de clase).

Esta reflexión lleva a comprobar que la enseñanza de las fracciones ha de desprenderse de lo concreto, para después poco a poco irse formalizando y simbolizando. De otro modo el niño pierde el sentido del valor del símbolo y se concreta solamente a mecanizar.

Al presentarse una fracción  $m/n$ , se pueden realizar tres actos operativos:

- a) Dividir en  $n$  partes al entero.

- b) Tomar m de esas partes.
- c) Considerarla respecto al entero.

Podemos ante la fracción  $3/4$ , considerar a los cuartos como la cantidad de objetos total o las partes en las que se dividió un entero, y tomará sólo tres como parte de un total. Pero su atención generalmente se centra en ese número de partes de un total, perdiendo de vista el gran total. Hay que comenzar a ejercitar a los alumnos con experiencias concretas, por medio de materiales y gráficas sobre la construcción de magnitudes iguales a  $1/n$  dentro de una magnitud dada.

La fracción  $3/4$  indica que se debe dividir el entero en cuatro partes iguales y tomar tres, si el entero es un segmento, se obtendrá como resultado otro nuevo segmento y el alumno tendrá que poder manejarlo.

Para lograr un completo entendimiento del concepto operador de las fracciones, debemos hacer que el educando descubra prácticamente las leyes de composición (adición y multiplicación) de estos números operadores.

## CAPITULO III

### TEORIA OPERATORIA DE LA INTELIGENCIA

Al hablar de educación en capítulos anteriores, se concluyó que es un proceso de perfeccionamiento de las potencias humanas; entre éstas, se podría mencionar la capacidad de aprendizaje.

Para que un aprendizaje se dé, se requiere que la persona cubra algunas condiciones biopsicosociales, como son: madurez, clima propicio, adecuación, etc... Además este proceso de aprendizaje se desprende de otro proceso, el de la enseñanza.

Las personas dedicadas a la enseñanza, pueden centrar su atención en aspectos variados, como son los contenidos, los métodos de enseñanza, los resultados, etc... pero algo que sería interesante que analizaran es cómo se van desarrollando en la mente humana los mecanismos necesarios para adquirir conocimientos, es decir: ¿Cómo es que el ser humano pasa de un estado de menor conocimiento, a uno de mayor conocimiento? Para lograr este análisis es indispensable remitirse a estudios que se han hecho sobre este tema; entre ellos están los de un hombre que dedicó gran parte de su vida y obra al estudio del desarrollo del conocimiento humano, Jean Piaget.

### III.1. ¿QUIEN FUE JEAN PIAGET?

Jean Piaget, actualmente es reconocido como una figura notable por sus investigaciones sobre el desarrollo intelectual. Estos estudios se extienden a varios campos del saber; a continuación se enlistan algunos datos cronológicos sobre su vida, los cuales fueron extraídos de su autobiografía:

- 1896 Nace en Neuchatel, Suiza el 9 de agosto.
- 1907 A los 11 años publica su primer artículo. Una observación biológica titulada "Un gorrión albino".
- 1911-1912 Publica una serie de artículos sobre moluscos (malacología).
- 1913-1915 Lee a Kant, Bergson, Spencer, Comte, Boutroux, Lalande, Durkheim, James Ribot y Janet.
- 1918 Obtiene el doctorado en Ciencias Naturales en la Universidad de Neuchatel, con "Introducción a la Malacología Valaisiana".
- 1919 Trabaja con Binet donde se encarga de la estandarización de un test de razonamiento. Inicialmente esta labor no le interesó, sin embargo a medida que desarrollaba las pruebas se entusiasmó. De ahí surgió la inquietud de analizar las respuestas incorrectas de los niños, para comprender su proceso de razonamiento. Esta fue la clave de sus estudios posteriores.
- 1921 Claparede lo invita a integrarse al Instituto J.J. Rousseau.
- 1923 Publica su primer libro "Lenguaje y Pensamiento en el Niño".
- 1929 Es profesor de historia del pensamiento científico en la Universidad de Ginebra, hasta 1939.
- 1932 Es co-director del Instituto J.J. Rousseau junto con Claparede y Bovet.

- 1933            Director del Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Ginebra.
- 1941            Aparecen dos textos fundamentales: "La génesis del número en el niño" y "El desarrollo de las cantidades físicas en el niño".
- 1946            Doctorado Honoris Causa de la Universidad de Sorbona.
- 1950            Publica la Introducción a la Epistemología Genética en tres volúmenes.
- 1952            Profesor de Psicología del niño en la Sorbona. Descubrimiento inesperado de las coincidencias entre los resultados de las investigaciones sobre las estructuras fundamentales de las matemáticas y las estructuras lógico-matemáticas.
- 1955            Crea el Centro Internacional de Epistemología Genética en Ginebra.
- 1969            Es titular de 20 doctorados Honoris Causa. "Ha hecho de la epistemología una ciencia distinta de la filosofía en relación con todas las ciencias humanas".
- 1980            Muere.

### **III.1.1. Consideraciones Preliminares.**

Durante la época en que Piaget estuvo en contacto con los niños, prestó atención a lo que ellos realmente trataban de decir. Dirigió su atención a las respuestas incorrectas que daban y buscó en ellas la forma de pensamiento que las producía de acuerdo a la capacidad de los niños dentro de cierto período de desarrollo.

Comenzó a interesarse más por lo que saben los niños, por la forma como éstos llegan a adquirir esos conocimientos. Al iniciar sus estudios en torno al proceso de aprendizaje vio que "El aprendizaje empieza con el reconocimiento de un problema (desequilibrio)". (\*16)

Para dar origen a un aprendizaje, las tareas propuestas deben coincidir con un sistema mental del niño. Según la teoría de Piaget, los procesos de equilibración constituyen factores importantes en la adquisición del conocimiento, es decir, son la base de un aprendizaje verdadero. Por ello es necesario provocar desequilibrio en el niño, para que al buscar nuevamente el equilibrio obtenga una experiencia de aprendizaje.

Piaget cree en el orden universal. Supone una unidad de todas las cosas: biológicas, sociales, psicológicas e ideacionales. Piensa que toda ciencia se interrelaciona. De ahí surge la relación de las partes y éstas con el todo.

El movimiento entre éstos, lo lleva a buscar un sentido de equilibrio. El equilibrio puede manifestarse en tres formas:

- Predominio del todo con alteración de las partes.
- Predominio de las partes con alteración del todo.
- Conservación recíproca de las partes y del todo.

La meta es alcanzar este tercer nivel de equilibrio, porque da estabilidad y marca la organización de la inteligencia en niveles superiores.

De acuerdo a los estudios de esta teoría psicológica existen cuatro factores que influyen en el desarrollo intelectual: madurez biológica, experiencia física, interacción social y equilibración; ellos se profundizarán posteriormente. Sin embargo "...Piaget concibe el aprendizaje como una función de desarrollo. El aprendizaje no puede explicar el desarrollo, mientras que las etapas de desarrollo pueden explicar en parte el aprendizaje. Pero, el teórico del aprendizaje ve al desarrollo como un proceso independiente, como una parte del proceso primario de aprendizaje o como una función de éste último". (\*17)

Es conveniente mencionar que la orientación que Piaget dio a sus estudios fue exclusivamente hacia investigar y explicar cómo se desarrolla prácticamente el proceso de pensamiento, sin tomar en cuenta las diferencias individuales, ni los efectos de las emociones sobre el pensamiento. No obstante, Piaget reconocía que éstas últimas formaban el aspecto energético-motivacional de cualquier actividad del pensamiento.

Resumiendo, Piaget no se dispuso a estudiar el desarrollo cognoscitivo en cada individuo, ni sus variaciones de acuerdo con las alteraciones emocionales, sino que se concretó al estudio en general del proceso de la cognición.

### **III.2. PIAGET Y EL PROCESO DE APRENDIZAJE.**

En general cuando un alumno normal tiene problemas de aprendizaje en la escuela, puede ser reflejo de muchísimos factores: mencionaremos a continuación algunos de ellos:

---

(\*17) MAIER, Henry, Tres teorías de desarrollo, p. 96

- a) Inmadurez neurológica.
- b) Falta de preparación biopsicosocial del niño o la familia.
- c) Ausencia de motivación.

El objetivo de una escuela que haga pensar al niño, es ayudar al desarrollo de su inteligencia y personalidad para que sea lo suficientemente madura y articulada, para que más adelante pueda lograr la adquisición de aprendizajes con base en abstracciones.

De acuerdo con Piaget, los niños no aprenden a pensar, sencillamente piensan. Y en tanto que se les orille a pensar en un nivel más alto de desarrollo, están asimismo provocando una evolución de sus mecanismos de pensamiento.

Todos los innovadores de la educación, desde Rousseau a Montessori, y los pensadores actuales, hablan de fuerzas internas y personales que mueven al niño libremente y de acuerdo al ambiente educativo que deben desarrollar esas fuerzas.

Piaget se ubica dentro de esta corriente de libertad, sin embargo, sólo se dedicó al estudio del desarrollo del pensamiento en el niño de manera analítica y objetiva.

Para estudiar una teoría de aprendizaje es necesario tomar en cuenta al educando, conocerlo y además de detectar sus necesidades es conveniente conocer el proceso psicológico del pensamiento, de ahí que sea necesario apoyarnos en una psicología del niño.

Existen numerosos estudios de diversas corrientes; los conductistas por ejemplo, afirman que no hay etapas de desarrollo intelectual y sólo se basan en estímulos y respuestas observables. En este trabajo se hará referencia a los estudios hechos por Piaget, quien se concentró en los procesos intermediarios no observables entre el estímulo y la respuesta; es decir, profundiza en los procesos internos de la mente que originan una respuesta.

La psicología del niño estudia el crecimiento mental, el desarrollo de las conductas hasta esa fase de transición que marca la inserción del individuo en la sociedad adulta.

Este estudio abarca desde la formación del embrión a lo que continúa el nacimiento y todo lo que engloba el crecimiento orgánico y mental, hasta llegar a un estado de equilibrio relativo que constituye el nivel adulto.

Las influencias del ambiente adquieren una importancia cada vez mayor desde los puntos de vista orgánico y mental.

La psicología del niño estudia el desarrollo mental; hacia la segunda mitad del siglo XIX, los psicólogos añadieron a la palabra psicología la connotación "genética" que estrictamente se refiere a los mecanismos de la herencia. Sin embargo, actualmente se denomina psicología genética a la psicología general que trata de explicar las funciones mentales desde su origen o formación. Es decir, como van desarrollándose desde el infante hasta el adulto.

Concluyendo, cuando usamos la expresión psicológica genética aplicada

al desarrollo intelectual, nos referimos al desarrollo personal que cada hombre va teniendo en sus procesos de pensamiento.

El estudio de ello es de gran utilidad para plantear alguna situación de aprendizaje. Pero no debemos olvidar que hay otros factores que pueden favorecer o aplazar este desarrollo, entre ellos están:

### 1.- Maduración:

El crecimiento mental depende en gran medida del desarrollo de los sistemas nerviosos y endócrinos que alcanzan la plenitud alrededor de los 16 años.

Piaget considera que la inteligencia es una particular situación de adaptación biológica, cuya función es ir estructurando el conocimiento a través de esquemas que van modificándose. Entre más años tenga un niño, es más probable que tenga un mayor número de estructuras mentales que actúan en forma organizada.

### 2.- Experiencia Física:

Para Piaget "...en todos los niveles genéticos la cognición es una cuestión de acciones reales ejecutadas por el sujeto". (\*18) El conocimiento se construye a través de las acciones que el sujeto aplica a los objetos. Es decir, en la medida en la que el niño manipula o actúa con el objeto de conocimiento, adquiere un mayor dominio sobre él; ya que por medio de la acción, lo objetos son incorporados al sujeto.

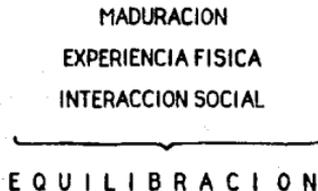
---

(\*18) FLAVELL, John, La psicología evolutiva de Piaget, p. 101

### 3.- Interacción social:

Las relaciones sociales que van rodeando al niño, básicamente son dos: la primera es niño-adulto, en la que éste último es entre otras cosas fuente de transmisiones educativas y lingüísticas. La segunda, niño con otros niños; este tipo de interacción permite que se vaya socializando, lo cual lleva a la descentración y a la vez a la cooperación. Esta interacción social puede darse a través de juegos de reglas, acciones en común e intercambios verbales.

Estos tres puntos por sí solos no pueden explicar el desarrollo intelectual. "Ningún factor aislado puede explicar el desarrollo intelectual por sí mismo. Este último es una combinación de todos los siguientes factores:



y las interacciones entre ellos es lo que influye en el desarrollo. La equilibración es vista por Piaget como algo que ocupa un papel importante en la coordinación de estas interpretaciones". (\*19)

Hemos estado hablando de factores que influyen dentro del desarrollo intelectual, sin embargo, conviene definir lo que se entiende en este trabajo por esa expresión.

---

(\*19) LABINOWICZ, op. cit., p. 46

El "desarrollo" es un proceso inherente a los seres vivos, inalterable y evolutivo. Las siguientes generalizaciones resumen lo que es este concepto:

- El desarrollo responde a un proceso continuo de generalizaciones y diferenciaciones.
- Se obtiene mediante un desenvolvimiento continuo en el que cada nivel se arraiga en una fase anterior y se continúa en la siguiente.
- Cada fase implica una repetición de procesos antecedentes, aunque en diferente forma de organización.
- Estas distintas organizaciones crean una jerarquía de experiencias y acciones.

Por lo que respecta al término Inteligencia, generalmente se relaciona con rapidez al captar. La psicología moderna marca que existe una inteligencia anterior al lenguaje y la define como un proceso de adaptación ante nuevas situaciones. El niño entra en este proceso de adaptación a partir de sus primeras relaciones con el medio, es decir desde su nacimiento.

Piaget dice "...que la inteligencia tiene su fuente en la actividad del niño con los objetos". (\*20)

Esta actividad es una manifestación exteriorizada e interiorizada que caracteriza los primeros dos años de vida. Pero esta actividad no se convierte en conocimiento de por sí, sino que aunado a las percepciones va tomando un significado.

---

(\*20) ALPERIN, Ester, et. al. Pautas de desarrollo de la inteligencia en el niño. p. 27

"El conocimiento de acuerdo con Piaget, no es absorbido pasivamente del ambiente. No es procreado en la mente del niño, ni brota cuando él madura, sino que es construido por el niño a través de la interacción de sus estructuras mentales con el ambiente". (\*21)

Estas estructuras mentales no se presentan aisladas, sino que están coordinadas, dando lugar a un conocimiento inicial no diferenciado. Por ejemplo: un bebé no sabe hasta dónde termina su cuerpo y dónde comienza el de su madre. Esta primera diferenciación deberá establecerla entre el mundo de las personas y el de las cosas.

Más adelante, este proceso de diferenciación lo llevará a separar el objeto de la acción, que éste ejerce o de la acción ejercida sobre él; la diferencia será entre el propio yo y el otro. Este proceso de diferenciación se le conoce como descentración, además parte de lo general a lo particular y se coordina con conductas cada vez más complejas que se van dando a lo largo del desarrollo y que poco a poco van dejando de lado las conductas exclusivamente sensoriomotoras para dar paso a conductas afectivas o intelectuales en un nivel más abstracto.

"Para Piaget el desarrollo intelectual es un proceso de reestructuración del conocimiento: El proceso comienza con una estructura o una forma de pensar propia de un nivel. Algún cambio externo o intuiciones en la forma ordinaria de pensar crean conflicto mediante la propia actividad intelectual. De todo esto resulta una nueva forma de pensar y estructurar las co-

---

(\*21) LABINOWICZ, op. cit., p. 35

sas; una manera que da nueva comprensión y satisfacción al sujeto". (22)

Lo anterior se puede ilustrar al retroceder al momento del nacimiento, el individuo posee algunos reflejos innatos inmodificables, como bostezar, succionar, prensar, etc... algunos de esos iniciales, se modificarán a través de la experiencia, por ejemplo: el bebé al succionar, discriminará el pezón materno de su mano o de cualquier otro objeto que se lleve a la boca.

