13
24

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

MATEMATICAS APLICABLES A LA INGENIERIA PETROLERA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

INGENIERO PETROLERO

P R E S E N T A :

RAFAEL CERVANTES DE LA TEJA

DIRECTOR DE TESIS:

M.I. RAFAEL HERRERA GOMEZ

MEXICO, D.F. 1990

TEMA

"MATEMATICAS APLICABLES A LA INGENIERIA PETROLERA"

INDICE

INTRODUCCION

Este TRABAJO ESCRITO pretende ser un auxiliar en el estudio de la asignatura "MATEMATICAS APLICADAS A LA INGENIERIA PETROLERA". Su contenido es totalmente conceptual y manejado con sencillez , pues se desea interesar al lector para que profundice en los temas expuestos y posteriormente desarrolle sus habilidades en el campo práctico de su profesión.

CAPITULO I

"NUMEROS COMPLEJOS"

1.1 ANTECEDENTES

REPRESENTACION PUNTUAL DE UN COMPLEJO

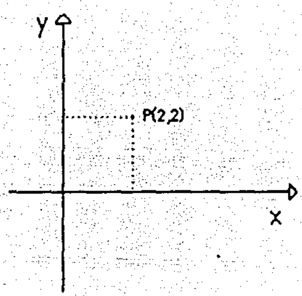
En un sistema cartesiano hay una relación biunívoca entre puntos y valores numéricos con los ejes coordenados.

Si tenemos que:

$$x = 2$$

$$y = 2$$

De una forma ordenada, la representación estará dada de la forma P(2,2)



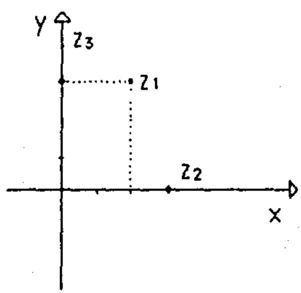
DEFINICION:

Un número complejo es una expresión de la forma $Z = a+bi$ donde a y b son Números Reales, $i^2 = -1$.

Para un número complejo se puede utilizar el mismo plano cartesiano tomando el eje "x" para los valores reales y el eje "y" para los de la parte imaginaria.

Sean los números complejos:

$$Z_1 = 2+3i \ , \quad Z_2 = 3 \ , \quad Z_3 = 4i$$



Al plano cartesiano se le denomina:

-Plano Complejo.

-Plano Z.

-Plano de Argant.

Donde: "x" es el eje real.

"y" es el eje imaginario.

VALOR ABSOLUTO

DEFINICION:

El valor absoluto o módulo de $Z = a+bi$ estará dado por

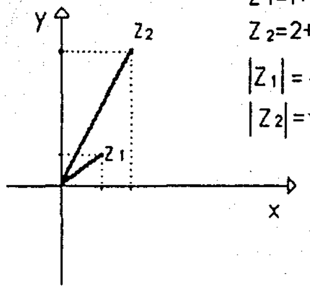
$$|Z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Si tenemos dos números $Z_1 = x_1+y_1 i$, $Z_2 = x_2+y_2 i$
el módulo de Z_1-Z_2 será igual a:

$$|Z_1 - Z_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$$

En el sistema de los Números Complejos, $Z_1<Z_2$ no tiene significado, mas si es posible aplicar esa notación a $|Z_1|$ y $|Z_2|$ pues el módulo es una magnitud -escalar-.

Si tenemos que $|Z_1|<|Z_2|$, esto significará que Z_1 estará más cerca del origen.



$Z_1 = i+1$

$Z_2 = 2+3i$

$|Z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$|Z_2| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$|Z_1| < |Z_2|$

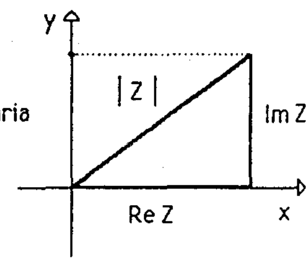
Elevando al cuadrado el valor absoluto o módulo de un Número Complejo tendremos:

$$|Z|^2 = (ReZ)^2 + (ImZ)^2$$

donde:

Re Z= Parte real

Im z= Parte imaginaria



Podemos observar que:

$ReZ = |ReZ| \leq |Z|$ $\qquad$ $ImZ = |ImZ| \leq |Z|$

$$|Z_1/Z_2| = |Z_1|/|Z_2|$$

ADICION Y SUSTRACCION DE COMPLEJOS

Sea $Z_1 = x_1+y_1i \quad , \quad Z_2 = x_2+y_2i$

$$Z_1+Z_2 = (x_1+x_2)\pm(y_1+y_2)i$$

EJERCICIO:

$$Z_1 = 2+3i$$

$$Z_2 = 3+i$$

$$Z_1+Z_2 = (2+3)+(3+1)i = 5+4i$$

MULTIPLICACION DE COMPLEJOS:

$$Z_1Z_2 = x_1x_2-y_1y_2+(x_1y_2+x_2y_1)i$$

EJERCICIO:

$$Z_1 = 3+2i$$

$$Z_2 = 2+i$$

$$Z_1Z_2 = (3)(2)-(2)(1)+\big((3)(1)+(2)(2)\big)i$$

$$Z_1Z_2 = 6-2+(3+4)i$$

$$Z_1Z_2=4+7i$$

CONJUGADO

DEFINICION:

El conjugado de un número complejo de la forma $Z = x+yi$

Será: $\bar{Z}=x-yi$

ALGUNAS PROPIEDADES IMPORTANTES

En coordenadas:

$$Z=Z(x,y) \qquad \bar{Z}=Z(x,-y)$$

El conjugado de la suma de dos complejos es igual a la suma de sus conjugados.

$$\overline{Z_1+Z_2}=\bar{Z}_1+\bar{Z}_2$$

Lo mismo sucede con el producto

$$\overline{Z_1Z_2}=\bar{Z}_1\bar{Z}_2$$

Podemos definir ReZ y ImZ en función de Z y $\bar{Z}$

$$ReZ=\frac{Z+\bar{Z}}{2} \qquad ImZ=\frac{Z-\bar{Z}}{2i}$$

Demostrando para ReZ:

$$Z=x+yi \ , \quad \bar{Z}=x-yi$$

$$ReZ=\frac{x+yi+(x-yi)}{2}=\frac{2x}{2}$$

$$ReZ=x$$

Además:

$$Z\bar{Z}=|Z|^2$$

Demostracion:

$$Z\bar{Z}=(x+yi)(x-yi)=(x)^2-(yi)^2=x^2+y^2 \quad ....(1)$$

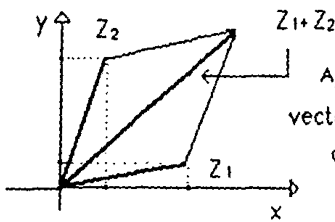
$$|Z|^2 = (\sqrt{x^2+y^2})^2 = x^2+y^2 \text{............}(2)$$

$$(1) = (2)$$

Por la desigualdad del triángulo podemos decir que:

$$|Z_1+Z_2| \leq |Z_1|+|Z_2|$$

lo cual puede ser facilmente visualizado.



Aplicando la suma de vectores por el método del paralelogramo

COORDENADAS POLARES

Para expresar un número complejo en Coordenadas Polares utilizaremos r y θ como variables.

definimos:

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta$$

$$r = |Z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

Podemos expresar Z de la siguiente forma:

$$Z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

θ será el argumento de Z el cual tendrá n valores :

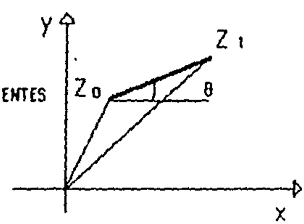
$$\mathrm{Arg}\,Z = \theta + 2\pi K \qquad K = 0,1,2,3,\ldots\ldots,n$$

El valor principal del argumento de Z estará contenido dentro de $-\pi < \theta < \pi$

Como la interpretación de θ es un ángulo, el argumento de $Z = 0$ no está definido.

Si deseamos hacer una sustracción de complejos en forma polar:

θ = DIFERENCIA DE PENDIENTES ENTRE Z1 Y Z0



Donde: $\rho = |Z_0 - Z_1|$ y $\phi = \mathrm{Arg}\,(Z_0 - Z_1)$

$$Z_0 - Z_1 = \rho(\cos\phi + i\,\mathrm{sen}\,\phi)$$

Lo cual es menos sencillo que con la forma binomial.

La forma polar facilita la multiplicación y división de complejos.

$$Z_1Z_2 = (r_1r_2)(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\mathrm{sen}\,(\theta_1+\theta_2))$$

$$Z_1/Z_2 = (r_1/r_2)(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\,\mathrm{sen}\,(\theta_1-\theta_2))$$

REPRESENTACION EULER EXPONENCIAL

La expresión de la forma de Euler de un complejo estará dada por:

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$ donde θ es el argumento de z

$$Z = r\,e^{i\theta}$$

$$Z^{-1} = (e^{-i\theta})/r$$

$$Z_1Z_2 = r_1r_2\,e^{i(\theta 1+\theta 2)}$$

$$Z_1/Z_2 = (r_1/r_2)\,e^{i(\theta 1-\theta 2)}$$

POTENCIAS Y RAICES

Si $Z_1 = Z_2$ además $Z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$

$$Z_1Z_2 = Z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\,\mathrm{sen}\,2\theta)$$

$$Z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\,\mathrm{sen}\,3\theta)$$

Por lo tanto podemos decir que

$$Z^n = r^n(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta) \qquad (n=1,2,3...)$$

$$Z^n = r^n\,e^{i\theta n} \quad (n=\pm 0,1,2,3...)$$

$$Z^{1/n} = \sqrt[n]{r}\ e^{i\theta/n}$$

$$Z^{1/n} = r^{1/n}((\cos(\theta+2\pi K)/n) + i\ \text{sen}(\theta+2\pi K)/n)$$

$$(K=0,1,2,\ldots\ldots,n-1)$$

EJERCICIOS:

1.-

a) $(-3)(i/2) = 0-1.5i$

b) $(-1+i)^2 = (-1+i)(-1+i) = 1-1-i-i = 0-2i$

c) $(2-i)(i/3) = -6i-3$

d) $$\frac{2+3i}{1+2i} - \frac{8+i}{6-i}$$

$$\frac{2+3i}{1+2i} = \frac{2+3i\ (1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{2-4i+3i+6}{5} = \frac{8-i}{5}$$

$$\frac{8+i}{6-i} = \frac{8+i\ (6+i)}{(6-i)(6+i)} = \frac{48+8i+6i-1}{37} = \frac{47+14i}{37}$$

e) $i^3\ (1+2)^2 = i^3(i^2+4i+4) = i^5+4i^4+4i^3 = 1+4-4i=4-3i$

2.-

Transformar la ecuación compleja $Z^3+5Z^2 = Z+3i$ en dos ecuaciones Reales

Si $Z = a+bi$

$(a^3+3a^2bi-3ab^2-bi)+(5a^2+10abi-5b^2) = a+bi+3i$

$a^3-3ab^2+5a^2-5b^2 = a$ ....(1)

$3a^2-b+10ab = (b+3)$ ....(2)

3.-

Describir el grupo de puntos Z en el plano complejo que satisfacen las siguientes ecuaciones.

