DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Facultad de Ingeniería

ENFRIAMIENTO DE UNA PLACA PLANA EN FLUJOS LAMINAR Y TURBULENTO

ANTONIO JR. VALLEJO GUEVARA

T E S I S

PRENTADA A LA DIVISION DE ESTUDIOS DE
POSGRADO DE LA

FACULTAD DE INGENIERIA

DE LA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

COMO REQUISITO PARA OBTENER
EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERIA
(M E C A N I C A)

CIUDAD UNIVERSITARIA

1990

CONTENIDO.-

CONTENIDO DE FIGURAS Y TABLAS.-

RESUMEN

Este trabajo presenta el análisis para el enfriamiento de una placa plana en un flujo convectivo, tomando en cuenta la conducción de calor longitudinal a traves de la placa. De la aplicación de las ecuaciones para un balance de energía se deduce una simple ecuación integro-diferencial con un solo parámetro, para determinar la evolución de la temperatura durante el enfriamiento de la placa. El parámetro deducido (α) representa la relacion entre la capacidad de la placa para transportar calor en la dirección del flujo y la capacidad para disipar calor al flujo convectivo. Se emplea un análisis asintótico basado en la tecnica de Escalas Múltiples para obtener la solución del problema estudiado. Para esto, dos escalas de tiempo aparecen en el límite asintótico ($\alpha \rightarrow \infty$) para una placa con buena conductividad térmica. En un tiempo $t = 0$, la placa, a una temperatura mayor que la del fluido, se coloca en forma paralela a la corriente del flujo convectivo. En este instante, y durante un tiempo pequeño, un transitorio rápido se presenta y por lo tanto es necesario introducir una escala de tiempo válida para este periodo. Posteriormente, la temperatura llega a una condición de pseudo-equilibrio, en el cual la evolución de la temperatura es lenta.

El problema se resolvió para flujos de capa límite laminar y turbulenta, considerando una solución asintótica de 2 términos para obtener los resultados a diferentes valores de α y tiempo, y comparando también, la capacidad de enfriamiento entre una capa límite laminar y turbulenta. La ecuación gobernante para el caso laminar también se resolvió mediante un esquema numérico. Los resultados obtenidos con ambos métodos concuerdan satisfactoriamente, aún para valores de orden unidad del parámetro α. También se deduce la importancia de considerar la forma acoplada de la transferencia de calor por conducción y convección en este tipo de problemas.

NOMENCLATURA.-

LATINOS:

a_1, a_2 = Constantes de integración

a_9, a = Constantes de integración

Brx = Número de Braun

b = Mitad del espesor de la placa

b = Constante de integración

C = Constante de integración

c = Calor especifico del flujo en la capa límite

co, cn = Constantes para un desarrollo en serie de cosenos de Fourier

cs = Calor especifico del material de la placa

Cf = Coeficiente de fricción para la capa límite turbulenta

E = Error introducido en una aproximación por diferencias finitas

e = Espesor de la placa

h = Coeficiente de transferencia de calor en la capa límite térmica

h = Distancia entre dos puntos de la placa, en la dirección x

K = Núcleo de la ecuación integro-diferencial

k = Conductividad térmica del flujo en la capa límite

k = Distancia entre dos puntos de la placa, en la dirección y

L = Longitud de la placa

Nu = Número de Nusselt ($h\ x\ /\ k$)

Pr = Número de Prandtl ($\mu\ c\ /\ k$)

p = Coordenada en el plano complejo

$\mathring{q}''$ = Flujo de calor por unidad de área

Rex = Número de Reynolds local ($U\infty\ x\ /\ \nu$)

r = Relación de espesores δ y Δ

St = Número de Stanton ($h\ /\ \rho\ c\ U\infty$)

Stx = Número de Stanton local

s = Escala de tiempo para eliminar términos seculares

T = Temperatura

TN = Escalas de tiempo (N = 0,1,2,..,)

T_o = Temperatura en la placa

T_i = Temperatura inicial de la placa

t = Tiempo

t_c = Tiempo característico

t = variable o escalar

U = Velocidad del flujo

u = Velocidad del flujo en la capa límite, en la dirección de la coordenada x

$\overline{u}$ = Velocidad promedio en la capa límite turbulenta

v = Velocidad del flujo en la capa límite, en la dirección de la coordenada y

x = Coordenada o escalar

y = Coordenada

Z = Variable adimensional

z = Variable en el plano complejo

GRIEGOS.-

α = Difusividad térmica

α = Parámetro que relaciona la capacidad de la placa para transportar calor en la dirección del flujo, entre la capacidad para disipar calor al flujo convectivo

β = Función Beta

Γ = Función Gamma

γ = Distancia adimensional en la dirección de la coordenada y

δ = Espesor de la capa límite hidrodinámica

Δ = Espesor de la capa límite térmica

Δ_2 = Espesor entálpico

ε = Cantidad de perturbación

ε_H = Difusividad turbulenta para la transferencia de calor

ε_M = Difusividad turbulenta para la cantidad de movimiento

ζ = Esfuerzo de corte en la capa límite turbulenta

ζ_w = Esfuerzo de corte en la superficie de la placa

η = Escala de tiempo

θ = Temperatura adimensional

λ_g = Conductividad térmica del flujo

λ_s = Conductividad térmica de la placa

λ_n = Valor característico

μ = Viscosidad absoluta

ν = Viscosidad cinemática

ξ = Escala de tiempo

ξ = longitud de la placa a la cual ocurre un cambio de temperatura

ξ = Funciones de deformación

ξ = Distancia a la cual ocurre un cambio de temperatura en la placa

ρ = Densidad del flujo en la capa límite

ρ = Relación de distancias entre los puntos en un enmallado por diferencias finitas

ρ_s = Densidad del material de la placa

σ = Escala para tiempos pequeños

τ = Tiempo adimensional

ϕ = Diferencial de temperatura entre la placa y el flujo convectivo

ϕ = Angulo definido en el plano complejo

φ = Variable equivalente a χ

χ = Distancia adimensional en la dirección de la coordenada x

χ_c = Distancia adimensional, en la cual ocurre la transición de flujo laminar a turbulento

ω = Constante numérica del Método de Escalas Múltiples

SUBINDICES.-

L = Laminar

T = Turbulento

s = Material de la placa

w = Superficie de la placa

∞ = Corriente libre

I .- INTRODUCCION

En los últimos años, las formas acopladas o conjugadas de transferencia de calor (Sistemas de conducción-convección-radiación) han recibido bastante atención, debido a su importancia en diversas aplicaciones del campo ingenieril.

Algunas de estas aplicaciones son: La pared de tubos de una caldera, donde se combinan la convección, conducción y radiación; los intercambiadores de calor, en los que normalmente se combinan la conducción y convección; Para el análisis o diseño de aeronaves o misiles que involucran las formas conjugadas de conducción, convección y radiación; En equipos electrónicos ; En procesos de tratamientos térmicos de materiales, etc.. Es evidente que en todas estas aplicaciones es de vital importancia considerar las formas acopladas de transferencia de calor, para obtener un análisis más realista y confiable del proceso considerado.

Sin embargo, el planteamiento de problemas que involucran estas formas acopladas de transferencia de calor, conducen a ecuaciones integro-diferenciales muy complejas, tanto singulares como regulares. En la mayoría de los casos, estas expresiones no tienen solución analítica exacta, y por lo tanto, se recurre a métodos numéricos o a soluciones analíticas aproximadas para resolver dichas ecuaciones.

Con base en lo anterior, un problema muy común en transferencia de calor, y del cual se puede partir para analizar o resolver algunos de las aplicaciones descritas anteriormente, es el análisis de la transferencia de calor por conducción y convección de una placa plana finita en un medio convectivo laminar o turbulento. La mayoría de los textos resuelven este problema sin considerar la forma acoplada de la conducción y convección, además de plantear solamente estados permanentes, temperaturas constantes y uniformes, generación de energía interna constante, etc., que simplifican bastante el problema. Por lo tanto, el considerar las formas acopladas de transferencia de calor y analizar estados transitorios de una placa plana en un flujo convectivo, implica resolver un problema físico muy cercano a la realidad.

A continuación se mencionan diversos trabajos que se han desarrollado considerando las formas acopladas de transferencia de calor para una placa plana.

En el trabajo de Luikov [1], se analizó el problema de una placa plana (con una longitud excediendo considerablemente el espesor de la placa) mantenida, en su superficie inferior, a una temperatura uniforme y constante y expuesta a un flujo convectivo laminar en su superficie superior. Luikov definió un número de conjugación, llamado número de Braun, para determinar si el problema se considera conjugado o no. Para esto, el número de Braun establece una relación de conductividades térmicas de el fluido y el sólido, así mismo, es función del número de Reynolds y del número de Prandtl.

Luikov obtuvo dos soluciones aproximadas; una basada en un análisis diferencial para números de Prandtl bajos y de la cual se dedujo 2 expresiones para números de Braun pequeños y grandes respectivamente; la otra solución se basó en relaciones integrales de la capa límite laminar, suponiendo soluciones aproximadas de la capa límite y polinomios para la distribución de temperaturas. El autor concluyó que para números de Braun bajos ($Br \leq 0.1$) el problema puede no ser considerando conjugado, es decir, se puede despreciar la conductividad térmica de la placa.

Sohal y Howell [2] presentaron un análisis para determinar el perfil de temperatura de una placa plana con una generación de energía interna, considerando la conductividad térmica del material, la disipación de calor por convección en la superficie superior y por radiación a los alrededores de la placa. De la formulación de este problema se obtuvieron ecuaciones integro-diferenciales singulares, tanto para flujo laminar como para turbulento. Ambas ecuaciones se resolvieron aplicando una técnica numérica.

Los autores mostraron la importancia de la conductividad térmica del material, para la evaluación de la temperatura de la placa, y los cuales determinaron que se pueden tener errores muy grandes (aproximadamente 62%) si no se toma en consideración la forma acoplada de la conducción y convección.

En otro trabajo desarrollado por Karvinen [3] se resolvió el problema de una placa delgada, de longitud finita, con generación interna uniforme de energía térmica y expuesta a un flujo convectivo. En este trabajo se combinó la transferencia de calor por conducción y convección para deducir las ecuaciones integro-diferenciales para flujo laminar y turbulento, tanto para un estado permanente como para un transitorio. Las ecuaciones deducidas se resolvieron aplicando un método iterativo y los resultados se compararon con los obtenidos en forma experimental.

Karvinen también demostró la importancia de considerar en forma acoplada la conducción y convección para este tipo de problemas, sobre todo en el extremo inicial de la placa, donde se tienen errores muy grandes si no se considera la conductividad térmica de la placa.

Treviño y Liñan [4] plantearon el problema de una placa plana con un calentamiento externo y expuesta a un flujo convectivo, y fue resuelto tanto para un proceso permanente como para un transitorio. Del análisis de este problema resultaron ecuaciones integro-diferenciales con un solo parámetro (α), que establece una relación entre la resistencia térmica del fluido y la del material de la placa.

Este caso se resolvió aplicando técnicas de perturbación, donde para valores grandes del parámetro α (una placa con buena conductividad) se aplicó una expansión de Perturbación Regular, usando $1/\alpha$ como el parámetro de perturbación. Para valores pequeños de α se utilizaron técnicas de Perturbación Singular (Igualamiento de Expansiones Asintóticas) para determinar la evolución de la temperatura de la placa.

En este trabajo, los autores concluyeron que una expansión con 3 términos dá muy buenos resultados para $\alpha \geq 5$; para el límite singular ($\alpha \rightarrow 0$) demostraron la formación de 2 capas límites en ambos extremos de la placa, debido a la conducción de calor.

Payvar [5] analizó el problema de una placa plana de espesor finito, con transferencia de calor a un flujo incompresible laminar en la superficie superior, y una temperatura constante en la superficie inferior. El autor utilizó la aproximación de Lighthill para deducir una ecuación integral en función del número de Braun (Brx). Para números pequeños de Brx la integral se resolvió con un método iterativo; para valores intermedios de Brx se utilizó una fórmula de cuadratura de Gauss; para valores grandes del número de Brx se aplicó la transformada de Laplace. El autor comparó los resultados con los obtenidos por Luikov [1], los cuales fueron satisfactorios.

Una vez definida la importancia y aplicaciones de las formas conjugadas de transferencia de calor y planteado los trabajos desarrollados, el presente trabajo tiene como objetivo principal resolver el problema del enfriamiento (o calentamiento) de una placa plana, de longitud finita, expuesta a un flujo convectivo laminar y turbulento, y considerando la forma acoplada de la transferencia de calor por convección y conducción.

Para esto, al igual que en la referencia [4], de un balance de energía aplicado a la placa, resulta una ecuación integro-diferencial singular con un solo parámetro. Este parámetro (α) relaciona la capacidad de la placa para transportar calor en la dirección del flujo y la capacidad para disipar calor al flujo convectivo.

Con base en este parámetro, la ecuación integro-diferencial se puede resolver para 2 límites; para $\alpha \rightarrow 0$ la ecuación integro-diferencial se reduce considerablemente, y utilizando una variable de semejanza se puede resolver numéricamente, tal como se presenta en la referencia [4]; para $\alpha \gg 1$, la ecuación integro-diferencial no se ha resuelto y no se puede utilizar la misma técnica de Perturbación Regular definida en la referencia [4] para encontrar la solución. Las alternativas que se pueden plantear para resolver este problema son:

a) Empleando métodos numéricos, tales como las técnicas de diferencias finitas y la del elemento finito.

b) Utilizando métodos analíticos aproximados.

Los métodos numéricos, aún cuando se han continuado perfeccionando, resultan muy costosos para su evaluación (principalmente requieren de una computadora) y se complican cuando la ecuación diferencial presenta alguna singularidad, como es el caso planteado en este trabajo.

Los métodos analíticos aproximados son adecuados cuando no se pueden obtener soluciones analíticas exactas, debido a que las ecuaciones diferenciales presentan no-linealidades, coeficientes variables, fronteras complejas, etc.. Por otro lado, éstos métodos aún cuando presentan un grado de dificultad matemática mayor que los métodos numéricos, permiten un entendimiento físico más claro del proceso planteado.

Para evaluar la solución del problema descrito arriba, se utiliza el Método de Perturbaciones (Expansiones Asintóticas), y los resultados se comparan con los obtenidos mediante un método numérico.

Como objetivos secundarios, planteados para este trabajo, están los siguientes:

1.- Obtener la solución del problema tanto para una capa límite laminar como para una turbulenta.

2.- Deducir, de los Métodos de Perturbación, la técnica adecuada para resolver la ecuación integro-diferencial singular para el límite asintótico ($\alpha \gg 1$).

3.- Mostrar el efecto de la conductividad térmica del material en la evaluación de la temperatura de la placa. Con esto, se infiere la importancia de considerar las formas acopladas de transferencia de calor para obtener resultados satisfactorios y más confiables para este tipo de problemas.

4.- Definir el rango de validez de la expansión asintótica deducida para el problema planteado. También, obtener los errores máximos al comparar los resultados del método analítico aproximado con los obtenidos con una técnica numérica.

5.- Describir, en forma general, el procedimiento para analizar y resolver este tipo de problemas, que se presentan muy frecuentemente en diversas ramas de la ingeniería.

6.- Finalmente, describir algunas recomendaciones y alcance de la técnica utilizada, así como su impacto y tendencia para otras aplicaciones.

Para cumplir con los objetivos anteriores, este trabajo se ha estructurado de la siguiente manera:

- El primer punto presenta la "Formulación del Problema", donde se define el modelo matemático del problema considerado, así como también, las suposiciones y simplificaciones planteadas. Posteriormente se muestra el desarrollo matemático para obtener las ecuaciones integro-diferenciales que gobiernan el transitorio analizado y las cuales consideran las formas acopladas de la transferencia de calor por conducción y convección.

- El punto siguiente define la "Solución Asintótica" para las ecuaciones integro-diferenciales singulares. Para esto, primero se presenta una breve introducción a los Métodos de Perturbación para definir los conceptos básicos y técnicas de perturbación. Posteriormente se aplica la técnica de Escalas Múltiples para obtener la solución de las ecuaciones integro-diferenciales, tanto para flujo incompresible laminar como para turbulento.

- El tercer punto presenta los "Resultados y Discusiones", donde se describen las pruebas que se realizan para validar este trabajo, junto con las gráficas de los resultados obtenidos. Los resultados obtenidos para el caso laminar se comparan con los deducidos con una técnica numérica. En general, se muestran los resultados para diferentes valores de α, números de Reynolds y una comparación entre el flujo turbulento y laminar para un valor de α muy grande.

- El cuarto punto describe las "Conclusiones" del trabajo desarrollado. En este punto se definen las ventajas y desventajas del método utilizado para resolver el problema planteado, así como también, las recomendaciones y alcance de la técnica para el desarrollo de otros trabajos. En particular, se describe el impacto y experiencia obtenida en la solución de este problema, así como su importancia para futuras aplicaciones.

También se incluyen 2 apéndices que comprenden lo siguiente:

- El primero presenta los listados de los programas utilizados para obtener los resultados de las pruebas realizadas.

- El segundo contiene una breve introducción a la técnica de diferencias finitas y el desarrollo matemático para obtener la solución de la ecuación integro-diferencial, para el caso laminar únicamente. También se incluye el desarrollo para obtener la solución numérica del tercer término de la Expansión Asintótica para el caso laminar.

- Finalmente, el último punto presenta la lista de "Referencias" consultadas para el desarrollo de este trabajo.

2.1.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

El problema planteado en esta sección consiste en evaluar el calor transferido por una placa plana a un flujo convectivo, a través de la capa límite laminar (o turbulenta) que se forma sobre dicha placa, considerando al mismo tiempo el flujo de calor por conducción a través de la misma. Esto implica analizar en forma acoplada la transferencia de calor por convección y conducción, para deducir una expresión que permita obtener la temperatura sobre ésta, durante cualquier tiempo del transitorio. La placa se encuentra inicialmente a una temperatura constante y al colocarse en el flujo convectivo se presenta una variación arbitraria de la temperatura hasta alcanzar la temperatura del medio ambiente.

La figura No. 2.1 muestra el modelo matemático del problema planteado en este trabajo.

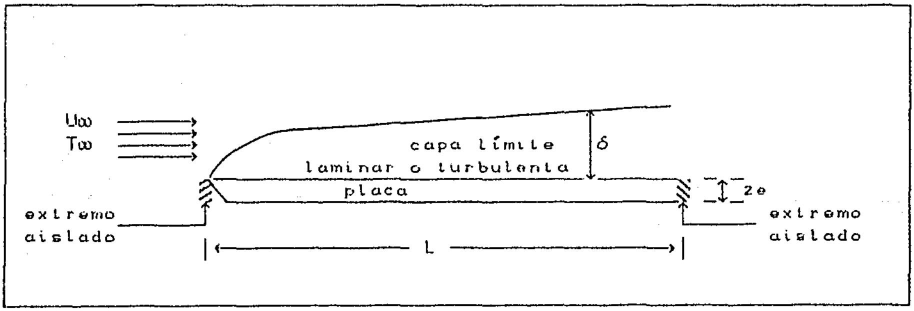

Figura No. 2.1
Placa plana en un flujo convectivo laminar o turbulento.

2.2.- SUPOSICIONES.

Las suposiciones consideradas para resolver el transitorio son las siguientes:

1.- La velocidad y temperatura del flujo fuera de la capa límite, se mantienen constantes.

2.- No existen gradientes de presión para la capa límite laminar debido a que la velocidad del flujo potencial es constante.

3.- La capa límite laminar térmica, que se forma sobre la placa, es más delgada que la capa límite hidrodinámica.

4.- Las propiedades físicas del flujo convectivo permanecen constantes.

5.- Las propiedades del material de la placa se consideran constantes.

2.3.- DESARROLLO MATEMATICO.

En esta sección se deduce la expresión matemática que gobierna el transitorio planteado para el caso laminar y turbulento. Para ello, se desarrollan los pasos definidos a continuación.

Aplicando un balance de energía a un elemento diferencial de la placa, tal como se muestra en la figura 2.2, se tiene,

$$\rho_s c_s \frac{\partial T}{\partial t} dx\ dy = -\lambda_s \frac{\partial T}{\partial x} dy + \lambda_s \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \right) dy - \lambda_s \frac{\partial T}{\partial y} dx + \lambda_s \left(\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dy \right) dx \qquad (2.1)$$

simplificando la expresión anterior,

$$\rho_s c_s \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_s \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dy + \lambda_s \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \qquad (2.2)$$

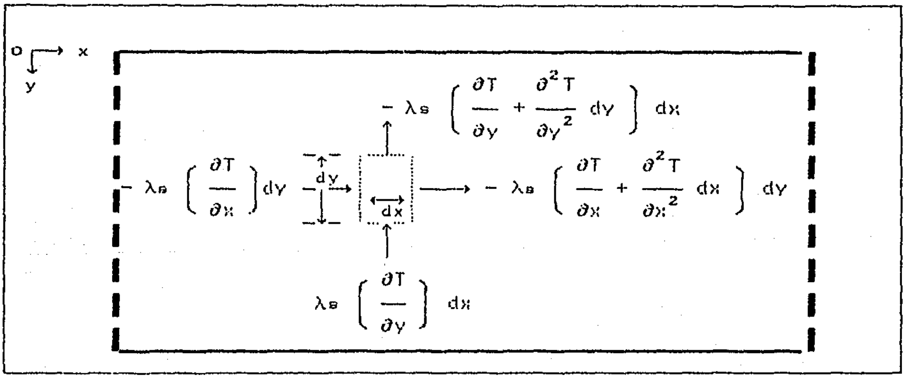

Figura No. 2.2

Elemento diferencial de la placa.

Las condiciones de frontera e iniciales son,

$$T = Ti \quad \text{para } t \leq 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{para } x = 0 \text{ y } x = L \tag{2.4}$$

$$\lambda s \frac{\partial T}{\partial y} = - \overset{\circ}{q}''_{v} \quad \text{para } y = 0 \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{para } y = - e \tag{2.6}$$

donde $\overset{\circ}{q}''_{v}$ corresponde al calor por convección cedido al flujo en la superficie superior.

Definiendo las variables adimensionales siguientes,

$$\theta = \frac{T - T_{\infty}}{Ti - T_{\infty}} = \frac{T - T_{\infty}}{\Delta Ti} \tag{2.7}$$

$$\chi = \frac{x}{L} \tag{2.8}$$

$$\gamma = \frac{y}{e} \tag{2.9}$$

$$\tau = t \;/\; tc \tag{2.10}$$

e introduciendo estas variables en (2.2),

$$\Delta Ti \frac{\rho s \; cs}{tc \; \lambda s} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\Delta Ti}{L^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi^2} + \frac{\Delta Ti}{e^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \gamma^2} \tag{2.11}$$

y reduciendo términos,

$$\left(\frac{\rho s \; cs \; e^2}{tc \; \lambda s} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \left(\frac{e}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \gamma^2} \tag{2.12}$$

El valor del tiempo característico (tc) se define más adelante. En la expresión anterior, la temperatura adimensional de la placa es una función de $\theta = \theta(\chi,\gamma,\tau)$, por lo que es necesario hacer una simplificación para poder deducir una solución analítica del modelo matemático estudiado. Para esto, se supone que la temperatura del plato es una función de la coordenada longitudinal χ y del tiempo τ, en una primera aproximación. Las restricciones debidas a esta suposición se indican más adelante.

Considerando lo anterior,

$$\theta(\chi,\gamma,\tau) = \theta_0(\chi,\tau) + \varepsilon\, \theta_1(\chi,\gamma,\tau) + O(\varepsilon^2) \qquad (2.13)$$

donde ε es un parámetro pequeño comparado con la unidad, que se define a continuación. Introduciendo (2.13) en (2.12), se obtiene lo siguiente,

$$\left(\frac{\rho s\ Cs\ e^2}{\lambda s\ \ tc}\right)\left[\frac{\partial\theta_0}{\partial\tau} + \varepsilon\,\frac{\partial\theta_1}{\partial\tau}\ \ldots\right] = \left(\frac{e}{L}\right)^2\left[\frac{\partial^2\theta_0}{\partial\chi^2} + \varepsilon\,\frac{\partial^2\theta_1}{\partial\chi^2}\ \ldots\right] + \varepsilon\,\frac{\partial^2\theta_1}{\partial\gamma^2} + \ldots \qquad (2.14)$$

Integrando la ecuación (2.14) en la forma $\int_0^1 [\ \ ]\, d\gamma$, y despreciando términos de orden más alto, se puede obtener en una primera aproximación

$$\left(\frac{e}{L}\right)^2 \frac{\partial^2\theta_0}{\partial\chi^2} - \left(\frac{Nu}{\chi}\right)\left(\frac{\lambda g}{\lambda s}\right)\left(\frac{e}{L}\right) = \frac{\rho s\ Cs\ e^2}{\lambda s\ \ tc}\,\frac{\partial\theta_0}{\partial\tau} \qquad (2.15)$$

En la expresión anterior, se aplican las condiciones de frontera (2.5) y (2.6). El número de Nusselt se define como,

$$Nu = -\,\frac{\mathring{q}''_w}{T_0 - T_\infty} \qquad (2.16)$$

donde λg representa la conductividad térmica del fluido. Considerando que los tiempos característicos en el fluido son en general muy pequeños comparados con los tiempos característicos en los sólidos, se puede suponer una aproximación cuasi-estacionario en la fase del fluido. Con esto, la solución de la ecuación de la energía en el fluido puede obtenerse usando la aproximación asintótica de Lighthill [referencia (6)] para valores grandes del número de Prandtl y por lo tanto, el número de Nusselt se define como,

$$Nu = a \, Pr^{m} \, Re^{n} \, \chi^{n} \left[\theta_{l} + \int_{\theta l}^{\theta} K(\chi,\bar{\chi}) \, d\bar{\theta} \right] \qquad (2.17)$$

Esta expresión se presenta en la referencia [8] para un flujo laminar y turbulento, con una temperatura de la superficie de la placa variando en forma arbitraria y donde θ_{l} representa la temperatura en el borde de ataque de la placa. El núcleo de la integral en la ecuación (2.17) se define como

$$K(\chi,\bar{\chi}) = \left[1 - \left(\frac{\bar{\chi}}{\chi} \right)^{B} \right]^{-C} \qquad (2.18)$$

Las constantes a, B, c, n, m dependen de las características del flujo. La tabla No. 2.1, obtenida de las referencias [8] y [3], presenta los valores para flujos de capa límite laminar y turbulenta sobre una superficie lisa.

TABLA No. 2.1.

CAPA LIMITE	a	B	c	m	n
LAMINAR	0.332	3/4	1/3	1/3	1/2
TURBULENTA	0.028	9/10	1/9	3/5	8/10

Introduciendo (2.17) en (2.15), se tiene

$$\left(\frac{e}{L}\right)^2 \frac{\partial^2\theta}{\partial\chi^2} = \frac{\rho s\ cs\ e^2}{\lambda s\ tc}\frac{\partial\theta}{\partial\tau} + \frac{a\ Pr^m\ Re^n\ \chi^n\ \lambda g\ e}{\chi\ \lambda s\ L}\left[\int_{\theta_l}^{\theta} K(\chi,\bar{\chi})\ d\bar{\theta} + \theta_l\right] \qquad (2.19)$$

En la expresión anterior, el subíndice "o" ha sido eliminado por simplicidad. Definiendo,

$$\eta = \frac{\lambda s\ L}{a\ Pr^m\ Re^n\ \lambda g\ e} \qquad (2.20)$$

y sustituyendo en la ecuación (2.19),

$$\eta\left(\frac{e}{L}\right)^2 \frac{\partial^2\theta}{\partial\chi^2} = \eta\frac{\rho s\ cs\ e^2}{\lambda s\ tc}\frac{\partial\theta}{\partial\tau} + \frac{1}{\chi^{1-n}}\left[\int_{\theta_l}^{\theta} K(\chi,\bar{\chi})\ d\bar{\theta} + \theta_l\right] \qquad (2.21)$$

Esta ecuación integro-diferencial permite obtener la evolución de la temperatura de la placa. Esta ecuación se puede simplificar aún más, al definir el parámetro α como

$$\alpha = \left(\frac{e}{L}\right)\left(\frac{\lambda s}{\lambda g}\right)(\ a\ Pr^m\ Re^n\ )^{-1} \qquad (2.22)$$

Este parámetro representa la relación entre la capacidad de la placa para transportar calor en la dirección del flujo y la capacidad para disipar calor al flujo convectivo. Para $\alpha \gg 1$ la conducción de calor a través de la placa es muy grande, y por lo tanto, no existen grandes gradientes longitudinales de temperatura. Por otro lado, para $\alpha \ll 1$ solo se transfiere calor hacia el flujo convectivo.

El tiempo característico tc se define como

$$tc = e\ L\ \rho s\ cs\left[\ a\ Pr^m\ Re^n\ \lambda g\right]^{-1} \qquad (2.23)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.22) y (2.23) en (2.21), se deduce la ecuación integro-diferencial que gobierna el problema planteado,

$$\alpha \frac{\partial^2\theta}{\partial\chi^2} = \frac{\partial\theta}{\partial\tau} + \frac{1}{\chi^{1-n}} \left\{ \int_0^{\chi} \left[1 - \left(\frac{\chi}{\bar{\chi}} \right)^{B} \right]^{-C} \frac{d\theta}{d\bar{\chi}} \, d\bar{\chi} + \theta_1 \right\} \tag{2.24}$$

Integrando la expresión (2.14) en la forma $\int_0^1 [\quad] \, d\chi$, ésta se reduce en una primera aproximación a,

$$\frac{\rho s \ Cs \ e^2}{\lambda s \ tc} \frac{\partial}{\partial\tau} \int_0^1 \theta_0 \, d\chi = \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial\chi^2} \int_0^1 \theta_1 \, d\chi \tag{2.25}$$

De la relación anterior se puede obtener la definición del parámetro ε,

$$\varepsilon = a \ (e/L) \ (\lambda g/\lambda s) \ Re^n \ Pr^m << 1 \tag{2.26}$$

Esta expresión permite deducir la restricción considerada para obtener la expresión (2.13). De las ecuaciones (2.22) y (2.26) se tiene que el valor de α debe ser igual a,

$$\alpha >> (e/L)^2 \tag{2.27}$$

lo cual permite un amplio rango para validar la aproximación de la ecuación (2.13). Por lo tanto, si se cumple la restricción (2.27), la temperatura de la placa puede deducirse en función de χ y τ únicamente. Las condiciones de frontera e iniciales se definen como,

$$\theta(\chi,0) = 1 \tag{2.28}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\chi} = 0 \qquad \text{para } \chi = 0, 1 \tag{2.29}$$

Con esto, la temperatura de la placa se define como $\theta = F(\chi,\tau,\alpha)$. La solución de la ecuación integro-diferencial (2.24) se deduce en el capítulo siguiente, para el límite asintótico $\alpha >> 1$.

III.- SOLUCION ASINTOTICA

3.1.- INTRODUCCION.

En este capítulo se deduce la solución analítica de las ecuaciones integro-diferenciales singulares, obtenidas en el capítulo anterior.

Para esto, primero se presenta una breve descripción de los Métodos de Perturbación, mencionando conceptos básicos, tipos de expansiones y los diferentes métodos que existen. También se describen las razones por las cuales se seleccionó este método.

Finalmente, los últimos puntos de este capítulo incluyen todo el desarrollo matemático para obtener la solución asintótica de las ecuaciones integro-diferenciales singulares, tanto para el caso laminar como para el turbulento.

III.- SOLUCION ASINTOTICA

3.1.- INTRODUCCION.

En este capitulo se deduce la solución analitica de las ecuaciones integro-diferenciales singulares, obtenidas en el capitulo anterior.

Para esto, primero se presenta una breve descripción de los Métodos de Perturbación, mencionando conceptos básicos, tipos de expansiones y los diferentes métodos que existen. También se describen las razones por las cuales se seleccionó este método.

Finalmente, los últimos puntos de este capitulo incluyen todo el desarrollo matemático para obtener la solución asintótica de las ecuaciones integro-diferenciales singulares, tanto para el caso laminar como para el turbulento.

3.2.- CONCEPTOS BASICOS.

Al igual que otras ramas de la ingeniería, el análisis de la transferencia de calor ha recibido, en las últimas dos décadas, el apoyo de procedimientos numéricos que involucran las técnicas de diferencias finitas y del elemento finito. Al mismo tiempo, se han continuado desarrollando los métodos analíticos aproximados para proporcionar soluciones adecuadas a una gran variedad de problemas físicos. Uno de estos métodos es el **Método de Perturbaciones** (Expansiones Asintóticas).

La necesidad de recurrir a la aproximación analítica se debe a que los problemas físicos de transferencia de calor presentan ciertas características, en sus ecuaciones gobernantes, que impiden obtener soluciones analíticas exactas. Estas características pueden ser; no-linealidades, coeficientes variables, fronteras complejas, fronteras no-lineales conocidas o desconocidas, etc.. Aún si el problema tiene una solución explicita, esta puede ser no adecuada para una interpretación física o matemática, o para evaluación numérica.

Las Expansiones Asintóticas se consideran en términos de un parámetro (pequeño o grande), que aparece naturalmente o puede introducirse artificialmente por conveniencia. Estas expansiones se llaman Perturbaciones por Parámetros. Alternativamente, las expansiones pueden considerarse en términos de una coordenada (pequeña o grande). Estas se llaman Perturbaciones por Coordenadas.

Perturbaciones por parámetros.

Los problemas que involucran la función $u(x,\varepsilon)$ pueden representarse por la ecuación diferencial $L(u,x,\varepsilon) = 0$ y la condición de frontera $B(u,\varepsilon) = 0$, donde x es un escalar o un vector variable independiente y ε es un parámetro. En general, este problema no puede resolverse exactamente. Sin embargo, si existe un $\varepsilon = \varepsilon_o$ para el cual el problema se puede resolver, se puede encontrar la solución para ε

pequeño, en una serie de potencias de ε, esto es

$$u(x;\varepsilon) = u_o(x) + \varepsilon\, u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \ldots. \qquad (3.1)$$

donde u_n es independiente de ε y $u_o(x)$ es la solución del problema para $\varepsilon = 0$. Posteriormente se sustituye la expresión (3.1) en $L(u,x,\varepsilon) = 0$ y $B(u,\varepsilon) = 0$, realizando la expansión para ε y agrupando los coeficientes para cada potencia de ε.

Con esto se obtiene un sistema infinito de ecuaciones que puede resolverse recursivamente para obtener los coeficientes de la serie (3.1).

Perturbaciones por coordenadas.

Si el problema se representa por una ecuación diferencial $L(u,x) = 0$, con condiciones de frontera $B(u) = 0$, donde x es un escalar y si $u(x)$ toma una forma conocida u_o para $x \longrightarrow x_o$ (x_o puede ser 0 o ∞), se puede determinar la desviación de u con respecto a u_o, para x cercano a x_o, en términos de una serie de potencias de x si $x_o = 0$, o x^{-1} si $x_o = \infty$. En este caso, la cantidad perturbada, x, es una variable del sistema.

