UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"EL PRONOSTICO DE TORMENTAS TROPICALES"

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE :

MAESTRO EN CIENCIAS (GEOFISICA)

PRESENTA: LUIS FERNANDO GOMEZ ALPUCHE.

AÑO DE 1990.

CONTENIDO

INTRODUCCION.

El modelo baroclínico de dos niveles ha sido aplicado por varios años en el Centro de Ciencias de la Atmósfera de la UNAM, empleando una malla burda de 19 x 22 puntos, que cubre el área correspondiente a la IV Región Meteorológica, la distancia entre puntos es de 462.842 Km; sin embargo, se ha observado que los sistemas meteorológicos de dimen - siones menores a dos tamaños de malla, no entran dentro de la dinámica de la solución, por ser su longitud de onda mucho menor que la de los movimientos sinópticos que se detectan en la malla mencionada.

En nuestro país continuamente se observan desplazamientos de bajas segregadas y huracanes que afectan nuestros litorales, fenómenos que requieren de una malla más fina para poder realizar el pronóstico numé- rico de estas perturbaciones.

El objetivo de esta tesis fue probar que mejoras se tienen con una malla fina en el sistema de ecuaciones de pronostico del modelo baroclí- nico de dos niveles, y en particular, si podrian pronósticar el movimi- ento de fenómenos tales como los huracanes. La malla fina usada es de 69 x 77 puntos, con una distancia entre sus puntos de 115.710 Km.

Se experimentó con los datos que corresponden a los días de septiem- bre de 1988, que tuvo su aparición el huracán Gilberto y que tanta ex- pectación causo por los daños que provoco en la peninsula de Yucatán y en los estados de Tamaulipas y Nuevo León.

Es realmente alentador el resultado obtenido con la malla fina inter - polada en el modelo baroclínico para los niveles de 250 y 700 mb. Siendo bastante congruente con el comportamiento de la atmósfera y sobre todo su confiable pronóstico del movimiento del huracán Gilberto.

El contenido de la tesis es el siguiente:

En el capítulo I, se establecen las ecuaciones de movimiento del viento en los diversos sistemas de referencia usados y sus aproximaciones utilizando el análisis de escala, así como la ecuación de vorticidad en coordenadas isobáricas, que es básica en el modelo.

En el capítulo II, se obtiene la ecuación de continuidad y su relación con el movimiento vertical.

En el capítulo III, se establece otra ecuación básica en el modelo baroclínico, la de energía termodinámica.

En el capítulo IV, se analiza el problema del filtrado meteorológico y se obtienen las ecuaciones filtradas de pronóstico. Se describe el modelo el modelo baroclínico de dos niveles, obteniendo su solución numérica.

Finalmente, en el capítulo V se expresan los resultados y conclusiones a que dio lugar esta tesis.

Como parte de ésta introducción, agradezco a los investigadores, técnicos y personal de apoyo del Centro de Ciencias de la Atmósfera el interes por la realización de ésta tesis. En particular, a su Director Dr. Julian Adem por su permiso para hacer uso de los recursos que el Centro presta a los tesistas; al M. en C. Luis Le Moyne y al Sr. Rafael Patiño por su asesoría en cómputo; al M. en C. Javier Villicaña que mostro tanto interes y entusiasmo. Y sobre todo al M. en C. Enrique J. Buendía Carrera para el que tengo una profunda admiración por su dirección en ésta tesis. También, a quien me ha apoyado moralmente, a la Maestra Consuelo Gómez de Medina.

CAPITULO PRIMERO.

LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO EN LA ATMOSFERA EN EL SISTEMA ISOBARICO (X,Y,P,t).

1.1 CARACTERES TIPICOS DE LOS VIENTOS. Para poder pronosticar lo que va ocurrir en la atmósfera es necesario conocer algunas características de movimiento del aire que forma el viento, que es el agente que modifica las condiciones del tiempo atmosférico. Durante siglos el hombre ha observado que los vientos, dependiendo de donde provengan y de su intensidad,son indicadores de las condiciones que en un cierto lugar van a prevalecer ciertos días o épocas. Así, para establecer las leyes que gobiernan los vientos inicialmente describiremos los caracteres típicos de los vientos.

En primer lugar, en el hemisferio Norte el viento sopla (aproximadamente) a lo largo de las isobaras, teniendo a su izquierda zonas de baja presión y a su derecha de alta presión; en el hemisferio Sur ocurre al contrario. Este comportamiento se debe a la rotación de la Tierra.

En segundo lugar, el viento tiende a fluir hacia el lado que es más baja la presión, no siguiendo exactamente a las isobaras. Sin embargo, conforme aumenta la altura sobre la superficie terrestre, ya no hay desviación, que es a causa del rozamiento con la superficie terrestre, y éste efecto ya no se nota entre los 600 m y 900 m.

En tercer lugar, el viento es más fuerte donde las isobaras están muy agrupadas, y débil donde están muy apartadas unas de otras.Prescindiendo de la desviación hacia las presiones menores, se tiene la impresión de que el viento fluye en canales isobáricos, de tal manera, que su velocidad está en proporción inversa con la anchura del canal.

En cuarto lugar, la relación entre la velocidad del viento y la distantancia entre isobara e isobara es mucho más firme en las latitudes medias y altas, mientras que se debilita cuando nos aproximamos al ecuador. Entre 10° N y 10° S de latitud encontramos dificultad para relacionar los vientos con la distribución de presiones.

En quinto lugar, si pudieramos seguir el movimiento de una burbuja de aire y medir las variaciones que experimenta su velocidad (es decir, medir su aceleración) encontraríamos que estas aceleraciones son muy pequeñas. Considerando corrientes de viento a gran escala y despreciando las fluctuaciones de período corto, rachas y calmas, encontraríamos aceleraciones del orden de 0.0002 m/s^2 . En los grandes sistemas de viento, el aire comienza a moverse con lentitud, pero cuando ha adquirido cierta velocidad, la mantiene durante largo tiempo.

En sexto lugar, si pudieramos medir la componente vertical del movimiento del aire, encontraríamos que es grande en tormentas, tornados, etc., así como en los pequeños remolinos que llamamos turbulencia. Sin embargo, a gran escala el movimiento es predominantemente horizontal.

1.2 SISTEMAS DE REFERENCIA. MOVIMIENTO RELATIVO Y ABSOLUTO.

El punto de partida de toda discusión de la relación entre fuerzas y movimiento es la segunda ley de Newton, la cual establece que la variación por unidad de tiempo de la Cantidad de Movimiento es igual a la suma de las fuerzas que actúan sobre una partícula. La segunda ley de Newton sólo es válida en un sistema de referencia inercial o no acelerado.

Cuando el movimiento es observado en un sistema de referencia el cual está acelerado, la ecuación de movimiento debe ser modificada para que siga siendo válida la segunda ley de Newton.

Un sistema fijo con respecto a las estrellas es muy cercano a un sistema inercial para un observador confinado en la Tierra. Si se sitúan en el plano ecuatorial los ejes X y Y, de manera que, el eje de rotación de la Tierra sea el eje Z, además que el eje X pase por el meridiano de Greenwich y el eje Y por el meridiano de 90° Este. Entonces tendremos dicho sistema de referencia. En la figura 1.1 se muestra a una partícula que se mueve sobre la superficie terrestre, donde el punto P representa la posición inicial de la partícula, el punto P" la posición final un tiempo dt posterior. Durante ese tiempo dt el punto P deberá haber rotado al punto P', ya que la Tierra gira con una velocidad angular $\vec{\Omega}$.

Así, la velocidad absoluta $\vec{V}_a$ de una partícula respecto al sistema fijo debe ser la suma de la velocidad relativa $\vec{V}$, medida por un observador fijo situado en la superficie terrestre, más la velocidad $\vec{V}_e$ del observador, debido a la rotación de la Tierra

$$\vec{V}_a = \vec{V} + \vec{V}_e \quad (1.1) \qquad \frac{d_a \vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (1.2)$$

la cual puede ser escrita en términos de la velocidad angular y el vector de posición r aplicando la relación (1,2)

$$\frac{d_a \vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \qquad (1.2)$$

de donde $$\vec{V}_a = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (1.3)$$

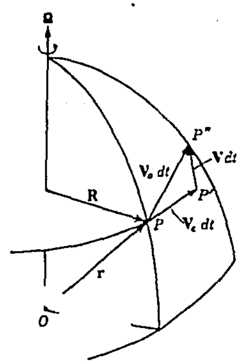


Fig. 1.1 Velocidad Absoluta y Relativa.

La relación (1.2) no sólo es válida para el vector $\vec{r}$, sino también para cualquier otro, como en particular el vector velocidad absoluta

$$\frac{d\vec{V}_a}{dt} = \frac{d\vec{V}_a}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{V}_a \qquad (1.4)$$

Ahora sustituyendo (1.3) en (1.4) tenemos

$$\frac{d_a\vec{V}_a}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{V} + \vec{\Omega}\times\vec{r}\right) + \vec{\Omega}\times\left(\vec{V} + \vec{\Omega}\times\vec{r}\right)$$

$$\frac{d_a\vec{V}_a}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} + 2\vec{\Omega}\times\vec{V} + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}) \qquad (1.5)$$

Donde el término $\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})$ es la aceleración centrípeta en el punto P debido solamente a la rotación de la Tierra, también puede ser en términos del radio vector $\vec{R}$ al punto P, así

$$\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}) = \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{R}) = -\Omega^2\vec{R}$$

La aceleración centrípeta apunta hacia el eje de rotación terrestre y la ecuación (1.5) nos queda

$$\frac{d_a\vec{V}_a}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} + 2\vec{\Omega}\times\vec{V} - \Omega^2\vec{R} \qquad (1.6)$$

La ecuación (1.6) expresa que la aceleración absoluta es la suma de la relativa, $\frac{d\vec{V}}{dt}$, más la aceleración llamada de Coriolis $2\vec{\Omega}\times\vec{V}$ y la aceleración centrípeta $(-\Omega^2\vec{R})$.

Considerando que las fuerzas importantes en los movimientos atmosféricos son : (I) La gravitación newtoniana G

(II) La fuerza debido al gradiente de presión B

(III) Y la fuerza de fricción F

Entonces, en términos de éstas fuerzas por unidad de masa, la expresión de la segunda ley de Newton aplicada a un sistema fijo o absoluto será

$$\frac{d_a V_a}{dt} = B + G + F \qquad (1.7)$$

y remplazando en su equivalente (1.6) tenemos

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + 2\vec{\Omega}\times\vec{V} - \Omega^2\vec{R} = \vec{B} + \vec{G} + \vec{F}$$

de donde, la aceleración relativa, $\frac{dV}{dt}$, es

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{B} - 2\vec{\Omega}\times\vec{V} + \vec{G} + \Omega^2\vec{R} + \vec{F} \qquad (1.8)$$

la ecuación (1.8) expresa la ley fundamental del movimiento con respecto a un sistema relativo no inercial, donde debemos tomar en cuenta la aceleración de Coriolis $-2\vec{\Omega}\times\vec{V}$ y como consecuencia de estar en un sistema de referencia en rotación $+\Omega^2\vec{R}$: es ahora una aceleración "centrífuga". Los anteriores términos y su relación con las fuerzas reales B , G y F son descritos a continuación.

1.3 LA GRAVITACION NEWTONIANA Y LA GRAVEDAD EFECTIVA.

Una partícula en reposo sobre la superficie de la Tierra, al ser observada desde un sistema de referencia rotando con la Tierra, está sujeta en primer lugar a la fuerza "centrífuga", $\Omega^2\vec{R}$, donde Ω es la velocidad angular de la Tierra y $\vec{R}$ la distancia al eje de rotación desde la partícula.

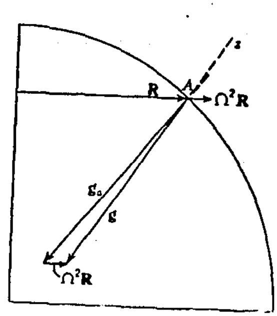


Fig. 2. Relación entre la gravedad efectiva y la gravitación newtoniana.

En segundo lugar, la fuerza gravitacional $\vec{G}_a$ sobre la partícula es balanceada por la fuerza centrífuga. Siendo la combinación de ambas la fuerza de gravedad efectiva $\vec{G}$, que se define como

$$\vec{g} \equiv \vec{g}_a + \Omega^2 \vec{R} \qquad (1.9)$$

La gravedad efectiva no está dirigida hacia el centro de la Tierra, sino que es normal al nivel de superficie, como se muestra en la fig. 1.2, excepto en los polos y el ecuador. Entonces, la ecuación de movimiento (1.8) será

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{B} - 2\vec{\Omega}\times\vec{V} + \vec{g} + \vec{F} \qquad (1.10)$$

1.4 LA FUERZA DEL GRADIENTE DE PRESION.

Para conocer la expresión de la fuerza del gradiente de presión B debido a las variaciones de la presión atmósferica, consideremos una pequeña parcela de aire de masa unitaria, la cual tiene un volumen $\delta x\, \delta y\, \delta z$ y densidad ρ, como se muestra en la figura 1.3.

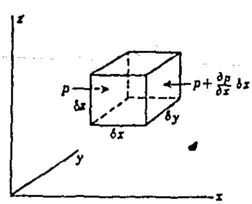


Fig. 1.3 Componente horizontal X de la fuerza de presión.

Si P es la presión (fuerza normal por unidad de área) sobre la cara izquierda $\delta_y\,\delta_z$, la presión en la cara derecha será:

$$P + \delta P = P + \frac{\partial P}{\partial x}\delta x$$

entonces, la fuerza neta horizontal de la presión sobre el elemento de volumen en la dirección horizontal X positiva, es

$$P\delta_y\delta_z - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x}\delta_x\right)\delta_y\delta_z = -\frac{\partial P}{\partial x}\delta x\,\delta y\,\delta z .$$

Dado que la masa es la densidad por unidad de volumen $\rho\,(\delta x\,\delta y\,\delta z)$; entonces, la fuerza por unidad de masa en la dirección X es:

$$\frac{F_x}{m} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)$$

de manera semejante, tendremos para las direcciones de Y de Z .

$$\frac{F_y}{m} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} \quad , \quad \frac{F_z}{m} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} .$$

En forma vectorial, la fuerza del gradiente de presión B es

$$B = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\hat{k}\right) = -\frac{1}{\rho}\nabla P \qquad (1.11)$$

la cual es perpendicular a superficies de presión constante y está dirigida de la alta a la baja presión. Así, la ecuación de movimiento (1.10) será:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P - 2\vec{\Omega}\times\vec{V} + \vec{g} + \vec{F} \qquad (1.12)$$

que también puede expresarse en términos del "volumen especifico" α:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\alpha\nabla p - 2\vec{\Omega}\times\vec{V} + \vec{g} + \vec{F} \qquad (1.13)$$

Las ecuaciones anteriores (1.12 y 1.13) son conocidas como la ecuación del movimiento relativo, que pueden considerarse sin fricción: $F = 0$, que es una buena aproximación a elevaciones mayores de 914 m (3000 ft) de la superficie terrestre; abajo de ésta elevación debe ser tomada en cuenta la fricción

El término de la fuerza de Coriolis $-2\vec{\Omega}\times\vec{V}$ es considerada como una fuerza externa, por definición es un producto cruz (vectorial) y es perpendicular al vector velocidad, su efecto es en la dirección del movimiento, en otras palabras, la fuerza de Coriolis no realiza trabajo sobre una partícula de aire.

1.5 EL SISTEMA CARTESIANO LOCAL O TANGENTE A LA SUPERFICIE.

La ecuación de movimiento (1.12 - 1.13) no es aplicable directamente a los movimientos atmosféricos, debido a que su origen de referencia está en el centro de la Tierra, y como los datos son tomados en la superficie, es necesario transformar la ecuación anterior a un sistema de referencia cuyo origen esté sobre la superficie de la Tierra, con el eje X positivo hacia el Este (tangente a los paralelos), el eje Y con sentido positivo hacia el Norte (tangente a los meridianos) y el eje Z hacia el zenit local como se muestra en la figura 1.4.

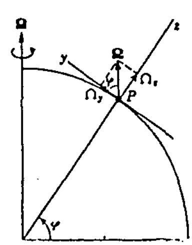


Fig. 1.4 Sistema Cartesiano Local

Si consideramos un punto P sobre la superficie terrestre, un sistema de referencia en él, estará estacionario con respecto al que está en rotación (el terrestre), entonces la ecuación de movimiento relativo (1.12) sigue siendo aplicable y pueden obtenerse directamente sus componentes en las direcciones X,Y,Z. Pero, primero debemos determinar las componentes de la fuerza de Coriolis, como se muestra en la figura 1.4, donde φ es la latitud del punto P

$$\Omega_x = 0 \qquad \Omega_y = \Omega \cos\varphi \qquad \Omega_z = \Omega \operatorname{sen}\varphi$$

Aplicando la expresión del determinante para un producto vectorial

$$A \times B = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

entonces, para la fuerza de Coriolis,

$$C = -2\Omega \times V = -2\Omega \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ u & v & w \end{vmatrix} \qquad (1.14)$$

donde las componentes de la velocidad $\vec{V}$ son U, V, W; siendo las componentes de la fuerza de Coriolis

$$C_x = 2\Omega \operatorname{sen}\varphi - 2W\Omega\cos\varphi$$

$$C_y = -2U\Omega \operatorname{sen}\varphi \qquad (1.15)$$

$$C_z = 2U\Omega \cos\varphi$$

por lo tanto, la ecuación (1.12) en su forma escalar con F = 0 es :

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + 2v\Omega \operatorname{sen}\varphi - 2W\Omega \cos\varphi$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} - 2u \operatorname{sen}\varphi \qquad (1.16)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} - g + 2u\Omega \cos\varphi$$

Una buena aproximación para un flujo horizontal dentro de un rango hasta de 60 Km puede obtenerse omitiendo los términos W y dW/dt de la velocidad vertical; además, el término $2u\Omega\cos\varphi$ es generalmente despreciable en comparación con g en la última ecuación; así, las ecuaciones (1.16) se reducen a

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + fv$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} - fu \qquad (1.17)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} - g$$

donde $f = 2\Omega \operatorname{sen}\varphi$ es el llamado parámetro de Coriolis, que está determinado por la latitud del sistema coordenado. Físicamente, esta cantidad puede interpretarse como el doble de la velocidad angular en el plano tangente alrededor de la vertical local debido a la rotación de la Tierra.

1.6 EL SISTEMA DE COORDENADAS ESFERICAS.

El anterior sistema cartesiano local a veces es suficiente para muchos propositos, pero, cuando la escala es grande el sistema local provoca distorsiones, por lo que es necesario utilizar un sistema más natural para la Tierra; este sistema de referencia es el esférico, que tiene tres coordenadas que son: el ángulo λ conocido como la longitud, siendo positivo hacia el Este a partir del meridiano de Greenwich, donde λ es cero; el ángulo φ conocido como la latitud, medido desde el ecuador siendo $\frac{\pi}{2}$ en el Polo Norte y $-\frac{\pi}{2}$ en el Polo Sur; la distancia radial ,desde el centro de la esfera e igual a $r = a + z$, donde a es el radio de la Tierra y z la altitud sobre el nivel del mar, que es muy pequeña comparada con el radio terrestre, por lo que puede no ser considerado, pudiendo remplazar r por a , cuando r no sea diferenciado.

Los vectores unitarios $(\hat{i},\hat{j},\hat{k})$ están dirigidos: hacia el Este el $\hat{i}$ a lo largo del círculo de latitud ; el $\hat{j}$ hacia el Norte, a lo largo del meridiano; y el $\hat{k}$ hacia el zenit, a lo largo de la vertical local, como se muestra en la figura 1.5 En el nuevo sistema, una distancia X es curvilínea hacia el Este, siendo

$$dx = r\cos\varphi\, d\lambda \approx a\cos\varphi\, d\lambda$$

Como la distancia Y es también curvilínea hacia el Norte,

$$dy = r\,d\varphi \approx a\,d\varphi$$

En la vertical, en la dirección de Z, tenemos $dZ = dr$

Lo anterior se muestra en la figura 1.6

Siendo ahora el vector velocidad:

$$V = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$$

donde los vectores unitarios $(\hat{i},\hat{j},\hat{k})$ ya no son constantes como en el sistema local, sino que ellos varían con el tiempo en este sistema de coordenadas esférico. Por lo tanto, la expresión para la aceleración

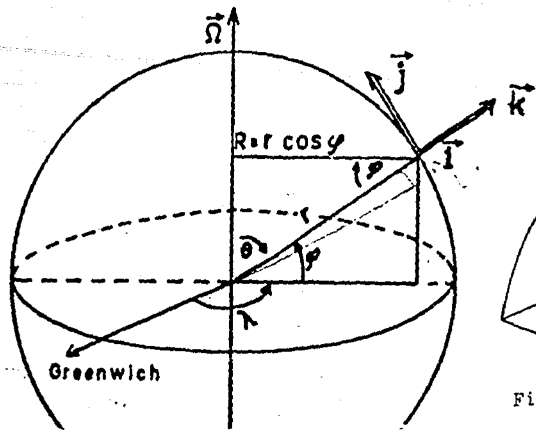


Fig. 1.5 Sistema de Coordenadas Esférico.

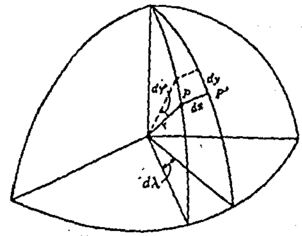


Fig. 1.6 Distancias Curvilíneas

será dependiente de la variación de los vectores unitarios

$$\frac{dV}{dt} = \frac{du}{dt}\hat{i} + \frac{dv}{dt}\hat{j} + \frac{dw}{dt}\hat{k} + \underbrace{u\frac{d\hat{i}}{dt}}_{(A)} + \underbrace{v\frac{d\hat{j}}{dt}}_{(B)} + \underbrace{w\frac{d\hat{k}}{dt}}_{(C)} \qquad (1.18)$$

Pero, la dificultad está ahora en evaluar:

$$u\frac{d\hat{i}}{dt}, \qquad v\frac{d\hat{j}}{dt}, \qquad w\frac{d\hat{k}}{dt}$$

entonces primero evaluamos di/dt de (A), utilizando la expresión de la derivada total. tenemos:

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \frac{\partial\hat{i}}{\partial x}u + \frac{\partial\hat{i}}{\partial y}v + \frac{\partial\hat{i}}{\partial z}w + \frac{\partial\hat{i}}{\partial t}$$

Con ayuda de la figura 1.7 obtenemos la variación del vector unitario $\hat{i}$ con la longitud λ, de donde:

$$\frac{\partial\hat{i}}{\partial y} = \frac{\partial\hat{i}}{\partial z} = \frac{\partial\hat{i}}{\partial t} = 0$$

de esta manera el término (A) se reduce a

$$u\frac{d\hat{i}}{dt} = \left(\frac{\partial \hat{i}}{\partial x}u\right)u$$

ahora bién,

$$\left|\frac{\partial \hat{i}}{\partial x}\right| = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta \hat{i}|}{|\Delta x|} = \frac{\Delta \lambda}{R\,\Delta \lambda} = \frac{1}{R}$$

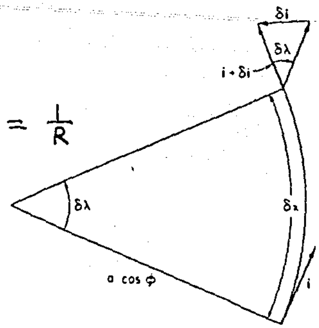


Fig.1.7 Dependencia del vector $\hat{i}$ con la longitud.

Como observamos en la fig. 1.7 la dirección de $\Delta\hat{i}$ es hacía el eje de rotación de la Tierra. Con ayuda de la fig 1.8, localizamos las componentes de la dirección $\Delta\hat{i}$, que con respecto a la latitud φ tenemos

$$\frac{\partial \hat{i}}{\partial x} = \frac{1}{R}\left(\operatorname{sen}\varphi\,\hat{j} - \cos\varphi\,\hat{k}\right)$$

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \frac{u}{a\cos\varphi}\left(\operatorname{sen}\varphi\,\hat{j} - \cos\varphi\,\hat{k}\right),$$

siendo la expresión final para el término (A):

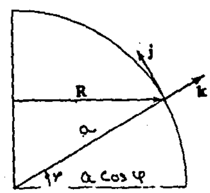


Fig 1.8 Localización de los vectores unitarios $\hat{j}$, $\hat{k}$ con respecto a la latitud.

$$u\,\frac{d\hat{i}}{dt} = u\left(\frac{\partial \hat{i}}{\partial x}u\right) = \frac{u^2}{a}\tan\varphi\;\hat{j} - \frac{u^2}{a}\,\hat{k} \qquad (1.19)$$

De manera similar, en segundo lugar, evaluamos dj/dt del término (B), aplicando la derivada total:

$$\frac{d\hat{j}}{dt} = \frac{\partial \hat{j}}{\partial x}u + \frac{\partial \hat{j}}{\partial y}v + \frac{\partial \hat{j}}{\partial z}w + \frac{\partial \hat{j}}{\partial t}$$

Con ayuda de la figura 1.9 podemos encontrar que el término $\frac{\partial \hat{j}}{\partial x}$ es debido a la convergencia de los meridianos que se cruzan en los polos, de donde

$$\frac{\partial \hat{j}}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \hat{j}}{\partial t} = 0 ,$$

pero $\frac{\partial \hat{j}}{\partial x} \neq 0$

Teniendo en cuenta la figura 1.9 encontramos que:

$$\left| \frac{\partial \hat{j}}{\partial x} \right| = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta j}{\Delta x} = \frac{\Delta \beta}{(\overline{PC})\,\Delta \beta} = \frac{1}{\overline{PC}}$$

Del triángulo OPC obtenemos

$$\overline{PC} = \frac{a}{\tan \varphi}$$

siendo entonces:

$$\left| \frac{\partial \hat{j}}{\partial x} \right| = \frac{1}{a/\tan \varphi} = \frac{\tan \varphi}{a}$$

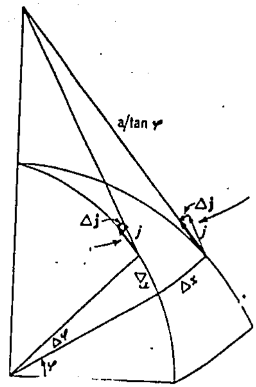


Fig. 1.9 Variación de j al Norte y Este.

Teniendo la variación hacia el Este una componente en la dirección de -i.

O sea
$$\frac{\partial \hat{j}}{\partial x} = -\frac{\tan \varphi}{a}\,\hat{i} \qquad (1.20)$$

Para la expresión y dirección de $\frac{\partial j}{\partial y}$ consideremos la figura 1.10 y la anterior, donde observamos que sólo tiene una componente en la dirección de -k.

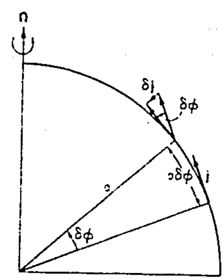


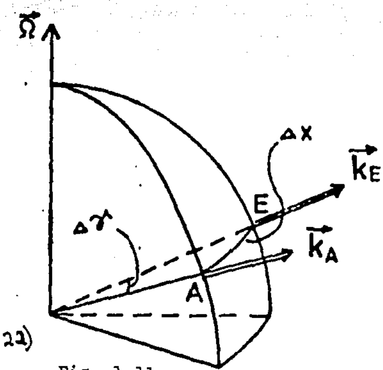
Fig. 1.10 Variación de j

Siendo entonces:

$$\left| \frac{\partial \hat{j}}{\partial y} \right| = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta \hat{j}}{\partial y} = \frac{\Delta \varphi}{a\,\Delta \varphi} = \frac{1}{a}$$

$$\frac{\partial \hat{j}}{\partial y} = -\frac{1}{a}\,\hat{k} \qquad (1.21)$$

Finalmente el término $\frac{d\hat{j}}{dt}$ es obtenido utilizando (1.20 y 1.21):



$$\frac{d\hat{j}}{dt} = \left(\frac{\partial\hat{j}}{\partial x}\right)u + \left(\frac{\partial j}{\partial y}\right)v$$

$$\frac{d\hat{j}}{dt} = -\frac{u\tan\varphi}{a}\,\hat{i} - \frac{v}{a}\,\hat{k}\,;$$

quedando el término (B) expresado como

$$v\frac{d\hat{j}}{dt} = -\frac{uv}{a}\tan\varphi\,\hat{i} - \frac{v^2}{a}\hat{k} \quad (1.22)$$

Fig. 1.11

Para el término (C), y último de la ecuación inicial (1.18), aplicamos la expresión de la derivada total

$$\frac{d\hat{k}}{dt} = \frac{\partial\hat{k}}{\partial x}u + \frac{\partial\hat{k}}{\partial y}v + \frac{\partial\hat{k}}{\partial z}w + \frac{\partial\hat{k}}{\partial t}$$

Siendo en éste caso :

$$\frac{\partial\hat{k}}{\partial z} = \frac{\partial\hat{k}}{\partial t} = 0$$

Con ayuda de la figura 1.11, tenemos :

$$\left|\frac{\partial\hat{k}}{\partial x}\right| = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\hat{k}}{\Delta x} = \frac{\Delta\gamma}{a\,\Delta\gamma} = \frac{1}{a} \quad ,$$

que sólo tiene una componente en la direccion de $\hat{i}$:

$$\frac{\partial\hat{k}}{\partial x} = \frac{1}{a}\hat{i}$$

Utilizando la figura 1.12 encontramos que

$$\left|\frac{\partial\hat{k}}{\partial y}\right| = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta k}{\Delta y} = \frac{\Delta\varphi}{a\,\Delta\varphi} = \frac{1}{a} \quad ,$$

la cual sólo tiene componente en la dirección de $\hat{j}$:

$$\frac{\partial\hat{k}}{\partial y} = \frac{1}{a}\hat{j}$$

Así
$$\frac{\partial \hat{k}}{\partial y} = \frac{1}{a}\hat{j}$$
de lo anterior
$$\frac{d\hat{k}}{dt} = \frac{\partial \hat{k}}{\partial x} u + \frac{\partial \hat{k}}{\partial y} v$$
será:
$$\frac{d\hat{k}}{dt} = \frac{u}{a}\hat{i} + \frac{v}{a}\hat{j}$$

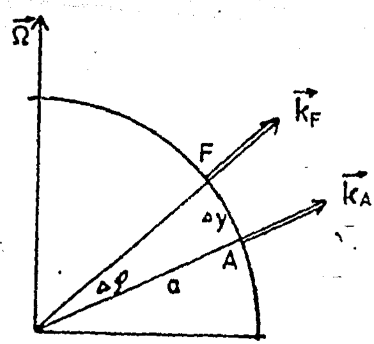


Fig. 1.12

Y, finalmente el término (C) es
$$w\frac{d\hat{k}}{dt} = \frac{uw}{a}\hat{i} + \frac{vw}{a}\hat{j} \quad (1.23)$$

Utilizando las expresiones (1.19), (1.22) y (1.23) obtenemos la ecuación de la aceleración en el sistema de referencia esférico
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{du}{dt} - \frac{uv}{a}\tan\varphi + \frac{uw}{a}\right)\hat{i} + \left(\frac{dv}{dt} + \frac{u^2}{a}\tan\varphi + \frac{vw}{a}\right)\hat{j} + \left(\frac{dw}{dt} - \frac{u^2}{a} - \frac{v^2}{a}\right)\hat{k} \qquad (1.24)$$

Para obtener las ecuaciones de movimiento en este sistema, igualamos la expresión anterior con las ecuaciones de movimiento (1.16), siendo las tres componentes en forma escalar las siguientes:
$$\frac{du}{dt} - \frac{uv}{a}\tan\varphi + \frac{uw}{a} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + fv - 2w\Omega\cos\varphi \quad (1.25)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{u^2}{a}\tan\varphi + \frac{vw}{a} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} - fu \quad (1.26)$$

$$\frac{dw}{dt} - \frac{u^2+v^2}{a} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} - g + 2u\,\Omega\cos\varphi \quad (1.27)$$

las cuales representan las ecuaciones de movimiento en las direcciones hacia el Este, al Norte y vertical, respectivamente.

1.7 ANALISIS DE ESCALA EN LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO.

Antes de aplicar las ecuaciones de movimiento a un problema específico es necesario realizar un análisis sobre la magnitud de cada uno de sus términos, para esto debe considerarse en forma aproximada el orden de magnitud de cada variable de las ecuaciones, así:

El radio de la Tierra $a = 6.37 \times 10^{8}$ cm, su orden de magnitud es de 10^{8} cm o 10^{6} m; la velocidad del viento en la tropósfera varía de 10 a 30 nudos cerca de la superficie terrestre y de 10 a 90 nudos más arriba de la superficie. Como un nudo es $1/2\ \frac{m}{s}$ aproximadamente, el orden de magnitud de los vientos es de 10^{3} cm/s ; la gravedad es del orden de 10^{3} cm/s ; como los cambios bruscos del estado del tiempo atmosférico son dentro de la tropósfera que tiene una altura aproximada de 11 km, su orden de magnitud es de 10^{6} cm; en el plano horizontal, los grandes sistemas atmosféricos son del orden de 1000km o sea, del orden de 10^{8} cm; los cambios de presión son del orden de 10^{4} dinas/cm .

Lo anterior lo podemos resumir en la tabla 1.1.

TABLA 1.1. ANALISIS DE ESCALA PARA LATITUDES MEDIAS.

PARAMETROS	SIMBOLO	ORDEN DE MAGNITUD
Velocidad horizontal	u, v	10^{3} cm/s
Velocidad vertical	w	1 cm/s
Longitud horizontal	$\Delta x, \Delta y$	10^{8} cm
Longitud vertical	Δz	10^{6} cm
Variación de la presión	Δp	10^{4} dinas/cm
Velocidad angular	Ω	10^{-5} s^{-1}
Aceleración de la gravedad	g	10^{3} cm/s

Radio de la tierra	a	10^{8} cm
paso de tiempo	t	10^{5} s
Parámetro de Coriolis	f	10^{-4} s^{-1}
Fricción	F	No es considerada.

1.8 APROXIMACION GEOSTROFICA.

Aplicando el análisis de escala, se pueden despreciar todos los términos menores al orden de 10^{-1}, de ésta manera, la fuerza de Coriolis y la del gradiente de presión están aproximadamente en balance. Por lo tanto, reteniendo estos términos en la ecuación (1.25 y 1.26) obtenemos una primera aproximación importante llamada GEOSTROFICA.

$$-fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \qquad (1.28)$$

$$+fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} \qquad (1.29)$$

Donde $f = 2\Omega \operatorname{sen}\varphi$ es el parámetro de Coriolis.

El balance geostrófico da una ecuación de diagnóstico, la cual expresa aproximadamente la relación entre el campo de presión y la velocidad horizontal en los sistemas a escala sinóptica. El campo de viento que satisface (1.28 y 1.29) es conocido como "Viento Geostrófico".

Dada la distibución del campo de presión en cualquier tiempo es posible usar (1.28 y 1.29) para encontrar el viento geostrófico, que es una buena aproximación del viento horizontal en ese momento.

Pero, las ecuaciones del viento geostrófico no son respecto al tiempo, por lo tanto, no pueden ser utilizadas para predecir la evolución del campo de viento. Por esta razón son llamadas de diagnóstico.

1.9 EL NUMERO DE ROSSBY.

Para obtener ecuaciones de predicción es necesario retener el término d/dt en las ecuaciones (1.25 y 1.26). Siendo las resultantes:

$$\frac{du}{dt} - fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \qquad (1.30)$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} \qquad (1.31)$$

Al realizar experimentos con las ecuaciones (1.30 y 1.31), el resultado es que la fuerza de Coriolis y del gradiente de presión están casi en balance, por lo que, el cálculo del término aceleración depende de magnitudes mayores para obtener una magnitud más pequeña, teniendo que pequeños errores en la medición de la velocidad o de la presión, generan grandes errores en el cálculo de la aceleración, una anomalía del 1% al 10% pueden producir errores del 100% en la estimación de $d\vec{V}/dt$.

Es por ello, importante saber si la atmósfera está en balance geostrófico, lo cual puede obtenerse empleando la definición del número de Rossby, que es la razón del término de la aceleración relativa y la de Coriolis.

$$R = \frac{\text{aceleración relativa}}{\text{aceleración de Coriolis}} = \frac{dv/dt}{uf} = \frac{u/Lu}{uf}$$

$$R = \frac{u}{Lf} = \frac{10^{3}}{10^{8}\ 10^{-4}} = 10^{-1} \qquad (1.32)$$

ésta razón es adimensional, cuando éste número es pequeño se dice que existe balance geostrófico.