SOLUCION

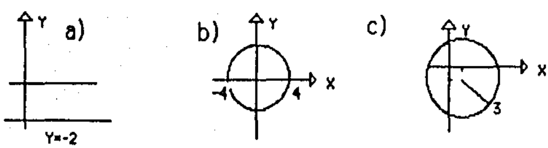
a) $\operatorname{Im} Z = -2$ - Recta horizontal $y=-2$.

b) $|Z| = 4$ - Circunferencia de radio=4 y centro en el origen.

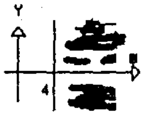
c) $|Z-1+i| = 3$ - Circulo de radio=3 alrededor del punto $1-i$.

d) $\operatorname{Re} Z > 4$ - Puntos posteriores a la derecha de la recta $x=4$

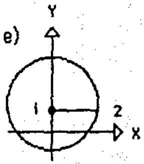
e) $|Z-i| < 2$ - Puntos interiores al circulo de radio 2 y centro en $(0,i)$.



d)



e)



4.- Calcular

$$\left|\frac{1+2i}{-2-i}\right| = \left|\frac{(1+2i)(-2+i)}{5}\right| = \left|\frac{-2-2-4i+i}{5}\right| = \left|\frac{-4-3i}{5}\right| =$$

$$= \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = 1$$

5.-

Encontrar el argumento de los siguientes números.

a) $-\frac{1}{2}$ argumento $= \pi + 2\pi K$

b) $-2\sqrt{3} - 2i$ argumento $=$ ang cos $\frac{-2\sqrt{3}}{4} = \frac{7\pi}{6} + 2\pi K$

c) $(\sqrt{3} - i)^2 = 3-1-2\sqrt{3i} = 2-2\sqrt{3}i$

argumento $=$ ang tan $\frac{2\sqrt{3}}{2}$ $+2\pi k$

$k=0,1,2,3,..$

$$r = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

6.-

Expresar los siguientes números en forma de Euler o Polar.

$$(-16)^{1/4} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi + 2\pi K}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi + 2\pi K}{4}\right)\right) \qquad K = 0,1,2,3$$

$$(1-\sqrt{3}i)^{1/3} = 2^{1/3}\left(\cos\left(\frac{\frac{5}{3}\pi + 2\pi K}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\frac{5}{3}\pi + 2\pi K}{3}\right)\right)$$

$K = 0,1,2.$

7.-

Demostrar que $\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_2}$, si $Z_2 \neq 0$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \left(\frac{a+bi}{c+di}\right) \frac{ac+bd+(cb-da)i}{c^2+d^2}$$

$$\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{ac+bd-(cb-da)i}{c^2+d^2} \qquad \text{.......................(1)}$$

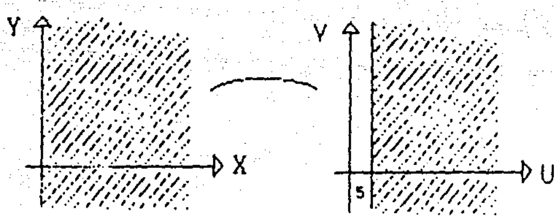
$$\frac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_2} = \frac{a-bi}{c-di} = \frac{ac+bd-(cb-da)i}{c^2+d^2} \qquad \text{.............(2)}$$

$$(1) = (2)$$

8.-

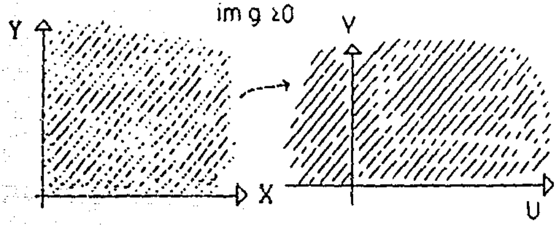
Describe el rango de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(Z) = Z + 5$ para $\mathrm{Re}Z > 0$

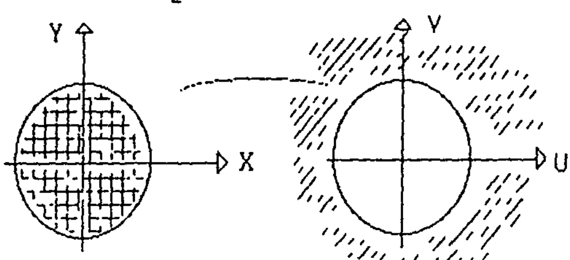


b) $g(Z) = Z^2$ para Z en el primer cuadrante $\mathrm{Re}Z \geq 0$

$\mathrm{im}\, g \geq 0$



c) $h(Z) = \dfrac{1}{Z}$ para $0 < |Z| \leq 1$



1.2 DEFINICIONES BASICAS DE GRUPOS DE PUNTOS

Disco abierto o vecindad de Z_0

Se define como:

Todos los puntos de un disco de radio ρ alrededor de z_0

$|Z-Z_0|<\rho$ donde ρ es real

EJEMPLO

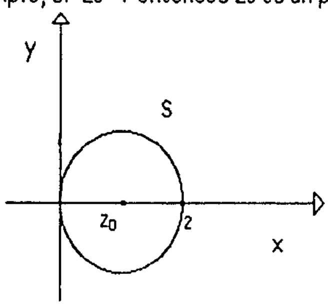
$|Z-2|<3$ la solución es vecindad de 2 con $r<3$

$|Z+i|<1/2$ la solución es vecindad de $-i$ con $r<1/2$

INTERPRETACION GRAFICA

Si $|Z-Z_0|<1$ y $\operatorname{Re} Z>0$, S será igual a medio plano derecho cartesiano

Por ejemplo, si $Z_0=1$ entonces Z_0 es un punto interior de S.



Punto interior es un punto Z en el espacio de una vecindad contenida completamente en S.

DISCO UNITARIO

$$|Z| < 1$$

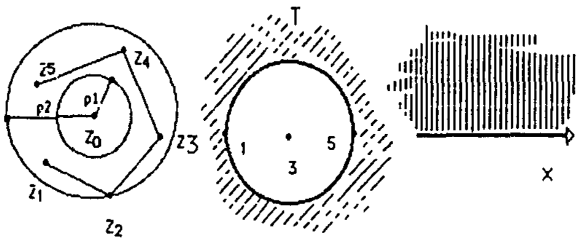
GRUPO ABIERTO

Es el grupo que contiene solo puntos interiores.

Una vecindad es un grupo abierto.

EJEMPLO:

$\rho_1 < |Z - Z_0| < \rho_2$, $|Z-3| > 2$, $\operatorname{Im} Z > 0$



Se debe comentar que la desigualdad $|Z-3| > 2$ no es un grupo abierto de T ya que ninguna parte del circulo $|Z-3| = 2$ es punto interior de T.

Así tambien $b \leq \operatorname{Re} Z \leq a$ donde a y b son reales, no es un grupo abierto ya que no contiene un disco abierto en las fronteras.

Si $w_1, w_2, w_3, \ldots\ldots, w_n$ son puntos en el plano y los segmentos sucesivos en w_i forman una cadena . A esta se le denominará Linea Poligonal.

Un grupo abierto se conoce como conectado si cada par de puntos Z_1, Z_2 en S, puede ser unido mediante una línea poligonal contenida por completo en S.

Los grupos denotados anteriormente son conectados.

El grupo que comprende todos los puntos en el plano alrededor del circulo $|Z| = 1$ es un ejemplo de grupo abierto no conectado, esto se hace evidente cuando Z_1 es un punto dentro del circulo y Z_2 fuera de éste; la línea poligonal que una ambos puntos por fuerza debe intersectar al circulo.

Se llamará dominio a todo grupo abierto conectado.

Se tendrá un punto frontera (Z_0) o limite de un grupo S, si cualquier vecindad de Z_0 contiene al menos un punto en S y un punto fuera de S.

El grupo de todos los puntos frontera de S será llamado frontera de S.

Una región es un dominio que contiene además algunos, ninguno o todos los puntos de su frontera.

Región cerrada es aquella que contiene todos los puntos frontera de su dominio.

Un grupo es limitado si para cualquier Z en S, $|Z|<R$, donde R es real.

Es decir, S es limitado si está contenido en alguna vecindad de origen.

A una región cerrada y limitada se le llamará compactada.

1.3 FUNCIONES ANALITICAS

FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

Una función es una regla, la cual asigna a cada elemento de un grupo A, uno y solo un elemento del grupo B.

$$b=f(a)$$

$$a \in A \quad y \quad b \in B$$

donde b es conocido como la imágen de a en f.

El grupo A es el dominio de definición de f.

El grupo B es el rango de f.

En ocasiones se conoce a f como un mapeo de A en B.

A y B son subgrupos de los complejos, o sea funciones con valores complejos de una variable compleja.

Si nosotros hacemos w el valor de la función f en el punto Z.

$$w = f(Z) \qquad y \qquad Z = x+yi$$

w también se puede descomponer en dos valores reales w = u+vi donde cada una es función de Z o equivalentemente de "x" y "y" esto quiere decir que:

$$w = u(x,y)+vi(x,y)$$

Así, una función de valor complejo de una variable compleja es en esencia un par de funciones reales de dos variables reales.