Funciones "Gauge".

Una vez identificada la cantidad de perturbación ε para un problema dado, el siguiente paso consiste en determinar la dependencia de la solución sobre ε. Para esto, se debe conocer el comportamiento de la función $f(\varepsilon)$ cuando ε tiende a cero. El límite de $f(\varepsilon)$ puede ser cualquiera de los siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\varepsilon \to 0} f(\varepsilon) = 0 \\[2ex] \lim\limits_{\varepsilon \to 0} f(\varepsilon) = c \\[2ex] \lim\limits_{\varepsilon \to 0} f(\varepsilon) = \infty \end{array}\right\} \text{donde} \quad 0 < c < \infty$$

En el primer y tercer caso, la razón a la cual $f(\varepsilon) \to 0$ y $f(\varepsilon) \to \infty$ se desarrolla al comparar $f(\varepsilon)$ con funciones conocidas, llamadas **gauge**. Las más simples y usuales son,

$$\ldots, \varepsilon^{-n}, \varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-1}, 1, \varepsilon, \varepsilon^{2}, \ldots, \varepsilon^{n}, \ldots$$

$$\log \varepsilon^{-1}, e^{-\varepsilon^{-1}}, \text{sen } \varepsilon, \cos \varepsilon, \text{etc..}$$

Esta comparación se facilita con el uso de los símbolos de orden, O y o, tal como se muestra a continuación;

$$f(\varepsilon) = O\,[g(\varepsilon)] \text{ para } \varepsilon \to 0 \text{ si } \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} \right] < \infty$$

$$f(\varepsilon) = o\,[g(\varepsilon)] \text{ para } \varepsilon \to 0 \text{ si } \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} \right] = 0$$

Para ilustrar lo anterior, se muestra el siguiente ejemplo. Se desea obtener la función "gauge" para $f(\varepsilon) = \text{sen } \varepsilon$ cuando $\varepsilon \to 0$. Aplicando una serie de Taylor a la función,

$$\text{sen } \varepsilon = \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3!} + \frac{\varepsilon^5}{5!} - \frac{\varepsilon^7}{7!} + \ldots$$

ó

$$\frac{\text{sen } \varepsilon}{\varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon^2}{3!} + \frac{\varepsilon^4}{5!} - \frac{\varepsilon^6}{7!} + \ldots.$$

y aplicando el límite para $\varepsilon \to 0$, se tiene

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\text{sen } \varepsilon}{\varepsilon} = 1$$

donde se observa que el comportamiento limitante de Sen ε es el mismo que para ε, el cual en este caso es la función "gauge" apropiada. De esto se deduce que,

$$\text{Sen } \varepsilon = O\,(\varepsilon) \text{ para } \varepsilon \to 0$$

Otros ejemplos, para $\varepsilon \to 0$, son

$\text{Cos}\ \varepsilon = O(1)$ $\qquad$ $\text{Sen}\ \varepsilon^2 = O(\varepsilon^2)$

$Jo(\varepsilon) = O(1)$ $\qquad$ $1 - \text{Cos}\ \varepsilon = O(\varepsilon^2)$

$\text{Tanh}\ \varepsilon = O(\varepsilon)$ $\qquad$ $Jo(\varepsilon) - 1 = O(\varepsilon^2)$

$\text{Coth}\ \varepsilon = O(\varepsilon^{-1})$ $\qquad$ $\text{Cot}\ \varepsilon = O(\varepsilon^{-1})$

Expansiones asintóticas.

Una función no necesariamente se debe representar por una serie de potencias, sino que también puede ser expresada como una función de ε. Para esto, primero se define una secuencia de funciones $g_n(\varepsilon)$, llamada secuencia asintótica, tal que

$$g_n(\varepsilon) = o\,[g_{n-1}(\varepsilon)] \tag{3.2}$$

En términos de estas secuencias asintóticas, se puede deducir una expansión asintótica para $f(\varepsilon)$; o sea

$$f(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} an\ g_n(\varepsilon) \tag{3.3}$$

una forma especial de (3.3) es

$$f(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} an\ \varepsilon^n \tag{3.4}$$

donde la secuencia asintótica es ε^n y an es independiente de ε.

Perturbaciones Regulares y Singulares.

Una vez identificada la cantidad de perturbación y seleccionado la forma de la expansión asintótica, es necesario evaluar los coeficientes "an" de la ecuación (3.4). Para esto, se debe sustituir la ecuación (3.4) en las ecuaciones gobernantes del problema.

Después de la sustitución, el siguiente paso consiste en agrupar los términos que tienen las mismas potencias de ε. Igualando los coeficientes para cada potencia de ε a cero, se obtiene un sistema de ecuaciones que puede ser resuelto recursivamente para deducir los coeficientes a_n. Con la evaluación de "a_n", la expansión (3.4) está completamente determinada. El último paso consiste en examinar la validez de la expansión asintótica en todo el dominio de la variable independiente. Si es válida en todo el dominio, la expansión es clasificada como expansión de perturbación regular. De otro modo, si ésta pierde validez en una cierta región, la expansión es clasificada como expansión de perturbación singular.

3.3.- METODOS DE PERTURBACION.

Las expansiones asintóticas, tal como se mencionó anteriormente, son de dos tipos: expansiones de Perturbaciones Regulares y expansiones de Pertubaciones Singulares.

Para las primeras, las soluciones que se obtienen son válidas en todo el dominio de la variable independiente. En las segundas, las expansiones que se aplican tienen soluciones que pierden validez en regiones llamadas capas límites o regiones de no-uniformidad.

Algunas de las no-uniformidades más comunes son: El dominio infinito, un parámetro pequeño multiplicando las derivadas de orden más alto y presencia de singularidades.

En el caso de dominio infinito, las no-uniformidades se manifiestan con la presencia de los términos llamados seculares, tales como $x^n\mathrm{Cos}(x)$ y $x^n\mathrm{Sen}(x)$. Estos hacen que $f_n(x)$ / $f_{n-1}(x)$ no esté limitado cuando $x \longrightarrow \infty$.

En el caso de que un pequeño parámetro multiplique a la derivada de orden más alto, ocasiona que la expansión asintótica no pueda satisfacer todas las condiciones de frontera e iniciales del problema.

Para el último caso, las singularidades que no son parte de la solución exacta aparecen en algún punto de la expansión, y generalmente se vuelven más pronunciadas en los términos sucesivos.

Para evitar estas no-uniformidades en las expansiones asintóticas, se han desarrollado diversos métodos. Algunos de estos métodos son:

- Método de deformación de coordenadas
- Método de expansiones asintóticas acopladas

- Método de escalas múltiples

Método de Deformación de Coordenadas (Técnica de Lighthill).

Cuando el proceso de perturbación conduce a una expansión singular, el resultado está muy limitado, a menos de que pueda modificarse para generar una solución uniforme. Una de las técnicas para lograr esto, es el método de deformación de coordenadas o técnica de Lighthill.

La idea básica de esta técnica es la de expander tanto la variable dependiente como la variable independiente, que presenta la no-uniformidad, en potencias del parámetro de perturbación ε y con los coeficientes expresados como funciones de una nueva variable independiente. Por ejemplo, si la función $f(x_1,x_2,...,x_m;\varepsilon)$ presenta una no-uniformidad, es necesario expander no solamente la variable dependiente f, sino también la variable independiente, por decir x_1, en potencias de ε. Esto conduce a,

$$f = \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon^n fn(s,x_2,x_3,...,x_m) + O(\varepsilon^N) \tag{3.5}$$

$$x_1 = s + \sum_{n=0}^{N} \varepsilon^n \xi_n(s,x_2,x_3,...,x_m) + O(\varepsilon^{N+1}) \tag{3.6}$$

Las funciones ξ_n se conocen como funciones de deformación, y son evaluadas de tal forma que la expansión de f sea válida uniformemente. En otras palabras $f_n / f_{n-1} < \infty$ para todos los valores de x_1, o equivalentemente que las aproximaciones sucesivas no sean más singulares que las primeras.

Método de Expansiones Asintóticas Acopladas.

Este método se aplica para resolver aquellos problemas donde la cantidad de perturbación ε aparece en frente de la derivada de orden más alto. Las soluciones de tales ecuaciones generalmente presentan regiones de rápidas variaciones cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$, ocasionando que no se puedan cumplir todas las condiciones de frontera. Cuando el espesor de estas regiones se aproxima a 0 cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$, se les llama capas límites.

Una técnica para eliminar este problema consiste en determinar una expansión fuera de la capa límite (llamada expansión exterior) usando las variables originales, y posteriormente determinar la expansión, dentro de la capa límite (llamada expansión interna), que describe los cambios de forma usando escalas amplificadas. Las expansiones exteriores pierden validez en las regiones internas, y las expansiones internas afuera de la capa límite. El siguiente paso consiste en el igualamiento de las expansiones para obtener una solución válida en todo el dominio de la variable independiente.

Para el igualamiento de las expansiones, Van-Dyke, referencia [15], definió un método que consiste en lo siguiente:

Dada la ecuación diferencial;

$$\varepsilon f''(x) + f'(x) + \beta f(x) = 0 \tag{3.7}$$

1.- Se aplica una expansión de perturbación regular;

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n} f_n \tag{3.8}$$

para obtener una expansión externa, $f(x)$.

2.- Se introduce una transformación de la forma;

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon}$$

y se sustituye en la ecuación original para deducir una expansión interna, $g(\xi)$.

3.- Para el igualamiento de las expansiones primero se cambia la variable x en la solución externa por;

$$x = \xi \varepsilon$$

y se introduce en la solución exterior, $f(\xi; \varepsilon)$.

4.- Se aplica una expansión a $f(\xi; \varepsilon)$ para un valor pequeño de ε, para obtener así $(f)^i$.

5.- La variable ξ se sustituye por x/ε en la solución interna. Posteriormente se aplica una expansión para un valor pequeño de ε y se obtiene $(g)^o$.

6.- Finalmente se igualan las ecuaciones obtenidas, o sea,

$$(f)^i = (g)^o$$

para deducir las constantes que aparecen en las soluciones exteriores e interiores.

Método de Escalas Múltiples.

La teoría de escalas múltiples se emplea cuando los métodos de perturbación ordinarios no proporcionan una solución uniformemente exacta para f(x), para valores pequeños y grandes de x. Existen diversas variantes para este método, que se describen mediante el siguiente ejemplo.

Dada la ecuación de un oscilador lineal amortiguado,

$$f'' + f = -2\,\varepsilon\, f \tag{3.9}$$

Aplicando la expansión asintótica (3.8) en (3.9) y separando los términos para las mismas potencias de ε, se tiene

$$f_o'' + f_o = 0 \tag{3.10}$$

$$f_1'' + f_1 = -2\ f_0' \tag{3.11}$$

$$f_2'' + f_2 = -2\ f_1' \tag{3.12}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones en forma recursiva, se obtiene,

$$f_0 = a\ \mathrm{Cos}(x + b) \tag{3.13}$$

$$f_1 = -a\ x\ \mathrm{Cos}(x + b) \tag{3.14}$$

$$f_2 = \frac{1}{2}\ a\ x^2\ \mathrm{Cos}(x + b) + \frac{1}{2}\ a\ x\ \mathrm{Sen}(x + b) \tag{3.15}$$

donde a y b son constantes.

La solución, según la expansión asintótica (3.8) es

$$f = a\ \mathrm{Cos}(x + b) - \varepsilon\ a\ x\ \mathrm{Cos}(x + b) + \frac{1}{2}\ a\ \varepsilon^2 \left[\ x^2\ \mathrm{Cos}(x + b) + x\ \mathrm{Sen}(x + b)\ \right] + O(\varepsilon^3) \tag{3.16}$$

Es obvio que esta solución es una pobre aproximación a f(x) cuando x es del $O(\varepsilon^{-1})$. Esto se deduce al comparar la ecuación (3.16) con la solución exacta,

$$f = a\ \mathrm{Exp}(-\varepsilon x)\ \mathrm{Cos}\left[\ \sqrt{1 - \varepsilon^2}\ x + b\ \right] \tag{3.17}$$

La ecuación (3.16) puede obtenerse a partir de (3.17) para un valor pequeño de ε, manteniendo fijo el valor de x. Para esto, el exponencial y el coseno se representan como,

$$\mathrm{Exp}(-\varepsilon x) = 1 - \varepsilon x + (1/2)\ \varepsilon^2\ x^2 + \ldots \tag{3.18}$$

$$\mathrm{Cos}\left[\ \sqrt{1 - \varepsilon^2}\ x + b\ \right] = \mathrm{Cos}(x + b) + (1/2)\varepsilon^2\ x\ \mathrm{Sen}(x + b) + \ldots \tag{3.19}$$

En estas series se puede observar que cuando x es tan grande como ε^{-1}, la expansión truncada excede el límite de exactitud. Para determinar una expansión asintótica válida para tiempos tan grandes como ε^{-1}, es necesario introducir una nueva variable $T_1 = \varepsilon x = O(1)$. Similarmente, la expansión truncada (3.19) no es adecuada cuando x es tan grande como ε^{-2}. Esto implica introducir otra variable $T_2 = \varepsilon^2 x = O(1)$.

Con estas nuevas variables, se tiene;

$$\mathrm{Exp}(-\varepsilon x) = \mathrm{Exp}(-T_1) \tag{3.20}$$

$$\mathrm{Cos}\left[\sqrt{1-\varepsilon^2}\,x + b\right] = \mathrm{Cos}(x - T_2/2 + b) + (1/8)\varepsilon^4 x\,\mathrm{Sen}(x - T_2/2 + b) + \ldots \tag{3.21}$$

La expansión (3.21) es válida para $x = O(\varepsilon^{-2})$. Sin embargo, esta expansión es inválida cuando $x = O(\varepsilon^{-4})$, debido a que el segundo término deja de ser pequeño comparado con el primero. Para evitar esto, se introduce otra variable para tiempos tan grandes como ε^{-4}, es decir, $T_4 = \varepsilon^4 x = O(1)$.

Lo anterior sugiere que $f(x;\varepsilon)$ dependa explícitamente de x, εx, $\varepsilon^2 x, \ldots$, así como de x misma. Por lo tanto, para obtener una expansión truncada que sea válida para todo x arriba de ε^{-N}, donde N es un entero positivo, debemos evaluar la dependencia de f sobre las m+1 escalas de tiempo diferentes, T_0, $T_1, \ldots T_N$, o sea

$$T_n = \varepsilon^n x \tag{3.22}$$

La escala de tiempo T_1 es más lenta que T_0, mientras que T_2 es más lenta que T_1. En general T_n es más lenta que T_{n-1}. En base a esto, se tiene

$$f(x;\varepsilon) = \tilde{f}(T_0, T_1, \ldots, T_N;\varepsilon)$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon^n f_n(T_0, T_1, \ldots, T_N) + O(\varepsilon T_N) \tag{3.23}$$

Las expresiones (3.22) y (3.23) constituyen la versión de el método de escalas múltiples denominada "versión de variables-múltiples".

Otra versión del método de escalas múltiples fue introducida por **Cole y Kervorkian**. Para esto, de la solución exacta (3.17) se observa que x aparece en las combinaciones εx o $\sqrt{1-\varepsilon^2}\,x$. Por lo tanto, para determinar una expansión válida para tiempos grandes, se introducen las 2 escalas de tiempo;

$$\xi = \varepsilon x \tag{3.24}$$

$$\eta = \sqrt{1-\varepsilon^2}\,x = \left[\, 1 - (1/2)\varepsilon^2 - (1/8)\varepsilon^4 + \ldots \right] x \tag{3.25}$$

Así mismo, Cole y Kevorkian, referencia [12], consideran que

$$f(x;\varepsilon) = \tilde{f}(\xi,\eta;\varepsilon) = \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon^n \, f_n(\xi;\eta) + O(\varepsilon^N) \tag{3.26}$$

donde:

$$\xi = \varepsilon x \quad y \quad \eta = \left(1 + \varepsilon^2\omega_2 + \varepsilon^3\omega_3 + \ldots + \varepsilon^N\omega_N \right) x \tag{3.27}$$

En este caso, ξ es más lenta que η. Por otro lado, las constantes ω_2, ω_3, $\ldots$, ω_N deben ser evaluadas con el fin de eliminar los términos seculares que aparecen en la solución.

3.4.- SOLUCION ASINTOTICA DE LA ECUACION INTEGRO-DIFERENCIAL.

En esta sección se obtiene la solución de la ecuación integro-diferencial singular, deducida en el capítulo anterior, tanto para el caso laminar como para el turbulento.

La solución de estas ecuaciones se evalúa para el límite asintótico $\alpha \gg 1$, y por lo tanto, el parámetro de perturbación se define como,

$$\varepsilon = 1 / \alpha$$

Con este parámetro, las ecuaciones para el caso laminar y turbulento son,

$$- \varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi^2} = \varepsilon \left\{ \frac{\theta_L}{\sqrt{\chi}} + \frac{1}{\sqrt{\chi}} \int_0^{\chi} \left[1 - \left(\frac{\bar{\chi}}{\chi} \right)^{3/4} \right]^{-1/3} \frac{d\bar{\theta}}{d\bar{\chi}} \, d\bar{\chi} \right\} \quad (3.28)$$

$$- \varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi^2} = \varepsilon \left\{ \frac{\theta_L}{\chi^{1/5}} + \frac{1}{\chi^{1/5}} \int_0^{\chi} \left[1 - \left(\frac{\bar{\chi}}{\chi} \right)^{9/10} \right]^{-1/9} \frac{d\bar{\theta}}{d\bar{\chi}} \, d\bar{\chi} \right\} \quad (3.29)$$

Analizando estas expresiones se puede observar que si se utilizan expansiones de perturbación regular, éstas generan series inválidas para los términos de primer orden, y por lo tanto, se obtienen soluciones no-uniformes.

Por otro lado, el parámetro de perturbación está multiplicando la derivada de orden más alto, para la variable del tiempo, lo que ocasiona que no se cumplan todas las condiciones de frontera.

Estas observaciones implican que para obtener una solución uniforme, es recomendable utilizar el método de Escalas Múltiples para resolver las ecuaciones (3.28) y (3.29). Para esto, es necesario deducir las escalas de tiempo según el método recomendado por **Cole y Kevorkian**. Para esto, partiendo de la expansión de perturbación regular,

$$\theta = \theta o(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^{n}} \theta n(\chi,\tau) \tag{3.30}$$

se deduce que ésta es inválida en los términos de orden $1/\alpha$ para el tiempo adimensional, debido a un transitorio rápido de la temperatura al inicio del enfriamiento de la placa. Después de esto, la temperatura llega a una condición de pseudo-equilibrio necesario para una evolución lenta de la temperatura del plato.

Para este transitorio rápido es necesario introducir una escala válida para tiempos pequeños, o sea

$$\sigma = \alpha\,\tau \tag{3.31}$$

en la cual $\tau = O(1/\alpha)$.

Por otro lado, para eliminar los términos seculares de la expansión, es necesario introducir otra escala de tiempo, igual a

$$s = \tau\ (1 + \omega_1/\alpha^1 + \omega_2/\alpha^2 + \ldots) \tag{3.32}$$

donde las constantes ω_i serán determinadas con el fin de cancelar los términos seculares.

A continuación se presenta el desarrollo matemático para obtener la solución de las ecuaciones (3.28) y (3.29), aplicando las escalas de tiempo definidas en (3.31) y (3.32).

3.4.1.- Solución para el flujo convectivo laminar.-

A continuación se presenta el desarrollo matemático para evaluar la solución de la ecuación integro-diferencial para el caso laminar.

La expresión para este caso es

Separando los términos para las mismas potencias de ε, se genera el siguiente sistema de ecuaciones :

$$-\frac{\partial\theta_0}{\partial\sigma}+\frac{\partial^2\theta_0}{\partial\chi^2}=0 \tag{3.37.1}$$

$$-\frac{\partial\theta_1}{\partial\sigma}+\frac{\partial^2\theta_1}{\partial\chi^2}=\frac{\partial\theta_0}{\partial s}+\frac{\theta_{0l}}{\sqrt{\chi}}+\frac{1}{\sqrt{\chi}}\int_0^{\chi}K\,\frac{d\theta_0}{d\bar{\chi}}\,d\bar{\chi} \tag{3.37.2}$$

$$-\frac{\partial\theta_2}{\partial\sigma}+\frac{\partial^2\theta_2}{\partial\chi^2}=\omega_1\frac{\partial\theta_0}{\partial s}+\frac{\partial\theta_1}{\partial s}+\frac{\theta_{1l}}{\sqrt{\chi}}+\frac{1}{\sqrt{\chi}}\int_0^{\chi}K\,\frac{d\theta_1}{d\bar{\chi}}\,d\bar{\chi} \tag{3.37.3}$$

$$-\frac{\partial\theta_3}{\partial\sigma}+\frac{\partial^2\theta_3}{\partial\chi^2}=\omega_2\frac{\partial\theta_0}{\partial s}+\omega_1\frac{\partial\theta_1}{\partial s}+\frac{\partial\theta_2}{\partial s}+\frac{\theta_{2l}}{\sqrt{\chi}}+\frac{1}{\sqrt{\chi}}\int_0^{\chi}K\,\frac{d\theta_2}{d\bar{\chi}}\,d\bar{\chi} \tag{3.37.4}$$

las ecuaciones anteriores deben cumplir con las siguientes condiciones de frontera e iniciales:

$$\frac{\partial\theta_n}{\partial\chi}=0, \qquad \text{para } \chi = 0,1 \text{ y } n \geq 0 \tag{3.38}$$

$$\theta_0(\chi,0,0) = 1 \tag{3.39}$$

$$\theta_n(\chi,0,0) = 0 \qquad \text{para } n \geq 1 \tag{3.40}$$

Integrando la ecuación (3.37.1) con respecto a χ, entre 0 y 1 ,

$$\int_0^1 \partial\left(\frac{\partial\theta_0}{\partial\chi}\right)-\frac{\partial}{\partial\sigma}\int_0^1\theta_0\,d\chi=0 \tag{3.41}$$

y aplicando la condición de frontera (3.38), se obtiene

$$-\frac{\partial}{\partial\sigma}\int_0^1\theta_0\,d\chi=0$$

de donde se deduce, como primera aproximación, que

$$-\frac{\partial\theta}{\partial\tau}+\alpha\frac{\partial^2\theta}{\partial\chi^2}=\frac{\theta\iota}{\sqrt{\chi}}+\frac{1}{\sqrt{\chi}}\int_0^{\chi}\left[1-\left(\frac{\bar{\chi}}{\chi}\right)^{3/4}\right]^{-1/3}\frac{d\theta}{d\bar{\chi}}\,d\bar{\chi} \qquad (3.33)$$

Aplicando las escalas de tiempo (3.31) y (3.32) en (3.33), se tiene

$$-\left[\frac{\partial\theta}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial\tau}+\frac{\partial\theta}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial\tau}\right]+\alpha\frac{\partial^2\theta}{\partial\chi^2}=\frac{\theta\iota}{\sqrt{\chi}}+\frac{1}{\sqrt{\chi}}\int_0^{\chi}K\frac{d\theta}{d\bar{\chi}}\,d\bar{\chi} \qquad (3.34a)$$

ó

$$-\varepsilon^{-1}\frac{\partial\theta}{\partial\sigma}-\left(1+\varepsilon^1\omega_1+..\right)\frac{\partial\theta}{\partial s}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial^2\theta}{\partial\chi^2}=\frac{\theta\iota}{\sqrt{\chi}}+\frac{1}{\sqrt{\chi}}\int_0^{\chi}K\frac{d\theta}{d\bar{\chi}}\,d\bar{\chi} \qquad (3.34b)$$

con:

$$K=\left[1-\left(\frac{\bar{\chi}}{\chi}\right)^{3/4}\right]^{-1/3} \qquad y \qquad \alpha = 1/\varepsilon$$

Aplicando la expansión asintótica ;

$$\theta(\chi,\tau,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\theta_n(\chi,\sigma,s) \qquad (3.35)$$

en la ecuación (3.34), se tiene

$$-\varepsilon^{-1}\left[\frac{\partial\theta_0}{\partial\sigma}+\varepsilon\frac{\partial\theta_1}{\partial\sigma}+\varepsilon^2\frac{\partial\theta_2}{\partial\sigma}+\varepsilon^3\frac{\partial\theta_3}{\partial\sigma}+..\right]-\left(1+\varepsilon\,\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+..\right) *$$

$$\left[\frac{\partial\theta_0}{\partial s}+\varepsilon\frac{\partial\theta_1}{\partial s}+\varepsilon^2\frac{\partial\theta_2}{\partial s}+...\right]+\varepsilon^{-1}\left[\frac{\partial^2\theta_0}{\partial\chi^2}+\varepsilon\frac{\partial^2\theta_1}{\partial\chi^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2\theta_2}{\partial\chi^2}+\varepsilon^3 *\right.$$

$$\left.\frac{\partial^2\theta_3}{\partial\chi^2}+...\right]=\frac{1}{\sqrt{\chi}}\left(\theta_{0\iota}+\varepsilon\,\theta_{1\iota}+\varepsilon^2\,\theta_{2\iota}+..\right)+\frac{1}{\sqrt{\chi}}\int_0^{\chi}K *$$

$$\left[\frac{d\theta_0}{d\bar{\chi}}+\varepsilon\frac{d\theta_1}{d\bar{\chi}}+\varepsilon^2\frac{d\theta_2}{d\bar{\chi}}+...\right]d\bar{\chi} \qquad (3.36)$$

$\theta_0 \neq f(\sigma,\ \chi)$

Integrando la ecuación (3.37.2) con respecto a χ, entre 0 y 1, y aplicando de nuevo la condición de frontera (3.38), se obtiene:

$$-\frac{\partial}{\partial\sigma}\int_0^1 \theta_1\, d\chi = \frac{\partial\theta_0}{\partial s} + 2\ \theta_{0l} \tag{3.42}$$

Para evitar que aparezcan términos seculares en la ecuación anterior, se debe cumplir lo siguiente;

$$\frac{\partial\theta_0}{\partial s} + 2\ \theta_{0l} = 0 \tag{3.43}$$

la solución de esta ecuación diferencial, con la condición inicial (3.39) y con $\theta_0 = \theta_{0l}$, es

$$\theta_0 = \mathrm{Exp}(-2s) \tag{3.44}$$

Sustituyendo la ecuación (3.44) en (3.37.2), se obtiene,

$$-\frac{\partial\theta_1}{\partial\sigma} + \frac{\partial^2\theta_1}{\partial\chi^2} = -\ 2\ \mathrm{Exp}(-2s) + \frac{\mathrm{Exp}(-2s)}{\sqrt{\chi}} = \theta_0\left[-\ 2 + \frac{1}{\sqrt{\chi}}\right] \tag{3.45}$$

la solución de esta ecuación diferencial es de la forma,

$$\theta_1 = \theta_0\left[-\ \chi^2 + (4/3)\ \chi^{3/2} + q(\chi,\sigma)\right] \tag{3.46}$$

Para obtener la expresión de la función $g(\chi,\sigma)$, se sustituye la ecuación (3.46) en (3.45), de donde se obtiene,

$$-\frac{\partial q}{\partial\sigma} + \frac{\partial^2 q}{\partial\chi^2} = 0 \tag{3.47}$$

Para la expresión (3.47), las nuevas condiciones de frontera e iniciales son :

$$g(0,\chi) = -\left[-\ \chi^2 + (4/3)\ \chi^{3/2}\right] \tag{3.48.1}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \chi} = 0 \qquad \text{para } \chi = 0,1 \tag{3.48.2}$$

La expresión (3.47) se resuelve con el método de separación de variables. Para esto, la función $g(\chi,\sigma)$ se representa como ;

$$g = X(\chi)T(\sigma) \tag{3.49}$$

y sustituyendo en (3.47),

$$T\,X'' - X\,T' = 0 \tag{3.50}$$

separando variables se tiene

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -\lambda^2 \tag{3.51}$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \tag{3.52}$$

$$T' + \lambda^2 T = 0 \tag{3.53}$$

La solución de la ecuación diferencial (3.52) es

$$X = a_1 \text{Cos}(\lambda\chi) + a_2 \text{Sen}(\lambda\chi) \tag{3.54}$$

Las constantes a_1 y a_2 se deducen al aplicar la condición de frontera (3.48.2). Para esto, se tiene,

$$\frac{\partial X}{\partial \chi} = -\lambda\, a_1 \text{Sen}(\lambda\chi) + \lambda\, a_2 \text{Cos}(\lambda\chi) = 0 \tag{3.55}$$

donde para $\chi = 0$, $a_2 = 0$
y para $\chi = 1$;

$$0 = -\lambda\, a_1 \text{Sen}(\lambda) \tag{3.56}$$

para evitar la solución trivial, con $a_1 = 0$, se requiere que $\text{Sen}(\lambda)=0$, lo cual se cumple para $\lambda = n\pi$, con $n = 0,1,2,3.....$

La solución que se obtiene es:

$$X(\chi) = a \text{Cos}(\lambda n\chi) \tag{3.57}$$

La solución de la ecuación (3.53) es

$$T(\sigma) = a_3 \, Exp(-\lambda^2 \sigma) \tag{3.58}$$

y la solución, tipo producto, que se deduce con (3.57) y (3.58) es :

$$g(\chi,\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, Exp(-\lambda_n^2 \sigma) \, Cos \, (\lambda_n \chi) \tag{3.59}$$

con $\lambda_n = n\pi$

Para obtener el valor de la constante c_n, se aplica la condición inicial (3.48.1),

$$g(\chi,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, Cos \, (\lambda_n \chi) = \chi^2 - (4/3) \, \chi^{3/2} \tag{3.60}$$

donde c_n se evalúa considerando un desarrollo en serie de cosenos de Fourier. Para esto, se tiene

$$\chi^2 - (4/3) \, \chi^{3/2} = c_o + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, Cos \, (\lambda_n \chi) \tag{3.61}$$

el valor de c_o, se obtiene con la expresión

$$c_o = \int_o^1 \left(\chi^2 - (4/3) \, \chi^{3/2}\right) d\chi = - \frac{1}{5} \tag{3.62}$$

y el valor de c_n, se obtiene con;

$$c_n = 2 \int_o^1 [\chi^2 - (4/3) \, \chi^{3/2}] \, Cos \, (n\pi \, \chi) \, d\chi \tag{3.63}$$

separando términos,

$$c_n = 2 \int_o^1 \chi^2 \, Cos \, (n\pi \, \chi) \, d\chi - \frac{8}{3} \int_o^1 \chi^{3/2} \, Cos \, (n\pi \, \chi) \, d\chi \tag{3.64}$$

y resolviendo la primera integral por integración por partes, se tiene

$$c_n = 4 \, \frac{Cos \, \lambda_n}{\lambda_n^2} - \frac{8}{3} \int_o^1 \chi^{3/2} \, Cos \, (n\pi \, \chi) \, d\chi \tag{3.65}$$

Para evaluar la integral de la ecuación anterior, se aplican primero las funciones exponenciales para el coseno;

$$c_n = 4\,\frac{\cos\lambda_n}{\lambda_n^2} - \frac{8}{3}\int_0^1 \chi^{3/2}\left[\frac{\mathrm{Exp}(\lambda_n\chi i) + \mathrm{Exp}(-\lambda_n\chi i)}{2}\right] d\chi \qquad (3.66)$$

separando términos e integrando por partes las integrales que resultan, se tiene;

$$c_n = 4\,\frac{\cos\lambda_n}{\lambda_n^2} - \frac{8}{3}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{Exp}(\lambda_n i)}{\lambda_n i} - \frac{3}{2\lambda_n i}\int_0^1 \chi^{1/2}\,\mathrm{Exp}(\lambda_n\chi i)\, d\chi\right] + \right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\left[-\frac{\mathrm{Exp}(-\lambda_n i)}{\lambda_n i} + \frac{3}{2\lambda_n i}\int_0^1 \chi^{1/2}\,\mathrm{Exp}(-\lambda_n\chi i)\, d\chi\right]\right\} \qquad (3.67)$$

integrando por partes nuevamente, y simplificando términos, se obtiene,

$$c_n = 4\,\frac{\cos\lambda_n}{\lambda_n^2} - \frac{8}{3}\left\{\frac{3\cos\lambda_n}{2\,\lambda_n^2} - \frac{3}{8\,\lambda_n^2}\left[\int_0^1 \chi^{-1/2}\,\mathrm{Exp}(\lambda_n\chi i)\, d\chi + \right.\right.$$

$$\left.\left.\int_0^1 \chi^{-1/2}\,\mathrm{Exp}(-\lambda_n\chi i)\, d\chi\right]\right\} \qquad (3.68)$$

Para evaluar las integrales de la expresión anterior, primero se aplica un cambio de variables para pasar la integral al plano complejo,

$$\varphi = \lambda_n\,\chi, \qquad \text{con} \qquad \chi \longrightarrow \infty$$

y sustituyendo en la expresión anterior, se obtiene;

$$c_n = 4\,\frac{\cos\lambda_n}{\lambda_n^2} - \frac{8}{3}\left\{\frac{3\cos\lambda_n}{2\,\lambda_n^2} - \frac{3}{8\,\lambda_n^{5/2}}\left[\int_0^\infty \frac{\mathrm{Exp}(\varphi i)}{\sqrt{\varphi}}\, d\varphi + \right.\right.$$

$$\left.\left.\int_0^\infty \frac{\mathrm{Exp}(-\varphi i)}{\sqrt{\varphi}}\, d\varphi\right]\right\} \qquad (3.69)$$

Para resolver las integrales anteriores, se tiene,

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{Exp}(\varphi i)}{\sqrt{\varphi}}\, d\varphi + \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{Exp}(-\varphi i)}{\sqrt{\varphi}}\, d\varphi = 2\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{Cos}\ \varphi}{\sqrt{\varphi}}\, d\varphi \qquad (3.70)$$

esta integral se resuelve empleando el Método de los Residuos, referencias [17] y [18], para eliminar la singularidad en $\varphi = 0$. Por lo tanto, descomponiendo la integral anterior, según el contorno definido en la figura 3.1, en

$$\oint_{c'} \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}\, dz = \int_{ab} \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}\, dz + \int_{bc} \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}\, dz + \int_{cd} \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}\, dz +$$

$$\int_{da} \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}\, dz = 0 \qquad (3.71)$$

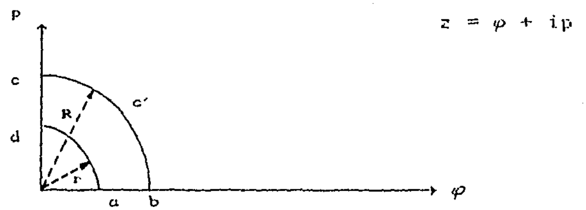

Figura No. 3.1
Contorno de integración.

