UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ELEMENTOS DE MATEMATICAS DINAMICAS APLICADOS AL SEGURO DE PENSIONES

T E S I S

PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

FILADELFO LEON CAZARES

MEXICO, D. F. 1990

INDICE

INTRODUCCION

CAPITULO I

ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE LA ORGANIZACION FINANCIERA DE UN REGIMEN OBLIGATORIO DE PENSIONES.

CAPITULO II

MEDIOS AUXILIARES MATEMATICOS

CAPITULO III

ESTADO DEMOGRAFICO RELATIVAMENTE ESTACIONARIO.

CAPITULO IV

ESTADO FINANCIERO RELATIVAMENTE ESTACIONARIO.

CAPITULO V

TEOREMA CENTRAL DE LA MATEMATICA DINAMICA

CAPITULO VI

PRIMA ESCALONADA

BIBLIOGRAFIA

INTRODUCCION

El actuario dispone hoy de un eficaz instrumento matemático para afrontar los problemas de tipo financiero y demográfico que afectan a las instituciones de seguridad social.

Al mismo tiempo pueden darse cuenta de que el Seguro Social más que nunca tiene necesidad del actuario, que en particular -en contra de una opinión muy difundida- la aplicación del sistema financiero de reparto está sujeto -tal como los otros sistemas financieros- a leyes matemáticas, cuyo conocimiento y manejo son de la competencia de la Ciencia Actuarial. Por otro lado, no es menos cierto que parte de su labor se basa sobre hipótesis de carácter económico para cuya formulación buscará la ayuda de la Economía, como también es cierto que los problemas engendrados en el desarrollo del seguro social de pensiones, amenazado por la incertidumbre general de nuestra época, serán resueltos solamente en concurrencia de métodos matemático-actuariales y de conocimientos aportados por las ciencias económico-sociales y financieras.

El propio actuario del Seguro Social debe ser ante todo matemático, es decir, dotado de una mente flexible que le capacite para enfrentar nuevos problemas y, al mismo tiempo, para comprender ideas que de otras ciencias puedan contribuir a su trabajo. Esta inquietud abierta a lo nuevo -facilitada por un estudio más profundo de las matemáticas, incluida en la formación del actuario- debe distinguir al actuario matemático del técnico de recetas actuariales.

Con base a lo anterior y dada la difícil situación económica que prevalece en el mundo actual y que de alguna ó otra manera repercute con mayor intensidad en paises en vías de desarrollo como México, se tiene la necesidad de optimizar recursos de índole, financiero, humano y material para hacer frente a esta problemática. Estos países se enfrentan en casi todas sus actividades a problemas de estructura y de coyuntura.

Entre los problemas coyunturales que afectan a la seguridad social en ellos, destaca entre otros, el de financiamiento. Este problema es resultado, de que no se dinamizaran las cuotas respectivas, lo cual produjo un lento crecimiento en los ingresos; Además se incorporaron nuevos grupos demandantes de servicios y consecuentemente, aumentaron los egresos; aunados estos a la inflación y devaluación, se incrementaron sensiblemente los gastos en insumos.

En este trabajo se trata uno de los problemas estructurales de la seguridad social que repercute directamente en los coyunturales antes mencionados; para así coadyuvar al desarrollo del bienestar social frente a los grandes problemas que generalmente son de índole económico.

Bajo el concepto "matemática dinámica de la seguridad social", se entiende concretamente una matemática que integra los factores demográficos y económicos ó, respectivamente las correspondientes intensidades ó tasas de crecimiento de manera directa en los valores básicos y en los mecanismos de cálculo. Esto hace posible establecer matemáticamente y por separado la incidencia de cada uno de esos factores en el régimen de financiamiento; permite aclarar interdependencias, el fondo de los fenómenos, logra transparentes desarrollos forzosos impuestos por las circunstancias y, finalmente, permite examinar las repercusiones que resultan de la realización de determinadas medidas ó hipótesis planteadas originalmente.

El objetivo fundamental de este trabajo es el de integrar y difundir las "nuevas" matemáticas dinámicas aplicadas al seguro de pensiones dentro de instituciones de seguridad social.

Cabe mencionar a los actuarios que han trabajado ampliamante en este campo: Mario Alberto Coppini, A.

Zelenka, y de manera muy especial Peter Thullen, en sus libros: "Techniques actuarielles de la sécurité sociale" publicado por la O.I.T. (Organización Internacional del Trabajo en 1970.), "Die Mathematik der sozialen Rentenversicherung unter dynamischen Bedingungen (Einführung mit Anwendungen in der Praxis), 1982, VERLAG VERSICHERUNGSWIRTSCHAFT E.V, KARLSRUHE , (HEFT 13). que sirvieron de base para la elaboración de este trabajo, así mismo sus conferencias dictadas sobre el tema, en el Centro Interamericano de Estudios de Seguridad Social (CIESS).

CAPITULO I

ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE LA ORGANIZACION FINANCIERA DE UN REGIMEN OBLIGATORIO DE PENSIONES.

1.1.- La Comunidad Abierta de Riesgos y su Fase Final relativamente estacionaria.

La operación básica del seguro en general es la de descontar, con respecto al tiempo de observación, valores pagaderos en el futuro; solamente así valores que vencen en diferentes épocas se vuelven comparables. El factor de descuento anual se denomina V siendo el inverso del factor de capitalización: $V = \frac{1}{1+i}$, donde i es la tasa anual de interés. (En el fondo no se trata de otra cosa que de la operación conocida bancaria de "descontar" una letra de vencimiento futuro). Por otra parte, los pagos futuros, en el marco de un régimen de un seguro, generalmente no son ciertos, sino sujetos a determinadas "probabilidades" como a la de la realización del riesgo. Consecuentemente se introduce la noción de la expectativa como un valor descontado de cantidades pagaderas "probablemente" en el futuro por o a personas, dentro del contrato de seguro.

El financiamiento de un régimen de seguro de pensiones se realiza en el interior de una bien determinada "Comunidad de riesgos" sobre la base de la ecuación de equilibrio o de equivalencia entre los medios existentes en el momento de observación (la reserva V_o) más las expectativas de las cotizaciones futuras, por una parte, y las expectativas a las prestaciones por otra, es decir:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Reserva}\\ \text{inicial}\\ V_o\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l}\text{Expectativa del}\\ \text{asegurador a}\\ \text{las futuras}\\ \text{cotizaciones}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{Expectativas a}\\ \text{futuras}\\ \text{prestaciones}\\ \text{de asegurados}\\ \text{y beneficiarios}\end{array}\right\} \quad (1.1)$$

En un régimen de pensiones de derecho privado, cuyaexistencia no esta garantizada por la ley, la ecuación de equivalencia debe cumplirse dentro de la comunidad llamada "cerrada de riesgos", compuesta por los efectivos de asegurados activos y de los beneficiarios de pensión,existentes al momento. de observación. La organización financiera es entonces concebida de tal manera que, en principio, en cualquier instante en caso de disolución prematura del régimen, las reservas sean suficientes para:

i) pagar hasta su extinción las pensiones en curso de pago y las pensiones a sobrevivientes que podrán originarse en el futuro en aquellas, y

ii) entregar a cada asegurado activo una indemnización igual al equivalente actuarial de sus "derechos adquiridos". El sistema financiero es el de cobertura de expectativas, es decir de capitalización completa.

En contraste a un régimen de pensiones de derecho privado, estamos autorizados a suponer que en un régimen estatutario obligatorio de seguro de pensiones posee la calidad de "perennidad" es decir de duración ilimitada. Esta calidad lleva automáticamente a la <u>comunidad abierta de riesgos</u>, la cual se compone de:

(a).- La generación inicial, es decir del conjunto cerrado de los efectivos de asegurados y beneficiarios en el sentido explicado, existentes en el instante de la observación; y,

(b).- El conjunto abierto de todas las generaciones nuevas de asegurados, juntamente con los beneficiarios de pensión que en ellas se originarán.

La ecuación de equivalencia deberá cumplirse dentro de la comunidad abierta.

Sean:

$A(t)$, Ingresos por cotizaciones (primas) referidos a mitad del año t.

$B(t)$, Egresos por prestaciones referidos a mitad del año t,

V_o , Reserva inicial.

i , Tasa de interés anual.

$r = (1+i)$, Factor de capitalización.

$V = r^{-1} = \frac{1}{1+i}$, Factor de descuento.

Entonces se tiene que:

$$V_o + \sum_{t=o}^{\infty} A_{(t)} \; V^{t+1/2} = \sum_{t=o}^{\infty} B_{(t)} V^{t+1/2} \qquad (1.2)$$

expresa matemáticamente la ecuación de equilibrio o equivalencia (1.1).

El colocar las operaciones de un seguro en una comunidad abierta de riesgos constituye el fundamental elemento distintivo de la organización financiera de un régimen estatutario obligatorio de pensiones frente a la organización financiera de un régimen de derecho privado sin el privilegio de la perennidad. Permite romper el estrecho marco del sistema financiero de capitalización completa y aplicar sistemas financieros más flexibles, propios del seguro social, que se adapten a las condiciones demográficas y económicas del país y del régimen del seguro, y en particular a su grado de madurez, y que hacen posible distribuir -según las circunstancias- las cargas financieras entre las generaciones actual y futuras.

El tratamiento matemático en comunidad abierta implica la adopción de hipótesis que co-determinan el desarrollo demográfico y económico del régimen en un futuro ilimitado. Las hipótesis de carácter demográfico se refieren de preferencia a los asegurados activos, es decir a los cotizantes, incluyendo tambien a los asegurados latentes quienes a consecuencia de aportaciones anteriores han adquirido derechos sin todavia haber originado una prestación. Las poblaciones "secundarias" de las diferentes categorías de beneficiarios: los pensionados por invalidez o por vejez y los beneficiarios de pensiones de sobrevivencia, se originan directa o indirectamente en el conjunto de activos de conformidad con las bases de cálculo adoptadas, y su desarrollo propio está determinado por causas de eliminación, como la muerte, segundas nupcias, el alcanzar una edad prescrita etc., con las correspondientes tasas de eliminación contenidas en dichas bases.

Entre las hipótesis que al efecto se ofrecen, se selecciona la alternativa simple y usual, que se concentra sobre el tamaño y la distribución por sexo y edad de las <u>generaciones nuevas</u>, mientras que el desarrollo de la "población inicial" existente al tiempo de observación, está enteramente determinado por las bases de cálculo conocidas, sin necesidad de hipótesis suplementarias. A fin de hacer accesible a un trato matemático el desarrollo o la proyección del conjunto de nuevas generaciones en un futuro sin límite, el actuario se sentirá obligado a admitir que la distribución <u>relativa</u> por sexo y edad permanezca invariable, eventualmente después de haber transcurrido un periodo de tiempo suficientemente largo. Esta alternativa permite tratar separadamente la generación inicial y las generaciones futuras con la ventaja de poder variar fácilmente las hipótesis relativas a las generaciones futuras y examinar las incidencias de las diferentes hipótesis en el financiamiento global del régimen. Al mismo tiempo podrán distinguirse claramente dos fases de desarrollo de la comunidad abierta de riesgos.

-Fase inicial. Al comienzo predominan la generación y las condiciones iniciales, pero en la cual luego la influencia de las generaciones nuevas se hace sentir poco a poco hasta que la población activa se componga únicamente de supervivientes de nuevas generaciones y se alcance un estado relativamente estacionario, es decir, un estado en que la distribución relativa por sexo y edad no varía más; estado que se extiende primero a la población activa y luego gradualmente a las poblaciones secundarias de beneficiarios.

-Fase final. No limitada en el tiempo, de estado relativamente estacionario.

En lo que precede se ha concentrado la atención sobre la población afectada por un regimen de seguro en su proceso de tender gradualmente hacia un estado demográfico relativamente estacionario. Simultáneamente o con algún retraso y a veces con anticipación se establecerá también un estado financiero relativamente estacionario, en que los ingresos por cotizaciones, los egresos por prestaciones y la reserva -si existe- crecen o, en términos generales, varían con un mismo ritmo, es decir con igual tasa de crecimiento.(Cap. III y IV)

Estados relativamente estacionarios -lo mismo que los absolutamente estacionarios utilizados antes- constituyen modelos teóricos de cálculo, que sin embargo a menudo reflejan con buena aproximación la realidad durante periodos largos de tiempo. Su estudio hace visibles interrelaciones y tendencias a largo término, que conviene tenerlas en cuenta en una sana política de la seguridad social, y, muy en particular, del seguro de pensiones, seguro a largo plazo. Además estos modelos permiten poner a prueba cualquier variante "racional" de hipótesis adoptadas de carácter demográfico o económico y medir las repercusiones de la posible realización de las mismas. De esta manera el dominio matemático de las características de un régimen de seguro en un estado relativamente estacionario, se convierte en un importante instrumento para tomar decisiones en la política de la seguridad social.

1.2.- Principales Sistemas Financieros del Seguro Social.

a).- Sistema de Prima Media General[1].

En tanto que el actuario del seguro social confiaba en bases estáticas de cálculo, la adopción de la comunidad abierta de riesgos junto con el deseo de fijar tasas de cotizaciones constantes desde el inicio para todo el futuro, llevaban forzosamente al sistema de prima media general. En tiempos pasados ha sido el sistema predominante de financiamiento de los seguros obligatorios de pensiones, (al menos teóricamente) en la mayoría de los paises latinoamericanos, incluso el sistema financiero original del IMSS.

Sean:

V_o , Reserva inicial.

---

[1] Antes de plantear la prima media general es conveniente aclarar que se entiende por prima media y prima media general.

Prima media.- Obtenida en porcentaje del sueldo básico, y de las pensiones por invalidez y por vejez, se mantiene uniforme en el espacio, es decir, el mismo porcentaje para individuos contemporáneos de diferentes clases de riesgo. Dicho de otra manera, es el mismo porcentaje del sueldo básico y pensión para individuos de una misma generación con diferentes edades, sexo y riesgo de trabajo; durante el tiempo que están obligados a cubrir las cuotas.

Prima media general.- Con los mismos principios de la prima media es diferente porque la media general engloba a todas las generaciones; es decir, el mismo porcentaje para individuos de cualquier generación.

$\bar{\Pi}$, Prima constante.

$S_{(t)}$, Suma de salarios en el año t.

$\bar{\Pi}_{(t)} \; S_{(t)} = A_{(t)}$, Ingresos por cotizaciones (primas) referidas a mitad del año t.

$B_{(t)}$, Egresos por cotizaciones referidas a mitad del año t.

Entonces tenemos:

$$V_o + \bar{\Pi}_{(t)} \sum_{o}^{\infty} S_{(t)} V^{t+1/2} = \sum_{o}^{\infty} B_{(t)} V^{t+1/2}$$

Ecuación de equilibrio de la prima medía general; de donde:

$$\bar{\Pi}_{(t)} = \frac{\sum_{o}^{\infty} B_{(t)} V^{t+1/2} - V_o}{\sum_{o}^{\infty} S_{(t)} V^{t+1/2}}$$

El sistema de prima media general permite trasferir el exceso de carga financiera causado por la población asegurada inicial de una estructure desfavorable de edad a todas las generaciones futuras, estableciéndose de estamanera lo que se puede llamar la solidaridad de generaciones.

La aplicación del sistema de prima media general, a un régimen nuevo de pensiones, puede conducir a una acumulación considerable de capitales. Sin embargo, ésta no es una caracterí stica necesaria de dicho sistema financiero, si bien que la herejía de que sea así y que el sistema de prima media general equivale en el fondo al de capitalización completa, está muy difundida tanto en Europa como en las Américas, y esto a pesar de que este error conceptual füe aclarado hace 60 años por el matemático y actuario A. LOWEY[2]. Ante la persistencia de herejías de esta naturaleza parece oportuno disipar la confusión de conceptos mediante un ejemplo simplificado pero de significado actual:

Imagínese que se introduce un régimen nacional[3] de pensiones uniformes de vejez en una población estacionaria, cuyo tamaño y estructura por sexo y edad permanecen constantes. El derecho a pensión se origina a los 65 años, pero adjudicando la pensión también a cada persona que hubiese alcanzado o superado la edad de 65 a la fecha de entrada en vigor del régimen. Asimismo los cotizantes son personas entre edades 20 y 64, y la reserva inicial es cero.

De acuerdo con la estructura supuesta de la población, la suma de los montos anuales de las pensiones en curso de pago es constante como función del tiempo, lo mismo que en el número de cotizantes y, por ende, también la cotización anual per capita del cotizante. En consecuencia, la prima

---

2 mediante un ejemplo instructivo publicado en el VERSICHERUNGSLEXIKON (Enciclopedia de seguros) de Manes (1924).

3 Se dice que un seguro es de carácter nacional cuando abarca a toda la población de un país. Se dice que es de caracter Integral, cuando todos los ramos del seguro se encuentran administrados por un solo instituto asegurador.

anual de reparto queda sin cambio desde el inicio del régimen y es por definición identica a la buscada prima media general, sin acumulación de reserva alguna.

El ejemplo constituye el modelo aproximado de un regimen ya maduro de pensiones, que por causas externas ha perdido prácticamente sus reservas, que financieramente deben comenzar de la base "cero" sin poder suspender las pensiones ya concedidas.