A partir de esto tienen lugar formas más complejas de comportamiento. Así estos reflejos innatos se estabilizarán con la reiteración de los reflejos modificables que transformarán en esquemas o estructuras mentales flexibles, de acuerdo con las cuales organizará o integrará nuevas experiencias.

Todas las conductas a desarrollar se engloban en fases que a su vez se subdividen en estadios. Para que haya estadios es necesario que: "el orden de sucesión de las adquisiciones sea constante". (\*23) Esto no implica una cronología, sino un orden de sucesión. El orden de sucesión de estos periodos es siempre el mismo, en donde cabe la variación es en la edad cronológica, en la que se presenta en cada uno de los individuos.

Al hablar de la inteligencia se mencionó que es un proceso de adaptación. Para Piaget adaptación será el equilibrio, es decir, la compensación de factores que actúan entre sí dentro y fuera de la persona. Estos factores son dos fuerzas que están presentes en todas las etapas de desarrollo y que

---

(\*22) Idem.

(\*23) ALPERIN, Ester. op. cit., p. 30

son la asimilación y la acomodación.

### III.2.1. **Asimilación y Acomodación**

Resistencia al cambio ----- Estabilidad  
 Necesidad de cambio ----- Crecimiento

La asimilación es una integración de estructuras previas, es en la primera etapa del mecanismo que explica la repetición de conductas; por ejemplo: tomar, arrojar, etc...

Se centra en aquello que es esencial para todo conocimiento, aquello que es semejante, común o generalizable de una situación dada a otra. El proceso de asimilación es dinámico y cambiante dentro de un esquema conocido.

La función asimiladora es común en todas las etapas: pero en cada una su contenido es diferente. En el período sensoriomotor su contenido son percepciones, movimientos, actitudes. Más adelante en el período preoperatorio, adjudica vida a todo lo que tiene movimiento. "Asimila el mundo externo o físico a su mundo interno o psíquico, se confunde lo interno con lo externo, y el yo con el mundo..." (\*24)

Una vez que la persona va descentrándose y logra ver dos puntos de vista, el suyo y el del mundo exterior, objetivizará la realidad y podrá acomodar su pensamiento a ésta.

---

(\*24) ibidem, p. 32

La acomodación de una nueva información nos garantiza el cambio y la proyección de nuestro entendimiento, éste puede implicar la reorganización de estructuras existentes o la elaboración de nuevas estructuras.

En todas las etapas se da el proceso de asimilación y acomodación. Estas dos funciones en interacción son los dos polos de un mismo proceso que llevan al crecimiento. La asimilación supone una reciprocidad con el medio ambiente y la acomodación está subordinada al esquema de asimilación. Por ejemplo: como semejanza, un niño que quiere introducir un pequeño objeto en la abertura de una caja, abrirá y cerrará la boca de acuerdo al tamaño de la abertura que quiere tener en la caja.

En un primer momento actúa la asimilación: abrir y cerrar la boca, que representa la conducta conocida; pero después vence la acomodación de acuerdo al objeto real que quiere introducir es la abertura de la boca.

Mientras se trata de reproducir un acto, hay predominio de la asimilación, pero cuando se dirige a una situación nueva, predomina la acomodación.

CONTINUIDAD

NOVEDAD

ESTABILIDAD

CAMBIO

ASIMILACION

ACOMODACION

E Q U I L I B R I O

Podemos concluir que la asimilación no se aplica a lo nuevo, lo propio de ésta es la conservación. Por el contrario, la acomodación está ligada a

conductas imprevistas, a la invención o a experiencias nuevas.

El desarrollo de la inteligencia resulta del equilibrio de estas dos funciones.

Cuando la información viene del medio ambiente, y no se adapta a la estructura existente se crea una discrepancia.

### **III.3. LAS ETAPAS DE DESARROLLO.**

Para nosotros pensamiento e inteligencia son sinónimos. Pensar implica el uso activo de la inteligencia y la inteligencia implica el uso de instrumentos mediante los que una persona piensa.

Piaget sostiene que la inteligencia es siempre activa y constructiva, y contribuye en cualquier situación con la que el individuo esté en contacto. El ingreso de un estímulo externo no se concibe como una asociación de elementos, sino como una asimilación por la inteligencia del niño, siendo esta totalidad de los mecanismos que el niño tiene a su disposición para pensar. Para Piaget inteligencia implica la creación gradual de nuevos mecanismos de pensamiento.

Piaget formula los períodos o etapas del desarrollo de la inteligencia en función de los cambios estructurales que modifican el comportamiento, desde los esquemas internos de adaptación al medio.

El desarrollo no es un proceso acumulativo, implica un sistema de transformaciones "La mente humana puede ser definida como el origen, la mutación y el mantenimiento de un relativo equilibrio de estructuras de transformación". (\*25)

El principio de la mente humana es su capacidad de transformación activa y el aprovechamiento organizado de la experiencia.

La naturaleza de la mente humana, según Piaget, es estar en construcción permanente y no es una acumulación de estructuras ya hechas. "El principio que regula el desarrollo es, pues, la autoconstrucción de las estructuras de la mente, el cual interviene principalmente mediante las regulaciones de adaptación que en Piaget son la asimilación y la acomodación". (\*26)

Se ha analizado lo que es asimilación y acomodación, pero conviene recordar aquí que ambos son autorregulaciones del desarrollo de la inteligencia.

La estructura total tiene subestructuras y el todo responde a reglas operacionales formando un sistema equilibrado. Los esquemas son secuencias bien definidas de acción, son patrones estructurales de la percepción, y son base de la actividad operatoria del pensamiento para trabajar sobre la realidad.

Antes de iniciar la descripción de cada etapa, es necesario saber qué

---

(\*25) OÑATIVIA, Oscar. *op. cit.* p. 14

(\*26) *Ibidem.* p. 15

es una etapa. Al hablar de etapas o estadios, Piaget no sugiere la existencia de niveles estáticos o separados en el desarrollo, ni tampoco significa saltos bruscos de uno a otro. En la teoría operatoria de la inteligencia se habla de etapa cuando:

- a) El orden de sucesión de las conductas es constante, independientemente de las posibles aceleraciones o retrasos que pudiesen presentarse en función de la experiencia y/o del medio social. La presentación de las etapas no se invierte, esto es: la etapa de operaciones formales no podría superponerse o darse antes de las operaciones concretas.
- b) Cada etapa será definida por una estructura de conjunto que caracterice a todas aquellas conductas nuevas, propias de ella. Por ejemplo: una estructura característica del nivel de operaciones concretas, sería el agrupamiento lógico de operaciones de seriación, clasificación y conservación.
- c) Las estructuras presentan un carácter integrado, esto es, que cada una es preparada por la anterior y a su vez se convierte en integrante de la siguiente. Un ejemplo lo constituye la noción de objeto permanente; éste se construye en la etapa sensoriomotriz y pasa a ser un elemento integrante de las nociones de conservación, las cuales se manifiestan durante el período de las operaciones concretas.

Las transiciones entre período y período, implican reestructuración e integración de las estructuras de la etapa anterior. Por ello al impartir un nuevo conocimiento hay que partir de la acción.

Para Piaget, las etapas son realidades psicológicas, cada una se asocia

con un tipo de acción. Cada etapa es un nivel en el cual el individuo puede realizar cierta cantidad de cosas diferentes en formas características.

### III.3.1. Desarrollo cognoscitivo por etapas.

Piaget cree poder distinguir cuatro periodos principales en los que el desarrollo cognoscitivo es cualitativamente diverso, con algunos subestadios en cada uno de ellos.

<u>PERIODOS PRELOGICOS</u>	}	SENSOMOTRIZ (0 - 18 meses)	Coordinación de movimientos Prerrepresentaciones Preverbal
		PREOPERACIONAL (2 - 7 años)	Representación de acciones Pensamiento y lenguaje
<u>PERIODOS LOGICOS</u>	}	OPERACIONES CONCRETAS (7 - 11 años)	Pensamiento lógico cimentado en la realidad física.
		OPERACIONES FORMALES (11 - 15 años)	Abstracciones

De cada uno de estos periodos se explicarán sus características generales y se mencionarán a grandes rasgos los logros que va teniendo la persona en ellos. Se hará una explicación detallada en el periodo de operaciones concretas ya que este trabajo se desarrolla en el aprendizaje dentro de la escuela primaria, que normalmente cae en la edad en la que atraviesan los niños este periodo.

### III.3.2. Sensomotor.

Se le llama así porque el lactante no presenta pensamiento ni afectividad ligada a representaciones que permitan evocar las personas o los objetos ausentes.

El desarrollo mental en estos primeros 18 meses es rápido y de importancia, ya que ahí el niño elabora el conjunto de subestructuras cognoscitivas que le servirán de punto de partida a sus construcciones perceptivas e intelectuales ulteriores, así como cierto número de reacciones afectivas que determinarán su desarrollo siguiente.

Ya se ha mencionado que existe una inteligencia anterior al lenguaje, ésta resuelve problemas de acción (alcanzar objetos), y construye un complejo sistema de esquemas de asimilación.

A falta del lenguaje y función simbólica se apoya sólo en percepciones y movimiento.

Es difícil precisar en qué momento aparece la inteligencia; sin embargo, se da una sucesión notablemente continua de estadios, cada uno de ellos señala un nuevo progreso parcial.

"...de los movimientos espontáneos y del reflejo a los hábitos adquiridos y de éstos a la inteligencia hay una progresión continua, el problema es alcanzar el mecanismo de esa progresión en sí misma". (\*27)

---

(\*27) PIAGET, INHELDER, Psicología del niño, p. 16-17

En esta etapa el niño crea un nuevo mundo práctico en relación con sus deseos de satisfacción física. Las tareas principales de este período son la coordinación de actos motores y percepción del todo en forma tenue.

Dentro de este período se presentan seis estadios sucesivos de organización:

- 1.- Uso de reflejos
- 2.- Reacciones circulares primarias
- 3.- Reacciones circulares secundarias
- 4.- Coordinación de los esquemas secundarios y aplicación a nuevas situaciones
- 5.- Reacciones circulares terciarias
- 6.- Invención de nuevos medios mediante combinaciones mentales.

#### 1.- Uso de reflejos.

Durante el primer mes de vida se ejercitan los reflejos. "La individualidad del niño se expresa con el llanto, succión y variaciones del ritmo respiratorio". (\*28)

Un reflejo es la repetición espontánea de actos mediante un estímulo interno o externo. Este uso de reflejos junto con la maduración neurológica y física va formando hábitos. La adaptación empieza con las primeras variaciones de los actos reflejos y las conductas ya adquiridas. Implica la asimilación generalizada en la que el niño incorpora más elementos de su medio inmediato. Se inicia el proceso de diferenciación. Además adapta su medio a sus demandas orgánicas.

---

(\*28) MAIER, Henry, *op. cit.*, p. 111

## 2.- Reacciones Circulares Primarias

Aquí los movimientos voluntarios reemplazan poco a poco la conducta refleja.

El niño alcanza cierta madurez neurológica antes de que comprenda sus emociones (aproximadamente al segundo mes).

La repetición de conductas es una respuesta consciente al estímulo reconocido. Las respuestas accidentales también se convierten en hábitos sensoriomotrices, por ejemplo: empujar con la mano.

Estas reacciones circulares primarias ayudan a la asimilación de una experiencia anterior y al reconocimiento del estímulo que provoca la reacción. Con ella aparece el proceso de acomodación. Esta reacción da una pauta de organización, un esquema en el cual dos o tres factores se organizan y relacionan. Comienza a perfilarse la coordinación ojo-mano.

Hay dos nuevas áreas de organización:

- a) Idea de causalidad: "...por lo tanto, el primer sentido de la relación causal en el niño es simplemente una conexión difusa entre una acción por una parte y un resultado por otra, sin una comprensión de las relaciones espaciales o de los objetos intermedios". (\*29)
- b) Idea de espacio y tiempo: Reconoce por secciones su ambiente. No distingue entre estímulos externos e internos.

---

(\*29) apud. PIAGET J. The child's conception of de world. London, p. 50.

### 3.- Reacción circular secundaria

Se da entre el cuarto y el noveno mes. Implica la continuación de pautas de reacción circular primaria combinadas con una función secundaria que lleva a la reacción primaria más allá de su actividad básicamente orgánica.

Su aparato sensoriomotor es capaz de incorporar hechos a los que se ha acostumbrado. El objeto de su conducta es la retención. Sus reacciones ahora repiten y prolongan las anteriores.

- Reacciona ante objetos distantes, comienza a diferenciar entre causa y efecto.
- Evaluación cuantitativa y cualitativa que se basa en simples experiencias.
- Sus respuestas y reacciones se unen en una secuencia unificada de acción.
- Comienza a tomar conciencia de su participación.
- Reconoce estímulos como parte de una secuencia de acción global, lo cual hace que se incorpore al uso de símbolos.
- Comienza a delinarse un aspecto intencional en su conducta.

El desarrollo intelectual estimula tres procesos: imitación, juego y afecto.

### 4.- Coordinación de esquemas secundarios y aplicación a nuevas situaciones.

El niño usa logros de conducta anteriores como base para incorporar otros nuevos. Realiza experiencias con objetos nuevos: prueba y experimenta formas de manejarlos.

A fines del primer año logra refinar su capacidad de generalizar y diferenciar. Su conducta se basa en el ensayo y error. Piaget dice que en este estado la adaptación es un resultado de la experimentación casual.

El niño establece una independencia entre él y la acción que desarrolla ya que es capaz de reconocer signos y anticipar respuestas para los mismos.

#### 5.- Reacciones circulares terciarias.

Hay aún experimentación activa y hay progresiones en las reacciones primera, segunda y tercera, así como una repetición cíclica de los procesos anteriores.

Sigue incorporando a lo anterior sus nuevos conocimientos, se puede deducir que por esas repeticiones cíclicas el niño demuestra que empieza a razonar.

El conocimiento de las relaciones entre los objetos proporciona los primeros indicios de memoria y retención.

#### 6.- Invencción de nuevos medios mediante combinaciones mentales.

Señala el término del período sensoriomotor. El niño es capaz de encontrar medios nuevos no ya sólo por tanteos exteriores o materiales, sino por

combinaciones interiorizadas, que desembocan en una comprensión repentina.

El criterio insight es "...demasiado estrecho, porque gracias a una serie ininterrumpida de asimilaciones de diversos niveles (I a V), los esquemas sensoriomotores se hacen susceptibles de esas nuevas combinaciones y de esas interiorizaciones que hacen posible, finalmente, la comprensión inmediata en ciertas situaciones. Este último nivel (VI) no puede ser separado de aquellos cuyo acabamiento simplemente señala". (\*30)

### **III.3.2.1. Aspectos generales del período sensoriomotor.**

Los esquemas de asimilación sensoriomotriz desembocan en una especie de lógica de acción: que implica poner en relaciones y en correspondencias.

La inteligencia sensoriomotora organiza lo real, construyendo las grandes categorías de acción que son: esquemas de objetos permanentes en espacio, tiempo y causalidad.

Durante los primeros dieciocho meses el niño se termina de situar como un objeto entre otros, es decir, se lleva a cabo una descentración. Durante este período se construyen principalmente los siguientes esquemas:

#### **a) Espacio permanente.**

Durante el período sensoriomotriz el niño pasa de una situación inicial donde los objetos simplemente eran figuras móviles que aparecían o desaparecían.

---

(\*30) PIAGET, INHELDER, *op. cit.* p. 23

recian de un lugar, a un estado en el que el pequeño distingue la existencia real del objeto independientemente de sus movimientos. Por ejemplo: un bebé de un mes no sigue el objeto en movimiento, éste sólo viene y va. Más tarde ese bebé será capaz de seguir un objeto en movimiento y después de ocultarlo bajo una frazada, el pequeño la quitará para encontrar el objeto.

b) Espacio y Tiempo.