los límites para estas integrales se definen de la siguiente manera: sobre ab, $z = \varphi$ con $\varphi = r$ y $\varphi = R$; sobre bc, $z = Re^{i\phi}$ con $\phi = 0$ y $\phi = \pi/2$; sobre cd, $z = p\ e^{i\pi/2}$ con $p = R$ y $p = r$; sobre da, $z = r\ e^{i\phi}$ con $\phi = \pi/2$ y $\phi = 0$. Sustituyendo estos límites en (3.71), y separando términos,

$$\int_r^R \frac{\mathrm{Cos}(\varphi) + i\ \mathrm{Sen}(\varphi)}{\sqrt{\varphi}}\, d\varphi = -\int_0^{\pi/2} \mathrm{Exp}(iRe^{i\phi})\ i\ \left(Re^{i\phi} \right)^{1/2} d\phi +$$

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{Exp}(ire^{i\phi})\ i\left(re^{i\phi} \right)^{1/2} d\phi + \int_r^R \mathrm{Exp}(ipe^{i\pi/2})\ p^{-1/2}\ e^{i\pi/4}\ dp \quad (3.72)$$

Las dos primeras integrales del lado derecho de (3.72) tienden a cero cuando $R \longrightarrow \infty$ y $r \longrightarrow 0$. Con esto, se tiene

$$\int_r^R \frac{\mathrm{Cos}(\varphi) + i\ \mathrm{Sen}(\varphi)}{\sqrt{\varphi}}\, d\varphi = e^{i\pi/4} \int_0^\infty \mathrm{Exp}(ipe^{i\pi/2})\ p^{-1/2}\ dp =$$

$$e^{i\pi/4} \int_0^\infty e^{-p}\ p^{-1/2}\ dp \quad (3.73)$$

Aplicando la función Gamma a la integral del lado derecho de la expresión (3.73),

$$\int_r^R \frac{\mathrm{Cos}(\varphi) + i\ \mathrm{Sen}(\varphi)}{\sqrt{\varphi}}\, d\varphi = e^{i\pi/4}\ \Gamma(1/2) =$$

$$\sqrt{\pi} \left[\mathrm{Cos}(\pi/4) + i\ \mathrm{Sen}(\pi/4) \right] \quad (3.74)$$

igualando la parte real y parte imaginaria de esta expresión, se deduce

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos}\ \varphi}{\sqrt{\varphi}}\, d\varphi = \sqrt{\pi}\ \mathrm{Cos}(\pi/4) \quad (3.75)$$

Sustituyendo el valor de la integral en la ecuación (3.69), se tiene

$$c_n = 4\ \frac{\mathrm{Cos}\ \lambda_n}{\lambda_n^2} - \frac{8}{3} \left\{ \frac{3\ \mathrm{Cos}\ \lambda_n}{2\ \lambda_n^2} - \frac{6}{8\ \lambda_n^{5/2}} \left[\sqrt{\pi}\ \ \mathrm{Cos}(\pi/4) \right] \right\} \quad (3.76)$$

El valor final de la constante cn es;

$$cn = \frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda n^{5/2}} \tag{3.77}$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.62) y (3.77) en (3.59), se obtiene el valor de la función $g(\chi,\sigma)$,

$$g(\chi,\sigma) = -\frac{1}{5} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda n^{5/2}}\right] \mathrm{Exp}(-\lambda n^2\sigma)\ \mathrm{Cos}(\lambda n\chi) \tag{3.78}$$

con este valor en la expresión (3.46), se obtiene el valor de θ_1;

$$\theta_1 = \theta_0 \left\{ -\chi^2 + \frac{4}{3}\chi^{3/2} - \frac{1}{5} + \sqrt{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{Exp}(-\lambda n^2\sigma)\ \mathrm{Cos}(\lambda n\chi)}{\lambda n^{5/2}}\right]\right\} \tag{3.79}$$

El valor de θ_{1l} se obtiene con la expresión anterior para $\chi = 0$, o sea;

$$\theta_{1l} = \theta_0 \left\{ -\frac{1}{5} + \sqrt{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{Exp}(-\lambda n^2\sigma)}{\lambda n^{5/2}}\right]\right\} \tag{3.80}$$

El siguiente paso consiste en evaluar la constante ω_1 de la expresión (3.32). Para esto, primero se introducen las ecuaciones (3.44), (3.79), y (3.80) en 3.37.3,

$$-\frac{\partial\theta_2}{\partial\sigma} + \frac{\partial^2\theta_2}{\partial\chi^2} = \omega_1\left(-2\ e^{-2\theta}\right) - 2\ e^{-2\theta}\left[-\chi^2 + \frac{4}{3}\chi^{3/2} - \frac{1}{5} + \sqrt{2\pi} * \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Exp}(-\lambda n^2\sigma)\left(\mathrm{Cos}\ \lambda n\chi\right)}{\lambda n^{5/2}}\right] + \frac{e^{-2\theta}}{\sqrt{\chi}}\left[-\frac{1}{5} + \sqrt{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Exp}(-\lambda n^2\sigma)}{\lambda n^{5/2}}\right] +$$

$$\frac{1}{\sqrt{\chi}}\int_0^{\chi} K(\bar{\chi},\chi)\ \theta_0\left[-2\ \bar{\chi} + 2\ \bar{\chi}^{1/2} - \sqrt{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Exp}(-\lambda n^2\sigma)\ \lambda n\ \mathrm{Sen}\ \lambda n\bar{\chi}}{\lambda n^{5/2}}\right] d\bar{\chi}$$

(3.81)

simplificando la ecuación anterior;

$$-\frac{\partial\theta_2}{\partial\sigma}+\frac{\partial^2\theta_2}{\partial\chi^2}=-2\,e^{-2s}\left\{\omega_1-\chi^2+\frac{4}{3}\chi^{3/2}-\frac{1}{5}+\sqrt{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Exp}(-\lambda n^2\sigma)\right.$$

$$\left.\frac{\mathrm{Cos}\,\lambda n\chi}{\lambda n^{5/2}}-\frac{1}{2\sqrt{\chi}}\left[-\frac{1}{5}+\sqrt{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Exp}(-\lambda n^2\sigma)}{\lambda n^{5/2}}\right]\right\}+\frac{\theta_0}{\sqrt{\chi}}\int_0^{\chi}K(\bar{\chi},\chi)\,*$$

$$\left[-2\,\bar{\chi}+2\,\bar{\chi}^{\,1/2}-\sqrt{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Exp}(-\lambda n^2\sigma)\ \mathrm{Sen}\ \lambda n\bar{\chi}}{\lambda n^{3/2}}\right]d\bar{\chi} \qquad (3.82)$$

Resolviendo primero las siguientes integrales,

$$\frac{\theta_0}{\sqrt{\chi}}\int_0^{\chi}K(\bar{\chi},\chi)\,\left(-2\,\bar{\chi}+2\,\bar{\chi}^{\,1/2}\right)d\bar{\chi}=$$

$$\frac{\theta_0}{\sqrt{\chi}}\int_0^{\chi}\left[1-\left(\frac{\bar{\chi}}{\chi}\right)^{3/4}\right]^{-1/3}\left(-2\,\bar{\chi}+2\,\bar{\chi}^{\,1/2}\right)d\bar{\chi} \qquad (3.83)$$

De la definición de la función Beta incompleta,

$$\beta_{\chi}(p,q)=\int_0^{\chi}t^{p-1}\,(1-t)^{q-1}\,dt \qquad (3.84)$$

Para aplicar la función Beta, primero se realiza el siguiente cambio de variable,

$$\left.\begin{aligned}t&=\left(\frac{\bar{\chi}}{\chi}\right)^{3/4}\\ d\bar{\chi}&=(4/3)\,\chi\,t^{1/3}\,dt\end{aligned}\right\} \qquad (3.85)$$

con el cual, las integrales en (3.83) cambian a

$$\frac{8\,\theta_0}{3\sqrt{\chi}}\left\{-\chi^2\int_0^1(1-t)^{-1/3}\,t^{5/3}\,dt+\chi^{3/2}\int_0^1(1-t)^{-1/3}\,t\,dt\right\} \qquad (3.86)$$

Aplicando la función Beta, se tiene

$$\frac{8}{3}\,\theta_o \left\{ \chi\, \beta(2,2/3) - \chi^{3/2}\, \beta(8/3,2/3) \right\} \tag{3.87}$$

sustituyendo este valor en (3.82), se obtiene

$$- \frac{\partial\theta_2}{\partial\sigma} + \frac{\partial^2\theta_2}{\partial\chi^2} = - 2e^{-2s} \left\{ \omega_1 - \chi^2 + \frac{4}{3}\chi^{3/2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{10\sqrt{\chi}} - \frac{4}{3} \left[\chi\, \beta(2,2/3) - \chi^{3/2}\, \beta(8/3,2/3) \right] \right\} - 2e^{-2s} \left\{ \sqrt{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Exp}(-\lambda n^2 \sigma) \left[\frac{\mathrm{Cos}\, \lambda n \chi}{\lambda n^{5/2}} - \frac{1}{2\sqrt{\chi}\, \lambda n^{5/2}} \right] + \frac{1}{2\sqrt{\chi}} \int_0^{\chi} K(\chi,\bar{\chi}) \left[\sqrt{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Exp}(-\lambda n^2 \sigma)\ \mathrm{Sen}\ \lambda n \bar{\chi}}{\lambda n^{3/2}} \right] d\bar{\chi} \right\} \tag{3.88}$$

Integrando la ecuación anterior con respecto a χ, entre 0 y 1, y aplicando la condición de frontera (3.38) para ambos extremos de la placa,

$$- \frac{\partial}{\partial\sigma} \int_0^1 \theta_2\, d\chi = - 2e^{-2s} \left\{ \omega_1 - \frac{1}{3} + \frac{8}{15} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{4}{3} \left(- \frac{2}{5}\beta(8/3,2/3) + \frac{1}{2}\beta(2,2/3) \right) \right\} - 2e^{-2s} \sqrt{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Exp}(-\lambda n^2 \sigma) \left\{ \int_0^1 \left[\frac{\mathrm{Cos}\, \lambda n \chi}{\lambda n^{5/2}} - \frac{1}{2\sqrt{\chi}\, \lambda n^{5/2}} \right] d\chi + \int_0^1 \left[\frac{1}{2\sqrt{\chi}} \int_0^{\chi} \left(K(\chi,\bar{\chi})\, \frac{\mathrm{Sen}\ \lambda n \bar{\chi}}{\lambda n^{3/2}}\, d\bar{\chi} \right) d\chi \right] \right\} \tag{3.89}$$

De la ecuación anterior se deduce que para evitar que aparezcan términos seculares, la constante ω_1 debe ser igual a:

$$\omega_1 = - \frac{8}{15}\beta(8/3,2/3) + \frac{2}{3}\beta(2,2/3) - \frac{1}{5} \approx 0.009893 \tag{3.90}$$

Con este valor se obtiene la solución de la ecuación integro-diferencial (3.33), considerando 2 términos en la expansión asintótica. Esta es,

$$\theta(\chi,\sigma,s;\alpha) = e^{-2s} + \frac{e^{-2s}}{\alpha}\left\{ -\chi^2 + \frac{4}{3}\chi^{3/2} - \frac{1}{5} + \sqrt{2\pi} \; * \right.$$

$$\left. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Exp}(-\lambda n^2 \sigma)}{\lambda n^{5/2}} \; \mathrm{Cos}(\lambda n \chi) \right\} \tag{3.91}$$

donde:

$$\sigma = \tau\,\alpha$$

$$s = \tau\left[1 + \frac{1}{\alpha}\left(0.009893 \right) \right]$$

Para evaluar un tercer término de la expansión asintótica, primero se sustituyen las ecs. (3.44), (3.79), (3.80) y (3.90) en la expresión (3.37.3), o sea

$$-\frac{\partial\theta_2}{\partial\sigma} + \frac{\partial^2\theta_2}{\partial\chi^2} = -2e^{-2s}\left\{ 0.009893 - \chi^2 + \frac{4}{3}\chi^{3/2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{10\sqrt{\chi}} + \frac{1}{\sqrt{\chi}} \; * \right.$$

$$\left. \int_0^{\chi} \left[1 - \left(\frac{\bar{\chi}}{\chi} \right)^{3/4} \right]^{-1/3} \left(\bar{\chi} - \bar{\chi}^{\,1/2} \right) d\bar{\chi} \right\} - 2e^{-2s}\sqrt{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Exp}(-\lambda n^2\sigma)}{\lambda n^{5/2}} \; *$$

$$\left\{ \mathrm{Cos}(\lambda n\chi) - \frac{1}{2\sqrt{\chi}} + \frac{\lambda n}{2\sqrt{\chi}} \int_0^{\chi} \left[1 - \left(\frac{\bar{\chi}}{\chi} \right)^{3/4} \right]^{-1/3} \mathrm{Sen}(\lambda n\bar{\chi})\, d\bar{\chi} \right\} \tag{3.92}$$

Debido a la complejidad algebraica de esta expresión, no se obtiene su solución analítica. Por lo tanto, se aplica una técnica numérica para deducir una solución de la forma,

$$\theta_2 = e^{-2s}\,\Phi(\chi,\sigma) \tag{3.93}$$

El desarrollo matemático para obtener la solución numérica se muestra en el apéndice "B" de este trabajo y de la cual se deduce una serie de curvas para obtener el valor de Φ, en función de σ y χ. Estas curvas se muestran en la figura No. 3.2.

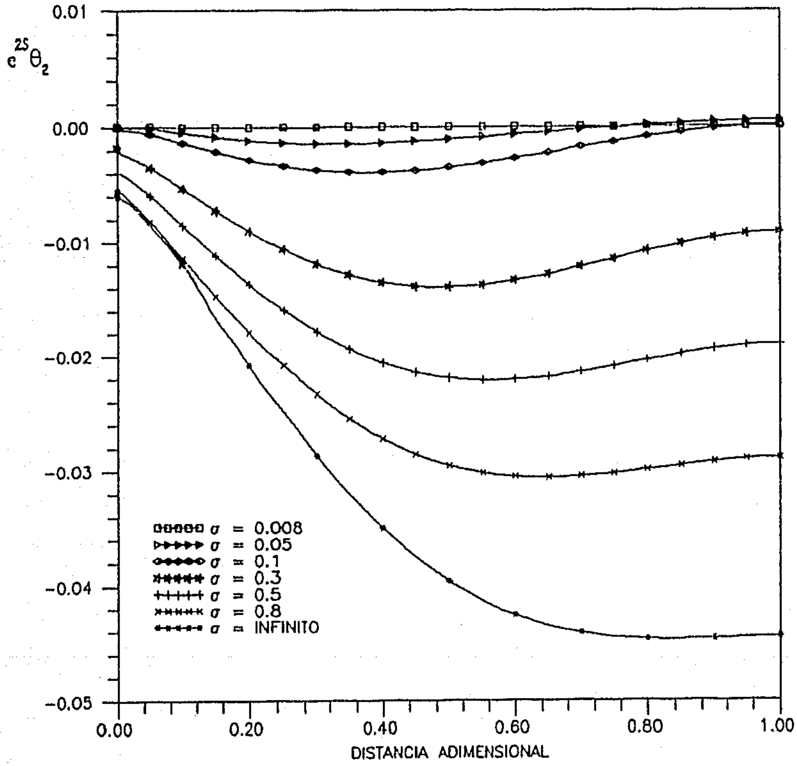

Figura No. 3.2

Curvas para evaluar la función Φ.

La solución final, considerando 3 términos de la expansión asintótica, es

$$\theta(\chi,\sigma,s;\alpha) = e^{-2s} + \frac{e^{-2s}}{\alpha}\left\{ -\chi^2 + \frac{4}{3}\chi^{3/2} - \frac{1}{5} + \sqrt{2\pi} \ast \right.$$

$$\left. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Exp}(-\lambda n^2\sigma)}{\lambda n^{5/2}} \mathrm{Cos}(\lambda n\chi) + \frac{\Phi(\chi,\sigma)}{\alpha} \right\} \qquad (3.94)$$

3.4.2.- Solución para el flujo convectivo turbulento.-

A continuación se presenta el desarrollo matemático para evaluar la solución de la ecuación integro-diferencial para el caso turbulento.

La ecuación integro-diferencial singular, obtenida en el capítulo anterior es,

$$-\frac{\partial\theta}{\partial\tau} + \alpha\frac{\partial^2\theta}{\partial\chi^2} = \frac{\theta_l}{\chi^{1/5}} + \frac{1}{\chi^{1/5}}\int_0^{\chi}\left[1-\left(\frac{\overline{\chi}}{\chi}\right)^{9/10}\right]^{-1/9}\frac{d\theta}{d\overline{\chi}}\,d\overline{\chi} \qquad (3.95)$$

Para resolver esta ecuación, también se emplean las escalas múltiples para tiempos pequeños, definidas por las expresiones (3.31) y (3.32). Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (3.95) y aplicando la expansión asintótica (3.35), se obtiene,

$$-\left[\frac{\partial\theta}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial\tau} + \frac{\partial\theta}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial\tau}\right] + \alpha\frac{\partial^2\theta}{\partial\chi^2} = \frac{\theta_l}{\chi^{1/5}} + \frac{1}{\chi^{1/5}}\int_0^{\chi} K\frac{d\theta}{d\overline{\chi}}\,d\overline{\chi} \qquad (3.96.1)$$

ó

$$-\varepsilon^{-1}\frac{\partial\theta}{\partial\sigma} - \left(1+\varepsilon^1\omega_1 + ..\right)\frac{\partial\theta}{\partial s} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial^2\theta}{\partial\chi^2} = \frac{\theta_l}{\chi^{1/5}} + \frac{1}{\chi^{1/5}}\int_0^{\chi} K\frac{d\theta}{d\overline{\chi}}\,d\overline{\chi} \qquad (3.96.2)$$

con:

$$K = \left[1 - \left(\frac{\bar{\chi}}{\chi} \right)^{9/10} \right]^{-1/9} \qquad y \qquad \varepsilon = 1/\alpha$$

separando los términos para las mismas potencias de ε, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones;

$$-\frac{\partial\theta_0}{\partial\sigma} + \frac{\partial^2\theta_0}{\partial\chi^2} = 0 \qquad (3.97.1)$$

$$-\frac{\partial\theta_1}{\partial\sigma} + \frac{\partial^2\theta_1}{\partial\chi^2} = \frac{\partial\theta_0}{\partial s} + \frac{\theta_{0l}}{\chi^{1/5}} + \frac{1}{\chi^{1/5}}\int_0^{\chi} K\,\frac{d\theta_0}{d\bar{\chi}}\,d\bar{\chi} \qquad (3.97.2)$$

$$-\frac{\partial\theta_2}{\partial\sigma} + \frac{\partial^2\theta_2}{\partial\chi^2} = \omega_1\frac{\partial\theta_0}{\partial s} + \frac{\partial\theta_1}{\partial s} + \frac{\theta_{1l}}{\chi^{1/5}} + \frac{1}{\chi^{1/5}}\int_0^{\chi} K\,\frac{d\theta_1}{d\bar{\chi}}\,d\bar{\chi} \qquad (3.97.3)$$

$$-\frac{\partial\theta_3}{\partial\sigma} + \frac{\partial^2\theta_3}{\partial\chi^2} = \omega_2\frac{\partial\theta_0}{\partial s} + \omega_1\frac{\partial\theta_1}{\partial s} + \frac{\partial\theta_2}{\partial s} + \frac{\theta_{2l}}{\chi^{1/5}} + \frac{1}{\chi^{1/5}}\int_0^{\chi} K\,\frac{d\theta_2}{d\bar{\chi}}\,d\bar{\chi} \qquad (3.97.4)$$

Las condiciones de frontera e iniciales para este sistema de ecuaciones son,

$$\left.\begin{array}{l} \theta_0 = 1 \\ \theta_n = 0 \quad \text{para } n \geq 1 \end{array}\right\} \tau = 0 \qquad (3.98)$$

$$\frac{\partial\theta_n}{\partial\chi} = 0 \quad \text{para } n \geq 0 \;;\; \chi = 0 \text{ y } 1 \qquad (3.99)$$

Integrando la ecuación (3.97.1) con respecto a χ entre 0 y 1, se tiene:

$$-\frac{\partial}{\partial\sigma}\int_0^1 \theta_0\,d\chi + \left.\frac{\partial\theta_0}{\partial\chi}\right|_0^1 = 0 \qquad (3.100)$$

aplicando la condición de frontera (3.99) se deduce que $\theta o \neq f(\sigma,\chi)$.

Con la consideración anterior, la ecuación (3.97.2) se reduce a:

$$-\frac{\partial\theta_1}{\partial\sigma}+\frac{\partial^2\theta_1}{\partial\chi^2}=\frac{\partial\theta_o}{\partial s}+\frac{\theta_{ol}}{\chi^{1/5}} \tag{3.101}$$

Integrando con respecto a χ, entre 0 y 1, y aplicando nuevamente (3.99), se tiene

$$-\frac{\partial}{\partial\sigma}\int_o^1\theta_1\,d\chi=\frac{\partial\theta_o}{\partial s}+\frac{5}{4}\theta_{ol} \tag{3.102}$$

para evitar que aparezcan términos seculares en esta expresión, se debe cumplir lo siguiente,

$$\frac{\partial\theta_o}{\partial s}+\frac{5}{4}\theta_{ol}=0 \tag{3.103}$$

considerando como primera aproximación que $\theta_o=\theta_{ol}$ y aplicando la condición inicial (3.98), se obtiene la solución de (3.103),

$$\theta_o = e^{-5s/4} \tag{3.104}$$

Sustituyendo (3.104) en la ecuación (3.97.2),

$$-\frac{\partial\theta_1}{\partial\sigma}+\frac{\partial^2\theta_1}{\partial\chi^2}=-\frac{5}{4}e^{-5s/4}+\frac{e^{-5s/4}}{\chi^{1/5}}=\theta_o\left[-\frac{5}{4}+\frac{1}{\chi^{1/5}}\right] \tag{3.105}$$

Para resolver esta ecuación se aplica el mismo procedimiento que para el caso laminar, o sea

$$\theta_1=\theta_o\left[-\frac{5}{8}\chi^2+\frac{25}{36}\chi^{9/5}+g(\chi,\sigma)\right] \tag{3.106}$$

y sustituyendo (3.106) en la ecuación (3.105), se tiene

$$-\frac{\partial g}{\partial\sigma}+\frac{\partial^2 g}{\partial\chi^2}=0 \tag{3.107}$$

esta expresión debe satisfacer las siguientes condiciones iniciales y de frontera,

$$g(0,\chi) = -\left[-\frac{5}{8}\chi^2 + \frac{25}{36}\chi^{9/5} \right] \tag{3.108}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \chi} = 0 \qquad \text{para } \chi = 0 \text{ y } 1 \tag{3.109}$$

Utilizando el método de separación de variables resultan las ecuaciones,

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \tag{3.110}$$

$$T' + \lambda^2 T = 0 \tag{3.111}$$

La solución tipo producto de las ecuaciones (3.110) y (3.111) es,

$$g(\chi,\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, \mathrm{Exp}(-\lambda_n^2 \sigma) \, \mathrm{Cos}(\lambda_n \chi) \tag{3.112}$$

con $\lambda_n = n\,\pi$

Aplicando la condición inicial (3.108) se tiene

$$\frac{5}{8}\chi^2 - \frac{25}{36}\chi^{9/5} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, \mathrm{Cos}(\lambda_n \chi) \tag{3.113}$$

donde c_n se evalúa considerando un desarrollo en serie de cosenos de Fourier. Para esto, se tiene

$$\frac{5}{8}\chi^2 - \frac{25}{36}\chi^{9/5} = c_o + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, \mathrm{Cos}(\lambda_n \chi) \tag{3.114}$$

El valor de c_o se deduce de la siguiente expresión,

$$C_o = \int_0^1 \left[\frac{5}{8}\chi^2 - \frac{25}{36}\chi^{9/5} \right] dx = -\frac{5}{126} \tag{3.115}$$

El valor de cn se obtiene de la expresión,

$$Cn = 2 \int_0^1 \left[\frac{5}{8} \chi^2 - \frac{25}{36} \chi^{9/5} \right] \mathrm{Cos}\,(n\pi\, \chi)\; d\chi = \frac{1}{\lambda_n^2} *$$

$$\left[\int_0^1 \chi^{-1/5}\, \mathrm{Exp}(\lambda n \chi i)\; d\chi + \int_0^1 \chi^{-1/5}\, \mathrm{Exp}(-\lambda n \chi i)\; d\chi \right] \tag{3.116}$$

Para resolver las integrales de la ecuación anterior, se considera primero la siguiente transformación;

$\varphi = \lambda n\, \chi \quad$ con $\chi \longrightarrow \infty$

y sustituyendo en la ecuación (3.116) se tiene

$$cn = \frac{1}{\lambda n^{14/5}} \left[\int_0^\infty \frac{e^{\varphi i}}{\varphi^{1/5}}\, d\varphi + \int_0^\infty \frac{e^{-\varphi i}}{\varphi^{1/5}}\, d\varphi \right] =$$

$$+ \frac{1}{\lambda n^{14/5}} \left[2 \int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos}\ \varphi}{\varphi^{1/5}}\, d\varphi \right] \tag{3.117}$$

Para resolver la integral de la ec. (3.117) se utilizará el método de los Residuos para eliminar la singularidad en $\varphi = 0$. Empleando el mismo contorno y límites de integración definidos en la figura 3.1 de la sección anterior, se deduce

$$2 \int_0^\infty \frac{(\mathrm{Cos}\ \varphi + i\ \mathrm{Sen}\ \varphi)}{\varphi^{1/5}}\, d\varphi = 2\ \mathrm{Exp}(i2\pi/5) \int_0^\infty e^{-p}\, p^{-1/5}\, dp \tag{3.118}$$

Aplicando la función Gamma e igualando la parte real y parte imaginaria de la expresión (3.118), se obtiene

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos}\ \varphi}{\varphi^{1/5}}\, d\varphi = \Gamma(4/5)\ \mathrm{Cos}(2\pi/5) \tag{3.119}$$

Conocidas las constantes co y cn se deduce la función;

$$g(\chi,\sigma) = -\frac{5}{126} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0.719530}{\lambda n^{14/5}} \operatorname{Exp}(-\lambda n^2 \sigma) \operatorname{Cos}(\lambda n \chi) \tag{3.120}$$

y sustituyendo este valor en la ec. (3.106) se obtiene;

$$\theta_1 = \theta_0 \left[-\frac{5}{8}\chi^2 + \frac{25}{36}\chi^{9/5} - \frac{5}{126} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0.719530}{\lambda n^{14/5}} * \operatorname{Exp}(-\lambda n^2 \sigma) \operatorname{Cos}(\lambda n \chi) \right] \tag{3.121}$$

para $\chi = 0$, se deduce el valor de θ_{1l},

$$\theta_{1l} = \theta_0 \left[-\frac{5}{126} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0.719530}{\lambda n^{14/5}} \operatorname{Exp}(-\lambda n^2 \sigma) \right] \tag{3.122}$$

El siguiente paso consiste en evaluar la constante "ω_1" de la expresión (3.32). Para esto, se introducen las ecuaciones (3.104), (3.121) y (3.122) en (3.97.3),

$$-\frac{\partial \theta_2}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \chi^2} = e^{-5s/4} \left\{ -\frac{5}{4}\omega_1 + \frac{25}{32}\chi^2 - \frac{125}{144}\chi^{9/5} + \frac{25}{504} - \frac{5}{4} * \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0.71953}{\lambda n^{14/5}} \operatorname{Exp}(-\lambda n^2 \sigma) \operatorname{Cos}(\lambda n \chi) - \frac{5}{126\,\chi^{1/5}} + \frac{5}{4\,\chi^{1/5}} \int_0^{\chi} K(\chi,\overline{\chi}) \left[-\overline{\chi} + \overline{\chi}^{4/5} \right] d\overline{\chi} \right\} + \frac{\theta o}{\chi^{1/5}} \sum_{n=1}^{\infty} 0.71953 \operatorname{Exp}(-\lambda n^2 \sigma) \left[\frac{1}{\lambda n^{14/5}} - \int_0^{\chi} K(\chi,\overline{\chi}) * \frac{\operatorname{Sen}(\lambda n \overline{\chi})}{\lambda n^{9/5}} d\overline{\chi} \right] \tag{3.123}$$

La solución de las siguientes integrales,

$$\frac{5}{4\ \chi^{1/5}}\int_0^{\chi} K(\chi,\bar{\chi})\left[-\ \bar{\chi}+\bar{\chi}^{\ 4/5}\right]d\bar{\chi}=\frac{5}{4\ \chi^{1/5}}\int_0^{\chi}\left[1-\left(\frac{\bar{\chi}}{\chi}\right)^{9/10}\right]^{-1/9} *$$

$$\left(\bar{\chi}^{\ 4/5}-\bar{\chi}\right)d\bar{\chi} \qquad (3.124)$$

se obtiene al aplicar la definición de la función Beta incompleta, o sea

$$\frac{5}{4\ \chi^{1/5}}\int_0^{\chi} K(\chi,\bar{\chi})\left[-\ \bar{\chi}+\bar{\chi}^{\ 4/5}\right]d\bar{\chi}=\frac{25}{18}\left[\chi^{9/5}\ \beta(2,8/9)\ -\right.$$

$$\left.\chi^{9/5}\ \beta(20/9,8/9)\right] \qquad (3.125)$$

Sustituyendo el resultado anterior en la ec. (3.124) e integrando con respecto a χ, entre 0 y 1, para posteriormente aplicar la condición de frontera (3.99), se tiene

$$-\frac{\partial}{\partial\sigma}\int_0^1\theta_2\ d\chi=\theta_o\left\{-\frac{5}{4}\omega_1+\frac{25}{96}-\frac{625}{2061}+\frac{25}{18}\left[\frac{5}{13}\beta(2,8/9)-\frac{5}{14}\ *\right.\right.$$

$$\left.\left.\beta(20/9,8/9)\right]\right\}+0.719530\ \theta_o\sum_{n=1}^{\infty}Exp(-\lambda n^2\sigma)\left\{\int_0^1\left[-\frac{5\ Cos(\lambda n\chi)}{4\ \lambda n^{14/5}}\ +\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{1}{\lambda n^{14/5}\ \chi^{1/5}}\right]d\chi-\int_0^1\left[\frac{1}{\chi^{1/5}}\int_0^{\chi}\frac{K(\chi,\bar{\chi})\ Sen(\lambda n\bar{\chi})}{\lambda n^{9/5}}d\bar{\chi}\right]d\chi\right\} \qquad (3.126)$$

De la ecuación (3.126) se deduce que para evitar que aparezcan términos seculares, la constante ω_1 debe ser igual a:

$$\omega_1=\frac{4}{5}\left\{\frac{25}{96}-\frac{625}{2016}+\frac{25}{18}\left[\frac{5}{13}\beta(2,8/9)-\frac{5}{14}\beta(20/9,8/9)\right]\right\}\approx$$

$$0.00072672 \qquad (3.127)$$

Con esto, la solución de la ecuación integro-diferencial para el caso turbulento, considerando 2 términos de la expansión asintótica, es;

$$\theta(\chi,\sigma,s;\alpha) = e^{-5s/4} + \frac{e^{-5s/4}}{\alpha}\left[-\frac{5}{8}\chi^{2} + \frac{25}{36}\chi^{9/5} - \frac{5}{126} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0.719530}{\lambda n^{14/5}} \operatorname{Exp}(-\lambda n^{2}\sigma) \operatorname{Cos}(\lambda n\chi) \right] \qquad (3.128)$$

donde:

$\sigma = \tau\ \alpha$

$s = \tau\ \left(1 + 0.00072672\ /\ \alpha \right)$

En el capitulo siguiente se presentan los resultados obtenidos con las expresiones (3.91), (3.94) y (3.128).

IV.- RESULTADOS Y DISCUSION

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos para el problema planteado en el capítulo II. Para esto, se presentan los diferentes perfiles de temperatura obtenidos para un flujo laminar y turbulento, evaluados a diferentes valores de α , números de Reynolds y tiempo adimensional.

Estos resultados tienen como finalidad lo siguiente:

- Mostrar la validez de la expansión asintótica para $\alpha \gg 1$ y verificar que se satisfacen las condiciones de frontera e iniciales.

- Comprobar el efecto de la conductividad térmica del material en la evolución de la temperatura de la placa y mostrar la importancia de considerar la forma acoplada de la transferencia de calor por conducción y convección.

- Comparar los resultados para una expansión asintótica de 2 términos con otra de 3 términos para el caso laminar.

- Validar los resultados obtenidos con los deducidos con una técnica numérica.

- Mostrar los transitorios de enfriamiento para diferentes valores del parámetro α.

- Comparar la capacidad de enfriamiento entre una capa límite laminar y una turbulenta.

Para empezar, la figura 4.1 define los perfiles de temperatura adimensionales en función de la distancia adimensional (χ), para tres valores diferentes de α, τ = 0.05 y un flujo laminar. En esta figura se observa que para α = 100 la temperatura es uniforme y la evolución de la misma se obtiene únicamente con el primer término de la expansión asintótica, o sea

$$\theta(s) = e^{-2s}$$

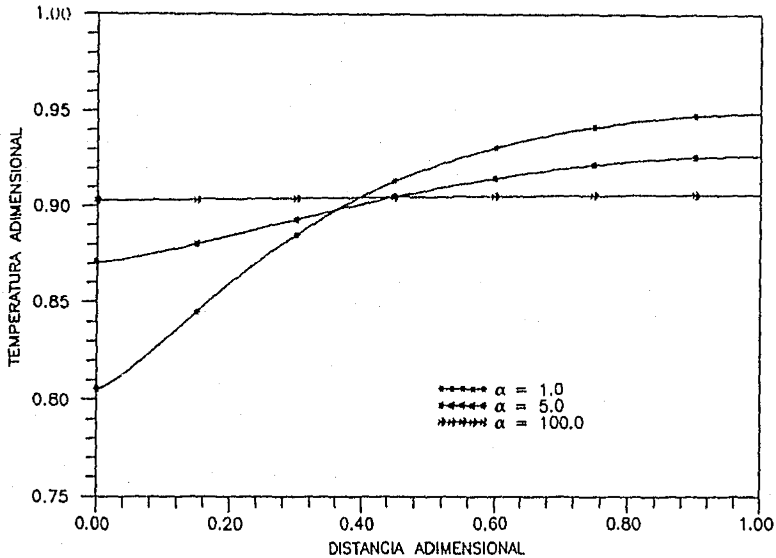

FIGURA 4.1.– Perfiles de temperatura adimensionales para el caso de flujo laminar.