1.10 APROXIMACION HIDROSTATICA.

El análisis de escala puede ser aplicado a la componente vertical de la ecuación de movimiento (1.27), el cual indica que existe un alto grado de aproximación a un campo de presión en equilibrio hidrostático, esto es, la presión en cualquier punto es simplemente igual al peso de una columna de aire de sección unitaria en ese punto, por lo tanto, debemos saber si existe equilibrio hidrostático a lo largo del plano horizontal donde existe el viento geostrófico. Para una presión estandar P a una altura Z, le corresponde una dosidad estandar $\rho(Z)$, y en condiciones de balance exacto hidrostático, para movimientos a escala sinóptica tenemos

$$\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dz} \equiv -g \qquad (1.33)$$

En conclusión, para movimientos a escala sinóptica, las aceleraciones verticales son despreciables y la velocidad vertical no puede ser determinada de la ecuación de la cantidad de movimiento vertical; el equilibrio hidrostático existe a lo largo del plano horizontal de un punto estudiado y el viento en ese plano es geostrófico.

1.11 EL VIENTO GEOSTROFICO.

Como se mencionó a escala sinóptica en las latitudes medias, los campos de viento y de presión están en equilibrio geostrófico, así en una primera aproximación de las ecuaciones de movimiento horizontal (1.30) y (1.31) se reducen a la declaración del balance geostrófico:

$$u_g = -\frac{1}{\rho f}\frac{\partial P}{\partial y} \qquad (1.34)$$

$$v_g = +\frac{1}{\rho f}\frac{\partial P}{\partial x} \qquad (1.35)$$

que son las componentes del viento geostrófico, las cuales pueden expresarse en forma vectorial, como

$$\vec{V}_g = \hat{k} \times \frac{1}{\rho f}\nabla_h P \qquad (1.36)$$

donde $\vec{V}_g = i\, u_g + j\, v_g$ es la velocidad geostrófica, y

$\nabla_h P$ es el gradiente horizontal de presión.

El viento geostrófico es el campo de velocidad en el cual la fuerza de Coriolis está en balance con la fuerza del gradiente de presión, como se muestra en la figura 1.13

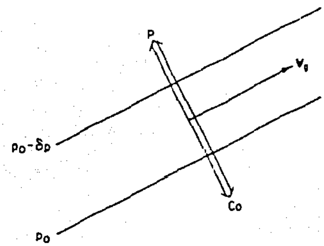


Fig. 1.13 El balance de fuerzas para el equilibrio geostrófico.

Como se muestra en la fig. 1.13 el viento geostrófico fluye paralelo a las isobaras, teniendo a la izquierda la baja presión y a la derecha la fuerza Co de Coriolis, en el hemisferio norte.

1.12 COORDENADAS ISOBARICAS.

En meteorología se análiza el estado del tiempo atmósferico sobre superficies de igual presión y no de altura, ya que los informes de humedad relativa, temperatura del aíre y velocidad del viento, se reportan diariamente a niveles fijos de presión como son: 1000 mb, 700 mb, 500 mb, 400 mb, 300 mb, 200 mb, 100 mb, 50 mb y 10mb, que son llamados Niveles Obligatorios del Radiosondeo.

Por lo tanto, es conveniente trabajar las ecuaciones de movimiento en un sistema de coordenadas cuya variable independiente en la altura sea la presión; matemáticamente, esto implica una transformación de Z a P, como coordenada independiente en la vertical y la expresión del gradiente de presión horizontal en términos de un gradiente de altura a presión constante. Dicha transformación puede ser realizada para la componente X del gradiente de la fuerza de presión con ayuda de la fig. 1.14. De la cual tenemos

$$\frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{(P_o + \delta P) - P_o}{\delta x} = \frac{(P_o + \delta P) - P_o}{\delta z} \cdot \frac{\delta z}{\delta x}$$

tomando el límite cuando $\delta x \rightarrow 0$ y $\delta z \rightarrow 0$, tenemos la transformación

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_z = -\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p \qquad (1.37)$$

en la cual podemos sustituir la aproximación hidrostática

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

obteniendo la relación para X

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_z = g\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p \qquad (1.38)$$

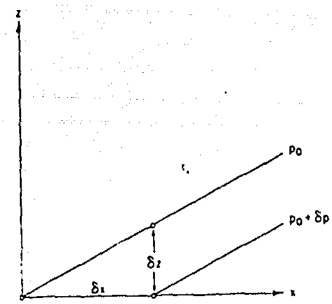


Fig. 1.14 Pendiente de superficies de presión en el plano X,Z.

de manera similar, para Y

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = g\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_p \qquad (1.39)$$

donde los subindices P y Z indican la presión y la altura, respectivamente, manteniendose constantes.

Sustituyendo la primera de estas en la aproximación geostrófica (1.35) obtenemos

$$v_g = \frac{g}{f}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p \qquad (1.40)$$

que es la componente en la dirección Y del viento geostrófico calculado a presión constante.

Analogamente, para la componente en la dirección X, con la segunda relación (1.39) y sustituyendo la aproximación geostrófica (1.36)

obtenemos $$u_g = -\frac{g}{f}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_p \qquad (1.41)$$

las ecuaciones anteriores las podemos expresar en forma vectorial para su expresión en coordenadas isobáricas

$$\vec{V}_g = \frac{g}{f}\,\hat{k} \times \nabla_p z \qquad (1.42)$$

También, tenemos otra expresión del viento geostrofico en coordenadas isobáricas, que es

$$\vec{V}_g \equiv \frac{\hat{k}}{f} \times \nabla_p \Phi \qquad (1.43)$$

donde Φ es el Geopotencial $$\Phi \equiv \int_0^z g\,dz \qquad (1.44)$$

que se define como el trabajo requerido para llevar una masa unitaria desde la superficie terrestre a una altura Z.

La ventaja de usar coordenadas isobáricas está dada al comparar las expresiones (1.36) y (1.43). En la última, la densidad no aparece, de manera que, el gradiente del geopotencial implica el mismo viento geostrófico a cualquier altura, mientras que un gradiente horizontal de presión como en (1.36) implica diferentes valores de viento geostrófico dependiendo de la densidad.

Otro aspecto importante de (1.43), es que si f se considera constante, entonces la divergencia horizontal del viento geostrófico a presión constante es cero.

$$\nabla_p \cdot \vec{V_g} = 0 \qquad (1.45)$$

Además, se tiene que la componente vertical del rotacional del viento geostrófico es directamente proporcional al Laplaciano del geopotencial .

$$\hat{k} \cdot \left(\nabla \times \vec{V_g} \right) = \hat{k} \cdot \left(\frac{1}{f} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \hat{k} + \frac{1}{f} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \hat{k} \right) = \frac{1}{f} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)$$

$$\hat{k} \cdot \left(\nabla \times \vec{V} \right) = \frac{1}{f} \nabla^2 \Phi \qquad (1.46)$$

Los resultados (1.45) y (1.46) son importantes, ya que mediante éstas aproximaciones fué posible iniciar el pronóstico del tiempo en la decada de los 50's, empleando los modelos denominados Barotrópico y Baroclínico.

También, de la ecuación (1.43) podemos apreciar que el viento geostrófico se desplazara paralelo a las líneas de igual altura geopotencial las cuales reciben el nombre de ISOIPSAS, quedando la de menor altura a la izquierda del movimiento y la fuerza de Coriolis a la derecha, en el hemisferio norte. En el hemisferio sur se invierten.

1.12 CIRCULACION

En mecánica clásica el principio de conservación del momento angular es necesario en el análisis de movimientos que involucran rotaciones. Leyes análogas de conservación son aplicables a un campo rotacional de un fluido, sin embargo, en un medio continuo tal como la atmósfera la definición de rotación es mucho más dificil que para un objeto sólido.

Circulación y vorticidad son las dos medidas iniciales de un fluido en rotación: Circulación es una medida macroscópica de la rotación de una área finita de un fluido, y vorticidad es un campo vectorial que da una medida microscópica de la rotación en cualquier punto de un fluido.

Por definición la circulación es la integral de línea de la componente tangencial de la velocidad alrededor de una curva cerrada.

Si la trayectoria de integración es definida por el vector $\vec{l}$, entonces como se indica en la figura 1.14, la circulación C es

$$C \equiv \oint \vec{V} \cdot d\vec{l} = \oint |\vec{V}| \cos\alpha \, dl$$

por convención la circulación es tomada positiva en sentido contra reloj.

Para ver que la circulación es una medida de la rotación, supongamos un disco circular de un fluido de radio r, que como un cuerpo sólido rota con una velocidad angular Ω

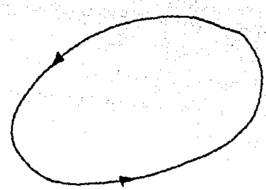


Fig. 1.14 Definición de Circulación en una trayectoria cerrada.

alrededor del eje Z. en éste caso $\vec{V} = \Omega \times r$,siendo r la distancia al eje de rotación. Así, la circulación alrededor del disco es dada por

$$C = \oint \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int \Omega r^2 d\lambda = 2\Omega \pi r^2$$

de donde $\frac{C}{\pi r^2} = 2\Omega$

De modo que, la circulación dividida por el área encerrada del disco es el doble de la velocidad angular de rotación.

A tomar la integral de línea de la segunda ley de Newton, para una cadena cerrada de partículas de fluido, en el sistema de coordenadas absoluto el resultado es

$$\oint \frac{d_a \vec{V}_a}{dt} \cdot d\vec{l} = -\oint \frac{\nabla P \cdot d\vec{l}}{\rho} - \oint \nabla \Phi \cdot d\vec{l}$$

de donde se obtiene el teorema de circulación

$$\frac{dC_a}{dt} = \frac{d}{dt} \oint \vec{V}_a \cdot d\vec{l} = -\oint \frac{dP}{\rho} \qquad (1.47)$$

El término del lado derecho es llamado Selenoidal. Cuando la densidad es sólo función de la presión y el término selenoidal es cero se trata entonces de un fluido Barotrópico. Así, en un fluido barotrópico la circulación absoluta es conservada. Este resultado es conocido como el Teorema de Kelvin de la Circulación, siendo análogo al principio de Conservación del Momento Angular en la mecánica de los cuerpos sólidos.

En los análisis meteorológicos es más conveniente trabajar con la circulación relativa C ; que es una porción de la circulación absoluta y también de la debida a la rotación de la Tierra. Para calcular ésta última debemos aplicar el teorema de Stokes para el vector Ve , donde $V_e = \Omega \times r$, es la velocidad tangencial de la Tierra, siendo entonces

$$C_e = \oint \vec{V}_e \cdot d\vec{l} = \iint_A (\nabla \times \vec{V}_e) \cdot \hat{n}\, dA$$

Pero $(\nabla \times \vec{V}_e) \cdot \hat{n} = 2\Omega \operatorname{sen} \phi \equiv f$, es justamente el parámetro de Coriolis. Así, la circulación debido a la rotación de la Tierra es donde $\bar{\phi}$ denota el valor promedio de la latitud sobre un elemento de área A. Finalmente podemos escribir

$$C = C_a - C_e = C_a - 2\Omega F \qquad (1.48)$$

donde $F = A \operatorname{sen} \bar{\phi}$ es la proyección del elemento de área A sobre el plano ecuatorial como es mostrado en la figura 1.15 . Diferenciando la (1.48) debido al movimiento y sustituyendo la (1.47) obtenemos lo que se conoce como el Teorema de Bjerknes de la Circulación.

$$\frac{dC}{dt} = -\oint \frac{dP}{\rho} - 2\Omega \frac{dF}{dt} \qquad (1.49)$$

Para un fluido barotrópico la ecuación (1.49) puede ser integrada debido al movimiento desde un estado inicial 1 a un estado final 2,

$$C_2 - C_1 = -2\Omega \left(A_2 \operatorname{sen} \phi_2 - A_1 \operatorname{sen} \phi_1 \right) \qquad (1.50)$$

La ecuación (1.50) indica que en un fluido barotrópico la circulación relativa para una cadena cerrada de partículas de fluido puede cambiar si el área horizontal cambia o el promedio de las latitudes cambia.

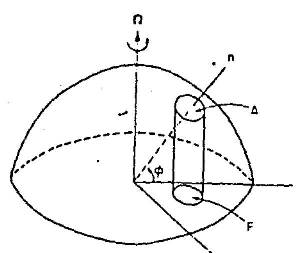


Fig 1.15 Area proyectada en el plano ecuatorial por una curva cerrada a la latitud ϕ .

tación de un fluido es la vorticidad, como el rotacional de la velocidad, se interes la componente vertical de

;1)

omponente vertical de la vorticidad es

52)

vertical de la vorticidad se define una curva cerrada en el plano horizon- a:

$$\frac{C}{A} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

de un fluido en rotación como en un velocidad angular de rotación. La vor- ina medida de la velocidad angular local ísica de la vorticidad puede entenderse e vertical de vorticidad en el sistema do que la componente neta de vorticidad La razón de cambio de la normal del viento orticidad de corte y, (2) la desviación nea de corriente, llamada vorticidad de co en línea recta se puede tener vorti- al al eje del flujo; por ejemplo en un ciclónica al norte de la máxima velocidad

mejante al movimiento de un . 1.16a. Por otro lado, si el , de modo que, la vorticidad d de curvatura. Como el caso ra que el rehilete no gira.

Fig. 1.16 Dos tipos de flujo: (a) flujo líneal con vorticidad y (b) flujo curvado con vorticidad cero.

CARTESIANA.

la ecuación de vorticidad ento (1.30 y 1.31). Para onente X con respecto a Y; e Y con respecto a X:

$$- \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \}$$

$$- \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} \}$$

Recordando a la ecuación de vorticidad

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

ésta se obtiene restando las ecuaciones anteriores

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v\frac{\partial \zeta}{\partial y} + w\frac{\partial \zeta}{\partial z} + (\zeta + f)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$+ v\frac{df}{dy} = \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\partial P}{\partial x}\right]$$

Utilizando el hecho de que el parámetro de Coriolis depende sólo de Y, entonces

$$\frac{df}{dt} = v\left(\frac{df}{dy}\right)$$

obteniendo así la ecuación de vorticidad en su forma cartesiana (1.53).

$$\frac{d}{dt}(\zeta + f) = -(\zeta + f)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\partial P}{\partial x}\right)$$

La ecuación (1.53) establece que la razón de cambio de la vorticidad absoluta debido al movimiento es la suma de tres términos que aparecen en el lado derecho de la ecuación (1.53), llamados: término de la divergencia, de la inclinación o de la deformación y el selenoidal, respectivamente.

El primer término indica la generación de vorticidad por divergencia horizontal, que su análogo en un fluido corresponde en un sólido al cambio en la velocidad angular resultado del cambio del momento de inercia, debiendo el cambio de momento angular ser conservado. Si la divergencia horizontal es positiva, el área encerrada por una cadena de parcelas de un fluido se incrementa con el tiempo y la circulación debe ser conservada al decrecer la vorticidad promedio absoluta del fluido encerrado.

Este mecanismo de cambio de vorticidad es muy importante en las perturbaciones a escala sinóptica.

El segundo término en la ecuación (1.53) representa la vorticidad vertical la cual es generada por la inclinación o deformación de las componentes orientadas horizontalmente de vorticidad dentro de la vertical por un campo de movimiento vertical no uniforme. Como se muestra en la figura 1.17. Si al mismo tiempo hay un campo de viento vertical W el cual decrece con el incremento de X, el movimiento vertical tiende a inclinar el tubo del vórtice que inicialmente está orientado paralelo a X, entonces tendrá una componente vertical. Así, si $\frac{\partial v}{\partial z} > 0$ y $\frac{\partial W}{\partial x} < 0$, se tendrá una generación de vorticidad positiva.

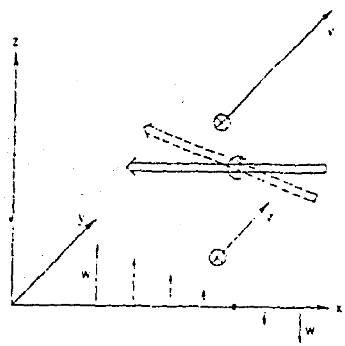


Fig. 1.17. Generación de vorticidad por la inclinación del tubo de vortice horizontal.

El tercer término en (1.53) es el equivalente microscópico del término selenoidal del teorema de la circulación.

La ecuación de la razón de cambio de la vorticidad relativa $d\zeta/dt$ puede expresarse en forma vectorial, donde $\vec{V}_H = \hat{i}U + \hat{j}V$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \vec{V}_H \cdot \nabla_H(\zeta+f) - w\frac{\partial \zeta}{\partial z} - (\zeta+f)\nabla_H \cdot \vec{V}_H + \hat{k}\cdot\left(\frac{\partial \vec{V}_H}{\partial z} \times \nabla w\right) - \hat{k}\cdot(\nabla\alpha \times \nabla p)$$

(1.54)

1.15 ANALISIS DE ESCALA DE LA ECUACION DE VORTICIDAD.

Al igual que se hizo en la ecuación de movimiento podemos simplificar para los movimientos a escala sinóptica evaluando el orden de magnitud de los términos de la ecuación de vorticidad. Para ésta simplificación escogemos magnitudes típicas observadas en los movimientos a escala sinóptica.

$U \sim 10^3$ cm/s	velocidad horizontal
$W \sim 1$ cm/s	velocidad vertical
$L \sim 10^8$ cm	longitud de escala
$H \sim 10^6$ cm	profundidad de escala.
$\delta P \sim 10^4$ dinas/cm^2	fluctuación horizontal de presión
$\delta P/\rho \sim 0.02$	fluctuación fraccional de densidad
$L/U \sim 10^5$ s	escala de tiempo
$f \sim 10^{-4}$ s^{-1}	parámetro de Coriolis
$\frac{df}{dy} \equiv \beta \sim 10^{-13}$ cm/s	parámetro " β "

Usando las escalas anteriores para evaluar la magnitud de los términos en (1.53) , se tiene

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \lesssim \frac{U}{L} \sim 10^{-5} s^{-1}$$

Comparando con el parámetro de Coriolis $\zeta / f_0 \lesssim 10^{-1}$

Así, para sistemas sinópticos en latitudes medias la vorticidad relativa es pequeña comparada con la vorticidad por la Tierra; de modo que ζ puede ser despreciable comparada con f en el término de la divergencia:

$$(\zeta + f)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \approx f\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

Siendo la magnitud de varios término en (1.53) los siguientes:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t},\ u\frac{\partial \zeta}{\partial x},\ v\frac{\partial \zeta}{\partial y} \sim \frac{U^2}{L^2} \sim 10^{-10}\ s^{-2}$$

$$w\frac{\partial \zeta}{\partial z} \sim \frac{UW}{LH} \sim 10^{-11}\ s^{-2}$$

$$v\frac{df}{dy} \sim U\beta \sim 10^{-10}\ s^{-2}$$

$$f\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \lesssim \frac{f_0 U}{L} \sim 10^{-9}\ s^{-2}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\right) \lesssim \frac{WU}{HL} \sim 10^{-11}\ s^{-2}$$

$$\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\partial P}{\partial x}\right) \lesssim \frac{\delta\rho\,\delta P}{\rho^2 L^2} \sim 2\times 10^{-11}\ s^{-2}$$

Del análisis de escala el término de la divergencia es el de orden de magnitud más grande que cualquier otro de la ecuación, lo que indica que los movimientos a escala sinóptica deben ser casi-divergentes.

El término de la divergencia debe ser bastante pequeño para balancear la advección de vorticidad, entonces

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \lesssim 10^{-6}\ s^{-1}$$

Por lo que, la divergencia horizontal debe ser pequeña comparada con la vorticidad en sistemas a escala sinóptica.

Reteniendo sólo términos del orden de 10^{-10} en la ecuación de vorticidad, obtenemos como primera aproximación para movimientos a escala sinóptica.

$$\frac{d_H(\zeta+f)}{dt} = -f\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \qquad (1.55)$$

donde $\frac{d_H}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}$

La ecuación (1.55) establece como primera aproximación que el cambio de vorticidad absoluta debido al movimiento a escala sinóptica es enteramente debido al aspecto de la divergencia.

1.16 LA ECUACION DE VORTICIDAD EN COORDENADAS ISOBARICAS.

Para obtener la ecuación de vorticidad en coordenadas isobáricas debemos usar la expresión de la derivada total d/dt. Usando notación vectorial para cualquier variable de campo como T, tenemos

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla T + \omega\frac{\partial T}{\partial p} \qquad \omega = \frac{dP}{dt}$$

donde $\vec{V}\cdot\nabla$ es llamado término advectivo, en general, en coordenadas isobáricas la derivada total queda expresada como

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + \omega\frac{\partial}{\partial p}$$

De las ecuaciones de predicción (1.30 y 1.31) y usando la aproximación geostrófica (1.43) para las componentes U,V de la velocidad horizontal, se tiene

$$\frac{du}{dt} - fv = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad (1.56)$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \qquad (1.57)$$

derivando la primera con respecto a Y, la segunda con respecto a X, restando la segunda derivada de la primera, recordando la ecuación de vorticidad (1.52), haciendo uso de la derivada total y reagrupando términos tenemos

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \zeta\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \omega\frac{\partial \zeta}{\partial p} + \left(\frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)$$

$$= -f\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \left(u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

la cual en notación vectorial es

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla\zeta + \zeta\,\nabla\cdot\vec{V} + \omega\frac{\partial \zeta}{\partial p} + \left\{\frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial \omega}{\partial y}\right\}$$

$$= -f\,\nabla\cdot\vec{V} - \vec{V}\cdot\nabla f$$

de la cual finalmente obtenemos la componente vertical del cambio de vorticidad relativa en el sistema de coordenadas isobáricas

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\vec{V}\cdot\nabla(\zeta+f) - \omega\frac{\partial \zeta}{\partial p} - (\zeta+f)\nabla\cdot\vec{V} + \left\{\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial \omega}{\partial x}\right\} \qquad (1.58)$$

Los términos en orden de izquierda a derecha son:

1) Razón de cambio local de vorticidad relativa

2) Advección horizontal de vorticidad absoluta.

3) Advección vertical de vorticidad relativa.

4) Término de divergencia.

5) Término de oscilación.

Haciendo uso del análisis de escala se simplifica la ecuación de vorticidad para movimientos a escala sinóptica:

1.- Se desprecian los términos de advección vortical y de oscilación.

2.- Se desprecia ζ comparada con f en el término de divergencia.

3.- Se aproxima la velocidad horizontal al viento geostrófico en el término de advección.

4.- Se remplaza la vorticidad relativa por su valor geostrófico.

Una simplificación adicional se obtiene desarrollando el parámetro de Coriolis en una serie de Taylor a una latitud λ_o, para determinar el orden de magnitud de la razón de los primeros dos términos de la expansión. Esto es

$$f = f_0 + \beta y$$

donde $\beta \equiv (df/dy)_{\lambda_o}$, $y = 0$ en λ_o

eligiendo a L como la escala latitudinal de los movimientos, se tiene el siguiente orden de magnitud

$$\frac{\beta L}{f_o} \sim \frac{\cos\lambda_o}{\operatorname{sen}\lambda_o}\frac{L}{a}$$

Así, cuando la escala latitudinal es pequeña comparada con el radio de la Tierra ($L/a \ll 1$), el parámetro de Coriolis tiene un valor constante f_o excepto cuando aparece diferenciado en el término de adveccion en tal caso $\frac{df}{dy} \equiv \beta$ puede ser considerado constante.

Aplicando las aproximaciones anteriores, se obtiene la llamada ecuación Casigeostrófica de Vorticidad.

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} = -\vec{V}_g \cdot \nabla(\zeta_g + f) - f_o \nabla \cdot \vec{V} \quad (1.59)$$

donde $\zeta_g = \nabla^2 \Phi / f_o$, $\vec{V}_g = \hat{k} \times \nabla \Phi / f_o$

Es importante notar que el viento horizontal no es remplazado por el viento geostrófico en el término de la divergencia.

CAPITULO II.

LA ECUACION DE CONTINUIDAD O CONSERVACION DE LA MASA.

2.1 LA ECUACION DE CONTINUIDAD.

La variación de la presión atmosférica en un cierto lugar representa un acarreo neto de masa de aire de o hacia el lugar; como consecuencia del movimiento general del aire y de los cambios de temperatura que ocurren en él, se presentan acumulaciones y enrarecimientos de su masa.

La ecuación de continuidad se basa en el enunciado de la conservación de la masa, "no hay fuentes ni sumideros en lugar alguno de la atmósfera", lo que exige que la cantidad de fluido que penetra en una cierta región, sea igual a la que sale.

Si consideramos un volumen fijo en el espacio, tal que el fluido pase atraves del mismo, es posible expresar la ecuación de continuidad de modo que la variación de la masa dentro del volumen es igual al flujo neto de masa atraves de todo el volumen.

Del anterior enunciado, sea un paralelepípedo infinitesimal de volumen $\delta V = \delta x \delta y \delta z$, que contiene una masa $\rho \delta V$. La variación de la masa por unidad de tiempo es $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) V$, puesto que el paralelepípedo permanece en el mismo lugar debe usarse la derivada local.

Con ayuda de la figura 2.1 calculamos el flujo neto. Sea A un punto en el centro de la cara izquierda, al igual B en la cara derecha.

El flujo que entra atraves de la cara izquierda es la razón de influjo por unidad de área ρu, multiplicada por el área $\delta y \delta z$. Una expresión similar se aplica al exflujo atraves de la cara opuesta, de modo que el influjo por unidad de tiempo atraves de las caras perpendiculares al eje X es

$$\rho u \delta y \delta z - \left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\delta x\right]\delta y \delta z = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\delta x \delta y \delta z$$

Resultados similares se obtienen para las direcciones Y,Z. Para las cuales v,w son las velocidades correspondientes. De ésta manera, la razón neta de influjo de masa para el elemento de volumen $\delta x \delta y \delta z$ es

$$-\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right]\delta x \delta y \delta z$$

Dividiendo la expresión por $\delta x \delta y \delta z$ obtenemos la razón neta de influjo de masa por unidad de volumen, esto es, la razón local de cambio de densidad $\partial\rho/\partial t$. De ésta manera se obtiene la Ecuación de Continuidad

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = \nabla\cdot(\rho\vec{V}) \quad (2.1)$$

La ecuación (2.1) es también conocida como la forma de la Divergencia de la masa. También puede expresarse en la forma conocida como la divergencia de la velocidad para la ecuación de continuidad.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\,\nabla\cdot\vec{V} = 0 \quad (2.2)$$

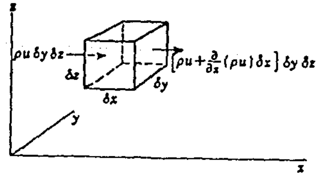


Fig. 2.1 Influjo de masa a un elemento de volumen fijo.

2.2 LA ECUACION DE CONTINUIDAD EN COORDENADAS ISOBARICAS.

Considerando un elemento de fluido de masa δM, con una sección transversal de área $\delta X \delta Y$, que está confinado entre dos superficies de presión P y $P - \delta P$, como se muestra en la figura 2.1

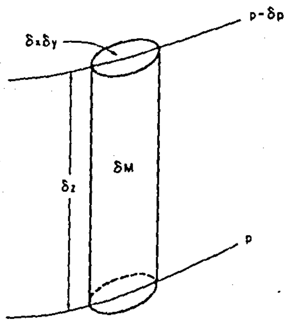


Fig. 2.1 Columna de aire de masa M, entre dos superficies isobáricas.

Aplicando la aproximación hidrostática $\delta P = \rho g \delta z$

entonces la masa δM

$$\delta M = \rho \delta x \, \delta y \, \delta z = \frac{\delta x \, \delta y \, \delta P}{g}$$

Como la masa del elemento del fluido debe conservarse, entonces

$$\frac{1}{\delta M}\frac{d \delta M}{dt} = \frac{g}{\delta x \delta y \delta p}\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta x \delta y \delta P}{g}\right) = 0$$

Diferenciando, usando la regla de la cadena y cambiando el orden de los operadores diferenciales, obtenemos

$$\frac{1}{\delta x}\delta\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{1}{\delta y}\delta\left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{1}{\delta P}\delta\left(\frac{dP}{dt}\right) = 0$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta \omega}{\delta P} = 0$$

donde se define a ω como $\omega \equiv \frac{dP}{dt}$

La variable de campo ω tiene el mismo papel en coordenadas isobáricas que la velocidad vertical W en el sistema cartesiano.

Tomando los límites cuando $\delta X, \delta Y, \delta P \longrightarrow 0$, obtenemos la ecuación de continuidad en el sistema isobárico.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)_P + \frac{\partial \omega}{\partial P} = 0 \qquad (2.3)$$

La ecuación (2.3) expresa la de continuidad en coordenadas isobáricas, la cual no contiene el campo de densidad y no involucra derivadas con respecto al tiempo. La simplicidad de la ecuación (2.3) es una de las grandes ventajas de usar la ecuación de continuidad en coordenadas isobáricas.

2.3 LA ECUACION DE CONTINUIDAD Y EL MOVIMIENTO VERTICAL.

En los movimientos a escala sinóptica la componente vertical de la velocidad es del orden de algunos centímetros por segundo; sin embargo, los sondeos meteorológicos sólo pueden dar mediciones del orden metros por segundo. Así, la velocidad vertical no es medible directamente, por lo que debe ser inferida o deducida en base a la integración de la -- ecuación de continuidad en la vertical.

Sí consideramos un fluido incompresible, $\frac{d\rho}{dt} = 0$, de la ecuación (2.2) tenemos

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

integrandola con respecto a Z, desde el suelo (Z = 0) a una altura H, obtenemos

$$W(H) - W(0) = -\int_0^H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dz = -H\left(\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial y}\right)$$

donde la notación $\langle\ \rangle$ indica el promedio vertical de una cantidad. Entonces, para un fluido incompresible la diferencia de velocidades verticales entre el tope y el fondo de la columna, es igual a la profundidad H por la divergencia media horizontal del viento.

También, aplicando la ecuación de continuidad en coordendas isobáricas se tiene una expresión para ω . Se considera una atmósfera incompresible y se integra con respecto a la presión entre dos superficies isobáricas P_0 y P .

$$\omega(P) = \omega(P_o) - \int_{P_o}^{P} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dP$$

$$= \omega(P_o) + (P_o - P)\left(\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial y} \right) \qquad (2.4)$$

La ecuación (2.4) expresa ω a cualquier nivel de presión P, con ω (P_o) más la divergencia media horizontal del viento entre dos superficies isobáricas P_o y P .

2.4 ANALISIS DE ESCALA Y LA RELACION ENTRE ω Y W.

Usando argumentos de análisis de escala se obtiene una relación aproximada entre ω y W. Desarrollando d P/d t en el sistema cartesiano X,Y,Z. Tenemos;

$$\omega \equiv \frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \vec{V}_H \cdot \nabla P + w \frac{\partial P}{\partial z}$$

A escala sinóptica la velocidad horizontal es geostrófica en primera aproximación, esto es

$$\vec{V}_H = \vec{V}_g + \vec{V}'$$

donde $|\vec{V}'| \ll |\vec{V}_g|$

teniendo que $\vec{V}_g = \frac{1}{\rho f} \hat{k} \times \nabla P$

siendo además $\vec{V} \cdot \nabla P = 0$

Usando estos resultados y la aproximación hidrostática, tenemos :

$$\omega = \frac{\partial P}{\partial t} + \vec{V}' \cdot \nabla P - \rho g w$$

Comparando las magnitudes de la derecha, encontramos a escala sinóptica: $\frac{\partial P}{\partial t} \sim 10 \frac{mb}{día}$, $\vec{V}' \cdot \nabla P \sim \left(1 \frac{m}{s}\right)\left(0.01 \frac{mb}{km}\right) \sim \frac{1mb}{día}$

$$g \rho w \sim 100 \frac{mb}{día}$$

de modo que en una primera aproximación, la relación entre ω y W es

$$\omega = -\rho g W \qquad (2.5)$$

de manera que, la ecuación (2.4) puede reescribirse como

$$W(P) = \frac{\rho_0 W(P_0)}{\rho} - \frac{1}{\rho g}\left(\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial x} + \frac{\partial\langle v\rangle}{\partial y}\right)\cdot(P_0 - P) \qquad (2.6)$$

donde ρ_0 es la densidad al nivel de presión P_0.

CAPITULO III.

LA ECUACION DE LA ENERGIA TERMODINAMICA EN LA ATMOSFFRA.

3.1 EL PRIMER PRINCIPIO DE LA TERMODINAMICA.

Se refiere a los cambios físicos que tienen lugar cuando se comunica o se quita calor a un gas. Es un principio muy importante, que junto con la ecuación del gas y con la ley de equilibrio hidrostático explica muchos de los procesos que ocurren en la atmósfera.

La primera ley de la termodinámica para un gas ideal se expresa como:

$$\dot{H}\,dt = C_v\,dT + P\,d\alpha$$

siendo $\dot{H}$ la razón de calor externo por unidad de masa y C_v el calor específico a volumen constante.

Esta ecuación establece que el calor agregado por unidad de masa en un incremento de tiempo dt, en procesos como radiación, condensación o conducción es igual al cambio de energía interna más el trabajo realizado por unidad de masa sobre el medio ambiente de una parcela de aire.

Cuando no hay intercambio de calor entre el aire y su medio ambiente entonces $\dot{H} = 0$, y se dice que el proceso es "adiabático". En muchas ocaciones los movimientos atmosféricos se consideran adiabáticos.

Aplicando la ecuación de estado para el aire seco

$$P\alpha = RT$$

y la relación del calor específico a presión constante

$$C_p = C_v + R$$

entonces la primera ley se expresa como

$$\dot{H}dt = C_p dT - \alpha dP$$

que dividiendola entre la temperatura T, se obtiene la Entropía, dQ.

$$\frac{\dot{H}dt}{T} \equiv dQ = C_p \frac{dT}{T} - \frac{\alpha dP}{T}$$

o haciendo uso de la ecuación de estado, se tiene

$$\frac{\dot{H}}{T} \equiv \frac{dQ}{dt} = C_p \frac{d\ln T}{dt} - R\frac{d\ln P}{dt} \qquad (3.1)$$

La ecuación (3.1) da la razón de cambio de la entropía debido al movimiento. La entropía Q es una variable de campo que depende sólo del estado termodinámico del fluido. Así, dQ/dt, es una derivada total.

El cambio de entropía, dQ/dt, es algunas veces expresado en términos del cambio de la temperatura Potencial debido al movimiento.. La temperatura potencial θ es definida como la temperatura que deberá tener una parcela de aire secc a una presión P y a una temperatura T, si fuera comprimida o expandica en un proceso adiabático seco hasta una presión de 1000 mb.

La relación entre presión y temperatura para una expansión adiabá - tica se obtiene haciendo $\frac{dQ}{dt} = 0$ en la (3.1), resultando

$$C_p d\ln T = R\, d\ln P$$

que al ser integrada entre la presión P y 1000 mb, da como resultado la temperatura potencial O ya definida.

$$\theta = T\left(\frac{1000}{P}\right)^{R/C_p} \qquad (3.2)$$

Ahora tomando el logaritmo de (3.2) y diferenciando, tenemos

$$C_p \frac{d\ln\theta}{dt} = C_p \frac{d\ln T}{dt} - R\frac{d\ln P}{dt} \qquad (3.3)$$

comparando (3.3) con (3.1) obtenemos

$$c_p \frac{d \ln \theta}{dt} = \frac{dQ}{dt} \qquad (3.4)$$

De donde, se deduce que la temperatura potencial es proporcional a la entropía. La ecuación (3.4) es una forma de expresar la primera ley de la Termodinámica.

3.2 LA ECUACION DE LA ENERGIA TERMODINAMICA APROXIMADA.

En una atmósfera en equilibrio hidrostático $\frac{\partial \Phi}{\partial p}$ es proporcional a la temperatura, por lo que es posible escribir la ecuación de la primera ley de la termodinámica en términos del geopotencial Φ.

Usando la ecuación del gas ideal se elimina la temperatura para obtener una relación entre θ y α en términos de la variable indepente p:

$$\theta = \frac{p\alpha}{R}\left(\frac{1000}{p}\right)^{R/c_p}$$

Tomando el logaritmo de la anterior

$$\ln \theta = \ln \alpha - \left(\frac{R}{c_p} - 1\right) \ln p + \text{constante}$$

diferenciando sobre una superficie isobárica, tenemos

$$\left(\frac{\partial \ln \theta}{\partial x}\right)_p = \left(\frac{\partial \ln \alpha}{\partial x}\right)_p, \quad \text{etc}$$

Usando la derivada total en la ecuación (3.4), y sustituyendo ln α en lugar de ln θ en las derivadas parciales evaluadas a presión constante, tenemos

$$\frac{\partial \ln \alpha}{\partial t} + u \frac{\partial \ln \alpha}{\partial x} + v \frac{\partial \ln \alpha}{\partial y} + \omega \frac{\partial \ln \theta}{\partial p} = \frac{1}{c_p} \frac{dQ}{dt}$$

De la aproximación hidrostática y de la ecuación de continuidad en coordendas isobáricas; podemos escribir la aproximación hidrostática :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\alpha \qquad (3.5)$$

Sustituyendo la anterior, se elimina α . Obteniendo (3.6)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right) + u\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right) + v\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right) - \sigma\omega = \frac{\alpha}{c_p}\frac{dQ}{dt}$$

Donde σ , es el parámetro de estabilidad estática, que es definido:

$$\sigma \equiv -\frac{\alpha}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial p}$$

Para una atmósfera estaticamente estable $\partial\theta/\partial p < 0$ tal que $\sigma > 0$.