Durante el período sensomotriz el espacio del niño se va ampliando a medida que pasa el tiempo. Inicialmente es un espacio bucal, táctil, visual auditivo y posicional; posteriormente gracias a los desplazamientos que logra su espacio, se expande a lo que le rodea.

c) Causalidad.

Los objetos permanentes y sus desplazamientos son inseparables del sistema causal. La causalidad es objetiva y adecuada, después de una larga evolución, cuyas fases iniciales se centran en la acción propia, ignorando las relaciones espaciales y físicas inherentes a los sistemas causales.

La causalidad inicial puede llamarse mágica-fenomenista; fenomenista porque una cosa x, puede producir otra. Es mágica porque se centra en la acción del sujeto, independientemente de los contactos espaciales.

A medida que el universo se estructura a causa de la inteligencia sensoriomotriz dentro de lo espacio-temporal y por la constitución de objetos permanentes; la causalidad se objetiviza y especializa. Las causas reconocidas ya no caen en el sujeto, sino en los objetos, lo cual supone un contacto físico y espacial.

Dentro del aspecto cognoscitivo, el período sensoriomotor se expresa en tres grandes formas sucesivas (nunca se pierden las anteriores).

- \* Las formas iniciales están constituidas por estructuras de ritmos. Los reflejos son diferenciaciones progresivas.
- \*\* Regulaciones diversas que diferencian los ritmos iniciales siguiendo múltiples esquemas. Estas regulaciones se adquieren por el control de tanteos que intervienen en la formación de los primeros hábitos (reacciones circulares) y en los primeros actos de la inteligencia.
- \*\*\* Reversibilidad. En este período esta relación no aparece claramente como AB=BA. Sin embargo, es aquí cuando se desarrollan sus bases. Esta es la fuente de futuras operaciones del pensamiento, como por ejemplo: la relación de conservación.

El aspecto cognoscitivo de conductas-consiste en su estructuración y el aspecto afectivo en su energética (economía). Estos dos aspectos son complementarios y por lo tanto hay un paralelismo en ambos desarrollos. La afectividad de los mismos niveles sensoriomotores procede de un estado de indiferenciación entre el yo y el entorno físico y humano para constituir más tarde un conjunto de cambios entre el yo diferenciado y las personas o las cosas.

El desarrollo afectivo en el período sensoriomotor se caracteriza por tener:

- a) **Adualismo inicial**: No existe ninguna conciencia del yo, ninguna frontera entre el mundo interior o vivido y el conjunto de las realidades exteriores. Toda la actividad está centrada en el cuerpo y acción propios,

ya que sólo la disociación del yo y de los otros o del no yo permite la descentración, tanto afectiva como cognoscitiva, se trata de una centración inconsciente por indiferenciación. Hay alternancia entre tensión y laxitud (primer estadio).

- b) Reacciones intermedias: Durante los estadios II y IV el contacto con personas se hace más importante, comienza la comunicación ya que reacciona ante las personas. Se establece una causalidad relativa a las personas, en tanto que éstas proporcionan placer, confort, tranquilidad, etc...
- c) Relaciones objetales: Entre los estadios V y VI existe una doble constitución de un yo diferenciado de otro, y de otro que se convierte en objeto de afectividad. Es la relación como tal entre el sujeto y el objeto afectivo; es pues la interacción entre ellos.

### **III.3.3. PRECONCEPTUAL O PREOPERACIONAL**

Lo que en este trabajo se marca como un período más, en realidad Piaget lo sitúa como un subperíodo limitado por la etapa 6 del período sensoriomotor (entre 18 y 24 meses) y el período de operaciones concretas (aproximadamente hacia los 7 años). Este período se caracteriza básicamente por la formación del pensamiento a través de imágenes, símbolos y conceptos; se da una labor de reconstrucción en el pensamiento ya que se elaboran representaciones simbólicas para lo que eran simples acciones.

Plaget indica que para que se formen estas representaciones, el niño debe lograr distinguir entre los significantes y los significados y a la vez marcar una relación entre ellos para que al evocar uno se refleje en el otro. Esta capacidad es designada como función simbólica.

En el período anterior el niño es incapaz de evocar un significante (palabra, imagen, etc...) que simboliza una situación ausente (significado) de la cual el significante no es algo concreto, sino que está diferenciado. En conclusión, esta función simbólica va desde el símbolo\* (significante diferenciado) hasta el signo\*\*.

Los símbolos pueden ser contruidos por el individuo sólo. El signo necesariamente es colectivo, el niño lo recibe por el canal de la imitación.

Durante el segundo año se da la transición del período sensoriomotriz al preoperacional, aparecen entonces, conductas que implican la evocación representativa de un objeto ausente y que supone la construcción o empleo de significantes diferenciados, ya que se refieren a objetos actualmente no perceptibles como a los que están presentes. Se presentan estas manifestaciones en su aparición:

a) IMITACION DIFERIDA:

Antes de los 16 meses, se inicia en ausencia del símbolo, en una conducta de imitación sensoriomotora. El niño comienza a imitar en pre-

---

\* SIMBOLOS "...son motivados, es decir, que presentan, aunque significantes diferenciados, algunas semejanzas con sus significados" son signos elaborados por el niño sin ayuda de los demás.

\*\* SIGNOS "...son arbitrarios o convencionales".

sencia del modelo, después de lo cual puede continuar en ausencia de ese modelo, sin que implique representación en pensamiento.

A los 16 meses puede observar el modelo y después de dos horas, por ejemplo puede imitar el modelo o escena sin la presencia original. Se da el comienzo de la representación de un significante diferenciado.

**b) JUEGO SIMBOLICO:**

La representación es total y el significante diferenciado es un gesto imitador acompañado de objetos que se han hecho simbólicos; por ejemplo, jugar a dormir y utilizar algún objeto como almohada. Este juego no tiene límites, el niño cambia la realidad según sus deseos, agregando experiencias sociales, o resolviendo conflictos.

**c) IMAGEN MENTAL:**

Son asociaciones (asimilaciones) de situaciones a través de la imitación interiorizada. Existen dos categorías: reproductoras (evocan espectáculos percibidos anteriormente) anticipadoras (imagina resultados antes de actuar).

**d) LENGUAJE:**

Existe representación verbal, además de imitación, por ejemplo: pronunciar miau al ver un gato. Estas conductas se basan en la imitación, por lo tanto, constituye a la vez la prefiguración sensomotora de la representación y en consecuencia el término del paso entre el nivel sensomotor y el de las conductas representativas.

Durante el período sensoriomotor el niño se interesa por su ambiente

Inmediato, coordina movimientos y percepciones para alcanzar objetivos a corto plazo, no pueden considerar acciones o actuar con el fin de alcanzar una meta distante en el tiempo o en el espacio.

Durante la primera parte del período preconceptual, la capacidad para representar una cosa por medio de otra aumenta en velocidad y alcance de pensamiento, sobre todo en la medida en que se desarrolla el lenguaje.

El pensamiento preconceptual es el resultado del equilibrio entre la asimilación y la acomodación. Cuando un niño en estadio preconceptual no puede comprender inmediatamente una nueva experiencia, la asimila a la fantasía sin acomodarla. A medida que el niño pasa a los estadios siguientes, aumentan las tentativas de adaptarse al ambiente. Se da un proceso de descentración estableciendo diferencias entre el objeto que conoce y el objeto conocido.

Piaget ve el papel del juego como algo más que una preparación para las actividades de adulto. Considera que los juegos reproducen lo que ha impresionado al niño, evocan lo que le ha agradado "forman una vasta red de medios que permiten al yo asimilar la totalidad de la realidad, es decir, integrarla a fin de volver a vivirla, dominarla o compensarla". (\*31)

En general este período se divide en tres estadios que a continuación se sintetizan:

1.- PRIMER ESTADIO (3 - 3 1/2 años)

-Hacen su aparición las funciones simbólicas en sus diferentes formas

---

(31) BEARD, Ruth, Psicología Evolutiva de Piaget, p. 49

lenguaje, juego simbólico o imaginativo, en contraste con los juegos de ejercicio que dominaban en el periodo sensoriomotor: imitación diferida.

-Estructuración representativa naciente en el espacio y en el tiempo, pero los esquemas integradores del objeto tropiezan con serias dificultades para funcionar en un espacio no inmediato y en un tiempo no presente.

## 2.- SEGUNDO ESTADIO (4 - 5 1/2 años).

-Aparecen las organizaciones representativas fundadas sobre configuraciones estáticas, ya sobre una asimilación a la acción propia. Predomina la organización perceptiva como colecciones figurales. Estas configuraciones perceptivas no son reversibles y domina la no conservación de las cantidades o de las cosas.

## 3.- TERCER ESTADIO (5 1/2 - 8 años)

-Aparecen las regulaciones representativas articuladas. Fase importante y de transformación entre las estructuras mentales de la conservación y la no conservación de la sustancia, de las cantidades y de las relaciones topológicas.

-El pensamiento se hace intuitivo, se libera en cierto sentido de configuraciones externas, adquiere habilidad para establecer relaciones como aprehensión súbita (insight).

Este periodo se ha llamado preoperacional o preconceptual, en él se van construyendo las bases de lo que posteriormente serán las operaciones concretas del pensamiento, como son: conservación, seriación, clasifica-

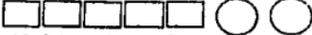
ción, causalidad, tiempo y espacio.

Las características de este período y del siguiente en que las operaciones deben basarse en acciones que el niño realiza con objetos, que al manipularlos le dan la oportunidad de crear relaciones en forma mental.

Dentro del período preoperacional, básicamente se inicia la formación de operaciones como: clasificación, seriación y conservación. Cada una de ellas pasa por diferentes estadios.

Tomando información de diferentes libros, se presenta a continuación un cuadro explicativo que contiene los estadios por los que atraviesa el niño durante el desarrollo de estas operaciones; además se agrega un ejemplo de cada una de ellas.

**PROCESO DE DESARROLLO DE LAS OPERACIONES EN EL PERIODO PREOPERACIONAL**

CLASIFICACION	SERIACION	CONSERVACION
<p><b>ES AGRUPAR OBJETOS SEGUN SUS SEMEJANZAS</b></p> <p><b>1ª (Aprox. 5 1/2 años)</b> Se forman colecciones figurales en el espacio, se pueden alinear o formar figuras geométricas simples, como cuadrado, círculo, etc...</p> <p><b>2ª (5 1/2 - 7 años)</b> Colecciones no figurales. Forma conjuntos pequeños, basado en un criterio único, ejemplo: color, forma, textura, tamaño.</p> <p><b>3ª No se alcanza en preoperacional.</b></p>	<p><b>ES ORDENAR DE ACUERDO A LAS DIFERENCIAS DE LOS OBJETOS.</b></p> <p><b>1ª (Hasta 5 años aprox.)</b> Sólo puede comparar y ordenar pares o tríos de objetos correctamente. No establece aún la relación de mayor y menor que.</p> <p><b>2ª (5 - 7 años)</b> Ordene series de 10 elementos por ensayo y error. No imagine la serie que puede formar, lo va haciendo a través de comparaciones.</p> <p><b>3ª (De 6 en adelante)</b> Puede imaginar la serie; pero aún carece de transitividad y reversibilidad</p>	<p><b>ES LA TRANSFORMACION DE UNA FORMA NUMERICA A OTRA EQUIVALENTE.</b></p> <p><b>1ª (4 - 5 años aprox.)</b> Es altamente influenciado por experiencias. No existe correspondencia uno a uno.</p> <p><b>2ª (5 años)</b> Hay relación uno a uno, pero la equivalencia no es durable.</p> <p><b>3ª (6 años)</b> A pesar de transformaciones, se conserva la equivalencia.</p>
<b>E J E M P L O S E N O P E R A C I O N E S</b>		
<p>Al tener las siguientes figuras de plástico:</p>  <p>- ¿Cuántas fichas hay? - siete</p> <p>- ¿De qué material son? - De plástico</p> <p>- ¿Qué figuras son? - Círculos y cuadrados</p> <p>- Si escondo los círculos ¿queda alguna? - Sí, los cuadrados</p> <p>- ¿Hay más círculos o más figuras de plástico? - Círculos.</p>	<p>Es capaz de comparar el tamaño de dos o tres figuras:</p>  <p>Chico                  Mediano                  Grande</p> <p>Para el ordenar más de tres, la seriación no es adecuada.</p> 	<p>Ante la comparación de dos bolas de masa iguales, primero el niño acepta que son iguales. Pero al alargar la forma de alguna de ellas, en el primer y segundo estudio dirá que es mayor la más larga, no obstante, que haya observado la transformación. En el tercer estudio, será capaz de entender la conservación de la materia independientemente de la forma de éste.</p>

### III.3.4. OPERACIONES CONCRETAS

Las operaciones mentales "...Se desarrollan en forma separada, campo por campo, y determinan una estructuración progresiva de estos campos, sin que se alcance una generalidad total". (\*32)

Cada campo forma islas de conocimiento. A medida que el niño usa el pensamiento operacional puede concebir dos hipótesis y comprender la relación entre ambas. En esta etapa el niño es capaz de mostrar un pensamiento lógico ante los objetos físicos. Puede también invertir mentalmente (reversibilidad) las acciones que antes sólo había hecho físicamente. Retiene mentalmente dos o más variables cuando observa objetos (inclusión de clase) y reconcilia datos aparentemente contradictorios. Es consciente de la opinión de otros. Puede mentalmente entender propiedades de los objetos como son número y cantidad. El pensamiento se limita a cosas concretas aún no hay ideas.

Piaget llama operaciones a las actividades de la mente. El niño operacional está liberado del impacto de la percepción inmediata; es capaz de ordenar hacia adelante y hacia atrás el tiempo y espacio a nivel mental, pero sólo es capaz de pensar acerca de objetos y personas concretos y existentes.

Lo propio de esta etapa son las estructuras que se llaman agrupamientos y que constituyen encadenamientos progresivos, que implican composi-

---

(\*32) apud. PIAGET, Cognitive development in children. The Piaget papers.  
p. 15-16.

ciones de operaciones directas.

Piaget dice que el pensamiento es una forma de acción que se diferencia, se organiza y va afinando su funcionamiento en el curso del desarrollo genético.

El presenta la siguiente tesis: "En una expresión cualquiera como:  $(x^2 + y = z - u)$ , cada término expresa en definitiva una acción: el signo (=) expresa la posibilidad de sustitución; el signo (+) una reunión; el signo (-) una separación; el cuadrado ( $x^2$ ) la acción de reproducir  $x$  veces  $x$ , y cada uno de los valores  $u$ ,  $x$ ,  $z$ , la acción de reproducir determinado número de veces la unidad. Cada uno de estos símbolos se refiere, pues, a una acción que podría ser real aunque el lenguaje matemático se limite a designarla abstractamente bajo la forma de actos interiorizados, es decir, de operaciones de pensamiento". (\*33)

Las operaciones consisten en transformaciones reversibles y esa reversibilidad puede consistir en inversiones ( $A - A = 0$ ) o en reciprocidad (A corresponde a B y reciprocamente).

El proceso de pensamiento en este nivel tiene algunas notas características que se explican brevemente a continuación:

INTERNO: Los agrupamientos y las acciones concretas se suceden dentro de la mente del niño, aunque a veces aparecen como imperceptibles.

---

(\*33) apud. PIAGET, La Psychologie de l'intelligence, p. 44

**CONCRETO:** El niño manipula o agrupa lo que ha percibido, su pensamiento depende del mundo real y concreto.

**DESCENTRACION DEL PENSAMIENTO:** En lugar de concentrarse en un sólo aspecto de la cosa, el niño es capaz de tener en cuenta dos aspectos del mismo. Por ejemplo: tamaño-peso; color-forma.

**COORDINACION DE ASPECTOS:** El niño es capaz de tener en cuenta dos aspectos de la misma cosa y coordinarlos entre sí.

Algunas de las operaciones mentales concretas que los niños desarrollan en este periodo serán enumeradas a continuación:

a) **REVERSIBILIDAD**

La reversibilidad es "...la posibilidad permanente de regresar al punto de partida de la operación dada". (\*34)

Es la capacidad de unir el hecho o pensamiento con un sistema total de partes interrelacionadas a fin de manejar el hecho de principio a fin y viceversa. Dentro del pensamiento operacional posee el niño la capacidad de ordenar y relacionar la experiencia como un todo organizado.