Sin embargo, para $\alpha = 1$ existe una diferencia de temperatura considerable entre el extremo inicial y final, del orden del 18%. Esta se debe a la conductividad térmica finita del material de la placa. Para $\alpha = 5$, la diferencia de temperatura entre ambos extremos es cercana al 6.4%. Estos resultados se obtuvieron con una expansión asintótica de 2 términos y en estos se muestra la importancia de considerar la forma acoplada de la transferencia de calor por conducción y convección. Esto es, si no se tomara en cuenta la conductividad térmica del material se tendría un comportamiento semejante al de $\alpha = 100$, que al compararse con las otras curvas, se tendrían los siguientes errores:

- Para las curvas evaluadas con $\alpha = 1$ y $\alpha = 100$ se tiene un error relativo de 12.174% y 4.42% para el extremo inicial y final de la placa respectivamente.

- Para las curvas evaluadas con $\alpha = 5$ y $\alpha = 100$ el error es de 3.55% y 2.155% para el extremo inicial y final de la placa.

Los resultados correspondientes para el flujo turbulento se muestran en la figura 4.2. Aún cuando se observa el mismo comportamiento que para el flujo laminar, la diferencia de temperatura entre los extremos de la placa es menor.

Para $\alpha = 1$ la diferencia entre los extremos es aproximadamente 2.5% y para $\alpha = 5$ de 1.3%. De estos resultados se deduce que la capa límite turbulenta tiene mayor capacidad para disipar el flujo de calor que la capa límite laminar, y por lo tanto, la diferencia de temperatura entre los extremos de la placa es menor para este caso. En estas figuras también se observa el efecto de la conductividad térmica de la placa en los perfiles de temperatura.

La figura 4.3 muestra las temperaturas adimensionales para ambos extremos de la placa como una función del tiempo adimensional, para α

= 5 y flujo laminar. En esta figura se observa que la diferencia de temperatura en ambos extremos permanece del mismo orden al incrementarse el tiempo, τ. Para valores de τ > 3, la temperatura de la placa alcanza prácticamente la temperatura de la corriente libre.

Para el caso de flujo turbulento, se muestra la figura 4.d. En esta se observa que la diferencia de temperaturas entre ambos extremos es menor que para el caso de flujo laminar, debido a las observaciones descritas para la figura 4.2. Para valores de τ > 4.0,

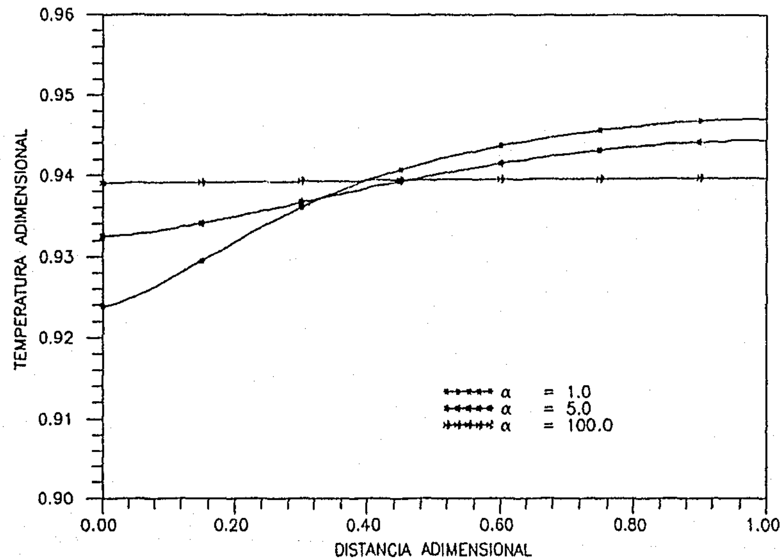

FIGURA 4.2.– Perfiles de temperatura adimensionales para el caso de flujo turbulento.

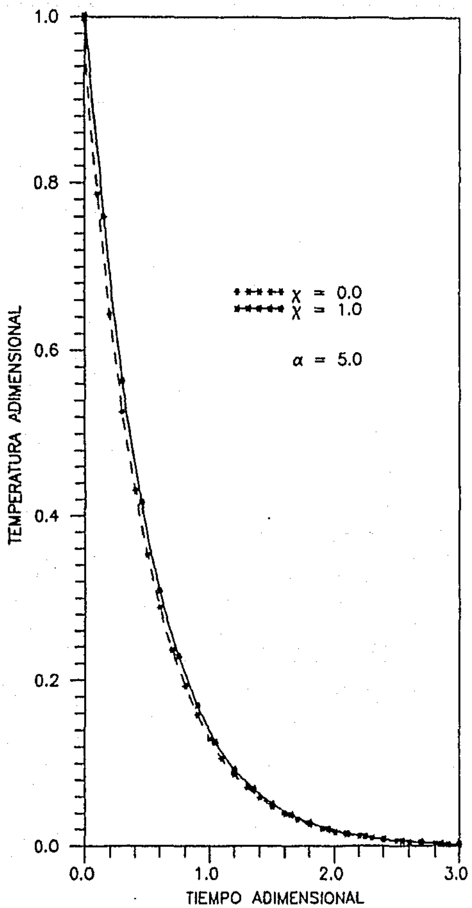

FIGURA 4.3.- Temperaturas adimensionales para ambos extremos de la placa y flujo laminar

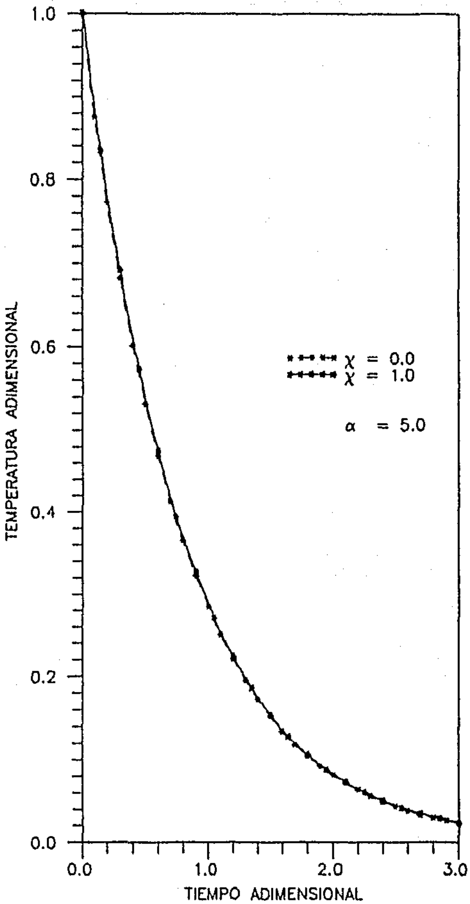

FIGURA 4.4.- Temperaturas adimensionales para ambos extremos de la placa y flujo turbulento

la temperatura de la placa alcanza la temperatura de la corriente libre. Cabe aclarar que este valor es más grande que para el caso laminar debido a la forma como se definieron estos parámetros adimensionales.

Para poder validar los resultados anteriores, en el apéndice B se presenta el desarrollo matemático para resolver, mediante una técnica numérica, la ecuación integro-diferencial singular para el flujo laminar. Por lo tanto, la figura 4.5 presenta una comparación de los perfiles de temperatura obtenidos con una expansión asintótica de 2

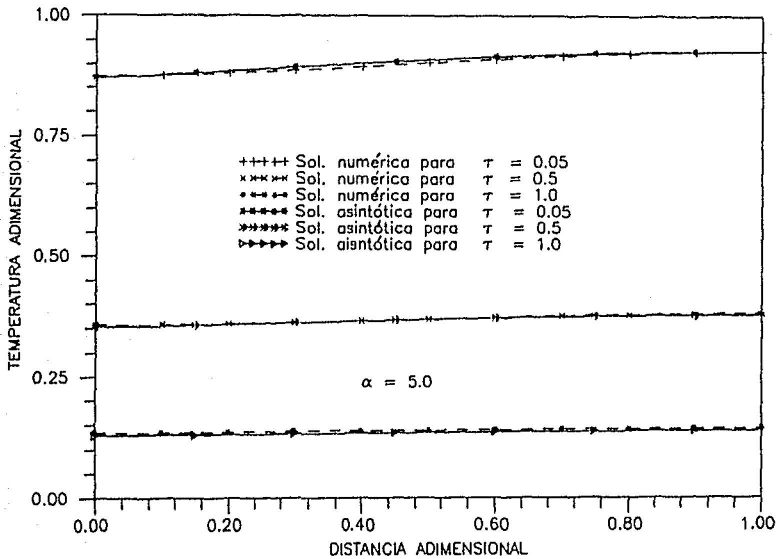

FIGURA 4.5.— Comparación de perfiles de temperatura obtenidos con una expansión asintótica y una solución numérica.

términos y con la solución numérica, para un flujo laminar. De esta comparación se deduce que el análisis asintótico proporciona resultados excelentes para $\alpha \geq 5$. Para este caso, el máximo error introducido es de 3.6%, correspondiente a $\tau = 1.0$, tal como se muestra en la tabla 4.1.

La figura 4.6 muestra la comparación de los perfiles de temperatura para $\alpha = 1$. En esta figura se observa que el error introducido es más grande que para $\alpha = 5$, y es del orden del 5.3% aproximadamente.

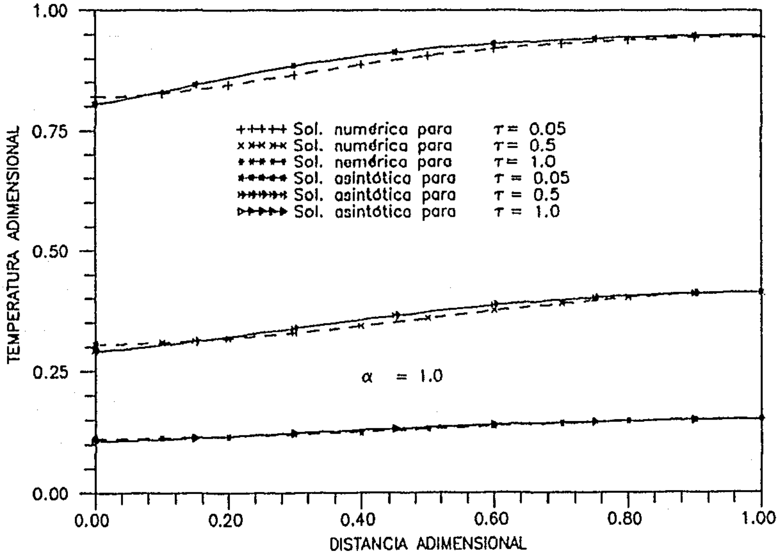

FIGURA 4.6.– Comparación de perfiles de temperatura obtenidos con una expansion asintótica y una solución numérica.

De la tabla 4.1 se deduce que en la parte media y en los extremos de la placa, es donde se tienen los errores más grandes. De esto se deduce que un tercer término en la expansión asintótica es necesario, para reducir este error.

Tabla No. 4.1

$\alpha = 5$					$\alpha = 1$				
		Temperatura		Error			Temperatura		Error
τ	χ	Sol. Num.	Sol. Asin.	Rel.	τ	χ	Sol. Num.	Sol. Asin.	Rel.
0.05	0.0	0.87345	0.87070	0.315	0.05	0.0	0.81929	0.80540	1.695
	0.2	0.87990	0.88370	0.432		0.2	0.84475	0.85980	1.781
	0.5	0.90195	0.90850	0.726		0.5	0.90647	0.92010	1.503
	0.8	0.92183	0.92350	0.181		0.8	0.93860	0.94410	0.586
	1.0	0.92676	0.92660	0.017		1.0	0.94474	0.94860	0.408
0.5	0.0	0.35659	0.35250	1.147	0.5	0.0	0.30529	0.29180	4.418
	0.2	0.35929	0.35830	0.275		0.2	0.31686	0.32060	1.180
	0.5	0.36883	0.36870	0.035		0.5	0.35914	0.37210	3.608
	0.8	0.37785	0.37550	0.622		0.8	0.40157	0.40550	0.978
	1.0	0.38015	0.37690	0.855		1.0	0.41297	0.41240	0.138
1.0	0.0	0.13400	0.12940	3.433	1.0	0.0	0.11205	0.10610	5.310
	0.2	0.13620	0.13150	3.451		0.2	0.11630	0.11670	0.344
	0.5	0.14020	0.13540	3.423		0.5	0.13188	0.13550	2.745
	0.8	0.14270	0.13790	3.634		0.8	0.14754	0.14780	0.176
	1.0	0.14330	0.13840	3.419		1.0	0.15176	0.15040	0.896

En las figuras 4.7, 4.8 y 4.9 se muestra la influencia del tercer término de la expansión asintótica sobre la evolución de la temperatura para $\alpha = 1$ y tres tiempos diferentes. En estas figuras se observa que los perfiles de tempertaura, obtenidos con la expansión asintótica de 3 términos, se aproximan más a los evaluados con la solución numérica, principalmente en la parte media de la placa. Sin embargo, en los extremos no se reduce el error entre ambos perfiles.

Los errores relativos obtenidos de la comparación de ambos perfiles se muestran en la tabla 4.2 para $\tau = 0.5$ y 1.0 y se comparan con los deducidos en la tabla 4.1.

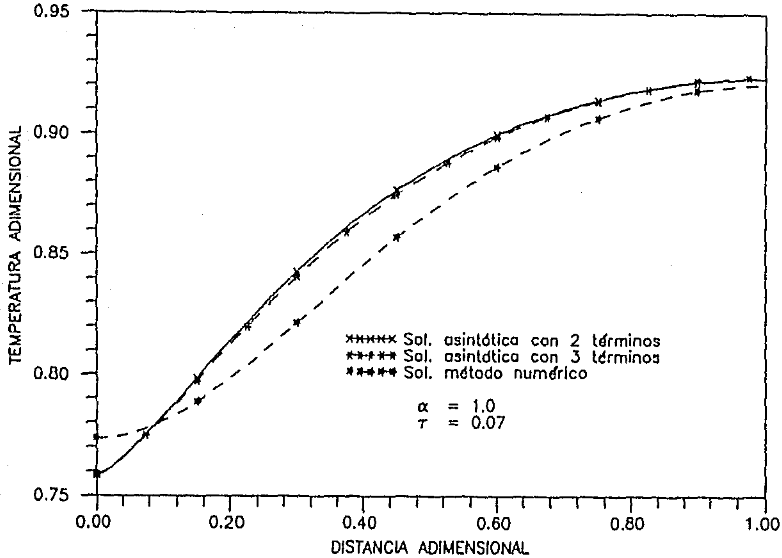

FIGURA 4.7.– Comparación del perfil de temperatura obtenido con una sol. asintótica (2 y 3 términos) y un método numérico.

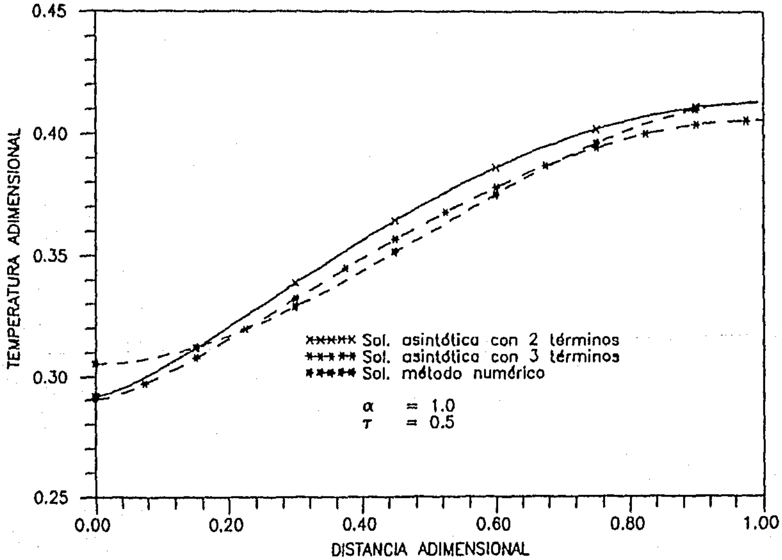

FIGURA 4.8.– Comparación del perfil de temperatura obtenido con una sol. asintótica (2 y 3 términos) y un método numérico.

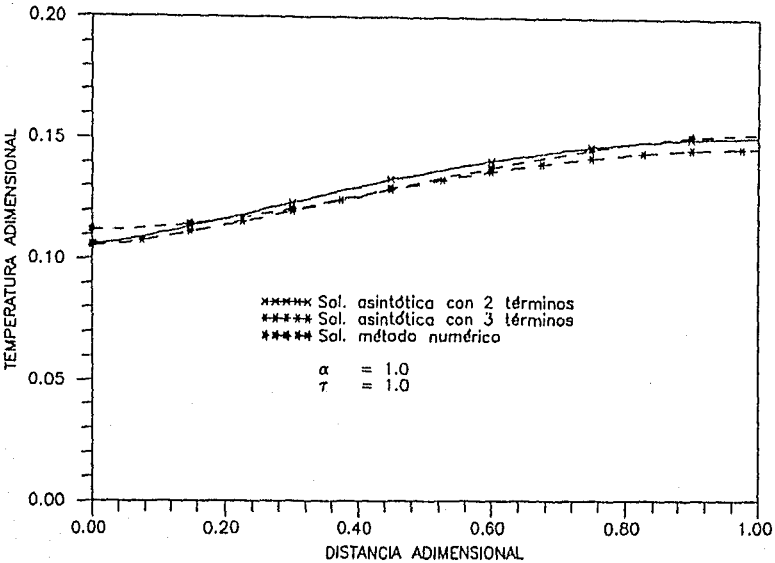

FIGURA 4.9.- Comparación del perfil de temperatura obtenido con una sol. asintótica (2 y 3 términos) y un método numérico.

Tabla No. 4.2

α = 1					
τ	χ	Temperatura Sol. Num.	Temperatura Sol. Asin. 3	Error Rel.	Error Rel. Tabla 4.1
0.5	0.0	0.30529	0.29060	4.812	4.418
	0.2	0.31686	0.31560	0.397	1.180
	0.5	0.35914	0.36410	1.381	3.608
	0.8	0.40157	0.39810	0.864	0.978
	1.0	0.41297	0.40550	0.808	0.138
1.0	0.0	0.11205	0.10550	5.846	5.310
	0.2	0.11630	0.11410	1.892	0.344
	0.5	0.13188	0.13120	0.516	2.745
	0.8	0.14754	0.14340	2.806	0.176
	1.0	0.15176	0.14600	3.795	0.896

Con esto se deduce que la serie con 3 términos es adecuada para valores pequeños de α, pero no para valores de $\alpha \geq 5$, como se demuestra a continuación.

La figura 4.10 presenta el perfil de temperatura obtenido con una expansión asintótica de 2 y 3 términos y el deducido con la solución numérica, para $\alpha = 5$ y $\tau = 0.06$. En esta figura se observa que la influencia del tercer término en la expansión asintótica, es prácticamente despreciable para $\alpha = 5$. Con esto se demuestra que la expansión asintótica con 2 términos es satisfactoria para valores de $\alpha \geq 5$ y que además es una serie convergente.

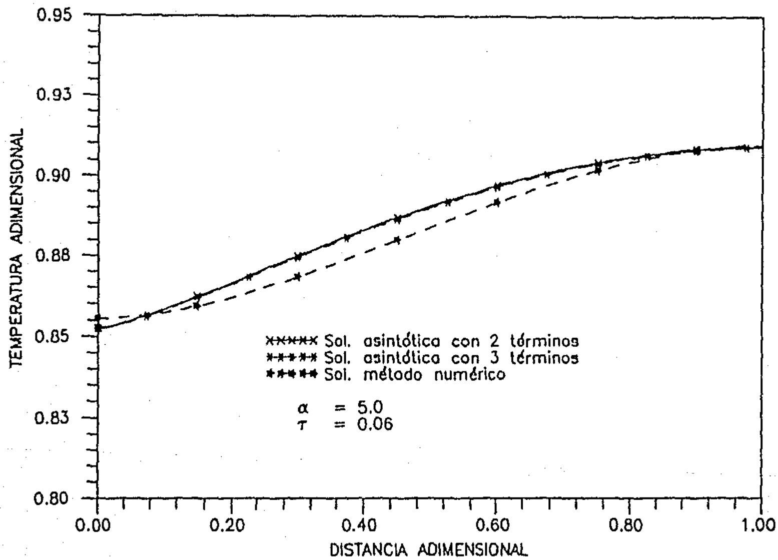

FIGURA 4.10.— Comparación del perfil de temperatura obtenido con una sol. asintótica (2 y 3 términos) y un método numérico.

Para valores grandes de α, esto es $\alpha \rightarrow \infty$, la evolución de la temperatura se puede obtener únicamente con el primer término de la expansión asintótica, tanto para el caso laminar como para el turbulento. Con esto se obtiene una expresión que únicamente es función del tiempo adimensional. Por otro lado, el parámetro α y el tiempo característico no se definen en la misma forma para el caso laminar y turbulento, por lo que es conveniente evaluar una relacióna entre ambos parámetros. Esto es con la finalidad de observar el comportamiento de la evolución de la temperatura de la placa para un mismo valor de α y del tiempo característico.

Los valores de α_L y α_T se definen como,

$$\alpha_L = \frac{\lambda_s \; e \; L^{-3/2}}{0.332 \; Pr^{-2/3} \sqrt{U\infty \, \nu} \; \rho \; c} \tag{4.1}$$

$$\alpha_T = \frac{\lambda_s \; e \; L^{-9/5}}{0.0287 \; Pr^{-2/5} \; \nu^{1/5} \; U\infty^{4/5} \; \rho \; c} \tag{4.2}$$

Relacionando los valores anteriores,

$$\alpha_T = \alpha_L \frac{0.332}{0.0287 \; Pr^{4/15}} \left(\frac{\nu}{L \; U\infty} \right)^{3/10} = \frac{0.332 \; \alpha_L}{0.0287 \; Pr^{4/15} \; Re^{3/10}} \tag{4.3}$$

simplificando,

$$\alpha_T = \left[11.56794 \; Pr^{-4/15} \; Re^{-3/10} \right] \alpha_L \tag{4.4}$$

donde α_T y α_L corresponden a los valores de α para flujo turbulento y laminar repectivamente. En la misma forma se pueden relacionar los tiempos adimensionales para ambos flujos.

Los valores de τ_L y τ_T se definen como,

$$\tau_L = \frac{0.332 \; U\infty^{1/2} \; \nu^{1/2} \; \rho \; c \; t}{\rho_s \; c_s \; e \; Pr^{2/3} \; L^{1/2}} \tag{4.5}$$

y

$$\tau_T = \frac{0.0287\ \rho\ c\ U\infty^{4/5}\ \nu^{1/5}\ t}{\rho_s\ c_s\ e\ Pr^{2/5}\ L^{1/5}} \qquad (4.6)$$

Relacionando τ_T y τ_L, mediante la expresión,

$$\tau_T = \frac{0.0287\ \rho\ c\ U\infty^{4/5}\ \nu^{1/5}\ t\ Pr^{2/3}\ L^{1/2}}{0.332\ U\infty^{1/2}\ \nu^{1/2}\ \rho\ c\ t\ Pr^{2/5}\ L^{1/5}} \qquad (4.7)$$

y simplificando,

$$\tau_T = \left[\ 0.086445\ Pr^{4/15}\ Re^{3/10}\ \right]\ \tau_L \qquad (4.8)$$

Para el límite asintótico, $\alpha \longrightarrow \infty$, la evolución de la temperatura de la placa, tanto para el flujo turbulento como para el laminar, se puede deducir considerando únicamente el primer término de las expresiones asintóticas (3.91) y (3.129), o sea

$$\theta_L = Exp(-2s) = Exp(-2\tau_L) \qquad (4.9)$$

y

$$\theta_T = Exp(-5s/4) = Exp(-5\tau_T/4) \qquad (4.10)$$

relacionando ambas expresiones,

$$\theta_T/\theta_L = Exp(-5\tau_T/4) * Exp(2\tau_L) =$$

$$Exp\Big(\ (2 - 0.1080562\ Pr^{4/15}\ Re^{3/10})\ \tau_L\ \Big) \qquad (4.11)$$

La figura 4.11 muestra la relación de temperaturas (turbulento/laminar) para diferentes números de Reynolds, $\alpha \longrightarrow \infty$ y $Pr = 1.0$. Esto es válido si la capa límite sobre la placa es laminar o turbulenta. En la figura se puede observar que a medida que aumenta el número de Reynolds, la temperatura de la placa, para el caso de flujo turbulento, decrece más rápido que para el caso laminar para un mismo valor del tiempo adimensional.

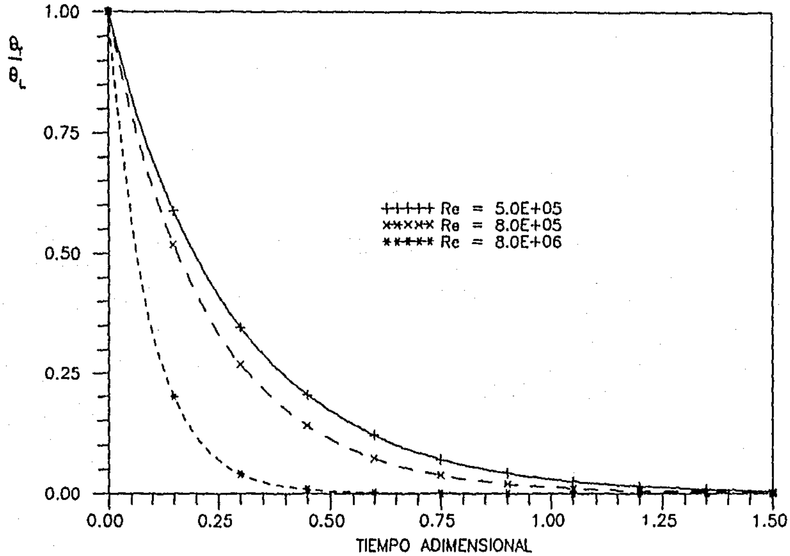

FIGURA 4.11.- Relación de temperaturas adimensionales (turbulenta/laminar) para diferentes valores del número de Reynolds, Pr = 1.0 y ALFA infinito.

Cuando el número de Reynolds está cercano a su valor crítico, ambos tipos de estructuras coexisten, es decir, están presentes la capa límite laminar y turbulenta.

Suponiendo que la zona de transición es pequeña comparada con la longitud de la placa, en el límite $\alpha \longrightarrow \infty$, se tiene que la ecuación gobernante es

$$\alpha_L \frac{\partial^2\theta}{\partial\chi^2} = \frac{\partial\theta}{\partial\tau_L} + \frac{\theta}{\sqrt{\chi}} \quad , \quad \text{para } 0 < \chi < \chi_c \qquad (4.12)$$

$$\alpha_T \frac{\partial^2\theta}{\partial\chi^2} = \frac{\partial\theta}{\partial\tau_T} + \frac{\theta}{\chi^{2/10}} \quad , \quad \text{para } \chi_c < \chi < 1 \qquad (4.13)$$

donde χ_c es la distancia a la cual inicia la transición .

Integrando la ecuación (4.12) con respecto a χ, entre 0 y χ_c, y aplicando las condiciones de frontera adiabáticas en ambos extremos, se tiene

$$\alpha_L \frac{\partial\theta}{\partial\chi}\bigg|_{\chi_c} = \frac{\partial\theta}{\partial\tau_L}\chi_c + 2\theta\sqrt{\chi_c} \qquad (4.14)$$

de igual manera, la integración de (4.13) es,

$$\alpha_T \frac{\partial\theta}{\partial\chi}\bigg|_{\chi_c} = \frac{\partial\theta}{\partial\tau_T}(1 - \chi_c) + (10/8)\,\theta\,(1 - \chi_c^{8/10}) \qquad (4.15)$$

Debido a la continuidad de la temperatura de la placa y del flujo de calor en la posición de la zona de transición, con las ecuaciones (4.14) y (4.15) se deduce la expresión para la evolución de la temperatura de la placa, como

$$\frac{d\theta}{d\tau_L}\left[\chi_c + (\alpha_L / \alpha_T)(\tau_L / \tau_T)(1 - \chi_c)\right] =$$

$$- \theta\left[2\sqrt{\chi_c} + (10/8)(\alpha_L / \alpha_T)(1 - \chi_c^{8/10})\right] \qquad (4.16)$$

La solución de (4.16), con la condición inicial $\theta(\tau_T = 0) = 1$, es

$$\theta = \text{Exp}\left\{ - \left(2\sqrt{\chi_c} + 0.1080572\, Pr^{4/15} * \right.\right.$$

$$\left.\left. Re^{9/10}(1 - \chi_c^{8/10}) \right) \tau_L \right\} \qquad (4.17)$$

De la expresión (4.17) se deduce que para $\chi_c = 0$ se tiene el caso de flujo turbulento y para $\chi_c = 1$ el de flujo laminar.

Por último, considerando solamente el primer término de las expansiones asintóticas de las soluciones para el caso laminar y turbulento, las figuras 4.12 y 4.13 muestran una comparación de las temperaturas para el flujo laminar y turbulento, en el extremo final de la placa.

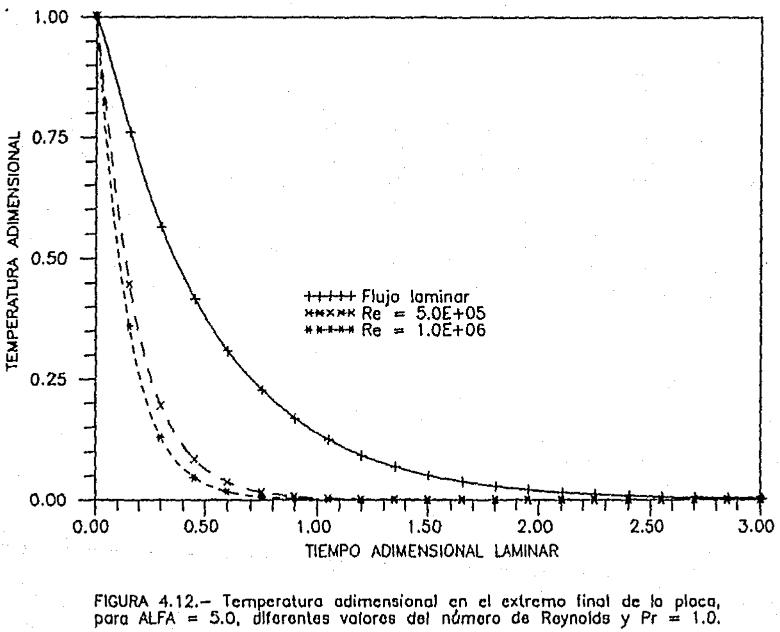

FIGURA 4.12.– Temperatura adimensional en el extremo final de la placa, para ALFA = 5.0, diferentes valores del número de Reynolds y Pr = 1.0.

La figura 4.12 corresponde a un valor de $\alpha = 5$, y la capa límite turbulenta se evalúa para 2 valores diferentes del número de Reynolds y un número de Prandtl de orden unidad.

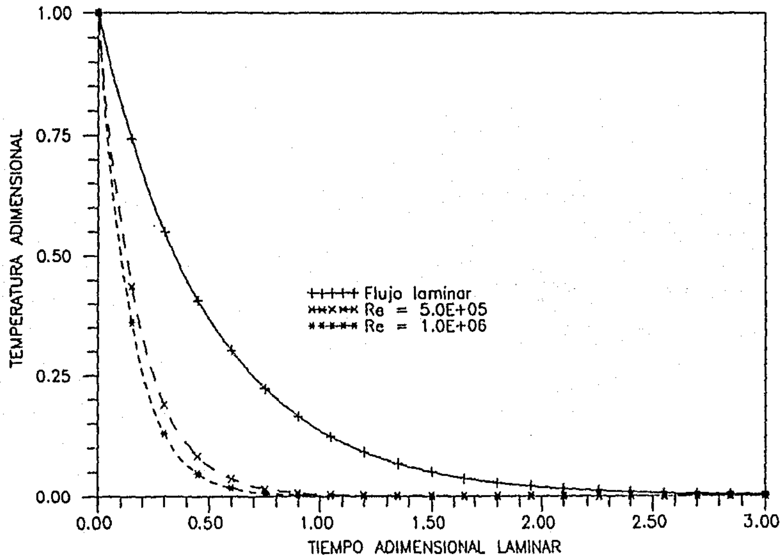

FIGURA 4.13.– Temperatura adimensional en el extremo final de la placa, para ALFA = 100.0, valores diferentes del número de Reynolds y Pr = 1.0.

La figura 4.13 corresponde a un valor de $\alpha = 100$, y la capa límite turbulenta se evalúa a diferentes números de Reynolds y un número de Prandtl de orden unidad.

En las figuras anteriores, se observa que la temperatura de la placa alcanza más rápidamente la temperatura de la corriente libre en el caso turbulento. Al mismo tiempo, se observa que entre más grande es el número de Reynolds, más rápido se llega a la temperatura de la corriente libre.

V.- CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta la solución para el proceso de enfriamiento de una placa plana expuesta a un flujo convectivo, empleando técnicas asintóticas. Este problema se resolvió tanto para un flujo convectivo laminar como para uno turbulento y la evolución de la temperatura se determinó considerando las formas acopladas de transferencia de calor por conducción y convección.

La consideración de estas formas acopladas de transferencia de calor permiten deducir un análisis más realista y confiable del modelo matemático que se plantea. Por otro lado, el desarrollo matemático para este tipo de problemas conduce a ecuaciones integro-diferenciales muy complejas, difíciles de resolver.

De las ecuaciones que gobiernan este problema y de las variables adimensionales definidas, resulta una ecuación integro-diferencial singular con un sólo parámetro. Este parámetro (α) define la relación entre la capacidad de la placa para transportar calor en la dirección del flujo y la capacidad para transferir calor al flujo convectivo. Para valores pequeños de este parámetro se deduce que el material de la placa tiene muy baja conductividad térmica o que la resistencia térmica del fluido es despreciable. Para valores grandes de α se tiene el caso contrario. Con base en este parámetro se pueden considerar dos casos para evaluar la ecuación integro-diferencial:

a).- Para $\alpha = 0$ se tiene una placa adiabática, y utilizando una variable de semejanza se puede resolver numéricamente este caso, tal como se presenta en la referencia [d].

b).- Para el límite asintótico $\alpha \gg 1$ el problema aumenta su complejidad debido a los transitorios rápidos de la temperatura que ocurren en el proceso de enfriamiento. Este caso no se habia resuelto en la actualidad.

De las posibles alternativas para resolver este problema, para el caso asintótico $\alpha >> 1$, se seleccionó el Método de Perturbaciones (Expansiones Asintóticas) por ser un método analítico aproximado utilizado para resolver problemas con soluciones no-uniformes y para lograr un entendimiento físico más claro del proceso analizado.

Las expansiones asintóticas se clasifican en dos tipos: Métodos de Perturbación Regular y Métodos de Perturbación Singular. Para el problema planteado en este trabajo, no puede aplicarse una Perturbación Regular, debido a los transitorios rápidos de temperatura que ocurren al inicio del enfriamiento, durante tiempos muy pequeños. Después de esto, la temperatura llega a una condición de pseudo-equilibrio, para el cual, la evolución de la temperatura es lenta.