La ecuación (3.6) puede ser simplicada , notando que para sistemas a escala sinóptica la velocidad horizontal es aproximadamente igual a la velocidad geostrófica

$$\vec{V} = \hat{i}u + \hat{j}v \simeq \vec{V}_g \equiv \frac{\hat{k} \times \nabla\Phi}{f}$$

En una primera aproximación, las componentes de la velocidad horizontal en (3.6) pueden ser sustituidas por sus valores geostróficos, esto en notación vectorial es

$$u\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right) + v\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right) \simeq \vec{V}_g \cdot \nabla\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)$$

Además, considerando un calentamiento diabatico que es pequeño comparado con los términos del lado izquierdo de la ecuación (3.6), se obtiene la ecuación de la Energía Termodinámica Aproximada :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right) = \vec{V}_g \cdot \nabla\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right) + \sigma\omega \qquad (3.7)$$

Donde σ puede ser expresada en términos de Φ , de modo que, (3.7) tiene unicamente dos variables dependientes Φ y ω .

CAPITULO IV

EL MODELO BAROCLINICO.

4.1 EL PROBLEMA METEOROLOGICO DEL FILTRADO.

Los sistemas meteorológicos en movimiento a nivel sinóptico son preponderantemente ondas largas, de unos pocos miles de kilómetros, que se mueven lentamente, de un orden de magnitud de 10 m/s, desde el oeste hacia el este. Las ecuaciones generales de la atmósfera permiten soluciones de diversos tipos de ondas como las del sonido, de gravedad, de inercia y de Rossby.

El unico tipo de onda que satisface ésta descripción es la onda de Rossby, que se caracteriza por un movimiento lento desde el oeste hacia el este si la longitud de onda es suficientemente corta. Los otros tipos como las de sonido y de gravedad se mueven demasiado rápido, comparadas con el movimiento de los sistemas meteorológicos, en tanto que las ondas de inercia puras dificilmente existen en la atmósfera a causa de què requieren que la fuerza de presión sea nula.

Por ello, se requiere un sistema de ecuaciones que describa con exactitud las ondas de Rossby, al mismo tiempo que anule a las demás, a este hecho se refiere el problema meteorológico del filtrado.

Para resolver este problema, simplemente se procede a simplificar las ecuaciones para remover los mecanismos físicos responsables de la ocurrencia de oscilaciones indeseables, preservando los movimientos meteorológicos importantes.

Las ondas de sonido o acusticas son longitudinales, el sonido se propaga por compresiones y expansiones adiabáticas alternadas del medio creando gradientes de presión y la perturbación se mueve a la velocidad del sonido.

Dado que la presión es solamente hidrostática,ésta es determinada solamente por el peso del aire, entonces el gradiente vertical de presión no puede ser influenciado por compresiones adiabáticas y por lo tanto, las ondas de sonido no pueden propagarse verticalmente.Sí consideramos que los movimientos son hidrostáticos, remplazando la ecuación de movimiento vertical por su aproximación hidrostática, esto es suficiente para filtrar las ondas de sonido. Sin embargo, una atmósfera balanceada hidrostáticamente podrá todavía favorecer un caso especial de propagación de ondas acusticas horizontales, en este tipo de ondas la velocidad vertical es cero; pero, la presión oscila en la frontera inferior. Para filtrar éste tipo de oscilación es necesario que $\omega \equiv dp/dt = 0$ en la frontera inferior. Esta condición es facil de aplicar formulando las ecuaciones en coordenadas isobáricas. De esta manera, con una mínima simplificación se tienen filtradas las ondas de sonido.

Las ecuaciones de predicción en coordenadas isobáricas que pueden estar sujetas a la condición de $\omega = 0$ en la frontera inferior son las ecuaciones de movimiento (1.56 y 1.57), la ecuación de continuidad (2.3) y la ecuación de energía termodinámica hidrostática (3.7), las cuales se pueden escribir en notación vectorial, respectivamente como:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V}+\omega\frac{\partial\vec{V}}{\partial p}+f\hat{k}\times\vec{V}=-\nabla\Phi \qquad (4.1)$$

$$\nabla\cdot\vec{V}+\frac{\partial\omega}{\partial p}=0 \qquad (4.2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)+\sigma\omega=0 \qquad (4.3)$$

donde nuevamente $\sigma = -\frac{\alpha}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial P}$ es el parámetro de estabilidad estática.

El sistema de ecuaciones (4.1-4.3) con la condición de $\omega = 0$ en la frontera inferior tiene filtradas las ondas de sonido, pero aún captan las de gravedad, estas últimas aparecen cuando la boyancia actua como fuerza restauradora sobre parcelas de aire que se desplazan verticalmente. Un ejemplo similar es la perturbación que se propaga en la superficie de un estanque cuando se deja caer una piedra en él. Ondas similares ocurren en la atmósfera provocando que la estabilidad estática sea positiva, haciendo que una parcela desplazada verticalmente tienda a oscilar alrededor de su posición original.

Entonces, la divergencia horizontal del campo de velocidad al cambiar con el tiempo indica la propagación de ondas de gravedad, si se desprecia la razón local del cambio de divergencia horizontal al calcular el balance entre la masa y el campo de velocidad, es suficiente para filtrar la dependencia en el tiempo de las ondas de gravedad.

La ecuación de movimiento (4.1) no contiene la derivada local de la divergencia de velocidad $\nabla\cdot\vec{V}$ de manera explicita; sin embargo, el sistema de predicción puede reescribirse de manera que éste último término aparezca si se remplaza la ecuación de movimiento por las ecuaciones de vorticidad y divergencia, las cuales son formas diferenciadas de la ecuación de movimiento, usando notación vectorial se pueden obtener nuevamente. Usando la identidad vectorial

$$(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} = \nabla\left(\frac{\vec{V}\cdot\vec{V}}{2}\right) + \hat{k}\times\vec{V}\zeta$$

donde $\zeta = \hat{k}\cdot\nabla\times\vec{V}$ es la componente vertical de la vorticidad, reescribiendo (4.1) en la siguiente forma

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\nabla\left(\Phi + \frac{\vec{V}\cdot\vec{V}}{2}\right) - \hat{k}\times\vec{V}(\zeta + f) - \omega\frac{\partial \vec{V}}{\partial P} \qquad (4.4)$$

de esta ecuación se obtienen las ecuaciones de vorticidad y divergencia, usando los operadores vectoriales $\hat{k}\cdot\nabla x(\ )$ y $\nabla\cdot(\ )$, respectiva - mente, la ecuación de vorticidad correspondiente es

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\vec{V}\cdot\nabla(\zeta + f) - \omega\frac{\partial \zeta}{\partial P} - (\zeta + f)\nabla\cdot\vec{V} + \hat{k}\cdot\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial P}\times\nabla\omega\right) \qquad (4.5)$$

y la ecuación de la divergencia (4.6) es

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot V) = -\nabla^2\left(\Phi + \frac{V\cdot V}{2}\right) - \nabla\cdot\left[\hat{k}\times V(\zeta + f)\right] - \omega\frac{\partial}{\partial P}(\nabla\cdot V) - \frac{\partial V}{\partial P}\cdot\nabla\omega$$

Las ecuaciones (4.5) y (4.6) son escalares e independientes, las cuales pueden ser usadas en lugar de las ecuaciones de movimiento horizontal del sistema de predicción y haciendo el lado izquierdo de (4.6) igual a cero. quedan filtradas las ondas de gravedad, además deben despreciarse los términos de segundo orden usando el análisis de escala.

4.2 ECUACIONES FILTRADAS DE PRONOSTICO.

Como todo campo de velocidad puede ser dividido en dos partes, una nodivergente V_ψ más otra divergente Ve, se tiene que

$$\vec{V} = \vec{V}_\psi + \vec{V}_e \qquad (4.7)$$

donde se cumple $\nabla\cdot\vec{V}_\psi = 0$ y $\nabla\times\vec{V}_e = 0$

Si el campo es en dos dimensiones, la parte nodivergente puede expresarse en términos de la función corriente, definida como

$$\vec{V}_\psi = \hat{k}\times\nabla\psi \qquad (4.8)$$

cuyas componentes cartesianas son

$$U_\psi = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad v_\psi = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

las que cumplen con

$$\nabla \cdot \vec{V}_\psi = 0 \quad y \quad \zeta \equiv \hat{k} \times \nabla \times \vec{V} = \nabla^2 \psi$$

Siendo las lineas de corriente ψ - esto es, lineas que son siempre paralelas a la velocidad instantanea del viento - correspondientes a la velocidad nodivergente y la distancia de separación entre ellas es proporcional a la magnitud de la velocidad nodivergente.

De acuerdo con el análisis de escala la ecuación de vorticidad para movimientos sinópticos en latitudes medias debe contener un viento $\vec{V}$ casinodivergente, esto es

$$\left|\vec{V}_\psi\right| \gg \left|\vec{V}_e\right|$$

O sea que, en primera aproximación, se puede remplazar $\vec{V}$ por $\vec{V}_\psi$, tanto en (4.5) como en (4.6), excepto en los términos que involucran la divergencia horizontal. De esta manera, se obtienen las ecuaciones de vorticidad y divergencia, válidas en latitudes medias para movimientos a escala sinóptica.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\vec{V}_\psi \cdot \nabla(\zeta + f) - f_0 \nabla \cdot \vec{V}_e \qquad (4.9)$$

$$\nabla^2 \Phi = -f_0 \nabla \cdot (\hat{k} \times \vec{V}_\psi) = f_0 \nabla^2 \psi \qquad (4.10)$$

La ecuación (4.10) en una primera aproximación es la vorticidad del viento geostrófico calculada con un valor del parámetro de Coriolis a una latitud media constante. En consecuencia la función corriente puede ser aproximada por $\psi \simeq \frac{\Phi}{f_0}$. De tal forma que, el campo del geopotencial es aproximadamente proporcional al campo de la función corriente, en consecuencia

$$V_\psi \simeq \frac{\hat{k} \times \nabla \Phi}{f_0} \qquad (4.11)$$

Así, se obtienen las ecuaciones de vorticidad geostrófica y de energía termodinámica hidrostática ya filtradas, y en términos de la función corriente ψ

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi = -V_\psi \cdot \nabla\left(\nabla^2\psi + f\right) + f_0\frac{\partial \omega}{\partial p} \qquad (4.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi}{\partial p}\right) = -V_\psi \cdot \nabla\left(\frac{\partial \psi}{\partial p}\right) - \frac{\sigma\omega}{f_0} \qquad (4.13)$$

Para obtener el diagnóstico del campo de ω en el instante que es conocido el campo de ψ, se eliminan las derivadas respecto al tiempo en (4.12) y (4.13), obteniendose la llamada Ecuación Omega.

$$\left(\nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\right)\omega \doteq \frac{f_0}{\sigma}\frac{\partial}{\partial p}\left[\vec{V}_\psi \cdot \nabla\left(\nabla^2\psi + f\right)\right] - \frac{f_0}{\sigma}\nabla^2\left[\vec{V}_\psi \cdot \nabla\left(\frac{\partial \psi}{\partial p}\right)\right] \qquad (4.14)$$

4.3 EL MODELO BAROCLINICO DE DOS NIVELES.

Los procesos de advección térmica son esenciales para el desarrollo de sistemas sinópticos, es por ello que los modelos conocidos como Barotrópico Simple y el Equivalente, no pueden pronosticar el desarrollo de nuevos sistemas, ya que no admiten la advección de temperatura. Los modelos barotrópicos son realmente fórmulas de extrapolación las cuales establecen que la distribución de vorticidad vertical en cualquier instante es advectivo isobáricamente por el campo de viento. El hecho de que la prognosisi barotrópica es bastante efectiva para predecir la evolución del flujo medio tróposferico para períodos de dos a tres días, indica que a corto plazo, la advección de vorticidad barotrópica es el mecanismo primario que gobierna el flujo. Esto simplemente refleja el carácter casihorizontal y casinodivergente del flujo en latitudes medias a escala sinóptica.

Sin embargo, la pura advección del campo de circulación inicial no es claramente satisfactoria si se quiere producir pronosticos consistentes con la realidad. En resumen, es necesario predecir el desarrollo de nuevos sistemas. Para ello deben incluirse los procesos de advección térmica, los cuales son esenciales para el desarrollo baroclínico, lo que implica usar un modelo que involucre más de un nivel de datos en la atmósfera y el uso explicito de la ecuación de energía termodinámica.

Más de un nivel es requerido para poder calcular la advección de temperatura midiendo la diferencia del geopotencial entre dos niveles.

El modelo más simple que puede incorporar los procesos baroclínicos de advección es uno en el cual el geopotencial es pronosticado en dos niveles. El espesor o temperatura media puede ser entonces representada por la diferencia de geopotenciales entre esos dos niveles.

Para obtener el modelo se divide la atmósfera en cuatro espesores o capas, numeradas del 0 al 4, como se muestra en la figura 4.1.

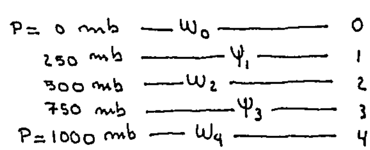


Fig 4.1. Modelo Baroclínico de dos parámetros.

Aplicando la ecuación filtrada de vorticidad (4.12) en los niveles 1 y 3, debe evaluarse el término de la divergencia $\frac{\partial \omega}{\partial P}$ en cada nivel. Por diferencias finitas se aproximan las derivadas verticales, obteniendo

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial P}\right)_1 \simeq \frac{\omega_2 - \omega_0}{\Delta P} , \qquad \left(\frac{\partial \omega}{\partial P}\right)_3 \simeq \frac{\omega_4 - \omega_2}{\Delta P}$$

donde ΔP es el intervalo de presión entre los niveles 0 - 2 y 2 - 4 ; de esta manera, las ecuaciones filtradas de vorticidad en los niveles 1 y 3 quedan expresadas como

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi_1 = -\left(\hat{k}\times\nabla\psi_1\right)\cdot\nabla\left(\nabla^2\psi_1+f\right)+\frac{f_0}{\Delta P}\omega_2 \qquad (4.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi_3 = -\left(\hat{k}\times\nabla\psi_3\right)\cdot\nabla\left(\nabla^2\psi_3+f\right)-\frac{f_0}{\Delta P}\omega_2 \qquad (4.16)$$

recordando que $\omega_4 = 0$ a nivel del suelo.

Ahora, aplicando la ecuación filtrada de la energía termodinámica hidrostática (4.13), se evalua $\partial\psi/\partial P$ usando diferencias finitas

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial P}\right)_2 \simeq \frac{\psi_3 - \psi_1}{\Delta P}$$

quedando (4.13) como

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi_1-\psi_3\right) = -\left(\hat{k}\times\nabla\psi_2\right)\cdot\nabla\left(\psi_1-\psi_3\right)+\frac{\sigma\Delta P}{f_0}\omega_2 \qquad (4.17)$$

El primer término del lado derecho de (4.17) es la advección del espesor 250-750 mb por el viento a 500 mb, el cual será ahora el viento medio de la capa. Sin embargo, ψ_2 la función corriente a 500 mb, no es una cantidad predecible en este modelo y se obtiene por interpolación lineal entre 250 y 750 mb;

$$\psi_2 = \frac{1}{2}\left(\psi_1 + \psi_3\right) \qquad (4.18)$$

Con esta fórmula de interpolación, (4.15) y (4.16) se tiene un grupo de ecuaciones de predicción para las variables ψ_1, ψ_2, ψ_3.

Definiendo el parámetro adimensional

$$\lambda^2 \equiv f_0^2 / \sigma (\Delta P)^2$$

se puede eliminar ω_2 entre (4.15) y (4.16), a manera de obtener dos ecuaciones en ψ_1 y ψ_3 solamente. Si primero se suman (4.15 y 4.16) se obtiene (4.19)

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2(\psi_1+\psi_3) = -(\hat{k}\times\nabla\psi_1)\cdot\nabla(\nabla^2\psi_1+f) - (\hat{k}\times\nabla\psi_3)\cdot\nabla(\nabla^2\psi_3+f) \qquad (4.19)$$

Si ahora se resta (4.16) de (4.15) y al resultado se le suma $(-2\lambda^2)$ veces la (4.17) se obtiene la (4.20)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left[(\nabla^2-2\lambda^2)(\psi_1-\psi_3)\right] = &-(\hat{k}\times\nabla\psi_1)\cdot\nabla(\nabla^2\psi_1+f)\\ &+(\hat{k}\times\nabla\psi_3)\cdot\nabla(\nabla^2\psi_3+f)\\ &+2\lambda^2(\hat{k}\times\nabla\psi_2)\cdot\nabla(\psi_1-\psi_3) \qquad (4.20)\end{aligned}$$

La ecuación (4.19) se interpreta como la razón local del cambio de vorticidad vertical promediada (esto es, el promedio de las vorticidades de 250 y 750 mb) que es igual al promedio de las advecciones de vorticidad a 250 y 750 mb. Esta ecuación (4.19) gobierna la parte barotrópica del flujo.

La ecuación (4.20) es la ecuación de la tendencia del espesor, entre los niveles 1 y 3. Esta ecuación establece que la razón local del cambio del espesor de 250-750 mb es proporcional a la diferencia de advecciones de vorticidad entre 250 y 750 mb más la advección térmica.

El mecanismo físico expresado por los términos de la derecha de (4.20) son identicos a los contenidos en la ecuación de diagnóstico llamada de la tendencia.

4.4 SOLUCION NUMERICA DEL MODELO BAROCLINICO DE DOS NIVELES.

Al resolver numéricamente las ecuaciones (4.19) y (4.20) se obtiene la tendencia de $\left[\psi_1+\psi_3\right]$ y de $\left[\psi_1-\psi_3\right]$, que al ser integradas en el tiempo éstas soluciones, se tendrá el pronostico de ψ_1 y ψ_3, y por lo tanto, los geopotenciales correspondientes a 250 y 750 mb.

Para encontrar la solución numérica de las tendencias, las ecuaciones (4.19) y (4.20) debén ser escritas en diferencias finitas y la solución se obtiene por el método de Relajación.

Al integrar en el tiempo, el primer paso debe realizarce por el método de diferencias finitas adelantada y los siguientes, por el de diferencias finitas centradas.

El pronóstico de $\left[\psi_1+\psi_3\right]$ y de $\left[\psi_1-\psi_3\right]$ permite conocer individualmente el correspondiente a ψ_1 y ψ_3, mediante las relaciones :

$$\psi_1 = \frac{\left[\psi_1+\psi_3\right]+\left[\psi_1-\psi_3\right]}{2} \qquad (4.21)$$

$$\psi_3 = \frac{\left[\psi_1+\psi_3\right]-\left[\psi_1-\psi_3\right]}{2} \qquad (4.22)$$

Aplicando la ecuación (4.18) se obtiene ψ_2, y en consecuencia el geopotencial al nivel de 500 mb.

De manera mas específica lo antes indicado, las ecuaciones (4.19) y (4.20) pueden ser reescrita en términos de la vorticidad, ya que

$$\zeta \equiv \hat{k} \times \nabla \times \vec{V} = \nabla^2 \psi$$

Entonces

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2(\psi_1+\psi_3) = -(\hat{k}\times\nabla\psi_1)\cdot\nabla(\zeta_1+f) - (\hat{k}\times\nabla\psi_3)\cdot\nabla(\zeta_3+f)$$

$$= -\left[\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\frac{\partial(\zeta_1+f)}{\partial y} - \frac{\partial\psi_1}{\partial y}\frac{\partial(\zeta_1+f)}{\partial x}\right] - \left[\frac{\partial\psi_3}{\partial x}\frac{\partial(\zeta_3+f)}{\partial y} - \frac{\partial\psi_3}{\partial y}\frac{\partial(\zeta_3+f)}{\partial x}\right]$$

utilizando la notación del Jacobiano $J(A,B)$

$$J(A,B) = \left[\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial x}\right]$$

la ecuación (4.19) queda expresada finalmente como

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2(\psi_1+\psi_3) = -\left[J(\psi_1,\zeta_1) + J(\psi_3,\zeta_3) + J(\psi_1+\psi_3, f)\right] \qquad (4.23)$$

$$= -F(x,y)$$

donde $F(x,y)$ es lado derecho de la ecuación. Si $\psi_1+\psi_3 = A$ entonces la ecuación (4.23) se expresa como

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 A = \nabla^2\frac{\partial A}{\partial t} = \nabla^2 T_A$$

donde T_A se puede denominar la Tendencia de $(\psi_1 + \psi_3)$ así, la ecuación (4.23) se puede escribir de manera abreviada:

$$\nabla^2 T_A + F = 0 \qquad (4.24)$$

Siguiendo el procedimiento anterior para la ecuación (4.20) tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(\nabla^2 - 2\lambda^2)(\psi_1-\psi_3)\right] = -(\hat{k}\times\nabla\psi_1)\cdot\nabla(\zeta_1+f) + (\hat{k}\times\nabla\psi_3)\cdot\nabla(\zeta_3+f)$$
$$+ 2\lambda^2(\hat{k}\times\nabla\psi_2)\cdot\nabla(\psi_1-\psi_3)$$

la cual expresada en términos de la notación jacobiana es:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(\nabla^2-2\lambda^2)(\psi_1-\psi_3)\right]=-J(\psi_1,\zeta_1)+J(\psi_3,\zeta_3)-J(\psi_1-\psi_3,f)$$
$$+\lambda^2 J(2\psi_2,\psi_1-\psi_3)$$

según la ecuación (4.18) $\psi_2=\frac{1}{2}(\psi_1+\psi_3)$ entonces la ecuación la podemos expresar en términos de ψ_1 y ψ_3 solamente,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(\nabla^2-2\lambda^2)(\psi_1-\psi_3)\right]=-J(\psi_1,\zeta_1)+J(\psi_3,\zeta_3)-J(\psi_1-\psi_3,f)$$
$$+\lambda^2 J(\psi_1+\psi_3,\psi_1-\psi_3) \qquad (4.25)$$
$$=F'(x,y)$$

Si, ahora $B=(\psi_1-\psi_3)$ y $F'(x,y)$ es el lado derecho de (4.25), obtenemos la forma abreviada correspondiente:

$$\nabla^2 T_B-2\lambda^2 T_B=F' \qquad (4.26)$$

donde T_B se denomina la Tendencia de $(\psi_1-\psi_3)$

Las ecuaciones (4.24) y (4.26) deben ser resueltas para T_A y T_B, respectivamente. La primera es del tipo de Poisson y la segunda del tipo de Helmholtz, las expresiones $F(x,y)$ y $F'(x,y)$ se obtienen numéricamente calculando los jacobianos siguiendo el procedimiento de Arakawa (Apendice A).

Las tendencias T_A y T_B se obtienen por el método de Relajación Simultanea. Las ecuaciones deben ser resueltas para cada punto de la malla que forma el campo observado de los niveles 1 y 3.

En la figura 4.2 el punto O representa un punto cualquiera donde se va a calcular la Tendencia, los puntos 1,2,3,4 son sus vecinos y D es la distancia entre ellos, entonces el laplaciano $\nabla^2 T$ expresado en diferencias finitas es $\nabla^2 T\simeq\frac{T_1+T_2+T_3+T_4-4T_0}{D^2}\equiv\psi^2 T$

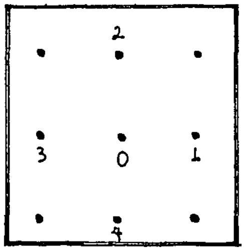


Fig 4.2. Puntos de una malla para diferencias finitas.

Para el caso de la tendencia T_A la ecuación (4.24) se expresa como

$$T_1^{\nu} + T_2^{\nu} + T_4^{\nu} + T_3^{\nu} - 4T_0^{\nu} = -D^2F_0 + R_0^{\nu} \qquad (4.27)$$

donde R_o^{ν} representa el residuo, que es una medida entre la diferencia de una estimación inicial y la solución verdadera, ya que el método de relajación es un proceso iterativo en el que deben irse estimando los valores de T_A hasta que se satisfaga la ecuación; así, ν representa la ν-esima estimación. Si el método es convergente, T debe aproximarse a una solución verdadera, cuando $\nu \rightarrow \infty$.

El residuo puede irse reduciendo a cero por nuevas estimaciones de To, que son definidas por

$$T_0^{\nu+1} = T_0^{\nu} + \frac{R_0^{\nu}}{4} \qquad (4.28)$$

Los residuos pueden calcularse de la ecuación (4.27) para cualquier orden de estimación, así

$$R_0^{\nu} = D^2F_0 + \nabla^2 T \qquad (4.29)$$

Siguiendo el proceso se obtiene la tendencia T_A del campo inicial.

El pronóstico de la futura circulación se realiza extrapolando hacia adelante en el tiempo usando la aproximación de diferencias finitas centradas, para el caso de $A = (\psi_1 + \psi_3)$, la expresión es

$$A(t_o+\delta t) = A(t_o-\delta t) + 2\delta t\, T_A(t_o) \qquad (4.30)$$

en este esquema se requiere conocer A, dos veces en el tiempo, $A(t_o-\delta t)$ y $A(t_o)$ para calcular $A(t_o+\delta t)$. Entonces, para el primer paso de tiempo se usa una diferencia adelantada e iniciar el pronóstico, el cual se realiza por una sucesión de pasos de tiempo hasta alcanzar el período de pronóstico deseado. Así, el primer paso de tiempo es

$$A(\delta t) = A(t_o=0) + \delta t\, T_A(t_o=0) \qquad (4.31)$$

El tamaño de los incrementos δt de tiempo es de crucial importancia, valores grandes de δt tienden a dar malas aproximaciones. También, la inestabilidad computacional se produce al seleccionar la distancia D y el incremento de tiempo de manera independiente. Ellos deben escogerse de tal forma que las ondas rápidas en la solución se muevan menos de un tamaño de malla en un incremento de tiempo.

El criterio que debe satisfacer δt y D, es

$$\frac{C\,\delta t}{D} < \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (4.32)$$

donde C es la rapidez de onda. Si el criterio (4.32) no es satisfecho, ondas espurias son introducidas, las cuales se amplifican rápida-- mente, de manera que el campo calculado de ψ no se parece al que debe ser la solución real o correcta.

La inestabilidad computacional es una razón para usar ecuaciones filtradas y el sistema cuasigeostrófico, donde ondas de gravedad y sonido han sido filtradas. En estos términos, la velocidad C debe ser la máxima rapidez del viento, tipicamente, C 50 m/s; así para un tamaño de malla de 200 Km, un incremento de tiempo de una hora es permisible.

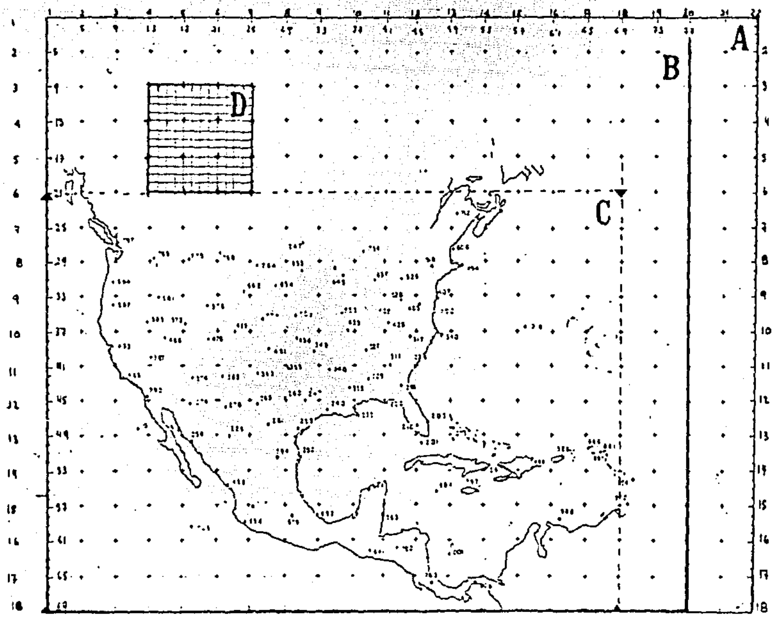
4.5 EL PROCESO COMPUTACIONAL.

Para entender mejor el proceso de obtener la solución numérica del modelo es necesario indicar que se requiere de un procesador electrónico o computador y de un lenguaje de programación adecuado para que se realicen los cálculos numéricos. En este caso se utilizó el FORTRAN IV como lenguaje y el procesador Burroughs B 7800 de la Dirección de Cómputo Acádemico de la UNAM.

Para iniciar el proceso se parte de un conjunto de datos observados con los que se realiza un análisis manual del que se crea un archivo y que lee el computador, procesa los datos y obtiene su comportamiento fúturo.

La distribución de estaciones que reportan los datos de las alturas geopotenciales de los niveles de 250 y 700 mb están indicados en la fig. 4.2, cuyo mapa corresponde a la IV Región Meteorológica, en la misma está marcada la malla (A) de 18 x 22 puntos, la parte (B) corresponde en un caso a una de 18 x 20 puntos que al igual que la primera la distancia de malla es de 462.842 Km, de donde se obtiene el archivo de datos observados a partir del análisis manual. El área marcada con (C) es la parte de la IV Región que se gráfica con el computador; también, se da un ejemplo de la malla fina (D), donde la distancia entre puntos es de un cuarto de la anterior 115.710 Km. El área total de la malla fina es la (B) donde se tienen 69 x 77 puntos. El mapa está en una proyección cónica de Lambert.

FIG. 4.3 IV Región Meteorológica y áreas de malla ancha y fina.



La fig. 4.4 muestra un ejemplo del análisis manual de las isohipsas del nivel de 250 mb, su correspondiente graficación computarizada tomando los valores interpolados para la malla fina se muestra en la fig. 4.5, estos últimos datos son los utilizados para obtener el pronóstico a 24 h que es mostrado en el capítulo siguiente

La secuencia que sigue el programa para obtener la solución numérica del pronóstico es dada por su diagrama de flujo, cuya narración es la siguiente;

De un campo de alturas o isohipsas como el de la fig.4.4 se crea el archivo de datos observados de la malla ancha, interpolando en forma

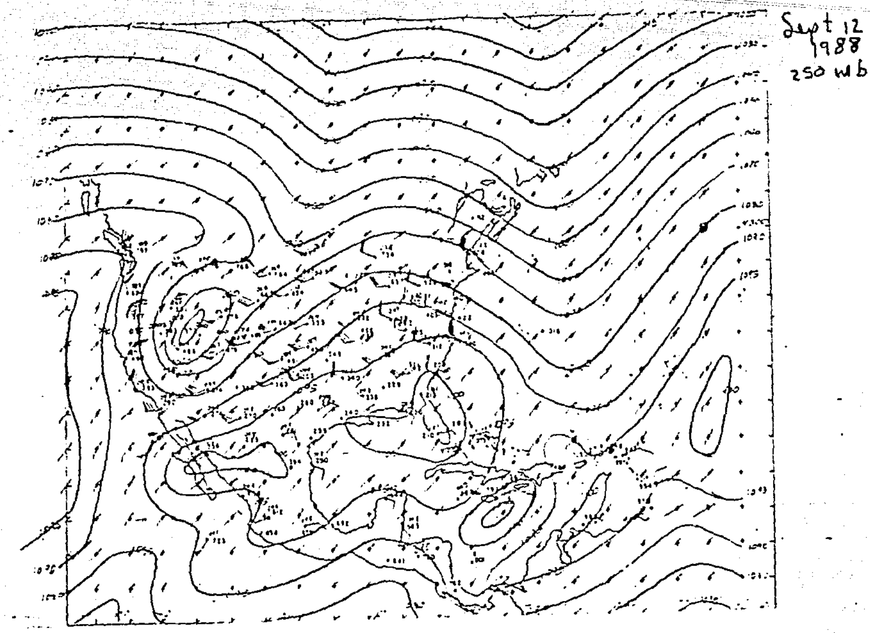


FIG. 4.4 Análisis manual de isohipsas del nivel de 250 mb.

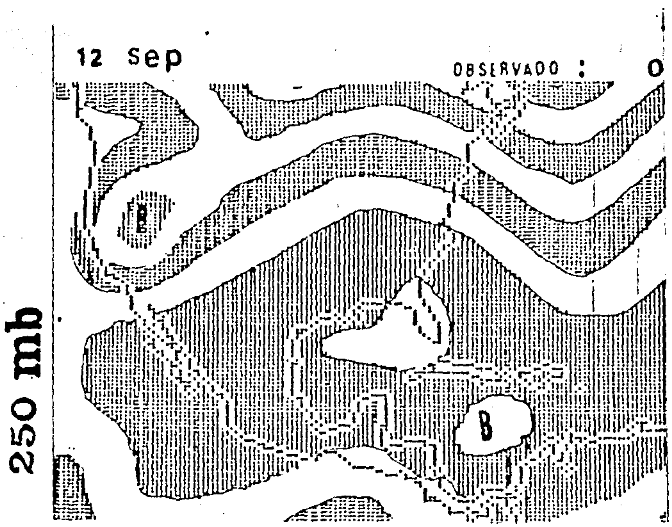


FIG 4.5 Gráfica computarizada de isohipsas del nivel de 250 mb.

visual de acuerdo con las isolíneas que pasen cerca de los puntos de la malla. Pero, para que los datos reflejen la presencia de un fenómeno del tamaño de una tormenta tropical (ciclón o huracán) se debe tener una densidad de ellos como la de una malla fina; lo que significa, leer del análisis manual 5865 datos por nivel en lugar de 360 que tiene la malla ancha de 18 x 20, lo que representa introducir 17595 para crear el archivo e incrementa la posibilidad de tener datos erroneos que generán inestabilidad computacional, siendo abortado el proceso por el computador.

Así, la forma más rápida y eficiente es mediante el programa que con una rutina de interpolación líneal genere los datos de la malla fina.

Si Z(I,J) son puntos de la malla ancha, P y Q factores de peso , el valor interpolado es ZZ(I,J).

$$ZZ(I,J) = (1-P)(1-Q)Z(I,J) + P(1-Q)Z(I,J+1) + (1-P)QZ(I+1,J) + PQZ(I+1,J+1) \qquad (4.33)$$

donde P y Q varián como se muestra en la fig. 4.6

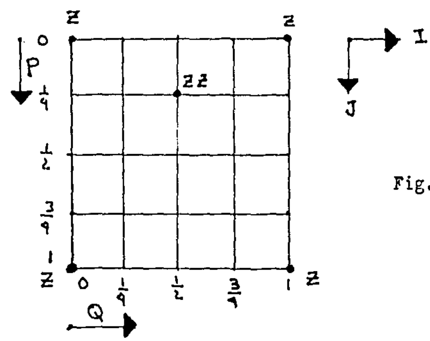


Fig. 4.6

Como se puede tener crecimiento de ondas cortas que producen inestabilidad computacional es necesario alisar los datos interpolados. El algoritmo para suavizar un valor centrado en 0 considerando los vecinos es:

$$ZZ(0) = Z(0) + \frac{1}{2} s(1-s)\left[Z(1)+Z(2)+Z(3)+Z(4)-4Z(0)\right]$$
$$+ \frac{1}{4} s \cdot s \left[Z(5)+Z(6)+Z(7)+Z(8)-4Z(0)\right] \quad , \quad s = \pm \frac{1}{2}$$

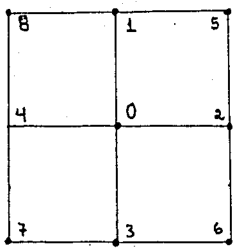


Fig. 4.7

Ya que el modelo requiere del campo de isohipsas del nivel de 750 mb éste se obtiene restandole 550 m al observado de 700 mb. Se transforman las alturas a metrogeopotenciales mediante la siguiente relación:

$$\Phi = (9.8\ Z/G\ )9.8$$

donde G es la gravedad especifica en función de la latitud de los puntos de la malla.

$$G = 9.8\left[1 - 0.0026373 \cos 2\phi + 0.0000059 \cos^2 2\phi\right]$$

La función corriente Ψ de los niveles de 250 y 750 mb es cálculada por la aproximación ya indicada en la sección 4.2

$$\Psi \simeq \frac{\Phi}{f_0}$$

donde f_0 es el parámetro de Coriolis.