EJEMPLO 1

Escribir la función $w = f(Z) = Z^2+2Z$ en términos de "x" y "y".

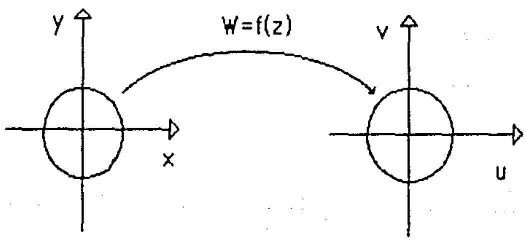
$Z = x+yi$

sustituyendo:

$w = f(Z) = (x+yi)^2+2(x+yi)$ $\qquad u=x^2-y^2+2y$

$w = x^2-y^2+2xyi+2x+2yi$ $\qquad v=2xy+y$

$w = (x^2-y^2+2x)+i(2xy+y)$



EJEMPLO 2

Describir el rango de la función $f(Z) = x^2+2i$ definido en el disco unitario cerrado $|Z| \leq 1$

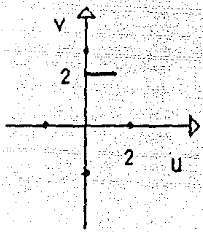
Solución:

$u(x,y) = x^2$

$v(x,y) = 2$

Z varía dentro del disco unitario cerrado, u varía entre 0 y 1, y v es constante.

El rango es por lo tanto, el segmento de linea es de $w = 2i$ a $w = 1+2i$



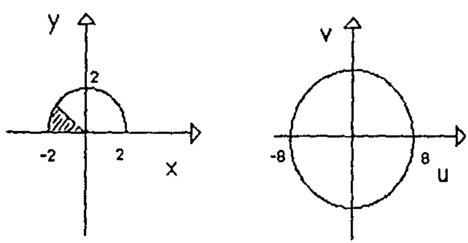
EJEMPLO 3

Describa la función $f(Z)=Z^3$ para Z en el semidisco dado por

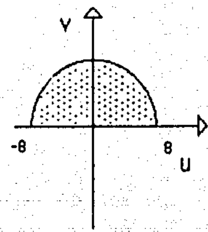
$$|Z| \leq 2 \quad , \quad 0 \leq \operatorname{Im} Z$$

Sabemos que cuando el Argumento de Z varia desde 0 a $2\pi/3$

$|w| \leq 8$



y cuando el Argumento varia de $2\pi/3 \leq Z \leq \pi$


V
-8
8
U

1.4 LIMITES Y CONTINUIDAD

DEFINICION

Una secuencia de números complejos $\{Z_n\}_0^{\infty}$ tiene el límite Z_0 o converge a Z_0 si para cualquier $\varepsilon > 0$ hay un entero N tal que $|Z_n - Z_0| < \varepsilon$ para todo $n > N$ osea:

$$\lim_{Z \to Z_0} Z_n = Z_0$$

o tambien

$Z_n \to Z_0$ cuando $n \to \infty$

Geométricamente ésto quiere decir que cada término Z_n para $n > N$ cae en el disco abierto de radio ε partiendo de Z_0

$$|Z - Z_0| < \varepsilon$$

DEFINICION

Tomando f(Z) como una función definida en una vecindad de Z_0

Entonces f(Z) **es continua** en Z_0 si

$$\lim_{Z - Z_0} f(Z) = f(Z_0)$$

De otra forma, para que que f(Z) sea contínua en Z_0 debe tener un límite en Z_0 y éste límite debe ser $f(Z_0)$

Una función es contínua en un grupo S si es contínua en cada punto de S.

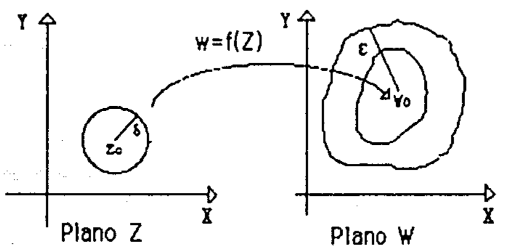
F(Z) se aproxima a un límite precisamente cuando sus puntos real e imaginario se aproximan a su límite.

DEFINICION:

Hagamos $f(Z)$ una función definida en alguna vecindad de Z_0 exceptuando Z_0 mismo.

El límite de $f(Z)$ cuando Z se aproxima a Z_0 es el número w_0, si para cualquier ε existe un número positivo δ tal que

$$|f(Z) - w_0| < \varepsilon \text{ mientras } 0 < |Z - Z_0| < \delta$$



EJEMPLO:

Probar que el límite

$$\lim_{z \to 1} Z^2 = -1$$

Solución:

Debemos probar que para $\varepsilon > 0$ hay un número δ tal que

$|Z^2 - (-1)| < \varepsilon$ cuando $0 < |Z - i| < \delta$

$Z^2 - (-1) = Z^2 + 1 = (Z + i)(Z - i) = (Z - i)(Z - i + 2i)$

$|Z^2 - (-1)| = |Z^2 + 1| = |Z - i|\,|Z - i + 2i| \leq |Z - i|\,(|Z - i| + 2)$

Para asegurar que el lado izquierdo es menor que ε primero comprobamos que Z esté en la vecindad de Z_0 con la $\delta < 1, \varepsilon/3$

$|Z - i|\,(|Z - i| + 2) < \varepsilon/3\,(1 + 2) = \varepsilon$

Esto es una relación entre el límite de una función y el límite de una secuencia.

$$\text{Si} \lim_{Z \to Z_0} f(Z) = w_0 \qquad \text{entonces}$$

para toda secuencia $\{Z_n\}_0^\infty$ que converge en Z_0, $(Z_n \neq Z_0)$.

La secuencia $\{f(Z_n)\}_0^\infty$ converge en w_0.

REPASO DE DEFINICION:

f(Z) es una función definida en una vecindad de Z_0, entonces f(Z) es continua si:

$$\lim_{Z \to Z_0} f(Z) = f(Z_0)$$

EJERCICIOS

1.- Encontrar los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{Z\to 3i} \dfrac{Z^2+9}{Z-3i}$

Solución:

Para $Z \neq 3i$ se define la función:

$$\frac{Z^3+9}{Z-3i} = \frac{(Z+3i)\ (Z-3i)}{Z-3i} = Z+3i$$

$$\lim_{Z\to 3i} Z+3i = 6i$$

b) $\lim\limits_{Z\to i} \dfrac{Z^2+1}{Z^4-1}$

Solución: Para $Z \neq 1$:

$$\frac{Z^2+1}{(Z^2+1)\ (Z^2-1)} = \frac{1}{Z^2-1}$$

$$\lim_{Z\to i} \frac{1}{Z^2-1} = \frac{1}{i^2-1} = -\frac{1}{2}$$

c) $\lim\limits_{\Delta Z\to 0} \dfrac{(Zo-\Delta Z)^2-Z_0^2}{\Delta Z}$

$$= \lim_{\Delta Z\to 0} \frac{Z_0^2+\Delta Z^2-2Zo\Delta Z\ -Z_0^2}{\Delta Z}$$

$$= \lim_{\Delta Z\to 0} \frac{\Delta Z^2-2Zo\Delta Z}{\Delta Z} = \Delta Z-2Zo$$

$$= \lim_{\Delta Z\to 0}\ 0-2Z_0 = 2Zo$$

1.5 ANALITICIDAD.

DEFINICION:

Sea $f(Z)$ una función de valor complejo definida en una vecindad de Z_0, entonces la derivada de $f(Z)$ en Z_0 es :

$$f'(Z_0) = \lim_{\Delta Z \to 0} \frac{f(Z_0 + \Delta Z) - f(Z_0)}{\Delta Z}$$

Siendo ΔZ un valor complejo

Si $f(Z)$ es diferenciable, el cociente de diferencias debe tender a un valor complejo $f'(Z)$ donde :

$$\Delta Z \longrightarrow 0$$

Independientemente de la dirección que se tome.

La derivada de una función compleja sigue las mismas reglas que las de una función real.

EJEMPLO

Comprobar que.

$$\frac{d}{dz} Z^n = n Z^{n-1}$$

Solución.
Aplicando el teorema del Binomio encontramos que :

$$\frac{(Z+\Delta Z)^n - Z^n}{\Delta Z} = \frac{nZ^{n-1}\Delta Z + \frac{n(n-1)}{2} Z^{n-2}(\Delta Z)^2 + \ldots (\Delta Z)^n}{\Delta Z}$$

Por lo cual

$$\frac{d}{dz} Z^n = \lim_{\Delta Z \to 0} \frac{(Z+\Delta Z)^n - Z^n}{\Delta Z} = nZ^{n-1}$$

Para el caso de $f(Z) = \bar{Z}$

$$\frac{\overline{Zo + \Delta Z}}{\Delta Z} - \frac{\overline{Zo}}{\Delta Z} = \frac{\overline{\Delta Z}}{\Delta Z}$$

Si ΔZ tiende a cero por el eje real

$$\frac{\overline{\Delta Z}}{\Delta Z} = 1$$

Si ΔZ tiende a cero por el imaginario

$$\frac{\overline{\Delta Z}}{\Delta Z} = -1$$

Lo cual quiere decir que en esta ocasión no se tendrá un valor

único de $f'(Z)$ en todos los puntos.

DEFINICION:

Una función de variable compleja $f(Z)$ es analítica en un grupo abierto G, si tiene una derivada en cada punto de G.

Analiticidád es una propiedad definida para un grupo abierto que se cumple mientras exista derivabilidad en un solo punto

Si $f(Z)$ es analitica en todo el plano complejo, es entera.

Existen criterios prácticos para establecer la analiticidad de una función, uno de éstos se aplica a la función expresada en términos de:

$$u(x,y) + v(x,y)i$$

de tal forma que:

$$\mathrm{Re}Z = \frac{Z+\bar{Z}}{2} \qquad \mathrm{Im}Z = \frac{Z-\bar{Z}}{2i}$$

Al sustituir $x(Z,\bar{Z})$ y $y(Z,\bar{Z})$

Se podrá apreciar si el resultado está dado en términos de Z lo cual indicará que la función es analítica. En caso de intervenir al menos un valor de $\bar{Z}$ no se tendrá analiticidad ,

-ver caso $f'(\bar{Z})$-.