El sistema de prima media general no puede ser identificado de manera univoca por el grado de capitalización, ni de manera inmediata por el grado de dependencia de factores demográficos y económicos, caracteristicas de importancia en el análisis de regimenes bajo condiciones dinámicas. Existen empero tres sistemas financieros que se prestan a comparaciones claras y univocamente interpretables. Son: <u>el sistema de cobertura de expectativas en comunidad abierta de riesgos, el sistema de reparto simple</u> y el <u>de reparto de capitales constitutivos</u>[4]. Además, los tres sistemas financieros representan tres niveles diferentes de capitalización: el sistema de cobertura de expectativas el grado máximo de capitalización "completa" posible en un régimen de seguro social, el de reparto simple, grado "cero" y, entre los dos

[4] Capital Constitutivo es la cantidad de dinero necesaria, desde el punto de vista actuarial, para garantizar el pago de su renta a un pensionado

extremos, el sistema de reparto de capitales constitutivos, un grado intermedio de capitalización.

b).- Sistema de Cobertura de expectativas en Comunidad Abierta de Riesgos.

Este sistema clásico es bien conocido y basta presentar un ejemplo simplificado. Se supone que todas las entradas de asegurados al régimen se realizan a la misma edad x_o y que la población asegurada se componga exclusivamente de generaciones ingresadas a la edad x_o. Cada generación financía por si sola su propio seguro: primero se acumula una reserva que llega a su máximo, cuando los asegurados todavía activos de la generación alcanzan la edad de pensión de vejez y cesan en el pago de las cotizaciones; de ahí en adelante se consume gradualmente la reserva de la generación hasta que las últimas pensiones, incluso las de dependientes, se hayan extinguido. Mientras tanto han entrado nuevas generaciones de suerte que la absorción paulatina de las reservas de generaciones anteriores no solamente se compensa sino que la reserva global puede ser de nivel considerable.

$$\bar{\Pi}x_o \left\{ \begin{array}{l} \text{Expectativa a las} \\ \text{sumas futuras de} \\ \text{salario de una} \\ \text{generación que inicia} \\ \text{a la edad } x_o. \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Expectativa a las} \\ \text{prestaciones} \\ \text{futuras de la} \\ \text{generación} \\ \end{array} \right\}$$

Ecuación de equilibrio.

El valor de la prima de cobertura de expectativas, igual para toda generación nueva, no depende del tamaño de ésta y es, en consecuencia, también independiente de una eventual expansión o regresión del efectivo de asegurados. Por otra parte, depende de la edad de entrada x_o y en alto grado de la tasa técnica de interés i escogida. Tanto las pensiones nuevas, como las que están en curso de pago no pueden ser ajustadas -ni siquiera parcialmente- a un nivel general creciente de salarios o al índice de precios, a no ser que se disponga de medios suplementarios (como, por ejemplo, excedentes de ganancia de interés o ganancia por retraso de ajustes de pensiones). Debe recordarse que, paralelamente al ajuste de las pensiones, deben ser ajustadas las reservas de las mismas y la reserva de los activos que respalda los derechos en curso de adquisicion. Aún cuando este sistema financiero no se aplica en la práctica de los seguros sociales de pensiones, la prima de cobertura de expectativas sirve como modelo de comparacion y su estructura formal matemática ha adquirido una inesperada significación en el marco de las nuevas matemáticas dinámicas.

c).-Sistema de Reparto Simple.

En el sistema de reparto, en su sentido estricto, se determina la prima de un año de tal manera que los ingresos por primas cubran exactamente los egresos del año, dejando eventualmente una reserva para fluctuaciones. Por su misma naturaleza la prima de reparto está en alto grado co-determinada por la relación entre el número de pensiones en curso de pago y el número de cotizaciones activas, es decir por el llamado cociente de carga demográfica. El pago continuado de las pensiones no está asegurado por reservas acumuladas con cotizaciones anteriores de los propios beneficiarios, sino exclusivamente por las cotizaciones de los activos de la misma época en el marco de la comunidad abierta, estableciédose de este modo una estrecha "solidaridad" del conjunto de activos a favor de los beneficiarios de pensión. La notoria dependencia del sistema de reparto de variaciones demográficas de los efectivos de personas afectadas por el régimen de seguro, contrasta con la insensibilidad de la prima de reparto, calculada bajo condiciones económicas estáticas, con respecto a aumentos posteriores del nivel general de salarios con el ajuste total e inmediato de las pensiones.

La mencionada pérdida, de hecho de las reservas acumuladas en grandes regímenes nacionales del seguro de pensiones a causa de guerra o inflación, acoplada con la introducción de pensiones "dinámicas", ha contribuido a la importancia actual del sistema de reparto en el seguro obligatorio de pensiones.

d).-Sistema de Reparto de Capitales Constitutivos (Sistema de Cobertura de Capitales).

En este sistema, la suma de cotizaciones de un año debe cubrir la suma de los capitales constitutivos de las <u>nuevas</u> pensiones acordadas en el año. Los derechos adquiridos de los asegurados activos no están respaldados por reserva alguna, es decir, también el sistema de reparto de capitales constitutivos se basa en la solidaridad de las generaciones dentro de la perennidad del régimen del seguro.

El valor de la prima anual depende de la relación entre el número de nuevos pensionados del año y el de cotizantes activos, es, sin embargo, menos afectado por variaciones demográficas que la prima de reparto simple que, además, depende de variaciones en el número de pensiones en curso de pago. En lo que concierne a la capacidad de absorber el costo del ajuste de pensiones a variaciones del nivel general de salarios, las nuevas pensiones acordadas en el año pueden ser ajustadas enteramente a ellas, mientras que el ajuste de pensiones en curso de pago exige medios suplementarios.

En consecuencia, este sistema de reparto de capitales constitutivos mantiene una posición intermedia entre el sistema de reparto simple y el de cobertura de expectativas; demográficamente menos sensible que el primero y en cuanto al ajuste de variaciones económicas, menos que el segundo. A esta posición intermedia, reforzada por el ya aludido grado intermedio de capitalización, debe el sistema de reparto de capitales constitutivos su rol importante -al lado del sistema de reparto simple- en el seguro de pensiones de hoy.

e).- Anotaciones relativas al Sistema de Períodos de Equilibrio.

En el sistema de "períodos de equilibrio", el tiempo futuro se divide en períodos de duración determinada -por ejemplo de 10, 5 ó hasta de un año o, en el extremo opuesto, de duración ilimitada- fijando para cada período una prima constante en el mismo, de tal manera que al final del período y después del pago de las prestaciones correspondientes queda una reserva prescrita. Esta reserva puede expresarse en unidades de egreso anual o de otra manera apropiada. Así la regla, "la reserva al final del período debe llegar a su máximo en base a la prima en vigor", conduce al conocido sistema de <u>primas escalonadas</u>[5]. Con todo, al proyectar el régimen hacia un futuro ilimitado, es prácticamente inevitable, también en este sistema, prever un último período de equilibrio de duración ilimitada en un estado relativamente estacionario.

El sistema de períodos de equilibrio constituye el sistema general bajo cuyo "techo" -por decirlo así- se podrá clasificar la infinidad de sistemas financieros, mediante la elección apropiada de períodos de equilibrio y de reservas al final de cada uno de ellos.

5La información correspondiente a este régimen se presenta en el capítulo VI.

CAPITULO II

MEDIOS AUXILIARES MATEMATICOS

2.1.- Generalidades sobre conmutaciones.

Dado un órden simple de personas de edad x, $\{\ell x\}$, $x_o \leq x \leq \omega$ (donde ω es tal que $\ell x = 0$), a la edad x_o corresponde el tiempo $t_o = 0$ y a la edad x el tiempo $t = x - x_o$.

Si se paga a ℓx de edad x el importe "1", entonces el valor actual de este pago en el momento $t_o = 0$, es:

$$\ell x \; V^{x-x_o}$$

Este valor representa la expectativa, para ℓx personas, que se relacionan con el pago de "1" al llegar a la edad x La expectativa para cada una de estas personas es:

$$\frac{\ell x \; V^{x-x_o}}{\ell x_o} = \frac{\ell x \; V^{x}}{\ell x_o \; V^{x_o}} = \frac{D_x}{D_{x_o}}$$

La introducción de las magnitudes $Dx = \ell x \; V^x$ se revela de una importancia decisiva para los cálculos actuariales. Su uso permite un cálculo simple y claro. Llámese a Dx, el

número descontado de sobrevivientes la conmutación de primer órden que corresponde al órden $\{l_x\}$.
Sea x una edad fija cualquiera al principio de cada año, se paga el importe "1" a los sobrevivientes respectivos de la población inicial comenzando por el propio l_x y terminando con los últimos sobrevivientes del órden dado.
La suma de los valores actuales de estos pagos, divididos por el número l_x de la población inicial, representa el valor actual $\ddot{a}_x$ de una renta vitalicia anticipada anual, pagadera a una persona de edad x. Es evidente que $\ddot{a}_x$ es igual a la suma de las expectativas elementales:

$$\ddot{a}_x = \frac{1}{D_x} (D_x + D_{x+1} + \ldots + D_{\omega-1})$$

Se introduce, como conmutación de segundo órden la suma de las conmutaciones de primer órden:

$$N_x = \sum_{t=0}^{v-x-1} D_{x+t} = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \quad + D_{v-1}$$

Por lo tanto:

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

Conmutaciones de órden superior:
Tomando en consideración los cálculos anteriores, es necesario introducir también conmutaciones de órden

superior a las del segundo órden y que se designan como sigue:

La Conmutación de tercer órden:

$$S_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} N_{x+t} = N_x + N_{x+1} +\ldots+ N_{v-1}$$

La siguiente presentación, se desprende de la definición anterior:

$$\begin{aligned} S_x = D_x &+ D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{v-1} \\ &\phantom{+ D_{x+1}} D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{v-1} \\ &\qquad\qquad\qquad\vdots \\ &\qquad\qquad\qquad + \ldots + D_{v-1} \end{aligned}$$

Operando se obtiene que:

$$S_x = D_x + 2D_{x+1} + 3D_{x+2} + \ldots + (\omega-1)D_{v-1}$$

$$= \sum_{t=0}^{v-x-1} (t+1)\, D_{x+t} \qquad (2.1)$$

Conmutación de cuarto órden:

$$T_x = \sum_{t=\omega}^{v-x-1} S_{x+t} = S_x + S_{x+1} +\ldots+ S_{v-1}$$

Según el mismo sistema triángular, se obtiene :

$$T_x = N_x + 2\, N_{x+1} + 3\, N_{x+2} + \ldots + (\omega-1)\, N_{v-1}$$

$$= \sum_{t=0}^{v-x-1} (t+1)\ N_{x+t}$$

Y, finalmente:

$$T_x = D_x + \frac{(2)(3)}{2} D_{x+1} + \frac{(3)(4)}{2} D_{x+2} + \ldots$$

$$= \sum_{t=0}^{v-x-1} \frac{(t+1)(t+2)}{2}\ D_{x+t}$$

A partir de:

$$2\ T_x = \sum_{t=0}^{v-x-1} \left[(t+1)^2 + (t+1) \right] D_{x+t}$$

$$(t+1)^2 + (t+1) = (t+1)\left[(t+1) + 1 \right] = (t+1)(t+2)$$

Y aplicando a la misma (2.1) se obtiene la fómula útil:

$$\sum_{t=0}^{v-x-1} (t+1)^2\ D_{x+t} = 2T_x - S_x$$

<u>Justificación:</u>

Se sabe que: $2\ T_x = \sum_{t=0}^{v-x-1} \left[(t+1)^2 + (t+1) \right] D_{x+t}$, como la sumatoria es lineal entonces :

$$2\ T_x = \sum_{t=0}^{v-x-1} (t+1)^2 + D_{x+t} + \sum_{t=0}^{v-x-1} (t+1)\ D_{x+t}$$

$$= \sum_{t=0}^{v-x-1} (t+1)^2\ D_{x+t} + S_x$$

Por lo tanto: $2\ T_x - S_x = \sum_{t=0}^{v-x-1} (t+1)^2\ D_{x+t}$

Observaciones:

a).- A menudo se designa la conmutación de segundo órden, limitada a n años, por medio de un símbolo propio:

$$N_{\overline{x:n|}} = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \dots + D_{x+n-1} = N_x - N_{x+n}$$

b).- En caso de que el órden dado termine a una edad $x = \mu$, fija dada, -como ocurrre con mayor frecuencia en los órdenes de los activos-, se utilizarán aquí también las siguientes notaciones:

$$N_{x(\mu)} = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \dots + D_{\mu-1}$$
$$S_{x(\mu)} = N_{x(\mu)} + N_{x+1(\mu)} + N_{x+2(\mu)} + \dots + N_{\mu-1(\mu)}$$

Cuando no hay riesgo de confusión, usualmente se omitirá el subíndice (μ).

En la siguiente sección, se obtiene de una manera simple y para el caso continuo, una relación entre una conmutación, de un órden superior cualquiera y la conmutación de primer órden D_x.

c).- La esencia de las conmutaciones es partir de una conmutación base, que es función del tiempo t, y obtener por sumas subsiguientes las conmutaciones de órden superior, es decir;

$$D_x^{(k)} = \sum_{t=0}^{v-x-1} D_{x+t}^{(k-1)} = \sum_{x}^{v-1} D_{\zeta}^{(k-1)}$$

Definición recursiva de las conmutaciones de órden k.

d).- $D_t^{(k)}=\frac{1}{(k-2)!} \sum_{\tau}(\tau+1)(\tau+2)...(\tau+k-2)\ D_{\tau+t}^{(1)}$

Fórmula que expresa la conmutación de órden k a través de la conmutación base. (para cualquier k≥3).

Prueba (por inducción matemática)

Para k=3

$D_t^{(3)}=\frac{1}{(3-2)!} \sum_{\tau}(\tau+1)(\tau+2)...(\tau+k-2)\ D_{\tau+t}^{(1)}$

$= \sum_{\tau}(\tau+1)\ D_{\tau+t}^{(1)}$, de acuerdo a (2.1)

Se supone válido para k=s, es decir:

$D_t^{(s)}=\frac{1}{(s-2)!} \sum_{\tau}(\tau+1)(\tau+2)...(\tau+s-2)\ D_{\tau+t}^{(1)}$

Por demostrar que vale para k=s+1.

P.D. $D_t^{(s+1)} =\frac{1}{(s-1)!} \sum_{\tau}(\tau+1)(\tau+2)...(\tau+s-1)\ D_{\tau+t}^{(1)}$

recuerdese que: $D_x^{(k)} = \sum_{t=0}^{v-x-1} D_{x+t}^{(k-1)}$ entonces:

$$D_x^{(s+1)} = \sum_{t=0}^{v-x-1} D_{x+t}^{(s)} = \sum_{\tau} \frac{1}{(s-2)!} \sum_{\tau}(\tau+1)(\tau+2)...(\tau+s-2)\ D_{\tau+t}^{(1)}$$

$$=\frac{1}{(s-1)} \frac{1}{(s-2)!} \sum_{\tau}(\tau+1)(\tau+2)...(\tau+s-1)\ D_{\tau+t}^{(1)}$$

$$=\frac{1}{(s-1)!} \sum_{\tau}(\tau+1)(\tau+2)...(\tau+s-1)\ D_{\tau+t}^{(1)}$$

e).- $\beta^{(m)}=\frac{1}{1-v} -(\frac{1}{m} + \frac{1}{i^{(m)}})$

Factor de corrección empleado para obtener el valor de

$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n|}}$ a partir del valor de $\ddot{a}_{\overline{n|}}$ que se auxilia de la siguiente relación :

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n|}} = \ddot{a}_{\overline{n|}} - (1 - V^n)\beta^{(m)}$$

f).- Valor de aproximación para $\beta^{(m)}$:

$$\beta^{(m)} = \frac{m-1}{2m}$$

independiente de la tasa de interés , con frecuencia es suficiente.

2.2.- Caso continuo.

Si se considera ℓ_x como función continua de la edad x, se define $\bar{D}_x = \int_x^{\omega} \ell_{\xi+t} V^{\xi+t} d\xi$ como conmutación continua de primer órden.

La conmutación continua de segundo órden se define por[6]:

$$\bar{N}_x = \int_x^{\omega} \bar{D}_\xi \, d\xi = \int_0^{\omega - x} \bar{D}_{x+t} \, dt$$

conmutación continua de segundo órden.