Como ya se indico en la sección 4.2 el ancho de malla y el incremento de tiempo para cada paso de pronóstico no son independientes debiendo satisfacer el criterio dado por la relación (4.32). El incremento que mejores resultados dio fue de 30 min.

Para iniciar el pronóstico se requiere cálcular el campo de vorticidad

ζ_1 y ζ_3 para encontrar el valor numérico del lado derecho F y F' de las ecuaciones de pronóstico (4.23) y (4.25). Para cálcular los Jacobianos correspondientes se utilizo la técnica de Arakawa de diferencias finitas que considera los puntos adyacentes al punto central como se muestra a continuación y con ayuda de la fig. 4.8 se tiene:

$$J_0(\alpha , \beta) = (J^{++} + J^{+\times} + J^{\times +})/3$$

Explicitamente

$$J^{++} = \frac{1}{4d^2}\left[(\alpha_1 - \alpha_3)(\beta_2 - \beta_4) - (\alpha_2 - \alpha_4)(\beta_1 - \beta_3)\right]$$

$$J^{+\times} = \frac{1}{4d^2}\left[\alpha_1(\beta_5 - \beta_8) - \alpha_3(\beta_6 - \beta_7) - \alpha_2(\beta_5 - \beta_6) + \alpha_4(\beta_8 - \beta_7)\right]$$

$$J^{\times +} = \frac{1}{4d^2}\left[\beta_2(\alpha_5 - \alpha_6) - \beta_4(\alpha_8 - \alpha_7) - \beta_1(\alpha_5 - \alpha_8) + \beta_3(\alpha_6 - \alpha_7)\right]$$

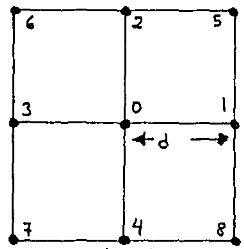


Fig. 4.8

Previo al cálculo de los Jacobianos se establecen las condiciones a la frontera, tanto para las funciones de corriente ψ_1 (a 250 mb) y ψ_3 (a 750 mb) como para la vorticidad $\zeta_1 = \nabla^2\psi_1$ y $\zeta_3 = \nabla^2\psi_3$

Para las fronteras Norte-Sur, el promedio del segundo renglón genera el primero y el promedio del penúltimo renglón da el último.

Para las fronteras Oeste-Este, la segunda columna genera la última y la penúltima da la primera columna.

Utilizando el método de Relajación Simultanea se resuelven numéricamente las ecuaciones de pronóstico para las tendencias de $A = (\psi_1 + \psi_3)$ y de $B = (\psi_1 - \psi_3)$ en cada punto de la malla por diferencias finitas, el método como se indico en la sección anterior consiste en estimar o adivinar la tendencia de manera que se satisfagan las ecuaciones, en cada estimación se obtiene un residuo que es una medida de la diferencia entre la solución verdadera y la última estimada, el proceso se realiza hasta que se cumpla el grado de exactitud fijado, en éste experimento se trabajo con un valor de convergencia de 1×10^{-4} a 1×10^{-2} quedando finalmente el último, ya que valores más pequeños implican cientos o miles de iteraciones para obtener la solución, lo que se traduce en demasiado tiempo de proceso, más de tres horas, para obtener un pronóstico a 24 h.

Conocidas las tendencias de A y B se procede a pronósticar sus valores fúturos a un lapso δt por lo que se extrapola en el tiempo usando una aproximación en diferencias finitas para obtener $A(t+\delta t)$ y $B(t+\delta t)$. En el primer paso de tiempo se utiliza una diferencia adelantada que es dada por la ec. (4.31); en los siguientes pasos, se usan diferencias centradas ec.(4.30).

Usando el campo predecido como inicial se repite el proceso a partir de cálcular la vorticidad, hasta que se cumpla el plazo de 24 h. Finalmente el pronóstico de $A = (\psi_1 + \psi_3)$ y $B\ (\psi_1 - \psi_3)$ permite conocer ψ_1 y ψ_3 individualmente con las relaciones (4.21) y (4.22), aplicando la ec.(4.18) se obtiene ψ_2 a 500 mb por interpolación lineal.

Como la altura geopotencial es proporcional a la función corriente se cálculan los campos isohipticos de 250, 500 y 750 mb por la relación $\Phi = \psi f_0$. Ya que un campo observado es el de 700 mb su correspondiente pronósticado se obtiene sumandole 550 m al de 750 mb. El proceso termina con la impresión de los campos de isohipsas pronósticadas de los niveles de 250, 500 y 700 mb.

En la tabla 4.1 se dan los parámetros y constantes usadas en el programa y su sintetización en el diagrama de flujo adjunto.

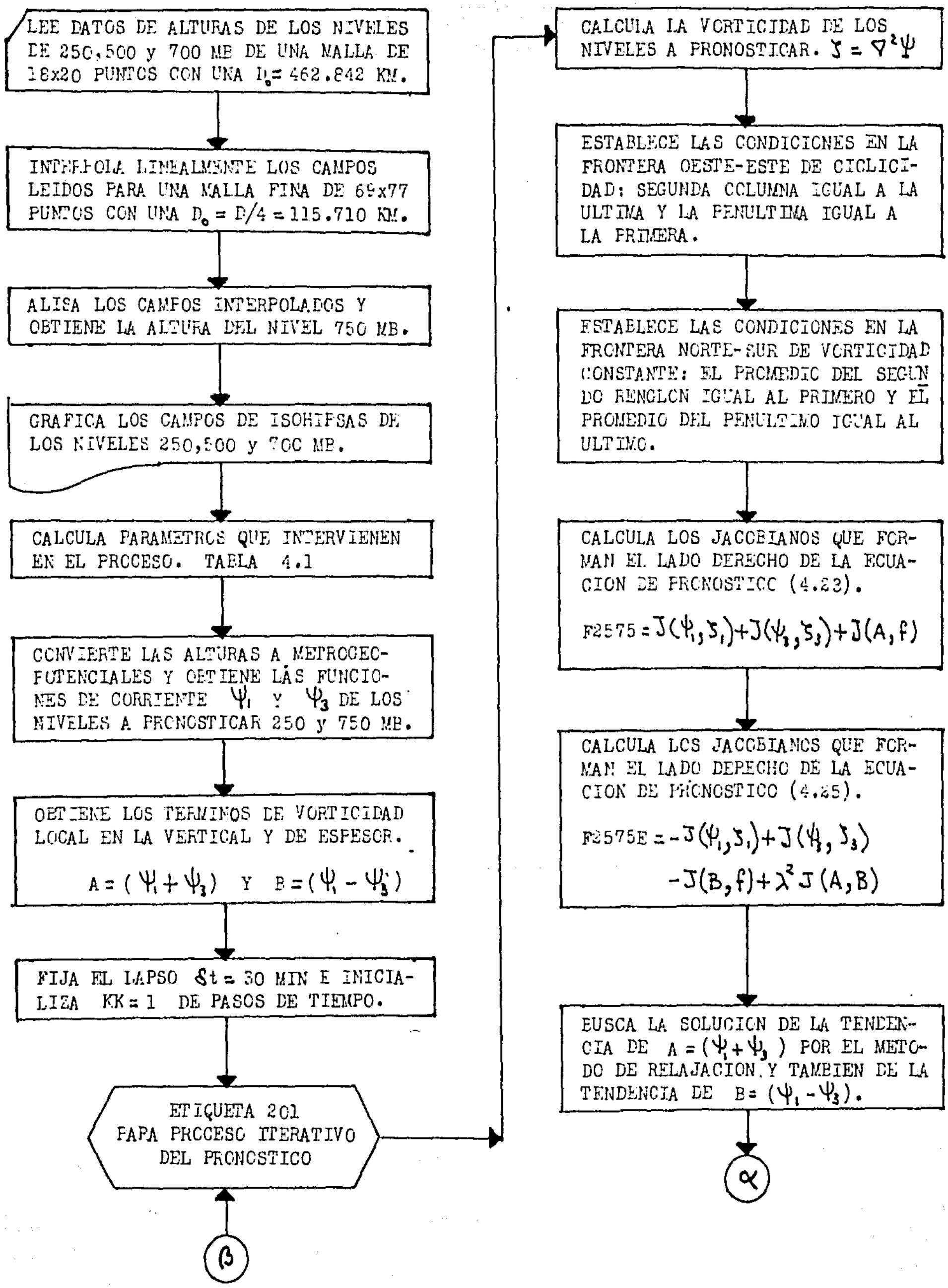
En el anexo A se muestran los análisis de los datos observado durante la presencia del huracán Gilberto en septiembre de 1988.

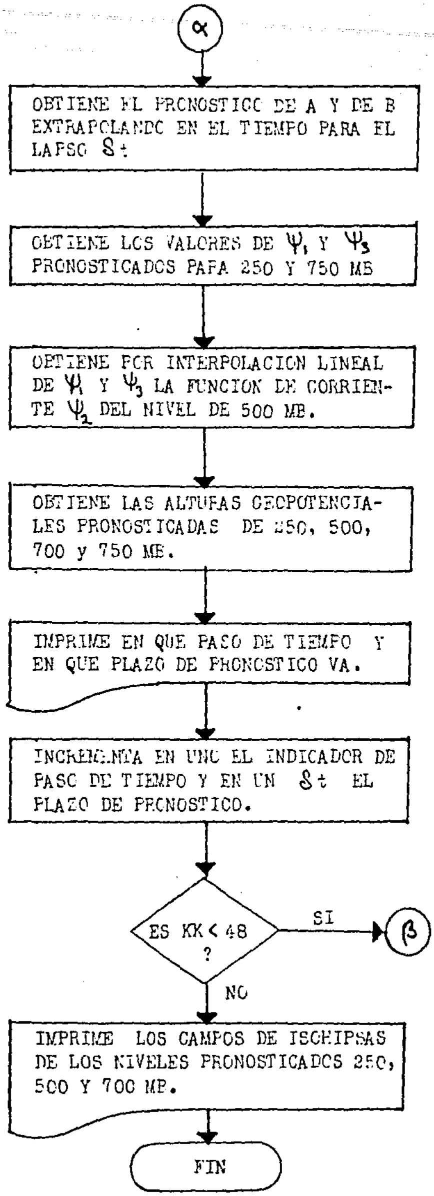
En el anexo B se muestra el programa de computadora utilizado.

TABLA 4.1 CONSTANTES Y PARAMETROS UTILIZADOS EN EL PROCESO COMPUTACIONAL.

ACELERACION DE LA GRAVEDAD	$g = 9.8$
VELOCIDAD ANGULAR DE ROTACION DE LA TIERRA.	$\Omega = 7.295 \times 10^{-5}$
PARAMETRO DE CORIOLIS A 34.5° DE LATITUD PROMEDIO.	$f_0 = 2\Omega \,\mathrm{sen}\,(34.5°)$
PARAMETRO DE CORIOLIS A LA LATITUD φ.	$f = 2\Omega \,\mathrm{sen}\,\varphi$
EXPONENTE DEL PARAMETRO DE ESCALA.	$P = 0.716$
PARAMETRO DE ESCALA. Ref. Saucier.	$D_e = \left[\dfrac{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}\right]\left[\dfrac{\mathrm{Tan}\left(\frac{\pi}{4}-2\varphi\right)}{\mathrm{Tan}\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right]^{P}$
PARAMETRO DE ESTABILIDAD ESTATICA. Ref. Charney.	$\sigma = 2 \times 10^{-6}$
PARAMETRO ADIMENSIONAL.	$\lambda^2 = \dfrac{f_0^2}{\sigma(\Delta P)^2}$, $\Delta P = 5 \times 10^4$
PARAMETRO FAC.	$F_{AC} = \dfrac{2\lambda^2}{(D_e)^2}$
PARAMETRO BAC EQUIVALENTE AL FAC.	$B_{AC} = 25 \times 10^{-13}$
PARAMETRO DE CONVERGENCIA.	$\epsilon = 1 \times 10^{-2}$

DIAGRAMA DE FLUJO DEL PROCESO COMPUTACIONAL.




α
OBTIENE EL PRONOSTICO DE A Y DE B EXTRAPOLANDO EN EL TIEMPO PARA EL LAPSO δt
OBTIENE LOS VALORES DE ψ_1 Y ψ_3 PRONOSTICADOS PARA 250 Y 750 MB
OBTIENE POR INTERPOLACION LINEAL DE ψ_1 Y ψ_3 LA FUNCION DE CORRIENTE ψ_2 DEL NIVEL DE 500 MB.
OBTIENE LAS ALTURAS GEOPOTENCIALES PRONOSTICADAS DE 250, 500, 700 y 750 MB.
IMPRIME EN QUE PASO DE TIEMPO Y EN QUE PLAZO DE PRONOSTICO VA.
INCREMENTA EN UNO EL INDICADOR DE PASO DE TIEMPO Y EN UN δt EL PLAZO DE PRONOSTICO.
ES KK < 48 ?
SI
β
NO
IMPRIME LOS CAMPOS DE ISOHIPSAS DE LOS NIVELES PRONOSTICADOS 250, 500 Y 700 MB.
FIN

CAPITULO V.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES.

5.1 RESULTADOS.

Como se menciono en el capítulo anterior, las ecuaciones de pronóstico (4.23 y 4.25), del espesor entre 250 y 750 mb y la suma de la alturas geopotenciales de los mismos niveles, son resueltas para el área correspondiente a la IV Región Meteorológica, sobre una malla interpolada de 69 x 77 puntos, donde la distancia entre ellos es de 115.710 Km, en una proyección cónica de Lambert. El registro de datos utilizado corresponde al período del 11 al 18 de septiembre de 1988, de los niveles observados de 250, 500 y 700 mb a las 12Z; fechas que estuvo presente el huracán Gilberto, que se inició en el mar de Las Antillas, después afectó las costas de la península de Yucatán, para por último cruzar el el Golfo de México e internarse en tierra por el estado de Tamaulipas.

Las gráficas obtenidas con la computadora son de las alturas geopotenciales de los niveles de 250, 500 y 700 mb de los campos observados ya interpolados y los respectivos pronósticados. Es importante hacer notar que la graficación es de forma discreta, o sea, de acuerdo con un rango de valores que se asigna a cada caracter alfabético; de manera que se tiene una visualización de área, por lo que no es posible la ubicación exacta de un fenómeno del orden de un huracán.

En la figura 5.1, se muestra el campo de las alturas geopotenciales de los niveles mencionados, observados el día 11 de septiembre de 1988; la IV Región en su parte NW se encontraba afectada por la circulación de una vaguada bastante profunda y de gran amplitud, que alcanzaba la parte SW de los Estados Unidos sobre el estado de California. En la costa norteoriental del continente américano, otra vaguada está unida por una cuña con la primera, estos sistemas tienen el clásico desplazamiento zonal que caracteriza a las latitudes medias; sobre la parte sur de la IV Región y de la República Méxicana se tenia la circulación de los vientos del Este (alisios) en los niveles de 500 y 700 mb, reforzados por un sistema de alta presión, el cual transporta la humedad adecuada para producir precipitación en el sur y parte central de nuestro país.

Es notorio ese día, la presencia del huracán Gilberto, ligeramente al Norte de las costas de Sudamérica y al Sur de la isla La Española, como se aprecia en los niveles observados de 500 y 700 mb (figura 5.1).

El pronóstico para el día 12 de septiembre a las 12Z (figura 5.2), muestra un desplazamiento hacia el Este de los sistemas descritos para latitudes medias, lo que no coincide con el campo observado (figura 5.3), donde se aprecia un reforzamiento del sistema de alta presión semipermanente del Atlántico, que provocó un péndulo brusco de la vaguada que se encontraba al NE el día anterior. Sin embargo, para el huracán Gilberto el modelo pronóstica un desplazamiento hacia el Oeste, ubicandolo al Sur de la parte occidental de la isla de Cuba, cuya posición está de acuerdo con el campo observado de 700 mb. Es importante mencionar el papel fundamental que juega el sistema de alta presión semipermanente del Atlántico en la trayectoria del huracán, ya que éste se desplazó paralelamente al sistema de alta presión.

Utilizando el campo observado del día 12 de septiembre, como el inicial para el pronóstico del día 13 de septiembre, en los campos pronósticados de 500 y 700 mb (figura 5.4), el huracán es ubicado al Sur de la parte central oriental de la isla de Cuba, posición ligeramente retrazada respecto a los campos isohípticos observados el día 13 (figura 5.5), tanto en 500 mb como en 700 mb. La vaguada de la parte NW de la IV Región prácticamente estuvo estacionaria, comportamiento detectado por el modelo.

El pronostico numérico para el día 14 de septiembre (figura 5.6), ubica al huracán frente a las costas del estado de Quintana Roo, que con respecto al campo observado de 700 mb (figura 5.7) aparece retrazada su posición, pero en realidad, la ubicación observada fué adelantada por el proceso de interpolación y alisamiento, al cual está sujeto el campo inicial, sin embargo, si se consultan las posiciones del huracán, se comprueba que se tiene un pronóstico cuasiperfecto. Como también se puede constatar en la figura 5.7 en el nivel de 500 mb.

Para el 15 de septiembre, el sistema de baja presión de la parte NE de la IV Región se a desplazado de manera notable hacia el Este, con tal energía que empieza a débilitar al sistema de alta presión que existia en nuestras latitudes,lo que incrementa el cambio de dirección del movimiento del huracán hacia el NW , tal como lo muestra la figura 5.9; posición que va de acuerdo con el campo pronósticado (figura 5.8).

Para el 16 de septiembre,la interacción del movimiento de la vaguada situada en el NE con la alta semipermanente del Atlántico creó otro pénduleo de la misma, a 90° respecto al antes mencionado, lo que provoca un cambio de circulación de la alta semipermanente hacia el Noroeste y Norte en la parte occidental del sistema, lo cual provoca que el huracán siga aproximadamente esta trayectoria y se encuentre frente a las costas de Tamaulipas (figuras 5.10 y 5.11).

El 17 de septiembre el huracán Gilberto se encontraba sobre el estado de Tamaulipas, dirigiendose al de Nuevo León, tal como se aprecia en la figura 5.12 para el campo isohipt ico pronósticado para ese día; la posición pronósticada del huracán esta de acuerdo con la reportada y no con la figura 5.13 del campo observado, el cual ha sido alterado nuevamente por la interpolación y el alisamiento del campo inicial. Por ello, la trayectoria pronósticada para el día 18 de septiembre, dista mucho de la verdadera,que debe ser sobre el estado de Texas en E.U.; es conveniente recalcar que éste mal pronóstico es debido a la mala posición del campo observado que fué alterado como ya se indico.

Es importante mencionar que el brusco cambio en la trayectoria real del huracán hacia Texas, es debido a que se incorporó a la circulación de la vaguada, desplazandose rápidamente en ese curso (figura 5.15).

Un resumen de las posiciones pronosticadas y observadas del huracán Gilberto, de acuerdo con el modelo, es dado en la figura 5.16 donde es relevante la coincidencia del movimiento pronósticado y el observado, con excepción de los días 17 y 18 de septiembre, donde hay un rompimiento brusco, resultado de la alteración del campo observado por lo ya mencionado. En la Fig. 5.17 se muestran las posiciones que realmente tuvo .

5.2 CONCLUSIONES.

El resultado obtenido con el modelo baroclínico de dos niveles es realmente sobresaliente; en particular, por su adecuado pronóstico del movimiento del huracán Gilberto, además de estar conforme con el comportamiento de la atmósfera en la IV Región Meteorológica para el período indicado.

Es primordial mencionar que tanto en pruebas numéricas preliminares como en los resultados mostrados, el modelo revela ser sumamente sensible a datos erroneos en los campos iniciales, por lo que al aplicar el método de relajación la solución no converge de manera rápida o nunca sucede, lo que se traduce en que la vorticidad promedio crece exponencialmente, no se conserva, ocurriendole lo mismo al tiempo de proceso en el computador. También, un mal pronóstico como el obtenido para el día 18 de septiembre es consecuencia de la interpolación de la malla original de 19 x 22 puntos, que por su escala no capta datos del vortice del huracán. Por lo cual, propongo que para tener un refinamiento del pronóstico se introduzcan los datos observados del fenómeno, en vez de usar los interpolados.

En general, el tiempo de proceso en el computador es excesivo, hasta 2 hr 30 min, el cual se ha incrementado notablemente con respecto a los modelos reportados por el M.en C. Enrique Buendía y colaboradores. Por lo que no es del todo operativo, a menos que se disponga de recepción automática de datos en tiempo real, así como del análisis.

Finalmente, aún se tiene mucho que aprenderse del modelo, siendo suceptible de ser mejorado, tanto en su expresión físico-matemática como en la reducción del tiempo de proceso en el computador; como ejemplo, incorporando la orografía o usando un nuevo método numérico.