EJEMPLO:

Exprese las siguientes funciones en términos de $\overline{Z}$ y Z

$$f_1(Z) = \frac{x - 1 - iy}{(x-1)^2 + y^2}$$

Solución:

$$f(z) = \frac{\frac{Z+\overline{Z}}{2} - 1 - i\frac{Z-\overline{Z}}{2i}}{\left(\frac{Z+\overline{Z}}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{Z-\overline{Z}}{2i}\right)^2}$$

$$= \frac{\overline{Z} - 1}{Z\overline{Z} - Z - \overline{Z} + 1} = \frac{1}{Z-1}$$

Es analítica

$$f_2(Z) = x^2 + y^2 + 3x + 1 + i3y$$

$$= \frac{(Z+\overline{Z})^2}{4} + \frac{(Z-\overline{Z})^2}{4i} + 3\left(\frac{Z+\overline{Z}}{2}\right) + 1 + i3\left(\frac{Z-\overline{Z}}{2i}\right)$$

$= Z\overline{Z} + 3Z + 1$ No es analítica.

ECUACION DE CAUCHY-RIEMANN

La propiedad de analiticidad dicta una relación entre las partes real e imaginaria, la cual se muestra a continuación.

Si $f(Z) = u(x,y) + v(x,y)i$ es diferenciable en un punto $Z_0 = x_0 + iy_0$ se tiene:

$$f'(Z_0) = \lim_{\Delta Z \to 0} \frac{f(Z_0 + \Delta Z) - f(Z_0)}{\Delta Z}$$

donde ΔZ tiende a cero desde cualquier dirección en el plano complejo. Considerando $\Delta Z = \Delta x + \Delta y i$ y aproximándonos por el eje x.

$$f'(Z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) + iv(x_0 + \Delta x, y_0)}{\Delta x} - \frac{u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Estos límites serán las derivadas parciales de u y v con respecto a x

$$f'(Z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Ahora si ΔZ tiende a cero por el eje y tendremos

$$f'(Z\ \ ) = -i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Igualando ambas ecuaciones

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

En $Z_0 = x_0 + y_0$

Estas son la ecuaciones de Cauchy-Riemann.

TEOREMA

Una condición necesaria para que $f(Z) = u(x,y) + v(x,y)i$ sea diferenciable en Z_0 es que se cumplan las ecuaciones de C-R.

Consecuentemente, si $f(Z)$ es analítica en un grupo abierto G entonces las ecuaciones de C-R se cumplirán en todos los puntos de G.

EJEMPLO:

Mostrar que $f(Z) = x^2 + y + i(y^2 - x)$ es analitica en cualquier punto

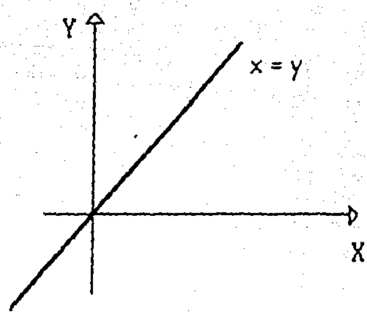
Solucion:

$$u(x,y)=x^2+y$$
$$iv(x,y)=i(y^2-x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y$$

Las ecuaciones de C-R se cumplen en éste caso solo si $x = y$ lo cual representa una línea. Por lo tanto no es analitica.



TEOREMA

Sea $f(Z) = u(x,y) + v(x,y)i$ definida en algún disco abierto G conteniendo al punto Z_0.

Si las primeras derivadas parciales de u y v existen en G, son contínuas en Z_0 y satisfacen las ecuaciones de C-R en Z_0. Entonces $f(Z)$ es diferenciable en Z_0.

Si esto se cumple en todos los puntos de G, $f(Z)$ será analítica en G.

EJEMPLO:

Probar que $f(Z) = e^x \cos y + i\, e^x \operatorname{sen} y$ ....(1)

es entera.

Solución:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen} y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \operatorname{sen} y \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Todas las primeras derivadas son continuas y satisfacen las ecuaciones de C-R en cada punto del plano Z,

por lo tanto f(Z) es entera.

$$f'(Z)=e^{x}\cos y+ie^{x}\operatorname{sen} y \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Como se observa, curiosamente f(Z) = f'(Z).

<u>TEOREMA:</u>

Si f(Z) es analítica en un dominio D y f'(Z) = 0 para todo punto de D entonces f(Z) es constante en D.

f(Z) es constante cuando se cumplen algunas de las condiciones siguientes.

$$\operatorname{Re} f(Z) = \text{cte.}$$

$$\operatorname{Im} f(Z) = \text{cte.}$$

$$|f(Z)| = \text{cte.}$$

1.6 FUNCIONES ARMONICAS.

DEFINICION

Una función de valor real $\phi\,(x,y)$ se denomina armónica en un dominio D si todas sus segundas derivadas parciales son contínuas en D y en cada punto de D se cumple que:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

Las fuentes de estas funciones son las partes real e imaginaria de una funcion analítica.

Su estudio es de gran importancia debido a la abundante cantidad de soluciones que aportan en las matemáticas aplicadas

TEOREMA

Si $f(Z) = u(x,y) + v(x,y)i$ es analítica en un dominio D, entonces cada una de las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son armónicas.

EJEMPLO

Construir una función analítica donde la parte real es

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y$$

Verificamos que:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0$$

Por lo que $u(x,y)$ es armónica en todo el plano complejo

Para conocer $v(x,y)$ se hace lo siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 \text{.............}(1)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy - 1 \text{.............}(2)$$

Al integrar $v(x,y)$ con respecto a y

$$v(x,y) = \int 3x^2 - 3y^2 dy$$
$$= 3x^2y - y^3 + \phi(x)$$

Si deseamos conocer el valor de $\phi(x)$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + \phi'(x)$$

Tomando en cuenta que.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy - 1 = 6xy + \phi'(x)$$

$$\phi'(x) = -1$$

$$\phi(x) = \int \phi'(x)\,dx = \int -1\,dx = -x + c$$

Por lo que:
$$v(x,y) = 3x^2y - y^3 - x + c$$
$$f(Z) = x^3 - 3xy^2 + y + i[3x^2y - x - y^3 + c]$$
$$= Z^3 - i(Z - c)$$

Dos funciones armónicas nos dan una analítica. De una analítica se obtienen dos armónicas.

Gradiente:

Vector perpendicular a una curva en el plano

$$\nabla u\,(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$\nabla v\,(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Aplicamos el producto punto

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Si tomamos en cuenta las ecuaciones C-R.

$$-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Cuando el producto del gradiente es cero las curvas son perpendiculares.

Esto quiere decir que las funciones armónicas forman una familia de curvas en el plano xy, así como que las generadas por u(x,y) son perpendiculares a las producidas por v(x,y).

EJERCICIOS

1.- Encontrar la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(Z) = 6Z^3 + 8Z^2 + iZ + 10$

Solución:

$$f'(Z) = 18Z^2 + 16Z + i$$

b) $f(Z) = (Z^2 - 3i)^{-6}$

Solución:

$$f'w^n = nw^{n-1}\,dw$$

$$f'(Z) = -12Z\,(Z^2 - 3i)^{-7}$$

c) $f(Z) = 6i\,(Z^3 - 4)^4\,(Z^2 + 2Z)^{100}$

Solucion:

$$f'AB = AdB + BdA$$

$$A = 6i(Z^3 - 4)^4$$

$$B = (Z^2 + 2Z)^{100}$$

$$f'(Z) = 6i(Z^3 - 4)^4\,100\,(2Z + 2)(Z^2 + 2Z)^{99} +$$

$$+ (Z^2 + 2Z)^{100}\,(24i)\,(3Z^2)\,(Z^3 - 4)^3$$

$$f'(Z) = 6i(Z^3 - 4)^3\,(Z^2 + 2Z)^{99}\big(100(2Z + 2)(Z^3 - 4) +$$

$$+ 4(Z^2 + 2Z)\,(3Z)^2\big)$$

2. En que puntos la función no es analítica.

a) $\dfrac{1}{Z-2+3i}$ ⟶ en $(2+3i)$

b) $\dfrac{iZ+2Z}{Z+1}$ ⟶ en (-1)

3. Discuta la analiticidad de cada una de éstas funciones

a) $8\bar{Z}+1$ Con la simple intervención de $\bar{Z}$ no hay analiticidad

b) $\dfrac{Z^3+2Z+1}{Z-5}$ Es analítica excepto en $Z=5$

c) x^2-y^2+2xyi

Debemos aplicar la transformación a términos de Z y $\bar{Z}$

$$\left(\frac{Z-\bar{Z}}{2}\right)^2-\left(\frac{Z-\bar{Z}}{2i}\right)^2+2i\left(\frac{Z-\bar{Z}}{2}\right)^2\left(\frac{Z-\bar{Z}}{2i}\right)^2=$$

$$\frac{Z^2+2Z\bar{Z}+\bar{Z}^2}{4}+\frac{Z^2-2Z\bar{Z}+\bar{Z}^2}{4}+2i\left(\frac{Z^2-\bar{Z}^2}{4i}\right)=$$

$$Z^2+2Z\bar{Z}+\bar{Z}^2+Z^2-2Z\bar{Z}+\bar{Z}^2+2Z^2-2\bar{Z}^2=$$

$$=4Z$$

Por lo tanto si es analítica y derivable en el plano complejo

4. Probar que la función $e^{x^2-y^2}(\cos(2xy)+i\,\text{sen}(2xy))$

Es entera

Solución.
Aplicando la condición de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-e^{x^2-y^2}\,\text{sen}(2xy)2y+2xe^{x^2-y^2}\cos(2xy)\text{.........}(1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-e^{x^2-y^2}\,\text{sen}(2xy)2x+2ye^{x^2-y^2}\cos(2xy)\text{.........}(2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=2\times e^{x^2-y^2}\cos(2xy)-2ye^{x^2-y^2}\text{sen}(2xy)\text{.........}(3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2\times e^{x^2-y^2}\,\text{sen}(2xy)+2ye^{x^2-y^2}\cos(2xy)\text{.........}(4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\longrightarrow(3)=(1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\longrightarrow(4)=-(2)$$

Por lo tanto: es entera

5 Encontrar el polinomio armónico mas sencillo de la forma

$$f(x,y)= ax^2+bxy+cy^2$$

Solución:

si sabemos que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ Derivamos

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2ax+by$ $\frac{\partial f}{\partial y} = bx+2cy$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2a$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2c$ $a=c$

Por lo tanto: $f(x,y)=ax^2+ bxy +ay^2$

1.7 FUNCIONES ELEMENTALES

La función e^z es considerada de gran interés en la teoría de las funciones analíticas.