De manera análoga, las conmutaciones continuas de tercer

6Para las conmutaciones continuas se utilizan los mismos símbolos que para las conmutaciones del caso discreto, pero llevando arriba un guión.

y cuarto órden.

$$\bar{S}_x = \int_x^{\omega} \bar{N}_\xi \, d\xi = \int_0^{\omega - x} \bar{N}_{x+t} \, dt$$

$$\bar{T}_x = \int_x^{\omega} \bar{S}_\xi \, d\xi = \int_0^{\omega - x} \bar{S}_{x+t} \, dt$$

Definición recursiva de la conmutación continua de órden k:

$$\bar{D}_x^{(k)} = \int_x^{\omega} \bar{D}_\xi^{(k-1)} \, d\xi = \int_0^{\omega - x} \bar{D}_{x+t}^{(k-1)} \, dt$$

Las conmutaciones de tercer y cuarto órden también pueden expresarse por una integral que afecta la conmutación de primer órden $\bar{D}_x$:

$$\bar{S}_x = \int_x^{\omega} \bar{N}_\xi \, d\xi = \int_x^{\omega} d\rho \int_\xi^{\omega} \bar{D}_\xi \, d\xi = \int_x^{\omega} \bar{D}_\xi \, d\xi \int_x^{\zeta} d\rho$$

$$= \int_x^{\omega} (\xi - x) \bar{D}_\xi \, d\xi = \int_0^{\omega - x} t \, \bar{D}_{x+t} \, dt \qquad (2.2)$$

De modo análogo se deduce :

$$\bar{T}_x = \frac{1}{2} \int_x^{\omega} (\xi - x)^2 \; \bar{D}_\xi \; d\xi$$

justificación: se tiene que $\bar{S}_x = \int_x^{\omega} (\xi - x) \bar{D}_\xi \; d\xi$ y como,

$$\bar{T}_x = \int_x^{\omega} \bar{S}_\xi \; d\xi \qquad \text{entonces:}$$

$$\int_x^{\omega} \bar{S}_\xi \; d\xi = \int_x^{\omega} \int_x^{\omega} (\xi - x) \bar{D}_\xi \; d\xi = \int_x^{\omega} \frac{(\xi - x)^2}{2} \; \bar{D}_\xi \; d\xi$$

$$= \frac{1}{2} \int_x^{\omega} (\xi - x)^2 \; \bar{D}_\xi \; d\xi = \bar{T}_x$$

En general:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{conmutación} \\ \text{de} \\ \text{órden } k \end{array} \right\} = \frac{1}{(k-2)!} \int_k^{\omega} (\xi - x)^{k-2} \bar{D}_\xi \, d\xi$$

(Cuya demostración es análoga al caso discreto).

Las definiciones :

$$\bar{N}_{x:\overline{n}|} = \int_{x}^{x+n} \bar{D}_{\xi}\, d\xi = \int_{x}^{\omega} \bar{D}_{\xi}\, d\xi - \int_{x+n}^{\omega} \bar{D}_{\xi}\, d\xi = \bar{N}_{x} - \bar{N}_{x+n}$$

$$\bar{S}_{x:\overline{n}|} = \int_{x}^{x+n} \bar{N}_{\xi}\, d\xi = \int_{x}^{\omega} \bar{N}_{\xi}\, d\xi - \int_{x+n}^{\omega} \bar{N}_{\xi}\, d\xi = \bar{S}_{x} - \bar{S}_{x+n}$$

no requieren ninguna explicación.

Cuando se desea cambiar de la escritura continua a la escritura discreta, se debe recordar que:

$$\bar{N}_{x} = N_{x} - \beta^{(\infty)} D_{x} \approx N_{x} - \frac{1}{2} D_{x}$$

ya que el $\lim\limits_{m \to \infty} \frac{m-1}{2m} = \frac{1}{2}$

El resultado aproximado a la derecha se obtiene con ayuda del procedimiento del valor medio para integrales:

$$\bar{N}_{x} = \sum_{\xi = x}^{\omega - x} \int_{\xi}^{\xi+1} \bar{D}_{\xi}\, d\xi \cong \sum_{\xi = x}^{\omega - x} D_{\xi + \frac{1}{2}} = N_{x+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (N_{x} - N_{x+1})$$

$$= N_{x+1} + \frac{1}{2} D_{x} = N_{x} - \frac{1}{2} D_{x} \qquad (\xi \text{ entero }).$$

El mismo procedimiento aplicado a $\bar{S}_x$:

$$\bar{S}_x \cong \sum_{\xi=x}^{\omega-1} \bar{N}_{\xi+\frac{1}{2}} \cong \frac{1}{2} \sum_{\xi=x}^{\omega-x} (\bar{N}_{\xi}+\bar{N}_{\xi+1})$$

$$\cong S_{x+1} + \frac{1}{4} D_x \cong S_{x+1} .$$

Finalmente de manera análoga:

$$\bar{T}_x \cong \sum_{\xi=x}^{\omega-1} \bar{S}_{\xi+\frac{1}{2}} \cong T_{x+2} + \frac{1}{2} S_{x+1} + \frac{1}{4} N_{x+\frac{1}{2}}$$

$$\cong T_{x+2} + \frac{1}{2} S_{x+1} = T_{x+1+\frac{1}{2}}$$

Debido a que en los régimenes de pensiones del seguro social, la utilización del pago mensual es muy frecuente, la fórmula de aproximación que sigue, puede revestir cierto interés:

$$\bar{N}_x = N_x - \beta^{(\infty)} D_x = N_x^{(12)} - (\beta^{(\infty)} - \beta^{(12)}) D_x$$

Con frecuencia puede despreciarse el término de corrección $(\beta^{(\infty)} - \beta^{(12)}) D_x$ y escribir: $\bar{N}_x \cong N_x^{(12)}$

Observaciones:

Las fórmulas guardan igualmente su validez, cuando el órden de sobrevivencia (como en el caso del órden de los activos) se limita con $\mu < \omega$ y cuando se construyen las conmutaciones continuas correspondientes:

$$\bar{N}_x(\mu) = \int_x^{\mu} \bar{D}_\xi \, d\xi \quad ; \quad \bar{S}_x(\mu) = \int_x^{\mu} \bar{N}_\xi \, d\xi \quad ; \quad \text{etc.}$$

2.3.-Tasa de interés equivalente en caso de capitalización fraccionada.

El capital con valor "1" al principio del año, se llevará a un interés anual efectivo de i; $1+i$ es, por tanto, el valor del capital acumulado al final del año. Si el año se divide en m fracciones iguales, el interés se calculará al final de cada fracción $\frac{1}{m}$ del año y se agregará al capital sin restarlo por llevar intereses conjuntamente con este último. Sea $\frac{i^{(m)}}{m}$, la tasa de interés para tal fracción $\frac{1}{m}$ del año, y $1 + \frac{i^{(m)}}{m}$ el factor de capitalización fraccionado; $i^{(m)}$ se determinará de tal manera que, al final del año, resultara exactamente un interés i, es decir el capital final $1+i$.

Por lo tanto es válida la ecuación:

$$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = 1+i$$

Que permite obtener inmediatamente el valor buscado:

$$i^{(m)} = m\,(\sqrt[m]{1+i} - 1) = m\,(r^{1/m} - 1)$$

$i^{(m)}$ se llama la tasa nominal <u>equivalente</u> a la tasa i, cuando el interés es capitalizado al final de cada fracción $\frac{1}{m}$ del año.

En el caso límite $m = \infty$, se habla de <u>intereses continuos.</u>

La tasa equivalente a i es:

$$\delta = \lim_{m \to \infty} i^{(m)} = \lim_{m \to \infty} m\,(\sqrt[m]{1+i} - 1) = \ln(1+i) = \ln r$$

$\delta = \ln r$ se llama <u>tasa de interés instantánea</u> (intensidad de interés). Se tiene:

$$r = e^{\delta} \quad , \quad V = e^{-\delta} \quad .$$

Cuando al final de cada año los intereses se agregan al capital, entonces el capital con un valor inicial k_o alcanza, después de n años, el valor final:

$$k_n = k_o r^n$$

E, inversamente, si se conoce el valor final de k, se calcula el valor inicial k_o por medio de:

$$k_o = k\,r^{-n} = k\,V^n$$

k_o es el valor descontado por n años de k o bien el <u>valor actual</u> de k.

(Las operaciones sobre valores descontados son características de las matemáticas actuariales.)

Es fácil demostrar que la función "capital", establecida anteriormente para t = n, entero,

$$k_t = k_o\, r^t = k_o\, e^{\delta t} \quad \text{ó} \quad k_o = k_t\, e^{-\delta t} \qquad (2.3.1)$$

guarda su validez si se supone su continuidad para culquier número real t, cuando el interés es continuo.

La derivada logarítmica de k_t,

$$\frac{d}{dt} \ln k_t = \frac{k_t'}{k_t} = \frac{k_o\, \delta\, e^{\delta t}}{k_o\, e^{\delta t}} = \delta$$

hace aparecer la calidad de δ como <u>intensidad de crecimiento</u> del capital k_t, en tanto que el carácter de δ como intensidad de interés se pone en evidencia por la función de interés en el intervalo [0,t].

$$I(0,t) = \int_0^t k_\tau\, \delta\, d\tau = k_o\, \delta \int_0^t e^{\delta \tau} d\tau = k_t - k_o$$

Si se escoge para esta última integral el intervalo [0,1] y $k_o = 1$, se debe escribir exactamente el interés i. En efecto:

$$I(0,t) = \delta \int_0^1 e^{\delta t} dt = e^{\delta} - 1 = r - 1 = i$$

Reemplazando la integral de la izquierda por el valor medio de la cantidad que se encuentra bajo el símbolo de integración:

$$\frac{e^{\delta} + e^{0}}{2} = \frac{1}{2}\,(r+1) = \frac{2 + i}{2}$$

se encuentra una fórmula de aproximación apta para δ:

$$\delta\, \left(\frac{2 + i}{2} \right) \cong i$$

de donde:

$$\delta \cong \frac{2i}{2+i}$$

Como lo muestra también la comparación de los valores exactos y aproximados de δ en la siguiente tabla:

i	δ (exacto)	$\delta \cong \frac{2i}{2+i}$
0.01	0.009950	0.009950
0.02	0.019803	0.019802
0.03	0.029559	0.029557
0.04	0.039221	0.039216
0.05	0.048790	0.048788
0.06	0.058269	0.058252

Hasta ahora se ha supuesto constante la intensidad de interés δ. Si $\delta = \delta(t)$ es una función del tiempo t, entonces se obtiene para la función de interés en el intervalo $[0,t]$.

$$k_t - k_o = \int_0^t k_\tau \, \delta(\tau) \, d\tau$$

de ahi sigue por derivación

$$\frac{k_t'}{k_t} = \delta(t) = \frac{d}{dt} \ln k_t$$

y, de ésta la fórmula básica

$$k_t = k_o \, e^{\int_0^t \delta(\tau) d\tau} \qquad ó \qquad k_o = k_t \, e^{-\int_0^t \delta(\tau) d\tau}$$

la cual es una generalización de (2.3.1)

2.4.-Conmutaciones formales y mixtas

Un instrumento matemático esencial para los siguientes capitulos, en las cuales se toma como base las evoluciones demográficas y económicas, está constituído por las conmutaciones formales. Estas son calculadas con un factor de descuento formal apropiado cualquiera $e^{-\rho}$ -en lugar del factor de descuento $V = e^{-\delta}$ correspondiente a una tasa de interés técnica (δ = intensidad de interés)- en la que ρ podrá representar por ejemplo una intensidad de crecimiento demográfico o económico. Todas las veces que sea necesario distinguir entre las diversas conmutaciones, se aumenta la intensidad de interés o la intensidad de crecimiento correspondiente efectivo o formal como indice superior:

$$D_x^{(\delta)} = l_x\, V^x = l_x\, e^{-\delta x} \quad ; \; D_x^{(\rho)} = l_x\, e^{-\rho x}$$

y de manera análoga $N_x^{(\delta)}$, $N_x^{(\rho)}$, $\ddot{a}_x^{(\delta)}$, $\ddot{a}_x^{(\rho)}$ etc. Las conmutaciones sin indice superior designa siempre los valores habituales calculados sobre la base de intensidad de interés técnico δ.

Junto a estas conmutaciones, las conmutaciones "compuestas", -comprendiendo una "parte demográfica" y una "parte pensión"- juegan un papel importante.

Así las conmutaciones base de la pensión de invalidez:

$$D_x^{ai} = [\ D_x^{aa}\ V^{1/2}\ i_x\ ]\quad \ddot{a}^{i}_{x+1/2}$$

se componen del número descontado de nuevos inválidos multiplicado por el valor actual de la pensión unitaria, de invalidez. Otro ejemplo es el conmutativo introducido en las expectativas para los inválidos, produciendo una pensión de viudez:

$$D_x^{iv} = [\ D_x^{i}\ \ V^{1/2}\ q_x^{i}\ \ W^{i}_{x+1/2}\ ]\ \ddot{a}^{v}_{y_{x+1/2}}$$

(donde y representa la edad de la mujer)

con la parte demográfica $V^{1/2}\ D_x^{i}\ q_x^{i}\ W^{i}_{x+\frac{1}{2}}$ (= número

descontado de viudas que son dejadas por los inválidos que fallecen en el intervalo de tiempo [t,t+1] y la parte de pensión : $\ddot{a}^{\omega}_{y_{x+\frac{1}{2}}}$

Para el establecimiento de los métodos de cálculo "dinámicos", los conmutativos compuestos para la parte demográfica se calcula con una intensidad de crecimiento formal apropiada ρ, mientras que para la parte de pensiones se hace con la intensidad de interés igualmente formal σ, donde se puede ver que $\rho \neq \sigma$, y son introducidas como instrumento casi indispensable. Con su ayuda las proposiciones respectivas no son solamente simplificadas sino aún disponen de una mejor relación entre ellas.

Tales conmutaciones son llamadas "conmutaciones de factores de descuento mixtos" identificadas por un índice superior doble suplementario (ρ,σ). Por ejemplo:

$$D_x^{ai(\rho,\sigma)} = D_x^{aa(\rho)} e^{-\rho/2} i_x \ddot{a}_{x+1/2}^{i(\sigma)}$$

ó

$$D_x^{iv(\rho,\sigma)} = D_x^{i(\rho)} e^{-\rho/2} q_x^i W_{x+1/2}^i \ddot{a}_{y_{x+1/2}}^{v(\sigma)} ;$$

llámese entonces a $e^{-\rho}$ factor de descuento demográfico y a $e^{-\sigma}$ factor de descuento de la parte pensión.

2.5.-Conmutaciones generalizadas.

El lector ya se ha dado cuenta que el mecanismo de las conmutaciones de los diferentes órdenes es independiente del significado específico de las conmutaciones de primer órden D_x. Se trata de la construcción de sumas relativamente simples, las que además no tienen nada que ver con la operacion de descuento. En lo que sigue, no solamente hay necesidad de aplicar el mismo mecanismo, en particular en las conmutaciones complejas D_x^{ai} de seguro de invalidez (D_x^{ai} es el producto del número descontado de inválidos por valor actual de una renta) y las conmutaciones del seguro de sobrevivencia, todavia más compleja, sino también resulta oportuno extender la noción de las conmutaciones a cualquier función que depende del tiempo[7]. Estas funciones son, por ejemplo, las correspondientes a recaudación de primas, la función de gastos y la reserva de un régimen de seguro cualquiera.

$$D_t^{(1)}(F) = F(t)\,V^t \quad ; \quad t = 0,1,2,3\ldots$$

Conmutación base o de primer órden

$$D_t^{(k)}(F) = \sum_{t=0}^{w-t} D_{x+t}^{(k-1)}(F)$$

Definición recursiva de la conmutación de órden k

Asi $D_t^{(1)}$, función cualquiera de t definida para $0 \le t \le \omega$, es dada como conmutación de "primer órden". $D_t^{(1)}$ puede definirse o no, sólo para números enteros t=0,1,2,3,..., y conducir así a la escritura discreta de conmutaciones superiores, o bien, $\bar{D}_t^{(1)}$ puede darse dado para todos los intervalos $[0,\omega]$ en los que se supone que es continua de t.

Las conmutaciones de órden k ($k \ge 2$) se definen entonces de la siguiente manera :

---

[7] Se notará que $D_x = D_{x_0+t}$ también pude considerarse como una función que depende de t.

a) Caso discreto.

$$D_t^{(k)} = \sum_{\tau=t}^{v-1} D_\tau^{(k-1)}$$

b) Caso continuo[8].

$$\bar{D}_t^{(k)} = \int_t^{\omega} \bar{D}_\tau^{(k-1)} \, d\tau$$

Las conmutaciones continuas de todos los órdenes se dejan expresar inmediatamente con la ayuda de aquella de primer órden.

Según el método de demostración de la fórmula (2.2) resulta:

$$\bar{D}_t^{(k)} = \frac{1}{(k-2)!} \int_t^{\omega} (\xi - t)^{k-2} \, \bar{D}_\tau^{(1)} \, d\tau \, .$$

Las fórmulas establecidas en la sección anterior para las conmutaciones continuas valen igualmente para las $D_t^{(k)}$ correspondientes.

Si se descuenta F(t) en el momento t=0 , entonces se tiene:

$$\bar{D}_t^{(1)} = F(t)\, e^{-\int_c^t \delta(\tau) d\tau} \, .$$

O bién, si $\delta(\tau) = \delta$ es constante, entonces:

$$\bar{D}_t^{(1)} = F(t) \quad e^{-\delta t}$$

$\bar{D}_t^{(1)}$ se llama conmutación de primer órden de la función

[8] La cual es preferida para la utilización de estas conmutaciones generalizadas.