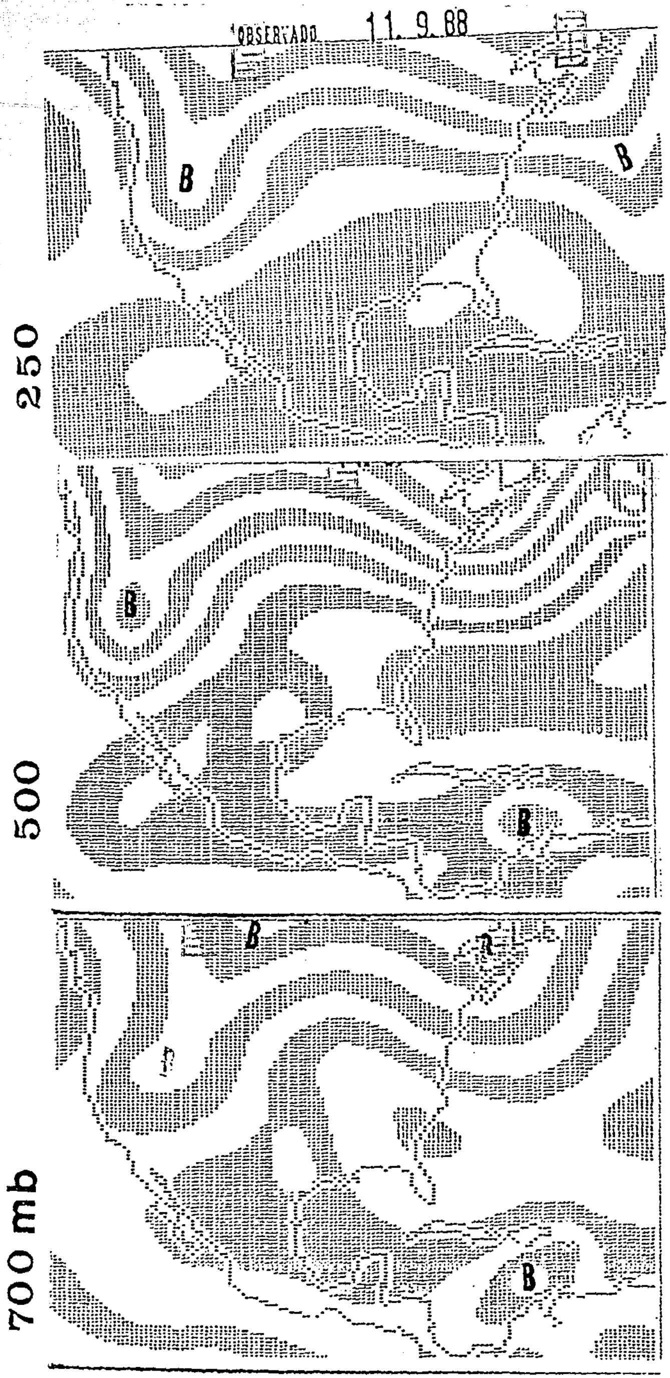


FIG 5.1

12 sep PRONOSTICO : P

250

500

700 mb

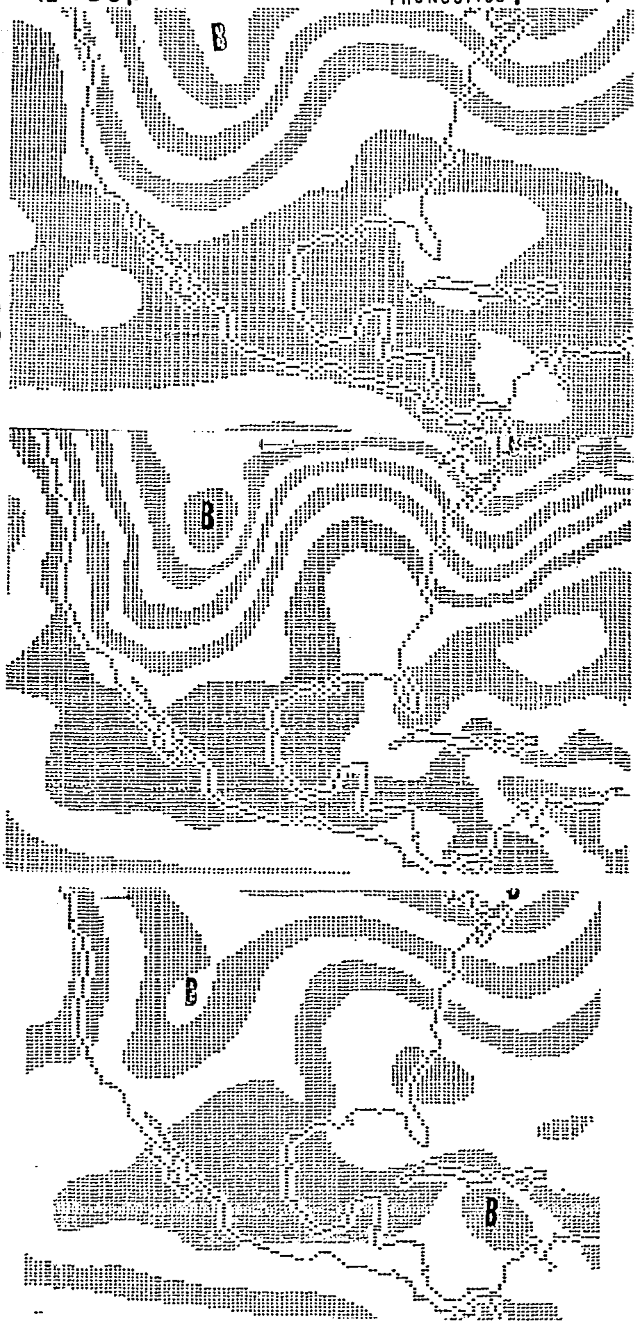


FIG 5.2

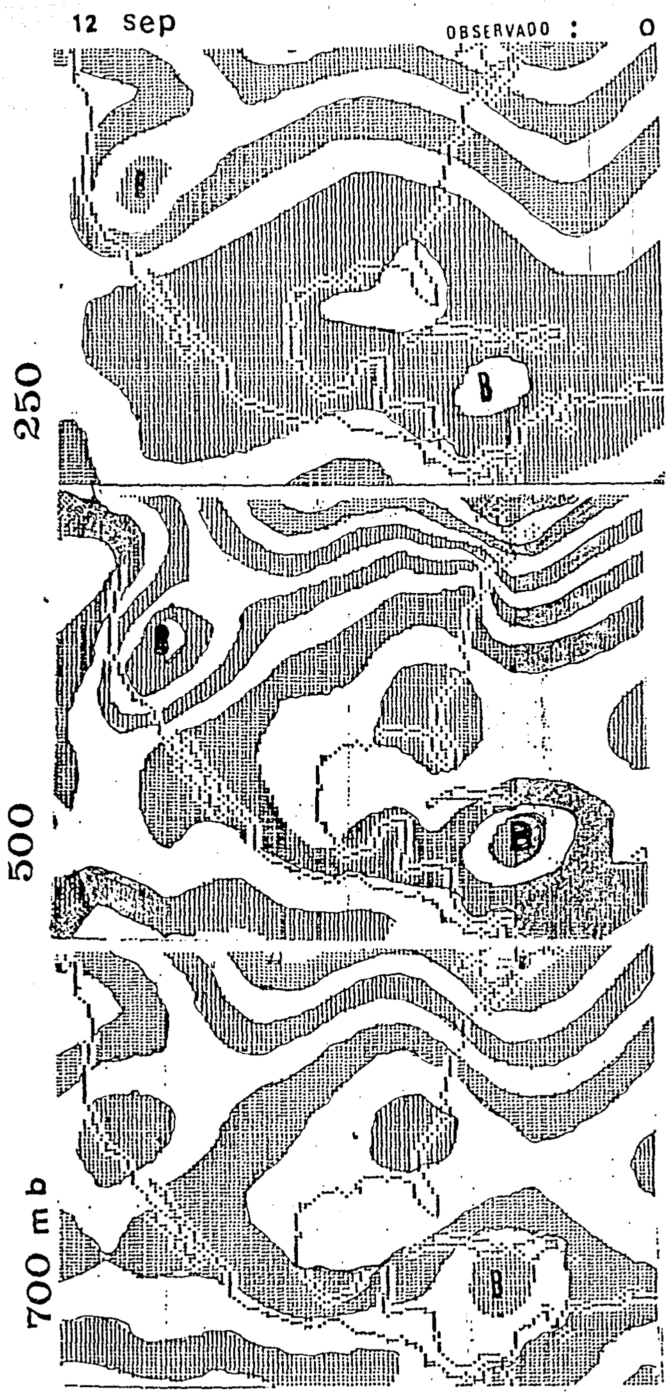


FIG 5.3

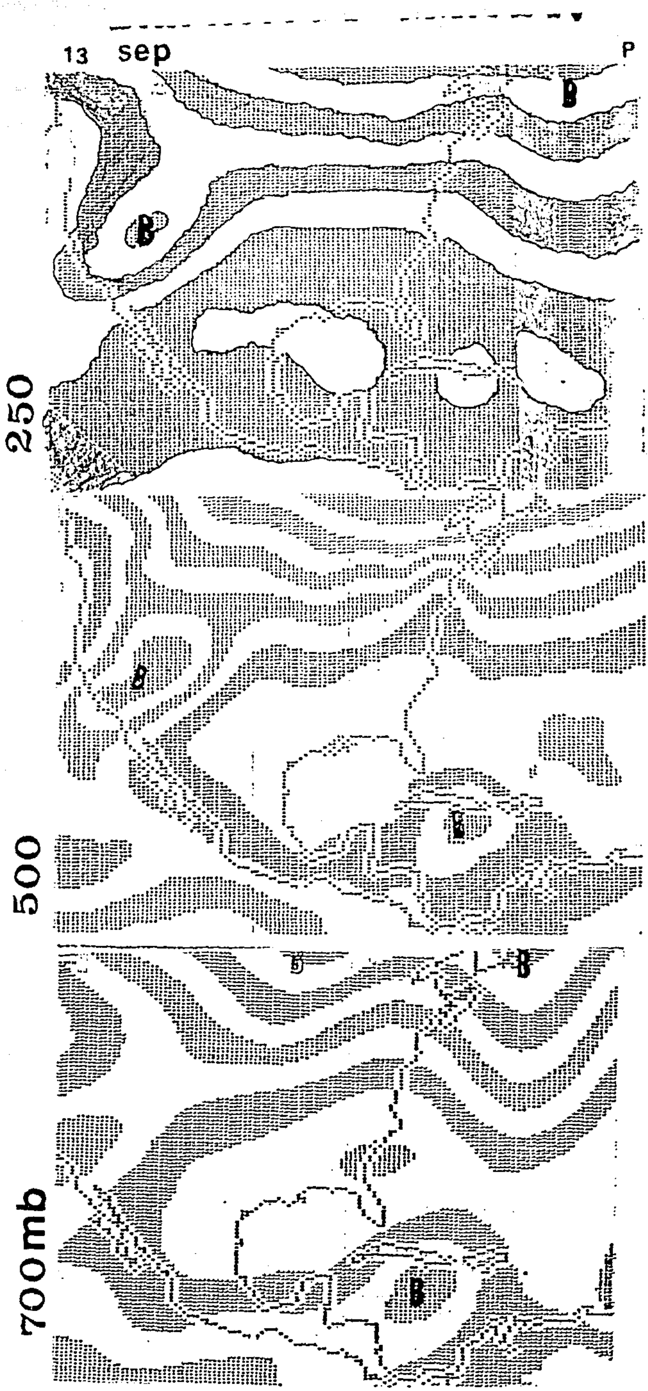


FIG 5.4

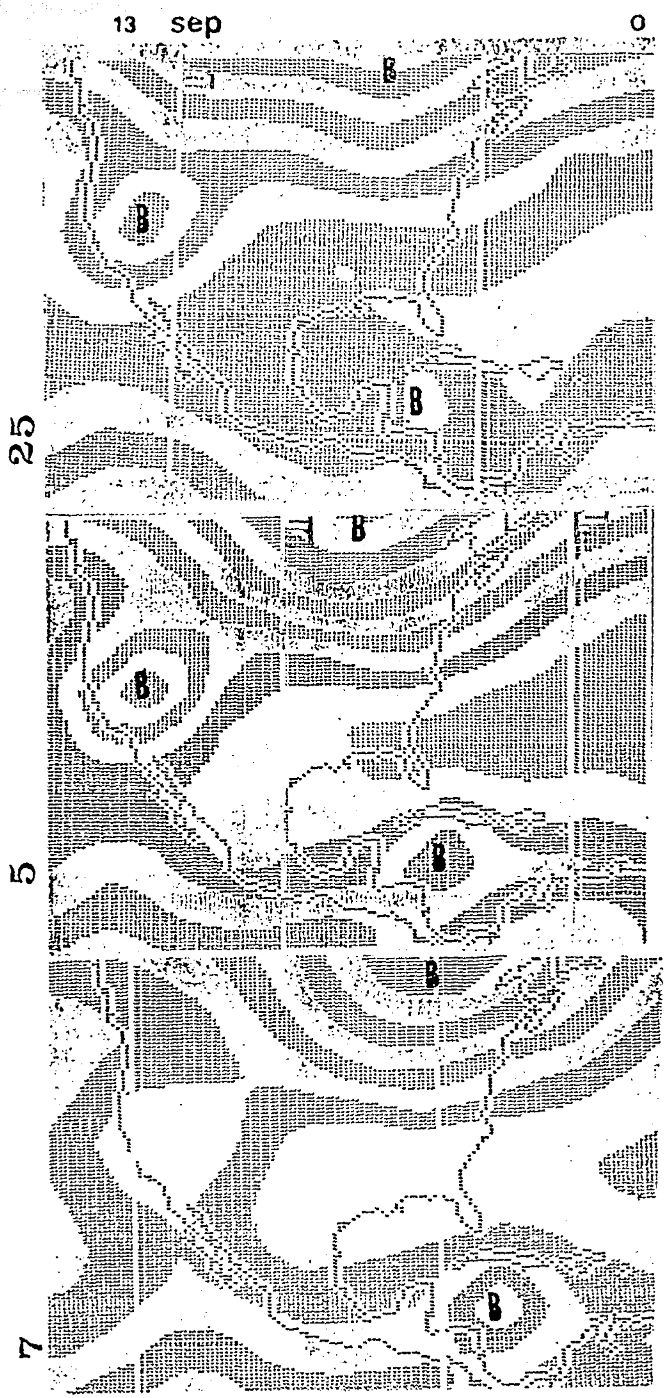


FIG 5.5

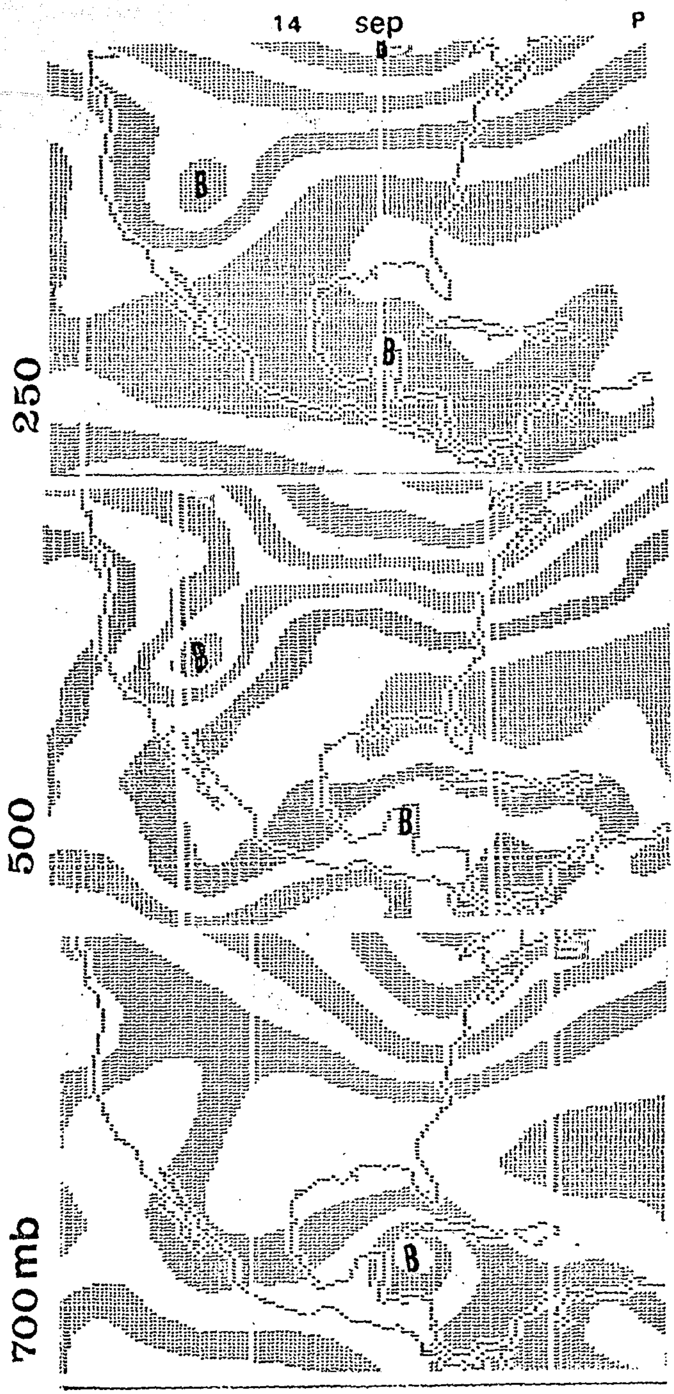


FIG 5.6

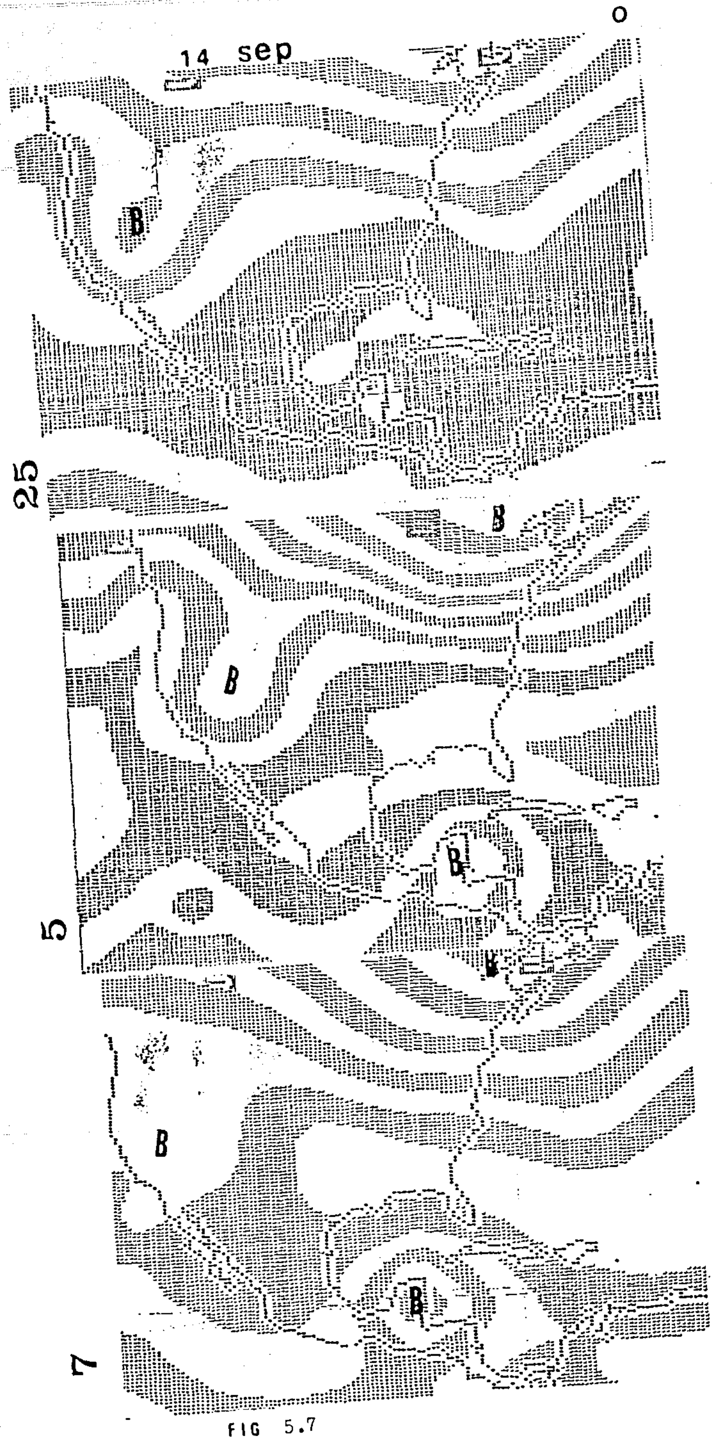


FIG 5.7

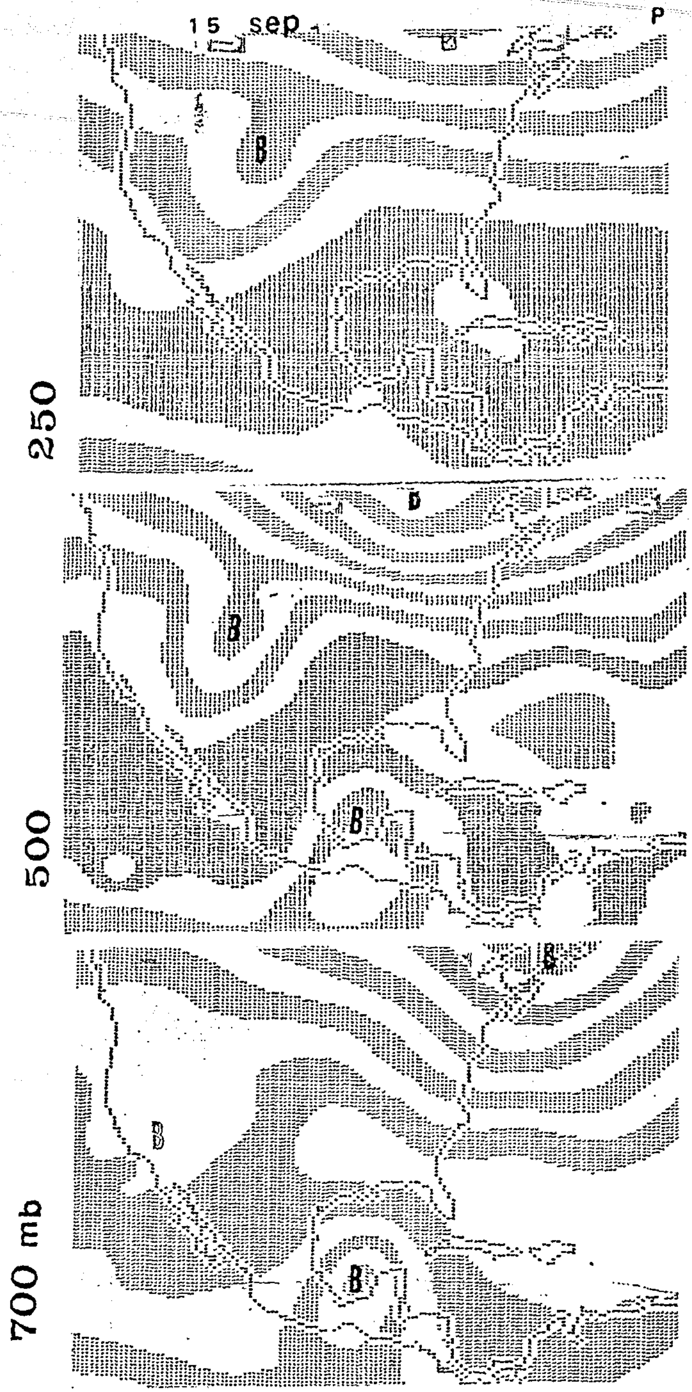


FiG 5.8

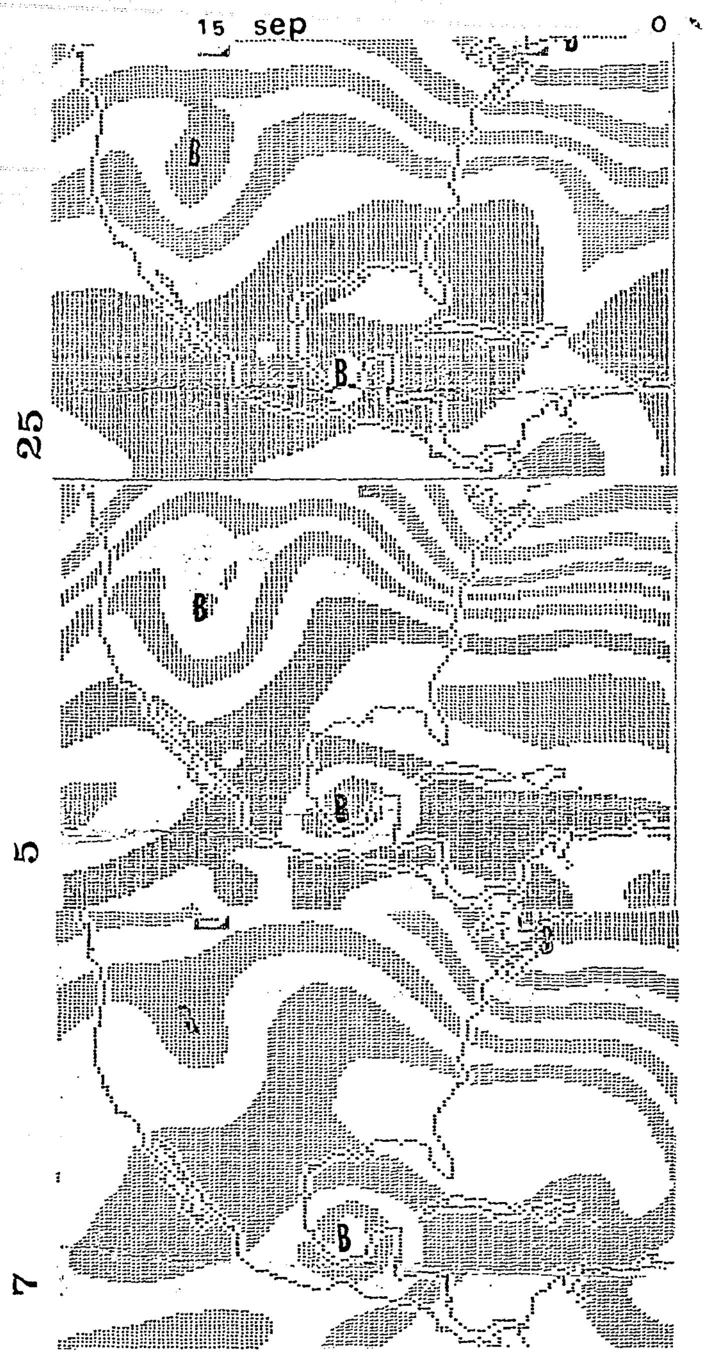


FIG 5.9

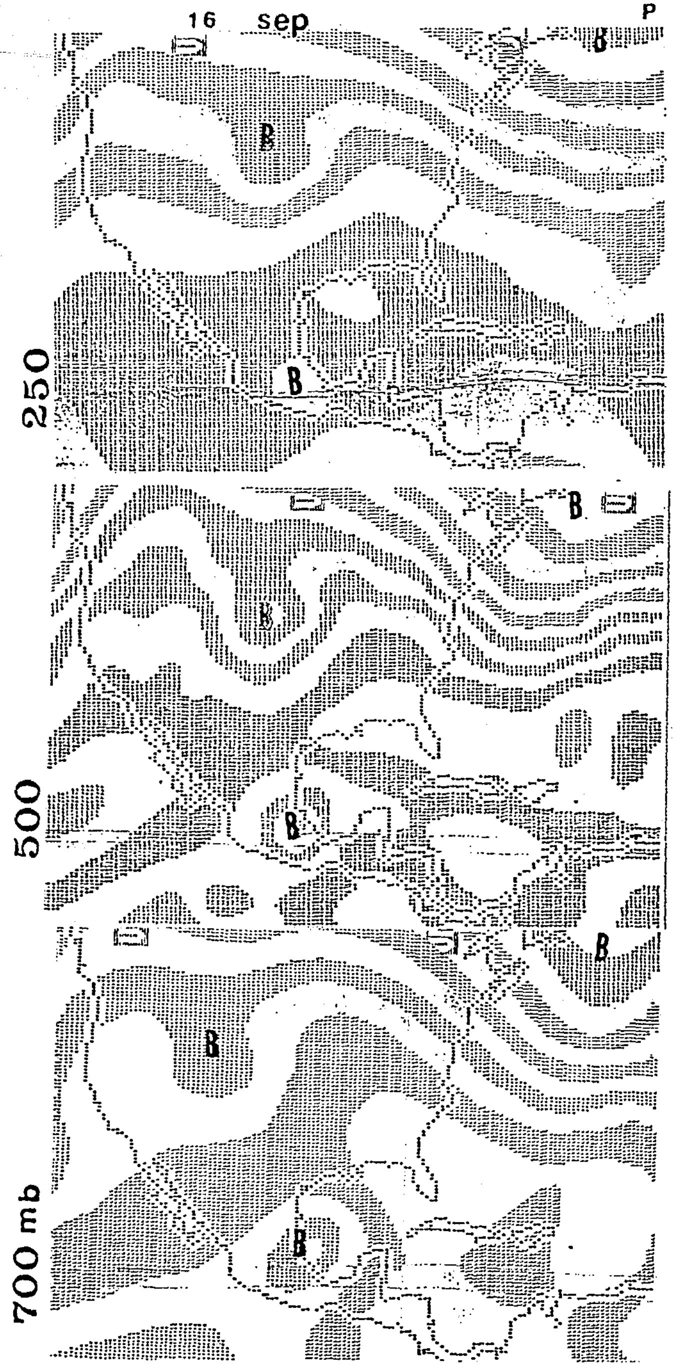


FIG 5.10

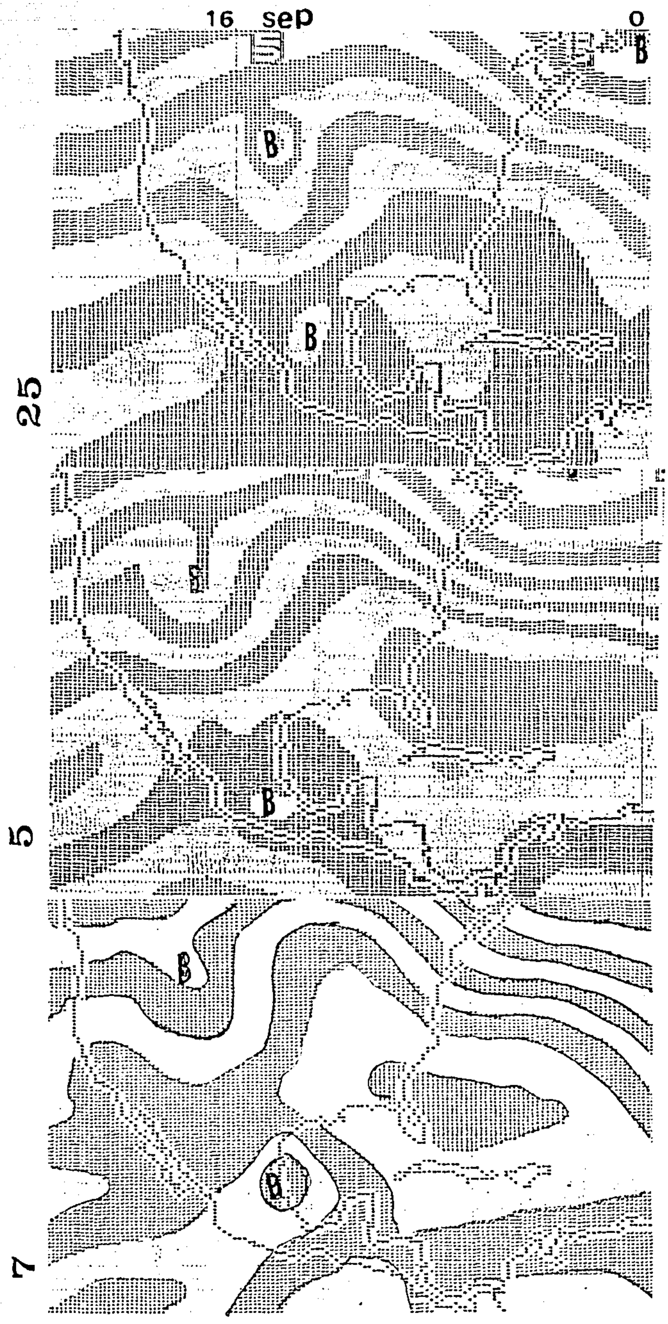


FIG 5.11

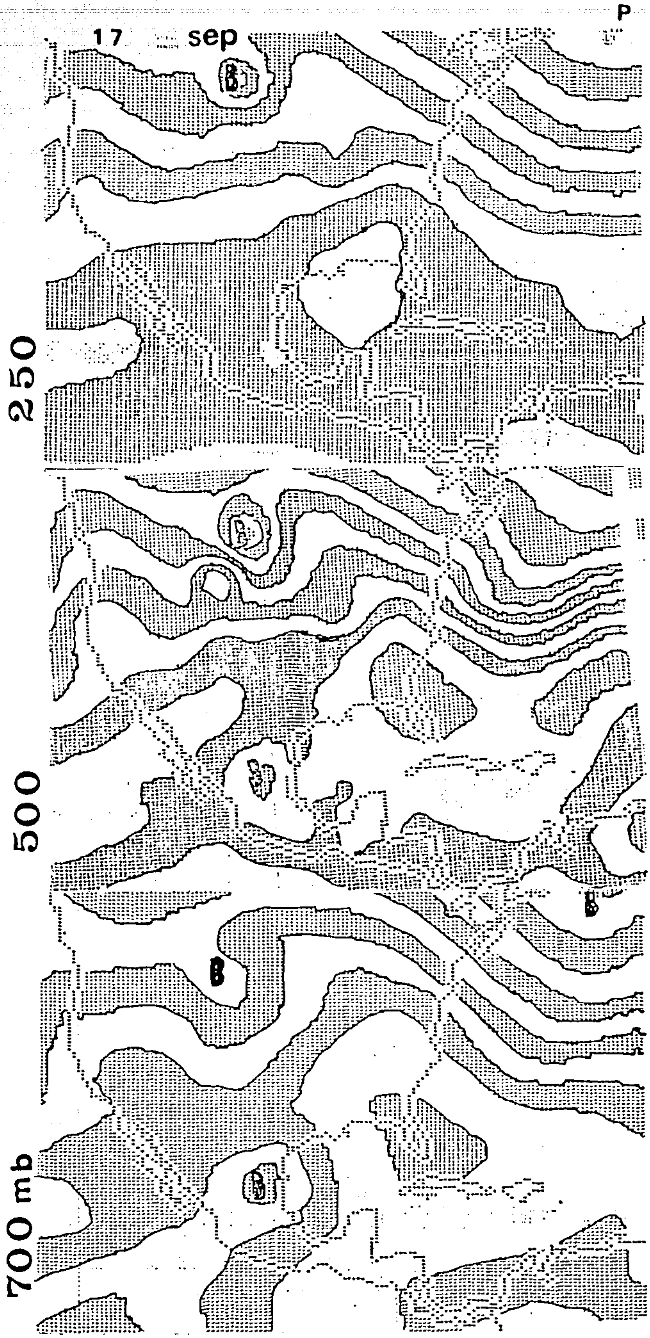


FIG 5.12

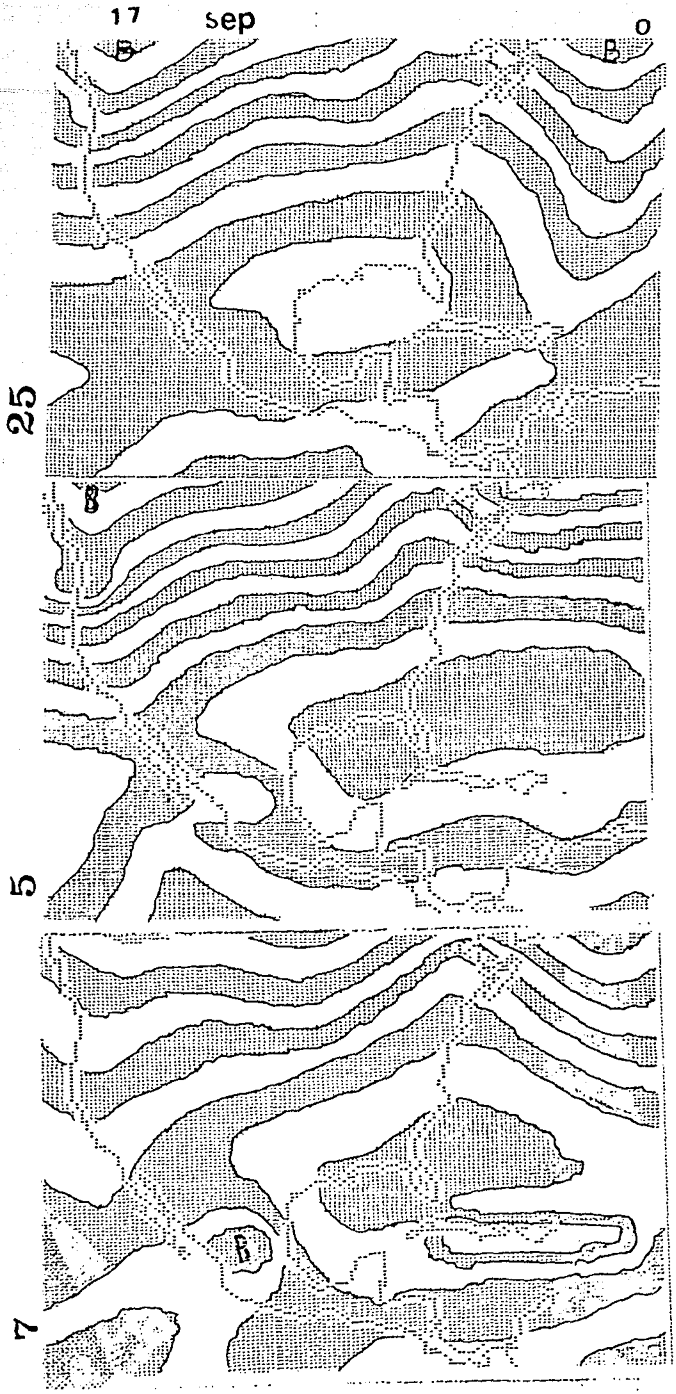


FIG 5.13

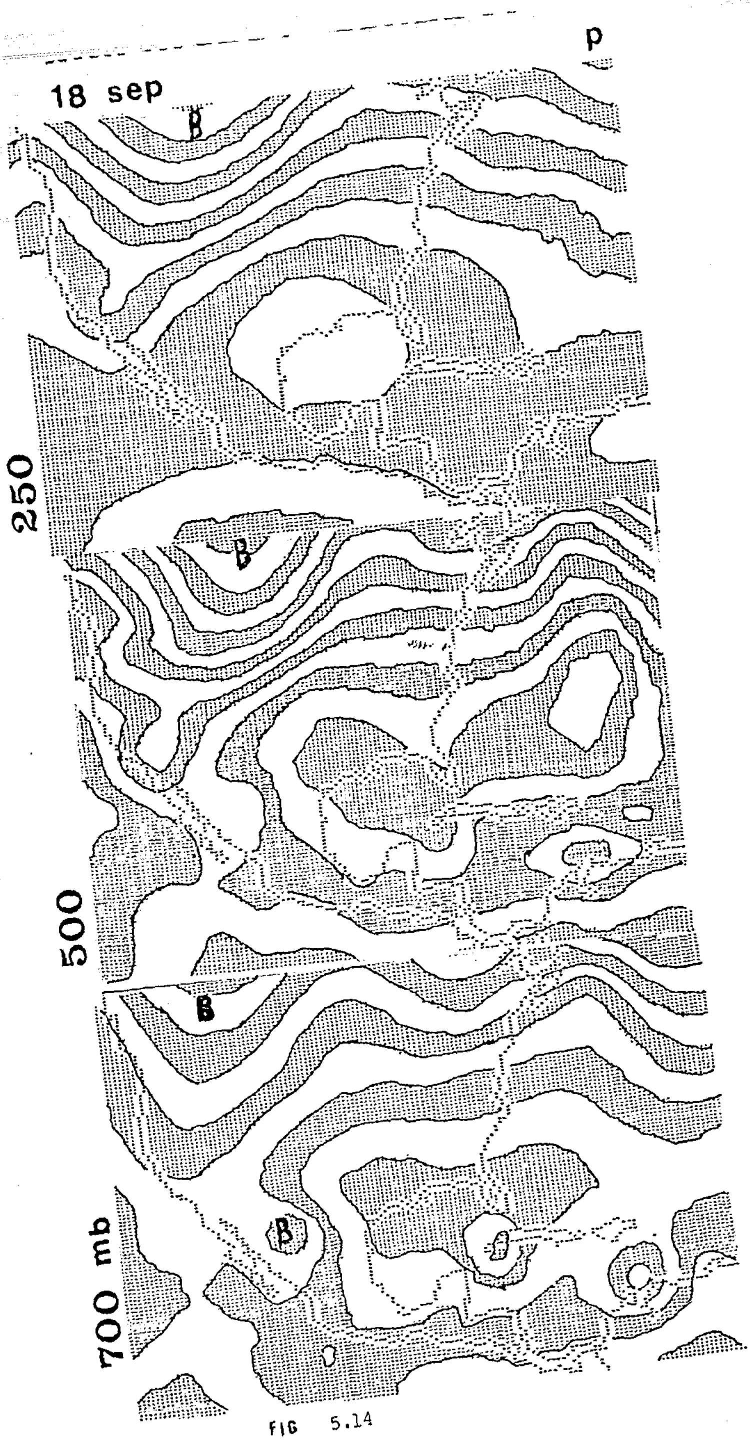


FIG 5.14

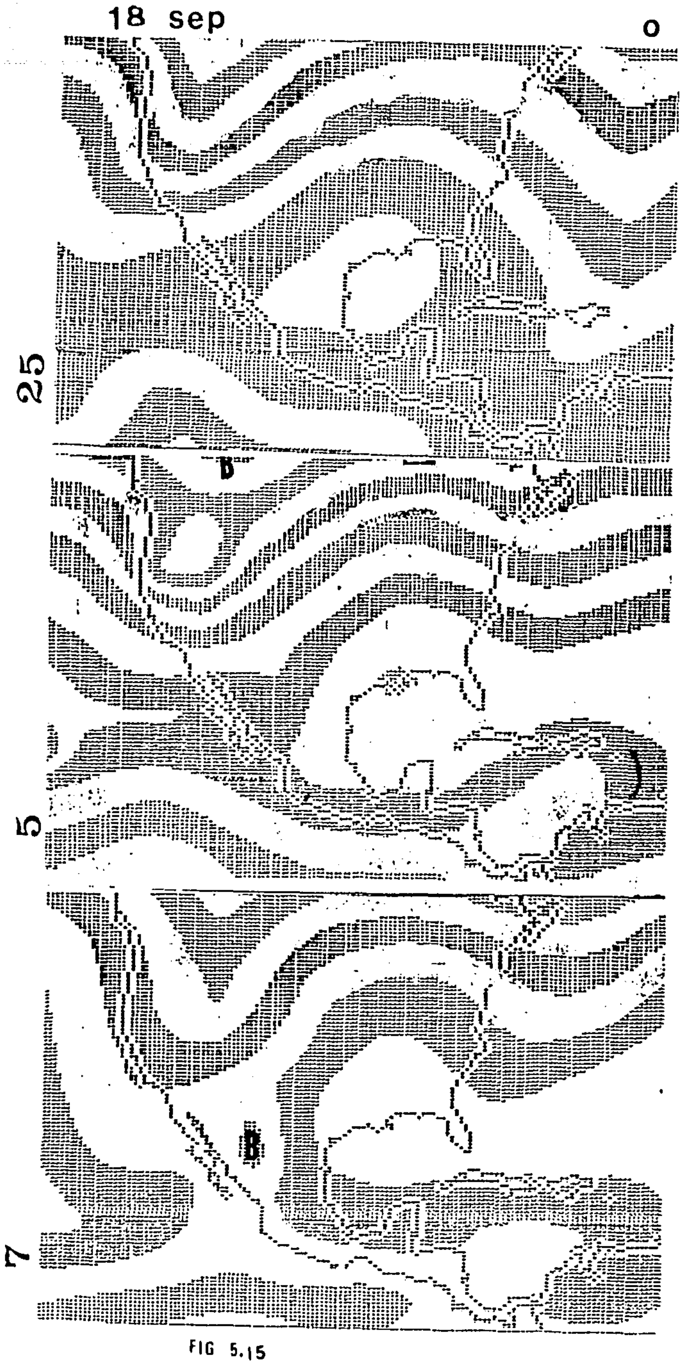


FIG 5.15

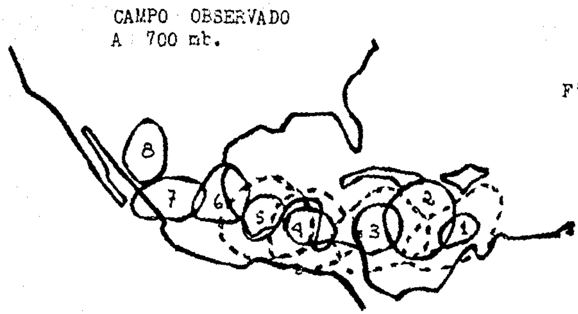


Fig. 5.16 a

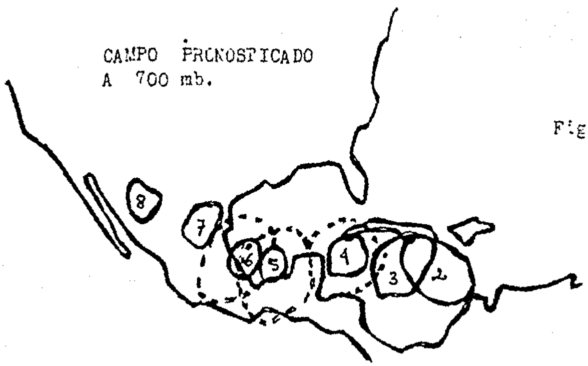
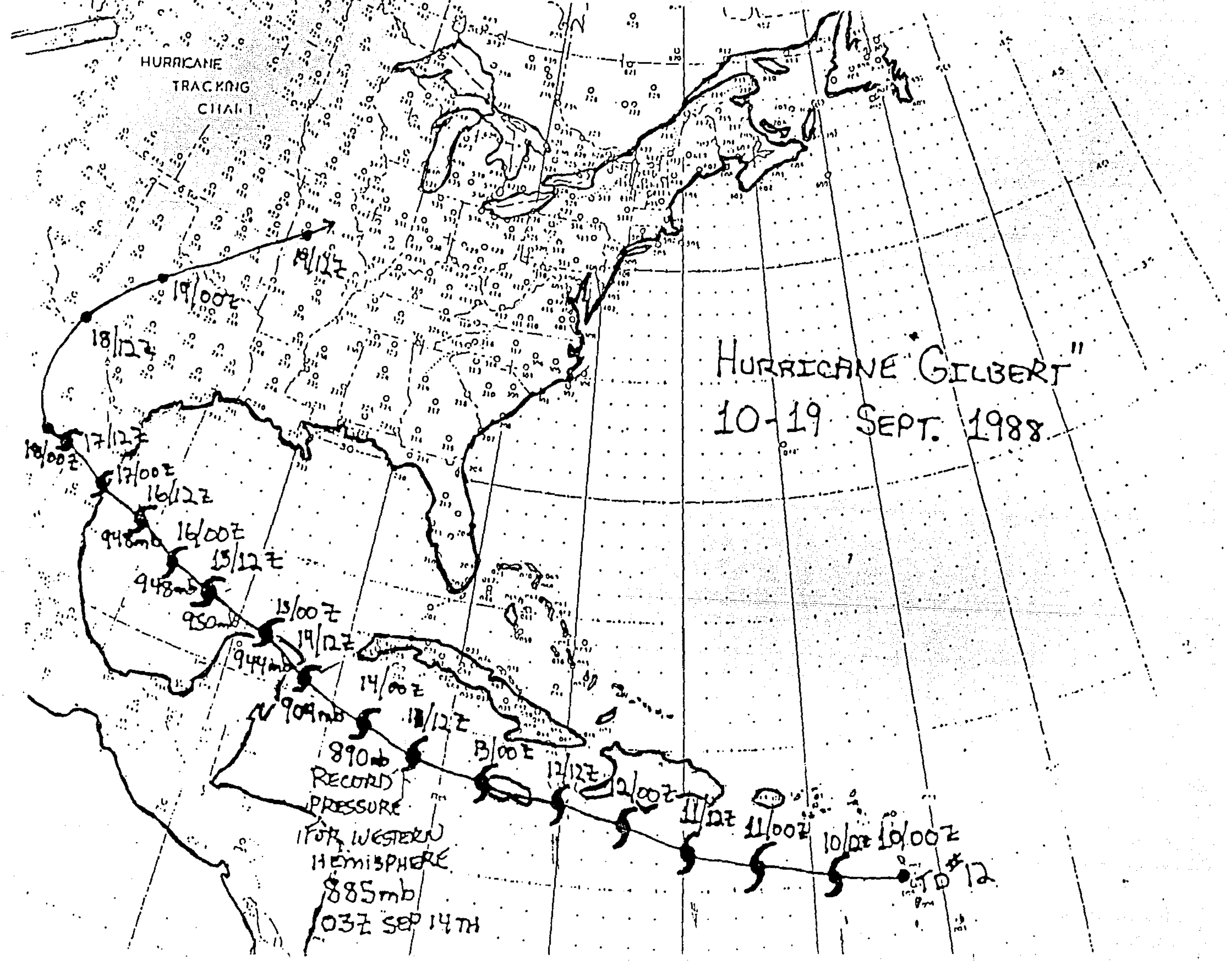


Fig. 5.16 b

Figura 5.16 Posiciones del huracán Gilberto dadas por el modelo baroclínico para una malla fina a) Posición observada. b) Posición Pronósticada.



HURRICANE
TRACKING
CHART
HURRICANE "GILBERT"
10-19 SEPT. 1988
19/12Z
19/00Z
18/12Z
18/00Z
17/12Z
17/00Z
16/12Z
948mb
16/00Z
15/12Z
948mb
950mb
15/00Z
14/12Z
944mb
909mb
14/00Z
13/12Z
890mb
RECORD
PRESSURE
FOR WESTERN
HEMISPHERE
885mb
03Z SEP 14TH
13/00Z
12/12Z
12/00Z
11/12Z
11/00Z
10/12Z
10/00Z
TD #12

BIBLIOGRAFIA.

1.- ORGANIZACION METEOROLOGICA MUNDIAL: Meteorología Dinámica, Vol I- Parte 1.

2.- HOLTON, JAMES R.: An Introduction to Dynamic Meteorology. Academic Press (1972).

3.- HALTINER, GEORGE J.: Numerical Weather Prediction. John Wiley & Sons, Inc. (1971)

4.- HALTINER, GEORGE J and MARTIN, FRANK L.: Dynamical and Physical Meteorology. Mc Graw-Hill Book Company (1957).

5.- GREENSPAN, DONALD. : Lectures on the Numerical Solution of Linear, Singular, and Nonlinear Differential Equations. Prentice-Hall

6.- GORDON, A.H.: Elementos de Meteorología Dinámica. UTHEA (1965).

7.- PETTERSSEN, SVERRE.: Introducción a la Meteorología. Espasa-Calpe.

8.- MEDINA E ISABEL, MARIANO.: Meteorología Básica Sinóptica. Editorial Paraninfo (1976).

9.- BUENDIA, ENRIQUE y DELGADO, ORLANDO : Integración del Modelo Baroclínico Filtrado en la Cuarta Región. Instituto Panamericano de Geografía e Historia, Num. 14/15. (1981)

10.- BUENDIA, ENRIQUE y MORALES, TOMAS : Integración preliminar del Modelo Barotrópico en la región IV. Parte I. Anales del Instituto de Geofísica, Vol. 22-23, pp 23-28 (1976-77)

11.- BUENDIA, E. MORALES, T, y REVILLA,R.: El Modelo Barotrópico Equivalente en la región IV. REVISTA GEOFISICA IPGH, Vol. 10-11 (1979).

12.- BUENDIA, E.: El Modelo Baroclínico Simple y su resolución en la Cuarta Región. Rev. Geofísica IPGH Num. 21 (1984).