Por esta razón y debido a la singularidad de la ecuación integro-diferencial, que impide obtener soluciones uniformes, se utilizó el Método de Escalas Múltiples.

Para aplicar este método, primero fue necesario definir una escala de tiempo pequeña para los transitorios rápidos, y la cual permite obtener una serie válida para tiempos pequeños, sin el truncamiento de términos.

También fue necesario introducir otra escala de tiempo para eliminar los términos seculares de la serie propuesta. Con las dos escalas de tiempo introducidas en la expresión definida para una Perturbación Regular, se obtuvo la solución al problema planteado.

Los resultados obtenidos con la expresión anterior, se validaron con los correspondientes de un método numérico. Para esto, en el apéndice B de este trabajo se presenta el desarrollo del esquema numérico por Diferencias Finitas empleado para resolver la ecuación integro-diferencial singular para el caso laminar.

La expansión asintótica se dedujo tanto para flujo laminar como turbulento y para el caso laminar se obtuvo una expansión con 2 y 3 términos.

Por otro lado, también se comparó la capacidad de enfriamiento entre ambos flujos para el caso $\alpha \rightarrow \infty$, en el cual solo se consideró el primer término de la expansión asintótica.

De los resultados obtenidos en este trabajo se concluye lo siguiente:

a) La expansión asintótica con 2 términos, para flujo laminar y turbulento, proporciona resultados satisfactorios para $\alpha \geq 5$ y aún para valores de orden unidad de α. En estos resultados también se observó que para valores pequeños de α, se tienen gradientes de temperatura muy grandes en el extremo inicial de la placa, lo que ocasiona transitorios rápidos para valores pequeños del tiempo adimensional. Después de estos transitorios rápidos, la temperatura llega a un estado de pseudo-equilibrio, en el cual, la evolución de la temperatura tiene un comportamiento asintótico. Para valores muy grandes de α, los transitorios rápidos aparecen en tiempos demasiado cortos y su comportamiento es practicamente asintótico.

b) La consideración de la conductividad térmica en este tipo de problemas es muy importante, sobre todo en los extremos inicial y final de la placa, donde se pueden tener errores del orden de 12% para valores pequeños de α. De esto se deriva la importancia de considerar las formas acopladas de transferencia de calor en este tipo de problemas.

c) De la comparación de los resultados obtenidos con la expansión asintótica y con el esquema numérico se deduce que estos son satisfactorios. En este caso, los resultados para valores pequeños de α presentan un error máximo de 5.3%, mientras que para valores de $\alpha > 5$, el error es del orden de 3.6%.

d) De los resultados obtenidos con la expansión asintótica de 3 términos, se deduce que los errores para valores de α pequeños, comparados con el esquema numérico, se reducen en la parte media de la placa, pero no en los extremos de la misma. Para valores de $\alpha \geq 5$ la expansión asintótica con 3 términos prácticamente genera los mismos resultados que la expansión con 2 términos. Con esto se deduce que la expansión asintótica obtenida con 2 términos es convergente.

e) De la comparación de los resultados obtenidos para un flujo laminar y un flujo turbulento se deduce que para el caso turbulento la transferencia de calor es mayor, y por lo tanto, los gradientes de temperatura en el extremo inicial y final de la placa son menores que para el caso laminar.

f) Para valores grandes de α ($\alpha \rightarrow \infty$) la evolución de la temperatura en el transitorio se puede obtener únicamente con el primer término de la expansión asintótica. Para este caso se pueden relacionar ambas expresiones deducidas para el flujo laminar y turbulento, de donde resulta una ecuación que es función del tiempo adimensional y del número de Reynolds. De esta ecuación se deduce que la placa alcanza más rápidamente la temperatura de la corriente libre a medida que aumenta el número de Reynolds.

g) Por último, se presenta una comparación de los perfiles de temperatura obtenidos para un flujo laminar y turbulento, considerando para ambos casos valores de α y τ del mismo orden. En estos resultados se observa que a medida que el número de Reynolds se incrementa, la temperatura de la placa alcanza más rápido la temperatua ambiente.

Por otro lado, de los métodos utilizados para resolver el problema planteado en este trabajo se deduce la siguiente comparación para analizar ventajas y desventajas de ambos métodos.

1.- Los Métodos de Perturbación son adecuados cuando no se pueden obtener soluciones analíticas exactas debido a singularidades de las ecuaciones a resolver. Los métodos numéricos son adecuados para resolver este tipo de ecuaciones siempre y cuando se tenga una buena aproximación para el punto que presenta la singularidad.

2.- La técnica numérica de Diferencias Finitas no presenta complicación alguna para resolver las ecuaciones integro-diferenciales, obteniendose resultados satisfactorios si se garantiza la estabilidad numérica del método. Los Métodos de Perturbación si presentan un grado de dificultad matemática mayor que los métodos numéricos.

3.- Las expansiones asintóticas con 2 y 3 términos proporcionan resultados satisfactorios y son expresiones que permiten evaluar la temperatura de la placa en forma rápida para cualquier valor del tiempo, del parámetro α y del espacio. Los esquemas numéricos resultan muy costosos para su evaluación y normalmente requieren de un tiempo considerable para evaluar la evolución de la temperatura de la placa.

4.- Los Métodos de Perturbación permiten un razonamiento más claro para lograr un entendimiento del modelo matemático planteado. Los esquemas numéricos aún cuando son menos complejos, no permiten un razonamiento adecuado para resolver el problema.

De lo anterior se deduce que los Métodos de Perturbación son más adecuados que las técnicas de numéricas para resolver este tipo de problemas.

En general se puede concluir que los Métodos de Perturbación representan una técnica muy completa para resolver diversos problemas en los que no se pueden obtener soluciones analíticas exactas por múltiples causas. En las referencias [13] y [15] se analizan y resuelven diversos problemas relacionados con la Transferencia de Calor y Mecánica de Fluidos.

APENDICES

APENDICE A.- LISTADOS DE PROGRAMAS

En este apéndice, se presentan los listados de los programas utilizados para obtener los resultados del Capítulo IV.

A continuación se describe, en forma breve, la función de cada uno de los programas.

Programa ESCMUL.- Este programa contiene la codificación de la solución de la ecuación integro-diferencial para el caso laminar. En éste, se evalúa la temperatura de la placa en función del parámetro α, tiempo adimensional τ y la distancia adimensional χ.

Programa ESCMUT.- Este programa presenta la codificación de la solución de la ecuación integro-diferencial para el caso de capa límite turbulenta. Con este programa se obtiene la temperatura de la placa en función del parámetro α, tiempo adimensional τ y la distancia adimensional χ.

Programa ESMUTF.- Este programa permite evaluar la temperatura de la placa en función de α, distancia χ y un tiempo adimensional τ fijo. Este programa corresponde para el caso de capa límite laminar sobre la placa.

Programa ESMTTF.- Este programa permite evaluar la temperatura de la placa en función de α, distancia χ y un tiempo adimensional τ fijo. Este programa corresponde para el caso de capa límite turbulenta sobre la placa.

Programa ESTUTF.- Este programa permite obtener la temperatura de la placa, para el caso turbulento, en función del parámetro α, tiempo y distancia adimensionales. Para este caso, los valores de α y τ se calculan a partir de valores correspondientes para el caso laminar.

Programa TELATU.- Este programa evalúa la relación de la temperatura para el caso turbulento entre la temperatura para el caso laminar, en función del número de Reynolds y del tiempo adimensional. Para esto, se consideró únicamente el primer término de la solución asintótica para el caso laminar y turbulento, esto es, para un valor infinito del parámetro α.

```
C
C     ################################################################
C
C     ESTE PROGRAMA EVALUA EL VALOR DE LA TEMPERATURA EN FUNCION DE
C     ALFA, TIEMPO Y DISTANCIA X PARA EL CASO DE FLUJO LAMINAR SOBRE
C     UNA PLACA PLANA.
C
C     SOLUCION EMPLEANDO EL METODO DE LAS ESCALAS MULTIPLES
C
C     ################################################################
C
C     version : 1.
C
C     fecha   : septiembre 1988
C
C     elaboro : A. Vallejo
C
C     ################################################################
C
      PROGRAM ESCMUL
C
C     ==============================================================
C
      DOUBLE PRECISION CAL1, VALN, SUMN, SUMV, CAL5, CAL6, ECOF, ERR
      DATA BETA/0.2099894/
      DATA DAT1/3.1416/,DAT2/2.506631/,DAT3/0.2/,DAT4/1.33333/
      DATA DAT5/0.2/
C
C     ==============================================================
C     LECTURA DE DATOS DE ENTRADA:
C
      WRITE(*,*)'DEFINE EL VALOR DE ALFA :'
      READ(*,*)ALFA
      WRITE(*,*)'DEFINE EL VALOR DE X :'
      READ(*,*)DISX
      WRITE(*,*)'DEFINE EL VALOR FINAL DEL TIEMPO :'
      READ(*,*)TIEFIN
      WRITE(*,*)'DEFINE EL VALOR DE LOS INCREMENTOS DEL TIEMPO :'
      READ(*,*)DELTA
C
C     ==============================================================
C
      OPEN(UNIT=30,FILE='RESLAM',ACCESS='SEQUENTIAL',STATUS='OLD')
      WRITE(30,50)
      WRITE(30,60)ALFA,DISX
      WRITE(30,70)
C
C     ==============================================================
C     Se inicializa el valor de TAO en cero:
C
      TAO = 0.0
C
C     Se inicia el ciclo para la evaluacion de la temperatura:
C
```

```
10    IF ( TAO .LT. TIEFIN ) THEN
C
C        Calculo del valor de "SIGMA = t * ALFA":
C
         ASIGMA = TAO * ALFA
C
C        Calculo de la escala s = t * [ 1 + ( w - 1/5 ) / ALFA )
C
         ESCS = TAO * ( 1. + ( BETA - DAT5 ) / ALFA )
C
C        Se inicia la sumatoria de los terminos que contienen los
C        valores caracteristicos :
C
         SUMN = 0.0
         SUMV = 0.0
         N = 1
         AN = 1.0
C
C        Calculo del valor caracteristico (ln) :
C
20       ALANDA = AN * DAT1
C
C        Calculo del termino = (DAT2 / ln**5/2) * (E^(-ln**2 * SIGMA))*
C                               Cos(ln*x)
C
         E01 = (ALANDA * ALANDA) * ASIGMA
         IF ( E01 .LT. 60.0 ) THEN
            E1 = -E01
            CAL1 = EXP(E1)
            CAL2 = DAT2 / (ALANDA**2.5)
            CT1 = ALANDA * DISX
            CAL3 = COS(CT1)
            VALN = CAL1 * CAL2 * CAL3
         ELSE
            VALN = 0.0
         ENDIF
C
C        Se suman los terminos :
C
         IF ( AN .EQ. 1.0 ) THEN
            SUMN = VALN + SUMN
            SUMV = SUMN
            AN = AN + 1.0
            N = N + 1
            WRITE(*,*)SUMN
            GO TO 20
         ELSE
            SUMN = SUMN + VALN
C
C           Se verifica el error permitido para la convergencia de la
C           serie de los valores caracteristicos :
C
            ERR = ABS(SUMV - SUMN)
C
```

```
         IF (ERR .GT. 0.01) THEN
            SUMV = SUMN
            WRITE(*,*)SUMN
            AN = AN + 1.0
            N = N + 1
            GO TO 20
C
         ELSE
            WRITE(*,*)SUMN
            WRITE(*,*)'=================='
C
C           Se calcula el valor de la temperatura :
C
            CAL4 = - DISX**2 + DAT4 * DISX**(1.5)
            CAL5 = - DAT3 + SUMN
            CAL6 = 1.0 + ( CAL4 + CAL5 ) / ALFA
C
C           Calculo del valor de E^(-2s) :
C
            E2 = -2. * ESCS
C
            ECOF = EXP(E2)
C
C           Valor de la temperatura:
C
            TEMP = ECOF * CAL6
C
         ENDIF
       ENDIF
C
C     ============================================================
C        Impresion de resultados:
C
       WRITE(30,80)TAO,ASIGMA,ESCS,TEMP
C     ============================================================
C        Incremento de tao :
C
       TAO = TAO + DELTA
C
       GO TO 10
      ENDIF
C
C     ============================================================
C     Seccion de formatos :
C
50    FORMAT(2X,'RESULTADOS DE LA PRUEBA PARA EL CASO LAMINAR',//)
60    FORMAT(2X,'VALOR DE ALFA EN LA PRUEBA :',1X,F6.1,/,
     @       2X,'  VALOR DE LA DISTANCIA X  :',1X,F5.2,/)
70    FORMAT(2X,'  TAO  ',2X,'  SIGMA  ',2X,'  ESCS  ',2X,' TEMP ',/)
80    FORMAT(3X,F6.2,2X,F7.3,2X,F7.3,2X,F8.4)
C
C     ============================================================
C
      END
```

```
C
C     ************************************************************
C
C     ESTE PROGRAMA EVALUA EL VALOR DE LA TEMPERATURA EN FUNCION DE
C     ALFA, TIEMPO Y DISTANCIA X PARA EL CASO DE FLUJO TURBULENTO
C     SOBRE UNA PLACA PLANA.
C
C     SOLUCION EMPLEANDO EL METODO DE LAS ESCALAS MULTIPLES
C
C     ************************************************************
C
C     version : 1.
C
C     fecha   : enero 1989
C
C     elaboro : A. Vallejo
C
C     ************************************************************
C
      PROGRAM ESCMUT
C
C     ==========================================================
C
      DOUBLE PRECISION CAL1, VALN, SUMN, SUMV, CAL5, CAL6, ECOF, ERR
      DATA BETA/0.00072672/
      DATA DAT0/3.1416/,DAT1/0.625/,DAT2/0.694444/,DAT3/0.039682/
      DATA DAT4/0.71953/,DAT5/2.8/
C
C     ==========================================================
C     LECTURA DE DATOS DE ENTRADA:
C
      WRITE(*,*)'DEFINE EL VALOR DE ALFA :'
      READ(*,*)ALFA
      WRITE(*,*)'DEFINE EL VALOR DE X :'
      READ(*,*)DISX
      WRITE(*,*)'DEFINE EL VALOR FINAL DEL TIEMPO :'
      READ(*,*)TIEFIN
      WRITE(*,*)'DEFINE EL VALOR DE LOS INCREMENTOS DEL TIEMPO :'
      READ(*,*)DELTA
C
C     ==========================================================
C
      OPEN(UNIT=30,FILE="RESTUR",ACCESS="SEQUENTIAL",STATUS="OLD")
      WRITE(30,50)
      WRITE(30,60)ALFA,DISX
      WRITE(30,70)
C
C     ==========================================================
C     Se inicializa el valor de TAO en cero:
C
      TAO = 0.0
C
C     Se inicia el ciclo para la evaluacion de la temperatura:
C
```

```
10    IF ( TAO .LT. TIEFIN ) THEN
C
C        Calculo del valor de "SIGMA = t * ALFA":
C
         ASIGMA = TAO * ALFA
C
C        Calculo de la escala s = t * [ 1 + ( w ) / ALFA )
C
         ESCS = TAO * ( 1. + BETA / ALFA )
C
C        Se inicia la sumatoria de los terminos que contienen los
C        valores caracteristicos :
C
         SUMN = 0.0
         SUMV = 0.0
         N = 1
         AN = 1.0
C
C        Calculo del valor caracteristico (ln) :
C
20       ALANDA = AN * DATO
C
C        Calculo del termino = (DAT4 / ln**14/5) * (E^(-ln**2 * SIGMA))*
C                              Cos(ln*x)
C
         IF ( ASIGMA .LT. 8.0 ) THEN
            E1 = - (ALANDA * ALANDA) * ASIGMA
            CAL1 = EXP(E1)
            CAL2 = DAT4 / (ALANDA**DAT5)
            CT1 = ALANDA * DISX
            CAL3 = COS(CT1)
            VALN = CAL1 * CAL2 * CAL3
         ELSE
            VALN = 0.0
         ENDIF
C
C        Se suman los terminos :
C
         IF ( AN .EQ. 1.0 ) THEN
            SUMN = VALN + SUMN
            SUMV = SUMN
            AN = AN + 1.0
            N = N + 1
            GO TO 20
         ELSE
            SUMN = SUMN + VALN
C
C           Se verifica el error permitido para la convergencia de la
C           serie de los valores caracteristicos :
C
            ERR = ABS(SUMV - SUMN)
C
            IF (ERR .GT. 0.01) THEN
               SUMV = SUMN
```

```
              AN = AN + 1.0
              N = N + 1
              GO TO 20
C
            ELSE
C
C             Se calcula el valor de la temperatura :
C
              CAL4 = - DAT1 * DISX**2 + DAT2 * DISX**(1.8)
              CAL5 = - DAT3 + SUMN
              CAL6 = 1.0 + ( CAL4 + CAL5 ) / ALFA
C
C             Calculo del valor de E^(-2s) :
C
              E2 = -(5./4.) * ESCS
C
              ECOF = EXP(E2)
C
C             Valor de la temperatura:
C
              TEMP = ECOF * CAL6
C
            ENDIF
          ENDIF
C
C     ============================================================
C         Impresion de resultados:
C
          WRITE(30,80)TAO,ASIGMA,ESCS,TEMP
C     ============================================================
C         Incremento de tao :
C
          TAO = TAO + DELTA
C
          GO TO 10
        ENDIF
C
C     ============================================================
C     Seccion de formatos :
C
50    FORMAT(2X,'RESULTADOS DE LA PRUEBA PARA EL CASO TURBULENTO',//)
60    FORMAT(2X,'VALOR DE ALFA EN LA PRUEBA :',1X,F6.1,/,
     @       2X,'  VALOR DE LA DISTANCIA X  :',1X,F5.2,/)
70    FORMAT(2X,'  TAO  ',2X,'  SIGMA  ',2X,'  ESCS  ',2X,' TEMP ',/)
80    FORMAT(3X,F6.2,2X,F7.3,2X,F7.3,2X,F8.4)
C
C     ============================================================
C
      END
C ****************************************************************
```

```
C
C     ****************************************************************
C     ESTE PROGRAMA EVALUA EL VALOR DE LA TEMPERATURA SOBRE LA PLACA
C     EN FUNCION DE ALFA Y LA DISTANCIA X, PARA UN TIEMPO FIJO.
C
C     SOLUCION EMPLEANDO EL METODO DE LAS ESCALAS MULTIPLES
C     ****************************************************************
C
C     version : 1.1
C
C     fecha   : septiembre 1988
C
C     elaboro : A. Vallejo
C
C     modificaciones: Se cambio el valor de la constante 'W'.
C
C     fecha del cambio: 3 abril 1989
C
C     ****************************************************************
C
      PROGRAM ESMUTF
C
C     ==============================================================
C
      DOUBLE PRECISION CAL1, VALN, SUMN, SUMV, CAL5, CAL6, ECOF, ERR
      DATA BETA/0.009893/
      DATA DAT1/3.1416/,DAT2/2.506631/,DAT3/0.2/,DAT4/1.33333/
C
C     ==============================================================
C     LECTURA DE DATOS DE ENTRADA:
C
      WRITE(*,*)'DEFINE EL VALOR DE ALFA :'
      READ(*,*)ALFA
      WRITE(*,*)'DEFINE EL VALOR DE LOS INCREMENTOS DE X :'
      READ(*,*)DELTX
      WRITE(*,*)'DEFINE EL VALOR DEL TIEMPO :'
      READ(*,*)TAO
C
C     ==============================================================
C
      OPEN(UNIT=30,FILE='RESLA2',ACCESS='SEQUENTIAL',STATUS='OLD')
      WRITE(30,50)
      WRITE(30,60)ALFA,TAO
      WRITE(30,70)
C
C     ==============================================================
C     Se inicializa el valor de X en cero:
C
      DISX = 0.0
C
C     Se inicia el ciclo para la evaluacion de la temperatura:
C
10    IF ( DISX .LE. 1.0 ) THEN
C
```

```
C        Calculo del valor de "SIGMA = t * ALFA":
C
         ASIGMA = TAO * ALFA
C
C        Calculo de la escala s = t * [ 1 + ( w - 0.2 ) / ALFA ]
C
         ESCS = TAO * ( 1. + BETA / ALFA )
C
C        Se inicia la sumatoria de los terminos que contienen los
C        valores caracteristicos :
C
         SUMN = 0.0
         SUMV = 0.0
         N = 1
         AN = 1.0
C
C        Calculo del valor caracteristico (ln) :
C
20       ALANDA = AN * DAT1
C
C        Calculo del termino = (DAT2 / ln**5/2) * (E^(-ln**2 * SIGMA))*
C                              (1. + Cos(ln*x))
C
            E01 = (ALANDA * ALANDA) * ASIGMA
C
         IF ( E01 .LT. 50.0 ) THEN
C
            E1 = - E01
            CAL1 = EXP(E1)
            CAL2 = DAT2 / (ALANDA**2.5)
            CT1 = ALANDA * DISX
            CAL3 = COS(CT1)
            VALN = CAL1 * CAL2 * CAL3
         ELSE
C
            VALN = 0.0
C
         ENDIF
C
C        Se suman los terminos :
C
         IF ( AN .EQ. 1.0 ) THEN
C
            SUMN = VALN + SUMN
            SUMV = SUMN
            WRITE(*,*)SUMN
            AN = AN + 1.0
            N = N + 1
            GO TO 20
         ELSE
C
            SUMN = SUMN + VALN
            WRITE(*,*)SUMN
C
```

```
C          Se verifica el error permitido para la convergencia de la
C          serie de los valores caracteristicos :
C
           ERR = ABS(SUMV - SUMN)
C
           IF (ERR .GT. 0.01) THEN
C
              SUMV = SUMN
              AN = AN + 1.0
              N = N + 1
              GO TO 20
C
           ELSE
C
              WRITE(*,*)'==============='
C
C             Se calcula el valor de la temperatura :
C
              CAL4 = - DISX**2 + DAT4 * DISX**(1.5)
              CAL5 = - DAT3 + SUMN
              CAL6 = 1.0 + ( CAL4 + CAL5 ) / ALFA
C
C             Calculo del valor de E'(-2s) :
C
              E2 = -2. * ESCS
C
              ECOF = EXP(E2)
C
C             Valor de la temperatura:
C
              TEMP = ECOF * CAL6
C
           ENDIF
C
        ENDIF
C
C     ============================================================
C       Impresion de resultados:
C
        WRITE(30,80)ASIGMA,ESCS,DISX,TEMP
C     ============================================================
C       Incremento de X :
C
        DISX = DISX + DELTX
C
        GO TO 10
C
      ENDIF
C
C     ============================================================
C     Seccion de formatos :
C
50    FORMAT(2X,'RESULTADOS DE LA PRUEBA PARA EL CASO LAMINAR',//)
60    FORMAT(2X,'VALOR DE ALFA EN LA PRUEBA :',1X,F6.1,/,
```

```
     @       2X,'  VALOR DEL TIEMPO EN LA PRUEBA :',1X,F5.2,/)
70    FORMAT(2X,'  SIGMA  ',2X,'  ESCS  ',2X,'  DISX  ',2X,' TEMP ',/)
80    FORMAT(3X,F6.2,2X,F7.3,2X,F7.3,2X,F8.4)
C
C     ============================================================
C
      END
C  $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
```

```
C
C     ************************************************************
C     ESTE PROGRAMA EVALUA EL VALOR DE LA TEMPERATURA SOBRE LA PLACA
C     EN FUNCION DE ALFA Y LA DISTANCIA X, PARA UN TIEMPO FIJO.
C
C     SOLUCION EMPLEANDO EL METODO DE LAS ESCALAS MULTIPLES
C     ************************************************************
C
C     version : 1.
C
C     fecha   : enero 1989
C
C     elaboro : A. Vallejo
C
C     ************************************************************
C
      PROGRAM ESMTTF
C
C     ============================================================
C
      DOUBLE PRECISION CAL1, VALN, SUMN, SUMV, CAL5, CAL6, ECOF, ERR
      DATA BETA/0.1449165/
      DATA DAT0/3.1416/,DAT1/0.625/,DAT2/0.694444/,DAT3/0.039682/
      DATA DAT4/0.7192203/,DAT5/2.6/
C
C     ============================================================
C     LECTURA DE DATOS DE ENTRADA:
C
      WRITE(*,*)'DEFINE EL VALOR DE ALFA :'
      READ(*,*)ALFA
      WRITE(*,*)'DEFINE EL VALOR DE LOS INCREMENTOS DE X :'
      READ(*,*)DELTX
      WRITE(*,*)'DEFINE EL VALOR DEL TIEMPO :'
      READ(*,*)TAO
C
C     ============================================================
C
      OPEN(UNIT=30,FILE="RESTU2",ACCESS="SEQUENTIAL",STATUS="OLD")
      WRITE(30,50)
      WRITE(30,60)ALFA,TAO
      WRITE(30,70)
C
C     ============================================================
C     Se inicializa el valor de X en cero:
C
      DISX = 0.0
C
C     Se inicia el ciclo para la evaluacion de la temperatura:
C
10    IF ( DISX .LE. 1.0 ) THEN
C
C        Calculo del valor de "SIGMA = t * ALFA":
C
         ASIGMA = TAO * ALFA
```

```
C
C        Calculo de la escala s = t * [ 1 - w / ALFA ]
C
         ESCS = TAO * ( 1. - BETA / ALFA )
C
C        Se inicia la sumatoria de los terminos que contienen los
C        valores caracteristicos :
C
         SUMN = 0.0
         SUMV = 0.0
         N = 1
         AN = 1.0
C
C        Calculo del valor caracteristico (ln) :
C
20       ALANDA = AN * DATO
C
C        Calculo del termino = (DAT4 / ln**ld/5) * (E^(-ln**2 * SIGMA))*
C                                  Cos(ln*x)
C
         IF ( ASIGMA .LT. 8.0 ) THEN
            E1 = - (ALANDA * ALANDA) * ASIGMA
            CAL1 = EXP(E1)
            CAL2 = DAT4 / (ALANDA**DAT5)
            CT1 = ALANDA * DISX
            CAL3 = COS(CT1)
            VALN = CAL1 * CAL2 * CAL3
         ELSE
            VALN = 0.0
         ENDIF
C
C        Se suman los terminos :
C
         IF ( AN .EQ. 1.0 ) THEN
            SUMN = VALN + SUMN
            SUMV = SUMN
            AN = AN + 1.0
            N = N + 1
            GO TO 20
         ELSE
            SUMN = SUMN + VALN
C
C           Se verifica el error permitido para la convergencia de la
C           serie de los valores caracteristicos :
C
            ERR = ABS(SUMV - SUMN)
C
            IF (ERR .GT. 0.01) THEN
               SUMV = SUMN
               AN = AN + 1.0
               N = N + 1
               GO TO 20
C
            ELSE
```

```
C
C            Se calcula el valor de la temperatura :
C
             CAL4 = - DAT1 * DISX**2 + DAT2 * DISX**(1.8)
             CAL5 = - DAT3 + SUMN
             CAL6 = 1.0 + ( CAL4 + CAL5 ) / ALFA
C
C            Calculo del valor de E^(-2s) :
C
             E2 = - (5./4.) * ESCS
C
             ECOF = EXP(E2)
C
C            Valor de la temperatura:
C
             TEMP = ECOF * CAL6
C
           ENDIF
         ENDIF
C
C     ============================================================
C        Impresion de resultados:
C
         WRITE(30,80)ASIGMA,ESCS,DISX,TEMP
C     ============================================================
C        Incremento de X :
C
         DISX = DISX + DELTX
C
         GO TO 10
       ENDIF
C
C     ============================================================
C     Seccion de formatos :
C
50    FORMAT(2X,'RESULTADOS DE LA PRUEBA PARA EL CASO TURBULENTO',//)
60    FORMAT(2X,'VALOR DE ALFA EN LA PRUEBA :',1X,F6.1,/,
     &       2X,'  VALOR DEL TIEMPO EN LA PRUEBA :',1X,F5.2,/)
70    FORMAT(2X,'  SIGMA  ',2X,'  ESCS  ',2X,'  DISX  ',2X,' TEMP ',/)
80    FORMAT(3X,F6.2,2X,F7.3,2X,F7.3,2X,F8.4)
C
C     ============================================================
C
      END
C  ****************************************************************
```

```
C
C     ***************************************************************
C
C     ESTE PROGRAMA EVALUA EL VALOR DE LA TEMPERATURA EN FUNCION DE
C     ALFA, TIEMPO Y DISTANCIA X PARA EL CASO DE FLUJO TURBULENTO
C     SOBRE UNA PLACA PLANA. LOS VALORES DE ALFA Y TAO SE CALCULAN
C     EN FUNCION DE VALORES LAMINARES.
C     SOLUCION EMPLEANDO EL METODO DE LAS ESCALAS MULTIPLES
C
C     ***************************************************************
C
C     version : 1.
C
C     fecha   : junio 1989
C
C     elaboro : A. Vallejo
C
C     ***************************************************************
C
      PROGRAM ESTUTF
C
C     ==============================================================
C
      DOUBLE PRECISION CAL1, VALN, SUMN, SUMV, CAL5, CAL6, ECOF, ERR
      DATA BETA/0.00072672/
      DATA DAT0/3.1416/,DAT1/0.625/,DAT2/0.694444/,DAT3/0.039682/
      DATA DAT4/0.71953/,DAT5/2.8/
C
C     ==============================================================
C     LECTURA DE DATOS DE ENTRADA:
C
      WRITE(*,*)'DEFINE EL VALOR DE ALFA LAMINAR:'
      READ(*,*)ALFA
      WRITE(*,*)'DEFINE EL VALOR DE X :'
      READ(*,*)DISX
      WRITE(*,*)'DEFINE EL VALOR FINAL DEL TIEMPO :'
      READ(*,*)TIEFIN
      WRITE(*,*)'DEFINE EL VALOR DE LOS INCREMENTOS DEL TIEMPO :'
      READ(*,*)DELTA
      WRITE(*,*)'DEF. EL VALOR DEL REYNOLDS:'
      READ(*,*)VREY
C
C     ==============================================================
C
      OPEN(UNIT=30,FILE="RESTUR",ACCESS="SEQUENTIAL",STATUS="OLD")
      WRITE(30,50)
      WRITE(30,60)ALFA,DISX
      WRITE(30,70)
C
C     ==============================================================
C     Se inicializa el valor de TAO en cero:
C
      TAO = 0.0
C
```

```
C     ALFA TURBULENTA:
C
      ALFA = (11.56794*ALFA)/(VREY**0.3)
C
C     Se inicia el ciclo para la evaluacion de la temperatura:
C
10    IF ( TAO .LT. TIEFIN ) THEN
C
C        Calculo del TAO turbulento:
C
         TAOT = 0.086d45 * (VREY**0.3) * TAO
C
C        Calculo del valor de "SIGMA = t * ALFA":
C
         ASIGMA = TAOT * ALFA
C
C        Calculo de la escala s = t * [ 1 + ( w ) / ALFA )
C
         ESCS = TAOT * ( 1. + BETA / ALFA )
C
C        Se inicia la sumatoria de los terminos que contienen los
C        valores caracteristicos :
C
         SUMN = 0.0
         SUMV = 0.0
         N = 1
         AN = 1.0
C
C        Calculo del valor caracteristico (ln) :
C
20       ALANDA = AN * DATO
C
C        Calculo del termino = (DAT4 / ln**14/5) * (E^(-ln**2 * SIGMA))*
C                                  Cos(ln*x)
         IF ( ASIGMA .LT. 8.0 ) THEN
            E1 = - (ALANDA * ALANDA) * ASIGMA
            CAL1 = EXP(E1)
            CAL2 = DAT4 / (ALANDA**DAT5)
            CT1 = ALANDA * DISX
            CAL3 = COS(CT1)
            VALN = CAL1 * CAL2 * CAL3
         ELSE
            VALN = 0.0
         ENDIF
C
C        Se suman los terminos :
C
         IF ( AN .EQ. 1.0 ) THEN
            SUMN = VALN + SUMN
            SUMV = SUMN
            AN = AN + 1.0
            N = N + 1
            GO TO 20
         ELSE
```

```
            SUMN = SUMN + VALN
C
C           Se verifica el error permitido para la convergencia de la
C           serie de los valores caracteristicos :
C
            ERR = ABS(SUMV - SUMN)
C
            IF (ERR .GT. 0.01) THEN
               SUMV = SUMN
               AN = AN + 1.0
               N = N + 1
               GO TO 20
            ELSE
C
C              Se calcula el valor de la temperatura :
C
               CAL4 = - DAT1 * DISX**2 + DAT2 * DISX**(1.8)
               CAL5 = - DAT3 + SUMN
               CAL6 = 1.0 + ( CAL4 + CAL5 ) / ALFA
C
C              Calculo del valor de E^(-2s) :
C
               E2 = -(5./4.) * ESCS
C
               ECOF = EXP(E2)
C
C              Valor de la temperatura:
C
               TEMP = ECOF * CAL6
            ENDIF
         ENDIF
C
C     ==========================================================
C        Impresion de resultados:
C
         WRITE(30,80)TAO,ASIGMA,ESCS,TEMP
C     ==========================================================
C        Incremento de tao :
C
         TAO = TAO + DELTA
         GO TO 10
      ENDIF
C
C     ==========================================================
C     Seccion de formatos :
C
50    FORMAT(2X,'RESULTADOS DE LA PRUEBA PARA EL CASO TURBULENTO',//)
60    FORMAT(2X,'VALOR DE ALFA EN LA PRUEBA :',1X,F6.1,/,
     @       2X,'  VALOR DE LA DISTANCIA X  :',1X,F5.2,/)
70    FORMAT(2X,'  TAO  ',2X,'  SIGMA  ',2X,'  ESCS  ',2X,' TEMP ',/)
80    FORMAT(3X,F6.2,2X,F7.3,2X,F7.3,2X,F8.4)
C     ==========================================================
C
      END
```

```
C
C     ****************************************************************
C
C     ESTE PROGRAMA EVALUA LA RELACION DE LA TEMPERATURA, PARA EL
C     CASO TURBULENTO, ENTRE LA TEMPERATURA, PARA EL CASO LAMINAR,
C     CONSIDERANDO UNICAMENTE LA PRIMERA APROXIMACION DEL METODO
C     ASINTOTICO.
C
C     ****************************************************************
C
C     version : 1.
C
C     fecha   : Febrero 1989
C
C     elaboro : A. Vallejo
C
C     ****************************************************************
C
      PROGRAM TELATU
C
C     ==============================================================
C
      DATA DAT1/2.0/,DAT2/1.25/,DAT3/0.086445/
C
C     ==============================================================
C     LECTURA DE DATOS DE ENTRADA:
C
      WRITE(*,*)'DEFINE EL VALOR DE REYNOLDS :'
      READ(*,*)CREYNO
      WRITE(*,*)'DEFINE EL VALOR FINAL DEL TIEMPO LAMINAR:'
      READ(*,*)TIEFIN
      WRITE(*,*)'DEFINE EL VALOR DE LOS INCREMENTOS DEL TIEMPO :'
      READ(*,*)DELTA
C
C     ==============================================================
C
      OPEN(UNIT=30,FILE="RESTULA",ACCESS="SEQUENTIAL",STATUS="OLD")
      WRITE(30,50)
      WRITE(30,60)CREYNO
      WRITE(30,70)
C
C     ==============================================================
C     Se inicializa el valor de TAO en cero:
C
      TAO = 0.0
C
C     Se inicia el ciclo para la evaluacion de la temperatura:
C
10    IF ( TAO .LT. TIEFIN ) THEN
C
C        Calculo del valor de "Re"(3/10)":
C
         E1 = 3./10.
         CAL1 = CREYNO**E1
```

```
C
C        Calculo del valor "2 - (5/4) * 0.086445 * Re**(3/10)";
C
         CAL2 = DAT1 - DAT2 * DAT3 * CAL1
C
C        Se calcula el valor de la temperatura :
C
         E2 = CAL2 * TAO
         TEMP = EXP(E2)
C
C     ============================================================
C        Impresion de resultados:
C
         WRITE(30,80)TAO,TEMP
C     ============================================================
C        Incremento de tao :
C
         TAO = TAO + DELTA
C
         GO TO 10
      ENDIF
C
C     ============================================================
C     Seccion de formatos :
C
50    FORMAT(2X,'RESULTADOS DE LA PRUEBA',//)
60    FORMAT(2X,'VALOR DEL REYNOLDS EN LA PRUEBA :',1X,F10.1,/)
70    FORMAT(2X,'  TAO  ',2X,' REL.TEMPS. ',/)
80    FORMAT(3X,F6.2,3X,F8.4)
C
C     ============================================================
C
      END
C  ****************************************************************
```

APENDICE B .- SOLUCION NUMERICA

El esquema numérico que se plantea en este apéndice, resuelve la ecuación integro-diferencial singular, para el caso laminar, utilizando el Método de Diferencias Finitas y aplicando un desarrollo de Taylor para el punto donde se presenta la singularidad.