Su aplicación se extiende a la definición de las funciones trigonométricas.

Propiedades de e^z

a) $e^{z1}e^{z2}= e^{z1+z2}$

b) $\dfrac{e^{z1}}{e^{z2}} = e^{z1-z2}$

c) $\dfrac{de^z}{dz} = e^z$

d) $e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi}$

donde x y y son reales.

Ejercicio:

De c) $\quad f(y)=e^{iy}$

$$\frac{df}{dy} = ie^{iy} = if$$

$$\frac{d^2f}{dy^2} = -f = i(if) \qquad \frac{d^2f}{dy^2} + f = 0 \ldots\ldots (1)$$

Cualquier función de la forma $\quad f(x)= A\cos y + B \operatorname{sen} y$

donde A y B son constantes complejas

satisface la ecuación (1).

Para evaluar A y B:

$$f(0)=e^{i0} \quad =e^{0} \;=1$$

$$\frac{df(0)}{dy}= \quad if(0) =i$$

como A=1 y B=i tendremos que:

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

DEFINICION:

Si $Z = x + iy$, entonces e^{Z} será un número complejo de la forma

$$e^{Z} = e^{x} (\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

Si $Z \neq 0$ entonces $\qquad Z = |Z|\, e^{i \arg Z}$

e^{Z} es una función entera y además:

$$|e^{Z}| = |e^{x+iy}| = e^{x} \qquad \text{ya que}$$

$$\arg e^{Z} = \arg e^{x+iy} = y + 2\pi K \qquad (K= 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots)$$

TEOREMA

Una condición necesaria y suficiente para que $e^{Z} = 1$ es:

$e^{Z_1} = e^{Z_2}$

$Z_1 = Z_2 + 2\pi Ki$

EJEMPLO

Demostrar que $e^Z = 1$ con $Z = x + iy = 2\pi Ki$

Solución:

$$|e^Z| = |e^{x+iy}| = e^x = 1$$

Si $x = 0$

$$e^Z = e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y = 1$$

esto quiere decir que:

$$\cos y = 1$$

$$\operatorname{sen} y = 0$$

Lo cual solo se satisface cuando $y=2\pi K$ y $Z= 2\pi Ki$

Se puede decir que e^Z es periódica pues presenta un ciclo complejo $2\pi i$

$$S_n = \{x+iy \mid -\infty < x <, \infty, (2n-1)\pi < y \leq (2n+1)\pi\}$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots,)$$

DEFINICION

Dado cualquier número complejo

$$\operatorname{sen} Z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos Z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Donde e^{iZ} y e^{-iZ} son funciones enteras.

Algunas identidades válidas con respecto a las funciones complejas son enlistadas a continuación:

a) $\operatorname{sen}(Z+2\pi)=\operatorname{sen} Z$, $\cos(Z+2\pi)=\cos Z$

b) $\operatorname{sen}(-Z)=-\operatorname{sen} Z$, $\cos(-Z)=\cos Z$

c) $\operatorname{sen}^2 Z+\cos^2 Z=1$

d) $\operatorname{sen}(Z_1 \pm Z_2)=\operatorname{sen} Z_1 \cos Z_2 \pm \operatorname{sen} Z_2 \cos Z_1$

e) $\cos(Z_1 \pm Z_2)=\cos Z_1 \cos Z_2 \mp \operatorname{sen} Z_1 \operatorname{sen} Z_2$

f) $\operatorname{sen} 2Z=2 \operatorname{sen} Z \cos Z$, $\cos 2Z=\cos^2 Z-\operatorname{sen}^2 Z$

Otras funciones trigonométricas están definidas por:

$$\tan Z=\frac{\operatorname{sen} Z}{\cos Z} \qquad \cot Z=\frac{\cos Z}{\operatorname{sen} Z}$$

$$\sec Z=\frac{1}{\cos Z} \qquad \csc Z=\frac{1}{\operatorname{sen} Z}$$

Algunas reglas de derivación serán las siguientes:

$$\frac{d}{dZ}\tan Z=\sec^2 Z\, dZ \quad , \quad \frac{d}{dZ}\sec Z=\sec Z \tan Z\, dZ$$

$$\frac{d}{dZ}\cot Z=-\csc^2 Z\, dZ \quad , \quad \frac{d}{dZ}\csc Z=-\csc Z \cot Z\, dZ$$

En ocasiones existen diferencias con respecto a las reglas aplicadas a los reales.

Ejemplo:

$$|\operatorname{sen} iy|=\left|\frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}\right|=|\operatorname{senh} y|$$

Para los reales $|\operatorname{sen} x|$ es menor ó igual a 1

<u>EJERCICIOS</u>

1.- Transforme los siguientes números a la forma a+bi

a) $e^{2+(\pi/4)i} = e^2(\cos(\pi/4) + i \operatorname{sen}(\pi/4))$

$= (e^2/\sqrt{2})(1+i)$

b) $\cos(1-i) = \cos(1)\cos(-i) - \operatorname{sen}(1)\operatorname{sen}(-i)$

$= \cos 1 \cosh(1) + i \operatorname{sen}(1)\operatorname{senh}(1)$

c) $\cosh(\pi i/2) = \cos(\pi/2) = 0$ (No tiene valor a+bi)

2.- Encontrar la derivada de las siguientes funciones:

a) $w = e^{\pi Z^2}$

$w' = (2\pi Z)e^{\pi Z^2}$

b) $w = e^{\operatorname{sen} 2Z}$

$w' = 2e^{\operatorname{sen} 2Z}(\cos 2Z)$

c) $w = \tan^3 Z$

$w' = 3\tan^2 Z \sec^2 Z$

3.- Encontrar todos los números tales que:

a) $e^{4Z} = 1$

$4Z = 0 + 2\pi Ki$

$Z = (\pi Ki)/2$ (K=0,1,2,......)

b) $e^{z} = 3$

$$iZ = \log 3 + 2\pi K i$$
$$Z = (\log 3)/i + 2\pi K \qquad (K=0,1,2,.....)$$

4.- Demostrar que

$$e^{Z+\pi i} = -e^{Z}$$

Solución:

$$e^{Z+\pi i} = e^{Z} e^{\pi i} = e^{Z}(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$$
$$= e^{Z}(-1+i(o)) = -e^{Z}$$

5.- Resolver la siguiente ecuación:

$$\log(Z^2 - 1) = i(\pi/2)$$

Solución:

$$Z^2 - 1 = e^{i(\pi/2)}$$
$$Z^2 = e^{i(\pi/2)} + 1 = (\cos(\pi/2) + i \operatorname{sen}(\pi/2) + 1$$
$$= (0 + i) + 1 = i + 1 = \sqrt{2}\, e^{i(\pi/4)}$$
$$Z = {}^{4}\sqrt{2}\, e^{i(\pi/8)}$$

LA FUNCION LOGARITMICA

DEFINIREMOS LOGARITMO DE Z COMO LA INVERSA DE LA FUNCION EXPONENCIAL.

$$w = \log Z \ \text{ si } Z = e^{w}$$

donde $e^{w} \neq 0$ por lo que $Z \neq 0$

tenemos que:

$$Z = re^{i\theta} \qquad \text{si}$$

$$w = u + vi$$

$$re^{i\theta} = e^{u+vi} = e^{u}e^{vi}$$

por lo que $v = \theta + 2\pi K$

$$e^{u} = r \ , \ u = \ln r$$

resumiendo:

$$w = u + vi = \log r + i(\theta + 2\pi K)$$

DEFINICION

Si $Z \neq 0$ entonces $\log Z$ tendrá un valor cualquiera.

Podemos escribir lo siguiente:

$$\log Z = \log|Z| + i \arg Z + i2\pi K \qquad (K=0,\pm 1,\pm 2,.....)$$

EJEMPLO

$$\log 3 = \log 3 + i \arg 3 = (1.098) + i2\pi K$$

$$\log(1+i) = \log|1+i| \arg(1+i)$$

$$= (\log 2)/2 + i(\pi/4 + 2\pi K) \qquad (K=0,\pm 1,\pm 2,....)$$

Se debe señalar que

$$\arg Z_1Z_2 = \arg Z_1 + \arg Z_2$$

$$\arg(Z_1/Z_2) = \arg Z_1 - \arg Z_2$$

se aplica lo mismo para el logaritmo complejo

$$\log Z_1Z_2 = \log Z_1 + \log Z_2$$

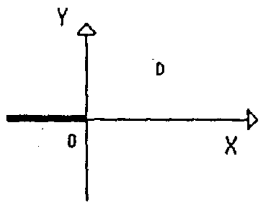
$$\log(Z_1/Z_2) = \log Z_1 - \log Z_2$$

La derivada será:

$$f'(\log Z) = 1/Z$$

TEOREMA

La función log Z es analitica en el dominio consistente en todos los puntos del plano complejo con excepción de los números negativos contenidos en el plano x



Exponenciación Compleja.