13.- BUENDIA, E.: El Pronóstico Numérico con el Modelo Baroclínico en un área limitada ciclica. Rev. Física y Matemáticas SUMCEFIMA No 1

14.- ARFKEN, G.: Mathematical methods for physicist. Academic Press

15.- CHARNEY,J.G.: On the scale of atmospheric motions. Geofys Publ. 17

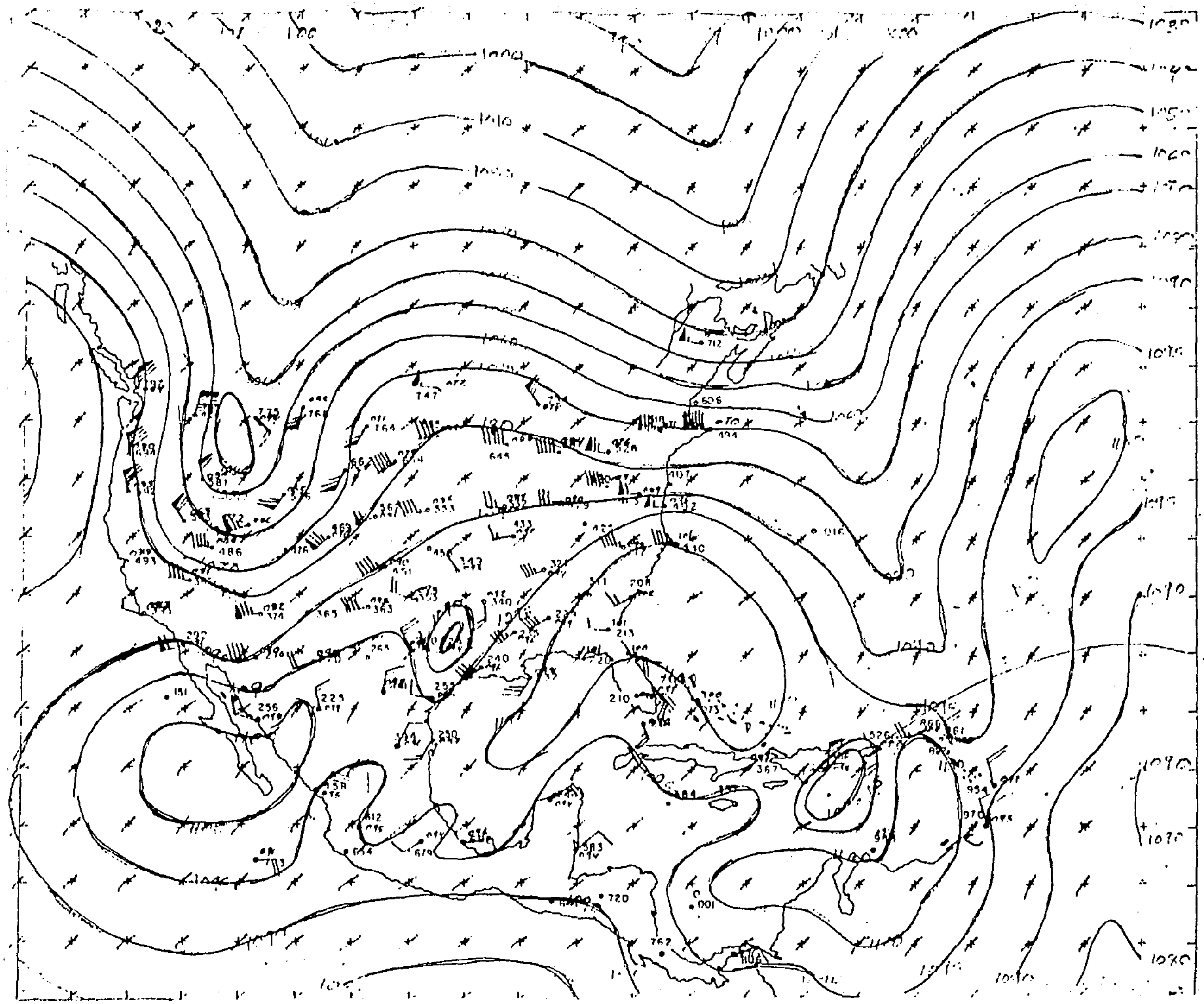
16.- THOMPSON,P.D.: Numerical weather analysis and prediction. Mc Millan

17.- VAN MIEGHEM, J.: Scale Analysis of Large Atmospheric motion sistems Academic Press, Inc (1978).

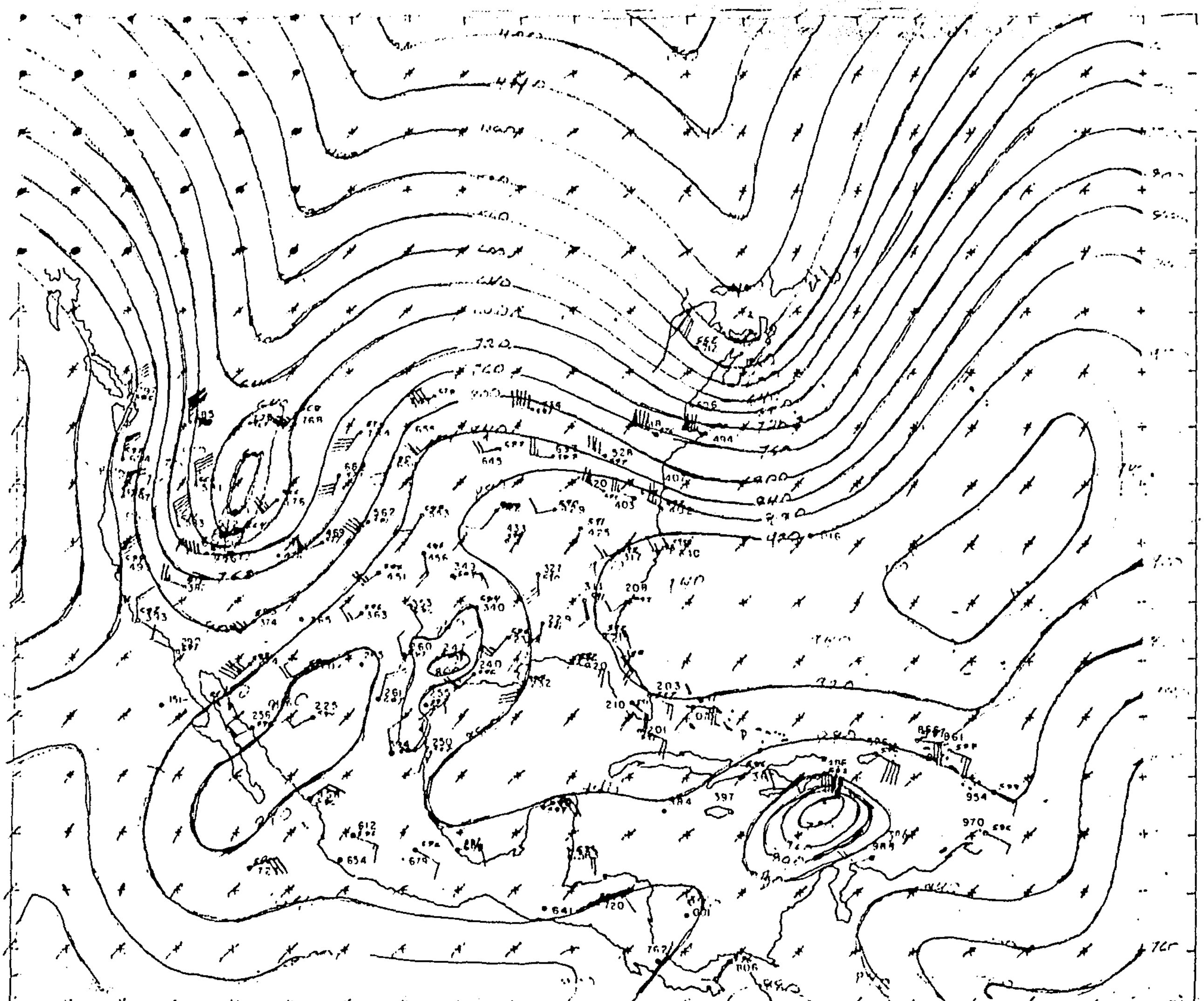
18.- CARMONA S, J.C.: Integración del modelo Baroclínico de dos parametros en la estación invernal. Tesis de Físico, Fac Ciencias,UNAM

ANEXO A

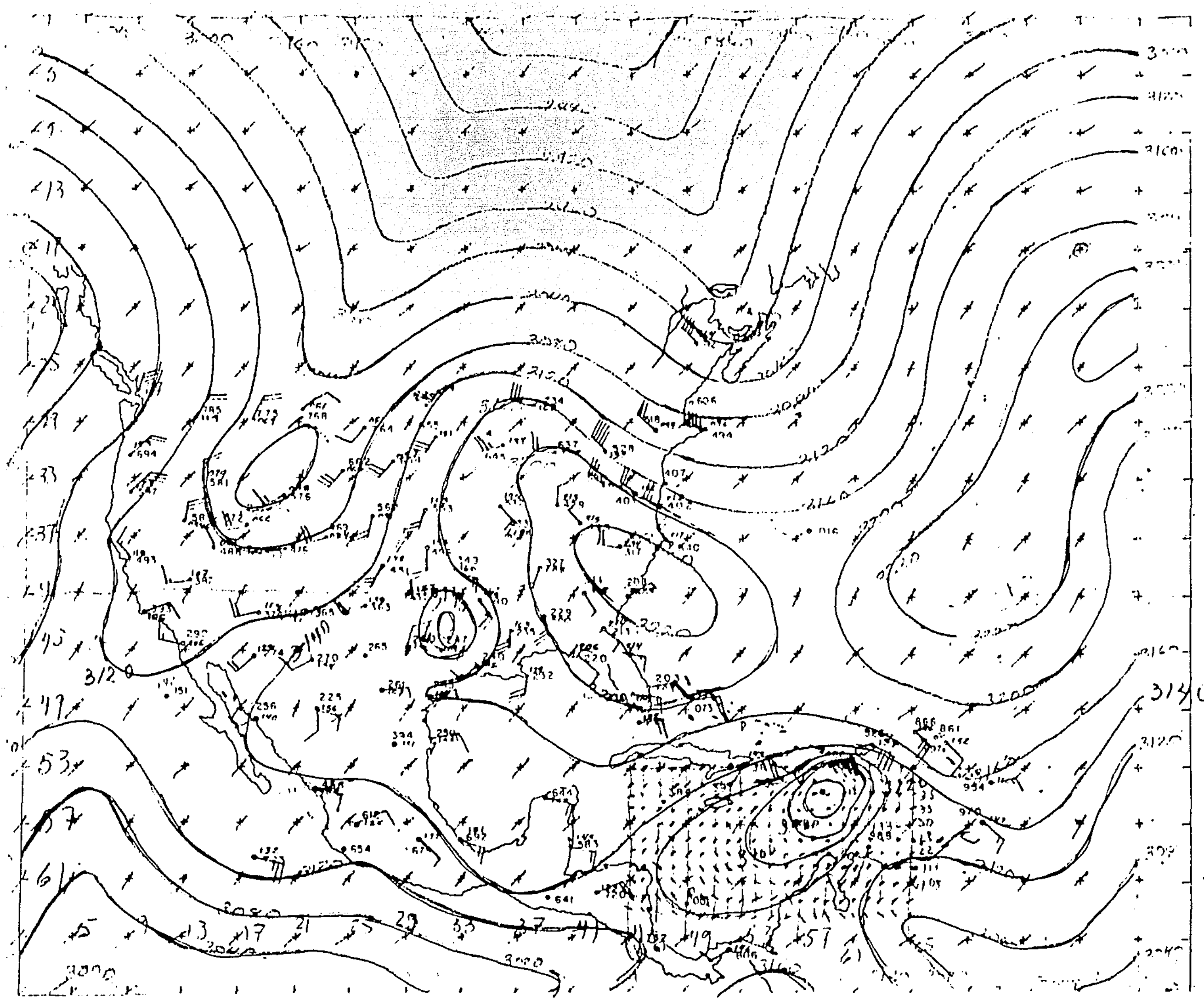
ANALISIS DE ISOHIPSAS DE LOS DATOS OBSERVADOS