El contenido de este apéndice, se ha dividido en las siguientes secciones:

- La primera parte presenta los conceptos básicos del Método de Diferencias Finitas.

- La segunda parte describe el desarrollo matemático para obtener la solución numérica de la ecuación integro-diferencial singular para el caso laminar.

- La tercera parte incluye el desarrollo matemático para obtener la solución numérica del tercer término de la Solución Asintótica, para el caso de flujo laminar sobre la placa plana.

- La cuarta parte presenta el esquema de solución considerado en la programación, para obtener los resultados de esta técnica numérica.

- La quinta parte incluye los listados de los programas utilizados para obtener los resultados de este esquema.

B1.- METODO DE DIFERENCIAS FINITAS.-

B1.1.- Conceptos Básicos.

Los métodos de diferencias finitas se definen como técnicas discretas numéricas donde el dominio de interes se representa por un conjunto de puntos o nodos y la información entre estos puntos se obtiene mediante expansiones de series de Taylor.

La técnica de diferencias finitas consiste, en forma breve, en subdividir el dominio de la ecuación diferencial en un número finito de puntos enmallados. La derivada de la función de cada punto se sustituye por una aproximación de diferencias finitas. Finalmente, se obtiene el valor de la función para cada punto.

La notación de lo anterior, se deduce a partir de u(x), una función continua de una sola variable independiente x. Discretizando el dominio x (ver figura No. B1) en un conjunto de puntos o nodos, tal que

$$u(x_r) \equiv u(rh) \equiv u_r \ , \quad r = 0,\ 1,\ 2, \ldots. \tag{B.1}$$

donde rh representa la coordenada del nodo, el entero r denota la posición del nodo a lo largo de la coordenada x con respecto a un dato específico , usualmente r = 0 para x = 0. El valor de h es constante y representa la distancia entre nodos.

Por otro lado, las expansiones de las series de Taylor son muy importantes en la formulación y clasificación de los esquemas de diferencias finitas. Por lo tanto, aplicando una expansión de la serie de Taylor para u(x), en el punto x_r,

$$u(x_r+h) = u(x_r) + hu_x\big|_r + \frac{h^2}{2!}\,u_{xx}\big|_r + \frac{h^3}{3!}\,u_{xxx}\big|_r + \ldots \tag{B.2a}$$

o

$$u(x_r-h) = u(x_r) - hu_x\big|_r + \frac{h^2}{2!}\,u_{xx}\big|_r - \frac{h^3}{3!}\,u_{xxx}\big|_r + \ldots \tag{B.2b}$$

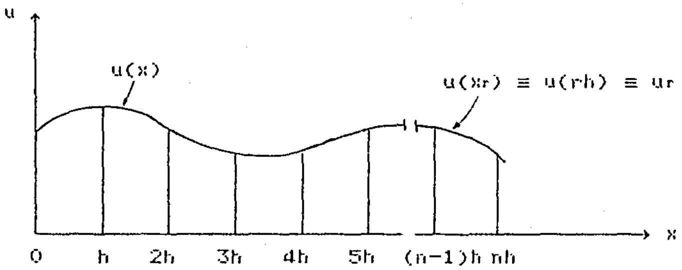

Figura No. B1.
Discretización de u = u(x) por diferencias finitas.

Rearreglando las ecuaciones anteriores, se obtiene

$$ux\big|_r = \frac{u(xr+h) - u(xr)}{h} - \frac{h}{2!}\,uxx\big|_r - \frac{h^2}{3!}\,uxxx\big|_r - \ldots \tag{B.3a}$$

$$ux\big|_r = \frac{u(xr) - u(xr-h)}{h} + \frac{h}{2!}\,uxx\big|_r - \frac{h^2}{3!}\,uxxx\big|_r + \ldots \tag{B.3b}$$

La expresión (B.3) define dos aproximaciones posibles para la primera derivada de u en xr,

$$ux\big|_r \approx \frac{u(xr+h) - u(xr)}{h} \equiv \frac{u_{r+1} - u_r}{h} \tag{B.4a}$$

$$ux\big|_r \approx \frac{u(xr) - u(xr-h)}{h} \equiv \frac{u_r - u_{r-1}}{h} \tag{B.4b}$$

La expresión (B.4a) se conoce como aproximación por diferencias finitas hacia adelante, y la (B.4b) hacia atras.

Debido al truncamiento de estas series, se presenta un error, Er, asociado a la aproximación. Este error puede caracterizarse por el primer y más grande término de la serie truncada, o sea

$$E_r = \pm \frac{h}{2!} u_{xx}\Big|_{\xi} = O(h), \qquad \begin{matrix} x_r \le \xi \le x_{r+h} \\ x_{r-h} \le \xi \le x_r \end{matrix} \tag{B.5}$$

Se dice que este error es de orden h, O(h), y representa un valor absoluto más pequeño que Ah (A es una constante) para h suficientemente pequeño.

Si se suman las ecuaciones (B.3a) y (B.3b) y se despeja el valor de $u_x|_r$, resulta la aproximación central

$$u_x\Big|_r = \frac{u_{r+1} - u_{r-1}}{2h} \tag{B.6}$$

con el primer término truncado igual a

$$-\frac{h^2}{6} u_{xxx}\Big|_{\xi}, \quad x_{r-1} \le \xi \le x_{r+1}$$

y entonces, la ecuación (B.6) es de $O(h^2)$. Restando (B.3a) de (B.3b) y resolviendo para $u_{xx}|_r$, se tiene

$$u_{xx}\Big|_r = \frac{u_{r+1} - 2u_r + u_{r-1}}{h^2} \tag{B.7}$$

donde también, la ecuación (B.7) es de $O(h^2)$.

Estos conceptos se pueden extender de manera directa, para aproximaciones de diferencias finitas en dos dimensiones, o sea u(x,y). Para esto, la figura B2 muestra una malla para una ecuación diferencial en dos dimensiones. De ésta se puede deducir lo siguiente,

$$\frac{\partial u_{r,s}}{\partial x} \equiv u_x\Big|_r^s = \frac{u_{r+1}^s - u_r^s}{h} + O(h) \tag{B.8a}$$

$$\frac{\partial u_{r,s}}{\partial y} \equiv u_y\Big|_r^s = \frac{u_r^{s+1} - u_r^s}{k} + O(k) \tag{B.8b}$$

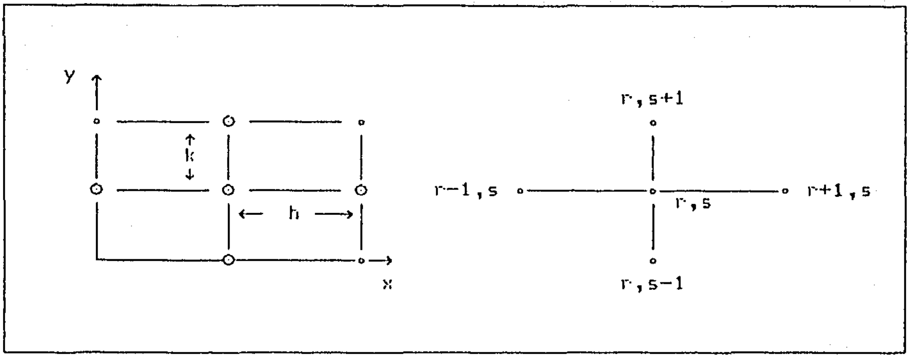

Figura No. B2.
Enmallado para una aproximación de Diferencias Finitas
en dos dimensiones.

En la aproximación para $ux|_r^s$, el índice s es constante (y = constante), mientras que en $uy|_r^s$, el índice r es constante (x = constante).

La segunda derivada de la función u(x,y), se obtiene en forma semejante que para u(x), es decir,

$$uxx\Big|_r^s = \frac{u_{r+1}^s - 2u_r^s + u_{r-1}^s}{h^2} + O(h^2) \qquad \text{(B.9a)}$$

$$uyy\Big|_r^s = \frac{u_r^{s+1} - 2u_r^s + u_r^{s-1}}{k^2} + O(k^2) \qquad \text{(B.9b)}$$

La tabla B1 muestra un resumen de algunas derivadas que se pueden obtener por aproximaciones de diferencias finitas, siguiendo los pasos descritos anteriormente.

Otro concepto importante en las aproximaciones por diferencias finitas, es el de manejar derivadas mezcladas. Suponiendo que se requiere representar por diferencias finitas a uxy:

Tabla No. B1.
Aproximaciones por Diferencias Finitas para dos variables independientes ($h = k$).

Derivada	Aproximación por diferencias finitas	Orden de error
$ux\big\|_r^s$	$\dfrac{u_r^{s+1} + u_r^s}{h}$	$O(h)$
	$\dfrac{u_r^s - u_{r-1}^s}{h}$	$O(h)$
	$\dfrac{u_{r+1}^s - u_{r-1}^s}{h^2}$	$O(h^2)$
	$\dfrac{-u_{r+2}^s + 4u_{r+1}^s - 3u_r^s}{2h}$	$O(h^2)$
$uxx\big\|_r^s$	$\dfrac{u_{r+1}^s - 2u_r^s + u_{r-1}^s}{h^2}$	$O(h^2)$
$uxy\big\|_r^s$	$\dfrac{u_{r+1}^{s+1} - u_{r+1}^{s-1} - u_{r-1}^{s+2} + u_{r-1}^{s-1}}{4h^2}$	$O(h^2)$

$$uxy\Big|_r^s = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big|_r^s = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_r^s\right] \tag{B.10}$$

Una representación por diferencias finitas de la ecuación anterior, se puede deducir a partir de la ecuación (B.6),

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_r^s\right] = \frac{1}{2h}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{r+1}^s - \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{r-1}^s\right] + O(h^2) \tag{B.11}$$

La derivada con respecto a y se aproxima en forma análoga:

$$uxy\Big|_r^s = \frac{1}{2h}\left[\frac{u_{r+1}^{s+1} - u_{r+1}^{s-1}}{2k} + \frac{k^2}{3!}\, uyyy\Big|_{r+1}^s + \ldots\ldots\right.$$

$$- \frac{u_{r-1}^{s+1} - u_{r-1}^{s-1}}{2k} - \frac{k^2}{3!} uyyy\Big|_{r-1}^{s} + \ldots \Bigg] + O(h^2) \qquad (B.12)$$

Introduciendo ahora una aproximación por diferencias centrales de la forma,

$$uxyyy\Big|_r^s = \frac{1}{2h} \left\{ uyyy\Big|_{r+1}^{s} - uyyy\Big|_{r-1}^{s} \right\} + O(h^2) \qquad (B.13)$$

y sustituyendo en la ecuación anterior, resulta

$$uxy\Big|_r^s = \frac{1}{2h} \left[\frac{u_{r+1}^{s+1} - u_{r-1}^{s+1} - u_{r+1}^{s-1} + u_{r-1}^{s-1}}{2k} \right] + O(h^2 + k^2) \qquad (B.14)$$

En general, las aproximaciones por diferencias finitas en 2-dimensiones pueden extenderse en una forma directa al espacio de 3-dimensiones o al espacio de 3-dimensiones y el tiempo.

De lo anterior se puede deducir que para cualquier ecuación diferencial parcial existen muchas posibles representaciones de diferencias finitas y se prefieren aquellos esquemas con errores de truncamiento locales pequeños.

A continuación se deducen algunas de estas aproximaciones para las ecuaciones parciales de tipo parabólico, debido a que la ecuación integro-diferencial, deducida en el capítulo II, pertenece a este tipo. Por lo tanto, tomando como base el siguiente modelo parabólico,

$$ux = uyy \qquad (B.15)$$

se evalúan diferentes aproximaciones para resolver este tipo de ecuaciones.

Estas aproximaciones se clasifican en dos tipos: explícitas e implícitas. El método explícito evalúa el valor de la función a partir de cantidades que ya son conocidas. Este método es simple y económico en lo que respecta al esfuerzo de cálculo, pero está muy limitado en cuanto a su estabilidad numérica.

En el método implícito, la evaluación de la función no solo depende de términos conocidos, sino que también considera valores adyacentes de la función, que son desconocidos. Para conocer los valores de la función se necesita resolver un sistema de ecuaciones simultáneas para cada intervalo de tiempo.

La nomenclatura para deducir estas aproximaciones se obtiene a partir de la ecuación (B.14). Considerando que u(x,y) es continua y que tiene suficientes derivadas, es simple mostrar por repetidas diferenciaciones que,

$$u_{x} = u_{yy}, \quad u_{xx} = u_{yyyy}, \quad u_{xxx} = u_{yyyyyy}, \quad \ldots, \quad u_{mx} = u_{2my} \qquad (B.16)$$

Desarrollando una serie de Taylor en torno a u^{s}_{r}, resulta

$$u^{s}_{r+1} = u^{s}_{r} + hu_x\Big|^{s}_{r} + \frac{h^2}{2}\, u_{xx}\Big|^{s}_{r} + \frac{h^3}{6}\, u_{xxx}\Big|^{s}_{r} + \ldots\ldots\ldots \qquad (B.17)$$

usando (B.16) y $h = \rho k^2$ se tiene

$$u^{s}_{r+1} = u^{s}_{r} + \rho B + \frac{1}{2}\rho^2 D + \ldots\ldots \qquad (B.18)$$

donde

$$B = k^2 u_{yy}\Big|^{s}_{r} \quad \text{y} \quad D = k^4 u_{yyyy}\Big|^{s}_{r}$$

De la misma manera, se puede derivar lo siguiente;

$$u^{s}_{r\pm1} = u \pm \rho B + \frac{1}{2}\rho^2 D \pm \frac{1}{6}\rho^3 F + \frac{1}{24}\rho^4 H \pm \frac{1}{120}\rho^5 J + \ldots \qquad (B.19)$$

$$u^{s+1}_{r} + u^{s-1}_{r} = 2u + B + \frac{1}{12} D + \frac{1}{360} F + \frac{1}{20160} H + \frac{1}{1814400} J + \ldots\ldots$$

$$(B.20)$$

$$u_r^{s+2} + u_r^{s-2} = 2u + 4B + \frac{4}{3} D + \frac{8}{45} F + \frac{4}{315} H + \frac{8}{14175} J + .. \quad (B.21)$$

donde F,H,... se definen como k^6uyyyyyy, k^8uyyyyyyyy,....

Por el uso directo de la serie de Taylor o por una combinación de las expansiones anteriores, se pueden desarrollar aproximaciones por diferencias finitas para el modelo parabólico (B.15). A continuación se calculan algunas de las posibles combinaciones.

B1.2.- Aproximación Explícita Clásica.

Multiplicando la ecuación (B.20) por ρ y restando el resultado de (B.19), se tiene

$$u_{r+1}^{s} = (1 - 2\rho)\, u_r^{s} + \rho\, (u_r^{s+1} + u_r^{s-1}) + \frac{1}{2} \rho\, (\rho - \frac{1}{6})\, D + \frac{1}{6} \rho\, *$$

$$(\rho^2 - \frac{1}{60})\, F + ... \quad (B.22)$$

Esta forma de diferencias finitas se conoce como Aproximación Explícita Clásica,

$$u_{r+1}^{s} = (1 - 2\rho)\, u_r^{s} + \rho\, (u_r^{s+1} + u_r^{s-1}) \quad (B.23)$$

donde el error local de truncamiento tiene su parte principal igual a (1/2) ρ (ρ - 1/6) D. Con esto, se dice que la ecuación (B.23) es $O(h^2 + kh^2)$ o $O(h + k^2)$.

La figura B3 muestra los puntos de la malla correspondientes a esta aproximación, y en la cual se observa que u_{r+1}^{s} puede calcularse a partir de los tres puntos inferiores, u_r^{s-1}, u_r^{s} y u_r^{s+1}.

Con base en este modelo, la ecuación (B.15) puede aproximarse por la expresión,

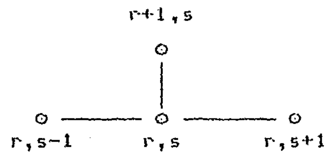

Figura No. B3.

Esquema de la Aproximación Explícita Clásica.

$$u_x - u_{yy} = 0 \approx \frac{u^s_{r+1} - u^s_r}{h} - \frac{u^{s+1}_r - 2u^s_r + u^{s-1}_r}{k^2} \qquad (B.24)$$

B1.3.- Aproximación Implícita de Crank-Nicolson.

La aproximación implícita de Crank-Nicolson se define como,

$$2\,(\rho + 1)\,u^s_{r+1} - \rho\,(u^{s+1}_{r+1} + u^{s-1}_{r+1}) = 2\,(1 - \rho)\,u^s_r + \rho\,(u^{s+1}_r + u^{s-1}_r) \qquad (B.25)$$

La figura B4 muestra el esquema de esta aproximación implícita. El error de truncamiento para la expresión anterior es $-\,(hk^2 / 12)u_{4y}$, y por lo tanto, la aproximación es $O(h^3 + hk^2)$.

Aplicando este esquema a la ecuación parabólica (B.15), se obtiene,

$$u_x - u_{yy} = 0 = \frac{u^s_{r+1} - u^s_r}{h} - \frac{(u^{s+1}_{r+1} - 2u^s_{r+1} + u^{s-1}_{r+1}) + (u^{s+1}_r - 2u^s_r + u^{s-1}_r)}{2k^2} \qquad (B.26)$$

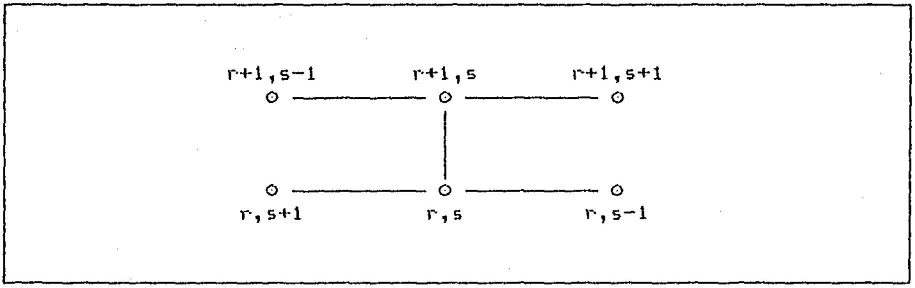

Figura No. B4.
Esquema de la Aproximación de Crank-Nicolson.

Obsérvese que la función u^{s}_{r+1} no está dada directamente como dependiente de las funciones del tiempo anterior, sino que también depende de las funciones desconocidas en posiciones adyacentes.

Una ventaja de este método es la de ser estable para cualquier valor de h y k, aunque para valores pequeños es más preciso.

Deducidas estas expresiones, el siguiente paso consiste en aplicarlas a la ecuación integro-diferencial del capítulo II de este trabajo.

B2.- SOLUCION DE LA ECUACION INTEGRO-DIFERENCIAL.

B2.1.- Solución Numérica de la Ecuación Integro-Diferencial.

La ecuación integro diferencial (2.24) deducida en el capítulo II, se resuelve con el Método de diferencias finitas expuesto anteriormente. Para esto, se utiliza la aproximación implícita de Crank-Nicolson.

La ecuación integro-diferencial es;

$$-\frac{\partial\theta}{\partial\tau} + \alpha\frac{\partial^2\theta}{\partial\chi^2} = \frac{\theta_l}{\sqrt{\chi}} + \frac{1}{\sqrt{\chi}}\int_0^{\chi}\left[1-\left(\frac{\bar{\chi}}{\chi}\right)^{3/4}\right]^{-1/3}\frac{d\theta}{d\bar{\chi}}\,d\bar{\chi} \qquad (B.27)$$

con condiciones de frontera e iniciales:

$$\frac{\partial\theta}{\partial\chi} = 0 \qquad \text{para} \quad \chi = 0 \text{ y } \chi = 1 \qquad (B.28a)$$

$$\theta = 1 \qquad \text{para } \tau \le 0 \qquad (B.28b)$$

Antes de aplicar la aproximación de Crank-Nicolson a la ecuación (B.27), primero se resuelve la parte integral de la misma, empleando el esquema numérico que se describe en la referencia [21], para una integral semejante.

Por lo tanto, para evaluar la integral,

$$f(\chi) = \frac{1}{\sqrt{\chi}}\int_0^{\chi}\left[1-\left(\frac{\bar{\chi}}{\chi}\right)^{3/4}\right]^{-1/2}\frac{d\theta}{d\bar{\chi}}\,d\bar{\chi} \qquad (B.29)$$

primero se hace el siguiente cambio de variable,

$$Z = \chi^{3/4} \qquad (B.30)$$

que sustituyendo en (B.29), se obtiene

$$f(Z) = \frac{1}{Z^{1/3}}\int_0^{Z}\frac{d\theta}{d\bar{Z}}\,\frac{d\bar{Z}}{(Z-\bar{Z})^{1/3}} \qquad (B.31)$$

Considerando incrementos ΔZ para la coordenada Z, se puede definir la posición del punto N como $N\Delta Z$. Con esto, la ecuación (B.31) cambia a

$$f(N\Delta Z) = \frac{1}{(N\Delta Z)^{1/3}} \sum_{K=1}^{N} \left(\frac{d\theta}{d\bar{Z}} \right)_K \int_{(K-1)\Delta Z}^{K\Delta Z} \frac{d\bar{Z}}{(Z - \bar{Z})^{1/3}} \qquad (B.32)$$

La integral de la ecuación anterior se resuelve considerando el siguiente cambio de variable,

$$u = (Z - \bar{Z})^{1/3} \qquad (B.33)$$

con el cual, la integral de la ecuación (B.32) es igual a

$$\int_{(K-1)\Delta Z}^{K\Delta Z} \frac{d\bar{Z}}{(Z - \bar{Z})^{1/3}} = -\,3 \int u \; du = -\,\frac{3}{2}\,u^2 =$$

$$= -\,\frac{3}{2}\,(Z - \bar{Z})^{2/3} \Bigg|_{(K-1)\Delta Z}^{K\Delta Z} \qquad (B.34)$$

Con la ecuación (B.34) en la (B.32) se tiene

$$f(N\Delta Z) = \frac{1}{(N\Delta Z)^{1/3}} \sum_{K=1}^{N} \left(\frac{d\theta}{d\bar{Z}} \right)_K * \left(-\,\frac{3}{2} \right) * \Big[(N\Delta Z - K\Delta Z)^{2/3} - [N\Delta Z - (K - 1)\,\Delta Z]^{2/3} \Big] \qquad (B.35)$$

simplificando

$$f(N\Delta Z) = -\,\frac{3}{2} * \frac{\Delta Z^{2/3}}{(N\Delta Z)^{1/3}} \sum_{K=1}^{N} \left(\frac{d\theta}{d\bar{Z}} \right)_K \Big[(N - K)^{2/3} - (N - K + 1)^{2/3} \Big] \qquad (B.36)$$

La derivada $d\theta/d\bar{Z}$ puede aproximarse por diferencias finitas mediante la forma implícita de Crank-Nicolson,

$$\left(\frac{d\theta}{d\bar{Z}} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{\theta_{K+1}^{t+1} - \theta_{K-1}^{t+1}}{2\Delta Z} + \frac{\theta_{K+1}^{t} - \theta_{K-1}^{t}}{2\Delta Z} \right] \qquad (B.37)$$

y sustituyendo en (B.36)

$$f(N\Delta Z) = -\frac{3}{8}\,\frac{\Delta Z^{-1/3}}{(N\Delta Z)^{1/3}} \sum_{K=1}^{N} \left[\left(\theta_{K+1}^{l+1} - \theta_{K-1}^{l+1} \right) + \left(\theta_{K+1}^{l} - \theta_{K-1}^{l} \right) \right] *$$

$$\left[(N - K)^{2/3} - (N - K + 1)^{2/3} \right] \qquad \text{(B.38)}$$

El siguiente paso consiste en aplicar a la ecuación (B.27), el método implícito de Crank-Nicolson deducido en la sección anterior. Sustituyendo primero la expresión (B.38) en (B.27) se tiene :

$$-\frac{\partial\theta}{\partial\tau} + \alpha\,\frac{\partial^2\theta}{\partial\chi^2} = \frac{\theta l}{\sqrt{\chi}} - \frac{3}{8}\,\frac{\Delta Z^{1/3}}{(N\Delta Z)^{1/3}} \sum_{K=1}^{N} \left[\left(\theta_{K}^{l+1} - \theta_{K-1}^{l+1} \right) + \right.$$

$$\left. \left(\theta_{K}^{l} - \theta_{K-1}^{l} \right) \right] \left[(N - K)^{2/3} - (N - K + 1)^{2/3} \right] \qquad \text{(B.39)}$$

Aplicando la aproximación hacia adelante (ecuación B.4a) para $\partial\theta/\partial\tau$,

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \frac{\theta_N^{l+1} + \theta_N^{l}}{\Delta\tau} \qquad \text{(B.40)}$$

Para aplicar la aproximación por diferencias finitas para la derivada parcial $\partial^2\theta/\partial\chi^2$, primero se cambia la coordenada χ por Z, o sea

$$Z = \chi^{3/4}$$

la derivada $\partial^2\theta/\partial\chi^2$ cambia a;

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\chi^2} = -\frac{3}{16}\,Z^{-5/3}\,\frac{\partial\theta}{\partial Z} + \frac{9}{16}\,Z^{-2/3}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial Z^2} \qquad \text{(B.41)}$$

Aplicando las aproximaciones por diferencias finitas centrales, según el método implícito de Crank-Nicolson, se tiene,

$$\frac{\partial\theta}{\partial Z} = \frac{1}{2}\left[\frac{\theta_{N+1}^{t+1} - \theta_{N-1}^{t+1}}{2\Delta Z} + \frac{\theta_{N+1}^{t} - \theta_{N-1}^{t}}{2\Delta Z}\right] \qquad (B.42)$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial Z^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\theta_{N+1}^{t+1} - 2\theta_{N}^{t+1} + \theta_{N-1}^{t+1}}{\Delta Z^2} + \frac{\theta_{N+1}^{t} - 2\theta_{N}^{t} + \theta_{N-1}^{t}}{\Delta Z^2}\right] \qquad (B.43)$$

sustituyendo (B.42) y (B.43) en (B.41)

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\chi^2} = -\frac{3}{16} Z^{-5/3}\frac{1}{4}\left[\frac{\theta_{N+1}^{t+1} - \theta_{N-1}^{t+1}}{\Delta Z} + \frac{\theta_{N+1}^{t} - \theta_{N-1}^{t}}{\Delta Z}\right] + \frac{9}{16} Z^{-2/3} *$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\theta_{N+1}^{t+1} - 2\theta_{N}^{t+1} + \theta_{N-1}^{t+1}}{\Delta Z^2} + \frac{\theta_{N+1}^{t} - 2\theta_{N}^{t} + \theta_{N-1}^{t}}{\Delta Z^2}\right] \qquad (B.44)$$

Aplicando (B.44) y (B.40) en (B.39), considerando $\chi = Z^{4/3}$ y $Z = N\Delta Z$, se obtiene

$$-\frac{\theta_0^{t+1}}{(N\Delta Z)^{2/3}} + \left[\frac{9\alpha}{32}\frac{(N\Delta Z)^{-2/3}}{\Delta Z^2} + \frac{3\alpha}{64}\frac{(N\Delta Z)^{-5/3}}{\Delta Z}\right]\theta_{N-1}^{t+1} + \left[-\frac{1}{\Delta\tau} - \frac{9\alpha}{16} *\right.$$

$$\left.\frac{(N\Delta Z)^{-2/3}}{\Delta Z^2}\right]\theta_N^{t+1} + \left[\frac{9\alpha}{32}\frac{(N\Delta Z)^{-2/3}}{\Delta Z^2} - \frac{3\alpha}{64}\frac{(N\Delta Z)^{-5/3}}{\Delta Z}\right]\theta_{N+1}^{t+1} + \frac{3}{8}\frac{1}{N^{1/3}\Delta Z^{2/3}}$$

$$* \sum_{K=1}^{N}\left(\theta_{K+1}^{t+1} - \theta_{K-1}^{t+1}\right)\left[(N-K)^{2/3} - (N-K+1)^{-2/3}\right] = -\frac{\theta_N^{t}}{\Delta\tau} - \frac{9\alpha}{32} *$$

$$\frac{(N\Delta Z)^{-2/3}}{\Delta Z^2}\left[\theta_{N+1}^{t} - 2\theta_{N}^{t} + \theta_{N-1}^{t}\right] + \frac{3\alpha}{64}\frac{(N\Delta Z)^{-5/3}}{\Delta Z}\left[\theta_{N+1}^{t} - \theta_{N-1}^{t}\right] - \frac{3}{8}$$

$$* \frac{1}{N^{1/3}\Delta Z^{2/3}}\sum_{K=1}^{N}\left(\theta_{K+1}^{t} - \theta_{K-1}^{t}\right)\left[(N-K)^{2/3} - (N-K+1)^{2/3}\right] \qquad (B.45)$$

B2.2.-.- Condiciones de Frontera e Iniciales.

En este punto se obtienen las aproximaciones por diferencias finitas de las condiciones de frontera definidas en (B.28).

Por lo tanto, para la condición de frontera en $\chi = 0$, se tiene que la ecuación integro-diferencial (B.27) presenta una singularidad. Esto impide que se pueda aplicar la expresión (B.45) deducida anteriormente.

Para evitar dicha singularidad, la ecuación (B.27) se puede expresar, para $\chi = 0$, como,

$$-\frac{\partial\theta}{\partial\tau} + \alpha\frac{\partial^2\theta}{\partial\chi^2} = \frac{\theta_L}{\sqrt{\chi}} \tag{B.46}$$

considerando el cambio de variable $Z = \chi^{3/4}$, se tiene

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \alpha\frac{\partial^2\theta}{\partial\chi^2} - \frac{\theta_L}{\sqrt{\chi}} = \frac{9\alpha}{16}\left[Z^{-2/3}\frac{\partial^2\theta}{\partial Z^2} - \frac{1}{3}Z^{-5/3}\frac{\partial\theta}{\partial Z}\right] - \frac{\theta}{Z^{2/3}} \tag{B.47}$$

para $Z = 0$, la condición de frontera establece $\partial\theta_o/\partial Z = 0$ y la ecuación anterior se reduce a

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \frac{9\alpha}{16}\left[Z^{-2/3}\frac{\partial^2\theta}{\partial Z^2}\right] - \frac{\theta}{Z^{2/3}} \tag{B.48}$$

La singularidad en $Z = 0$ se puede evitar considerando un desarrollo de Taylor en la vecindad de este punto, o sea;

$$\theta_1(\Delta Z) = \theta_o + \Delta Z\,\theta_o' + \frac{\Delta Z^2}{2!}\theta_o'' + \ldots.. \tag{B.49}$$

y con la condición de frontera $\theta_o' = 0$,

$$\theta_1(\Delta Z) = \theta_o + \frac{\Delta Z^2}{2!}\theta_o'' + \ldots. \tag{B.50}$$

Despejando $\theta o''$ y sustituyendo en (B.48),

$$Z^{2/3}\,\frac{\partial \theta o}{\partial \tau} = \frac{9}{8}\,\alpha\left[\frac{\theta_1 - \theta o}{\Delta Z^2}\right] - \theta o \tag{B.51}$$

para el punto Z = 0, la ecuación (B.51) se reduce a;

$$\theta o = \frac{9\ \alpha}{8\Delta Z^2}\,(\ \theta_1 - \theta o) \tag{B.52}$$

de esta expresión resulta una aproximación para evaluar θ en Z = 0, esto es

$$\theta o = \frac{9\alpha}{8\Delta Z^2 + 9\alpha}\,\theta_1 \tag{B.53}$$

La otra condición de frontera en Z = 1, es

$$\frac{\partial \theta}{\partial Z} = 0 \tag{B.54}$$

Debido a que la expresión (B.45) define un punto (Z = 1. + ΔZ) más alla del límite de la placa, es necesario establecer otra ecuación para eliminar a dicho punto. Esta ecuación se obtiene de la condición de frontera (B.54) y de una aproximación por diferencias finitas centrales. La expresión es

$$\frac{\partial \theta}{\partial Z} = \frac{\theta_{1+\Delta z} - \theta_{1-\Delta z}}{2\Delta Z} = 0 \tag{B.55}$$

de donde se deduce:

$$\theta_{1+\Delta z} = \theta_{1-\Delta z} \tag{B.56}$$

Finalmente, la condición inicial para la ecuación (B.45) es,

$$\theta(Z) = 1 \qquad \text{para} \quad \tau = 0 \tag{B.57}$$

B3.- EVALUACION DEL TERCER TERMINO DE LA EXPANSION ASINTOTICA.

B3.1.- Solución Numérica del Tercer Término de la Expansión Asintótica.

En esta sección se presenta la solución numérica del tercer término de la solución asintótica (3.92) deducida en el capítulo III, para el caso laminar. La finalidad de esta solución es permitir comparar los resultados deducidos con una expansión de 2 y 3 términos.