DEFINICION

Si α es una constante compleja y $Z \neq 0$, entonces definimos Z^{α} como:

$$Z^{\alpha} = e^{\alpha \log Z}$$

donde α puede ser un complejo

EJERCICIOS

1. Escriba los siguientes números de la forma a + bi

a) $e^{2+\pi/4i} = e^2(\cos(\pi/4) + i\,\mathrm{sen}(\pi/4))$

$$= (e^2/\sqrt{2})\ (1+i)$$

b) $\cos(1-i) = \cos(1)\cos(-i) - \text{sen}(1)\text{sen}(-i)$

$= \cos(1)\cosh(1) + i\,\text{sen}(1)\text{senh}(1)$

2. Encontrar f' en cada una de las siguientes funciones:

a) $w = e^{\text{sen}(2z)}$

$$w' = 2e^{\text{sen}(2z)}\cos(2z)$$

b) $w = \text{Tan}3z$

$$w' = 3\tan^2 z\,\sec^2 z$$

3. Encontrar los números z para los cuales se cumple lo siguiente:

a) $e^{4z} = 4$

$$4z = \log 4 + 2\pi ki = (0 + 2\pi k)i + \log 4$$

$$Z = (\pi ki)/2 + \log 4 \qquad (k = 0,1,2,3\ldots\ldots\ldots)$$

b) $e^{iz} = 3$

$$iz = \log 3 + 2\pi ki$$

$$Z = \log 3/i + 2\pi k \qquad (k = 0,1,2,3\ldots\ldots\ldots)$$

4. Encuentre todos los valores de :

a) i^i

Solución: $e^{i\log(i)} = e^{-\pi/2 - 2\pi k}$

b) $(1+i)^3 = e^{3\log\sqrt{2} + (3\pi/4 + 6\pi k)i}$

$= [(\sqrt{2}/2) + (\sqrt{2}/2 i)](\sqrt{2})^3$

$= -2 + 2i$

CAPITULO 2

"ANTECEDENTES AL ANALISIS DE SERIES COMPLEJAS"

2.1 PARAMETRIZACION

CURVA SUAVIZADA

Es aquella que no tiene picos ni cruces

DEFINICION

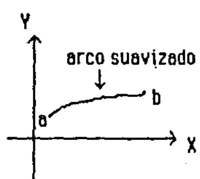
Un grupo de puntos en el plano complejo tendrá un arco suavizado ,si el rango de alguna función de valor complejo continuo $Z=Z(t)$, $a<t<b$, satisface las siguientes condiciones:

a) $Z(t)$ tiene una derivada continua entre a y b.

$$a \le t \le b$$

b) $Z'(t)$ jamás desaparece en $[a,b]$

c) $Z(t)$ mantiene una relación 1 a 1 en $[a,b]$



PORQUÉ LA PARAMETRIZACION

Con el propósito de facilitar la integración de una función compleja de la forma $Z(x,y)$. Se transforma la misma de tal manera que solo quede en términos de t, donde t es un parámetro de las funciones $x(t)$ y $y(t)$.

Existen varias formas de satisfacer el comportamiento de una función mediante la parametrización. Cualquiera que satisfaga a) , b) y c) será conocida como parametrización admisible en el intervalo [a,b]

A continuación se enuncian las tres reglas de parametrización más sencillas y útiles:

a) La línea recta comprendida entre:

$$Z1=a+bi \qquad Z2=c+di$$

$$Z(t)=Z1=t(Z2-Z1) \qquad 0\leq t\leq 1$$

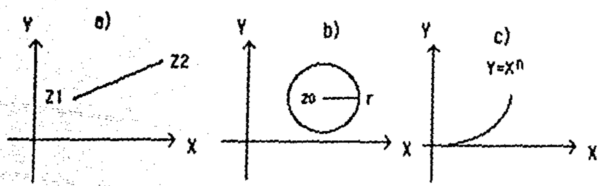
b) La circunferencia $|Z-Zo|=r$

$$Z(t)=Zo+re^{it} \qquad 0\leq t\leq 2\pi$$

c) Curva de la forma $Y=X^n$

$$X=t \qquad Y=t^n$$

$$Z(t)=t+t^n i \qquad 0\leq t\leq \infty$$



2.2 INTEGRACION COMPLEJA

Las reglas de integración para los números complejos son similares a las aplicadas en los reales.

la parametrización es impresindible si se desea simplificar el cálculo en un plano complejo.

EJEMPLO

Evaluar $\int(2t+it)dt$

$$=t^2 + (1/2)it + c$$

$$_0\int^{\pi} e^{it}dt$$

$$=e^{it}/i\,]^{\pi} = e^{i\pi}/i - e^{i0}/i = 2i$$

La integral f(z) en términos de t puede ser resuelta de la siguiente manera:

$$_c\int f(Z)dZ = {}_a\int^b f(Z(t))Z'(t)dt \text{..............................} (1)$$

EJEMPLO

Calcular la integral $_{Cr}\int(Z-Zo)ndz$ donde n es un entero y Cr es el circulo $|Z-Zo|=r$ recorrido una vez en dirección de las manecillas del relój.

Solución:

Parametrizando a Cr tenemos que:

$$Z(t)=Zo+re^{it} \qquad 0\leq t\leq 2\pi$$

Si $f(Z)=(Z-Zo)^n$ entonces:

$$f(Z(t))=(Zo+re^{it}-Zo)^n=r^n e^{int}$$

y $z'(t)= ire^{it}$

Utilizando la ecuación (1)

$$\int_{Cr}(Z-Zo)^n dz=\int_0^{2\pi}(r^n e^{int})(ire^{it})dt=ir^{n+1}\int_0^{2\pi}e^{i(n+1)t}dt$$

La evaluación de dicha integral requiere dos suposiciones:

$n\neq -1$

$$ir^{n+1}\int_0^{2\pi}e^{i(n+1)t}\,dt= ir^{n+1}\left.\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)}\right|_0^{2\pi}$$

$$=ir\left[\frac{1}{i(n+1)}-\frac{1}{i(n+1)}\right]=0$$

$n=-1$

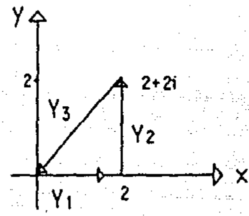
$$ir^{n+1}\int_0^{2\pi}e^{i(n+1)t}\,dt= i\int_0^{2\pi}dt \quad =2\pi i$$

por lo tanto:

$$\int_{Cr}(Z-Zo)^n\,dZ=\begin{cases}0 \text{ si } n\neq 1\\ 2\pi i \text{ si } n=-1\end{cases}$$

EJEMPLO

Evaluar $\int_T \bar{Z}^2$ a lo largo de el contorno simple y cerrado T indicado en la figura.



por lo tanto:

$$\int_{\gamma_1} \bar{Z}^2 dz = \int_0^2 \overline{Z_1(t)}^2 Z_1'(t)\, dt = \int_0^2 t^2\, dt = \frac{t^3}{3}\Big]_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$\int_{\gamma_2} \bar{Z}^2 dz = \int_0^2 \overline{Z_2(t)}^2 Z_2'(t)\, dt = \int_0^2 (2 - ti)^2 i\, dt =$$

$$= \frac{i(2-ti)^3}{-3i}\Bigg|_0^2 = \frac{-(2-2i)^3}{3} + \frac{8}{3}$$

$$\int_{\gamma_3} \bar{Z}^2 dz = \int_{-2}^0 \overline{Z_3(t)}^2 Z_3'(t)\, dt = \int_{-2}^0 [-t(1-i)]^2 [-(1+i)]\, dt$$

$$= -(1+i)(1-i)^2 \int_{-2}^0 t^2 dt = -(1+i)(1-i)^2 \frac{8}{3}$$

La solución es:

$$\int_T \bar{Z}^2 dz = \frac{8}{3} + \left[\frac{-(2-2i)^3}{3} + \frac{8}{3}\right] + \left[-(i+i)(1-i)^2 \frac{8}{3}\right]$$

$$= \frac{16}{3} + \frac{32}{3} i$$

INTEGRAL DE CAUCHY.

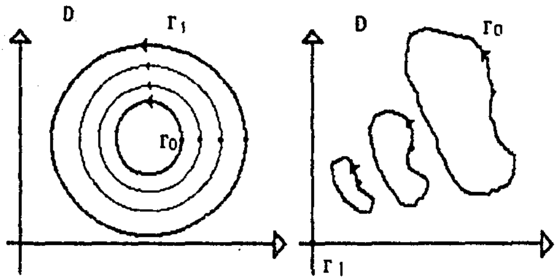
Si una función f(Z) poseé una antiderivada (analítica) en un dominio D, su integral alrededor de cualquier contorno en D será cero.

$$\int f(Z)\, dZ = 0$$

La noción crítica de esta consideración es la visualización y entendimiento de la llamada deformación continua de un contorno hacia otro en un dominio D.

Esto es difícil de expresar matemáticamente, sin embargo es fácil imaginar.

Podemos decir que el contorno Γ_0 puede ser continuamente deformado hasta Γ_1 en un dominio D, si puede moverse libremente a lo largo del plano sin abandonar D de tal manera que finalmente coincida con Γ_1 (tanto en posición como en dirección).



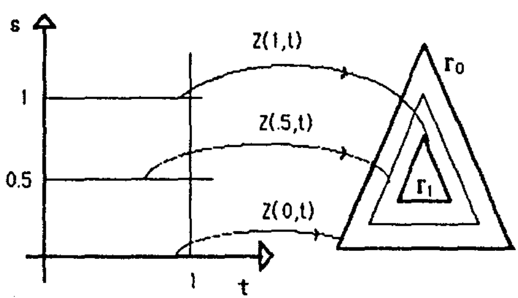
DEFINICION

El contorno Γ_0 es continuamente deformable hacia Γ_1 en el dominio D. Si existe una función Z (s,t) continua en la unidad cuadrada $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$ la cual satisface las siguientes condiciones:

1) Por cada valor s en [0,1] la función Z(s,t) parametriza un contorno en D.