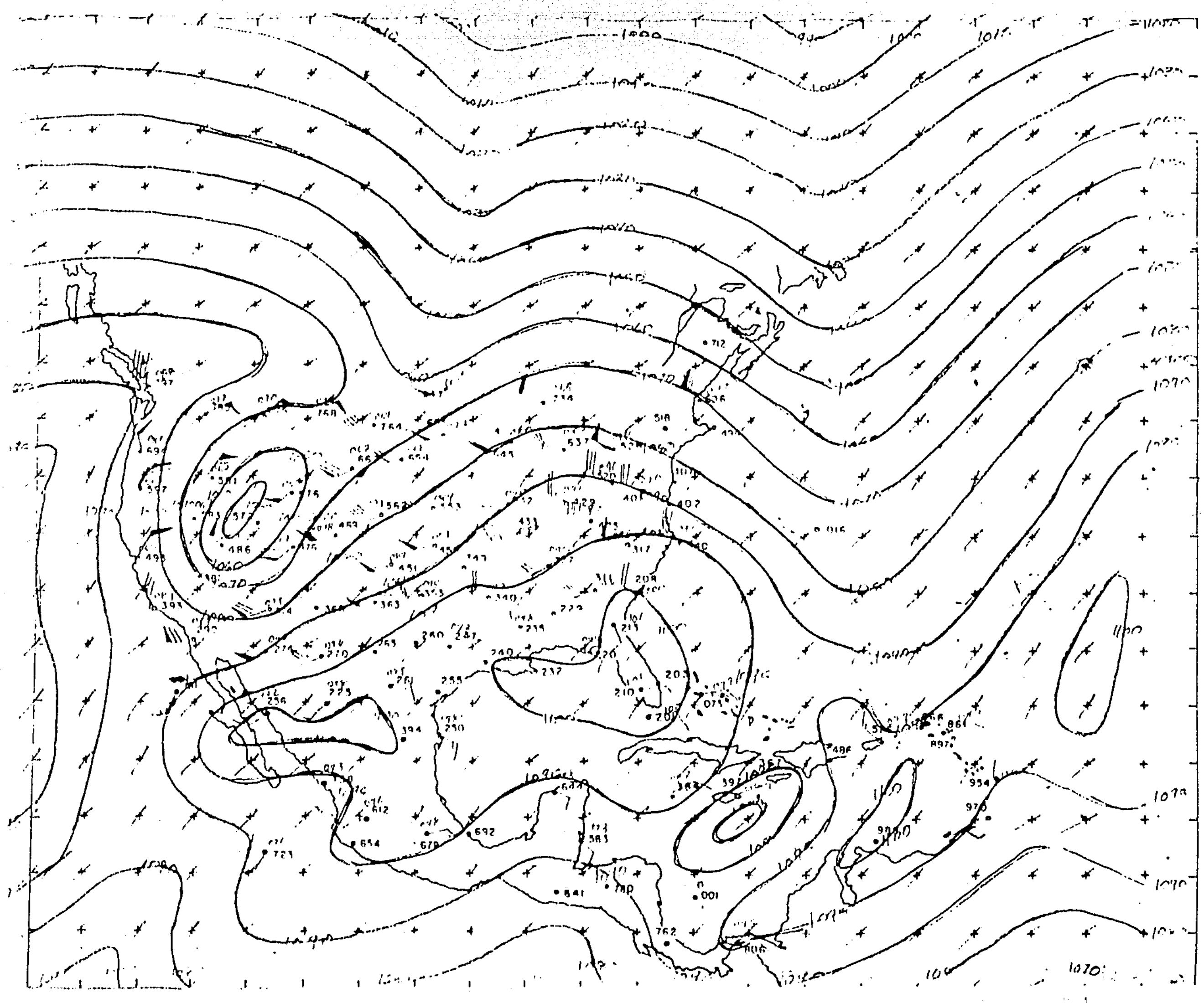
11 Sep 92
250 mb



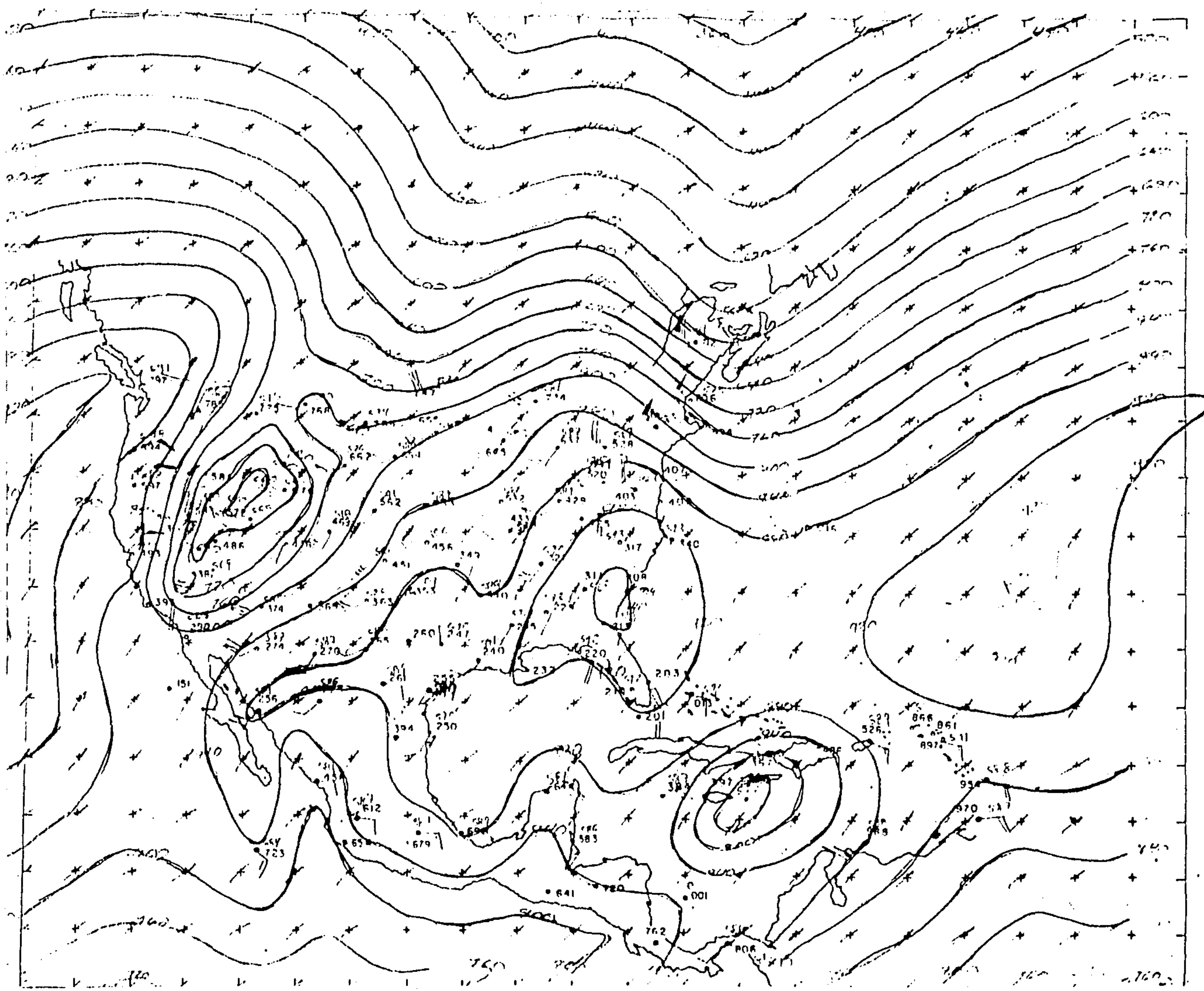
11 Sep 88
300mb



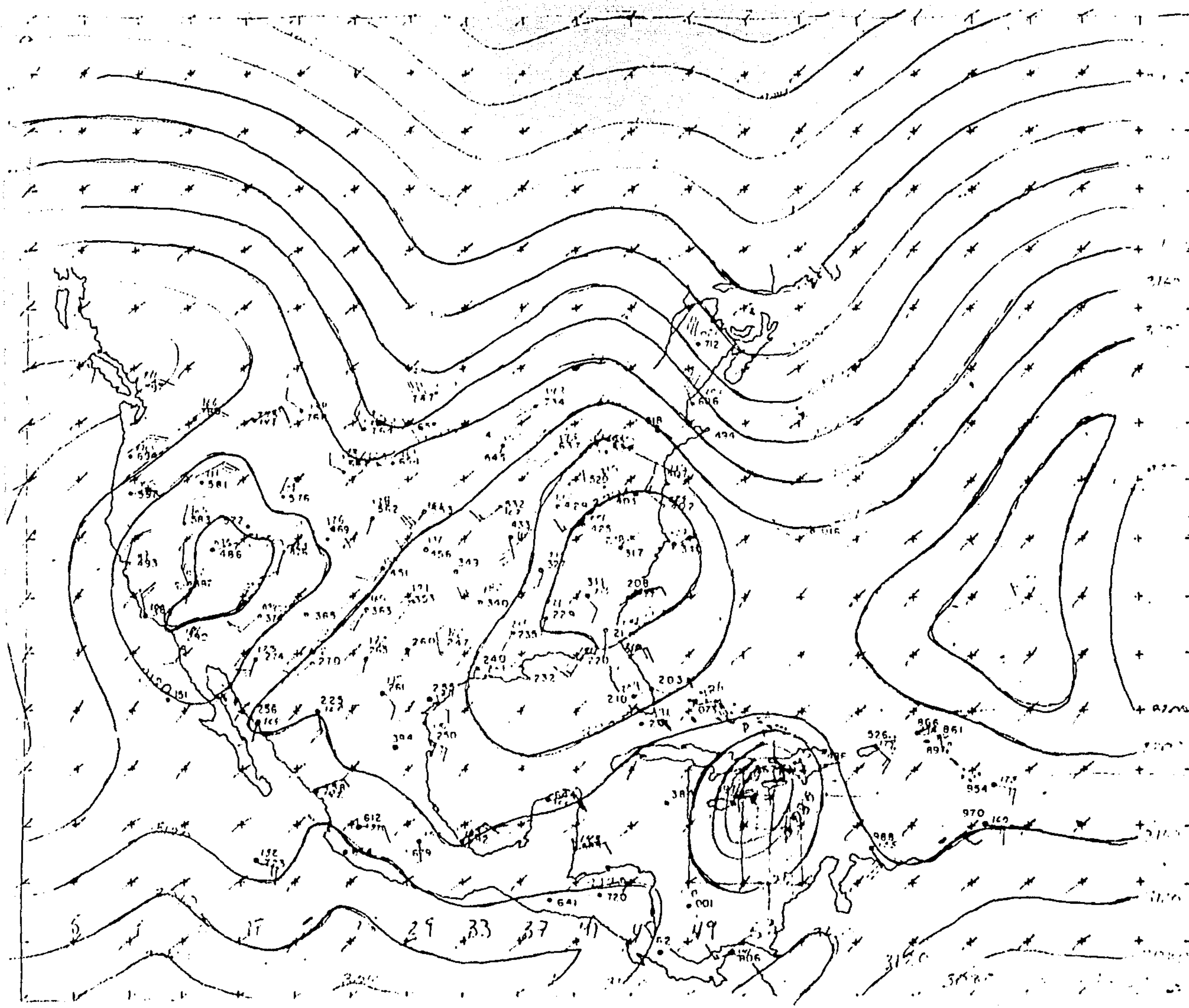
11 Sep 88
700 mb

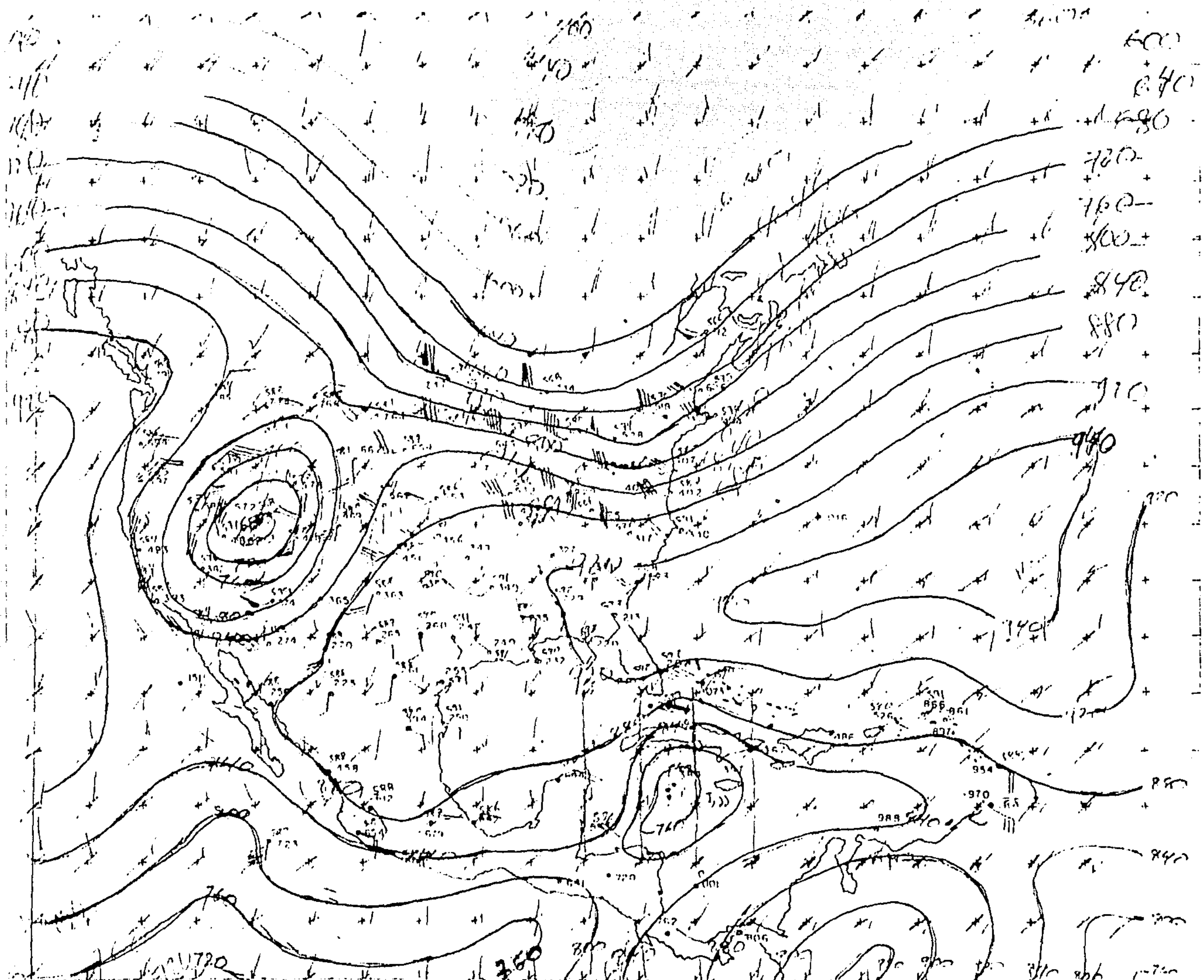


Sept
198
250 mb

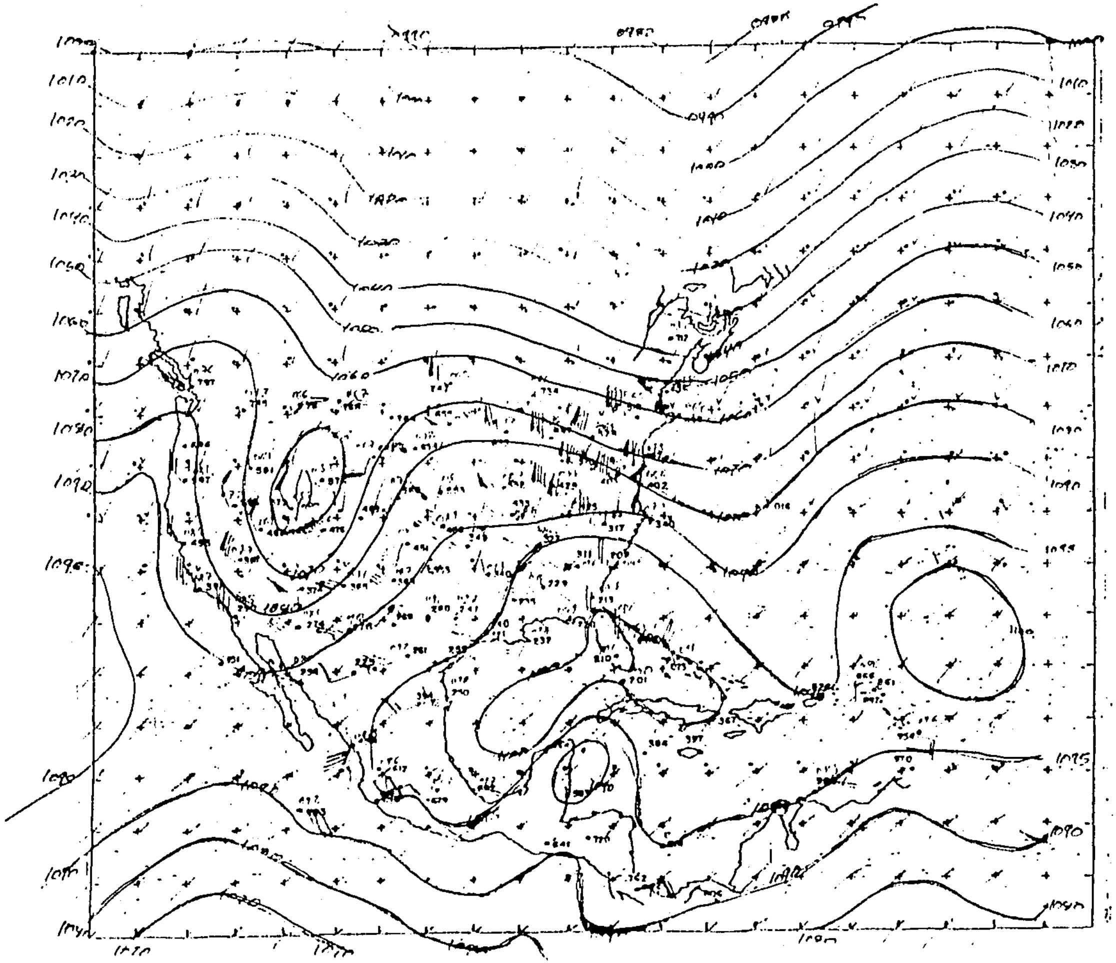


Sept 12
1988
500 mb

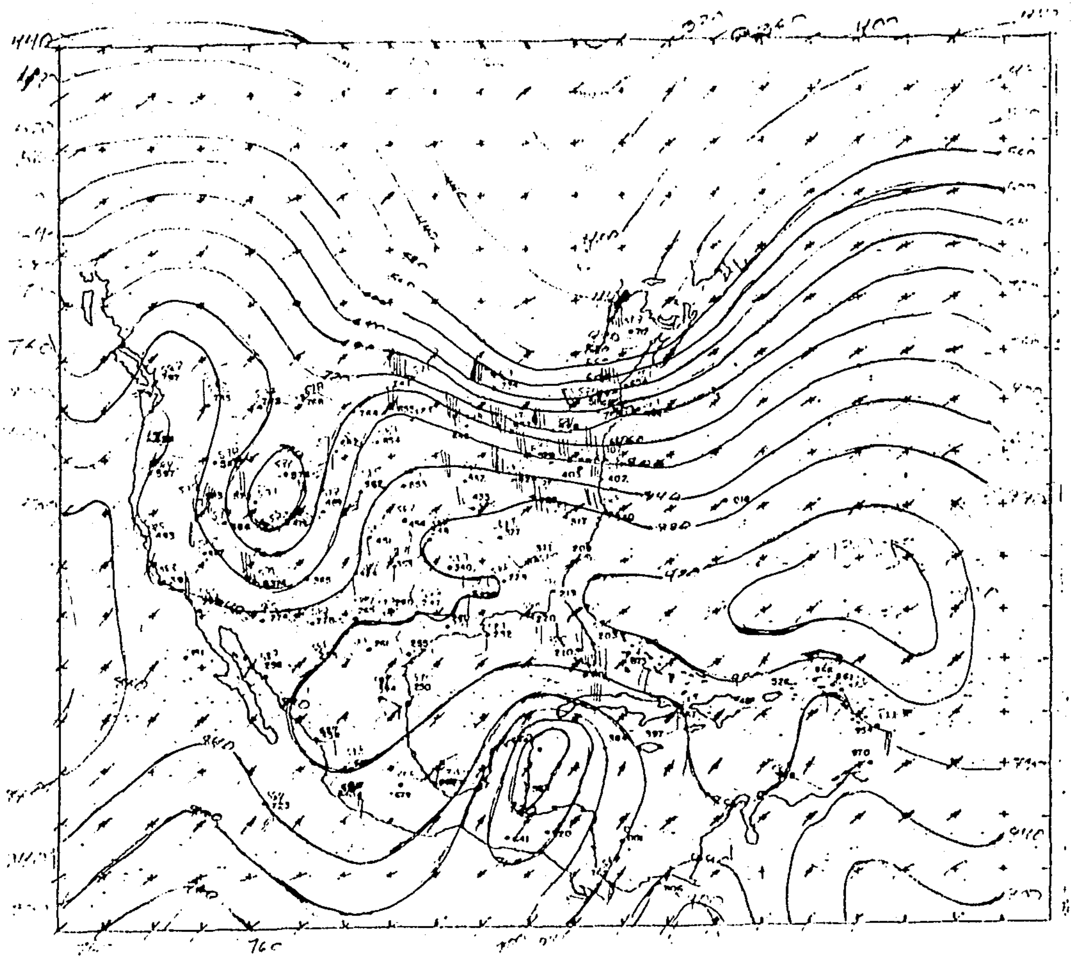

12 Sep 88
700 mb
5
9
13
17
21
25
29
33
37
41
45
49
53
29 33 37 41 45 49



Sept 13
1988
500mb

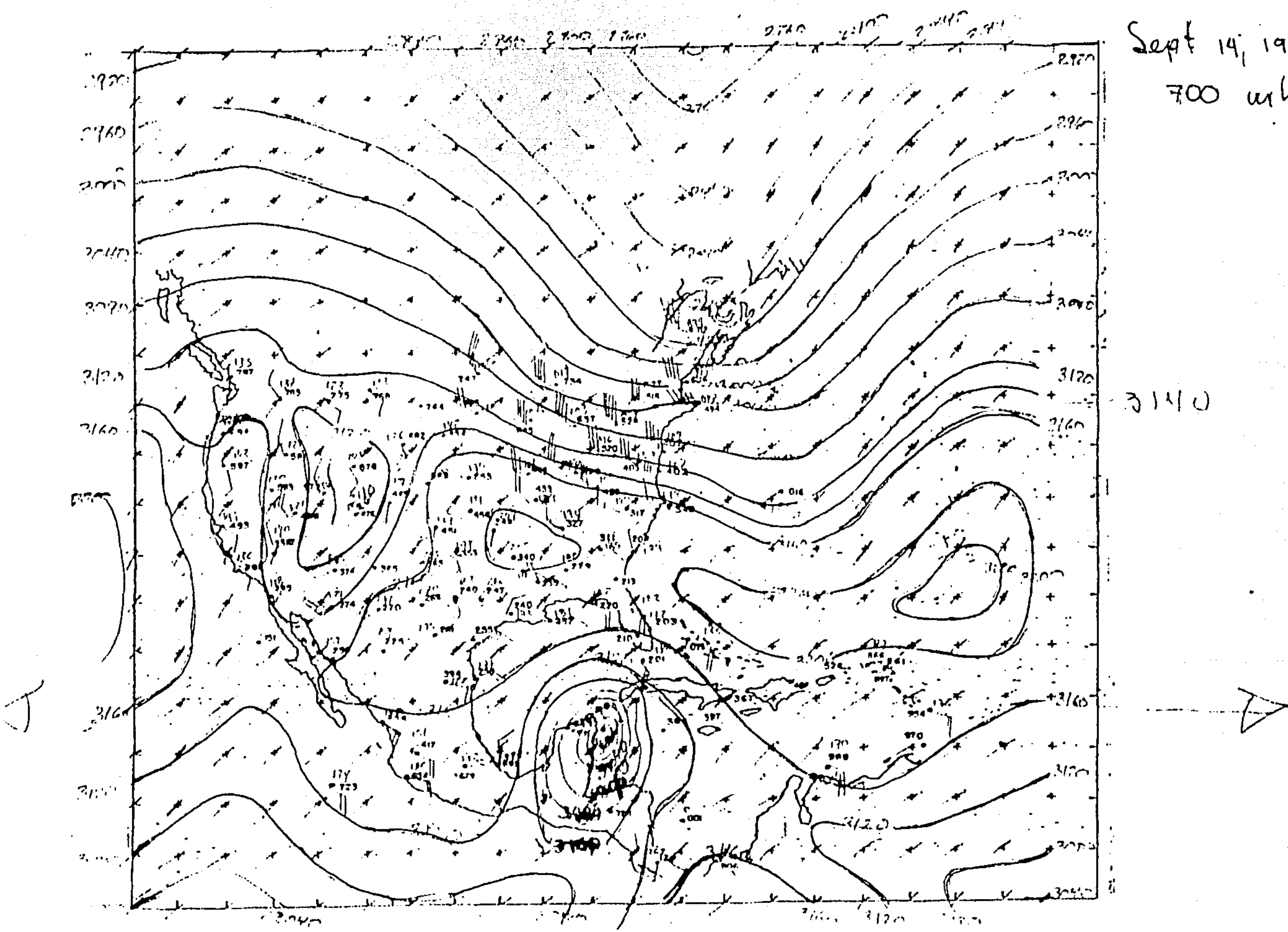


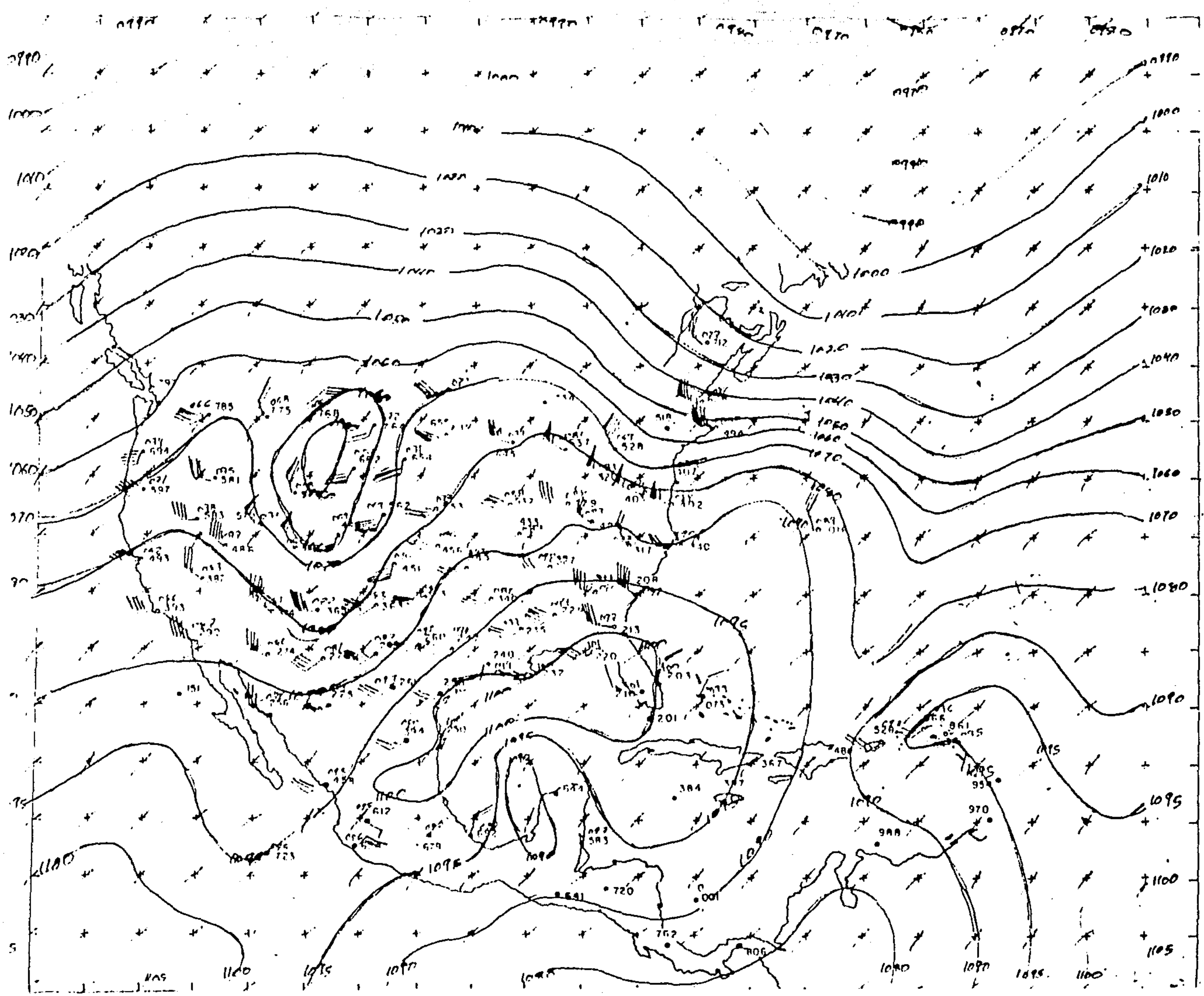
Sept 14 1988
250 mb



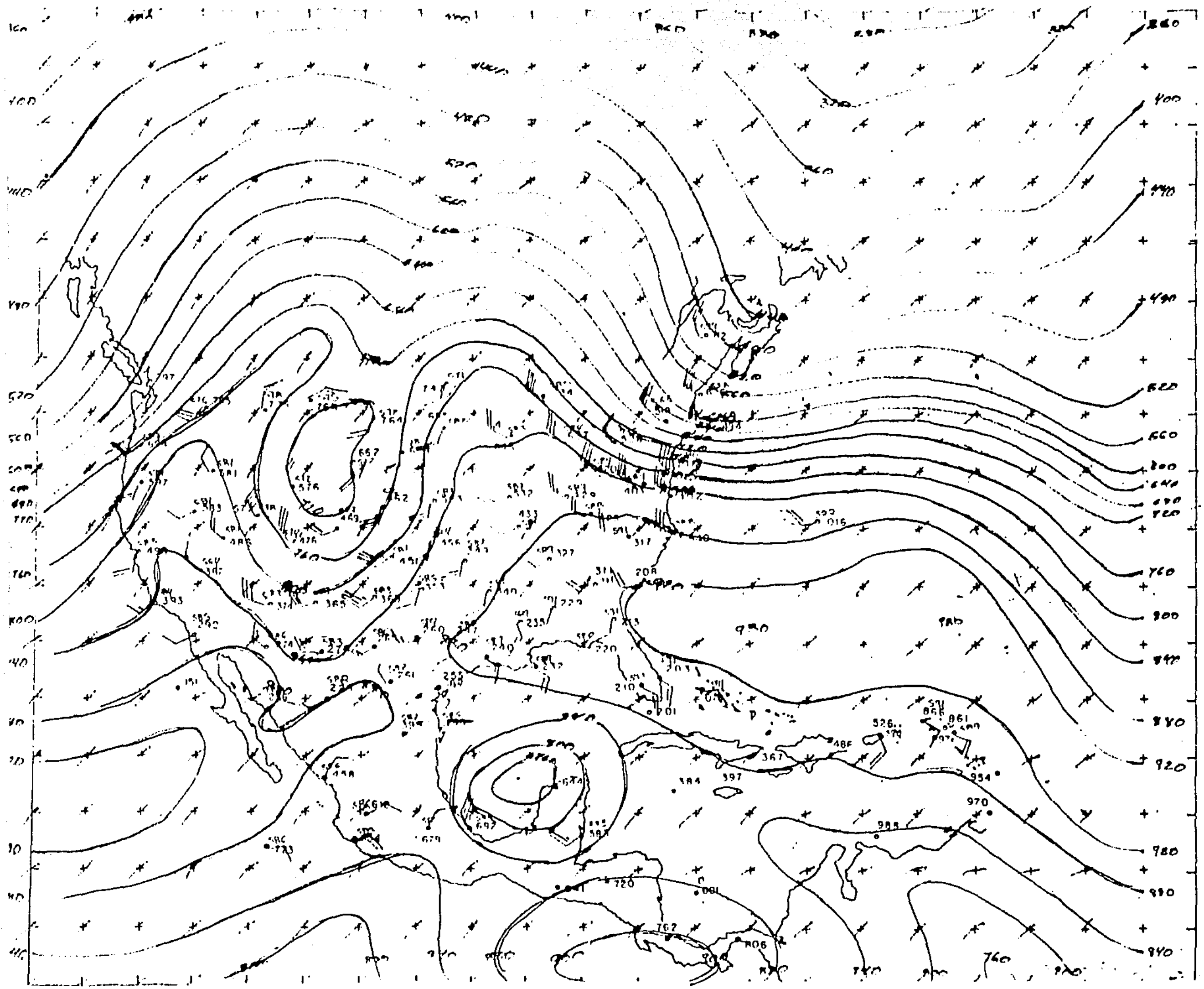
Sept 14, 1988
500 mb

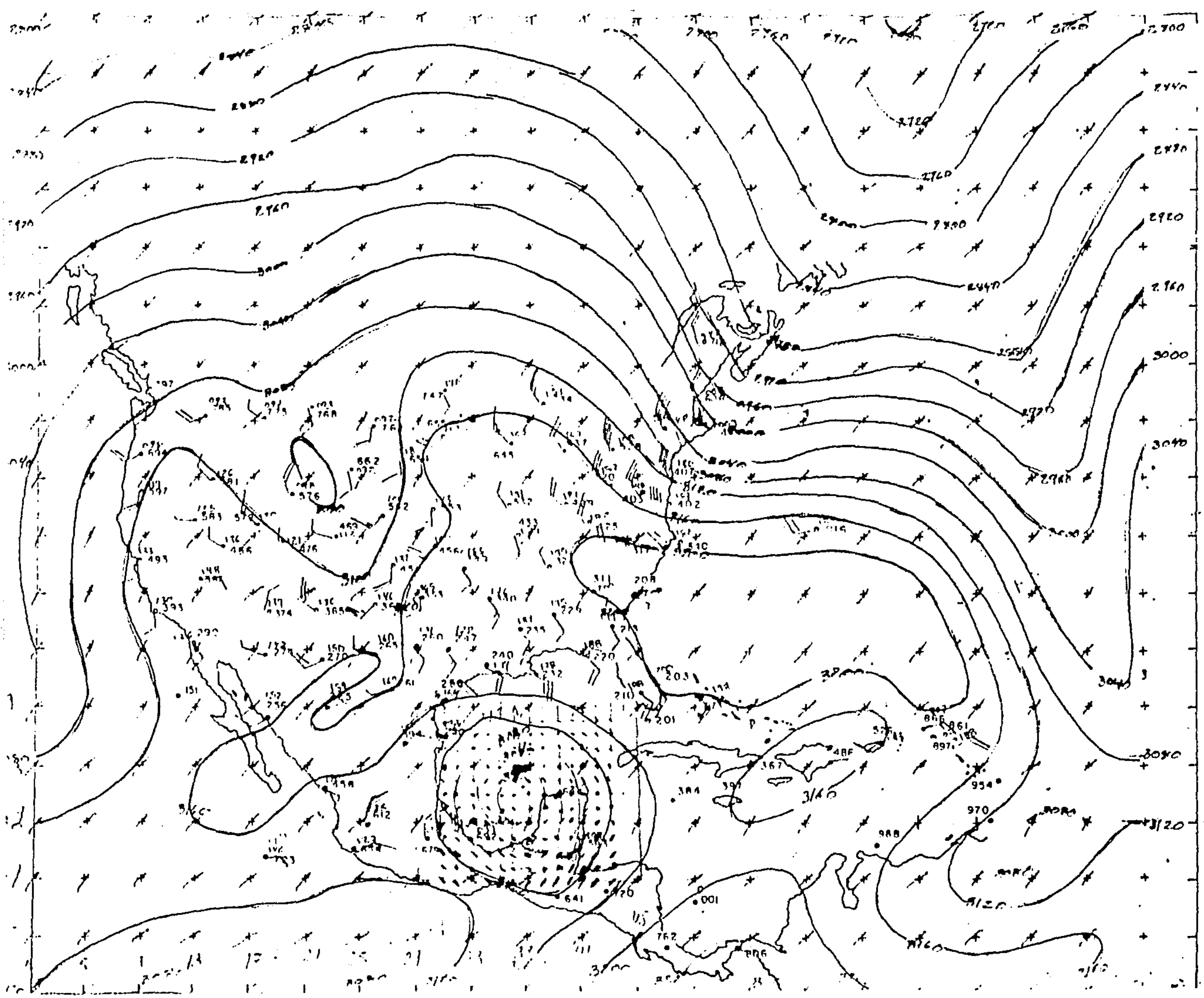
Sept 14, 1988
700 mb



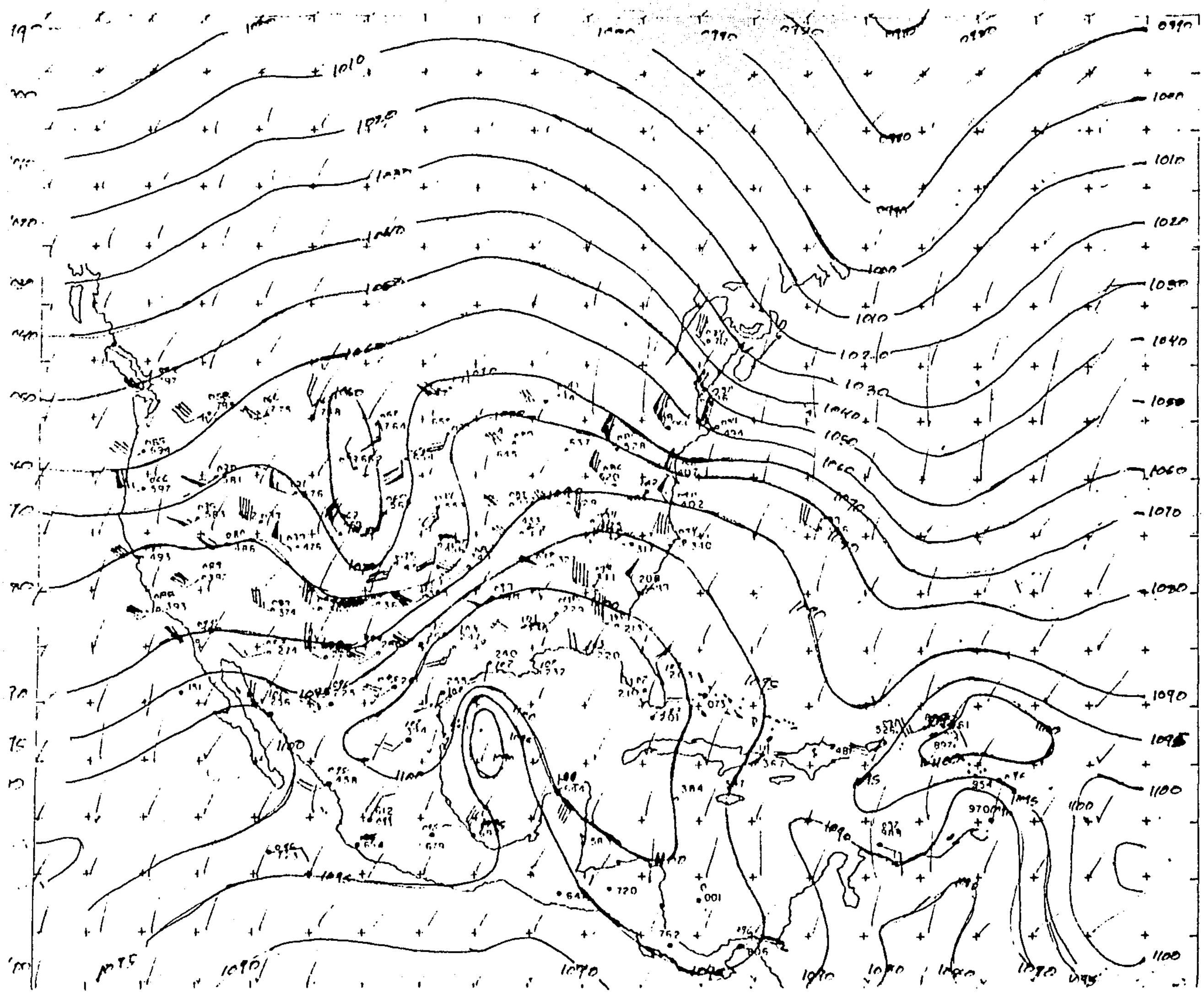


Sept 15
1988
250 mb

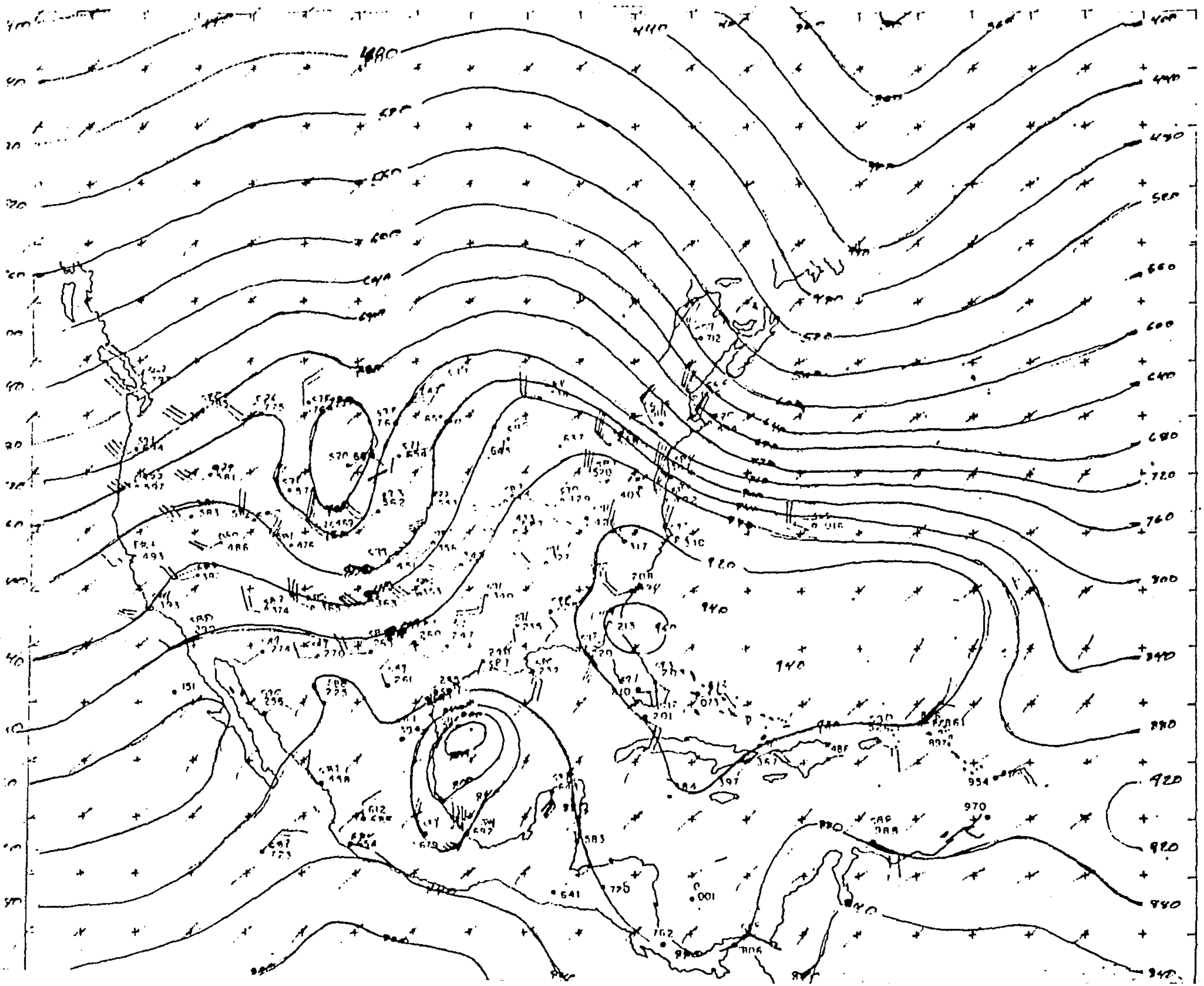

Sept 15
17RR
500
mb



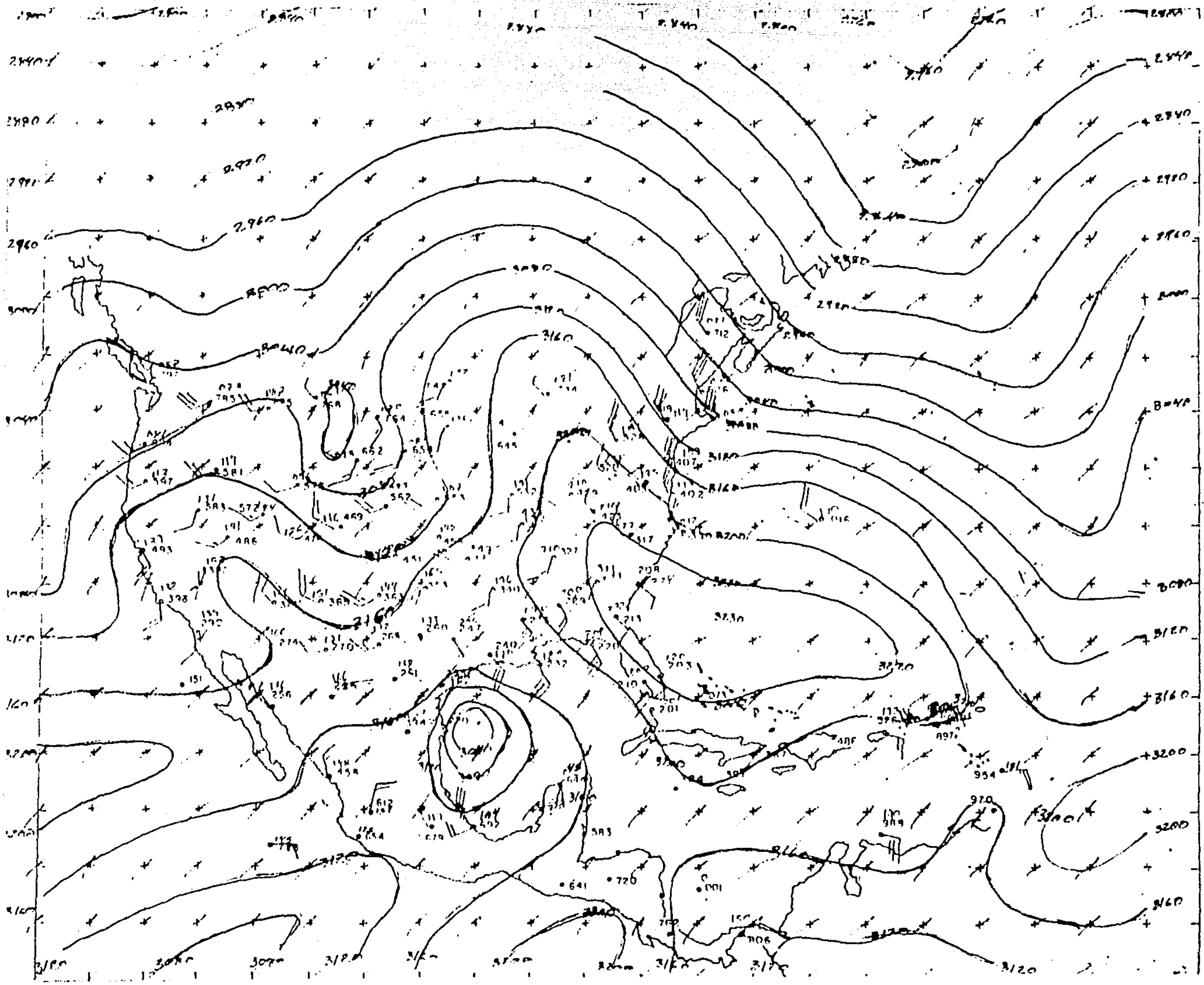
Sept 1
1988
700 ul



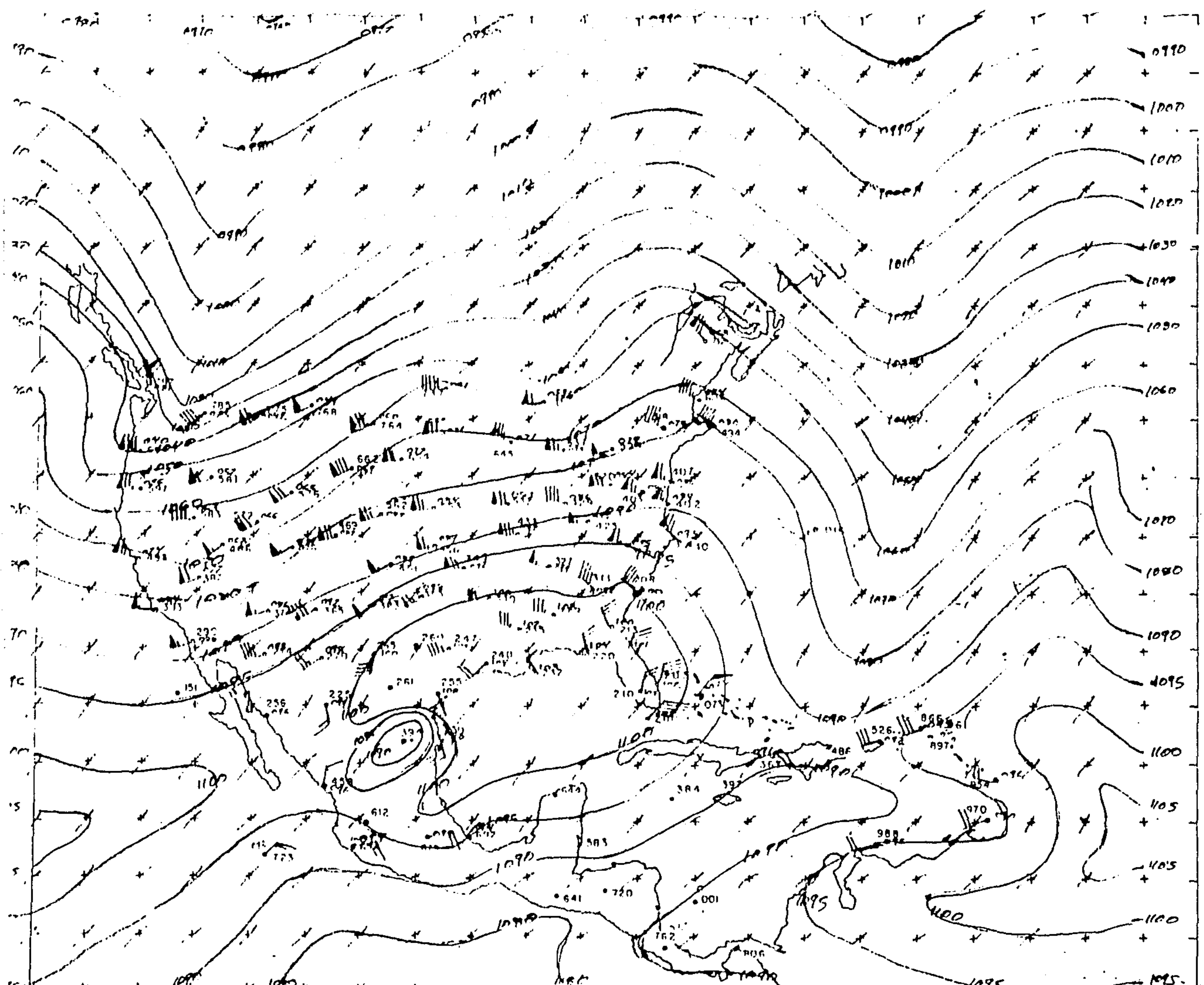
Sept
16-1988
250 mb



Sept 16
1988
500 mb

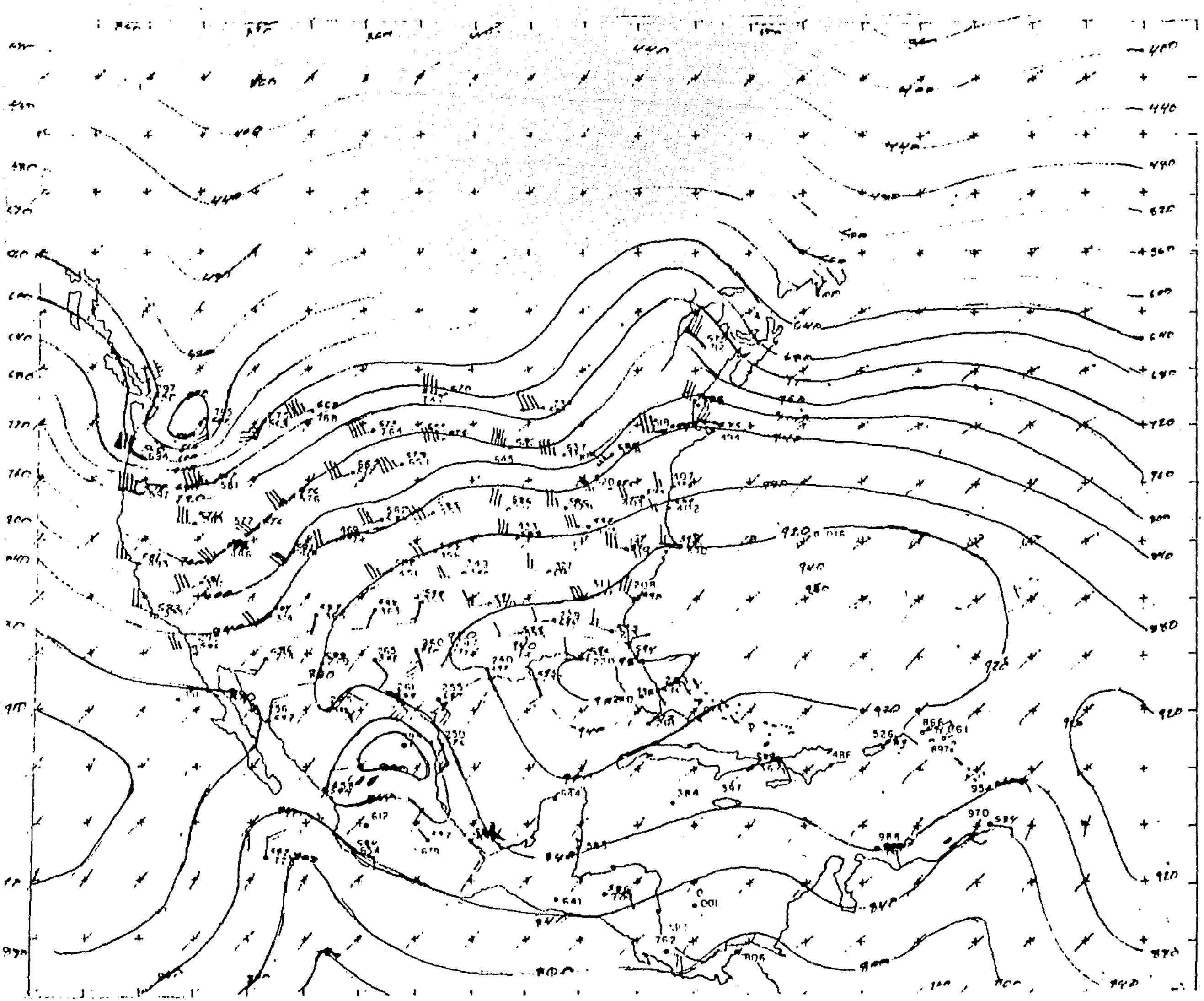


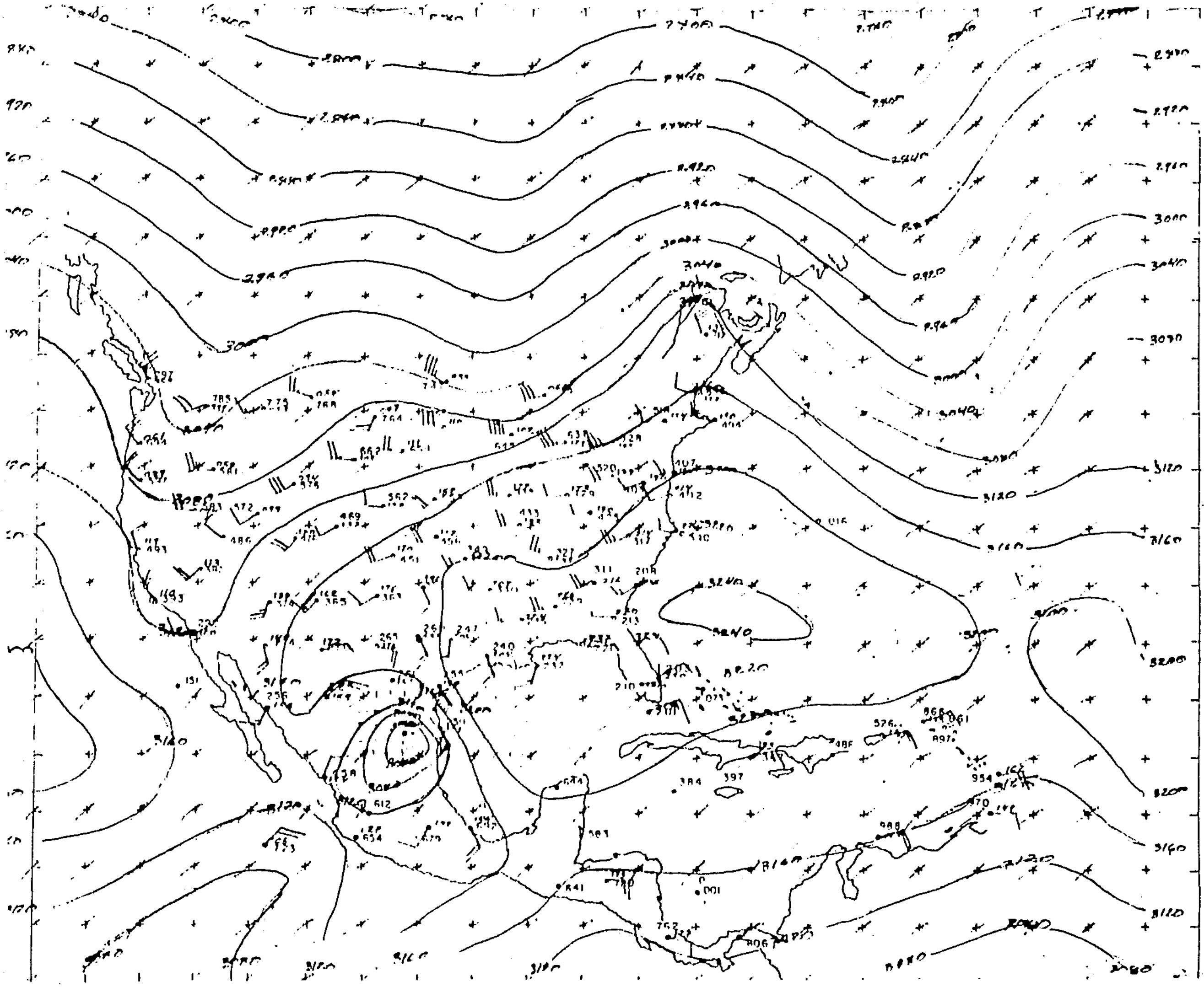
Sept 16
1988
700 m


0990
1000
1010
1020
1030
1040
1050
1060
1070
1080
1090
1095
1100
1105
1105
1100
1095