La fase del pensamiento operacional concreto, presupone que la experimentación mental depende aún de la percepción. De los 7 a los 11 años, el niño no puede ejecutar operaciones mentales si no percibe concretamente su lógica interna.

---

(\*34) apud. PIAGET-INHELDER, The growth of logical thinking from childhood to adolescence, p. 272

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

La capacidad de considerar simultáneamente varios puntos de vista y de retornar cada vez a su estado original, indica la existencia de progreso organizativo fundamental. El conocimiento de múltiples enfoques de un objeto confiere elasticidad al suyo que antes era rígido e intuitivo.

El niño reflexiona acerca de las relaciones como si fueran ecuaciones. Relaciona su conducta con las consecuencias que ella determinará, por ejemplo: si al pasar por un bosque un niño quiere abrir una nuez, elegirá una piedra cuyo tamaño sea proporcional a la nuez.

En esta etapa crea sistemas de clasificaciones. Organiza sus partes dentro de un todo con el sistema de encajamiento y reticulado.

#### b) CONSERVACION

En la etapa preoperacional, se ha mencionado que no tienen buena noción de esto, ya que descuidan las transformaciones y no hay reversibilidad. La transformación que no es ignorada, no es concebida como tal, es decir, como pasó reversible de un estado a otro, modificando las formas pero dejando invariable la cantidad.

A nivel de operaciones concretas un niño de 7 y 8 años, con respecto al ejemplo de la bola de plastilina diría: "Lo aplanaste, pero si lo haces bola, tiene lo mismo, no le quitaste nada". (reversibilidad)

Existen varios niveles de conservación, los cuales se van conquistando gradualmente, ya que en algunos se combinan dos o más elementos que deben asimilarse. Esos sucesivos niveles de conservación son:

- De número
- De longitud
- De cantidad de líquido
- De materia
- De área
- De peso
- De volumen

### c) CLASIFICACION

Es la agrupación lógica más sencilla. Implica la formación de clases por equivalencias cualitativas de los elementos a agrupar; del mismo modo, la reunión de clases entre sí. En la clasificación se incluyen las operaciones lógicas de composición, reversibilidad y asociatividad.

"Se llega al concepto de clase a través de abstracciones y generalizaciones y por operaciones aditivas que determinan extensiones e inclusiones". (\*35)

De la realización de colecciones figurales, que al comienzo son meros alineamientos, pasa a colecciones no figurales, hasta llegar a realizar verdaderas clasificaciones.

El niño es capaz de realizar una clasificación cuando:

- 1.- Puede definir una clase por cualidades comunes a sus elementos y por sus diferencias con los individuos de otra clase del mismo rango (por comprensión) por ejemplo: los pájaros tienen plumas, alas, pico, etc...

---

(\*35) OÑATIVIA, Oscar, op. cit. p. 45

- 2.- Realizar agrupamientos en términos de relaciones de inclusión y pertenencia, reunir las clases del mismo rango en la clase inmediata que las engloba. Esto implica el conocimiento de cuantificadores: todos, alguno, ninguno. Por ejemplo: son pájaros los gorriones, canarios, loros. Todos los canarios son pájaros, pero no viceversa.

### Sustitución cualitativa

Reemplaza dos o más clases por otra que englobe una situación concreta, por ejemplo: poner un letrero que diga frutas, sobre un canasto con peras y manzanas.

### Agrupamiento en término de uno a varios

Reconocimiento de los individuos que por alguna relación corresponden a un sólo individuo de otra clase, por ejemplo: madre de...

"Intuitivamente el niño va aprendiendo a respetar las propiedades que caracterizan una verdadera clasificación, mientras progresa en su aprendizaje a través de la acción. Llega así la coordinación entre la comprensión y la extensión". (\*36)

Las clasificaciones pueden ser aditivas o multiplicativas. Las aditivas cuando son simples, toman en cuenta un solo aspecto del objeto, por ejemplo, el tamaño. A continuación se clasifican algunos círculos:

---

(\*36) OÑATIVIA, Oscar, op. cit. p. 48



Chicos

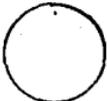


Medianos



Grandes

En las clasificaciones multiplicativas se toman dos o tres aspectos para establecer la relación, como son: color, forma y tamaño. Abajo se muestra un ejemplo de clasificación multiplicativa con dos aspectos: forma y tamaño.

TAMAÑO \ FORMA	PEQUEÑOS	MEDIANOS	GRANDES
CUADRADOS			
CIRCULOS			
TRIANGULOS			

d) ENCAJAMIENTO.

Clasificar una relación interna más las partes más pequeñas y el todo inclusive. Pone de relieve que todas las clases son aditivas. Cada conjunto mayor incluye todas las partes anteriores.

e) RETICULADO.

Forma especial de clasificación en la cual el eje es el vínculo conectivo y las partes vinculadas entre sí. Destaca la creación de subclases de objetos relacionados. Los reticulados establecen el conjunto.

f) SERIACION.

Implica la reunión de elementos respondiendo a un ordenador que lleva diferencias implícitas en la intensidad con que se manifiesta la cualidad a considerar en dichos elementos (más grande, más ancho, más áspero, etc...). Supone el ordenamiento de una sucesión cualitativa, lo que significa una relación asimétrica y transitiva. Ejemplo:

a b c d e f ...

Se realizan ordenamientos atendiendo forma, color, etc... pero atendiendo a la intensidad con que se da otro factor, puede hacer seriación aditiva y multiplicativa.

La seriación cuantitativa es posterior a la cualitativa y constituye la actividad que empalma con el período numérico. Esta seriación de doble entrada se alcanza entre los 7 y 8 años e implica un ordenamiento que responde a más de un criterio ordenador.

g) AGRUPAMIENTO:

"Las operaciones mentales son acciones reversibles cuya estructura tiene como base las acciones físicas interiorizadas". (\*37)

La estructura mental de agrupamiento tiene las mismas propiedades que el grupo algebraico:

- a) Dos o más clases diferentes pueden agruparse en una sola clase que las englobe. Por ejemplo: cuentas de plástico azules y rojas se reúnen en el conjunto: "cuentas de plástico".

La ley de la composición dice que a todo par de elementos de un conjunto corresponde otro elemento del conjunto según determinada operación:

$$\begin{array}{ll} a + b = c & 2 + 3 = 5 \\ a \times b = d & 2 \times 3 = 6 \end{array}$$

- b) Recorriendo diferentes caminos se puede llegar al mismo punto. Matemáticamente esto implica que el orden de combinación de los elementos no altera el resultado y se puede explicar simbólicamente:

$$\begin{array}{ll} (a + b) + c = a + (b + c) & \\ (a \times b) \times c = a \times (b \times c) & \text{(Propiedad asociativa)} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} a + b = b + a & \\ a \times b = b \times a & \text{(Propiedad conmutativa, sólo + y x)} \end{array}$$

- c) A una acción la podemos realizar en dos sentidos: directo e inverso. A la operación directa de un grupo, le corresponda una operación inversa.

La existencia de una operación inversa se debe a la reversibilidad operatoria, que no sólo se manifiesta por inversión, implicando una reversibilidad con clases, ejemplo: (si a la clase A, le agrego la B, formo la clase C; si a la clase C, le quito la B, vuelvo a obtener A).

- d) Se puede retornar al punto de partida y hallarlo sin cambio, porque una acción u operación se anula cuando se combina con su inversa.

La composición de dos acciones inversas da como resultado la acción nula, que no produce cambio. Matemáticamente, la composición de dos elementos inversos nos da el llamado elemento neutro de la operación.

h) CONSTANCIA DE NUMERO

La construcción de los números enteros se efectúa en ligazón con las seriaciones e inclusiones de clase. Un niño no posee el número por el hecho de que aprenda a contar verbalmente. No se hablaría de números operatorios antes de que se haya constituido una conservación de los conjuntos numéricos con independencia de las disposiciones especiales. El número resulta ante todo de una abstracción, susceptible de ser clasificada o seriada.

### III.3.5. OPERACIONES FORMALES.

"Piaget mostraba que había una etapa en la cual la respuesta del niño revela que éste comprende algunas propiedades del número, que constituyen un concepto de funcionamiento... la capacidad para formular estos conceptos no se presenta hasta más tarde". (\*38)

En la etapa de las operaciones formales (entre 11 y 15 años) los muchachos pueden pensar más allá de la realidad concreta. Pueden manejar enun-

---

(\*38) CHURCHILL, Eileen, Los descubrimientos de Piaget y el maestro, p. 65

ciados verbales o proposiciones en lugar de objetos. Además entienden abstracciones simbólicas como las algebraicas y la crítica literaria. Abordan con entusiasmo conceptos abstractos como justicia y libertad.

En esta etapa, el adolescente se aparta del contenido figurativo ya que puede razonar sobre la base de relaciones operativas en sí. Además puede discernir entre lo real y lo posible. Esto es, cuando se le plantea un problema, puede prever todas las relaciones que podrían intervenir con sus datos. Se inicia el pensamiento hipotético-deductivo.

La lógica de las operaciones formales, constituye una síntesis en un sistema de dos tipos de reversibilidad operativa concreta: inversión (o negación) y reciprocidad. Cuando éstas son equivalentes, el adolescente posee la capacidad cognoscitiva de hacer combinaciones con algunas operaciones proposicionales.

En el período de operaciones formales terminan de afianzarse las operaciones, los logros de éstas se resumen a continuación:

**a) Conservación:**

-El muchacho de esta etapa no se limita a lo inmediato y observable. Toma en cuenta situaciones de física como la energía para la conservación de partículas microscópicas.

**b) Clasificación:**

-Puede hacer varios grupos de clasificaciones usando la inclusión. Puede elaborar una clasificación de los sistemas de clasificación. Se halla en condiciones de crear claves e interpretarias sobre todo en cuestiones científicas o para catalogar información de biblioteca e industria.

c) **Seriación:**

-Puede resolver problemas verbalmente enumerando los puntos que debe tomar en cuenta. Puede pensar en términos abstractos y formar hipótesis.

El pensamiento formal está orientado a la solución de problemas, ya que el adolescente puede aislar los elementos del problema y explorar sistemáticamente las posibles hipótesis de solución. Este pensamiento es racional y sistemático. El muchacho de esta etapa tiene conciencia de sus pensamientos, de lo que sabe y de las reglas que tiene; de ahí que comience a planear su vida.

Los estudios realizados por Piaget sobre el desarrollo del conocimiento en el ser humano tienen aplicación en todas las áreas del saber. Ya que él como epistemólogo que fue, sólo trató de describir los logros y los medios para llegar a cada estadio. Piaget no diseñó un método de enseñanza sobre alguna ciencia, sin embargo, sus descubrimientos sobre la forma como aprende la persona en cada etapa y los límites que tiene, nos pueden ayudar a organizar y dosificar el conocimiento que se quiere dar.

## CAPITULO IV

### FORMACION DE ESTRUCTURAS MENTALES APLICADAS A LAS MATEMATICAS

Los estudios realizados por Piaget no se aplican exclusivamente al desarrollo de las estructuras lógico-matemáticas en el niño; aunque en este trabajo son éstas estructuras las que se destacan.

Según Piaget también hay un conocimiento físico y social; entendiendo por físico, la abstracción de algunas características de los objetos observables, pero independientes por ejemplo: peso, color, forma, tamaño.

Por lo que se refiere al conocimiento social, el niño tiene que asimilarlo, ya que es totalmente arbitrario, en él se incluye el lenguaje, la lecto-escritura, valores y normas sociales.

En cuanto a las estructuras mentales, existen algunos factores que pueden influir en su formación, como son:

- Lenguaje usado por la sociedad
- Creencias y valores sociales
- Formas de razonamiento aceptadas socialmente
- La clase de relaciones entre los miembros de la sociedad

Esto lo deduce Piaget de los estudios que realizó, ya que él observó que

el orden en el que se presentan los estadios y las operaciones dentro de cada estadio son los mismos en todas las personas, lo que se distinguía era la rapidez o la lentitud con que se presentaban; esto puede pensarse como un reflejo de los estímulos externos que da el medio.

En realidad Piaget observa que la formación de las estructuras está determinada por "...la maduración del sistema nervioso, la experiencia adquirida en interacción con el medio físico y la influencia del medio social".  
(\*39)

Este último punto influye en el desarrollo de la estructura por medio de los procesos de asimilación y acomodación. En la etapa de aparición simbólica (operacional) que afecta el desarrollo estructural, el niño se enfrenta a los conceptos y símbolos. Durante la etapa de las representaciones intuitivas, el niño generalmente forma parte de un grupo formado por niños con quienes tiene semejanzas (edad, intereses, etc...) y diferencias (sexo, condición familiar, C.I., habilidades). Esta interacción estimula a la conducta operativa. El niño descentra su atención de sí mismo para tomar en cuenta otras opiniones. Se da un intercambio social y cultural que lo va desarrollando.

Anteriormente se ha mencionado que la adaptación de la inteligencia se establece cuando existe un equilibrio entre la asimilación y la acomodación, por lo tanto, todo aprendizaje por ser la introducción de una situación nueva implica una asimilación; mediante la cual la persona va a transformar la nueva experiencia de forma tal que se adapte a su propio modelo del

---

(\*39) RICHMOND, P.G. Introducción a Piaget, p. 119

mundo. A su vez esta nueva experiencia alterará su visión anterior dándose así la acomodación. Por lo tanto para introducir un conocimiento es necesario manejarlo como una experiencia que a su vez se relacione con experiencias anteriores de la persona. "Todo nuevo aprendizaje ha de basarse necesariamente en aprendizajes previos". (\*40)

Piaget afirma que las operaciones mentales se van formando mediante la manipulación de objetos y se sostienen o desarrollan con ese contacto.

A menor edad, es mayor la necesidad de manipular objetos. Podría decirse que en la educación preescolar esa manipulación es esencial y casi exclusiva. En la educación primaria a partir de los modelos objetivos y de situaciones concretas, se empiezan a introducir elementos simbólicos, pero éstos siempre son consecuencia de alguna situación real. Más adelante en la educación secundaria, la manipulación viene a ser un complemento ya que con un buen desarrollo los muchachos son capaces de seguir secuencias simbólicas.

"Los niños pequeños que conocen el nombre de los números rara vez comprenden su significado. Aunque pueden pronunciarlos en orden correcto, generalmente tienen dificultad para asignarlos acertadamente a un conjunto de objetos". (\*41)

Un número no es sólo un nombre, expresa una relación que se establece con los objetos reales. Para adquirir habilidad numérica es necesario desa-

---

(\*40) RICHMOND, P.G. op. cit. p. 129

(\*41) LABINOWICZ, Ed. op. cit. p. 97

rollar ideas lógicas. La habilidad para contar objetos en los niños que no tienen nociones de conservación, no garantiza que la equivalencia de dos conjuntos sea duradera.

El número es una relación que:

- indica su lugar en un orden
- representa cuántos objetos se incluyen en un conjunto
- es duradera a pesar de reordenamientos espaciales

Las relaciones numéricas no pueden enseñarse sólo en sentido verbal, es necesaria la manipulación de objetos para derivar de ahí su conocimiento lógico.

"Las ideas lógicas... deben ser creadas por el niño a través de su acción con objetos". (\*42)

El período preparatorio para la iniciación de la Matemática no debe desconectarse del aprendizaje del cual precede, toma en cuenta actividades y sucesos complejos de la vida mental que se encuentran vinculados con las etapas de maduración que son previas y necesarias al aprendizaje propiamente dicho.

Este período compromete procesos de maduración que en sí mismos no son lectores ni numéricos. Por ejemplo: en lecto-escritura intervienen problemas de uso y aprovechamiento gráfico, de lateralidad, etc...

---

(\*42) LABINOWICZ, Ed. op. cit. p. 109

En el aprendizaje de la matemática, los procesos madurativos que aquí intervienen comprometen las operaciones elementales con los procesos lógicos de clases, conjuntos, agrupamientos, series, conservación de sustancia y cantidad.