Para esto, se parte de la ecuación (3.92) deducida en el capítulo III, o sea

$$-\frac{\partial\theta_2}{\partial\sigma}+\frac{\partial^2\theta_2}{\partial\chi^2}=-2\,e^{-2s}\left\{0.009893-\chi^2+\frac{4}{3}\chi^{3/2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{10\sqrt{\chi}}+\right.$$

$$\left.\frac{1}{\sqrt{\chi}}\int_0^{\chi}\left[1-\left(\frac{\bar{\chi}}{\chi}\right)^{3/4}\right]^{-1/3}\left(\bar{\chi}-\bar{\chi}^{\,1/2}\right)d\bar{\chi}\right\}-2\,e^{-2s}\sqrt{2\pi}\,*$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Exp}(-\lambda n^2\sigma)}{\lambda n^{5/2}}\left\{\mathrm{Cos}(\lambda n\chi)-\frac{1}{2\sqrt{\chi}}+\frac{\lambda n}{2\sqrt{\chi}}\int_0^{\chi}\left[1-\left(\frac{\bar{\chi}}{\chi}\right)^{3/4}\right]^{-1/3}*\right.$$

$$\left.\mathrm{Sen}(\lambda n\bar{\chi})\,d\bar{\chi}\right\} \qquad (B.58)$$

Considerando que la solución tiene la forma siguiente:

$$\theta_2=\theta_0*\Phi(\chi,\sigma) \qquad (B.59)$$

y sustituyendo en (B.58),

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\chi^2}=-2\left\{0.009893-\chi^2+\frac{4}{3}\chi^{3/2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{10\sqrt{\chi}}+\frac{1}{\sqrt{\chi}}\ *\right.$$

$$\left.\int_0^{\chi}\left[1-\left(\frac{\bar{\chi}}{\chi}\right)^{3/4}\right]^{-1/3}\left(\bar{\chi}-\bar{\chi}^{\,1/2}\right)d\bar{\chi}\right\}-2\sqrt{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Exp}(-\lambda n^2\sigma)}{\lambda n^{5/2}}\ *$$

$$\left\{\mathrm{Cos}(\lambda n\chi)-\frac{1}{2\sqrt{\chi}}+\frac{\lambda n}{2\sqrt{\chi}}\int_0^{\chi}\left[1-\left(\frac{\bar{\chi}}{\chi}\right)^{3/4}\right]^{-1/3}\mathrm{Sen}(\lambda n\bar{\chi})\ d\bar{\chi}\right\} \quad (B.60)$$

Para resolver la ecuación anterior, primero se deduce el valor numérico de las siguientes integrales,

$$\int_0^{\chi}\left[1-\left(\frac{\bar{\chi}}{\chi}\right)^{3/4}\right]^{-1/3}\left(\bar{\chi}-\bar{\chi}^{\,1/2}\right)d\bar{\chi} \quad (B.61)$$

definiendo,

$$u=\left(\frac{\bar{\chi}}{\chi}\right)^{3/4} \quad (B.62a)$$

$$\bar{\chi}=\chi\ u^{4/3} \quad (B.62b)$$

$$d\bar{\chi}=\frac{4}{3}\chi\ u^{1/3}\ du \quad (B.62c)$$

y sustituyendo en (B.61)

$$\frac{4}{3}\chi^2\int_0^1\frac{u^{5/3}}{(1-u)^{1/3}}\,du-\frac{4}{3}\chi^{3/2}\int_0^1\frac{u}{(1-u)^{1/3}}\,du \quad (B.63)$$

Aplicando la función Beta a las integrales en (B.63), se tiene

$$\int_0^{\chi}\left[1-\left(\frac{\bar{\chi}}{\chi}\right)^{3/4}\right]^{-1/3}\left(\bar{\chi}-\bar{\chi}^{\,1/2}\right)d\bar{\chi}=0.9750266\chi^2-1.2\chi^{3/2} \quad (B.64)$$

Para la solución de la integral,

$$\int_0^{\chi}\left[1-\left(\frac{\bar{\chi}}{\chi}\right)^{3/4}\right]^{-1/3}\mathrm{Sen}(\lambda n\bar{\chi})\, d\bar{\chi} \tag{B.65}$$

primero se aplica el cambio de variable definido en (B.62), o sea

$$\int_0^{\chi}\left[1-\left(\frac{\bar{\chi}}{\chi}\right)^{3/4}\right]^{-1/3}\mathrm{Sen}(\lambda n\bar{\chi})d\bar{\chi} = \frac{4}{3}\chi\int_0^1 \frac{u^{1/3}\mathrm{Sen}(\chi\lambda n u^{1/3})}{(1-u)^{1/3}}\, du \tag{B.66}$$

La integral anterior presenta una singularidad para el límite $u = 1$, lo cual se puede evitar si se considera una aproximación del valor $u = 1 - \varepsilon$ (donde $\varepsilon \longrightarrow 0$). Para poder aplicar este límite, primero es necesario comprobar que la integral es convergente de acuerdo con el teorema definido en la referencia [22], y que es el siguiente,

Si $\lim\limits_{x\longrightarrow a} (x - a)^p f(x) = A$, entonces

$\int_a^b f(x)\, dx$ es convergente si $p < 1$ y A es finita.

Aplicando el teorema anterior a la integral (B.66), se tiene

$$\lim_{u\longrightarrow 1}\left[(1-u)^{1/3}\frac{u^{1/3}\ \mathrm{Sen}(\chi\lambda n u^{1/3})}{(1-u)^{1/3}}\right] = \mathrm{Sen}(\chi\lambda n) \tag{B.67}$$

donde $p = 1/3 < 1$ y $A = \mathrm{Sen}(\chi\lambda n)$. El valor de A es finito para cualquier valor de $0 \leq \chi \leq 1$ y por lo tanto, la integral se considera convergente.

Debido a la complejidad de la integral (B.66), ésta se resuelve numéricamente empleando la regla trapezoidal, o sea,

$$\int_0^{1-h}\frac{u^{1/3}\mathrm{Sen}(\chi\lambda n u^{1/3})}{(1-u)^{1/3}}\, du = \frac{h}{2.0}\Big[f_0(u_0,\chi) + 2f_1(u_1,\chi) + 2f_2(u_2,\chi) + \ldots + 2f_{m-1}(u_{m-1},\chi) + f_m(u_m,\chi)\Big] =$$

$$\frac{h}{2.0}\left[f_o(u_o,\chi) + f_m(u_m,\chi) + 2\sum_{i=0}^{(m-1)} f_{1-i}(u_{1-i},\chi) \right] \quad (B.68)$$

donde,

$$f_m(u_m,\chi) = \frac{u_m^{1/3}\mathrm{Sen}(\chi\lambda n u_m^{1/3})}{(1 - u_m)^{1/3}}$$

Sustituyendo (B.64) y (B.68) en (B.60) se tiene

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\chi^2} = -2\left\{ 0.009893 - \chi^2 + \frac{4}{3}\chi^{3/2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{10\sqrt{\chi}} + \right.$$

$$\left. 0.9750266\ \chi^{3/2} - 1.2\ \chi \right\} - 2\sqrt{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Exp}(-\lambda n^2\sigma)}{\lambda n^{5/2}} * \left\{ \mathrm{Cos}(\lambda n\chi) - \right.$$

$$\left. \frac{1}{2\sqrt{\chi}} + \frac{\lambda n\chi^{1/2}h}{3}\left[f_o(u_o,\chi) + f_m(u_m,\chi) + 2\sum_{i=0}^{(m-1)} f_{1-i}(u_{1-i},\chi) \right] \right\} \quad (B.69)$$

simplificando términos,

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\chi^2} = 0.3800213 + 2\ \chi^2 - 4.6167199\ \chi^{3/2} - \frac{1}{5\sqrt{\chi}} + 2.4\ \chi -$$

$$2\sqrt{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Exp}(-\lambda n^2\sigma)}{\lambda n^{5/2}} * \left\{ \mathrm{Cos}(\lambda n\chi) - \frac{1}{2\sqrt{\chi}} + \frac{\lambda n\chi^{1/2}h}{3}\left[f_o(u_o,\chi) \right.\right.$$

$$\left.\left. + f_m(u_m,\chi) + 2\sum_{i=0}^{(m-1)} f_{1-i}(u_{1-i},\chi) \right] \right\} \quad (B.70)$$

Esta ecuación se resuelve empleando el método implícito de Crank-Nicolson, definido en la sección B1.3. Para esto, primero se aplican las siguientes aproximaciones por diferencias-finitas;

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = \frac{\Phi_N^{t+1} - \Phi_N^{t}}{\Delta \sigma} \tag{B.71}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \chi^2} = \frac{(\Phi_{N+1}^{t+1} - 2\Phi_N^{t+1} + \Phi_{N-1}^{t+1}) + (\Phi_{N+1}^{t} - 2\Phi_N^{t} + \Phi_{N-1}^{t})}{2\,\Delta\chi^2} \tag{B.72}$$

donde; $\chi_N = N\,\Delta\chi$

$\sigma_t = t\,\Delta\sigma$

N = representa el punto a evaluar en la dirección χ

t = representa el punto a evaluar en la dirección σ

Sustituyendo (B.71) y (B.72) en (B.70), se tiene

$$-\left[\frac{\Phi_N^{t+1} - \Phi_N^{t}}{\Delta\sigma}\right] + \left[\frac{\left(\Phi_{N+1}^{t+1} - 2\Phi_N^{t+1} + \Phi_{N-1}^{t+1}\right) + \left(\Phi_{N+1}^{t} - 2\Phi_N^{t} + \Phi_{N-1}^{t}\right)}{2\,\Delta\chi^2}\right] =$$

$$0.3800213 + 2(N\Delta\chi)^2 - 4.6167199(N\Delta\chi)^{3/2} - \frac{1}{5}(N\Delta\chi)^{-1/2} + 2.4\,(N\Delta\chi) -$$

$$2\sqrt{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Exp}(-\lambda n^2 t\Delta\sigma)}{\lambda n^{5/2}} * \left\{\mathrm{Cos}(\lambda n N\Delta\chi) - \frac{(N\Delta\chi)^{-1/2}}{2} + \frac{\lambda n (N\Delta\chi)^{1/2} h}{3} *\right.$$

$$\left.\left[f_o(u_o, N\Delta\chi) + f_m(u_m, N\Delta\chi) + 2\sum_{i=0}^{(m-1)} f_{1-i}(u_{1-i}, N\Delta\chi)\right]\right\} \tag{B.73}$$

Agrupando términos se obtiene una expresión general para evaluar la temperatura de la placa por la técnica de Diferencias Finitas, que es:

$$0.5\,\Phi_{N-1}^{t+1} - \left(\frac{\Delta\chi^2}{\Delta\sigma}\right)\Phi_N^{t+1} + 0.5\,\Phi_{N+1}^{t+1} = -\frac{\Delta\chi^2}{\Delta\sigma}\Phi_N^{t} - 0.5\left(\Phi_{N+1}^{t} - 2\,\Phi_N^{t} +\right.$$

$$\left.\Phi_{N-1}^{t}\right) + 0.3800213\,\Delta\chi^2 + 2\,N^2\Delta\chi^4 - 4.6167199\,N^{3/2}\Delta\chi^4 - 4.6167199\,*$$

$$N^{3/2}\Delta\chi^{7/2} - \frac{N^{-1/2}\Delta\chi^{-3/2}}{5} + 2.4\ N\Delta\chi^{3} - 2\ \Delta\chi^{2}\ \sqrt{2\pi}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Exp}(-\lambda n^{2} t\Delta\sigma)}{\lambda n^{5/2}} *$$

$$\left\{ \mathrm{Cos}(\lambda n N\Delta\chi) - \frac{(N\Delta\chi)^{-1/2}}{2} + \frac{\lambda n(N\Delta\chi)^{1/2}h}{3} \left[f_o(u_o,N\Delta\chi) + f_m(u_m,N\Delta\chi) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2 \sum_{i=0}^{(m-1)} f_{1-i}(u_{1-i},N\Delta\chi) \right]\right\} \qquad (B.74)$$

B3.2.- Condiciones de Frontera e Iniciales.-

Las condiciones de frontera e iniciales que deben satisfacer la ecuación (B.74), son

$$\Phi(\chi,0) = 0.0 \qquad (B.75)$$

$$\frac{\partial\Phi(0,\sigma)}{\partial\chi} = 0.0 \qquad (B.76)$$

$$\frac{\partial\Phi(1,\sigma)}{\partial\chi} = 0.0 \qquad (B.77)$$

Como se puede observar, la ecuación (B.74) presenta una singularidad en $\chi = 0$. Para evitar esta singularidad, la ecuación (B.74) no se evalúa en dicho punto, utilizando para esto, la condición de frontera (B.76) para deducir el valor de la función, o sea

$$\Phi_o(0,\sigma) = \Phi_1(\Delta\chi,\sigma)$$

Por lo tanto, para resolver la expresión (B.70) a partir del punto $N\Delta\chi = \Delta\chi$, es necesario evaluar primero las siguientes aproximaciones por Diferencias Finitas:

- Segunda derivada de Φ con respecto a χ

$$\left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial\chi^2}\right|_N = \frac{\Phi_\chi\big|_N - \Phi_\chi\big|_{N-1}}{\Delta\chi} \tag{B.78}$$

aplicando a Φ_χ la aproximación por Diferencias Finitas definida en la tabla B1,

$$\Phi_\chi\Big|_N^{t+1} = \frac{-\Phi_{N+2}^{t+1} + 4\,\Phi_{N+1}^{t+1} - 3\,\Phi_N^{t+1}}{2\,\Delta\chi} \tag{B.79}$$

y

$$\Phi_\chi\Big|_{N-1}^{t} = \frac{-\Phi_{N+1}^{t} + 4\,\Phi_N^{t} - 3\,\Phi_{N-1}^{t}}{2\,\Delta\chi} \tag{B.80}$$

sustituyendo (B.79) y (B.80) en (B.78), se tiene

$$\left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial\chi^2}\right|_N = \frac{-\Phi_{N+2}^{t+1} + 4\,\Phi_{N+1}^{t+1} - 3\,\Phi_N^{t+1} + \Phi_{N+1}^{t} - 4\,\Phi_N^{t} + 3\,\Phi_{N-1}^{t}}{2\,\Delta\chi^2} \tag{B.81}$$

para N = 1, la ecuación anterior es igual a

$$\left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial\chi^2}\right|_1 = \frac{-\Phi_3^{t+1} + 4\,\Phi_2^{t+1} - 3\,\Phi_1^{t+1} + \Phi_2^{t} - 4\,\Phi_1^{t} + 3\,\Phi_c^{t}}{2\,\Delta\chi^2} \tag{B.82}$$

Sustituyendo las ecuaciones (B.82) y (B.71) en (B.70), se tiene

$$\left(-\frac{\Delta\chi^2}{\Delta\sigma} - \frac{3}{2}\right)\Phi_1^{t+1} + 2\,\Phi_2^{t+1} - 0.5\,\Phi_3^{t+1} = -\frac{\Delta\chi^2}{\Delta\sigma}\Phi_1^{t} - 0.5\Big(\Phi_2^{t} - 4\,\Phi_1^{t} +$$

$$3\,\Phi_o^{t}\Big) + 0.3800213\,\Delta\chi^2 + 2\,\Delta\chi^4 - 4.6167199\,\Delta\chi^{7/2} - \frac{\Delta\chi^{-3/2}}{5} +$$

$$2.4\,\Delta\chi^3 - 2\,\Delta\chi^2\sqrt{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Exp}(-\lambda n^2 t\Delta\sigma)}{\lambda n^{5/2}}\left\{\mathrm{Cos}(\lambda n\Delta\chi) - \frac{\Delta\chi^{-1/2}}{2} + \frac{\lambda n\Delta\chi^{1/2}h}{3} *\right.$$

$$\left.\left[f_o(u_o,N\Delta\chi) + f_m(u_m,N\Delta\chi) + 2\sum_{i=0}^{(m-1)} f_{1-i}(u_{1-i},N\Delta\chi)\right]\right\} \tag{B.83}$$

La expresión (B.83) solo se emplea para el primer punto de la placa, o sea en $\chi = \Delta\chi$. Para los puntos restantes se utiliza la ecuación (B.74).

La otra condición de frontera, en $\chi = 1$, implica lo siguiente;

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\chi} = \frac{\Phi|_{\chi-\Delta\chi} - \Phi|_{\chi+\Delta\chi}}{2\ \Delta\chi} = 0 \tag{B.84}$$

y por lo tanto,

$$\Phi|_{\chi-\Delta\chi} = \Phi|_{\chi+\Delta\chi} \tag{B.85}$$

Para evitar una inestabilidad del método numérico en la región cercana a $\chi = 0$, y al emplear la ecuación (B.83), se utiliza el enmallado mostrado en la figura B5. Esto se debe a que en la región cercana a $\chi = 0$ se tiene gradientes muy grandes de la función Φ.

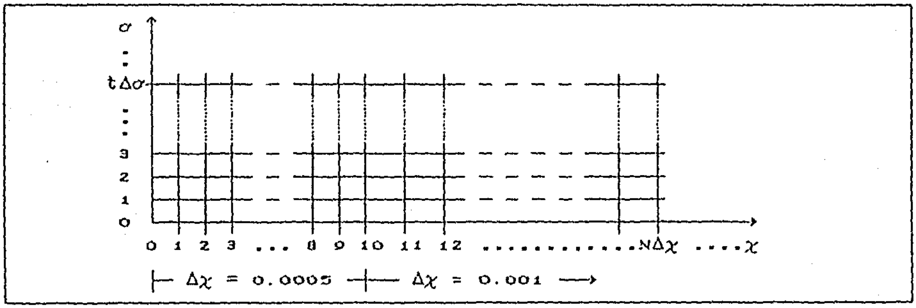

Figura No. B5
Enmallado para evaluar la función $\Phi(N\Delta\chi,\ t\Delta\sigma)$

B4.- ESQUEMA DE SOLUCION.

En este punto se presenta el diagrama de flujo a partir del cual se define la programación para evaluar numéricamente la temperatura de la placa [$\theta(\chi, \tau; \alpha)$] y la función $\Phi(\chi,\sigma)$ que representa la solución numérica del tercer término de la expansión asintótica para el caso laminar.

B4.1.- Esquema de Solución para Evaluar la Temperatura de la Placa.-

A continuación se deduce el diagrama de flujo para resolver el sistema de ecuaciones simultáneas que resultan al aplicar la ecuación (B.45) a cada punto definido por el enmallado de la placa, a un tiempo determinado.

El procedimiento para evaluar la temperatura sobre la placa, es el siguiente:

1.- Definir el valor de alfa (α), los incrementos de la distancia y del tiempo para la expresión (B.45).

2.- Considerar la condición inicial del problema para el tiempo τ = 0, expresión (B.57).

3.- Evaluar la ecuación (B.45) para cada punto del enmallado. Para el punto inicial de la placa (Z = 1) se utiliza la ecuación (B.53) para obtener una aproximación de θo. Con esto, resulta un sistema de ecuaciones simultáneas, para un tiempo determinado, de la forma,

$$[A]\ [X] = [B] \qquad (B.58)$$

donde:

[A] es la matriz de coeficientes

[X] es el vector de temperaturas en cada punto de la placa

[B] es el vector de constantes

4.- Resolver el sistema de ecuaciones simultáneas mediante el método de descomposición LU. Este método consiste en transformar la matriz [A] en el producto de dos matrices L y U, en donde L es una triangular inferior y U es una matriz triangular superior con su diagonal principal igual a uno (1). Posteriormente, el sistema A X = B se resuelve por sustituciones retroactivas, es decir, primero se resuelve L Y = B y después U X = Y.

5.- Incrementar el tiempo y ejecutar nuevamente los pasos 3 y 4 hasta que la placa alcance la temperatura ambiente.

En la figura siguiente se muestra el diagrama de flujo, donde se detalla el esquema para evaluar la temperatura en toda la placa, en función de la distancia Z, el tiempo τ y el valor de α.

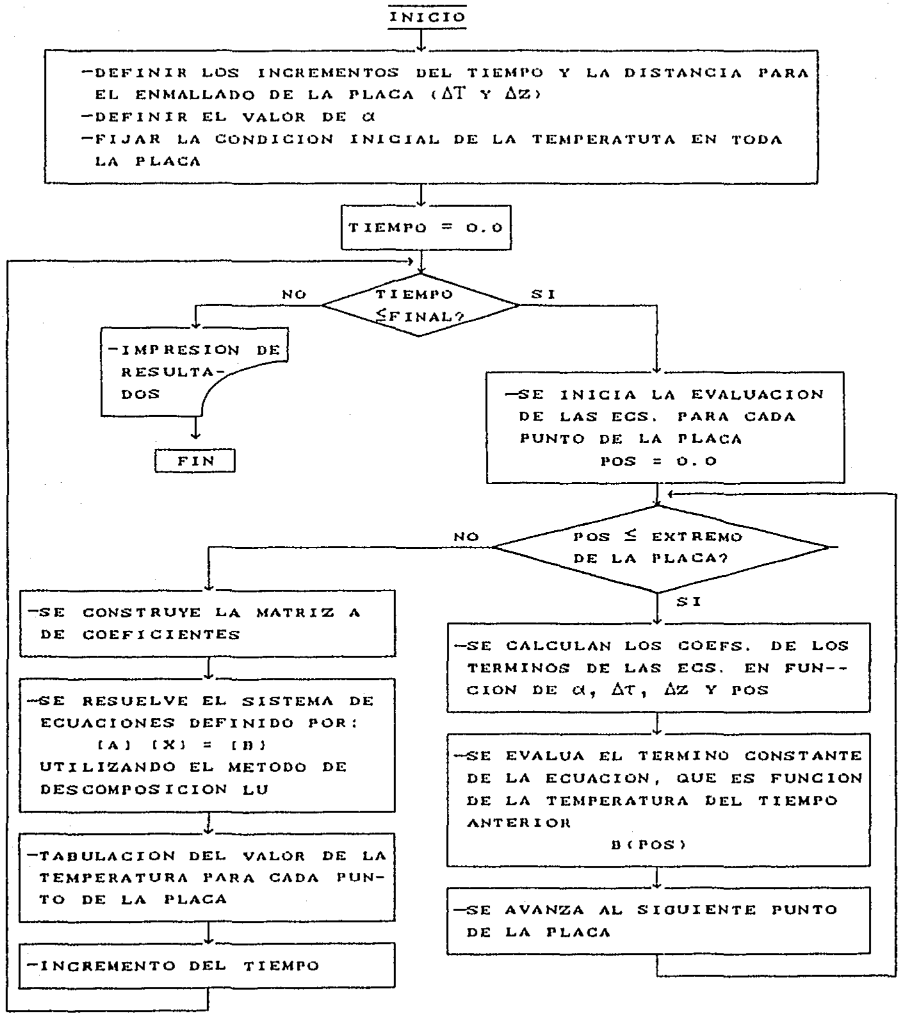

Figura No. B6

Diagrama de Flujo para Evaluar la Temperatura sobre la Placa

B4.2.- Esquema de Solución para Evaluar la Función $\Phi(\chi,\sigma)$.

En esta sección se deduce el diagrama de flujo para evaluar y resolver el sistema de ecuaciones simultáneas que resultan al aplicar la expresión (B.74) a cada punto del enmallado de la placa, para cada incremento $\Delta\sigma$.

El procedimiento para evaluar la función $\Phi(\chi,\sigma)$, es el siguiente:

1.- Definir el valor de los incrementos $(\Delta\chi)_1$, $(\Delta\chi)_2$ y $\Delta\sigma$.

2.- Considerar la condición inicial $\Phi = 0.0$ para $\sigma = 0.0$.

3.- Evaluar la ecuación (B.83) para el primer punto del enmallado (N=1) y la expresión (B.74) para los puntos restantes. Para esto, en los primeros puntos del enmallado (N = 1,2,...,10) considerar $(\Delta\chi)_1$ como el incremento de la distancia y posteriormente cambiar a $(\Delta\chi)_2$ para los puntos restantes. Con esto, resulta un sistema de ecuaciones simultáneas, de la forma siguiente,

$$[A]\ [X] = [B]$$

4.- Aplicar el método de descomposición LU para resolver el sistema de ecuaciones simultáneas y deducir el valor de Φ.

5.- Incrementar el valor de σ y ejecutar nuevamente los pasos 3 y 4 hasta que la función Φ ya no dependa de σ considerablemente.

En la figura siguiente se muestra el diagrama de flujo donde se detalla la secuencia a seguir para evaluar la función $\Phi(\chi,\sigma)$.

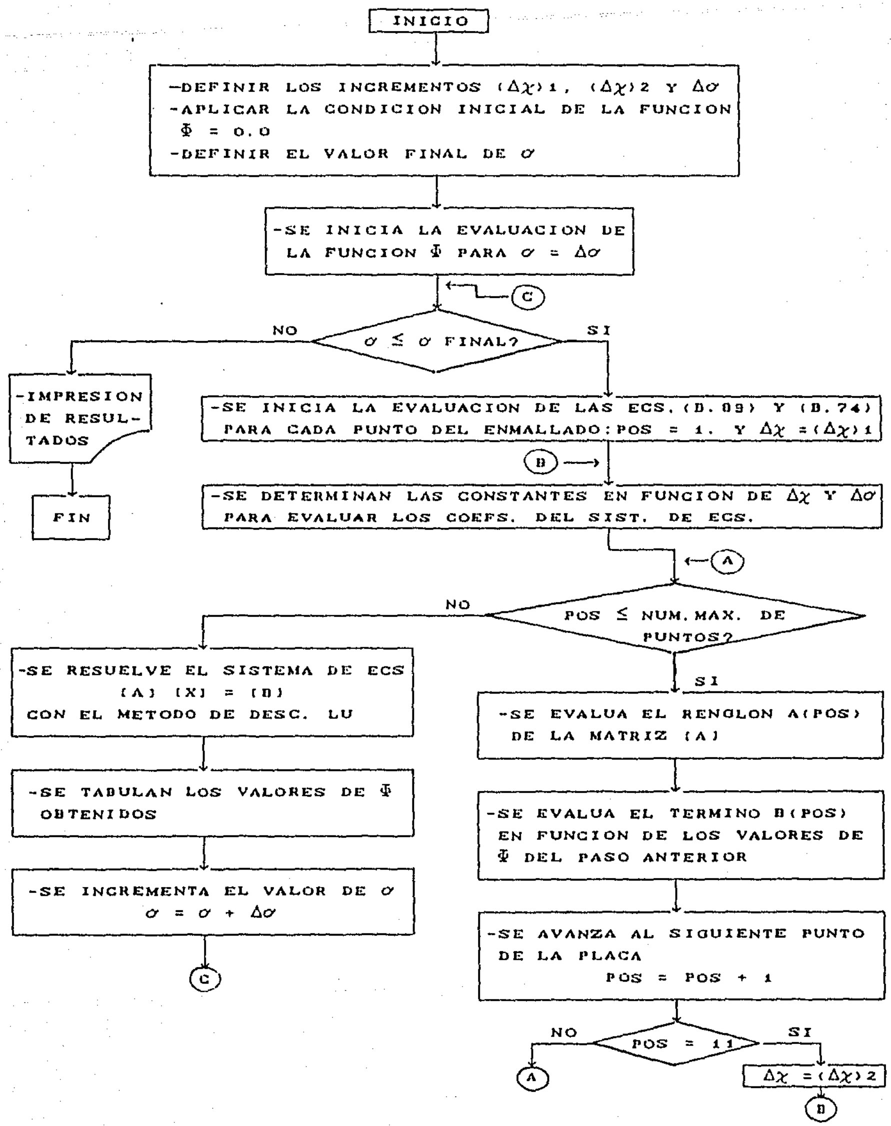

Figura No. B7

Diagrama de Flujo para Evaluar la Función $\Phi(\chi,\sigma)$

B5.- LISTADOS DE PROGRAMAS.

Finalmente, en este punto se presentan los programas que representan la codificación de los diagramas de flujo de las figuras B6 y B7. Estos programas son:

Programa MENUME.- Este programa permite evaluar la temperatura de la placa, para el caso laminar, en función de la distancia (χ) y tiempo (τ) adimensionales.

Programa MENUM2.- Este programa evalúa la función $\Phi(\chi,\sigma)$ para determinar el tercer término de la expansión asintótica para el caso laminar.