$F(t)$ y se designa por : $\bar{D}_t^{(1)}$:

$$\bar{D}_t^{(1)} = \bar{D}_t[F] \quad \text{ó también} \quad \bar{D}_t^{(1)} = \bar{D}[F(t)].$$

La segunda fórmula solamente se utiliza cuando no es posible tener alguna confusión. Igualmente, para las conmutaciones superiores, se utilizan los símbolos $\bar{D}_t^{(k)}[F]$ para caracterizar mejor la función básica $F(t)$. En la práctica, a fin de identificar mejor las conmutaciones, es oportuno y útil utilizar para las conmutaciones usuales de los tres primeros órdenes superiores, los símbolos ya acostumbrados:

$$\bar{N}_t[F] = \bar{D}_t^{(2)}[F] \; ; \; \bar{S}_t[F] = \bar{D}_t^{(3)}[F] \; ; \; \bar{T}_t[F] = \bar{D}_t^{(4)}[F]$$

Cuando en lugar de "cero" se escoge para la operación de descuento un momento $t_0 \neq 0$, se agrega el indice inferior t_0:

$$\bar{D}_{t_{(t_0)}}^{(1)}[F] = F(t)\; e^{-\int_{t_0}^{t} \delta(\tau)d\tau}$$

$$= e^{\int_{c}^{t_0} \delta(\tau)d\tau} \; F(t)\; e^{-\int_{c}^{t} \delta(\tau)d\tau}$$

$$= e^{\int_{c}^{t_0} \delta(\tau)d\tau} \; \bar{D}_{t_c}^{(1)}[F]$$

Igualmente:

$$\bar{D}^{(k)}_{t_{(t_0)}}[F] = e^{\int_c^{t_0} \delta(\tau)d\tau} \bar{D}^{(k)}_t [F]$$

Igualmente se considerarán las fórmulas siguientes:

$$\bar{D}^{(k)}_{t_{(t_0)}}[F \pm G] = \bar{D}^{(k)}_{t_{(t_0)}}[F] \pm \bar{D}^{(k)}_{t_{(t_0)}}[G]$$

$$\bar{D}^{(k)}_{t_{(t_0)}}[a\ F] = a\ \bar{D}^{(k)}_{t_{(t_0)}}[F] \qquad (\ a = \text{constante}\ )$$

ya que $\bar{D}^{(k)}_t$ es una función lineal .

2.6.-Conmutaciones Dinámicas.

Se entiende como "Conmutaciones Dinámicas" aquellas que integran los factores demográfico y económico, o dicho más explícitamente, las correspondientes intensidades o tasas de crecimiento de dichos fenómenos que inciden directamente en los mecanismos de cálculo. Estas permiten establecerlos matemáticamente para aclarar o saber el comportamiento de los fenómenos (demográficos y económicos) en determinadas operaciones de cálculo de técnica actuarial.

Ejemplos de conmutaciones dinámicas

$$i\ ) \qquad C_0 \sum_{x_0}^{\mu-1} D_x^{aa(\delta-\sigma)} = C_0\ N^{aa(\delta-\sigma)}_{x:\overline{\mu-x_0|}}$$

Expectativa de $D_{x_0}^{aa}$ activos a los salarios del tiempo de actividad que crecen con intensidad σ.

$$ii)\ \ddot{a}_{\mu}^{(\delta-\sigma)} = \frac{N_{\mu}^{(\delta-\sigma)}}{D_{\mu}^{(\delta-\sigma)}} = \frac{N_{\mu}^{(\delta-\sigma)}}{\ell_{\mu}\, e^{-\delta\mu}\, e^{\sigma\mu}}$$

Valor actual de una renta (a partir de la edad μ) que se ajusta al índice de salarios $e^{\sigma(t-\mu)}$.

$$iii)\ \left\{ D_{x_0}^{(\rho)}, \ldots, D_{\mu-1}^{(\rho)}, D_{\mu}^{(\rho)} \right\}$$

Estructura de una población geómetrica (con intensidad de crecimiento ρ).

$$iv)\ \left\{ \ell_{x_0}, \ell_{x_{0+1}}, \ldots, \ell_{\mu} \right\}$$

Estructura de una población natural ($\rho = 0$).

2.7.-Curva exponencial de salarios.

La hipótesis de evolución exponencial de la curva de los salarios no se aplica a las escalas estáticas de salarios. Sin embargo, ella puede más tarde jugar un papel importante en el tratamiento de escalas "dinámicas" de salarios, tal cuales se presenta en la hipótesis de un nivel general de salarios ascendentes. Una función de salarios dinámicos está basada por lo regular sobre hipótesis de un factor constante de aumento anual (progresión geómetrica). Pero ella (c.e.s.) puede también estar basada sobre una suposición apropiada cualquiera.

como por ejemplo, la de un comportamiento lineal. En todo caso, se supone la existencia de una función de salarios $g(x;t)$ bien definida.

A menudo se supone que:

$$g(x;t) = g(x)\ F(t)$$

función dinámica del salario que depende de la edad x y del tiempo t.

En el caso de una progresión geómetrica:

$$g(x;t) = e^{\sigma t}\ g(x) \quad , \quad \text{donde} \quad F(t) = e^{\sigma t} .$$

Si se supone una progresión lineal (por cada edad x):

$$g(x;t) = g(x)\ (\ 1 + ct\ )\ ;\ \text{donde}\ \ F(x) = 1 + ct \simeq ct.$$

Posteriormente se utiliza como función de salarios:

$$g(x) = g(x_o)\ e^{\sigma(x-x_o)} = C_o e^{\sigma x} \ .$$

donde $C_o = g(x_o)\ e^{-\sigma x_o}$

Se distinguen las siguientes intensidades de crecimiento:

i : auténtica tasa anual de interés.

ρ : intensidad de crecimiento <u>demográfico</u>, igual para todas las poblaciones afectadas por el régimen de seguro.

σ : intensidad de crecimiento económico o de la base general de cálculo de las cotizaciones (igual al nivel general de salarios) por asegurado activo.

Donde $\sigma(t) = \dfrac{g'(t)}{g(t)}$; $g(t) = g(t_o)e^{\int_{t_o}^{t} \sigma(\tau)d\tau}$

Y también:

$$\rho(t) = \frac{L'(x;t)}{L(x;t)} = \frac{\wedge'(t)}{\wedge(t)} \quad \text{donde:}$$

$L(x;t)$ es una función de frecuencia de una población.

$\wedge(x;t) = \sum_{x_o \le \xi \le x} L(\xi;t)$ es una función de distribución que indica el número de personas entre las edades x_o y x en el tiempo t.

2.8.-Elementos de la teoría matemática de poblaciones.

Sea $L(x;t)$ una función de distribución por edad de la población en el tiempo t $(t_o \le t \le t_1)$ para x $(x_o \le x \le \mu)$.

$$\int_{x'}^{x''} L(x;t)dx$$

Representa el número de personas de edad $x' \le x \le x''$ en el tiempo t.

$$\Lambda(t)=\int_{x_o}^{\mu} L(x;t)dx$$

Es el número total de personas de la población en el tiempo t.

Distribución relativa discreta por edad de la población en el tiempo t:

$$\left\{L(x_o\ ;t)\ ,L(x_{o+1};t)\ \ldots\ldots L(\mu;t)\right\}$$

Función de distribución que indica el número de personas entre las edades x_o y x:

$$\Lambda(x;t)=\sum_{x_o\leq\ \xi\leq x} L(\xi\ ;t)$$

Para que la función de distribución esté definida para toda x se supone masa cero en los puntos intermedios, es decir:

$$\Lambda(x_1,\ x_2\ ;\ t)\ =\ \Lambda(x_2\ ;\ t\ )-\ \Lambda(\ x_1\ ;\ t\ )$$

masa de la población en el intervalo $(x_1\ ,\ x_2]$.
Si se aplica el caso continuo, la función L $(x;t)$ recibe el nombre de <u>función continua de frecuencia</u> (función de densidad), siendo la correspondiente función de distribución:

$$\Lambda(x;t)=\int_{x_o}^{x} L\ (\xi\ ;t)d\xi$$

La masa de población en el intervalo $(x_1\ ,\ x_2]$ en el tiempo t es:

$$\Lambda(x_1, x_2 ; t) = \int_{x_1}^{x_2} L(\xi;t)d\xi = \Lambda(x_2 ; t) - \Lambda(x_1 ; t)$$

La función de frecuencia como la derivada de la función de la distribución:

$$\Lambda'_x(x ;t) = L(x ;t)$$

E(x;t) Función de distribución de las nuevas entradas o "Función de Renovación" en el tiempo t:

$$\int_{x'}^{x''} E(x;t)dx$$

la cual representa el número de las nuevas entradas durante la unidad de tiempo reportada en el tiempo t y con las edades de entre $x' \leq x \leq x''$.

La integral,

$$\int_{t'}^{t''} \int_{x'}^{x''} E(x;t)dx\, dt ,$$

es el número total de nuevas entradas que tienen lugar en el intervalo de tiempo [t',t''] y en el intervalo de edad $[x' , x'']$.

La función de renovación o de nuevos entrantes a la edad

x_0 es:

$$E(x_0, \tau) \quad ; \quad t_0 \le \tau \le t$$

La probabilidad de que una persona de edad x_1 permanezca en el órden de sobrevivencia hasta la edad x_2, está dada por:

$$p(x_1, x_2) = \frac{\ell_{x_2}}{\ell_{x_1}}$$

Si (ℓ_x) es el órden de sobrevivientes de la población y $p(x', x'')$ la probabilidad para una persona de edad x' de permanecer en la población hasta la edad x'', entonces la función de distribución de nuevas entradas en el intervalo $[t', t'']$, que alcanzan la edad ξ en el tiempo t es igual a:

$$\overset{t''}{\underset{t'}{E}}(\xi, t'') = \int_{t'}^{t''} E\,(\xi - t'' + \nu \; ; \; \nu)\; p(\xi - t'' + \nu \;, \xi)\; d\nu$$

ó si $t'' - t' = h$, $t' = t$, $\nu = t + h$ y $\xi = x + h$

$$\overset{t+h}{\underset{t}{E}}(x+h, t+h) = \int_0^h E\,(x+\tau \; ; \; t+\tau)\; p(x+\tau \; ; \; x+h)\; d\tau$$

Las funciones de distribución de la población en t y t+h y la función de renovación están relacionadas por la siguiente ecuación:

$$L(x+h,t+h) = L(x;t)\ p(x,x+h) + \int_0^h E(x+\tau;t+\tau)\ p(x+\tau;x+h)\ d\tau$$

$$L(x\ ,\ t'') = L(x-(t''-t')\ ;\ t')\ p(x-(t'-t'')\ ;x),$$
$$\text{si}\quad t''-t' < x - x_o.$$

$$L(x\ ,\ t'') = E(x_o, t''-(x-x_o))\ \ p(x_o\ ,\ x),$$
$$\text{si}\ t''-t' \geq x-x_o.$$

La población en el tiempo t'' expresada por los sobrevivientes de la población en el tiempo t' o por los sobrevivientes de nuevos entrantes.

Expresiónes que permiten pasar de una distribución continua a una distribución discreta:

1ª alternativa:

$$L(x_o+\tfrac{1}{2};\ t)\ ,\ L(x_o+1\tfrac{1}{2};\ t),\ldots L(\mu-\tfrac{1}{2},\ t)$$

2ª alternativa:

$$L(x;t) \cong \tfrac{1}{2}\ [L(x_o-1\tfrac{1}{2};\ t) + L(x+\tfrac{1}{2};\ t)]\ ;$$
$$x = x_o+1\ ,\ x_o+2\ ,\ \ldots\ ,\ \mu-1$$
$$L(x_o\ ;t) \cong \tfrac{1}{2}\ L(x_o+\tfrac{1}{2};\ t)\quad ;\quad L(\mu;t) \cong \tfrac{1}{2}\ L(\mu-\tfrac{1}{2};\ t)$$

CAPITULO III

ESTADO DEMOGRAFICO RELATIVAMENTE ESTACIONARIO

3.1.- Definiciones y Teoremas Generales.

DEFINICION: Una población se encuentra en el intervalo $[t_0, t_1]$ en un estado relativamente estacionario o se denomina relativamente estacionaria en dicho intervalo si la distribución relativa por edad permanece constante en dicho intervalo.

Si $L(x,t)$ es la función de distribución de la población, entonces existe una función $\Psi(t)$ tal que:

$$L(x\ ;\ t) = \psi(t)\ L(x\ ;\ t_0) \quad ;\ x_0 \leq x \leq \mu \quad ;\ t_0 \leq t \leq t_1$$

Función de población relativamente estacionaria.

Mientras se mantiene el estado relativamente estacionario, la intensidad de crecimiento en todos los escalones de edad:

$$\rho(t) = \frac{L'(x\ ;\ t)}{L(x\ ;\ t)} = \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{d \ln \psi(t)}{dt}$$

Intensidad de crecimiento demográfico.

Si $\rho(t)$ es conocido, entonces $\psi(t)$ se obtiene por medio de

$$\psi(t)= e^{\int_{t_0}^{t}\rho(\tau)d\tau}$$

DEFINICION: Una población relativamente estacionaria en el intervalo $[t_0 , t_1]$ se llama estable si la intensidad de crecimiento $\rho(t) = \rho$ es constante en $[t_0 , t_1]$.

Es decir si $\rho(t)= \rho$ = constante en $[t_0 , t_1]$ entonces población estable en $[t_0 , t_1]$.

Para una población estable se tiene:

$$\psi(t)= e^{\rho(t-t_0)}$$

$$\text{y} \qquad L(x;t)=e^{\rho(t-t_0)} L(x ; t_0).$$

Función de la población estable.

Si $\rho = 0$ se obtiene el estado estacionario absoluto demográfico.

TEOREMA (3.1.1): Sean $L(x ;t)$ y $E(\xi;t)$ funciones de poblaciones relativamente estacionarias en $[t_0 , t_1]$ y que tienen la misma intensidad de crecimiento.

$L(x;t)$ es estable en $[t_0 , t_1] \longleftrightarrow E(\xi;t)$ es estable en $[t_0 , t_1]$.

DEMOSTRACION: $\longleftarrow$)

$$\left.\begin{array}{l} L(x\,;\,t) = \psi(t)\,L(x\,;\,t_0) \quad ; \; x_0 \le x \le \mu \\ E(\xi\,;\,\tau) = \hat{\psi}(t)\,E(\xi\,;\,\tau_0) \quad ; \; \xi_0 \le \xi \le \mu \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Por definición de población} \\ \text{relativamente estacionaria.}\end{array}$$

$$\rho_L(t) = \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} \quad ; \quad \rho_E(t) = \frac{\hat{\psi}'(t)}{\hat{\psi}(t)}$$

$$\rho_L(t) = \rho_E(t) \text{ por hipótesis} \tag{3.1}$$

Por otra parte se tiene que $E(\xi;\tau)$ es estable

$\longrightarrow \rho_E(t) = k \quad \forall \; t \in [t_0 \,,\, t_1]$

$\longrightarrow$ de (3.1) $\rho_L(t) = \rho_E(t) = k \qquad \therefore \rho_L(t) = k$

$\therefore L(x;t)$ es estable en $[t_0 \,,\, t_1]$ L.Q.D.

(Regreso es análogo).

Por otra parte, una población relativamente estacionaria no es necesariamente estable. Sin embargo en la práctica se puede admitir la estabilidad de las poblaciones aseguradas que interesan así como de las de poblaciones de beneficiarios de pensiones que se deriven, sin por lo tanto restringir su validez general.

TEOREMA (3.1.2).- Si la función de renovación de una población relativamente estacionaria en los intervalos $[x_0,\mu],[t_0,t_1]$ es nula en un intervalo de edad I_0 por pequeño que sea, situado en $[x_0,\mu]$, entonces la población es estable.

Sugerencia: Es suficiente suponer que la función de renovación es en I_0 independiente del tiempo t.

Como en una seguridad-pensiones, el número de entradas tardias a partir de una cierta edad puede ser omitido por comparación con el número total de entradas nuevas; las hipótesis del teorema (3.1.2) son en general reemplazadas por una aproximación suficiente.

TEOREMA (3.1.3)- Si la población activa de un régimen de pensiones y una de sus poblaciones secundarias se encuentran cada una en un estado relativamente estacionario, entonces las dos poblaciones son estables y poseen la *misma* intensidad de crecimiento.

Las poblaciones geométricas son estables, cuya distribución por edad es dada directamente por el órden de sobrevivencia $\{l_x\}$, combinada con la intensidad de crecimiento; una población tal, tiene una función de distribución del tipo siguiente:

$$L(x;t) = e^{\rho(t-t_0)} C_0 \, l_x \, e^{-\rho x} = e^{\rho(t-t_0)} C_0 \, l_0 \, e^{-\rho x} p(0,x)$$

para $x_0 \leq x \leq \mu$ y $t_0 \leq t \leq t_1$,

donde ρ es la intensidad de crecimiento y C_0 una constante conveniente $\left[C_0 = \dfrac{E(x_0;t_0)}{l_{x_0} \, e^{-\rho x_0}} \right]$. Utilizando de nuevo las conmutaciones formales y poniendo $l_x e^{-\rho x} = D_x^{(\rho)}$ se puede representar $L(x;t)$ por:

$$L(x;t) = C_0 e^{\rho(t-t_0)} D_x^{(\rho)}$$

Función de población estable; expresada en términos de conmutaciones dinámicas.

El número de personas que alcancen en el tiempo t las edades entre x' y x'' está dado por:

$$\int_{x'}^{x''} L(x;t)dx = C_o\, e^{\rho(t-t_o)} \{N_{x'}^{(\rho)} - N_{x''}^{(\rho)}\}$$

La función de renovación correspondiente es limitada a la edad más baja x_0 y tiene la forma:

$$E(x_o;t) = C_o e^{\rho(t-t_o)} D_{x_o}^{(\rho)}$$

La correspondiente función de nuevos entrantes.