La matemática es un conocimiento razonado y de estructura fundamentalmente lógica. Si queremos enseñar a un niño matemáticas en forma razonada, tenemos que comenzar con las bases lógicas que aseguran la comprensión y manejo de conceptos numéricos.

#### **IV. 1. OBJETIVOS PREPARATORIOS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS.**

Los objetivos del período preparatorio de la matemática inicial son:

- 1.- Favorecer los procesos de maduración
  - Dominar el esquema corporal
  - Desarrollar psicomotricidad y coordinación visomotora
  - Organización espacio-temporal, dominio del espacio gráfico
  - Adaptación socioemocional
- 2.- Iniciar el pensamiento en la formación de estructuras lógicas implica:
  - Construir las operaciones lógicas
  - Construir los principios de las leyes de agrupamiento (elemento neutro, inverso).
  - Construir relaciones lógicas entre clases (identidad, inclusión, intersección)

- 3.- Internalizar acciones que impliquen.
- suma
  - resta
  - repetición
  - repartición
  - igualación
- 4.- Construir los principios básicos que conducen a la cuantificación de la realidad y el valor cardinal y ordinal del número.
- Conservación de la cantidad
  - Correspondencia término a término
  - Equivalencia
  - Seriación ordinal

#### **IV. 1.1. Principios de desarrollo de los procesos matemáticos.**

Algunos seguidores de Piaget indican que los principios para el desarrollo de los procesos matemáticos son:

##### **1.- CONCEPCION CUANTITATIVA DE LA REALIDAD.**

En el pensamiento matemático, el universo vivo de la realidad es el elemento para aplicar y desarrollar una serie de acciones que conducen a esquemas mentales formando la lógica de clases, relaciones asociativas, distributivas u operatorias tales como agrupar, ordenar, contar y establecer correspondencia, etc... que finalmente llevarán a la formalización de las proposiciones lógicas.

En la infancia, hay una etapa de transición entre las formas intuitivas

(preoperacional) y ciertos presupuestos de una lógica concreta (operacional), el pensamiento matemático se establece a partir de las acciones mismas y del universo concreto que lo involucra. El "sentido" matemático surge de una actitud intuitivo-lógica aplicada a las cosas y este sentido es en primer término global y sincrético, un atributo de las cosas: grande, alto, bajo, lejos, etc...

## 2.- EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS REQUIERE UN MARCO DE REPRESENTACION ESPACIAL.

Aprender a pensar matemáticamente dentro de un marco espacial, es decir, representar el proceso operatorio espacialmente. Pensar espacialmente significa acostumbrar al alumno a organizar y utilizar el espacio gráfico; hay que visualizar las relaciones establecidas con las cosas. Los procesos mentales, el operar mentalmente con los símbolos matemáticos, constituyen etapas ulteriores del aprendizaje, una vez que la matemática manual se internaliza y se convierte en representación mental. Se trata de llevar al símbolo a una situación real y espacial completa.

## 3.- EL APRENDIZAJE DE LA MATEMATICA DEBE SER SISTEMATICO.

Si la matemática implica un seguimiento continuo u ordenamiento, la mente del niño para aprender a operar con ella no es menos rigurosa en esta exigencia. La mente del niño necesita del exterior, de los estímulos de su entorno y de un aprendizaje guiado que no puede suponer saltos y desórdenes.

Antes de utilizar la lógica, el niño emplea la intuición, se deja guiar más por la percepción que por el razonamiento.

El niño pequeño paulatinamente opina con respecto al ejemplo de las bolas de plastilina, que la alargada tiene mayor cantidad, pero alrededor de los siete años, piensa que la forma dada a la misma masa no altera la cantidad. Este proceso del pensamiento donde crea conceptos, asegura en primer término, el principio de conservación de la sustancia, luego del peso y finalmente del volumen, pero paso a paso. Este orden implica que el desarrollo mental se estructura y por etapas, de igual modo, el niño primero comienza a manejar la suma y luego la resta; usa primero números enteros y después aprende a utilizar las fracciones, etc...

#### 4.- ORDEN SISTEMÁTICO DE DISCIPLINA Y MADUREZ INFANTIL DEBEN SER CORRELACIONES.

Las etapas evolutivas del aprendizaje infantil deben ser respetadas. Para que pueda existir una manipulación con números, debe haberse iniciado el desarrollo de un pensamiento intuitivo, preoperatorio a través de percepciones. El método debe estimular al niño a captar el sentido cuantitativo que damos a la realidad cuando la manipulamos de cierta manera.

El niño que no penetra a las matemáticas por la puerta de la lógica, no aprende matemática, fija sólo mecanismos, automatismos que no sabe usar y se mantiene dependiente del maestro para el resto de su escolaridad.

"Enseñar al niño a pensar "lógicamente" es acostumbrarlo desde el primer momento a razonar, a usar sus propios recursos mentales para resolver sus problemas" (\*43)

---

(\*43) OÑATIVIA, Oscar op. cit. p. 30

El niño al entrar a la escuela tiene dos momentos significativos en su aprendizaje.

- a) El periodo preoperatorio, en el que deberá ingresar al ámbito de las matemáticas de una manera global.
- b) Periodo de la iniciación numérica con las cuatro operaciones aritméticas, las relaciones simétricas y asimétricas, y las nociones de orden.

Es aquí donde el niño debe manejar las diferentes representaciones de un número y operar con ellas.

#### 5.- RELACIONES DE LAS OPERACIONES CONCRETAS DEL RAZONAMIENTO.

El pensamiento matemático se deriva de las operaciones concretas con una realidad exterior; constituye una praxis que al actuar sobre las cosas modifica la misma conducta (asimilación). Al matematizar la realidad, reflexionamos sobre nuestra propia acción (sumar-acumulamos; quitar-restamos). La representación simbólica y las operaciones que tienen lugar en la mente surgen de la singular manera de intervenir en las cosas, formando colecciones, clasificaciones, seriaciones, correlaciones, etc... Cuando el razonamiento matemático opera directamente con símbolos se desprende de toda lógica intuitiva hasta alcanzar un pensamiento puramente formal. Pero esto no tiene lugar sino hasta los albores de la adolescencia.

"Por esta razón, la matemática de la escuela primaria no puede ser otra cosa que una matemática que se basa en el razonamiento concreto y dentro de los intereses que responden a las necesidades prácticas aplicadas sobre nuestro quehacer sobre la realidad exterior próxima y cotidiana". (\*44)

---

(\*44) OÑATIVIA, Oscar, op. cit p. 32

Piaget afirma que las matemáticas surgen a partir unas de otras "estructuras madre" que se combinan o diferencian. Estas estructuras son tres

- Estructuras algebraicas
- Estructuras de orden
- Estructuras topológicas

Las primeras se caracterizan por su reversibilidad ( $T - T' = 0$ ) y su manifestación es la de grupo. Las segundas se caracterizan por tener una reversibilidad recíproca dentro del sistema de relaciones. Finalmente las topológicas conducen a nociones de continuidad.

Estas estructuras se identifican con las estructuras operatorias principales de pensamiento. En las operaciones concretas se hallan ya las estructuras lógicas, de orden, de clase, que van formando nociones aritméticas y geométricas. Por lo tanto, es necesario que la didáctica de las matemáticas se fundamente en la organización progresiva de las estructuras operatorias.

"Toda metodología moderna y rigurosa de la enseñanza de la matemática debe lograr una correcta correspondencia didáctica de las operaciones lógicas y psicológicas en sus correlaciones genéticas del comportamiento". (\*45) Ejemplo: las propiedades (lógicas) de agrupamiento y las actividades (psicológicas) de clasificar, las de formar series (lógica) y las tareas (psicológica) de ordenar.

"La matemática se ha enseñado como si fuera sólo una cuestión

---

(\*45) OÑATIVIA, Oscar, op. cit., p. 20

de verdades únicamente comprensibles mediante un lenguaje abstracto; aún más, mediante aquel lenguaje especial que utilizan quienes trabajan en matemática. La matemática es antes que nada... acción ejercida sobre las cosas". (\*46)

En todos los niveles genéticos, la cognición puede caracterizarse como la aplicación de acciones reales por parte del sujeto, sea en relación con el go del ambiente, sea en relación con las demás acciones del sujeto. Durante el periodo sensoriomotor estas acciones están externalizadas y son en su mayor parte observables. En la medida en que el niño crece, estas acciones cognitivas se hacen cada vez más internalizadas, esquemáticas y móviles, despojadas de sus cualidades concretadas sustanciales. Estas acciones que ahora son internas gradualmente se cohesionan para formar sistemas de acciones más complejas e integradas.

Cuando las acciones cognitivas se organizan en totalidad estrechamente ligadas con estructuras definidas y fuertes, Piaget las llama operaciones cognitivas, de donde derivan las expresiones pensamiento preoperacional, operacional concreto y formal.

Todo acto representacional que es parte integral de una trama organizada de actos conexos es una operación. Para Piaget todas las acciones implícitas en símbolos matemáticos comunes como =, -, +, x, ÷ etc... pertenecen al dominio de lo que llama operación intelectual, pero no la agota. Estas operaciones deben tender a integrarse como sistemas totales.

---

(\*46) LABINOWICZ, Ed. op. cit. p. 166

El desarrollo intelectual es un proceso de organización y lo que se organiza son operaciones activas e intelectuales.

#### **IV. 2. EL CONCEPTO DE NÚMERO EN EL NIÑO.**

Piaget realizó junto con sus colaboradores varios estudios sobre la génesis del número en el niño. Se hará mención de los puntos generales sobre la adquisición del mismo.

En los estudios que se realizaron, lo que Piaget estaba interesado en estudiar era la "disposición para el número", más que el manejo aritmético de éste. Buscaba determinar las capacidades que anteceden al manejo de las operaciones numéricas. Para Piaget "el número, es esencialmente una síntesis de dos entidades lógicas: la relación de clase y asimétrica". (\*47)

Se refiere a la relación de clase, cuando se enumeró un conjunto de objetos, tratándolos como si fueran iguales, por ejemplo: conjunto de perros, cuya cardinalidad es diez. Se ignoran sus diferencias.

La relación asimétrica se distingue cuando se diferencian los elementos del conjunto al enumerarlos u ordenarlos; es decir, el primer objeto contado es diferente del segundo objeto y así sucesivamente. En conclusión el número es equivalente, visto como elemento de una clase; y por otro lado, es diferente viéndolo en una serie asimétrica.

Las operaciones numéricas implican estudios de ordenación, cardina-

---

(\*47) FLAVELL, John, op. cit. p. 331

ción y sus interrelaciones.

Se ha mencionado en el segundo capítulo que una representación numérica es la de las fracciones. Para la cual el niño necesita manejar ciertas operaciones para comprenderlas y manejarlas. Las operaciones como clasificación, seriación, conservación, son utilizadas también en el manejo de estos números.

La adquisición de la noción de número posee los aspectos teóricos-práctico:

PRACTICO --- Problemas reales, surgen de la realidad

{ vida diaria  
observación del mundo

TEORICO --- Sistematización

Las dos formas surgidas de la realidad conducen por diferentes caminos a la concepción abstracta de un número, por lo tanto lo abstracto es una consecuencia natural de lo concreto.

En el primero caso de problemas de la vida diaria, se llega por el método sintético. Por ejemplo: dos panes entre cinco personas, lleva a construir el símbolo  $2/5$ , como resultado de una división; fácilmente los niños se darán cuenta de que este nuevo símbolo puede ser llamado número porque con tiene algunas propiedades de los números naturales.

En el segundo caso: surge la idea de número observando que cada hombre tiene dos manos, o del número diez porque tiene diez dedos. Se llega al

número por abstracción. Esa idea de número "se debe al análisis de situaciones concretas que afectan nuestra vista y nuestra mente por tener algo de analogía". (\*48)

Un número no es sólo un nombre, expresa una relación que se establece entre objetos reales. Para adquirir habilidad numérica es necesario desarrollar ideas lógicas. La habilidad para contar objetos en los niños que no tienen nociones de conservación no garantiza que el aprendizaje sea duradero.

"Los niños pequeños que conocen el nombre de los números, rara vez comprenden su significado. Aunque pueden pronunciarlos en orden correcto, generalmente tienen dificultad para asignarlos acertadamente a un conjunto de objetos". (\*49)

El número indica su lugar en un orden, representa cuántos objetos se incluyen en un conjunto, es duradero a pesar de reordenamientos espaciales. Reiterando que las relaciones numéricas no pueden enseñarse sólo en el sentido verbal, es necesaria la manipulación de objetos para derivar de ahí un conocimiento lógico.

Para llegar a obtener buenos resultados de desarrollo, se sugiere un método activo, entendiendo por activo aquel basado en la participación del alumno en la elaboración de conceptos, sin provocar imágenes estáticas, más bien creando esquemas de actividad que lleven al pequeño por sí mismo a descubrir y resolver interrogantes.

---

(\*48) CASTELNOVO, Emma, Didáctica de la Matemática Moderna, p. 81

(\*49) LABINOWICZ, Ed. op. cit. p. 101

Este pensamiento ha de variar en las siguientes etapas:

- Preparación
- Toma de conciencia del problema y búsqueda de resultados
- Expresión oral y escrita de los resultados.

Inicialmente se movilizan las ideas y se crea una interrogante, más tarde se busca una solución y se verifica para pasar a la etapa final que es la transmisión e interpretación de los resultados.

"El método activo permite al niño construir por sí mismo los esquemas operaciones". (\*50)

#### **IV. 3. DIFERENCIA ENTRE HABITO Y OPERACION**

El hábito surge de la repetición de las actividades sensoriomotrices, crea conductas estereotipadas y rígidas, constituyendo actos irreversibles.

La operación está inmersa en un sistema de conjunto, es reversible, busca nuevas formas.

Los hábitos intelectuales se olvidan con frecuencia en tiempo muy breve y no pueden reconstruirse en forma racional. Las operaciones por el contrario se resisten más al olvido, ya que están en un conjunto y por lo tanto, están emparentadas apoyándose unas con otras. Por ejemplo: un alumno puede ser capaz de simplificar  $25/100$  debido al hábito, pero no podría convertir

---

(\*50) SPENCER-GUIDICE, Nueva didáctica especial, p. 101

25% a  $1/4$ , ya que ese hábito sólo se limita a dividir numeradores y denominadores, y no se basa en la comprensión de la naturaleza de las fracciones y del tanto por ciento.

Los hábitos relativos al manejo de símbolos constituyen conductas estereotipadas y rígidas.

"Durante el desarrollo del niño, sus conductas racionales efectivas, (acciones) como interiorizadas (pensamiento) tienden no sólo a la reversibilidad y a la asociatividad como acaba de verse, sino también a una organización por agrupamiento y por grupos". (\*51)

Las matemáticas modernas se pueden enseñar como un método verbal, pero otra posibilidad es la de enseñarles a través de la actividad y por el descubrimiento de los mismos niños.

Las investigaciones hechas sobre las estructuras lógico-matemáticas muestran que hay un profundo parentesco entre las estructuras de las matemáticas modernas y las estructuras espontáneas de la inteligencia del niño

Si se le enseña algo al niño sin hacerlo participar, se le está impidiendo que él descubra las cosas por sí mismo, esto en muchos casos lleva al fracaso, ya que no se ha ejercitado en deducir las cosas por sí mismo.

Es necesario analizar el desarrollo espontáneo o natural de las operaciones lógico-matemáticas en el niño y adolescente. No hay que olvidarse

---

(\*51) AEBLI, Hans, Una didáctica fundada en la Psicología de J. Piaget, p. 71

de que este desarrollo espontáneo existe (lo que no quiere decir que no sea necesario alimentarlo, prolongarlo y complementarlo, mediante una enseñanza adecuada).

Aristóteles decía que lo que ocupa el primer lugar en el orden del génesis puede ir en último en el análisis, esto es, porque el descubrimiento de los resultados de una operación es muy anterior a la conciencia de su existencia y de sus mecanismos.