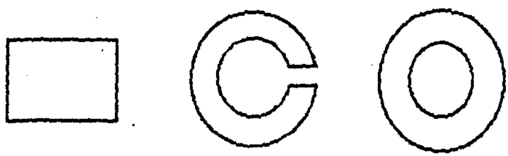
2) La función Z(0,t) parametriza el contorno Γ_0

3) La función Z(1,t) parametriza el contorno Γ_1



DEFINICION

Un dominio D que posea la propiedad de que cualquier contorno incluido en éste pueda ser continuamente deformado hasta un punto es conocido como **dominio simple conectado.**



Simple conectado Simple conectado No Simple conectado

TEOREMA DE CAUCHY

Si f(Z) es analítica en un dominio simple conectado D y Γ es un contorno cerrado en D entonces:

$$\int_{\Gamma} f(Z)\, dZ = 0$$

Esta integral de contorno es la suma de las integrales a lo largo de los componentes de Γ

La integral de contorno puede ser obtenida a través de la siguiente ecuación:

$$\int_{\Gamma} f(Z)\, dZ = \int_{a}^{b} f(Z(t))Z'(t)dt$$

Cuando el elemento f(Z) es analítico en un dominio D, el cual contiene a Γ, se debe considerar lo siguiente en la evaluación de la integral de contorno:

a) Si f tiene antiderivada F en un dominio que contenga a Γ entonces:

$$\int_{\Gamma} f(Z)\, dZ = F(Z_T)-F(Z_I)$$

donde Z_I y Z_T son los puntos inicial y final de Γ.

b) Si Γ es un contorno simple, cerrado y positivamente orientado, y f tiene la forma $f(Z)=g(Z)/(Z-Z_0)$ con g analítico dentro y sobre Γ y Z_0 en el interior de Γ entonces:

$$\int_{\Gamma} f(Z)\, dZ = \int_{\Gamma} \frac{g(Z)}{Z-Z_0}\, dZ = 2\pi i g(Z_0)$$

generalizando:

$$\int_{\Gamma} \frac{g(Z)}{(Z-Z_0)^m}\, dZ = \frac{2\pi i g^{(m-1)}(Z_0)}{(m-1)!}$$

De acuerdo con lo anterior podemos definir:

$$f(Z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(Z)\, dZ}{Z-Z_0}$$

La cual es conocida como la **Integral de Cauchy** con ella se puede hacer una aproximación de la siguente manera:

$$\int_{\Gamma} \frac{f(Z)\, dZ}{Z-Z_0} = \int_{C_r} \frac{f(Z)}{Z-Z_0}\, dZ$$

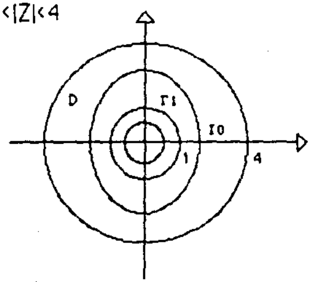
A partir de ésta es posible obtener las llamadas estimaciones de Cauchy para las derivadas de una función analitica en un circulo de radio R.

$$f^{n}(Z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - Z_0)^{n+1}}\, d\xi.$$

Con ξ contenida en C_R

EJERCICIOS

1 - Encontrar una función $Z(s,t)$ deformando Γ_0 en Γ_1 en el dominio D. Donde Γ_0 es la elipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ girando una vez en contra de las manecillas del reloj empezando en $(2,0)$, Γ_1 es el circulo $|Z|=1$ girando una vez en contra de las manecillas del reloj empezando en $(1,0)$, y D es el anillo $1/2<|Z|<4$



Solución:

$$\int_{\Gamma_1} ZdZ = \int_{\Gamma_0} ZdZ$$

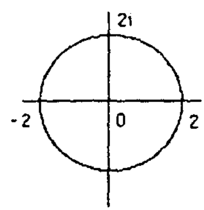
$$\Gamma_0 = \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

$$\Gamma_1 = |Z|=1 = x^2+y^2=1$$

Para Γ_0	Para Γ_1	donde
$u=2\cos\theta$	$u=\cos\theta$	$0\leq\theta\leq 2\pi$
$v=3i\cos\theta$	$v=\operatorname{sen}\theta$	$0\leq s\leq 1$

$$Z(s,t)=(2-s)\cos\theta+i(3-2s)\operatorname{sen}\theta$$

2.- Considerando C como el círculo $|Z|=2$ recorriendo una vez en sentido positivo, calcule cada una de las siguientes integrales:



a) $\displaystyle\int_C \frac{\operatorname{sen} 3Z}{Z-\pi/2}\,dZ$

Solución:

$f=\operatorname{sen} 3Z$

$$\int_C = 2\pi i\, f(\pi/2)$$

$$= 2\pi i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = -2\pi i$$

b) $\int_C \frac{Ze^{Z}}{2Z-3}\, dZ$ solución

$$\int_C \frac{Ze^{Z}}{2Z-3}\, dZ = \int_C \frac{Ze^{Z/2}}{Z-3/2}\, dZ$$

$$= 3/2\, \frac{e^{3/2}}{2} 2\pi i = \frac{3\pi i\; e^{3/2}}{2}$$

3.- Calcule $\int_C \frac{Z+i}{Z^3+2Z^2}\, dZ = \int_C \frac{Z+i}{Z^2(Z+2)}\, dZ = I$

Cuando C es el circulo $|Z|=1$ recorriendo una vez en dirección de las manecillas del reloj

Solución

$$I = 2\pi i \;\frac{f'((Z+i)/(Z+2))}{1!} \quad ; \quad Z=0$$

$$f' = \frac{Z+2-Z+i}{(Z=2)^2} \quad ; \quad f(0) = \frac{Z+i}{4}$$

$$I = \frac{2\pi i\,(Z-i)}{4} = \pi i + \pi/2$$

CAPITULO 3

"SERIES"

3.1 CRITERIOS DE CONVERGENCIA

DEFINICION

Una serie es una expresión formal de la forma

$$C_0 + C_1 + C_2 + C_3 \ , \ \sum_{j=0}^{n} C_j$$

donde C_j son números complejos.

Z_n n-esima suma parcial de las series

S_n es al suma de los n+1 primeros términos de la serie $S_n = \sum_{j=0}^{n} C_j$

Si la ecuación de sumas parciales S_1, S_2, S_3, ..., $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene un límite S, la serie es convergente o suma $S = \sum_{j=0}^{n} C_j$.

Si no tiene límite es divergente.

Lema 1

La serie $\sum_{j=0}^{n} C^j$ converge a

$$\frac{1}{1-C} \quad \text{si } |C| < 1 \qquad \text{(Serie geométrica)}$$

$$\frac{1}{1-C} = \frac{e^{n+1}}{1-e} - \sum_{j=0}^{\infty} C^j$$

residuo

OTRO CRITERIO.

TEOREMA I (Prueba de comparación)

Si $\sum_{j=0}^{\infty} M_j$ es una serie convergente con términos no negativos y si para toda $j > J$ $|C_j| \leq M_j$ entonces la serie $\sum_{j=0}^{\infty} C_j$ también converge.

Ejemplo:

La serie $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{3+2i}{(j+1)^j}$

$$3+2i + \frac{3+2i}{2} + \frac{3+2i}{9} + \frac{3+2i}{64} \leq \frac{1}{16}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdots\cdots$$

$$|3+2i| = \sqrt{13} < 4 \quad ; \quad \text{para } j > 3$$

TEOREMA 2 (Prueba del cociente)

Supongamos que los términos de las series $\sum_{j=0}^{\infty} C_j$ tienen la propiedad $\left|\frac{C_j+1}{C_j}\right| \longrightarrow L$

cuando $j \to \infty$

La serie converge si $L < 1$

La serie diverge si $L > 1$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{4^j}{j!}$$

$$\left|\frac{C_j+1}{C_j}\right| = \frac{4^{j+1}\ \ j!}{(j+1)!\,4^j} = \frac{4}{j+1} \to 0$$

cuando $j \to \infty$

La serie converge.

La secuencia de más interés es la de funciones de variable compleja y así mismo, la secuencia de sumas parciales de series de funciones.

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{Z}{Z_0}\right)^j \quad \text{converge para} \quad |Z|<|Z_0| \;;\; C=\frac{Z}{Z_0}$$

$$\frac{1}{1-\frac{Z}{Z_0}}-\left[1+\frac{Z}{Z_0}+\left(\frac{Z}{Z_0}\right)^2\right]+\cdots\cdots\left(\frac{Z}{Z_0}\right)^n=\frac{\left(\frac{Z}{Z_0}\right)^{n+1}}{1-\frac{Z}{Z_0}}$$

Z_0 cual es la sumatoria, por lo tanto es convergente

a $\dfrac{1}{1-\frac{Z}{Z_0}}$ si $|Z|<|Z_0|$

Inversamente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(Z)$ converge uniformemente a $F(Z)$ en L si la secuencia de sumas parciales converge uniformemente a $F(Z)$.

<u>EJEMPLO:</u>

Mostrar que la serie $\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{Z}{Z_0}\right)^3$ converge uniformemente en cada disco cerrado.

Donde: $|Z| \leq r \leq |Z_0| \qquad \xi > 0$

Solución: El remanente después de n+1 términos será menor que ξ para todo Z en el disco.

$$\left|\frac{\left(\frac{Z}{Z_0}\right)^{n+1}}{1-\frac{Z}{Z_0}}\right| \leq \frac{\frac{r}{|Z_0|}}{1-\frac{r}{|Z_0|}} \qquad \begin{array}{ll}\text{para} & |Z| \leq r\\ \text{y} & r \leq |Z_0|\end{array}$$

3.2 SERIE DE TAYLOR

Supongase que deseamos encontrar un polinomio $P_n(Z)$ de grado n , el cual se aproxime a una función analitica $f(Z)$ en una vecindad del punto Z_0 .

Dados los diferentes criterios para aproximar un polinomio esta vez se construirá uno que "se parezca" a $f(Z)$ en Z_0 de tal forma que sus derivadas sean iguales a las de f en Z_0.

$$P_n(Z_0)=f(Z_0)$$

$$P'_n(Z_0)=f'(Z_0)$$

$$P''_n(Z_0)=f''(Z_0)$$

etc.

La constante polinomial $P_0(Z)$ en Z_0 simplemente será igual a $f(Z_0)$

$$P_0(Z_0)=f(Z_0)$$

El polinomio de grado 1 que equivale a f y f' en Z_0 es:

$$P_1(Z)=f(Z_0)+f'(Z_0)(Z-Z_0)$$

El polinomio de grado 2 que equivale a f , f' yf" en Z_0 es:

$$P_2(Z)=f(Z_0)+f'(Z_0)(Z-Z_0) + f''(Z_0)/2!(Z-Z_0)^2$$

Con lo anterior podemos deducir que el polinomio de grado n que se aproxima a $f', f'', \ldots\ldots\ldots f^n$ es:

$$P_n(Z) = f(Zo)+f'(Z_0)(Z-Zo)+\frac{f''(Z_0)}{2!}(Z-Zo) + \ldots \frac{f^n(Zo)}{n!}(Z-Zo)^n$$

Naturalmente podremos observar que conforme n tienda a infinito se logrará una aproximación cada vez mejor de f(Z) en Zo . Esto se parece a una suma parcial de series cuya convergencia se tendrá justamente en f(Z).