Si ρ=0 y si, por lo mismo, $L(x;t)$ es directamente proporcional al órden de sobrevivencia

$$L(x;t) = C_o \ell_x \quad ,$$

entonces se está en presencia de una población de la cual la distribución es la misma que la de la tabla de mortalidad escogida y que se llama a menudo población natural.

Si se pasa a poblaciones estables generalizadas -sin limitar la entrada a una edad determinada- se obtienen <u>poblaciones geométricas generalizadas,</u> que tienen distribución del tipo:

$$L(x;t) = C_o e^{\rho(t-t_o)} D_x^{(\rho)}\, h(x) \quad , \qquad (3.1.1)$$

donde $h(x)$ es una función no negativa y no decreciente. La función de renovación es de la forma:

$$E(x;t) = e^{\rho(t-t_o)} D_x^{(\rho)}\, C(x) \quad , \quad \text{donde } C(x) = h'(x).$$

Sin embargo, para cálculos prácticos, se supone a menudo que las entradas en una población geométrica generalizada se encuentran sobre las edades discretas x_λ, $\lambda=0,1,2,\ldots,n-1$. Las funciones de renovación quedan:

$$E_\lambda(x_\lambda;t)=e^{\rho(t-t_o)}D_{x_\lambda}^{(\rho)}\ \ C_\lambda$$

Las constantes C_λ pueden ser consideradas como los "pesos" relativos de las edades de entrada x_λ. La función $h(x)$, en la fórmula (3.1.1) de la función de distribución $L(x;t)$, llega a ser una función en escalera o más precisamente:

$$h(x)=C_o+C_1+\ldots+C_\lambda\ ,\ \text{para}\ \ x_\lambda\le x\le x_{\lambda+1}$$

Se puede entonces imaginar la población geométrica generalizada como una *superposición de un número finito de poblaciones geométricas simples que tienen la misma tasa de crecimiento.* Esto presenta la gran ventaja que puede traer el estudio de poblaciones geométricas generalizadas simples.

3.2.- *Conjunto de personas relativamente estacionarias abarcadas por un régimen de pensiones.*

El estudio de poblaciones se hará puramente sobre una base demográfica, sin suposiciones sobre la situación financiera del régimen

Si se está en presencia de un estado demográfico estacionario, entonces el conjunto de activos es en particular representado por una distribución geométrica general:

$$L^{aa}(x;t)=C_0 e^{\rho(t-t_0)} D_x^{aa(\rho)}; \quad x_0 \le x \le \mu; \quad C_0 = \frac{E(x_0;t_0)}{l_{x_0}\, e^{-\rho x_0}} = h(x),$$

donde $h(x)$ es una función no negativa y no decreciente y la función de renovación es

$$E^{aa}(x;\tau)=C(x) e^{\rho(t-t_0)} D_x^{aa(\rho)}; \quad C(x)=h'(x).$$

Por comodidad en la escritura siempre se pone $t=0$ como principio del estado estacionario[9].

Las funciones $L^{aa}(x;t)$ y $E^{aa}(x;t)$ están en coorrespondencia biunívoca.

Primeramente se supondrán los ingresantes concentrados en un número finito de edades discretas; $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Las correspondientes funciones parciales de renovación son:

$$E_\lambda^{aa}(x_\lambda;t) = e^{\rho t} D_{x_\lambda}^{aa(\rho)} C_\lambda \quad ; \quad \lambda=0,1,\ldots,n-1 \qquad (3.2.1)$$

que engendran y mantienen las poblaciones activas relativas parciales con funciones de distribución:

$$L_\lambda^{aa}(x;t)=C_\lambda e^{\rho t} D_x^{aa(\rho)} \qquad ; \qquad x_\lambda \le x < \mu \quad .$$

La función de distribución $L^{aa}(x;t)$ de la población total de los activos, se convierte en una suma o superposición de n distribuciones geométricas simples parciales. Además, los principales teoremas desarrollados a continuación

---

9Si el estado relativo estacionario de la población de los activos comienza en el tiempo t=0, las poblaciones correspondientes de los beneficiarios de pensión pueden alcanzar el estado estacionario más tarde. Suponemos aquí que en el tiempo t=0, todas las poblaciones pertinentes están en un estado relativamente estacionario.

pueden ser transpuestos en caso de que la anterior función de renovación $E^{aa}(x;t)$ sea continua para λ; entonces la suma es reemplazada por la integral.

Se muestra a continuación que una vez alcanzado el estado estacionario, el número de personas

$$\Lambda_{\lambda}^{aa}(t) = \int_{x_{\lambda}}^{\mu} L(\xi;t)\, d_{\xi}$$

del conjunto parcial de activos engendrado por (3.2.1) es, desde el punto de vista formal, igual a la expectativa, para

$$E_{\lambda}^{aa}(x_{\lambda};t) = e^{\rho t} D_{x_{\lambda}}^{aa(\rho)} C_{\lambda} \ ,$$

activos de edad x_{λ}, refiriéndose a la renta de importe anual, donde esta expectativa se calcula por medio de la intensidad de interés formal (ρ). Se obtienen resultados análogos para los beneficiarios de pensiones de vejez.

Si se concibe admitir n edades de entrada por separado, $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, entonces la función de renovación se trasforma en n funciones parciales de entrada con la misma intensidad de crecimiento ρ de la forma:

$$E_{\lambda}^{aa}(x_{\lambda};\tau) = e^{\rho\tau} \ell_{x_{\lambda}}^{aa(\rho)} C_{\lambda}\, e^{-\rho x_{\lambda}} = e^{\rho t} D_{x_{\lambda}}^{aa(\rho)} C_{\lambda} \ ;$$

todas las funciones $E_{\lambda}^{aa}(x_{\lambda};\tau)$ tienen una misma estructura. La función de renovación parcial correspondiente a x_{λ}

$$E_{\lambda}^{aa}(x_{\lambda};\tau) = e^{\rho\tau} D_{x_{\lambda}}^{aa(\rho)} C_{\lambda}$$

engendra una población parcial de activos de la cual la función de distribución es geométrica.

$$L_{\lambda}^{aa}(x;t)=C_{\lambda}e^{\rho t}D_{x_{\lambda}}^{aa(\rho)} \quad ; \quad x_{\lambda}\leq x \leq x_{\lambda+1} \ (\leq \mu\ ) \qquad (3.2.3)$$

El número total correspondiente de los activos provenientes de las nuevas entradas a la edad de entrada x_{λ} es:

$$\Lambda_{\lambda}^{aa}\ (t)= \int_{x_{\lambda}}^{x_{\lambda}+1} L_{\lambda}^{aa}(x;t)\ dx = C_{\lambda}\ e^{\rho t} \int_{x_{\lambda}}^{x_{\lambda}+1} D_{x}^{aa(\rho)} dx$$

$$= C_{\lambda}e^{\rho t}\ \bar{N}_{x_{\lambda}:\overline{t|}}^{aa(\rho)} \quad ; \quad t \leq \mu - x_{\lambda} \qquad (3.2.4)$$

y para $t \geq \mu - x_{\lambda}$ (estado relativamente estacionario de la población activa):

$$\Lambda_{\lambda}^{aa}\ (t)\ = C_{\lambda}e^{\rho t}\ \bar{N}_{x_{\lambda}:\overline{\mu-x_{\lambda}|}}^{aa(\rho)} \qquad (3.2.5)$$

Se observará que la expresión del lado derecho de (3.2.5) es, desde el punto de vista puramente formal, igual a la expectativa para:

$$E_{\lambda}^{aa}(x_{\lambda};t) = e^{\rho t}D_{x_{\lambda}}^{aa(\rho)}C_{\lambda}$$

activos de edad x_{λ}, que tienen una renta de activo continua de monto anual "1", donde esa expectativa está calculada con la intensidad formal de interés ρ.

Se obtienen resultados análogos para los beneficiarios de pensión de vejez y orfandad.

En forma muy general se puede establecer el siguiente teorema:

TEOREMA (3.2.1).- (Teorema principal sobre las poblaciones en estado estacionario demográfico). Supóngase que el conjunto de activos y los conjuntos secundarios de las diferentes categorías de beneficiarios de pensión de un régimen de pensiones de vejez, invalidez y sobrevivientes, se encuentran en un estado demográfico relativamente estacionario con intensidad de crecimiento ρ y que la función de renovación de los activos se descompone en n funciones parciales:

$$E_{\lambda}^{aa}(x_{\lambda};t) = e^{\rho\tau} D_{x_{\lambda}}^{aa(\rho)} C_{\lambda} \qquad ; \lambda=0,1,2,\ldots,n-1 \; .$$

Entonces el número de activos en el tiempo t y el de los beneficiarios de una cierta categoría de pensiones es igual a la suma de las expectativas formales para $E_{\lambda}^{aa}(x_{\lambda};\tau)$ activos de edad x_{λ} , $\lambda=0,1,2,\ldots,n-1$ que se refieren respectivamente a la renta de actividad continua de importe anual "1" o a la pensión unitaria continua de la categoría correspondiente de pensiones, calculándose las expectativas con la ayuda de conmutaciones formales afectadas por el factor de descuento demográfico $e^{-\rho}$.

Se hace la demostración para los conjuntos secundarios de <u>inválidos y viudas:</u> recordando que las pensiones de vejez deben considerarse al mismo tiempo como modelo para las demás categorías de pensiones de sobrevivientes que eventualmente existan.

1) Limitándose primero provisionalmente a la edad de entrada x_0, la edad inicial del orden de los activos $\{ \ell_x^{aa} \}$, $\ell_{x_c}^{ii}=0$, al conjunto de los inválidos que provienen de los activos

$$E_0^{aa}(x_0;\tau) = e^{\rho\tau} D_{x_0}^{aa(\rho)} C_0$$

en el intervalo $0 \leq \tau < 1$ y que permanecen inválidos en el tiempo t se da por la fórmula:

$$\Lambda_c^{i}(t) = C_0 e^{\rho t} \, \overline{N}_{x_c:\overline{t|}}^{ii(\rho)}$$

y para $t > \omega - x_c$ por:

$$\Lambda_c^{i}(t) = C_0 e^{\rho t} \, \overline{N}_{x_c}^{ii(\rho)}$$

Se prueba la identidad simple;

$$\overline{N}_{x_c}^{ii(\rho)} = \overline{N}_{x_c:\overline{\mu - x_0|}}^{ai(\rho)} = \overline{N}_{x_c}^{ai(\rho)} \quad .$$

Se tiene:

$$\overline{N}_{x_c}^{ii(\rho)} = \int_{x_0}^{\mu} \overline{D}_x^{ii(\rho)} dx + \int_{\mu}^{\omega} \overline{D}_x^{ii(\rho)} dx$$

$$= \int_{x_0}^{\mu} dx \int_{x_0}^{x} \overline{D}_\xi^{aa(\rho)} \nu_\xi \frac{\overline{D}_x^{i(\rho)}}{\overline{D}_\xi^{i(\rho)}} d\xi + D_\mu^{ii(\rho)} \int_{\mu}^{\omega} \frac{\overline{D}_x^{i(\rho)}}{\overline{D}_\mu^{i(\rho)}} dx$$

$$= \int_{x_0}^{\mu} \bar{D}_\xi^{\,aa(\rho)} v_\xi \frac{d_\xi}{\bar{D}_\xi^{\,i(\rho)}} \int_\xi^{\mu} \bar{D}_x^{\,i(\rho)} dx +$$

$$\int_{x_0}^{\mu} \bar{D}_\xi^{\,aa(\rho)} v_\xi \; \bar{D}_\mu^{\,i(\rho)} d\xi \int_\mu^{\omega} \frac{\bar{D}_x^{\,i(\rho)}}{\bar{D}_\mu^{\,i(\rho)}} dx$$

$$= \int_{x_0}^{\mu} \bar{D}_\xi^{\,aa(\rho)} v_\xi \frac{d_\xi}{\bar{D}_\xi^{\,i(\rho)}} \int_\xi^{\omega} \bar{D}_x^{\,i(\rho)} dx = \int_{x_0}^{\mu} \bar{D}_x^{\,aa(\rho)} v_\xi \; \bar{a}_\xi^{\,i} \; d\xi$$

$$= \int_{x_0}^{\mu} \bar{D}_\xi^{\,aa(\rho)} d\xi = \bar{N}^{\,ai(\rho)}_{x_c : \overline{\mu - x_0}|} = \bar{N}^{\,ai(\rho)}_{x_c}$$

Si $x_\lambda \neq x_0$, se tiene para $t > \omega - x_\lambda$:

$$\wedge_x^{i}(t) = C_\lambda e^{\rho t} \; \bar{N}^{\,ii(\rho)}_{x_\lambda (x_\lambda)}$$

También aquí

$$\bar{N}^{\,ii(\rho)}_{x_\lambda (x_\lambda)} = \bar{N}^{\,ai(\rho)}_{x_\lambda : \overline{\mu - x_\lambda}|} = \bar{N}^{\,ai(\rho)}_{x_\lambda}$$

Se le puede dejar al lector la prueba; que sigue el mismo camino para el caso de $x_\lambda = x_0$.

En lo que se refiere a viudas, se puede limitar -sin que, por otra parte, se restrinja la validez general- a la función de distribución de las viudas de invalidez, tomándola como modelo.

Además, bastará demostrar el caso $x_\lambda = x_o$; $\{\ell^{ii}_{x_c} = 0\}$

Se tiene:

$$L^{iv}_c(x;t) = \int_{x_o}^{x} C_o e^{\rho(t-x+\xi)}\, \bar{D}_\xi^{\,i\,i(\rho)} \mu^i_\xi\, w^i_\xi\, \frac{\ell^v_{y_\xi+x-\xi}}{\ell^v_{y_\xi}}\, d\xi$$

$$= \int_{x_o}^{x} C_o e^{\rho t}\, \bar{D}_\xi^{\,i\,i(\rho)} \mu^i_\xi\, w^i_\xi\, \frac{\bar{D}^v_{y_\xi+x-\xi}}{\bar{D}^v_{y_\xi}}\, d\xi$$

El número total buscado de viudas en el tiempo t -con la hipótesis del estado estacionario ya alcanzado- es:

$$\Lambda^{iv}_c(t) = \int_{x_o}^{\omega} L^{iv}_c(x;t)\,dx$$

$$= \int_{x_o}^{\omega} dx \int_{x_o}^{x} C_o\, e^{\rho t}\, \bar{D}_\xi^{\,i\,i(\rho)}\, \mu^i_\xi\, W^i_\xi\, \frac{\bar{D}^v_{y_\xi+x-\xi}}{\bar{D}^v_{y_\xi}}\, d\xi$$

$$= C_o\, e^{\rho t} \int_{x}^{\omega} \bar{D}_\xi^{\,i\,i(\rho)}\, \mu^i_\xi\, W^i_\xi\, \frac{d\xi}{\bar{D}^v_{y_\xi}} \int_{x=\xi}^{\omega} \bar{D}^v_{y_\xi+x-\xi}\, dx$$

$$= C_o\, e^{\rho t} \int_{x_o}^{\omega} \bar{D}_{\xi}^{i i(\rho)}\, \mu_{\xi}^{i}\, W_{\xi}^{i}\, \bar{a}_{y_{\xi}}^{v(\rho)}\, d\xi \;.$$

Si se plantea:

$$\bar{D}_{\xi}^{ii,v(\rho)} = \bar{D}_{\xi}^{ii(\rho)} \mu_{\xi}^{i}\, W_{\xi}^{i}\, \bar{a}_{y_{\xi}}^{v(\rho)} \quad ; \quad \bar{N}_{x_c}^{ii,v(\rho)} = \int_{x_o}^{\omega} \bar{D}_{\xi}^{ii,v(\rho)} d\xi$$

Se obtiene:

$$\Lambda^{iv}(t) = C_o\, e^{\rho t}\, \bar{N}_{x_c}^{ii,v(\rho)}$$

Por transformación de integrales, se muestra en forma análoga el caso de los conjuntos de beneficiarios de pensión por invalidez:

$$\bar{N}_{x_c}^{ii,v(\rho)} = \bar{N}_{x_o}^{ai,v(\rho)}\ 10 .$$

La anterior demostración, basada en la edad de ingreso x_o, se puede extender -y esto de nuevo por analogía con el caso de los beneficiarios de la pensión de invalidez- a una edad de ingreso x_λ cualquiera. El conjunto de todas las viudas provenientes de activos, de inválidos y de los beneficiarios de la pensión de vejez (siempre con respecto a la edad de ingreso x_λ) es determinado por:

$$\Lambda_{\lambda}^{v}(t) = C_\lambda\, e^{\rho t} \{ \bar{N}_{x_\lambda}^{aa,v(\rho)} + \bar{N}_{x_\lambda}^{ai,v(\rho)} + D_{\mu}^{aa(\rho)} \bar{a}_{\mu}^{v(\rho)} \}$$

---

10 $N^{ai,v} = \Sigma\, D_x^{ai,v} \quad ; \quad D_x^{ai,v} = C_x^{ai,v}\, a_{x+1/2}^{iv}$

$$= C_\lambda \ e^{\rho t} (\overline{N}^{av(\rho)}_{x_\lambda} + \overline{N}^{av(\rho)}_{\mu}).$$

Resumiendo: el teorema (3.2.1) indica que el número de activos y de beneficiarios de las diferentes categorías de pensiones es determinado en estado relativamente estacionario, por:

$$\Lambda^{aa}(t) = e^{\rho t} \sum_{(\lambda)} C_\lambda \ \overline{N}^{aa(\rho)}_{x_\lambda : \overline{\mu - x_\lambda|}}$$

$$\Lambda^{(a)}(t) = e^{\rho t} h(\mu) \ \overline{D}^{aa(\rho)}_{\mu} \ \overline{a}^{(\rho)}_{\mu} = e^{\rho t} h(\mu) \ \overline{N}^{(a)(\rho)}_{\mu} \ ;$$

$$\text{donde} \quad \sum_{\lambda=0}^{n-1} C_\lambda = h(\mu) \ ,$$

$$\Lambda^{i}(t) = e^{\rho t} \sum_{(\lambda)} C_\lambda \ \overline{N}^{ai(\rho)}_{x_\lambda} \ , \ y$$

$$\Lambda^{v}(t) = e^{\rho t} \{ \sum_{(\lambda)} C_\lambda \ \overline{N}^{av(\rho)}_{x_\lambda} + h(\mu) \overline{N}^{av(\rho)}_{\mu} \}$$

Para su aplicación práctica, es importante la suposición de que las edades de ingreso de activos se concentran en un número finito de edades de ingreso discretas. Además, se puede reconocer la validez del siguiente corolario.