El niño desde los siete años, manipula continuamente operaciones de conjunto, de grupo, de partes, sin ser absolutamente consciente de ello, porque se trata de esquemas fundamentales de comportamiento y después de razonamiento, antes de llegar a convertirse en objeto de reflexión.

Se hace indispensable, toda la graduación para pasar de la acción del pensamiento representativo y una serie no menos larga de transiciones para pasar del pensamiento operatorio a la reflexión sobre dicho pensamiento. El último paso de esta reflexión es la axiomática propiamente dicha. La construcción matemática procede mediante abstracciones reflexivas, en el doble sentido de una proyección sobre nuevos planos y una reconstrucción permanente que precede las nuevas construcciones.

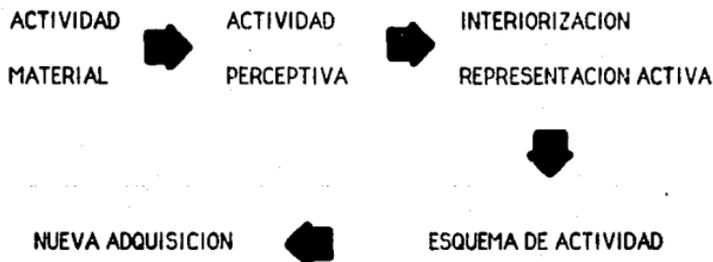
Muchos ensayos pretenden prescindir de este proceso fundamental, olvidando que toda abstracción procede a partir de estructuras más concretas.

Ocasionalmente se cree que la adquisición de un conocimiento se da cuando los alumnos resuelven problemas que abarcan nociones y operacio-

nes. En realidad, se observa el fracaso grupal ante un problema planteado en la forma no habitual, esto quiere decir que no se asimiló el contenido y que posiblemente sólo se memorizó.

"El problema didáctico, expuesto así es de orden general. Expresa que las materias (hechos, nociones, etc...) de alguna manera exteriores, en principio al espíritu del niño, deben convertirse en elementos de su pensamiento". (\*52)

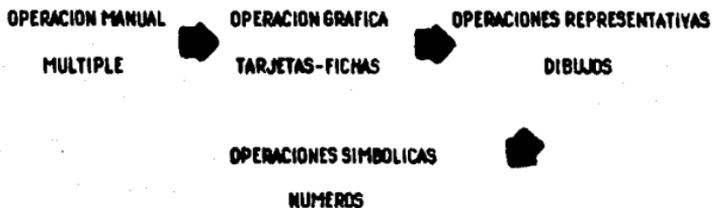
Hay que diferenciar si el niño conoce el hecho o ha adquirido la noción. Para que el niño verdaderamente adquiera nociones, sigue la siguiente trayectoria.



El niño no posee la capacidad de razonar abstractamente, posee la lógica de la acción, por lo tanto hay que "hacerlo razonar-haciendo", es decir, se da un razonamiento concreto donde primero ha de hacer las operaciones con las cosas mismas, después con su representación gráfica, para pasar finalmente a la simbólica, es decir, ir de lo concreto a lo abstracto.

(\*52) AEBLI, Hans, *op. cit.* p. 7

Para resumir, debemos partir de lo concreto y objetivo de los elementos matemáticos, pasar luego por la graficación y llegar a la conceptualización de los contenidos.



El niño ha de construir el concepto de número sobre los objetos que manipula; esta objetivación sirve de enlace entre los objetos y la interiorización de actividades.

Para que un alumno asimile realmente la noción es necesario que realice una actividad refleja; es decir, que el niño cuente el número de sectores contenidos en un círculo, que los superponga (real o mentalmente) para verificar su igualdad; que ordene los círculos de acuerdo al número de sectores que tienen, que compare las dimensiones de los sectores de diferentes círculos para descubrir que entre más son el número de partes, de un círculo, se van haciendo más pequeñas. Esto se puede hacer también por medio de preguntas "Pero siempre y en cualquier parte, es preciso que el elemento sensible sea sometido a una actividad... pues de lo contrario jamás se proyectará en el niño la formación de una noción". (\*53)

---

(\*53) AEBLI, Hans, op. cit. p. 14

La psicología de Piaget, da los instrumentos necesarios para el análisis de la actividad intelectual característica de la enseñanza tradicional. Se sugiere no presentar a la clase imágenes o material preparado de antemano, sino hacerlas surgir dentro de la dinámica con los alumnos.

La psicología de Piaget, indica que "el niño imita interiormente las operaciones que se le presentan". (\*54) Sin embargo, la experiencia escolar de muestra que no todos los niños tienen la capacidad o interés de seguir la demostración y por lo tanto de imitar internamente las operaciones. No porque los niños "pongan atención" es indicio de que adquieran la noción "cuando falta la imitación interior no hay adquisición". (\*55) Esta se logra con la participación activa.

La teoría genética ofrece un panorama amplio y detallado de los niveles de construcción de las categorías básicas del pensamiento, es decir, de lo que hay de más general, de universal en el conocimiento. Los contenidos escolares tienen un grado de especificidad y en consecuencia la forma como los alumnos los construyen ocasionalmente es irregular, es pues, necesario conocer al máximo los detalles y camino que sigue el alumno para conocer la construcción de esos conocimientos específicos, si queremos lograr una adecuación entre los contenidos escolares y niveles de construcción psico-genética.

La actividad del alumno que nace en el centro del proceso de aprendizaje es una actividad autoestructurante. La organización y planificación de la

---

(\*54) Ibidem. p. 61

(\*55) Idem.

actividad deben tener participación del alumno.

"Lo que importa es que los niños sean activos, investiguen y experimenten". (\*56) Se pretende que mediante las actividades adquieran la comprensión y la destreza del conocimiento. "Siempre se debe dejar cierto tiempo para la asimilación y el desarrollo". (\*57)

---

(\*56) CHURCHILL, Eileen, op. cit. p. 42

(\*57) Ibidem. p. 43

## CAPITULO V

### ORGANIZACION DE LA ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES EN TERCERO Y CUARTO GRADOS DE LA ESCUELA PRIMARIA.

A lo largo de este trabajo se han ido analizando algunos conceptos abstractos que se ven aplicados a objetivos de aprendizaje muy concretos dentro de un marco escolar.

Se ha mencionado que el hombre como ser humano, busca su perfeccionamiento en un marco individual y social.

Individual, porque cada persona se desarrolla a un ritmo diferente. Pasa por los estadios de la cognición en el mismo orden pero en el momento en el que su particular madurez y la riqueza de sus experiencias personales lo permiten.

Social, porque al vivir agrupado, hay reglas y normas implantadas que hay que absorber. Por ejemplo: los objetivos de aprendizaje contenidos en los programas escolares, ayudan al desarrollo físico, intelectual, social y emocional; pero son establecidos de acuerdo con las necesidades en este caso del país.

Esta dimensión de la educación puede llevarse al aula, analizando que

el niño forma parte de un grupo (social), al que se le va a guiar para que aprenda contenidos y desarrolle habilidades. Sin embargo, ante un mismo contenido, cada niño lo asimilará y acomodará en forma diferente, con distinta profundidad y con tiempos variables.

Es ahí donde la didáctica entrará para proporcionar diferentes medios y momentos para que cada niño tenga la suficiente cantidad de experiencias de aprendizaje y logre hacer suyo el conocimiento.

La labor del maestro es importantísima porque su función no es simplemente la de un transmisor de la información sino que será un guía; un promotor de actividades que obliguen al niño a pensar, a cuestionarse y a concluir.

De ahí, que el maestro auxiliado por la didáctica debe de:

- A) PLANEAR: Tomando en cuenta a las características de su grupo y en la medida de lo posible de cada uno de sus alumnos. Es decir, deberá observar las acciones de ellos para determinar en qué nivel de estructuras operacionales están y de ahí saber hasta donde pueden llegar sus alumnos comprendiendo realmente sus resultados.
- Es importante que dentro de la planeación se consideren actividades que causen desequilibrio en el niño, para que pueda estar motivado a buscar nuevamente el equilibrio que conlleva a una asimilación-acomodación y a su vez un aprendizaje.

- B) REALIZAR: Para la realización de todo lo que se planeó cuidadosamente, sería conveniente dejar a un lado la "presión del programa" e invertir el tiempo necesario para que maduraran los conocimientos básicos ya que a la larga traería como consecuencia la real adquisición de destrezas y aprendizajes y por tanto, se ahorraría tiempo en repeticiones de contenidos que no alcanzaron a ser asimilados.
- C) EVALUACION: Este momento es importante para determinar si el grupo ha llegado a dominar lo que planeamos. En qué grado se alcanzaron los objetivos. Si las actividades realmente llevaron a buscar un equilibrio, o sería conveniente modificarlas, aumentarlas o disminuirlas.

La didáctica especial en esta área nos indica que "Las matemáticas en la enseñanza primaria -dice Margarita Comas- han dejado de ser una copia típicamente abstracta para convertirse en ciencias experimentales, como la física y la química... teniendo en cuenta no sólo la incapacidad del niño para abstracciones, sino también que los principios matemáticos, los axiomas, son el último término, hijos de la experiencia. Se empezará pues a medir, recortar, dibujar en papel cuadriculado, etc... y no se prescindirá del elemento intuitivo en ningún grado de la enseñanza primaria, aunque vaya disminuyendo poco a poco la intensidad con que se use. Sirve esto para dar a los alumnos ideas reales acerca de la medida y cantidades usadas en sus cálculos; para hacerles sentir que la aritmética y geometría tienen aplicación práctica, y no son algo fastidioso que el maestro se empeña en hacer aprender por gusto, y sobre todo, para que deduzcan ellos mismos nuevas

verdades matemáticas, vean diferentes aspectos de otras conocidas y sean capaces de entender y aprender las deducidas por los demás". (\*58)

De acuerdo con los seguidores de Piaget, se marcan algunos principios para la enseñanza de las matemáticas:

- Introducción del niño en el universo vivo y completo de las matemáticas por medio de actividades que lo lleven a descubrir la cuantificación de la realidad.
- Respeto de las etapas de maduración del educando, no reemplazar por cálculos las actividades que lleven a los conceptos.
- En toda iniciación del aprendizaje de las matemáticas, representaciones espaciales de los elementos que se utilizarán para conducir desde la acción a las operaciones matemáticas básicas, las cuales se traducen al simbolismo de la matemática y su estructura.
- Para el descubrimiento de modos de operar con el material concreto, los cuales se generalizan en las operaciones matemáticas fundamentales.
- Ejercitación gradual del razonamiento y destierro de la enseñanza por problemas tipo.

La comprensión de lo procesos intelectuales evita que el maestro enseñe conceptos que los niños no están preparados para aprender. El maestro pasa a estar consciente de las limitaciones naturales de las etapas de desarrollo del niño. Por tanto, se convierte en observador-planeador a diferencia del planeador-instructor.

---

(\*58) LUZURIAGA, Lorenzo, Pedagogía, p. 162-163

"Escuchamos lo que estamos preparados para oír", si nuestro marco existente no puede asimilar correctamente la información y la reestructuración no es posible, deformamos la información para ajustarla a nuestro propio marco.

El hecho de que los niños nombren o den una respuesta oral correcta, no significa que el contenido formal ha sido bien asimilado. La tarea del profesor es facilitar la adaptación y ayudar al niño a lo largo del desarrollo para que logre asimilar los conocimientos.

## **V.I. MOMENTOS DIDACTICOS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES**

De acuerdo con los objetivos que marca la Secretaría de Educación Pública (SEP) a continuación se proponen algunas ideas para la planeación, realización y evaluación de los contenidos matemáticos en 3º y 4º en el aspecto de fracciones. En este capítulo se profundiza en las actividades que pueden ejecutarse en el momento de la realización.

### **V.I.I. Planeación**

La planeación de la enseñanza se desprende de los planes de estudio vigentes, marcados por la Secretaría de Educación Pública, y en algunos casos enriquecidos o reestructurados por cada Institución particular.

El educador ha de tener la habilidad de interpretar su programa para

realizar la planeación de acuerdo a las condiciones particulares de su grupo, dejando cabida a la flexibilidad.

La planeación aplicada a las matemáticas ha de realizarse cuidadosamente ya que el objeto de estudio de esta ciencia es puramente abstracto y los educandos cuando cruzan específicamente tercero y cuarto, carecen en general de la capacidad de abstraer.

Por tanto el método utilizado por el educador no ha de concretarse sólo a la exposición, sino que ha de promoverse un campo de exploración de las matemáticas, donde se realicen investigaciones, que permitan al educando realizar con técnicas dinámicas, demostraciones objetivas de los conocimientos que se irán cimentando en su mente. Además de ejercitar operaciones a través del análisis, síntesis, reflexión, discusión, etc...

Para que el educando asimile un objeto de conocimiento, es necesario que exista un esquema de acción, donde él construya el conocimiento, ya que el ser humano no es un ser pasivo que reciba todo el conocimiento del exterior. La planeación, por tanto, se hará tomando en cuenta esta necesidad.

Se recomienda entonces, que se planeen:

- Actividades de apertura, donde se aproxime al educando con el objeto de conocimiento.
- Actividades de desarrollo, donde se trabajará para que el educando entre al proceso de asimilación de los contenidos.
- Actividades de culminación, en las que se dé oportunidad al educando de aplicar en situaciones reales esos conocimientos, fomentando entre

otras actividades la transferencia.

- Evaluaciones progresivas con el objeto de que el educador valore en qué grado los educandos van comprendiendo y aplicando los conocimientos y sea posible una buena retroalimentación educador-educando.

### V.1.2. Realización

#### V.1.2. Actividades para los objetivos del tercer grado

---

1.- Explicar la noción de las fracciones  $1/2$ ,  $1/3$ ,  $1/4$ ,  $1/5$  y  $1/6$  en la resolución de algunos problemas.

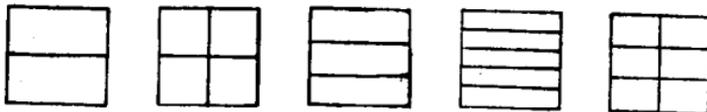
---

Para la enseñanza de este objetivo se pueden utilizar barras de plastilina, de madera, láminas de cartón, o bien existen en el mercado algunos juegos con bases de plástico para establecer relaciones entre fracciones.

- a) Si tenemos un entero A, y lo dividimos en dos partes, a y b cada una será igual a  $1/2$ .

En esta etapa se puede efectuar lo mismo con  $1/3$ ,  $1/4$ ,  $1/5$  y  $1/6$ .

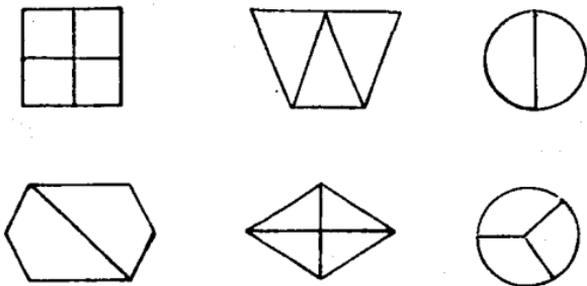
Es una etapa de visualización y manipulación.



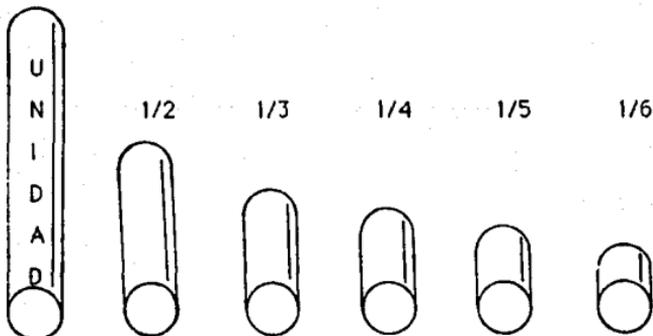
- b) Puede sugerirse que discriminen proporciones en diferentes figuras, por ejemplo: iluminar de diferentes colores, o colocar números como el

uno a las que están partidas en medios, el dos a las que son tercios, el tres a los cuartos y así sucesivamente.