Subrutina VGLINE.- Esta rutina permite resolver un sistema de N ecuaciones con N incógnitas, utilizando el método de descomposición LU, según referencia [23].

```
C
      PROGRAM MENUME
C
C ######################################################################
C
C     ESTE PROGRAMA EVALUA LA ECUACION INTEGRO-DIFERENCIAL MEDIANTE EL
C     ESQUEMA DE DIFERENCIAS FINITAS.
C
C ######################################################################
C
C ======================================================================
C
C     Declaracion de variables:
C
      DIMENSION TEMP(0:501,0:101), COE(1:205)
      DIMENSION ACOT(1:100,1:100),BCOT(1:100),XCOT(1:100)
C
      COMMON /PRINCI/COE,I,J,POS,PUNT,ACOT
C
      DATA E0/0.33333/, E1/0.66666/
C
C ======================================================================
C
C     Lectura de datos de entrada:
C
      WRITE(*,*)'DEFINE LOS INCREMENTOS DE LA DISTANCIA :'
      READ(*,*)DELTAZ
      WRITE(*,*)'DEFINE LOS INCREMENTOS DEL TIEMPO :'
      READ(*,*)DELTAT
      WRITE(*,*)'DEFINE EL TIEMPO FINAL DE LA PRUEBA :'
      READ(*,*)TFINA
      WRITE(*,*)'DEFINE EL VALOR DE ALFA :'
      READ(*,*)ALFA
C
C ======================================================================
C
      OPEN(UNIT=45,FILE="RESMEN",ACCESS='SEQUENTIAL',STATUS="OLD")
C
      WRITE(45,70)ALFA,DELTAZ,DELTAT
C
C ======================================================================
C
C     Inicializacion de subindices:
C
      J = 0
      I = 0
      DIST = 0.0                              !distancia inicial
      TIE = 0.0                               !tiempo inicial
      PUNT = 1.0/DELTAZ                       !numero de puntos
C
C     Se inicializan los valores de la temperatura en todos los puntos de
C     la placa, para un tiempo igual a cero ( condicion inicial ):
C
      COT1 = 1.0 + 2.0*DELTAZ
```

```
C
10    IF (( DIST .LE. COT1 ) .AND. ( TIE .EQ. 0.0 )) THEN
C
         TEMP(J,I) = 1.0
         DIST = DIST + DELTAZ
         I = I + 1
         GO TO 10
C
      ENDIF
C
C     Evaluacion de la temperatura de la placa para un tiempo t + Dt:
C
15    TIE = TIE + DELTAT                       !incremento del tiempo
C
      J = J + 1
      I = 1
      POS = 1.0
C
C     Determinacion de los coeficientes de la ecuacion integro-dif. :
C
20    IF ( POS .LE. PUNT ) THEN
C
C        Determinacion de las constantes para evaluar los coeficientes
C        del sistema de ecuaciones:
C
         A1 = POS * DELTAZ
         A2 = 2.0 * DELTAZ * A1
         A3 = A1**E1
         A4 = 3.0 * ALFA
         A5 = DELTAZ**2.0
C
C        Coef. del termino de la temp. en el punto uno:
C
         COT1 = 9.0 * ALFA
         COT2 = 8.0 * A5
         COE(1) = -COT1 / ( A3 * (COT2 + COT1) )
C
C        Coef. del segundo termino de la ec. integro-dif.:
C
         COT1 = A4 / ( 32.0 * A3 )
         COT2 = ( 3.0 / A5 )
         COT3 = 1.0 / A2
         COE(2) = COT1 * ( COT2 + COT3 )
C
         IF (POS .EQ. 1.0) THEN
            COT4 = 8.0 * A5 + 9.0 * ALFA
            COE(2) = 9.0 * ALFA * COE(2) / COT4
         ENDIF
C
C        Coef. del tercer termino de la ec. integro-dif.:
C
         COE(3) = - ( 3 * A4 / ( 16.0 * A5 * A3 )) - (1.0 / DELTAT)
C
C        Coef. del cuarto termino de la ec. integro-dif.;
```

```
C
      COT1 = A4  / ( 32.0 * A3 )
      COE(4) = COT1 * ( 3.0 / A5 - 1.0 / A2 )
C
C     Coeficientes constantes :
C
      COTE = -1.0 / DELTAT + 3.0 * A4 / (16.0 * A5 * A3 )
      COTF = ( A4 / ( 32.0 * A3 ) ) * ( -3.0 / A5 + 1.0 / A2 )
      COTG = ( A4 / ( 32.0 * A3 ) ) * ( -3.0 / A5 - 1.0 / A2 )
C
      COT4 = - 3.0 / ( 8.0 * (POS**E0) * (DELTAZ**E1) )
C
C     Evaluacion de los coeficientes de la sumatoria (parte integral):
C
      K = 5                              !valor del prox. coef.
C
      I1 = 1
C
30    IF ( I1 .LE. I ) THEN
C
        IF ( I1 .EQ. 1 ) THEN
C
C         Primer coef. de la sumatoria:
C
          COT1 = 3.0 * A4
          COT5 = COT1 / ( 8.0 * A5 + COT1 )
          POS1 = POS - 1.0
C
          IF ( POS1 .EQ. 0.0 ) THEN
            COT7 = POS**E1
          ELSE
            COT7 = POS**E1 - POS1**E1
          ENDIF
C
          COE(K) = COT4 * COT7
          COE(K+1) = -COT4 * COT5 * COT7
C
          I1 = I1 + 1
          K = K + 2
C
        ELSE
C
C         Coef. restantes de la sumatoria:
C
          POS2 = POS1 - 1.0
C
          IF ( POS2 .EQ. 0.0 ) THEN
            COT7 = POS1**E1
          ELSE
            COT7 = POS1**E1 - POS2**E1
          ENDIF
C
          COE(K) = COT4 * COT7
          COE(K+1) = -COE(K)
```

```
C
               POS1 = POS2
               I1 = I1 + 1
               K = K + 2
C
            ENDIF
C
            GO TO 30
C
         ENDIF
C
C        Evaluacion del valor constante de la ec. integro-diferencial:
C
         COT1 = COTE * TEMP(J-1,I) + COTF * TEMP(J-1,I+1) + COTG *
     X          TEMP(J-1,I-1)
         K = 1
         COTO = 0.0
         POSO = 1.0
C
35       IF ( POSO .LE. POS ) THEN
            POS1 = ( POS - POSO + 1.0 )
            POS2 = POS - POSO
C
            IF ( POS2 .EQ. 0.0 ) THEN
               COT2 = POS1**E1
            ELSE
               COT2 = POS1**E1 - POS2**E1
            ENDIF
C
            COTO = COTO + ( TEMP(J-1,K+1) - TEMP(J-1,K-1) ) * COT2
            K = K + 1
            POSO = POSO + 1.0
            GO TO 35
         ENDIF
C
         BCOT(I) = COT1 - COT4 * COTO
C
C       ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C
C       Llamado a la rutina para el calculo de la matriz de coef., para
C       generar un sistema de ecuaciones [A] * [T] = [B];
C
        CALL MATRI
C
C       ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C
C       Se avanza al siguiente punto de la placa :
C
        POS = POS + 1.0
        I = I + 1
C
        GO TO 20
      ENDIF
C
```

```
C     ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C
      I = I - 1
C
C     Llamado a la rutina para resolver el sistema de ecuaciones :
C
      CALL VGLINE (I,ACOT,BCOT,IERR,XCOT)
C
C     ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C
C     Asignacion de resultados a la matriz de temperaturas :
C
C     Temperatura en I = 0 :
C
      COTO = 8. * DELTAZ * DELTAZ + 9. * ALFA
      TEMP(J,0) = 9. * ALFA * XCOT(1) / COTO
C
C     Temperatura en los otros puntos :
C
      DO 40 L = 1, I
         TEMP(J,L) = XCOT(L)
40    CONTINUE
C
C     Temperatura en I = I + 1 :
C
      TEMP(J,I+1) = TEMP(J,I-1)
C
C     Impresion de resultados :
C
      WRITE(*,*)'ERROR EN EL MET. DE SOL. DE ECS. LINEALES :',IERR
      WRITE(*,*)'TEMP. AL TIEMPO :',J
C
C**   DO 50 K = 1, I
C**      WRITE(*,*)'TEMP. EN EL PUNTO :',K,' IGUAL A : ',XCOT(K)
C**50    CONTINUE
C
C     Verificacion del tiempo final de la prueba :
C
      IF ( TIE .LE. TFINA ) THEN
         GO TO 15
      ENDIF
C
C ====================================================================
C
C     Tabulacion de resultados :
C
      DO 60 L = 0, J, 10
C
         POSO = 0.0
         DO 65 K = 0, I
            WRITE(45,75)K,POSO,TEMP(L+0,K),TEMP(L+1,K),TEMP(L+2,K),
     %             TEMP(L+3,K),TEMP(L+4,K),TEMP(L+5,K),TEMP(L+6,K),
     %             TEMP(L+7,K),TEMP(L+8,K),TEMP(L+9,K)
            POSO = POSO + DELTAZ
```

```
65       CONTINUE
C
60    CONTINUE
C
C ====================================================================
C
C     Seccion de formatos :
C
70    FORMAT(2X,'VALOR DE ALFA EN LA PRUEBA :',1X,F6.1,/,
     X       2X,'VALOR DE LOS INCREMENTOS DE Z :',1X,F6.3,/,
     X       2X,'VALOR DE LOS INCREMENTOS DEL TIEMPO :',1X,F8.5,/)
C
75    FORMAT(2X,I3,2X,F6.3,1X,F8.5,1X,F8.5,1X,F8.5,1X,F8.5,1X,F8.5,1X,
     X         F8.5,1X,F8.5,1X,F8.5,1X,F8.5,1X,F8.5)
C
C ====================================================================
C
      STOP
      END
C
C
C @@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
C
C
      SUBROUTINE MATRI
C
C ####################################################################
C
C    ESTA SUBRUTINA DETERMINA LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ [A] PARA GENERAR
C    EL SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES.
C
C ####################################################################
C
C ====================================================================
C
C     Declaracion de variables:
C
      DIMENSION COE(1:205), ACOT(1:100,1:100)
C
      COMMON /PRINCI/COE,I,J,POS,PUNT,ACOT
C
C ====================================================================
C
C     Evaluacion de los terminos de la matriz [A] :
C
      LINI = I + 1                      !numero de terminos de la ec.
C
      IF ( I .EQ. 1 ) THEN
C
C        Terminos de la ecuacion para el primer punto:
C
         ACOT(I,I) = COE(1) + COE(2) + COE(3) + COE(6)
         ACOT(I,2) = COE(4) + COE(5)
         K = 3
```

```
          CONT = 3.0
C
C         Se hacen cero los otros terminos :
C
10        IF ( CONT .LE. PUNT ) THEN
C
             ACOT(I,K) = 0.0
             K = K + 1
             CONT = CONT + 1.0
             GO TO 10
C
          ENDIF
C
       ELSE
C
          IF ( I .EQ. 2 ) THEN
C
C            Terminos de la ecuacion para el segundo punto:
C
             ACOT(I,1) = COE(1) + COE(2) + COE(6) + COE(8)
             ACOT(I,2) = COE(3) + COE(5)
             ACOT(I,3) = COE(4) + COE(7)
C
             K = 4
             CONT = 4.0
C
C            Se hacen ceros los otros terminos:
C
20           IF ( CONT .LE. PUNT ) THEN
C
                ACOT(I,K) = 0.0
                K = K + 1
                CONT = CONT + 1.0
                GO TO 20
C
             ENDIF
C
          ELSE
C
C            Evaluacion de los terminos de las ecs. para puntos
C            mayores del 2o. :
C
             K = 1
             KI = LINI - 3
             K0 = 2
             K1 = 5
             K2 = 3
C
30           IF ( K .GT. LINI ) THEN
C
                CONT = K
40              IF ( CONT .LE. PUNT ) THEN
C
                   ACOT(I,K) = 0.0
```

```
            K = K + 1
            CONT = CONT + 1.0
            GO TO 40
C
         ENDIF
      ELSE
C
         IF ( K .EQ. 1 ) THEN
            ACOT(I,K) = COE(1) + COE(6) + COE(8)
            K = K + 1
            GO TO 30
C
         ELSE IF ( K .LE. K1 ) THEN
            ACOT(I,K) = COE(K1) + COE(K1+5)
            K = K + 1
            K1 = K1 + 2
            GO TO 30
C
         ELSE IF ( K2 .EQ. 3 ) THEN
            IF ( POS .EQ. PUNT ) THEN
               ACOT(I,K) = COE(K0) + COE(K1) + COE(K2+1)
            ELSE
               ACOT(I,K) = COE(K0) + COE(K1) + COE(K1+5)
            ENDIF
            K0 = K0 + 1
            K1 = K1 + 2
            K2 = K2 - 1
            K = K + 1
            GO TO 30
C
         ELSE IF ( K2 .EQ. 2 ) THEN
C
            IF ( POS .EQ. PUNT ) THEN
               ACOT(I,K) = COE(K0) + COE(K1)
            ELSE
               ACOT(I,K) = COE(K0) + COE(K1)
            ENDIF
            K0 = K0 + 1
            K1 = K1 + 2
            K2 = K2 - 1
            K = K + 1
            GO TO 30
C
         ELSE
C
            IF ( POS .NE. PUNT ) THEN
               ACOT(I,K) = COE(K0) + COE(K1)
            ENDIF
            K = K + 1
            GO TO 30
C
         ENDIF
C
      ENDIF
```

```
C
         ENDIF
C
      ENDIF
C
      RETURN
      END
C
C @@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
```

```
C
      PROGRAM MENUM2
C
C ************************************************************************
C
C     ESTE PROGRAMA EVALUA LA ECUACION INTEGRO-DIFERENCIAL QUE REPRESENTA
C     LA SEGUNDA SOLUCION DEL MET. DE ESC. MULTIPLES, APLICANDO EL
C     ESQUEMA DE DIFERENCIAS FINITAS.
C
C ************************************************************************
C
C ========================================================================
C
C     Declaracion de variables:
C
      LOGICAL BANDE
      DIMENSION TEMP(0:15,0:210), COE(1:5), AMAT(209,209)
      DIMENSION BCOT(1:209),XCOT(1:209)
C
      DATA DAT0/0.5/, DAT1/0.380214/, DAT2/-4.6167199/, DAT3/5.0132565/
      DATA DAT5/-0.26666/
      DATA E1/2.5/, VPI/3.141592/
C
C ========================================================================
C
C     Lectura de datos de entrada:
C
      WRITE(*,*)'DEFINE LOS INCREMENTOS DE LA DIST. INICIALES Y FIN.:'
      READ(*,*)DELTAZ1,DELTAZ2
      WRITE(*,*)'DEFINE LOS INCREMENTOS DEL TIEMPO :'
      READ(*,*)DELTAT
      WRITE(*,*)'DEFINE EL TIEMPO INICIAL DEL METODO :'
      READ(*,*)TINIC
      WRITE(*,*)'DEFINE EL TIEMPO FINAL DE LA PRUEBA :'
      READ(*,*)TFINA
C
C ========================================================================
C
      OPEN(UNIT=45,FILE="RESMEN",ACCESS="SEQUENTIAL",STATUS="OLD")
      OPEN(UNIT=46,FILE="TEMP.DAT",ACCESS="SEQUENTIAL",STATUS="OLD",
     %     FORM="FORMATTED")
C
      WRITE(45,80)DELTAZ,DELTAT,TINIC
C
C ========================================================================
C
C     Inicializacion de subindices:
C
      DELTAZ = DELTAZ1
      J = 0
      I = 0
      TIE = TINIC                          !tiempo inicial
      PUNT = 1.0/DELTAZ2 + 9.0             !numero de puntos
C
```

```
C     Se inicializan los valores de la temperatura en todos los puntos de
C     la placa, para el tiempo inicial:
C
      POSO = 0.0
      PUNTO = PUNT + 1.0
5     IF ( POSO .LE. PUNTO ) THEN
C
         READ(46,*)TEMP(J,I)
         WRITE(*,*)TEMP(J,I),I
         POSO = POSO + 1.0
         I = I + 1
         GO TO 5
C
      ENDIF
C
C     Evaluacion de la funcion para un tiempo t + Dt:
C
10    TIE = TIE + DELTAT
      J = J + 1
      I = 1
      POS = 1.0
C
C     Determinacion de las constantes para evaluar los coeficientes
C     del sistema de ecuaciones:
C
      NCOT = 1
C
12    A1 = DELTAZ * DELTAZ
      A2 = DELTAZ**3.5
      A3 = DELTAZ**1.5
      A4 = DELTAZ**0.5
      COE(1) = -(A1/DELTAT) - 1.5
      COE(2) = 2.0
      COE(3) = -0.5
      COT1 = -A1/DELTAT
      COT2 = DAT1*A1
      COT3 = 2.0*A1*A1
      COT4 = DAT2*A2
      COT5 = -A3/5.0
      COT6 = 2.4*A1*DELTAZ
      COT7 = -A1*DAT3
      COT8 = -DAT0/A4
      COT9 = 2.0*A4/3.0
      COE(4) = DAT0
      COE(5) = - ( A1/DELTAT + 1.0 )
C
C     +++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C     Evaluacion de la matriz A del sistema de ecuaciones:
C
      POSN = 1.0
      IN = 1
15    IF ( POSN .LE. PUNT ) THEN
C
         IF ( IN .EQ. 1 ) THEN
```

```
C
          AMAT(IN,1) = COE(1)
          AMAT(IN,2) = COE(2)
          AMAT(IN,3) = COE(3)
C
          K = 4
          POSO = 4.0
C
20        IF ( POSO .LE. PUNT ) THEN
             AMAT(IN,K) = 0.0
             K = K + 1
             POSO = POSO + 1.0
             GO TO 20
          ENDIF
C
C
        ELSE IF (POSN .NE. PUNT) THEN
C
          K = 1
          K1 = IN - 1
25        IF ( K .LT. K1 ) THEN
             AMAT(IN,K) = 0.0
             K = K + 1
             GO TO 25
          ENDIF
C
          AMAT(IN,IN-1) = COE(4)
          AMAT(IN,IN) = COE(5)
          AMAT(IN,IN+1) = COE(4)
C
          K = IN + 2
          POSO = K
30        IF ( POSO .LE. PUNT ) THEN
             AMAT(IN,K) = 0.0
             K = K + 1
             POSO = POSO + 1.0
             GO TO 30
          ENDIF
C
C
        ELSE
C
          K = 1
          K1 = IN - 1
35        IF ( K .LT. K1 ) THEN
             AMAT(IN,K) = 0.0
             K = K + 1
             GO TO 35
          ENDIF
C
          AMAT(IN,IN-1) = COE(4) * 2.0
          AMAT(IN,IN) = COE(5)
C
        ENDIF
```

```
C
         POSN = POSN + 1.0
         IN = IN + 1
         GO TO 15
      ENDIF
C
C     +++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C
C     Determinacion de los elementos del vector B del sist. de ecs. :
C
40    IF ( POS .LE. PUNT ) THEN
C
C        Evaluacion del valor constante de la ec. integro-diferencial:
C
         IF ( I .EQ. 1 ) THEN
            COT10 = TEMP(J-1,I) * COT1 - ( TEMP(J-1,2) - 4.0 *
     %          TEMP(J-1,1) + 3.0 * TEMP(J-1,0) ) * DATO
C
            COT11 = COT2 + COT3 + COT4 + COT5 + COT6
         ELSE
            COT10 = COT1 * TEMP(J-1,I) - DATO * (TEMP(J-1,I+1) - 2.0*
     %              TEMP(J-1,I) + TEMP(J-1,I-1))
            COT11 = COT2 + COT3*POS*POS + COT4*POS**1.5 +
     %              COT5/(POS**0.5) + COT6*POS
C
         ENDIF
C
         D3= POS * DELTAZ
C
         SUMA = 0.0
         CONT = 1.0
         BANDE = .TRUE.
C
45       IF (BANDE) THEN
C
            CLANDA = VPI * CONT
            D0 = CLANDA*CLANDA*TIE
            IF ( D0 .LT. 40. ) THEN
               D0 = -D0
               D4 = CLANDA*D3
               D2 = POS**0.5
               COT12 = COS(D4) + COT8/D2
               D5 = COT9*D2*CLANDA
               COT13 = EXP(D0)
               COT14 = COT13/(CLANDA**E1)
C
               CALL INTEGRAL (D3,CLANDA,COT15)
C
               COT16 = COT14 * ( COT12 + D5*COT15 )
               SUMAV = SUMA + COT16
            ELSE
               SUMAV = SUMA
            ENDIF
            CONT = CONT + 1.0
```

```
            DIF = (SUMAV - SUMA)
            IF ( SUMAV .EQ. 0.0 ) THEN
               ERROR = 0.0001
            ELSE
               ERROR = ABS( DIF / SUMAV )
            ENDIF
            SUMA = SUMAV
            WRITE(*,*)SUMA
            IF ((ERROR .LE. 0.03) .AND. (CONT .GT. 2.)) THEN
               BANDE = .FALSE.
            ENDIF
            GO TO 45
C
         ENDIF
         WRITE(*,*)'NUM. DE PUNTO :',I
         WRITE(*,*)'-------------------------'
C
         BCOT(I) = COT10 + COT11 + COT7 * SUMA
C
C        ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C
C        Se avanza al siguiente punto de la placa :
C
         POS = POS + 1.0
         I = I + 1
         NCOT = NCOT + 1
         IF ( NCOT .EQ. 11 ) THEN
            DELTAZ = DELTAZ2
            GO TO 12
         ENDIF
C
         GO TO 40
      ENDIF
C
C     +++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C
      I = I - 1
C
C     Llamado a la rutina para resolver el sistema de ecuaciones :
C
      CALL VGLINE (I,AMAT,BCOT,IERR,XCOT)
C
C     +++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C
C     Asignacion de resultados a la matriz de temperaturas :
C
C     Calculo de la temp. en el punto inicial:
C
      BANDE = .TRUE.
      CONT = 1.0
      SUMA = 0.0
55    IF (BANDE) THEN
         CLANDA = CONT * VPI
         DO = CLANDA * CLANDA * TIE
```

```
            IF ( DO .LT. 40. ) THEN
               DO = -DO
               COT13 = EXP(DO)
               COT14 = CLANDA**E1
               SUMAV = SUMA + (COT13 / COT14)
            ELSE
               SUMAV = SUMA
            ENDIF
            CONT = CONT + 1.0
            DIF = SUMAV - SUMA
            IF ( SUMAV .EQ. 0.0 ) THEN
               ERROR = 0.0001
            ELSE
               ERROR = ABS( DIF / SUMAV )
            ENDIF
            SUMA = SUMAV
            IF ((ERROR .LE. 0.05) .AND. (CONT .GT. 2.)) THEN
               BANDE = .FALSE.
            ENDIF
            GO TO 55
         ENDIF
C
      COT15 = DAT5 + ( 2. * DAT3 / 3.0 ) * SUMA
C
      TEMP(J,0) = XCOT(1) - COT15 * (DELTAZ1**1.5)
C
C     Temperatura en los otros puntos :
C
      DO 60 L = 1, I
         TEMP(J,L) = XCOT(L)
60    CONTINUE
C
C     Temperatura en I = I + 1 :
C
      TEMP(J,I+1) = TEMP(J,I-1)
C
C     Impresion de resultados :
C
      WRITE(*,*)'ERROR EN EL MET. DE SOL. DE ECS. LINEALES :',IERR
      WRITE(*,*)'VALOR DEL TIEMPO :',J
C
C*     DO 50 K = 0, I
C*        WRITE(*,*)'TEMP. EN EL PUNTO :',K,' IGUAL A : ',BCOT(K)
C*50   CONTINUE
C
C     Verificacion del tiempo final de la prueba :
C
      IF ( TIE .LT. TFINA ) THEN
         DELTAZ = DELTAZ1
         GO TO 10
      ENDIF
C
C ===================================================================
C
```

```
C    Tabulacion de resultados :
C
     DO 70 L = 0, J, 10
C
        POSO = 0.0
        NCOT = 1
        DO 75 K = 0, I
C
           IF ( NCOT .LE. 10 ) THEN
              DELTAZ = DELTAZ1
           ELSE
              DELTAZ = DELTAZ2
           ENDIF
           WRITE(45,85)K,POSO,TEMP(L+0,K),TEMP(L+1,K),TEMP(L+2,K),
    %            TEMP(L+3,K),TEMP(L+4,K),TEMP(L+5,K),TEMP(L+6,K),
    %            TEMP(L+7,K),TEMP(L+8,K),TEMP(L+9,K)
           POSO = POSO + DELTAZ
           NCOT = NCOT + 1
75      CONTINUE
C
70   CONTINUE
C
C =====================================================================
C
C    Seccion de formatos :
C
80   FORMAT(2X,'VALOR DE LOS INCREMENTOS DE Z :',1X,F6.3,/,
    %       2X,'VALOR DE LOS INCREMENTOS DEL TIEMPO :',1X,F8.5,/,
    %       2X,'TIEMPO DE INICIO :',1X,F6.3,/)
85   FORMAT(2X,I3,2X,F6.3,1X,E10.4,1X,E10.4,1X,E10.4,1X,E10.4,1X,E10.4,
    %    1X,E10.4,1X,E10.4,1X,E10.4,1X,E10.4,1X,E10.4)
C
C =====================================================================
C
     STOP
     END
C
C
C @@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
C
     SUBROUTINE INTEGRAL (X,ALANDA,RINT)
C
C %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
C
C    RUTINA PARA LA INTEGRACION DE LA FUNCION
C
C %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
C
     DATA D1/1.3333/,D2/0.3333/, DELTX/0.001/
C
     SUMA = 0.0
C
C    Evaluacion de la funcion en el extremo :
C
```

```
      C1 = X * ALANDA * (1.0 - DELTX)**D1
      C2 = (1.0 - DELTX)**D2
      C3 = SIN(C1) / (DELTX**D2)
      FUN1 = C2 * C3
C
C     Evaluacion de los puntos intermedios :
C
      RLIS = 1.0 - DELTX
      XINC = DELTX
C
10    IF ( XINC .LT. RLIS ) THEN
         C1 = X * ALANDA * (XINC**D1)
         C2 = (XINC**D2) / (1.0 - XINC)**D2
         C3 = SIN(C1) * C2
         SUMA = SUMA + 2.0 * C3
         XINC = XINC + DELTX
         GO TO 10
      ENDIF
C
C     Valor de la integracion :
C
      RINT = (DELTX / 2.0) * ( FUN1 + SUMA )
C
      RETURN
      END
C
C $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
```

```
C
C   MODULO DE SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES
C
C   ESTE MODULO RESUELVE SISTEMAS DE N ECUACIONES LINEALES CON
C   N INCOGNITAS
C
C   HAY 4 CASOS
C
C     A) SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. SUBRUTINA VGLINE
C     B) SISTEMAS NO LINEALES, METODO DE SUSTITUCIONES SUCESIVAS.
C        SUBRUTINA VGITER
C     C) SISTEMAS NO LINEALES, METODO DE NEWTON CON JACOBIANO
C        ANALITICO. SUBRUTINA VGNEWT
C     D) SISTEMAS NO LINEALES, METODO DE NEWTON CON JACOBIANO POR
C        DIFERENCIAS. SUBRUTINA VGNEWDIF
C
C
C
      SUBROUTINE VGLINE (N1,A1,B1,ERR1,X1)
C
C   SUBRUTINA VGLINE
C   SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES
C
C   RESUELVE EL SISTEMA [A] [X] = [B]
C
C   DATOS DE ENTRADA
C
C     N1    INTEGER   NUMERO DE ECUACIONES       0<N1<51
C     A1    REAL      MATRIZ DE COEFICIENTES     A1(N1,N1)
C     B1    REAL      VECTOR DE TERMINOS         B1(N1)
C
C   DATOS DE SALIDA
C
C     ERR1  INTEGER   BANDERA DE ERROR       0 TODO BIEN
C                                            10 DATOS DE ENTRADA MAL
C                                            20 MATRIZ A SINGULAR
C     X1    REAL      VECTOR SOLUCION        X1(N1)
C
C
C
      INTEGER N1,ERR1,I1,J1,NDIM1,PV1(209)
      REAL A1(N1,N1),B1(N1),X1(N1)
      REAL C1(209,209),H1(209)
      REAL R1,S1
C
C   SE VERIFICAN LOS DATOS DE ENTRADA
C
      ERR1=10
      IF (N1 .LT. 1 .OR. N1 .GT. 209) RETURN
      NDIM1=209
C
C   SE CAMBIAN DATOS DE ENTRADA A VARIABLES DE TRABAJO
C
      DO 1 J1=1,N1
```

```
      DO 2 I1=1,N1
      C1(I1,J1)=A1(I1,J1)
2     CONTINUE
      X1(J1)=B1(J1)
1     CONTINUE
C
C   SE HACE LA DESCOMPOSICION LU Y SE CALCULAN PIVOTES
C   Y CONDICIONAMIENTO
C
      CALL VGCOMP(NDIM1,N1,C1,R1,PV1,W1)
C
C   SE VERIFICA QUE LA MATRIZ NO SEA SINGULAR
C
      ERR1=20
      S1=R1+1.0
      IF (R1 .EQ. S1) RETURN
      ERR1=0
C
C   SE HACE LA SUBSTITUCION HACIA ATRAS
C
      CALL VGLVE(NDIM1,N1,C1,X1,PV1)
      RETURN
      END
C
C
C
C
C     LAS SIGUIENTES SUBRUTINAS VGCOMP Y VGLVE SON LAS SUBRUTINAS
C     DECOMP Y SOLVE DEL LIBRO COMPUTER METHODS FOR MATHEMATICAL
C     COMPUTATIONS DE FORSITHE, MALCOLM Y MOLER.
C     DECOMP HACE LA DESCOMPOSICION LU DE UNA MATRIZ UTILIZANDO
C     PIVOTEO PARCIAL Y EVALUA EL CONDICIONAMIENTO DE LA MATRIZ
C     SOLVE HACE LA SUBSTITUCION HACIA ATRAS UTILIZANDO LA MATRIZ
C     QUE SALE DE DECOMP Y EL VECTOR DE TERMINOS INDEPENDIENTES
C
C
C
       SUBROUTINE VGCOMP(NDIM,N,A,COND,IPVT,WORK)
C
       INTEGER NDIM, N
       REAL A(NDIM,N), COND, WORK(N)
       INTEGER IPVT(N)
C
C      DECOMPOSES A REAL MATRIZ BY GAUSSIAN ELIMINATION
C      AND ESTIMATES THE CONDITION OF THE MATRTIZ
C
C      USE SOLVE TO COMPUTE SOLUTIONS TO LINEAR SYSTEMS
C
C      INPUT..
C        NDIM = DECLARED ROW DIMENSION OF THE ARRAY CONTAINING A.
C
C        N = ORDER OF THE MATRIZ
C
C        A = MATRIZ TO BE TRIANGULARIZED
```

```
C
C     OUTPUT..
C
C        A CONTAINS AN UPPER TRIANGULAR MATRIZ U AND A PERMUTED
C         VERSION OF A LOWER TRIANGULAR MATRIZ I-L SO THAT
C         (PERMUTATION MATRIZ)*A = L*U
C
C        COND = AN ESTIMATE OF THE CONDITION OF A
C          FOR THE LINEAR SYSTEM A*X = B, CHANGES IN A AND B
C          MAY CAUSE CHANGES COND TIMES AS LARGE IN X.
C          IF COND+1.0 .EQ. COND, A IS SINGULAR TO WORKING
C          PRECISION. COND IS SET TO 1.0E+32 IF EXACT
C          SINGULARITY IS DETECTED.
C
C        IPVT = THE PIVOT VECTOR.
C           IPVT(K) = THE INDEX OF THE K-TH PIVOT ROW
C           IPVT(N) = (-1)**(NUMBER OF INTERCHANGES)
C
C     WORK SPACE..  THE VECTOR  WORK  MUST BE DECLARED AND INCLUDED
C                   IN THE CALL.  ITS INPUT CONTENTS ARE IGNORED.
C                   ITS OUTPUT CONTENTS ARE USUALLY UNIMPORTANT.
C
C     THE DETERMINANT OF A CAN BE OBTAINED ON OUTPUT BY
C        DET(A) = IPVT(N) * A(1,1) * A(2,2) * ... * A(N,N).
C
      REAL EK, T, ANORM, YNORM, ZNORM
      INTEGER NM1, I, J, K, KP1, KB, KM1, M
C
      IPVT(N) = 1
      IF (N .EQ. 1) GO TO 80
      NM1 = N - 1
C
C     COMPUTE 1-NORM OF A
C
      ANORM = 0.0
      DO 10 J = 1, N
         T = 0.0
         DO 5 I = 1, N
            T = T + ABS(A(I,J))
    5    CONTINUE
         IF (T .GT. ANORM) ANORM = T
   10 CONTINUE
C
C     GAUSSIAN ELIMINATION WITH PARTIAL PIVOTING
C
      DO 35 K = 1,NM1
         KP1= K+1
C
C        FIND PIVOT
C
         M = K
         DO 15 I = KP1,N
            IF (ABS(A(I,K)) .GT. ABS(A(M,K))) M = I
   15    CONTINUE
```

```
         IPVT(K) = M
         IF (M .NE. K) IPVT(N) = -IPVT(N)
         T = A(M,K)
         A(M,K) = A(K,K)
         A(K,K) = T
C
C        SKIP STEP IF PIVOT IS ZERO
C
         IF (T .EQ. 0.0) GO TO 35
C
C        COMPUTE MULTIPLIERS
C
         DO 20 I = KP1,N
             A(I,K) = -A(I,K)/T
   20    CONTINUE
C
C        INTERCHANGE AND ELIMINATE BY COLUMNS
C
         DO 30 J = KP1,N
             T = A(M,J)
             A(M,J) = A(K,J)
             A(K,J) = T
             IF (T .EQ. 0.0) GO TO 30
             DO 25 I = KP1,N
                A(I,J) = A(I,J) + A(I,K)*T
   25        CONTINUE
   30    CONTINUE
   35 CONTINUE
C
C     COND = (1-NORM OF A)*(AN ESTIMATE OF 1-NORM OF A-INVERSE)
C     ESTIMATE OBTAINED BY ONE STEP OF INVERSE ITERATION FOR THE
C     SMALL SINGULAR VECTOR.  THIS INVOLVES SOLVING TWO SYSTEMS
C     OF EQUATIONS, (A-TRANSPOSE)*Y = E  AND  A*Z = Y  WHERE  E
C     IS A VECTOR OF +1 OR -1 CHOSEN TO CAUSE GROWTH IN Y.
C     ESTIMATE = (1-NORM OF Z)/(1-NORM OF Y)
C
C     SOLVE (A-TRANSPOSE)*Y = E
C
      DO 50 K = 1, N
         T = 0.0
         IF (K .EQ. 1) GO TO 45
         KM1 = K-1
         DO 40 I = 1, KM1
            T = T + A(I,K)*WORK(I)
   40    CONTINUE
   45    EK = 1.0
         IF (T .LT. 0.0) EK = -1.0
         IF (A(K,K) .EQ. 0.0) GO TO 90
         WORK(K) = -(EK + T)/A(K,K)
   50 CONTINUE
      DO 60 KB = 1, NM1
         K = N - KB
         T = WORK(K)
         KP1 = K+1
```

```
         DO 55 I = KP1, N
            T = T + A(I,K)*WORK(I)
   55    CONTINUE
         WORK(K) = T
         M = IPVT(K)
         IF (M .EQ. K) GO TO 60
         T = WORK(M)
         WORK(M) = WORK(K)
         WORK(K) = T
   60 CONTINUE
C
      YNORM = 0.0
      DO 65 I = 1, N
         YNORM = YNORM + ABS(WORK(I))
   65 CONTINUE
C
C     SOLVE A*Z = Y
C
      CALL VGLVE(NDIM, N, A, WORK, IPVT)
C
      ZNORM = 0.0
      DO 70 I = 1, N
         ZNORM = ZNORM + ABS(WORK(I))
   70 CONTINUE
C
C     ESTIMATE CONDITION
C
      COND = ANORM*ZNORM/YNORM
      IF (COND .LT. 1.0) COND = 1.0
      RETURN
C
C     1-BY-1
C
   80 COND = 1.0
      IF (A(1,1) .NE. 0.0) RETURN
C
C     EXACT SINGULARITY
C
   90 COND = 1.0E+32
      RETURN
      END
C
C     SUBRUTINA SOLVE
C
C
      SUBROUTINE VGLVE(NDIM, N, A, B, IPVT)
C
      INTEGER NDIM, N, IPVT(N)
      REAL A(NDIM,N),B(N)
C
C   SOLUTION OF LINEAR SYSTEM, A*X = B .
C   DO NOT USE IF DECOMP HAS DETECTED SINGULARITY.
C
C   INPUT..
```

```
C
C     NDIM = DECLARED ROW DIMENSION OF ARRAY CONTAINING A .
C
C     N = ORDER OF MATRIX.
C
C     A = TRIANGULARIZED MATRIX OBTAINED FROM DECOMP .
C
C     B = RIGHT HAND SIDE VECTOR.
C
C     IPVT = PIVOT VECTOR OBTAINED FROM DECOMP .
C
C   OUTPUT..
C
C     B = SOLUTION VECTOR, X .
C
      INTEGER KB, KM1, NM1, KP1, I, K, M
      REAL T
C
C     FORWARD ELIMINATION
C
      IF (N .EQ. 1) GO TO 50
      NM1 = N-1
      DO 20 K = 1, NM1
         KP1 = K+1
         M = IPVT(K)
         T = B(M)
         B(M) = B(K)
         B(K) = T
         DO 10 I = KP1, N
             B(I) = B(I) + A(I,K)*T
   10    CONTINUE
   20 CONTINUE
C
C     BACK SUBSTITUTION
C
      DO 40 KB = 1,NM1
         KM1 = N-KB
         K = KM1+1
         B(K) = B(K)/A(K,K)
         T = -B(K)
         DO 30 I = 1, KM1
             B(I) = B(I) + A(I,K)*T
   30    CONTINUE
   40 CONTINUE
   50 B(1) = B(1)/A(1,1)
      RETURN
      END
```

1. A. V. Luikov, "Conjugate convective heat transfer problems", Int. Journal Heat Mass Transfer, 17, 257-265 (1974).

2.- M. S. Sohal and J. R. Howell, "Determination of plate temperature in case of combined conduction, convection and radiation heat exchange", Int. Journal Heat Mass Transfer, 16, 2055-2066 (1973).

3.- R. Karvinen, "Some nex results for conjugate heat transfer in a flate plate", Int. Journal Heat Mass Transfer, 21, 1261-1264 (1978).

4.- C. Treviño y A. liñan, "External heating of a flate plate in a convective flow", Int. Journal Heat Mass Transfer, 27, 1067-1073 (1984).

5.- P. Payvar, "Convective heat transfer to laminar flow over a plate of finite thickness", Int. Journal Heat Mass Transfer, 20, 431-433 (1977).

6.- M. J. Lighthill, "Contributions to the theory of heat transfer through a laminar boundary layer", Proc. Roy. Soc. A202, 359 (1950).

7.- N. Riley, "Unsteady heat transfer for flow over a flat plate", J. Fluid Mech. 17, 97-104 (1963).

8.- W. M. Kays and M. E. Crawford, Convective Heat and Mass Transfer (2nd edn.), Mc Graw-Hill, New York (1980).

9.- E. R. G. Eckert and R. M. Drake, Heat and Mass Transfer (2nd edn.), Robert E. Krieger Publishing Company, Malabor Florida (1981).

10.- J. P. Holman, Transferencia de calor (2nd edn.), Editorial CELSA, México (1987).

11.- H. Schilichting, Boundary-Layer Theory (sixth edn.), Mc Graw-Hill, Ney York (1968).

12.- A. H. Nayfeh, Perturbation Methods, John Wiley & Sons, New York (1972).

13.- A. Aziz and T. Y. Na, Perturbation Methods in heat Transfer, Hemisphere Publishing Corporation, New York (1986).

14.- C. M. Bender and S. A. Orszag, Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers, Mc Graw-Hill, Ney York.

15.- M. D. Van, Perturbation Methods in Fluid Mechanics, Academic Press, New York (1964).

16.- R. Bellman, Pertubation Techniques in Mathematics, Physics and Engineering, Dover Publications, Inc., New York (1963).

17.- C. R. Wylie, Matemáticas Superiores para Ingeniería (cuarta edn.), Mc Graw-Hill, México (1982).

18.- M. L. Boas, Mathematical Methods in the Physical Sciences, John Wiley & Sons, New York (1966).

19.- R. C. Diprima, W. E. Boyce, Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera (tercera edn.), Editorial Limusa, México (1987).

20.- E. L. Lattes, Teoría y Métodos de las Matemáticas Aplicadas (primera edn.), D.E.P.F.I. (1986).

21.- A. Liñan y C. Treviño, "Transient catalitic ignition on a flat plate with external energy flux", AIAA Journal, vol. 23 No. 11, pp 1716-1723 (1985).

22.- M. R. Spiegel, Advance Calculus, Schaum Publlishing Co., New York (1963).

23.- J. J. Dongarra, C. B. Moler, J. R. BUnch and G. W. Stewart, LINPACK Users' Guide, SIAM, Philadelphia (1979).

24.- L. Lapidus and G. F. Pinder, Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering, John Wiley and Sons, (1982).

25.- L. Collatz, The Numerical Treatment of Differential Equations, Springer-Verlag, (1966).

26.- F. G. Curtis, Análisis Numérico, Fondo Educativo Interamericano, (1982).