COROLARIO. Si la función de renovación de activos es:

$$E^{aa}(x;t) = C(x) \ e^{\rho t} \ D^{aa(\rho)}_{x} \ ,$$

donde $C(x)$ es continua, $x_o \leq x \leq \mu$, entonces se obtiene el número de activos y de beneficiarios de pensiones en el tiempo t, por medio de integración de las expectativas formales relacionadas con $E^{aa}(x;t)$.

Entonces puede escribirse:

$$\Lambda^{aa}(t) = e^{\rho t} \int_x^{\mu} C(x)\, \overline{N}^{aa(\rho)}_{x:\overline{\mu-x|}}\, dx \quad ,$$

$$\Lambda^{a}(x) = e^{\rho t} h(x)\, \frac{D^{aa(\rho)}_{\mu}}{\overline{D}^{(\rho)}_{\mu}}\, \overline{N}^{(\rho)}_{\mu} \quad ; \quad h(\mu) = \int_{x_0}^{\mu} C(x)\, dx \; ,$$

$$\Lambda^{i}(t) = e^{\rho t} \int_x^{\mu} C(x)\, \overline{N}^{ai(\rho)}_{x:\overline{\mu-x|}}\, dx \quad .$$

$$\Lambda^{v}(t) = e^{\rho t} \left\{ \int_x^{\mu} C(x)\, \overline{N}^{av(\rho)}_{x}\, dx + h(u)\, \overline{N}^{av(\rho)}_{\mu} \right\} .$$

CAPITULO IV

ESTADO FINANCIERO RELATIVAMENTE ESTACIONARIO

4.1.- Definición y teorema fundamental.

Sean:

$A(t)$, Función de ingresos por primas en el momento t.

$B(t)$, Función de egresos por prestaciones en el momento t.

$S(t)$, Función de suma de salarios en el momento t.

$\Pi(T)$, La prima en el momento t.

De lo anterior se tiene $A(t)=\Pi(t)S(t)$.

$V(t)$, Reserva en el momento t.

$\delta(t)$, Intensidad de interés en el momento t.

Las correspondientes intensidades de expansión o crecimiento estan dadas por:

$$\rho_A(t)=\frac{A'(t)}{A(t)} \quad ; \quad \rho_B(t)=\frac{B'(t)}{B(t)} \quad ; \quad \rho_V(t)=\frac{V'(t)}{V(t)}$$

si $A(t)$, $B(t)$, y $V(t)$ son distintas de cero.

$$A(t)=A(t_o)\,e^{\rho_A(t-t_o)}$$

Si $\rho_A(t)$ es constante y en general;

$$A(t)=A(t_o)\,e^{\int_{t_o}^{t}\rho_A(\tau)d\tau} \tag{4.1.1}$$

Estas expresiones valen para $S(t)$, $B(t)$, $V(t)$.

$$V'(t)=\delta(t)V(t)+A(t)-B(t)$$

Ecuación fundamental de un seguro

$$V(t)[\delta(t)-\rho_V(t)]=B(t)-A(t) \tag{4.1.2}$$

Otra expresión de la ecuación fundamental

DEFINICION.- Un sistema de seguros se encuentra en un estado financiero relativamente estacionario en un intervalo de tiempo $[t_o, t_1]$ si las intensidades de crecimiento de las funciones de ingresos, y gastos así como la reserva son iguales.

Es decir; $\rho_A(t) = \rho_B(t) = \rho_V(t) = \hat{\rho}$.

Donde $\hat{\rho}$ es la intensidad de crecimiento o expansión del estado relativamente estacionario.

Entonces, a partir de la existencia de un estado estacionario, se puede escribir la ecuación fundamental (4.1.2) de la siguiente manera:

$$V(t)[\delta(t)-\hat{\rho}(t)] = B(t)-A(t) \qquad (4.1.3)$$

de donde;

$$\delta(t)-\hat{\rho}(t)= \frac{B(t)- A(t)}{V(t)} = \frac{B(t_o)-A(t_o)}{V(t_o)}$$

mientras dure el estado estacionario.

TEOREMA(4.1.1): Teorema Fundamental del Estado Financiero Relativamente Estacionario.

Durante un estado financiero relativamente estacionario en $[t_o, t_1]$, con $V(t) \neq 0$, la diferencia $\delta^* = \delta(t)-\hat{\rho}(t)$ permanece constante en $[t_o, t_1]$. Si en particular la intensidad de interés δ es constante también lo es $\hat{\rho}(t)=\hat{\rho}$; de suerte que las funciones A(t), B(t), y V(t) crecen geométricamente con intensidad $\hat{\rho}(t)$ (constante).

$$\delta(t)-\hat{\rho}(t)= \delta^* = \frac{B(t)- A(t)}{V(t)} = \frac{B(t_o)-A(t_o)}{V(t_o)} = \text{cte.} \quad (4.1.4)$$

Esta expresión es la esencia de este teorema.

La relación,

$$V(t)[\delta(t)-\hat{\rho}(t)] = V(t)\delta^{*} = B(t)-A(t) \quad ; \quad \delta^{*} = cte. \qquad (4.1.5)$$

es una forma ligeramente modificada de (4.1.4); significa que únicamente la parte de intereses que corresponde a la intensidad reducida δ^{*} contribuye a financiar los egresos $B(t)$.

De acuerdo a lo anterior, por tricotomía se presentan las siguientes opciones para δ^{*} :

a) $\delta^{*} > 0$.

La ecuación (4.1.5) significa que unicamente la parte del rendimiento de $V(t)$ que corresponde a la intensidad $\delta^{*} = \delta(t)-\hat{\rho}(t)$ puede destinarse a la cobertura directa de egresos, mientras que el resto del rendimiento se destina a completar la reserva que crece con intensidad $\hat{\rho}(t)$.

b) $\delta^{*} = 0$.

Se tiene $\delta(t) = \hat{\rho}(t)$, entonces $B(t)=A(t)$. Lo cual significa que el rendimiento de la reserva es absorbido totalmente por la acumulación creciente de la misma, de suerte que los egresos se cubren con los ingresos de primas como se da en un sistema de reparto.

c) $\delta^{*} < 0$.

Los ingresos por primas son mayores que los egresos, siendo la prima mayor que la de reparto. El exceso de primas y los intereses se destinan para mantener el nivel requerido de la reserva.

Si $A(t)=\Pi(t)S(t)$ entonces:

$$\Pi(t) = \Pi = \frac{A(t)}{S(t)} = \frac{B(t)-\delta^* V(t)}{S(t)} = \frac{B(t_o)-\delta^* A(t_o)}{S(t_o)}$$

Prima durante el estado financiero relativamente estacionario.

Fórmula general que no esta ligada a ningún sistema financiero.

Si Π^I, es la prima de reparto, entonces:

$$\Pi^I = \frac{B(t)}{S(t)} = \frac{B(t_o)}{S(t_o)} \qquad \text{y:}$$

$$\Pi = \Pi^I - \frac{\delta^* V(t_o)}{S(t_o)} = \frac{\Pi^I - \Pi^I \delta^* V(t_o)}{B(t_o)} = \Pi^I \left(1 - \frac{\delta^* V(t_o)}{B(t_o)}\right)$$

donde Π es la prima de un régimen de pensiones expresada en unidades de la prima de reparto.

4.2.-Estructura matemática de las primas de los tres principales sistemas financieros de regímenes de pensiones en estado relativamente estacionario.

Sean:

δ , Intensidad auténtica de interés.

ρ , Intensidad de crecimiento demográfico.

σ , Intensidad de crecimiento del nivel general de los salarios.

$e^{\sigma t}$, Indice del nivel general de salarios (suponiendo que en la época cero el salario es "1").

$\hat{\rho} = \rho_A = \rho_B = \rho_V$. Intensidad de expansión o crecimiento del estado financiero relativamente estacionario.

$\bar{\rho} = \rho + \sigma$ Condición aceptada cuando coexisten el estado demográfico y el estado financiero relativamente estacionarios.

x_0. Unica edad de ingreso a la población de activos.

$\Pi^{I}_{x_0}$. Prima de reparto en estado relativamente estacionario.

$\Pi^{II}_{x_0}$. Prima de reparto de capitales constitutivos en estado relativamente estacionario.

$\Pi^{III}_{x_0}$. Prima de cobertura de expectativas (en cualquier época).

$\Pi^{(\delta_1,\delta_2)}_{x_0}$. Prima formal de cobertura de expectativas. descontando las partes-demográficas con intensidad δ_1 y las partes-renta con intensidad δ_2.

TEOREMA(4.2.1): Teorema Central[11].

Las primas de los tres principales sistemas financieros tienen la siguiente forma:

$\Pi^{I}_{x_0} = \Pi^{(\rho,\rho)}_{x_0}$ en estado relativamente estacionario.

$\Pi^{II}_{x_0} = \Pi^{(\rho,\delta-\sigma)}_{x_0}$ en estado relativamente estacionario.

$\Pi^{III}_{x_0} = \Pi^{(\delta-\sigma,\delta-\sigma)}_{x_0}$ en cualquier época.

11Se habla más ampliamente de este teorema en el capítulo V.

a) Reparto Puro.

Fuera del estado estacionario, la prima de reparto puro Π^{I} es independiente de la intensidad de crecimiento económico σ.

El valor de Π^{I} en la ecuación, $A(t) = \Pi^{1}S(t) = B(t)$ permanece sin cambio si la base de cálculo de las cotizaciones (nivel general de los salarios) y la función de los gastos de pensión se incrementan simultáneamente por el mismo factor $e^{\sigma t}$. Por lo tanto $\Pi^{I} = \Pi_{x_0}^{(\rho,\rho)}$, donde se puede observar que la prima de reparto depende directamente de la intensidad de crecimiento demográfico ρ.

b) Prima de Reparto de Capitales Constitutivos.

La prima de reparto de los capitales constitutivos es determinada, por una parte, por el número de los nuevos beneficiarios de pensiones -que depende de la intensidad de crecimiento demográfico ρ-, y por la otra; por el valor actual de las pensiones nuevas.

Suponiendo primeramente que $\sigma = 0$, entonces Π^{II} se puede representar con la ayuda de las conmutaciones con factores mixtos de descuento ($e^{-\rho}$ y $e^{-\delta}$). De hecho, en este caso se puede decir:

$$\Pi^{II} = \Pi_{x_0}^{(\rho,\delta)}$$

Sean $\sigma \neq 0$, $\tilde{\rho} = \rho + \sigma$. Sea además una pensión unitaria continua ordinaria con la representación integral:

$$\bar{a}_{\alpha}^{(\delta)} = \frac{1}{l_x} \int_0^{\omega-x} l_{x+t}\, e^{-\int_c^t \delta(\tau)\,d\tau}\, dt.$$

Si se admite que dicha pensión está adaptada desde el inicio de manera continua y completa al nivel general de salarios que crece con intensidad σ, entonces, el valor en capital de la pensión es igual a

$$\frac{1}{l_x} \int_0^{\omega-x} l_{x+t}\, e^{-\int_c^t \delta(\tau)\,d\tau}\, e^{\int_c^t \sigma(\tau)\,d\tau}\, dt$$

$$= \frac{1}{l_x} \int_0^{\omega-x} l_{x+t}\, e^{-\int_c^t [\delta(\tau)-\sigma(\tau)]\,d\tau}\, dt.$$

El nuevo valor actual equivale a una pensión continua de importe igual a "1" calculado con la intensidad de interés formal $(\delta-\sigma)$. Como la parte demográfica de la pensión no cambia, se obtiene Π^{II} estableciendo la prima de capitalización pura a edad de ingreso x_0 con la hipótesis de un nivel general de salarios constante, al mismo tiempo que para este cálculo se usan conmutaciones mixtas cuya parte demográfica y parte pensión se calculan con las intensidades de interés formales respectivas ρ y $\delta-\sigma$. Por lo tanto se tiene:

$$\Pi^{II} = \Pi_{x_0}^{(\rho,\delta-\sigma)}.$$

c) Prima de cobertura de expectativas. Capitalización Pura.

La prima de capitalización pura en la edad de ingreso x_0 no depende del número de ingresos de activos, ni por lo tanto, la intensidad de crecimiento demográfico ρ.

En primer lugar se considera la prima de capitalización pura que debe calcularse para un régimen de pensiones determinado y en condiciones normales para $\sigma = 0$:

$$\Pi_{x_o}^{(\delta,\delta)} = \frac{\int_o^{\omega-x_o} B(t)\, e^{\int_o^t \delta(\tau)d\tau}\, dt}{\int_o^{\omega-x_o} S(t)\, e^{-\int_c^t \delta(\tau)d\tau}\, dt}$$

donde S(t) es la base global de cálculo de las cuotas B(t) la función de los gastos, relacionándose ambos con una generación de activos que entran en el tiempo $t_o=0$ y a la edad x_o. Si pasa el caso $\sigma \neq 0$ la adaptación completa de las pensiones, o sea de $(t\geq 0)$ es decir de:

$$S(t) \quad a \quad S(t)^* = S(t)\, e^{\int_c^t \sigma(\tau)d\tau}$$

$$y \text{ de } \quad B(t) \quad a \quad B(t)^* = B(t)\, e^{\int_c^t \sigma(\tau)d\tau}$$

entonces se obtiene la prima:

$$\Pi^{III} = \frac{\int_o^{\omega-x_o} B(t)\, e^{-\int_o^t [\delta(\tau)-\sigma(\tau)]d\tau}\, dt}{\int_o^{\omega-x_o} S(t)\, e^{-\int_c^t [\delta(\tau)-\sigma(\tau)]d\tau}\, dt};$$

En la hipótesis de un nivel general de los salarios que aumenta con la intensidad σ y de la adaptación completa de las pensiones, la prima de capitalización pura correspondiente a la edad de ingreso x_0 se calcula de acuerdo con la fórmula para la prima de capitalización pura en la hipótesis de un nivel de salarios constante, donde la intensidad de interés δ, sin embargo, es reemplazada por la intensidad de interés formal $(\delta-\sigma)$ tanto en la parte demográfica como en la parte de pensiones de todas las conmutaciones que intervienen en el cálculo. Se puede escribir:

$$\Pi^{III} = \Pi_{x_0}^{(\delta-\sigma,\delta-\sigma)}$$

Como las fluctuaciones demográficas y económicas revisten actualmente una gran importancia, conviene resumir brevemente la reacción de los tres sistemas de financiamiento frente a tales fluctuaciones; La prima de reparto puro es extremadamente sensible a la expansión demográfica, pero insensible a fluctuaciones del nivel general de los salarios con adaptación completa e inmediata de las pensiones. Inversamente, la prima de capitalización pura no es afectada por una expansión demográfica, pero reacciona claramente a fluctuaciones de origen económico. La prima de reparto de capitales constitutivos es influenciada por fluctuaciones demográficas y económicas; sin embargo, lo es menos que la prima de reparto puro por las variaciones demográficas y reacciona menos fuertemente que la prima de capitalización pura a las variaciones económicas. Este hecho contiene una cierta importancia al sistema de reparto de capitales constitutivos, o todo sistema que se le parezca.

4.3.- Caso límite en que la intensidad de expansión $\delta+\sigma$ del estado financiero relativamente estacionario iguala la intensidad de interés δ. Degeneración de la ecuación de equivalencia.

$\hat{\rho} = \rho + \sigma = \delta$ Condición del caso límite.

$A(t)=A_0 C^{t+1/2}$, $B(t)=B_0 C^{t+1/2}$, $C = e^{\sigma}$, $t= 0,1,2,\ldots$

Valores de $A(t)$ y de $B(t)$ en estado relativamente estacionario, que se inicia en la época $t_0=0$ ($\rho=0$, $\bar{\rho}=\sigma$, $e^{\sigma}=C$, método discreto)

$$V_0+A_0 \sum_0^{\infty} \left(\frac{C}{r}\right)^{t+1/2} = B_0 \sum_0^{\infty} \left(\frac{C}{r}\right)^{t+1/2} \quad , \ r = V^{-1}$$

Ecuación de equivalencia en el estado relativamente estacionario[12]. Converge si $C < r$; cuando $C = r$, $e^{\sigma} = e^{\delta}$, $\sigma = \delta$:

$$V_0 + \infty = \infty \quad ó \quad \infty = \infty$$

A partir de t_0 el financiamiento es independiente de la existencia o no existencia de V_0, es decir, independiente del "pasado".