Esta es una actividad gráfica de clasificación.



- c) La utilización de popotes puede servir para fraccionarlos en  $1/2$ ,  $1/3$ ,  $1/4$ , etc... para posteriormente establecer la relación de mayor a menor y viceversa. Esta es una actividad de seriación.



- d) Se sugiere cuestionar a los niños con preguntas referentes a objetos usuales para ellos.

- ¿Cuántos medios hay en dos naranjas?

- ¿Cuántos medios necesito para tener una pera?
- ¿Cuántos medios hay en seis limones?
- ¿Cuántos medios necesito para tener cuatro melones?
- ¿Cuántos medios hay en doce naranjas?

Después se puede complicar preguntando por tercios, cuartos, quintos, etc... pero siempre apoyándose en el material. Estas preguntas ayudan al proceso de abstracción ya que implican la asimilación de la fracción y la acomodación a la situación que se solicita.

2.- En la unidad dos no existe objetivo referente a las fracciones.

---

3.- Resolver problemas que impliquen adición de fracciones de igual denominador, sin que éste exceda de 10.

---

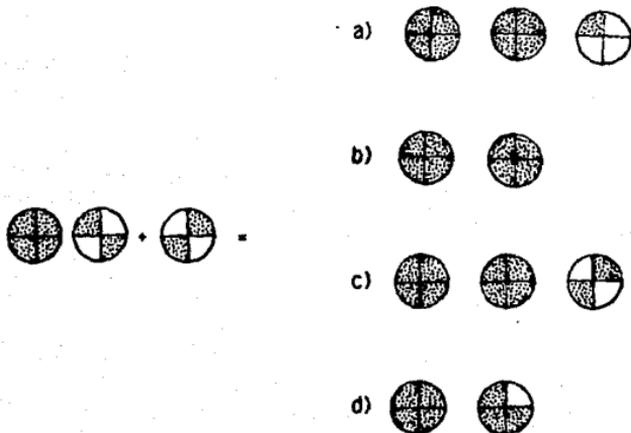
- a) Se puede solicitar a cada niño algún material; como frutas seccionadas en  $1/2$ ,  $1/4$ , etc... Formando equipos y haciendo uso del material, pueden establecerse varias relaciones aditivas. Ejemplo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{[slice]} & \text{[slice]} & \text{[slice]} & + & \text{[slice]} & \text{[slice]} & = & \text{[slice]} & \text{[slice]} & \text{[slice]} & \text{[slice]} & \text{[slice]} \\
 3/2 & & & + & & 2/2 & = & & & & 5/2
 \end{array}$$

Esta actividad de manipulación le da la experiencia física de que con varias fracciones puede formar enteros y viceversa (reversibilidad)

además es una actividad de agrupamientos.

- b) Se puede pedir al niño que ilumine el resultado a escoger de entre varios, de acuerdo a una adición que se le presente. Ejemplo:



Con este ejercicio el niño utiliza la conservación y la clasificación. Además de que pasa a la etapa de graficación.

A esta actividad posteriormente se le puede cambiar el resultado por símbolos numéricos y se abarcará la etapa del símbolo.



a) 10/2

b) 15/2

c) 11/2

d) 13/2

---

4.- Resolver problemas que impliquen sustracción de fracciones de igual denominador, sin que éste exceda del número 10.

---

Se pueden utilizar las actividades mencionadas en el objetivo número tres, para las etapas de manipulación, graficación y simbología. Sin embargo, pueden hacerse ejercicios grupales para la resolución mental de problemas tomados de la realidad. Ejemplo:

Para la receta de un pastel, se piden las siguientes cantidades, si mamá sólo quiere hacer la mitad de la ración ¿Cómo deben quedar las cantidades?

harina	8/4 de taza	royal	2/2 de cucharadita
azúcar	6/4 de taza	vainilla	2/8 de taza
huevos	6 piezas		

Se necesitará guiar el razonamiento del niño en la sustracción de las cantidades de cada uno de los ingredientes, por ejemplo:

harina 8/4 de taza

- ¿Cuánto es la mitad de 8/4?

- 4/4 Quedando entonces  $8/4 - 4/4 = 4/4$

En el caso del azúcar la mitad de 6/4 sería 3/4, por lo tanto:

$$6/4 - 3/4 = 3/4$$

y así sucesivamente.

---

5.- Expresar números naturales como fracciones y algunas fracciones como números naturales.

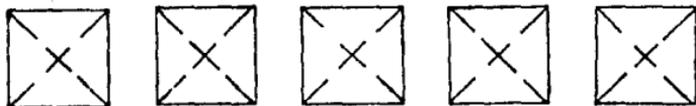
---

Para el desarrollo de este objetivo, el niño desde el nivel preoperacional, puede manejar lo que es la repartición o distribución en partes iguales.

A través de la manipulación el niño pasa al descubrimiento de la reversibilidad de las operaciones y al reconocimiento de la división como operación inversa de la multiplicación.

Para cubrir ese objetivo el niño deberá establecer una relación entre la multiplicación y la división.

Si se le presentan al niño cinco cuadrados, se le puede pedir que los seccione en cuatro partes iguales cada uno:



lo cual conducirá a obtener 20 porciones iguales.

Cinco cuadrados divididos en cuatro partes cada uno, nos da veinte porciones. Por tanto:

$$5 = 20/4$$

Para llegar a esta conclusión el niño debe pasar por la graficación y el símbolo. Además de recurrir a la repetición.\*

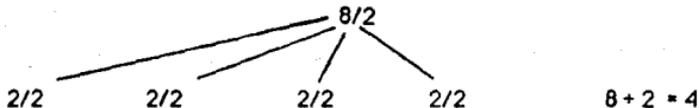
En el caso del paso de números fraccionarios a enteros se utiliza el proceso inverso:



$8/2$

8 mitades, ¿cuántos enteros forman?

Si cada entero tiene  $2/2$ , y tengo  $8/2$ , se establece la relación gráfica de agrupamiento. Se obtienen 4 enteros, posteriormente, cuando el niño ha asimilado este agrupamiento, lo puede obtener agrupando de 2 en 2.



Si cada uno de esos  $2/2$  se sumaran, se comprobaría la operación y se establecería la reversibilidad y la conservación del número  $8/2 = 4 = 4 = 8/2$ .

Todos los numerales pueden representarse en forma de fracción de diferentes formas. Es decir, todos los números naturales pueden también expresarse

\* En los primeros grados de la escuela primaria, la multiplicación sólo se utiliza como una repetición, o reunión de cantidades iguales.

sarse como fracción. Pero no por ello todos los números racionales se expresan como número natural. Por ejemplo:

FRACCION	3/1	6/2	9/3	8/1	16/4
Nº.NATURAL	3	3	3	8	4

Sin embargo hay algunas representaciones numéricas que no se presentan como número natural. Ejemplo:  $2/3$        $3/5$        $3/7$        $18/25$

"Por ello es que decimos que el conjunto de los números naturales, N, es un subconjunto propio del conjunto de los números racionales. Es decir, todo número natural, es un número racional; pero no todos los números racionales son números naturales" (\*59)

Es recomendable que el niño se familiarice inicialmente con las fracciones que pueden ser representadas como número naturales. Una vez que el niño ha manipulado, diferenciado y asimilado estos conceptos, puede introducirse el manejo de fracciones propias\*, impropias\*\*, mixtas\*\*\*, aparentes\*\*\*\*.

---

(\*59) ROBLEDO, V. Felipe, Conceptos fundamentales de la Matemática Moderna, p. 142

- \* Representan valores menores que la unidad. El numerador siempre será menor que el denominador.
- \*\* Cuando se representan valores mayores o iguales a la unidad, su numerador siempre será mayor o igual al denominador.
- \*\*\* Son en extensión equivalentes a la forma impropia, pero se hace un manejo de figuras enteras y figuras fraccionarias.
- \*\*\*\* Son fracciones que representan números enteros. Esto significa que el numerador es múltiplo del denominador.

---

6.- Exprese algunas fracciones con números mixtos y números mixtos como fracciones.

---

Para cubrir este objetivo igualmente se necesita de operaciones de agrupamiento, repartición, conservación de número y reversibilidad.

Las actividades pueden ser semejantes a las del objetivo anterior, aun que para darle variedad, se cambien los materiales. Pero lo de mayor importancia es dar oportunidad al niño de que elabore los conceptos y esté en capacidad de identificarlos.

---

7.- Identificar pares de fracciones equivalentes.

---

Una vez que el niño ha diferenciado objetivamente una fracción impropia, de una propia (no necesariamente tiene que identificarlas por su nombre, sino por su representación) puede pasarse a la enseñanza de las fracciones equivalentes.

Se ha mencionado anteriormente que los números pueden representarse en forma de diferentes fracciones, cambiando sólo su representación simbólica, mas no la extensión en cantidad. De ahí que la operación mental en este punto será básicamente la conservación.

\*Dos pares de enteros (a,b) y (c,d) se dice que pertenecen al mismo con

junto de equivalencia o que son equivalentes, si y sólo si  $a \times d = b \times c$  ( $b \neq 0$ ) y ( $d \neq 0$ ). (\*60)

No. Racional	No. Fraccionario				
- un medio	1/2	2/4	3/6	4/8	5/10
- un tercio	1/3	2/6	3/9	4/12	5/15
- tres séptimos	3/7	6/14	9/21	12/28	15/35

Aunque la fracción  $1/2$  es diferente de la fracción  $3/6$ , ambas representan la misma proporción, es decir, al mismo número racional.

Los niños pueden comparar con modelos de mica o de papel y darse cuenta que cada una representa una forma diferente de dividir al entero, pero ambas representan la misma cantidad.

El maestro deberá guiar el razonamiento del niño para que desarrolle la operación de la conservación de una manera gráfica y simbólica.

Se pueden poner actividades de selección, por ejemplo: Tacha qué fracción o fracciones son equivalentes a:



---

8.- Expresar fracciones de denominador 10 ó 100 como decimales, y algunos decimales como fracciones de denominador 10 ó 100.

---

Las fracciones decimales son todos los números racionales que tienen como denominador 10, 100, 1000, etc... Es decir, el denominador es una potencia de 10. Una fracción decimal también puede expresarse como un número del sistema decimal. Ejemplo:

$$3/10 = .3$$

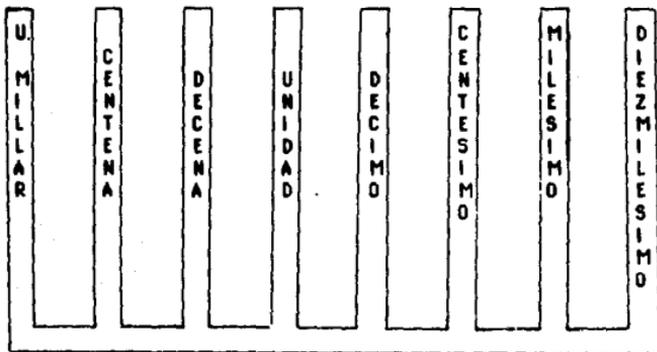
$$4/100 = .04$$

$$25/10 = 2.5$$

Para que el niño establezca la relación de fracción a número decimal, necesita hacer uso de la conservación y la reversibilidad.

Las actividades que lleven a conseguir ese objetivo deben despertar en el niño la necesidad de explicar por qué una cantidad puede expresarse en forma numérica diferente.

Se sugiere hacer uso del sistema de ábaco para situar al niño en los números decimales.



Usando material de cartón o mica plástica, relacionar los décimos con enteros partidos en 10 partes, de ahí se puede continuar con los centésimos.

A través de la manipulación y la graficación llegar a la representación numérica.

$$1/10 = 0.1 =$$



un décimo

#### V.1.2.2. Actividades para los objetivos de cuarto grado

Es importante recordar aquí que aunque el niño avance en escolaridad, aún se encuentra en el estadio de las operaciones concretas, por tanto, es necesario para que logre asimilar y acomodar los conocimientos partir de

la manipulación y la experimentación.

Por otro lado, es necesario precisar que en cuarto grado se hace una profundización y ejercitación de los contenidos vistos en tercer grado. Son pocas las nuevas adquisiciones, por tanto el manejo en este grado es similar al que se dio en el grado anterior.

1.- En la primera unidad no se marca ningún objetivo en relación con las fracciones.

---

2.- Efectuar adiciones con fracciones de igual denominador.

---

Para cumplir este objetivo se pueden realizar las actividades sugeridas anteriormente para el objetivo tres de tercer grado.

---

3.- Establecer relación de orden entre fracciones, utilizando los signos mayor y menor que.

---

En este objetivo se manejará básicamente la seriación. Se sugiere usar material como popotes marcados, láminas de mica o de cartón que representen enteros divididos en  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{8}$ , etc...

- Establecer comparaciones y seriaciones.
- Hacer comparaciones tomando dos o más porciones de cada entero.

Ejemplo:



1/4



6/15

4.- Efectuar adiciones y sustracciones de fracciones de igual denominador.

Se pueden realizar actividades parecidas a las mencionados en los objetivos 3 y 4 de tercer grado, aunque utilizando denominadores mayores y menores que el número 10.

5.- Efectuar adiciones y sustracciones con fracciones de diferente denominador. Convertir fracciones de distinto denominador a fracciones equivalentes de igual denominador.

Para cumplir este objetivo se utilizará la conservación de número, y la clasificación. A través de la manipulación el niño llega a adquirir la noción de fracciones equivalentes. Existen básicamente dos formas mecánicas para obtener fracciones equivalentes, una es simplificando y otra es multiplicando. Aquí lo importante sería que aunque el niño mecanizara el procedimiento, tuviera clara la noción de equivalencia.

$2/3, 4/6, 6/9, 8/12, 10/15$ . Esta sucesión es ilimitada, sin embargo el numeral  $2/3$  es el más simple y éste se dice que está en su expresión mínima. El 2 y el 3 son números primos. Los diferentes numerales para el 2 y el 3, se obtienen multiplicando cada uno por el mismo número natural en cada caso. Así:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{4}{6} \qquad \frac{2}{3} = \frac{2 \times 3}{3 \times 3} = \frac{6}{9}$$

El otro procedimiento para ir fraccionando de números más complicados a más sencillos es la simplificación. Para simplificar una fracción se dividen sus términos (numerador y denominador) sucesivamente entre todos y cada uno de sus factores comunes.

Cuando se reducen a un común denominador dos o más fracciones decimales se encuentran las fracciones equivalentes que tienen x denominador. El M.C.M. de los denominadores de las fracciones dadas. Sin embargo el manejo de M.C.M. y del M.C.D. no se utilizan en tercero y cuarto grado de primaria.

Una vez obtenidas las fracciones equivalentes de igual denominador se procede con ejercicios como los mencionados en los objetivos 3 y 4 de tercero.

---

6.- Establecer relaciones entre fracciones comunes y decimales. Efectuar adiciones y sustracciones con fracciones comunes y decimales.

---

Se sugiere que en este objetivo se cambie el material por un líquido. Si se distribuye un litro de agua en 10 vasos pequeños de igual tamaño, tendremos que cada vaso es  $1/10$  de litro. Posteriormente se puede agregar el contenido de dos vasos en algunos mayores obteniendo 5 vasos, de ahí se desprendería que:

$$2/10 = 1/5$$

Se pueden utilizar materiales para la selección de la fracción común equivalente.

Para este desarrollo se necesitan las operaciones de conservación y reversibilidad.

---

7.- Resolver problemas que impliquen adición y sustracción de fracciones y enteros.

---

Podemos observar que para el desarrollo de este objetivo se requiere utilizar conceptos ya adquiridos como es la equivalencia de fracciones mixtas a impropias y viceversa y las operaciones de adición y sustracción.

Se recomienda al igual que en objetivos anteriores, partir de la manipulación, al realizar las operaciones. Se trata de una ejercitación para las operaciones de conservación, agrupamiento y repartición, etc...

---

B.- Manejar medidas de peso y volumen, utilizando fracciones comunes y decimales.

---

Este objetivo es simplemente una introducción, ya que la noción de volumen se adquiere en los siguientes períodos escolares y requiere de mayor madurez en la conservación que se establece entre los objetos.