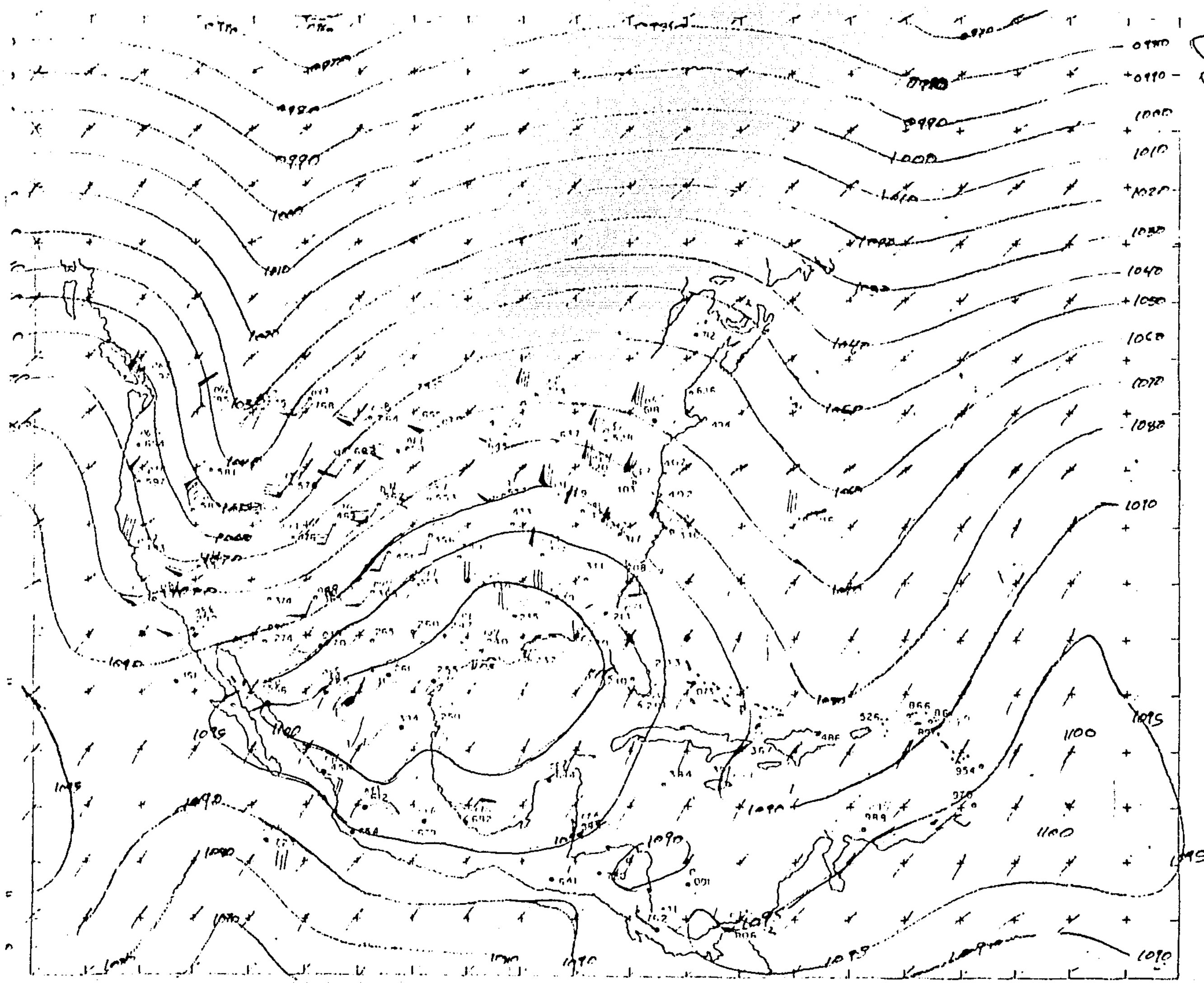
17 sep 8
250 m

17 Sep
500

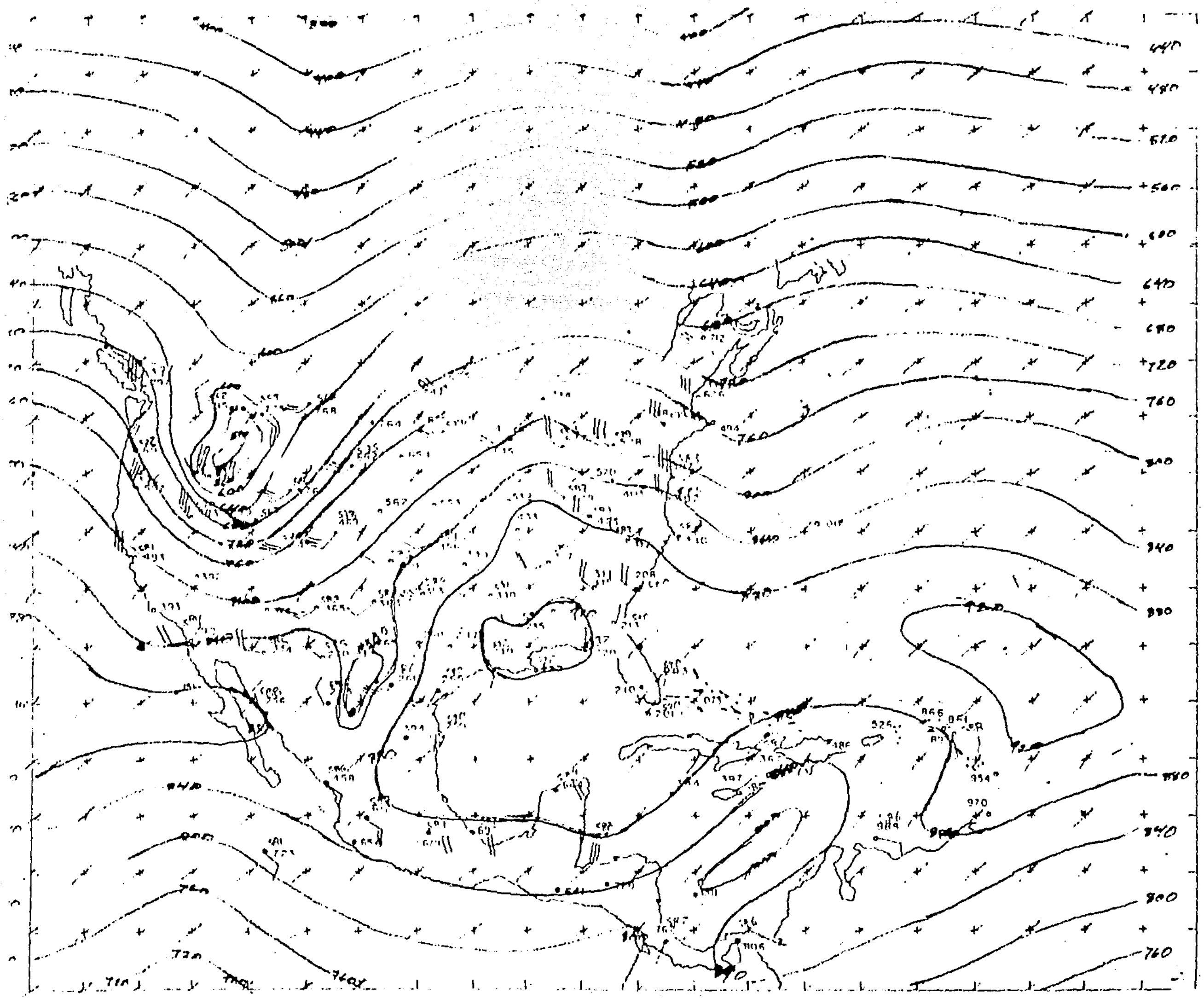




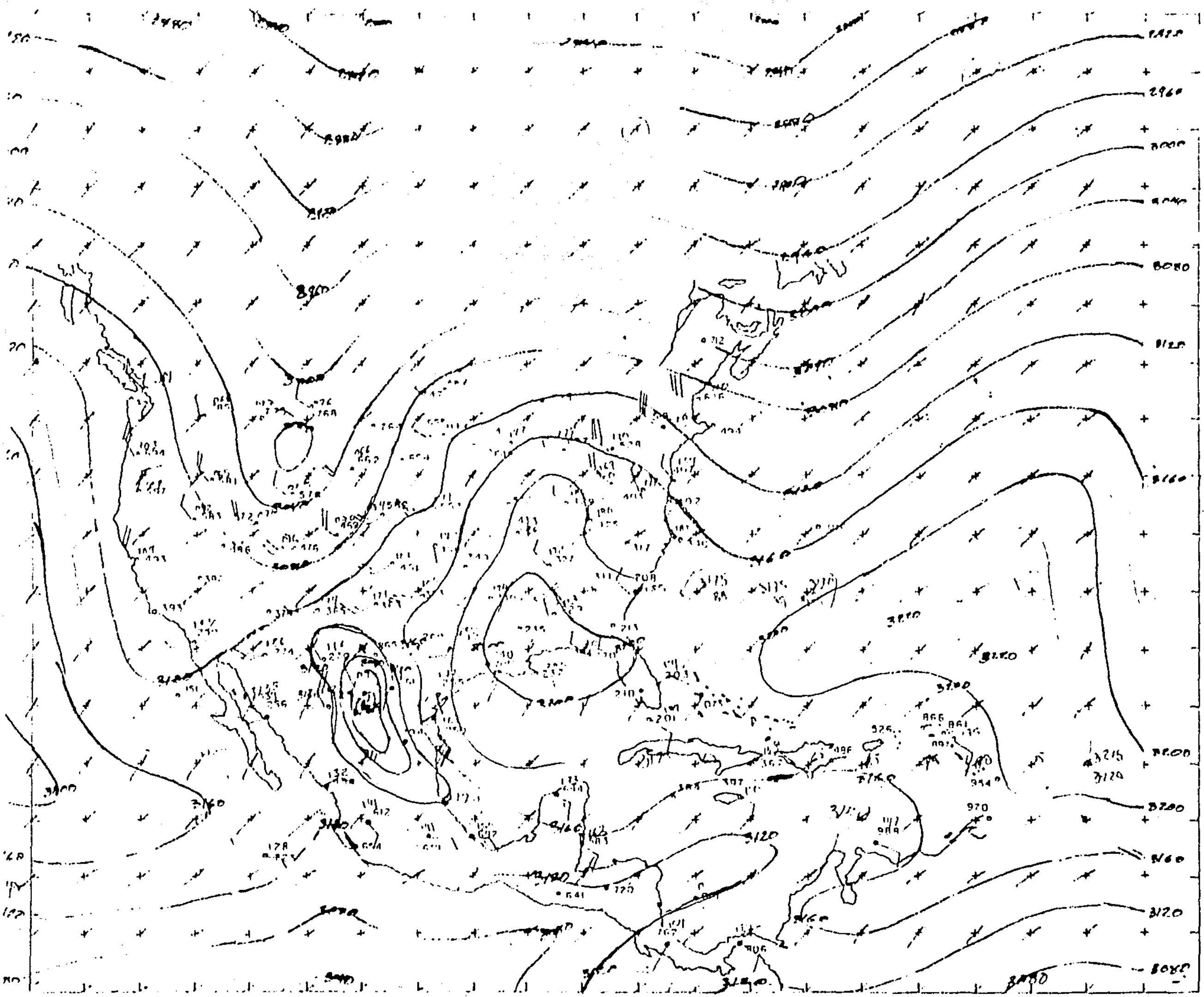
17 Sep 88
700 mb.



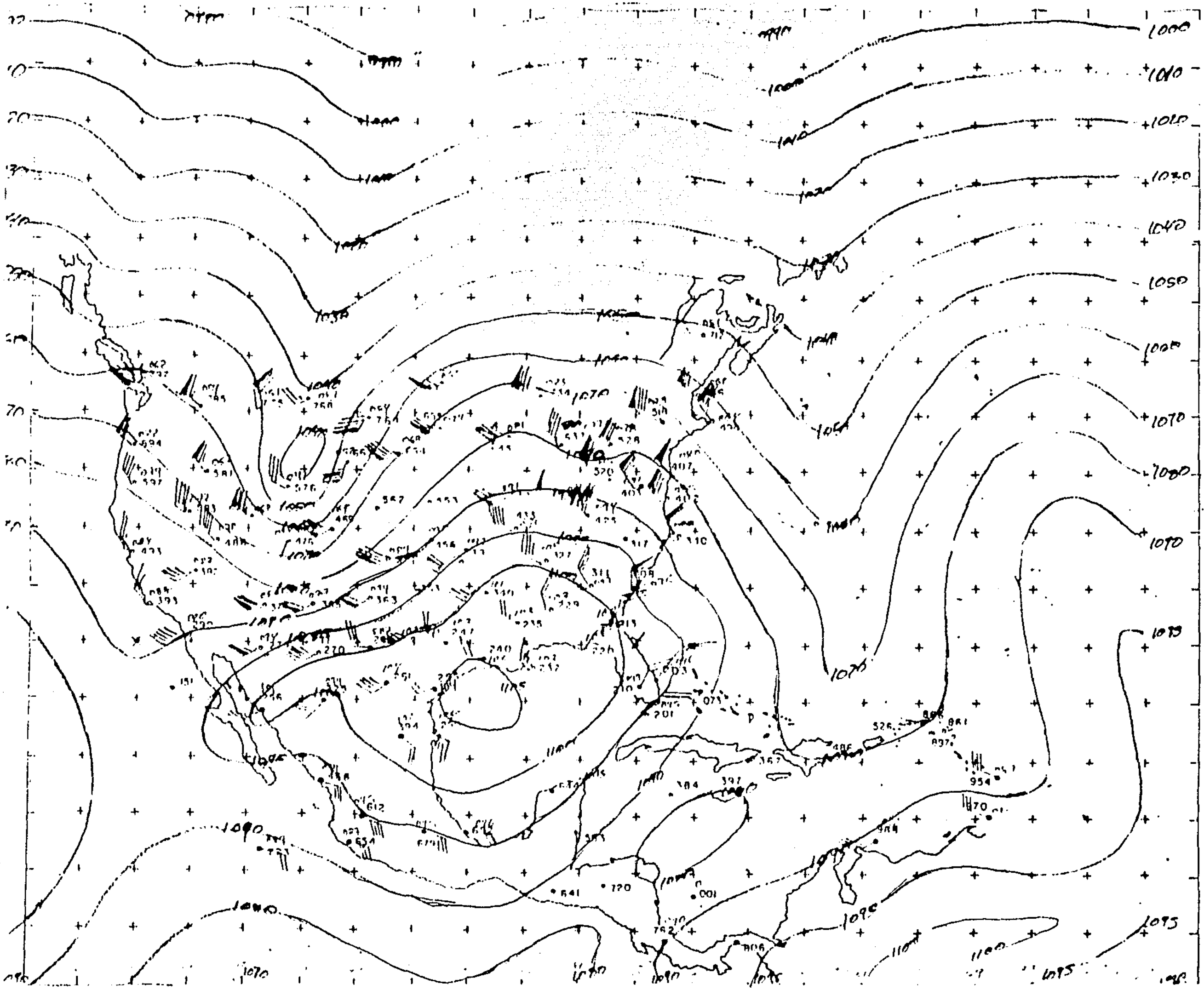
Sept 1
1988
250 m



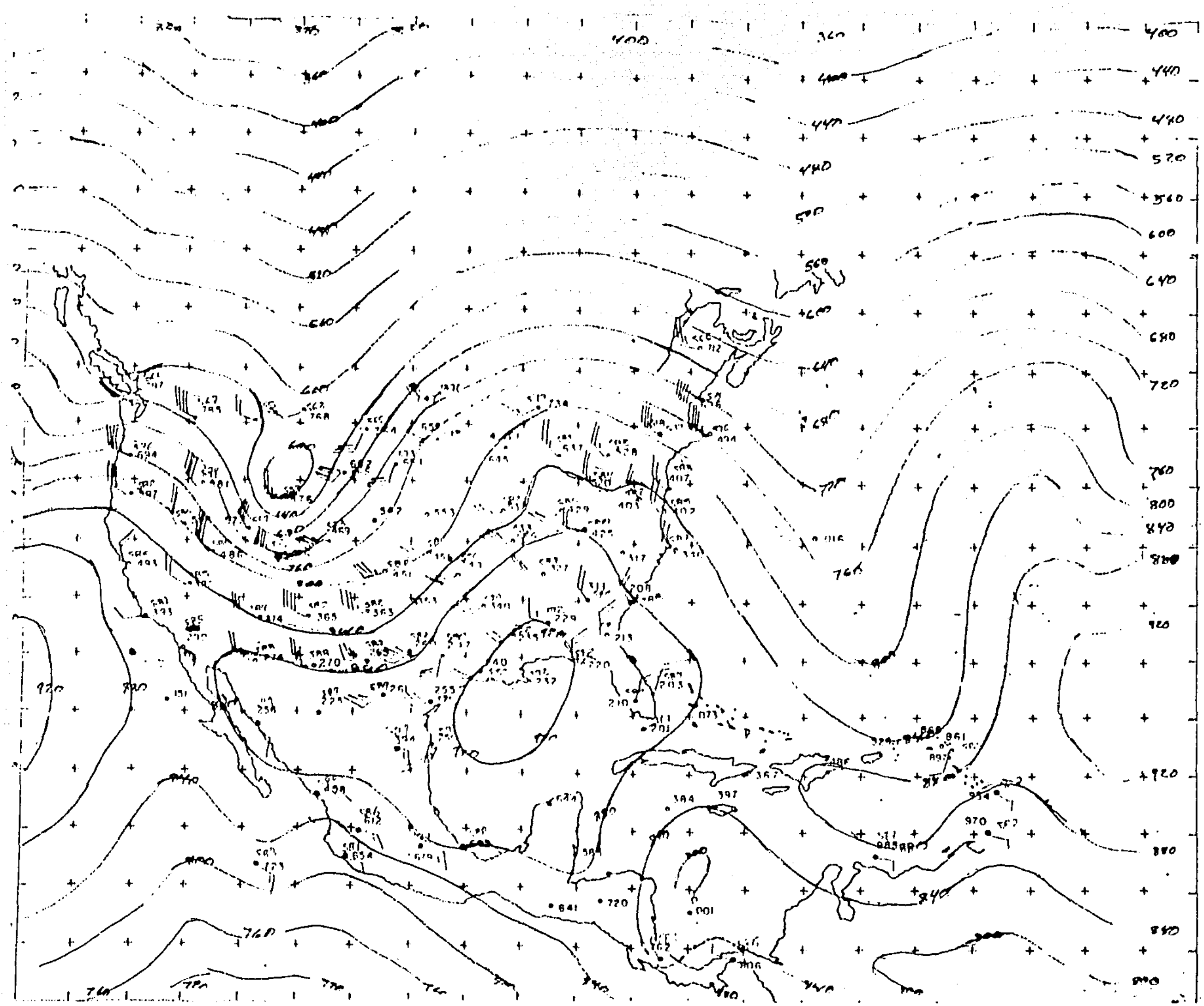
Sept 18
1988
500 mb



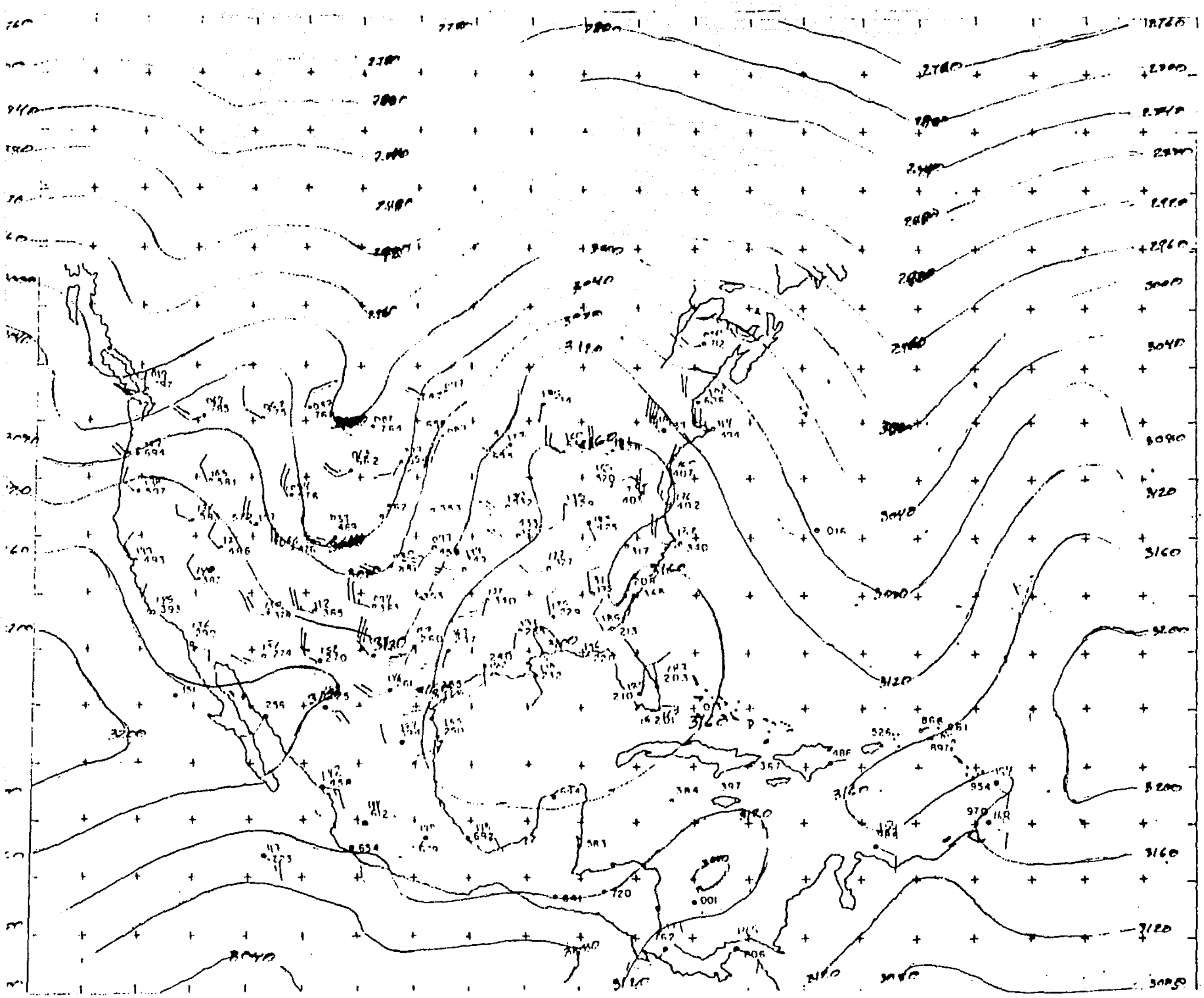
Sept 18
1988
700 mb



Sept 19
1988
250 mb



Sept 19
1988
500 mb



Sept 19
1988
700 mb

ANEXO B

PROGRAMA DEL PROCESO COMPUTACIONAL

```
[illegible]                                                   00000100
FILE [illegible]                                              00000300
FILE [illegible]                                              00000400
FILE [illegible]                                              00000500
[illegible]                                                   00000600
[illegible]                                                   00000700
[illegible]                                                   00000800
[illegible]                                                   00000900
[illegible]                                                   00001000
[illegible]                                                   00001100
[illegible]                                                   00001200
[illegible]                                                   00001300
[illegible]                                                   00001400
[illegible]                                                   00001500
[illegible]                                                   00001600
[illegible]                                                   00001700
[illegible]                                                   00001800
[illegible]                                                   00001900
[illegible]                                                   00002000
[illegible]                                                   00002100
[illegible]                                                   00002200
[illegible]                                                   00002300
[illegible]                                                   00002400
[illegible]                                                   00002500
[illegible]                                                   00002600
[illegible]                                                   00002700
[illegible]                                                   00002800
[illegible]                                                   00003000
[illegible]                                                   00003100
[illegible]                                                   00003200
[illegible]                                                   00003300
[illegible]                                                   00003400
[illegible]                                                   00003500
[illegible]                                                   [illegible]
[illegible]                                                   [illegible]
[illegible]                                                   00003900
[illegible]                                                   00004000
[illegible]                                                   00004100
[illegible]                                                   00004200
[illegible]                                                   00004300
[illegible]                                                   00004400
[illegible]                                                   00004500
[illegible]                                                   00004600
[illegible]                                                   00004605
[illegible]                                                   00004610
[illegible]                                                   00004615
[illegible]                                                   00004620
[illegible]                                                   00004625
[illegible]                                                   00004630
[illegible]                                                   00004635
[illegible]                                                   00004640
[illegible]                                                   00004645
[illegible]                                                   00004700
[illegible]                                                   00004800
[illegible]                                                   00004900
[illegible]                                                   00005000
[illegible]                                                   00005100
[illegible]                                                   00005300
```

```
      TERMLIST
      FILE  5=[illegible],UNIT=DISK,RECORD=14,BLOCKING=30
      FILE  6=[illegible],UNIT=PRINTER
      FILE  [illegible],UNIT=DISK,RECORD=3[illegible]
      [illegible]
     2[illegible],ALATI(15,22),
     3[illegible]
      [illegible]
     1,[illegible],HGILL(69,77)
     2[illegible],AN(69,77),HN(69,77)
      [illegible]
     1[illegible]
      [illegible],AN(69,77),HB(65,
     1[illegible]
      [illegible]
      [illegible],H5(1,150)
      [illegible]
     1,[illegible],15(65,77)
     [illegible],OBS27(25,41)
     [illegible]
      [illegible],SC12(18,20),AG12(18,20)
     1,[illegible]
      [illegible],PHC2(65,77),PHC1(65,77),PHC2(65,77)
      [illegible]
   41 [illegible]
      [illegible]
      [illegible],J=1,150)
  151 [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
    2 [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
   81 [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
 1348 CONTINUE
      CALL [illegible]
```

```
[illegible] ,133,121,105)
[illegible] GF5(I,K)*4000.0
[illegible] 1000.0
[illegible] CONTINUE
[illegible] ,151,121,115)
[illegible] ,151,111,115)
[illegible] = 1,33
[illegible] COS(2.0*XLAT(I,J)) + 0.000050
[illegible] OMEGA [illegible] (XLAT(I,K))
[illegible] CONTINUE
[illegible]
```

```
      [illegible] = TAC(I?)
  88  [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
 133  [illegible]
C     [illegible]
      CALL [illegible]
      CALL [illegible]
      CALL [illegible]
      CALL [illegible]
      CALL [illegible]
 110  [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible] = [illegible] + DLAMB
 200  CONTINUE
C
C     INYECCION [illegible] EN LA FRONTERA
 777  [illegible]
      [illegible]
      [illegible] = [illegible] TAC75(N,?) + [illegible](N,M)
C
C     INYECCION [illegible]
C
      [illegible] = TAC2?(N,?) - TAC75(N,?) + HH(N,M) + ALAR(N,M)
  41  CONTINUE
      [illegible]
      CALL [illegible],BAC,EPS,?,ITER,[illegible],1.0)
      IF [illegible]
      IF [illegible]
      IF [illegible] GOTO 555
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible] + 2.D*DELTAT*T(M,N)
      [illegible] = PAC(M,N)
      [illegible]
      [illegible] = PAC(I,N)
 444  CONTINUE
      [illegible]
 333  [illegible]
      [illegible]
      [illegible] + 2.D*DELTAT*T(M,N)
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible] = PAC(I,N)
 103  CONTINUE
      [illegible]
 222  [illegible]
      [illegible]
      [illegible] + 2.D*DELTAT*T(M,N)
      [illegible]
      [illegible] = PAC(I,N)
 102  CONTINUE
      [illegible]
 111  [illegible]
      [illegible]
      [illegible] + DELTAT*T(M,N)
      [illegible]
      [illegible] = PAC(I,N)
 101  CONTINUE
 100  CONTINUE
      CALL [illegible],TAC,EPS,D,ITER,[illegible],1.0)
```

```
[illegible]                                                         00024100
[illegible]                                                         00024200
[illegible]                                                         00024700
[illegible]                                                         00026200
[illegible]                                                         00027200
[illegible]                                                         00027300
      [illegible] (((N,M) [illegible] (N,M)/((2.*D**2)))/(SIGMA*    [illegible]
[illegible]                                                         00027600
      [illegible] (N,M)[illegible])/(G*(DELTA**2))                  [illegible]
[illegible]                                                         00027700
[illegible]                                                         00027800
[illegible]                                                         00028700
[illegible]                                                         00029500
[illegible]                                                         00029900
[illegible]                                                         00030000
[illegible]                                                         00030100
```

```
[illegible]                                                        00030200
[illegible]                                                        00030300
[illegible]                                                        00030700
[illegible]                                                        00030800
[illegible]                                                        00030850
[illegible]                                                        00030900
[illegible]                                                        00031000
[illegible]                                                        00031100
[illegible]                                                        00031200
[illegible]                                                        00031300
[illegible]                                                        00031400
[illegible]                                                        00031500
[illegible]                                                        00031600
[illegible]                                                        00031700
[illegible]                                                        00031800
[illegible]                                                        00031850
[illegible]                                                        00031900
[illegible]                                                        00032000
[illegible]                                                        00032100
[illegible]                                                        00032200
[illegible]                                                        00032300
[illegible]                                                        00032400
[illegible]                                                        00032500
[illegible]                                                        00032600
[illegible]                                                        00032700
[illegible]                                                        00032800
[illegible]                                                        00032900
[illegible]                                                        00033000
[illegible]                                                        00033100
[illegible]                                                        00033200
[illegible]                                                        00033300
[illegible]                                                        00033400
[illegible]                                                        00033500
[illegible]                                                        00033600
[illegible]                                                        00033700
[illegible]                                                        00033800
[illegible]                                                        00033900
[illegible]                                                        00034000
[illegible]                                                        00034100
[illegible]                                                        00034200
[illegible]                                                        00034300
[illegible]                                                        00034400
[illegible]                                                        00034500
[illegible]                                                        00034600
[illegible]                                                        00034700
[illegible]                                                        00034800
[illegible]                                                        00034900
[illegible]                                                        00035000
[illegible]                                                        00035100
[illegible]                                                        00035200
[illegible] ,A2J(65,77),A3J(65,77)                                 00035300
[illegible]                                                        00035400
[illegible]                                                        00035500
[illegible]                                                        00035600
[illegible] -PSI(I+1,J))                                           00035700
[illegible] -PSI(I,J-1)))/4.                                       00035800
[illegible]                                                        00035900
[illegible]                                                        00036000
[illegible]                                                        00036100
[illegible] -VOPT(I+1,J+1))-PSI(I,J-1)*(                           00036200
[illegible] PSI(I-1,J)*(VOPT(I-1,J+1)-VOPT(I-                      00036300
```

```
[illegible]
[illegible]                                                    00037200
[illegible]                                                    00037300
[illegible]                                                    00037400
[illegible]                                                    00037500
[illegible]                                                    00037600
[illegible]                                                    00037700
[illegible]                                                    00037900
[illegible]
```

```
[illegible]                                              00043200
[illegible]                                              00043300
[illegible]                                              00043400
[illegible]                                              00043500
[illegible]                                              00043600
[illegible]                                              00043700
[illegible]                                              00043800
[illegible]                                              00043900
[illegible]                                              00044000
[illegible]                                              00044100
[illegible]                                              00044200
[illegible]                                              00044300
[illegible]                                              00044400
[illegible]                                              00044500
[illegible]                                              00044600
[illegible]                                              00044700
[illegible]                                              00044800
[illegible]                                              00044900
[illegible]                                              00045000
[illegible]                                              00045100
[illegible]                                              00045200
[illegible]                                              00045300
[illegible] ASTER                                        00045400
[illegible] GATO                                         00045500
[illegible]                                              00045600
[illegible]                                              00045700
[illegible]                                              00045800
[illegible]                                              00045900
[illegible]                                              00046000
[illegible]                                              00046100
[illegible]                                              00046200
[illegible]                                              00046300
[illegible]                                              00046400
[illegible]                                              00046500
[illegible]                                              00046600
[illegible]                                              00046700
[illegible]                                              00046800
[illegible]                                              00046900
[illegible]                                              00047000
[illegible]                                              00047100
[illegible]                                              00047200
[illegible]                                              00047300
[illegible]                                              00047400
[illegible]                                              00047500
[illegible]                                              00047600
[illegible]                                              00047700
[illegible]                                              00047800
[illegible]                                              00047900
[illegible]                                              00048000
[illegible]                                              00048100
[illegible]                                              00048200
[illegible]                                              00048300
[illegible]                                              00048400
[illegible]                                              00048500
[illegible]                                              00048600
[illegible]                                              00048700
[illegible]                                              00048800
[illegible]                                              00048900
[illegible]                                              00049000
[illegible]                                              00049100
[illegible]                                              00049200
```

```
[illegible]  00049300
[illegible]  00049400
[illegible]  00049500
[illegible]  00049600
[illegible]  00049700
[illegible]  00049800
[illegible]  00049900
[illegible]  00050000
[illegible]  00050100
[illegible]  00050200
[illegible]  00050300
[illegible]  00050400
[illegible]  00050500
[illegible]  00050600
[illegible]  00050700
[illegible]  00050800
[illegible]  00050900
[illegible]  00051000
[illegible]  00051100
[illegible]  00051200
[illegible]  00051300
[illegible]  00051400
[illegible]  00051500
[illegible]  00051600
[illegible]  00051700
[illegible]  00051800
[illegible]  00051900
[illegible]  00052000
[illegible]  00052100
[illegible]  00052200
[illegible]  00052300
[illegible]  00052400
[illegible]  00052500
[illegible]  00052600
[illegible]  00052700
[illegible]  00052800
[illegible]  00052900
[illegible]  00053000
[illegible]  00053100
[illegible]  00053200
[illegible]  00053300
[illegible]  00053400
[illegible]  00053500
[illegible]  00053600
[illegible]  00053700
[illegible]  00053800
[illegible]  00053900
[illegible]  00054000
[illegible]  00054100
[illegible]  00054200
[illegible]  00054300
[illegible]  00054400
[illegible]  00054500
[illegible]  00054600
[illegible]  00054700
[illegible]  00054800
[illegible]  00054900
[illegible]  00055000
[illegible]  00055100
[illegible]  00055200
[illegible]  00055300
[illegible]  00055400
[illegible]  00055500
[illegible]  00055600
```

```
[illegible]                                                     00055800
[illegible]                                                     00055900
[illegible]                                                     00056000
[illegible]                                                     00056100
[illegible]                                                     00056200
[illegible]                                                     00056300
[illegible]                                                     00056400
[illegible]                                                     00056500
[illegible]                                                     00056600
[illegible]                                                     00056700
[illegible]                                                     00056800
[illegible]                                                     00056900
[illegible]                                                     00057000
[illegible]                                                     00057100
[illegible]                                                     00057200
[illegible]                                                     00057300
[illegible]                                                     00057400
[illegible]                                                     00057500
[illegible]                                                     00057600
[illegible]                                                     00057700
[illegible]                                                     00057800
[illegible]                                                     00057900
[illegible]                                                     00058000
[illegible]                                                     00058100
[illegible]                                                     00058200
[illegible]                                                     00058300
[illegible] PERSISTENCIA                                        00058400
[illegible]                                                     00058500
[illegible]                                                     00058600
[illegible]                                                     00058700
[illegible]                                                     00058800
[illegible]                                                     00058900
[illegible]                                                     00059000
[illegible]                                                     00059100
[illegible]                                                     00059200
[illegible]                                                     00059300
[illegible]                                                     00059400
[illegible]                                                     00059500
[illegible]                                                     00059600
[illegible]                                                     00059700
[illegible]                                                     00059800
[illegible]                                                     00059900
[illegible]                                                     00060000
[illegible]                                                     00060100
[illegible]                                                     00060200
[illegible]                                                     00060300
[illegible]                                                     00060400
[illegible]                                                     00060500
[illegible]                                                     00060600
[illegible]                                                     00060700
[illegible]                                                     00060800
[illegible]                                                     00060900
[illegible]                                                     00061000
[illegible]                                                     00061100
[illegible]                                                     00061200
[illegible]                                                     00061300
[illegible]                                                     00061400
[illegible]                                                     00061500
[illegible]                                                     00061600
[illegible]                                                     00061700
[illegible]                                                     00061800
[illegible]                                                     00061900
```

```
[illegible]
IF(P.[illegible]) GOTO 10
IF(P.[illegible]) GOTO 11
IF(P.[illegible]) GOTO 12
IF(P.[illegible]) GOTO 13
IF(P.[illegible]) GOTO 14
IF(P.[illegible]) GOTO 15
IF(P.[illegible]) GOTO 16
IF(P.[illegible]) GOTO 17
IF(P.[illegible]) GOTO 18
[illegible]
```

```
[illegible]  00068500
[illegible]  00068600
[illegible]  00068700
[illegible]  00068800
[illegible]  00068900
[illegible]  00069000
[illegible]  00069100
[illegible]  00069200
[illegible]  00069300
[illegible]  00069400
[illegible]  00069500
[illegible]  00069600
[illegible]  00069700
[illegible]  00069800
[illegible]  00069900
[illegible]  00070000
[illegible]  00070100
[illegible]  00070200
[illegible]  00070300
[illegible]  00070400
[illegible]  00070500
[illegible]  00070600
[illegible]  00070700
[illegible]  00070800
[illegible]  00070900
[illegible]  00071000
[illegible]  00071100
[illegible]  00071200
[illegible]  00071300
[illegible]  00071400
[illegible]  00071500
[illegible]  00071600
[illegible]  00071700
[illegible]  00071800
[illegible]  00071900
[illegible]  00072000
[illegible]  00072100
[illegible]  00072200
[illegible]  00072300
[illegible]  00072400
[illegible]  00072500
[illegible]  00072600
[illegible]  00072700
[illegible]  00072800
[illegible]  00072900
[illegible]  00073000
[illegible]  00073100
[illegible]  00073200
[illegible]  00073300
[illegible]  00073400
[illegible]  00073500
[illegible]  00073600
[illegible]  00073700
[illegible]  00073800
[illegible]  00073900
[illegible]  00074000
[illegible]  00074100
[illegible]  00074200
[illegible]  00074300
```