4.4.- Relaciones entre primas y reservas.

Se considera un régimen de pensiones que se encuentra en el período de tiempo $[t_0, t_1]$ en estado estacionario

12 $V_0 + \sum_{t=0}^{\infty} A_t V^{t+1/2} = \sum_{t=0}^{\infty} B_t V^{t+1/2}$
(Ver capítulo I)

relativo con la intensidad global de crecimiento $\bar{\rho}$. Además, se supone que están determinadas la función de gastos B(t) y la función de salarios S(t) y que la prima es constante en $[t_0, t_1]$.

Se imagina el estado estacionario realizable dentro de dos sistemas de financiamiento diferentes a los que pertenecen las funciones de reservas $V_1(t)$ y $V_2(t)$ y las primas Π_1 y Π_2. Entonces la aplicación de la ecuación fundamental del estado estacionario financiero (4.1.2) a cada uno de los regimenes, da origen a la siguiente relación:

$$(V_1(t)-V_2(t))\ (\delta-\hat{\rho}) = S(t)\ (\Pi_1-\Pi_2) \qquad (4.4.1)$$

$\bar{\rho} = \rho + \sigma$, $\delta-\hat{\rho} > 0$; donde S(t)= suma de salarios.

Esta importante ecuación determina en un momento cualquiera t, $t_0 \leq t \leq t_1$, del estado estacionario el paso de un sistema de financiamiento a otro. En el caso $\delta = \hat{\rho}$ los miembros de ambos lados son nulos, sobre todo $\Pi_1 = \Pi_2$, prima de reparto puro; o sea que, en este caso, los valores de las primas de todos los sistemas de financiamiento son iguales entre sí, independientemente del método de cálculo.

Si $V_1(t)$ y Π_1 corresponden al sistema de financiamiento adoptado en un principio, entonces la ecuación (4.4.1) permite calcular, para un segundo sistema de financiamiento, o bien la reserva $V_2(t)$ para una prima Π_2

determinada, o Π_2 para un valor $V_2(t)$ determinado. Es de particular interés el caso en que el primer sistema es de reparto puro y, por lo tanto, $V_1(t)=0$, de tal manera que:

$$V_2(t)\ (\delta-\bar{\rho}) = S(t)\ (\Pi_1-\Pi_2) \quad ; \quad \Pi_1 = \Pi^I \ ,$$

es decir $V_2(t) = \dfrac{\Pi^I - \Pi_2}{\delta - \bar{\rho}^I}\ S(t)$

La reserva $V_2(t)$ expresada en múltiplo de la suma de salarios.

$$V_2(t) = \frac{\Pi^I - \Pi_2}{\Pi^I\ (\delta - \bar{\rho})}\ B(t)$$

La reserva $V_2(t)$ expresada como múltiplo de los egresos.

La reserva total V se puede expresar de la siguiente manera:

$$V = V_A + V_B$$

donde: V_A, Reserva parcial de activos y

V_B, Reserva parcial de los beneficiarios.

Sea el sistema financiero dado el "1" (reparto puro), y el segundo sistema el de reparto de capitales constitutivos con prima Π^{II} y reserva V_2 ; vale:

$$V_A = \frac{\Pi^I - \Pi}{\delta - \bar{\rho}^I}\ S(t)$$

Fórmula explícita de la reserva de activos conociendo la prima de reparto de capitales constitutivos.

CAPITULO V

TEOREMA CENTRAL DE LA MATEMATICA DINAMICA

5.1.- Teorema Central de la Matemática dinámica.

En esta parte se enfrenta la delicada tarea de hacer ver el alcance y acaso la elegancia de los resultados de la nueva matemática dinámica, sin molestar con un pesado aparato matemático. Existe una serie de teoremas que en su conjunto describen, de manera exhaustiva, el comportamiento de un régimen de pensiones en un estado relativamente estacionario.

Se menciona la ecuación general de equilibrio del estado financiero relativamente estacionario, válida para cualquier régimen de seguro; el teorema que permite conocer el tamaño relativo de las varias poblaciones afectadas por el régimen de pensiones: de los activos y de cada una de las categorías de beneficiarios; los teoremas que determinan la suma de los montos de pensiones en curso de pago en el momento de observación y la suma de capitales constitutivos de las mismas; y finalmente el Teorema Central de la matemática dinámica del seguro de pensiones que establece explicitamente la estructura matemática de las primas de los tres principales sistemas financieros. Se considera unicamente del Teorema Central que ilustra la potencia inherente a los nuevos métodos matemáticos.

Hay que tener muy presente las siguientes denominaciones[13]:

ι ,auténtica tasa anual de interes,

ρ , tasa anual de crecimiento demográfico (igual para todas las poblaciones afectadas por el régimen del seguro),

σ , tasa anual de crecimiento del nivel general de salarios.

Puesto que, mientras dure el estado relativamente estacionario, el crecimiento, por ejemplo de los ingresos por cotizaciones o de los egresos, es causado por el crecimiento de las poblaciones afectadas y por el nivel general de salarios con ajuste inmediato y total de las pensiones; la suma de las correspondientes tasas anuales de crecimiento: $\rho + \sigma$ puede ser considerada como tasa anual de crecimiento o de expansión del estado relativamente estacionario.

Las primas que pertenecen a un régimen de pensiones son designadas, conforme al sistema financiero adoptado:

Π_o^I , Prima de reparto simple cuando el régimen entra en

---

13 Las fórmulas exactas parten de las "respectivas" intensidades de crecimiento, que con muy buena aproximación pueden ser sustituidas por las correspondientes tasas anuales.

un estado relativamente estacionario.

Π_o^{II} , Prima de reparto de capitales constitutivos, en un estado relativamente estacionario.

Π_o^{III} , Prima de cobertura de expectativas (capitalización completa) cuyo valor no está condicionado a la existencia de un estado estacionario.

El cálculo clásico de una prima se efectúa con ayuda de valores básicos actuariales, generalmente tabulados, conocidos como valores de conmutación o simplemente <u>Conmutaciones.</u> Una conmutación se compone por lo que llamamos partes demográficas (por ejemplo el número descontado de activos o el de inválidos, etc.) y por una parte de tipo económico, llamada parte-renta (generalmente el valor descontado de determinado tipo de renta). En la matemática clásica actuarial ambas partes de una conmutación se descuentan con el factor $V=\frac{1}{1+i}$, donde i es la tasa técnica de interés. Al desarrollar la matemática dinámica se observa con sorpresa, que se pueden utilizar las mismas estructuras formales matemáticas que en la matemática actuarial clásica, con la sola diferencia de que la tasa de interés i en el factor de descuento se reemplaza eventualmente por una tasa de crecimiento demográfico ρ o, según el caso, por $i - \sigma$ (cobrando σ como tasa negativa de interés), pudiendo las partes demográficas ser descontadas con base en un factor diferente al de las partes-renta.

Suponiendo que las pensiones son ajustadas de manera inmediata y total al nivel general de salarios, el Teorema Central en un lenguaje aproximado matemático dice lo siguiente:

Si un régimen de pensiones dado se encuentra en un estado relativamente estacionario, entonces las primas Π_o^{I}, Π_o^{II}, y Π_o^{III}, tienen la misma estructura formal matemática que la prima clásica de capitalización completa, distinguiéndose entre sí únicamente por los tipos de factores de descuento utilizados. Concretamente: la prima de reparto depende solamente de la tasa de crecimiento demográfico ρ; la prima de reparto de capitales constitutivos se determina descontando las partes demográficas de las conmutaciones que intervienen en la fórmula de prima con base en la tasa ρ y las partes-renta de las conmutaciones utilizadas, son descontadas en base a la tasa $i-\sigma$.

La esencia del Teorema se expresa simbólicamente así:

$$\Pi_o^{I} = \Pi_o^{(\rho,\rho)} \qquad \Pi_o^{II} = \Pi_o^{(\rho,i-\sigma)} \qquad \Pi_o^{III} = \Pi_o^{(i-\sigma,i-\sigma)}$$

Las fórmulas hacen transparente la clase y el grado de dependencia de cada tipo de primas de la tasa de crecimiento ρ y de la tasa σ ó, respectivamente, de la tasa $i-\sigma$.

Cabe aclarar su alcance mediante un simple ejemplo: para un sistema concreto de pensiones se calculó la prima clásica del sistema de cobertura de expectativas con respecto a varias tasas actuariales de interés i; por de pronto bajo la suposición de un nivel constante de salarios asegurados.

Tasa técnica de interés. (i)	Prima, en unidades del salario.
0.05	0.045
0.04	0.065
0.03	0.086
0.02	0.118
0.01	0.163
0.00	0.224

La tabla permite -además de la información inmediata sobre la visible dependencia de la prima de la tasa i- dos interpretaciones "dinámicas":

(a).- Considerando que la tasa de crecimiento σ del nivel general de salarios, con pleno ajuste de las pensiones, opera conforme al Teorema Central como tasa negativa a descontarse de i, la tabla pone en evidencia el impacto financiero del ajuste (inmediato y total) de las pensiones al querer mantener el sistema financiero de capitalización completa.

Si, por ejemplo, la tasa técnica de interés es i = 0.05 y la tasa de crecimiento del nivel general de salarios es σ = 0.03 entonces la prima de las pensiones "dinamizadas" tendrá que calcularse con la tasa 0.05 - 0.03 = 0.02, alcanzando la prima el nivel de 0.118 del salario en vez del valor 0.045 calculado bajo condiciones estáticas. Nótese que el valor 0.118 depende únicamente de la diferencia $i - \sigma$; de modo que, por ejemplo, a la tasa de interés i = 0.08 y a una tasa σ = 0.085 de crecimiento del nivel general de salarios, corresponde el mismo valor de prima 0.118. En el caso de que se conserve el sistema financiero de cobertura de expectativas, es decir el de capitalización completa.

(b).- Se obtiene una segunda sorprendente interpretación de los valores de la Tabla -igualmente resultante del Teorema Central- al imaginarse reemplazada la tasa de interés i por la tasa σ de crecimiento demográfico y pasando de la primera cobertura de expectativas a la prima de reparto simple. Si por ejemplo, la tasa anual de crecimiento demográfico es σ = 0.03, entonces la prima de reparto simple, una vez alcanzado el estado relativamente estacionario, sera igual a la prima de cobertura de expectativas calculada con la tasa i=0.03, o sea, igual a 0.088 del salario. La prima aumenta sensiblemente cuando decrece la tasa de crecimiento demográfico. Así, en caso de que la tasa σ decrece de 0.03 a 0.01, la prima aumenta de 0.086 a 0.163, es decir casi se duplica, si bien la población es todavía creciente.

De interés particular es el caso límite, en que la tasa de expansión del estado estacionario iguala a la tasa de interés:

$$\rho + \sigma = i, \quad \rho = i - \sigma$$

De la estructura formal idéntica resulta ahora la identidad de los valores de las tres primas:

$$\Pi_0^{I} = \Pi_0^{(\rho,\rho)} = \Pi_0^{II} = \Pi_0^{(\rho,\rho)} = \Pi_0^{III} = \Pi_0^{(\rho,\rho)}.$$

En particular, resulta que el financiamiento del régimen de seguro es el reparto puro, independientemente del sistema financiero original y de las reservas acumuladas. En este caso se desintegra la ecuación de equivalencia, pues las sumas de ambos lados se vuelven infinitas contra la creencia clásica de que todos los sistemas financieros son, en el fondo, equivalentes. El caso especial, preferentemente diferenciado también por los economistas, $\rho = 0$ y $\sigma = i$ llamado por algunos autores la "regla de oro" (olvidándose quizá que el caso de $\rho \neq 0$, deviene más y más importante).

Se ilustra lo anterior con la ayuda de un ejemplo simple de consecuencias un tanto inesperadas. Sea dado un régimen de pensiones uniformes de vejez con la sola edad de entrada de 20 años y edad de jubilación 65 años; el número anual de nuevos entrantes es constante y el efectivo de cotizantes activos después de haber transcurrido 65 - 20 = 45 años, y más tarde el efectivo de pensionados se componen exclusivamente de supervivientes de los nuevos entrantes. Una vez alcanzado el estado relativamente estacionario con la condición adicional de que la tasa de expansión σ (pues ρ = 0) es igual a la tasa de interés i, las primas de los tres sistemas financieros principales -por de pronto se designan por Π^{I}, Π^{II} y Π^{III}- se vuelven idénticas en esa fase final estacionaria. Interesa saber lo que pasa con dichas primas en la fase inicial no estacionaria.

Al efecto se designan con Π_o la prima de cobertura de expectativas calculada bajo la hipótesis $\sigma = i$

$$\Pi_o = \Pi_o^{III}$$

No importa el valor concreto de Π_o, sino solo el hecho de que Π_o sea igual para todas las generaciones nuevas de asegurados, es decir que sea constante desde el inicio. Ahora bien, las primeras pensiones de vejez se pagarán después de 45 años contados a partir del inicio del seguro. En consecuencia $\Pi^{I} = \Pi^{II} = 0$ durante esos primeros 45 años. Seguidamente cada año llega igual número de activos a edad 65, es decir, cada año se considera igual número de pensiones, de modo que la prima Π^{II} se incrementa de "0" a su valor definitivo Π_o (igual a la prima constante del sistema financiero de cobertura de expectativas)[14], mientras $\Pi^{I} = \Pi^{III} = \Pi_o$. En tal modelo, que desemboca en un estado estacionario supuesto <u>ilimitado</u>, no se utilizarán jamás -ni en la fase inicial ni en la fase final estacionaria- las reservas acumuladas con las primas del sistema de reparto de capitales constitutivos, ni las reservas aún más considerables del sistema de cobertura de expectativas. Es decir, los miembros afiliados a este régimen de pensiones, financiado originalmente bajo el sistema de reparto de capitales constitutivos o de cobertura de expectativas, podrán donar las reservas acumuladas -y ellas son considerables- a una fundación, sin poner en peligro el financiamiento del régimen con base en la Prima Π_o.

---

14 Nótese que dentro del sistema de reparto de capitales constitutivos, el estado relativamente estacionario puede realizarse con bastante anticipación, que dentro del sistema de reparto simple.

CAPITULO VI

EL SISTEMA DE PRIMA ESCALONADA PARA EL FINANCIAMINETO DE REGIMENES DE PENSIONES DE SEGURO SOCIAL: PERIODOS MAXIMOS DE EQUILIBRIO.[15]

6.1.- Introducción.

Entre los varios métodos para financiar regímenes de pensiones de seguro social, que varían entre dos extremos: el método de reparto anual y el método de prima media general, ocupa un importante lugar el llamado sistema de "prima escalonada". Este método implica que con respecto a un régimen de seguro dado, cuya duración se supone usualmente ilimitada, se subdivide el tiempo en una serie de períodos de equilibrio.

Se asigna a cada período -que, como regla, cubre varios años- una tasa de prima constante en forma tal que no sólo se garantice el equilibrio financiero entre ingresos y egresos sino que también permita la cumulación o el mantenimiento de un fondo de reserva.

En las etapas iniciales de operación de un régimen de

---

[15] Título original: The Scaled premium system for the financing of Social insurance pension schemes: maximum periods of equilibrium.
Revista Internacional de Actuariado y Estadística de la Seguridad Social, No. 10, 1964. p.207-227.

seguro de pensiones por lo general, los egresos crecen lentamente, de manera que con el sistema de prima escalonada es posible mantener relativamente bajas las tasa de prima aplicables a los primeros períodos de equilibrio y establecer aumentos graduales de prima en períodos sucesivos hasta que se aproxima a un estado estacionario. Esta característica es de particular importancia para los países en desarrollo, ya que el sistema de primas escalonadas crea una carga leve en la economía durante el período inicial de operación relativamente largo, y requiere contribuciones mayores en una etapa posterior cuando se espera que la economía esté más desarrollada. Pero aún en países industriales altamente desarrollados, la aplicación de este sistema financiero puede llevar a una deseable nivelación gradual de los factores económicos.

La elección de primas -particularmente la aplicable a un largo primer periódo de equilibrio- no puede ser arbitraria. Entre otras cosas se debe tener cuidado en satisfacer las siguientes condiciones, especialmente en países en vías de desarrollo:

- La prima no debe subir demasiado bruscamente de un periódo de equilibrio al siguiente.
- Se debe prestar atención a la capacidad de los sectores económicos cubiertos por el régimen para sostener la carga

financiera pertinente.

- En las etapas finales la prima debe tener un valor intermedio entre la prima media general y la prima de reparto puro (en cualquier caso conviene calcular ambas primas sobre la base de suposiciones apropiadas, para fines de comparación).

- La acumulación de reservas debe tener en cuenta hasta que grado el mercado interno de capital es capaz de absorber inversiones seguras que produzcan rendimiento (las oportunidades en este campo pueden ser limitadas) y, por otra parte, si tales inversiones encajan en la política nacional de planeación económica.

No siempre es fácil encontrar una solución apropiada que tome en cuenta todos los factores antes mencionados, ya que frecuentemente tienen efectos contrarios. La aplicación del método de primas escalonadas requiere de revisiones actuariales de tiempo en tiempo para comparar el desarrollo real del régimen del seguro con el esperado y capacitar a las autoridades competentes para corregir las cosas a su debido tiempo.