Se pueden hacer ejercicios de manipulación con una báscula, para que el niño visualice que no sólo hay pesos exactos, sino que también existen fraccionarios. Y puede posteriormente establecer la relación del peso numérico decimal a una fracción decimal. Para realizar esto necesita trasladar sus conocimientos de equivalencia a esta situación concreta.

### **V.1.3. Evaluación**

La evaluación es un instrumento que ayuda a analizar el proceso de aprendizaje. En el área de matemáticas juega un papel muy importante, ya que el seguimiento que permite hacer, da idea al educador en qué medida se va comprendiendo el contenido de la enseñanza, y permite hacer las modificaciones que ayudarán a asimilar adecuadamente.

En matemáticas es importante la ejercitación, primero a través de objetos y posteriormente con símbolos (números). En todos ellos es labor del educador señalar los errores que vaya detectando a través de una orientación a base de preguntas para provocar la autocorrección del educando.

Los ejercicios que sirven para evaluar al educando pueden ser adaptados a diversos juegos, lo cual les será atractivo y tendrán mayor atención al resolverlos.

Algunas sugerencias serían utilizar claves secretas escondidas en diversas operaciones de fracciones, resolver crucigramas numéricos, efectuar concursos matemáticos disfrazados con las reglas de algún deporte como el base-ball. Un ejemplo de una actividad de evaluación aplicada a los objetivos de cuarto grado sería:

$$\frac{\quad}{8} \quad \frac{\quad}{4 \frac{1}{2}} \quad \frac{\quad}{1/3} \quad \frac{\quad}{4 \frac{1}{2}} \quad \frac{\quad}{8} \quad \frac{\quad}{7/21} \quad \frac{\quad}{3/7} \quad \frac{\quad}{5/9} \quad \frac{\quad}{1 \frac{5}{12}}$$

$$\frac{\quad}{5/9} \quad \frac{\quad}{8} \quad \frac{\quad}{5/9} \quad \frac{\quad}{1 \frac{4}{8}} \quad \frac{\quad}{6 \frac{1}{6}} \quad \frac{\quad}{1 \frac{2}{9}} \quad \frac{\quad}{1/4} \quad \frac{\quad}{2/10} \quad \frac{\quad}{4 \frac{1}{12}}$$

$$\frac{\quad}{1 \frac{5}{12}}$$

CLAVE CON OPERACIONES A RESOLVER:

A = La mínima expresión de  $25/100$  es \_\_\_\_\_

E = ¿Cuál es la fracción mayor?  $5/9$  ó  $2/4$  \_\_\_\_\_

I = ¿Cuál es la fracción menor?  $3/7$  ó  $1/2$  \_\_\_\_\_

O =  $5/12 + 3 \frac{8}{12} =$  \_\_\_\_\_

$$C = 3/9 \text{ equivale a } 9/18 \text{ ó } 1/3$$

$$F = 21/63 = 7/21 \text{ ó } 5/20$$

$$N = 5 \frac{1}{3} + 2 \frac{2}{3} =$$

Ñ = La fracción decimal equivalente de  $1/5$

$$R = 5 \frac{7}{9} - 3 \frac{2}{3} =$$

$$S = 3 \frac{8}{12} - 2 \frac{3}{12} =$$

$$T = 3 \frac{4}{6} + 2 \frac{1}{2} =$$

$$X = 4 \frac{3}{8} - 2 \frac{7}{8} =$$

#### RESULTADOS ESPERADOS:

$$A = 1/4$$

$$E = 5/9$$

$$I = 3/7$$

$$O = 4 \frac{1}{12}$$

$$C = 1/3$$

$$F = 7/21$$

$$N = 8$$

$$\tilde{N} = 2/10$$

$$R = 1 \frac{2}{9}$$

$$S = 1 \frac{5}{12}$$

$$T = 6 \frac{1}{6}$$

$$X = 1 \frac{4}{8}$$

**MENSAJE DESCIFRADO:** "No confíes en extraños".

Como se ha podido apreciar en el análisis de la información aquí contenida, en el proceso enseñanza-aprendizaje de cualquier materia, pero en forma específica de las matemáticas, intervienen diversos factores que hacen posible en mayor o menor grado la asimilación y comprensión de los contenidos.

Es importante que el educador se sensibilice de la importancia de dominar los contenidos de la enseñanza, pero es de mayor relevancia el que lo-

gre adecuarlos a los intereses y nivel de desarrollo de sus educandos. En la medida en la que el educador considere las etapas de desarrollo cognoscitivo de los educandos, será capaz de planear, motivar y realizar actividades que ayudarán a la evolución de las operaciones mentales. Esto ocasionará que los educandos logren con el tiempo: analizar, sintetizar, deducir, expresar juicios críticos, etc... y no tan sólo memorizar.

## CONCLUSIONES

Del presente trabajo se desprenden algunas conclusiones que se enumeran a continuación:

- 1.- La importancia del aprendizaje no reside en la cantidad de información que se le pretende enseñar al educando, sino en la calidad de operaciones mentales que va desarrollando a través del manejo de la información que se le proporciona a través de los contenidos educativos, por lo que el educador debe realizar una buena planeación de actividades que originen en el educando interés por conocer y oportunidad de enriquecer mediante actividades de análisis, experimentación, síntesis, su proceso cognoscitivo.
- 2.- En la medida en la que estén bien cimentadas las bases del conocimiento lógico-matemático, esto es, que sean realmente aprehendidas, el educando podrá agilizar su proceso de aprendizaje, ya que la asimilación y acomodación de otros contenidos de mayor complejidad serán mejor fundamentados. Por ello, es muy importante invertir todo el tiempo necesario en la formación de esas bases.
- 3.- Se determina que con el aprendizaje de las operaciones aritméticas con los números racionales, se promueve el desarrollo de las operaciones mentales, ya que para su comprensión se requiere que el niño: clasifique, asocie, haga seriaciones, etc... Estas operaciones de la intelligen-

cia se irán aplicando a lo largo de la vida en la formación de ideas y la resolución de problemas cotidianos.

- 4.- Todo aprendizaje implica un cambio. De acuerdo a las observaciones de J. Piaget, el educador debe provocar un "desequilibrio" en el educando, para que mediante el proceso de asimilación y acomodación obtenga nuevos aprendizajes. Esto es debido a que al alterar el esquema de conocimiento, se da un cambio que puede ser reflejado en acciones posteriores.
- 5.- El educador a través del conocimiento de sus alumnos, del conocimiento general sobre el proceso de conocimiento y de la evaluación continua en las actividades, ha de considerar en su planeación las diferencias individuales de los educandos con el objeto de establecer las actividades necesarias para que "TODOS" logren la comprensión del contenido enseñado. El educador por tanto, debe hacer el esfuerzo máximo por lograr que los contenidos sean asimilados en mayor o menor grado por todos sus alumnos.
- 6.- Para que el proceso de asimilación y acomodación se lleve a cabo eficientemente en el niño - edad en cuestión, se recomienda que el educador en general tenga en cuenta:
  - a) El nivel desarrollo de los alumnos con relación al desarrollo de las operaciones mentales.
  - b) Procurar que el alumno ejercite con objetos al plantear un nuevo aprendizaje, para provocar una experiencia física.

- c) Fomentar la interacción social a través de trabajos, actividades y reflexiones grupales.
- 7.- Dado que el niño - edad en cuestión no posee la capacidad de razonar abstractamente, se recomienda el uso de diversos materiales para su aprendizaje, ya que posee la lógica de la acción, y la manipulación de éstos permitirán al educador hacerlo "razonar-haciendo".
- 8.- Los ejercicios aquí propuestos:
- a) Estimulan el desarrollo en el educando de las operaciones mentales tales como seriación, clasificación, conservación, reversibilidad, agrupamiento, etc.
  - b) Están diseñados con base en la secuencia de manipulación de objetos, representación gráfica y representación simbólica.
  - c) Permiten que el educando participe activamente en la adquisición de la noción y utilización de las fracciones, evitando ser tan sólo un receptor y archivador de conocimientos.
- 9.- Con el presente trabajo se puede deducir, entre otras cosas, que a mayor número de actividades-experiencias presentados al educando, y con el desarrollo de las actividades respetando el tiempo de comprensión de los contenidos en el área de matemáticas específicamente, es posible que el proceso enseñanza-aprendizaje tenga mejores resultados que si se concreta la enseñanza a la simple exposición de la informa-

ción.

10.-El educador debe fijarse como meta que el educando no acumule una serie de conocimientos estáticos, sino que sea capaz de utilizarlos en la resolución de problemas que en forma cotidiana se le presenten.

Otras investigaciones que se consideran necesarias dentro de esta misma área se mencionan a continuación:

- a) Diseñar una metodología para la enseñanza de las matemáticas que incluya la participación del alumno en un laboratorio de matemáticas, ya que con ello tendría oportunidad entre otras cosas de:
  - Deducir del manejo tangible de actividades matemáticas los resultados de las diferentes operaciones planteadas.
  - Desarrollar a través de la ejercitación práctica las operaciones mentales, respetando las necesidades de ejecución de cada niño.
  - Permitir la creatividad e iniciativa en la resolución de problemas.
- b) Desarrollar una investigación de campo, utilizando grupos control, para observar el nivel de comprensión entre un grupo estándar y uno donde se promuevan los elementos didácticos planteados en este trabajo.
- c) Realizar un estudio comparativo de los resultados obtenidos al terminar un ciclo escolar, dentro de una enseñanza tradicional de la matemática.

tica, y una enseñanza enriquecida con actividades que permitan al niño conceptualizar y aplicar los contenidos de la enseñanza.

**BIBLIOGRAFIA BASICA**

- 1.- AEBLI, Hans  
Una didáctica fundamentada en la psicología de Jean Piaget.  
Buenos Aires, Argentina, Ed. Kapelusz  
1958, 189 p.
  
- 2.- BEARD, Ruth  
Psicología evolutiva de Piaget  
Buenos Aires, Argentina, Ed. Kapelusz  
1971, 126 p.
  
- 3.- CASTELNOVO, Emma  
Didáctica de la matemática moderna  
México, D.F. Ed. Trillas  
1970, 210 p.
  
- 4.- CHURCHILL, Eillen  
Los descubrimientos de Piaget y el maestro  
Buenos Aires, Argentina, Ed. Paidós  
1971, 108 p.
  
- 5.- FLAVELL, Joh  
La Psicología evolutiva de Jean Piaget  
Buenos Aires, Argentina, Ed. Paidós, 5a. ed.  
1978, 484 p.
  
- 6.- GARCIA HOZ, Víctor  
Principios de pedagogía sistemática  
Madrid, España, Ed. Rialp, 10a. ed.  
1960, 696 p.

- 7.- GARIBAY, Luis  
¿Qué es la educación?  
Universidad Autónoma de Guadalajara  
1974, 47 p..
- 8.- LABINOWICZ, Ed.  
Introducción a Piaget  
Massachusetts, U.S.A., Fondo Educativo Interamericano  
1980, 309 p.
- 9.- LUZURIAGA, Lorenzo  
Pedagogía  
Buenos Aires, Argentina, Ed. Losada, 15a. ed.  
1981, 331 p.
- 10.-MAIER, Henry  
Tres teorías sobre el desarrollo del niño (Erickson, Piaget y Sears)  
Buenos Aires, Argentina, Ed. Harper y Row  
1969, 329 p.
- 11.-MATTOS, Lutz  
Compendio de Didáctica General  
Buenos Aires, Argentina, Ed. Kapelusz  
1974, 356 p.
- 12.-MORENO BAYARDO, Ma. Guadalupe  
Didáctica. Fundamentación y Práctica  
México, D.F. Ed. Progreso  
1977, 119 P.
- 13.-NERICI, Imideo  
Hacia una didáctica general dinámica  
Buenos Aires, Argentina, Ed. Kapelusz, 10a. ed.  
1973, 541 p.

- 14.-NICHOLS, Eugene; SWAIN, Robert  
Matemáticas para el maestro de enseñanza elemental  
México, D.F., Ed. CECSA  
1975, 560 p.
- 15.-OÑATIVIA, Oscar  
Método integral para el aprendizaje de la matemática inicial  
Buenos Aires, Argentina, Ed. Guadalupe  
1977, 190 p.
- 16.-PARRA CABRERA, Luis  
Matemática 1  
Bogotá, Colombia, Ed. Kapelusz  
1981, 240 p.
- 17.-PIAGET, Jean; INHELDER, B.  
Psicología del niño  
Madrid, España, Ed. Morata  
1981, 174 p.
- 18.-POSTIGO, Luis  
Matemáticas  
Barcelona, España, Ed. Sopena  
1977, 926 p.
- 19.-RICHMOND, P.G.  
Introducción a Piaget  
España, Ed. Fundamentos, 9a. ed.  
1981, 158 p.
- 20.-ROBLEDO VAZQUEZ, Felipe  
Conceptos fundamentales de matemáticas modernas  
México, D.F. Ed. Oasis  
1972, 173 p.

- 21.-SEP. Libro para el maestro 1º  
México, D.F.  
1982, 373 p.
- 22.-SEP. Libro para el maestro 3º  
México, D.F.  
1982, 250 p.
- 23.-SEP. Libro para el maestro 4º  
México, D.F.  
1982, 295 p.
- 24.-SPENCER-GUIDICE  
Nueva didáctica especial  
Buenos Aires, Argentina, Ed. Kapelusz  
1969, 280 p.
- 25.-VELAZQUEZ, José de Jesús  
Vademécum  
México, D.F., Ed. Porrúa  
1971, 475 p.

**BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA**

- 1.- COLL, César  
Psicología Genética y aprendizajes escolares  
España, Ed Siglo XXI  
1982, 223 p.
  
- 2.- DILLON, Sonia G. de  
Una nueva técnica para la enseñanza de la matemática  
Buenos Aires, Argentina, Ed. Paidós  
1968, 89 p.
  
- 3.- DROZ Rémy; RAHMY Maryvonne  
Cómo leer a Piaget  
México, D.F. Ed. Fondo de Cultura Económica  
tr. Alfonso Romero  
1984, 293 p.
  
- 4.- FLETCHER, T.J.  
Didáctica de la matemática moderna  
Barcelona, España, Ed. Teide, 3a. ed.  
1974, 462 p.
  
- 5.- FURTH, Hans  
Las ideas de Piaget, su aplicación en el aula  
Buenos Aires, Argentina, Ed. Kapelusz  
tr. Antonio Battro  
1974, 190 p.

- 6.- FURTH, Hans; WACHS, H.  
La teoría de Piaget en la práctica  
Buenos Aires, Argentina, Ed. Kapelusz  
1978, 285 p.
  
- 7.- GINSBURG, Herbert; OPPER, Sylvia  
Piaget y la teoría del desarrollo intelectual  
España, Ed. Prentice/Hall International  
1977, 223 p.
  
- 8.- MIALARET, G.  
Las matemáticas. Cómo se aprenden, cómo se enseñan  
Madrid, España, Pablo del Río Editor  
1977, 174 p.
  
- 9.- PIAGET, Jean  
La enseñanza de las Matemáticas Modernas  
Madrid, España, Alianza Editorial  
1978, 401 p.
  
- 10.- PIAGET, Jean  
Autobiografía: Nacimiento de la inteligencia: Psicología y Filosofía  
Buenos Aires, Argentina, Ediciones Calden  
tres. Nora Rosenfeld, Marcelo Pasternac, Rebeca Puché  
1976, 125 p.
  
- 11.- PIAGET, Jean  
El juicio y razonamiento en el niño  
Buenos Aires, Argentina, Ediciones Guadalupe, 3a. ed.  
1977, 229 p.

## 12.-PIAGET, Jean

Los estadios de la psicología del niño

Buenos Aires, Argentina. Ediciones Nueva Visión SAIC

1971, 171 p.

## 13.-PULANSKI, Mary Ann S.

Para comprender a Piaget

Barcelona, España, Ed. Peninsula

1975, 234 p.

## 14.-SANTALO

La educación matemática hoy

Barcelona, España, Ed. Teide

1975, 108 p.