Sin embargo, también en países en los que un régimen general de pensiones ha estado en operación durante mucho tiempo, en la práctica se ha abandonado el sistema de financiamiento "clásico" basado en la prima media general y, a veces en combinación con reformas fundamentales del régimen, se adopta un sistema financiero más flexible. Esto se debe a varias razones, tales como la dinámica del desarrollo económico y demográfico, que no se puede pronosticar por anticipado para periódos suficientemente largos, las devaluaciones o la pérdida completa de fondos de reserva y en particular, la necesidad de ajustar las pensiones a los aumentos en el costo de la vida y/o en el nivel general de salarios.

El método de prima escalonada fué tratado sistemáticamente por primera vez por A. Zelenka[16], que propone expresamente el requisito de que en ningún momento las reservas acumuladas se apliquen para cubrir egresos, sino a lo más el interés sobre ellas además de las contribuciones. Sólo si se sastifaco este requisito se hace referencia al "sistema de prima escalonada" en su sentido estricto.

La adopción de este requisito evita, en particular, consumir reservas apartadas previamente, lo que hace posible llevar a cabo una política de inversión a largo plazo y contribuye a reducir la diferencia entre la tasa final de prima cuando se alcanza el estado estacionario y la prima media general correspondiente al régimen.

16A. ZELENKA, Quelques remarques sur le régime financier, "I.S.S.A.: Actuarial and Statistical problems of Social Security", Génova-Rome 1958, Vol. III.

Si se aplica el criterio antes mencionado, la prima aumentará a más tardar en el momento que el ingreso de primas más el rendimiento del capital ya no sean suficientes para cubrir los egresos. Si, con respecto a un régimen de seguro dado, en un periódo de equilibrio particular [n,m] se sastiface el criterio anterior con una prima π, pero la aplicación de tal prima para cualquier periódo más allá del tiempo m llevar a una reducción de la reserva acumulada, entonces [n,m] se llama periódo máximo de equilibrio del régimen respecto a π. La duración de tal periódo depende de las características del sistema de beneficios, de los fondos de reserva, si los hay, acumulados al principio del periódo y del nivel de la prima π. Sin embargo, cuando no hay riesgo de equivocación simplemente se hablará de un "periódo máximo de equilibrio".

El problema básico es el de determinar la prima π que corresponde a un periódo máximo de equilibrio dado o mas precisamente, el determinar con respecto a un régimen de seguro y a un periódo de tiempo [n,m] dados[17], una prima π tal que [n,m] resulte un periódo máximo de equilibrio con respecto a π. En el trabajo de A. Zelenka ya se puede encontrar un método aproximado para determinar la prima

[17] La reserva V_n en el tiempo t sea conocida.

correspondiente a un periódo máximo de equilibrio, basado primero en la elección de un periodo de referencia mucho mayor (cerca del doble) que el periódo de equilibrio establecido tentativamente, y, en segundo lugar en el cálculo de la prima de reparto para dicho periódo de referencia. Entonces se aplica a esta prima de reparto hasta el momento en que se sastiface el requisito de un fondo de reserva no decreciente; y ese momento señala donde terminaria en realidad el periódo máximo de equilibrio.

En seguida se presenta una fórmula simple para el efecto junto con una discusión de algunas cuestiones relacionadas.

La fórmula requiere sólo el conocimiento de los valores anuales esperados de los salarios asegurados (o de los números esperados de personas aseguradas) y de los egresos; permite, sin mayores cálculos, presentar varias alternativas, comparar sus resultados y repercusiones, y seleccionar la más apropiada. Así, la fórmula suministra al actuario una herramienta para manejar el sistema de prima escalonada.

6.2.- Fórmula de la prima.

Sean:

$V(t)=V_t$, Reserva en el momento t (al principio del año t).

$A(t)=A_t$, Función de ingresos (excluyendo el rendimiento de interés), donde:

$$A_t=\int_t^{t+1} A(\tau)d\tau$$, Ingreso total (sin intereses ganados) en $[t,t+1]$

$B(t)=B_t$, Función de egresos, donde:

$$B_t=\int_t^{t+1} B(\tau)d\tau$$, Total de egresos en $[t,t+1]$.

$S(t)=S_t$, Función-salarios, donde:

$$S_t=\int_t^{t+1} S(\tau)d\tau$$, total de salarios en $[t,t+1]$.

$\Pi_{[n,m]}$, Tasa de contribución durante el período máximo de equilibrio $[n,m]$. A menos que sea necesario, se denota simplemente Π.

De acuerdo a lo anterior se obtiene lo siguiente:

$A(t) = \Pi\, S(t)$

i, Tasa de interés anual.

δ, Intensidad de interés $= \ln(1+i) = \ln r$ donde:

$r = (1+i)$, Factor anual de capitalización.

$\upsilon = r^{-1}$, Factor anual de descuento.

Si $[n,m]$ es un periódo máximo de equilibrio dado y $\Pi_{[n,m]} = \Pi$ la prima correspondiente, entonces es válida en $[n,m]$ la siguiente fórmula de reserva para $(n \le t \le m)$:

$$V_t = V_n\, r^{t-n} + \int_n^t \Pi\, S(\tau) r^{t-\tau}\, d\tau - \int_n^t B(\tau) r^{t-\tau}\, d\tau \qquad (6.2.1)$$

$$= r^t\, V_n\, \upsilon^n + r^t \int_n^t \Pi\, S(\tau)\upsilon^\tau\, d\tau - r^t \int_n^t B(\tau)\upsilon^\tau\, d\tau$$

Si $[n,m]$ es un periódo máximo de equilibrio, por definición $V(t)$ debe tener un valor máximo cuando $t = m$. es decir $V'(t) = 0$ para $t=m$. Así, diferenciando la última fórmula y tomando su valor para $t=m$ igual a cero, se obtiene la siguiente fórmula para la prima $\Pi_{[n,m]}$:

$$\Pi_{[n,m]} = \frac{B(m)\upsilon^m - \delta V_n \upsilon^m + \delta \int_n^m B(\tau)\upsilon^\tau\, d\tau}{S(m)\upsilon^m + \delta \int_n^m S(\tau)\upsilon^\tau\, d\tau} \qquad (6.2.2)$$

donde todos los valores se descuentan al tiempo $t=0$. La fórmula (6.2.2) implica la suposición -que difícilmente envuelve alguna restricción- de que la función $\dot{V}(t)$ no tiene ni un máximo ni un mínimo en el intervalo abierto (n,m).

A partir de la fórmula (6.2.1) o más directamente aún de la conocida ecuación diferencial (lineal de primer órden):

$$V'(t) = \delta\, V(t) - [B(t) - \underline{A}(t)]$$

se puede expresar la reserva en el punto terminal *m* (donde $V'(m)=0$) simplemente por la ecuación:

$$V_m = \frac{1}{\delta}\,[B(m) - \Pi\, S(m)] \qquad (6.2.3)$$

La fórmula (6.2.2) de la prima permite calcular Π si la reserva en el tiempo inicial n es conocida. También se le puede concebir como una fórmula de recurrencia que hace posible calcular sucesivamente las primas $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \ldots$ aplicables a una serie dada de periódos máximos de equilibrio: $[0,n_1], [n_1,n_2], [n_2,n_3], \ldots$ En efecto, se determina primero Π_1 suponiendo que $V(0)$ es igual a cero o a alguna otra cantidad. Una vez obtenido el valor de Π_1 se puede calcular inmediatamente la reserva $V(n_1)$ en el punto terminal n_1 según (6.2.3). El conocimiento de $V(n_1)$ permite el cálculo de Π_2, y así sucesivamente. Si después del tiempo n'' el esquema entra en un estado estacionario, la prima Π calculada para el último período de equilibrio $[n',n'']$ es valida también durante toda la duración del estado estacionario.

Las formulas anteriores se aplican a funciones S(t) y B(t) continuas. Para fines practicos, es necesario transformarlas usando el caso discreto aplicando las siguientes aproximaciones basadas en valores anuales suponiendo linealidad:

$$S(t) \simeq \frac{1}{2}\,(S_{t-1} + S_t) = S_{t-1/2}$$

$$B(t) \simeq \frac{1}{2}\,(B_{t-1} + B_t) = B_{t-1/2}$$

$$\int_t^{t+1} B(\tau)\upsilon^{\tau}\,d\tau \simeq \upsilon^{t+1/2}\int_t^{t+1} B(\tau)\,d\tau = \upsilon^{t+1/2}\,B_t$$

$$\int_t^{t+1} S(\tau)\upsilon^{\tau}\,d\tau \simeq \upsilon^{t+1/2}\int_t^{t+1} S(\tau)\,d\tau = \upsilon^{t+1/2}\,S_t$$

De lo anterior se sigue que:

$$\Pi_{(n,m)} = \frac{B_{m-1/2}\,\upsilon^{m-1/2} - \delta r^{1/2}\,V_n\upsilon^{m} + \delta\sum_{n}^{m-1} B_t\upsilon^{t}}{S_{m-1/2}\,\upsilon^{m-1/2} + \delta\sum_{n}^{m-1} S_t\upsilon^{t}} \qquad (6.2.4)$$

La reserva V_m en el punto final m del período de equilibrio, por analogía, está dada por la siguiente fórmula de aproximación:

$$V_m \simeq \frac{1}{\delta} [B_{m-1/2} - \Pi S_{m-1/2}] \qquad (6.2.5)$$

En la práctica podrá ser útil, como una prueba, aplicar también la fórmula general de la reserva[18]:

$$V_m = V_n r^{m-n} + r^{m-1/2} \left(\sum_{n}^{m-1} \Pi S_t v^t - \sum_{n}^{m-1} B_t v^t \right) \qquad (6.2.6)$$

Se debe notar que sólo en un régimen de duración ilimitada ($m \longrightarrow \infty$) se puede concebir la fórmula (6.2.4) como una generalización de la fórmula de la prima media general $\Pi_{(0,\infty)}$. Sólo en tal régimen tiene sentido el mecanismo de prima escalonada desarrollada aquí, ya que el metodo se basa en el principio de que la reserva nunca decrecerá, mientras que en un régimen de duración limitada ("caja cerrada") el valor final de la reserva debe ser cero. Cuando se trata de un régimen de seguro de caja cerrada, se debe corregir apropiadamente el método anterior para tomar en cuenta la disminución de reservas en las etapas finales de operación.

18Ver la fórmula (6.2.1), escrita en forma discreta con valores anuales.

6.3.- Estado relativamente estacionario.

Un régimen de seguro está en un estado financiero relativamente estacionario en el periodo de tiempo $[t_1, t_2]$ si las tasas de crecimiento de las funciones de reserva, ingresos y egresos, son iguales durante el periodo[19].

Sea $\rho(t)$ la intensidad de crecimiento. Entonces

$$\rho(t) = \frac{V'(t)}{V(t)} = \frac{B'(t)}{B(t)} = \frac{A'(t)}{A(t)} = \frac{S'(t)}{S(t)}$$

(Se incluye la relación $\frac{S'(t)}{S(t)}$ bajo la condición de que la prima no cambie en el periodo).

Sea δ, como antes, la intensidad de interés. Se sabe que la diferencia $\delta-\rho$ en $[t_1, t_2]$ es constante en el estado financiero relativamente estacionario; si δ es constante en el periodo, entonces lo es también ρ. Así, durante un estado financiero relativamente estacionario, el crecimiento de las funciones antes mencionadas es geométrico.

Un estado financiero relativamente estacionario no implica necesariamente la existencia de un estado demográfico relativamente estacionario. Por ejemplo el ajuste sistemático de las pensiones al índice de los salarios o

---

19Ver Capítulo IV.
Ver P. Thullen, Anotaciones sobre el estado financiero relativamente estacionario de un sistema de seguro. Actas de la Segunda Conferencia Internacional de Actuarios y Estadígrafos de la Seguridad Social. (Roma 1959).

al del costo de la vida -siempre que el índice de referencia crezca constantemente durante un largo período de tiempo- puede causar un estado financiero relativamente estacionario, aún cuando el número de personas aseguradas permanezca sin cambio.

Por supuesto, un regimen en un estado financiero relativamente estacionario es ante todo un modelo; no obstante tal modelo puede suministrar informaciones valiosas sobre las posibles tendencias financieras del régimen bajo varias hipótesis con respecto al valor de ρ. (También se señala que no es infinito.). Obviamente el estado <u>absolutamente</u> estacionario -que en esencia también es sólo un modelo teórico- está incluido como caso especial en la noción de un estado <u>relativamente</u> estacionario.

Surge la pregunta: En qué condiciones se aplica el sistema de prima escalonada a un régimen de seguro que tiende hacia un estado financiero relativamente estacionario o bien cuando lo ha alcanzado ya ($\rho \neq \sigma$). Se debe enfatizar que mientras en un estado financiero absolutamente estacionario ($\rho = \sigma$) se dispone de todo el rendimiento de interés correspondiente a la intensidad δ para hacer frente a los egresos, en el caso de un estado financiero relativamente estacionario con $\sigma < \rho < \delta$ se necesita transferir parte de los intereses a la reserva que crece con la intensidad ρ, y sólo parte de los intereses (los correpondientes a $\delta-\rho$) permanecen disponibles para cubrir los egresos. En el caso límite en que $\rho=\delta$ (y aún mas si $\rho>\delta$) durante el periódo $[t_1, t_2]$ del estado financiero relativamente estacionario, la reserva deja completamente de cumplir la función de financiar egresos, es decir, la prima requerida se convierte en una prima de reparto[20].

En este punto es preciso regresar al concepto de periódo máximo de equilibrio $[n,m]$. ¿Es aún apropiado aplicar la condición $V'(m)=0$, visto que se sabe que durante una situación financiera relativamente estacionaria $V'(t)=\rho_o V(t)$, ($\rho_o>\sigma$)?

La respuesta puede ser aplicar en este caso, una condición diferente, a saber la de que la intensidad de crecimiento de la función reserva nunca sea menor que ρ_o y que en el punto terminal m de dicho periódo, tal intensidad sea exactamente ρ_o, es decir; $V(m)=\rho_o V(m)$, (cuando $\rho_o=0$, se obtiene nuevamente la condición original).

La nueva condición lleva a una ecuación para $\Pi_{(n,m)}$ que difiere de (6.2.4), en que se reemplaza δ por $\delta-\rho_o$. Para

---

20Ver A. Zelenka, Fonctions biométriques et économiques interchangeables dans l'équation générale de l'équilibre financier. Actas de la Segunda Conferencia Internacional de Actuarios y Estadígrafos de la Seguridad Social (Roma 1950).
Ver también Peter Thullen, Op. cit.

la aplicación práctica y escrita en forma discrela usando valores anuales, resulta la siguiente ecuación:

$$\Pi_{[n,m]} = \frac{B_{m-1/2}\,v^{m-1/2} - (\delta-\rho_0)\,r^{1/2}\,V_n v^m + (\delta-\rho_0)\sum_{n}^{m-1} B_t v^t}{S_{m-1/2}\,v^{m-1/2} + (\delta-\rho_0)\sum_{n}^{m-1} S_t v^t} \qquad (6.3.1)$$

Para la reserva V_m se obtiene una ecuacion análoga a (6.2.5) con $\delta \neq \rho_0$:

$$V_m = \frac{1}{\delta-\rho_0}\left[B_{m-1/2} - \Pi\, S_{m-1/2}\right] \qquad (6.3.2)$$

BIBLIOGRAFIA

Andrade, Juán Antonio, tesis profesional de actuario que presentó en 1964, titulada "La técnica actuarial aplicada en el financiamiento de pensiones de los seguros sociales".

Ante proyecto de la Ley del Seguro Social, Secretaría del Trabajo y Previsión Social. México D.F. 1942.(La dirección de los trabajos actuariales estuvo a cargo del Prof. Emilie Shoenbaum).

Bowers, Gerber, Hichman, Jones, Nesbitt. "Actuarial Mathematics", published by The Society of Actuaries 1986.

C.W. Jordan, "Life contingencies", Society of actuaries' texbook, 1975.

Domínguez Fenelón Leoncio, "Método para calcular las proyecciones demográficas y financieras de los seguros de invalidez, vejez, cesantía en edad avanzada y muerte". Publicación del Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS). México. 1990.

Lucien Féraud. "Actuarial technique and financial organisation of social insurance". Genéva, 1940.

Revista Internacional de Actuariado y Estadística de la Seguridad Social, número 10. Asociación Internacional de la Seguridad Social, (AISS) 1964.

Seguridad Social, año XXXI, época V, Nums. 135-136, mayo-agosto 1982, México, D.F.(Publicación bimestral del Comite Permanente Interamericano de Seguridad Social) Organo de difusión del Centro Interamericano de Estudios de Seguridad Social (CIESS).

Thullen Peter, "Techniques actuarielles de la sécurité sociale", deuxième impression 1974, Bureau International du Travail (BIT) Genéve.

Thullen Peter, "Die Mathematik der sozialen Rentenversicherung unter dynamischen Bedingungen (Einführung mit Anwendungen in der Praxis)", 1982, VERLAG VERSICHERUNGSWIRTSCHAFT E.V, KARLSRUHE (HEFT 13), "Schriftenreihe Angewandte Versicherongsmathematik".