DEFINICION

Si f(Z) es analitica en Zo , entonces la serie :

$$P_n(Z) = f(Zo)+f'(Z_0)(Z-Zo)+\frac{f''(Z_0)}{2!}(Z-Zo)+\ldots=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{f^j(Zo)}{j!}(Z-Zo)^j$$

La cual es conocida como la **Serie de Taylor** para f alrededor de Zo .Cuando Zo=0 ésta es también conocida como la **Serie de Maclaurin** para f.

TEOREMA

Si f(Z) es analitica en el disco $|Z-Zo|<R$,entonces la serie de Taylor converge en f(Z) para todo Z contenido en el disco.

EJERCICIOS:

1.- Verificar cada una de las siguientes expresiones de Taylor para encontrar una fórmula general en $f^j(Z_0)$.

Determine los discos sobre los cuales dichas expresiones son válidas

a) $e^z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots,\qquad z_0 = 0$

Solución:

$$f^0(e^z) = e^z = 1\ ,\quad f^I(e^z) = e^z = 1\ ,\quad f^{II}(e^z) = e^z = 1\ ,\ldots\ldots$$

Por lo tanto cumple con la fórmula de Taylor

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \left| \frac{\frac{Z^{j+1}}{(j+1)!}}{\frac{Z^j}{j!}} \right| = \left| \frac{Z}{j+1} \right| \longrightarrow 0$$

$$j \longrightarrow \infty$$

Por lo tanto es válida para todo el plano Z

b) $\cosh Z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{Z^{2j}}{(2j)!} = 1 + \frac{Z^2}{2!} + \frac{Z^4}{4!} + \ldots\ldots\ldots,\qquad Z_0 = 0$

Solución:

$$f^0(\cosh Z) = \cosh Z = 1\qquad ,\quad f^I(\cosh Z) = \operatorname{senh} Z = 0$$

$$f^{II}(\cosh Z) = \cosh Z = 1\qquad ,\quad f^{III}(\cosh Z) = \operatorname{senh} Z = 0$$

$$f^{2n+1}(\cosh Z) = \cosh Z = 1\qquad ,\quad f^{2n}(\cosh Z) = \operatorname{senh} Z = 0$$

lo cual cumple con Taylor

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \left| \frac{\frac{Z^{2(j+1)}}{2((j+1))!}}{\frac{Z^j}{(2j)!}} \right| = \left| \frac{Z^2}{(2j+1)(2j+2)} \right| \longrightarrow 0$$

$$j \longrightarrow \infty$$

válida para todo el plano Z

2.- Encontrar las propiedades de convergencia de las series de Taylor para lo siguiente.

a) $\frac{1}{1+Z}$ alrededor de $Z_0=0$

Solución:

$$\frac{1}{1+Z} = 1-Z+Z^2-Z^3+Z^4-\ldots\ldots(-1)^n Z^n$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \left|\frac{-1^{n+1} Z^{n+1}}{-1^n Z^n}\right| = \left| -Z \right|$$

Por lo tanto converge en $|Z|<1$

b) $\frac{1+Z}{1-Z}$ alrededor de $Z_0=i$

Solución: La serie estará dada por

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(Z-i)^j}{(1-i)^{j+1}} + i$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \left|\frac{\frac{(Z-i)^{(j+1)}}{(1-i)^{(j+2)}}}{\frac{(Z-i)^j}{(1-i)^{(j+1)}}}\right| = \left|\frac{(Z-i)}{(1-i)}\right|$$

Por lo tanto converge en $|Z-i|<\sqrt{2}$

3.- Usando el producto de series de Taylor, encontrar los 3 primeros términos diferentes de cero en la expansión de Maclaurin en lo siguiente:

a) $e^z \cos Z$

solución:
$$e^z = 1 + Z + \frac{Z^2}{2!} + \frac{Z^3}{3!} + \frac{Z^4}{4!} + \ldots\ldots$$

$$\cos Z = 1 - \frac{Z^2}{2!} + \frac{Z^4}{4!} - \frac{Z^6}{6!} + \ldots\ldots\ldots$$

$$e^z \cos Z = 1 + Z - \frac{Z^3}{3!} - \frac{Z^4}{3!}$$

b) $\sec Z = \dfrac{1}{\cos Z}$

solución:

$$\cos Z = 1 - w \quad , \quad w = \frac{Z^2}{2!} - \frac{Z^4}{4!} + \frac{Z^6}{6!} - \frac{Z^8}{8!} + \ldots\ldots$$

$$\sec Z = \frac{1}{1-w} = 1 + w + w^2 + w^3 + \ldots\ldots\ldots$$

$$\sec Z = 1 + \frac{Z^2}{2!} + \frac{5Z^4}{4!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

4.- Encontrar una fórmula explícita para la función analítica $f(Z)$ que tiene la expresión de Maclaurin $\sum^{\infty} k^2 Z^k$ (sugerencia : empezar con la expresión $(1-Z)^{-1} = \sum^{\infty} Z^k$ diferenciando, multiplicando por Z , diferenciando de nuevo y finalmente multiplicando por Z).

Solución:

La expresión está dada por:

$$\frac{1}{1-Z} = 1+Z+Z^2+Z^3+Z^4+Z^5+\ldots\ldots$$

Su derivada será:

$$\frac{1}{(1-Z)^2} = 1+2Z+3Z^2+4Z^3+5Z^4+\ldots\ldots$$

Multiplicando por Z:

$$\frac{Z}{(1-Z)^2} = Z+2Z^2+3Z^3+4Z^4+5Z^5+\ldots\ldots$$

Derivando de nuevo:

$$\frac{1+Z}{(1-Z)^3} = 1+4Z+9Z^2+16Z^3+25Z^4+\ldots\ldots$$

Multiplicando de nuevo por Z:

$$\frac{Z(1+Z)}{(1-Z)^3} = Z+4Z^2+9Z^3+16Z^4+25Z^5+\ldots\ldots = \sum_{0}^{\infty} k^2 Z^k$$

Esta es la fórmula

3.3 SERIE DE LAURENT

Ahora se desea conocer la posibilidad de representar una serie para una función f cercana a una singularidad ,punto en el cual f no es analitica pero es el limite de aquellos puntos donde f si lo es.

Después de todo,la ocurrencia de una singularidad está sujeta al comportamiento del denominador.

¿Será posible expresar funciones como $A/(Z-Z_0)^p+g(Z)$, donde g es analitica y tiene Serie de Taylor alrededor de Z_0?

En realidad no todas las singularidades son de ese tipo (recordar log Z en $Z_0=0$). De cualquier forma , si la función es analitica en un anillo que circunde una o mas de sus singularidades (nótese que log Z no tiene esa propiedad), podemos obtener su parte singular de acuerdo con lo siguiente:

TEOREMA:

Sea f(Z) analitica en un anillo abierto $r<|Z-Z_0|<R$. Entonces f(Z) puede ser expresada como la suma de dos series

$$f(Z)=\sum_{j=0}^{\infty} a_j (Z-Z_0)^j + \sum_{j=1}^{\infty} a_{-j} (Z-Z_0)^{-j}$$

Ambas series convergen en el anillo,y convergen uniformemente en cualquier subanillo cerrado

$$r<\rho_1 \leq |Z-Z_o| \leq \rho_2 < R$$

Los coeficientes aj están dados por:

$$a_j = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(\xi)}{(\xi - Z_o)^{j+1}} d\xi \qquad (j=0 \pm 1 \pm 2 \pm 3 \ldots\ldots)$$

Donde C es cualquier contorno simple cerrado , positivamente orientado dentro del anillo y conteniendo a Z_0 en su interior.

Tal expresión que contiene potencias tanto negativas como positivas de $(Z-Z_0)$ es conocida como la Serie de Laurent para f en este anillo. Usualmente se representa de la siguiente manera:

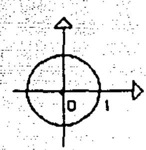
$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (Z-Z_0)^j$$

Nótese que si f es analítica fuera del disco $|Z-Z_o|<R$, los coeficientes negativos de la penúltima ecuación serán cero y los otros reproducirán la serie de Taylor para f.

JERCICIOS

Encontrar la Serie de Laurent para la función $\frac{1}{Z(Z+1)}$ en cada uno de los siguientes dominios:

a) $0 < |Z| < 1$

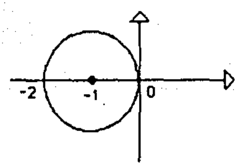


$$\frac{1}{Z+1} = 1 - Z + Z^2 - Z^3 + Z^4$$

$$\frac{1}{Z(Z+1)} = \frac{1}{Z} - 1 + Z - Z^2 + Z^3$$

$$= \sum_{-1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot Z^n$$

b) $|Z+1| > 1$



$$\frac{1}{Z(Z+1)} = \frac{1}{Z} - \frac{1}{Z+1}$$

$$\frac{1}{Z+1-1} = \frac{1}{Z+1} \frac{1}{1 - \frac{1}{Z+1}}$$

$$= \frac{1}{Z+1} \left(1 + \left(\frac{1}{Z+1}\right) + \left(\frac{1}{Z+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{Z+1}\right)^3 \right)$$

$$= \frac{1}{Z+1} + \left(\frac{1}{Z+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{Z+1}\right)^3 \cdots$$

$$\frac{1}{Z(Z+1)} = \left(\frac{1}{Z+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{Z+1}\right)^3 + \cdots\cdots = \sum_{2}^{\infty} \left(\frac{1}{Z+1}\right)^n$$

) $|Z| > 1$

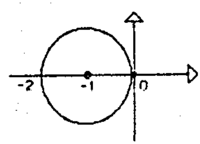
$$\frac{1}{Z+1} = \frac{1}{Z}\,\frac{1}{1+\frac{1}{Z}} = \frac{1}{Z}\left(1 - \frac{1}{Z} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{Z^3}\right)$$

$$= \frac{1}{Z} - \frac{1}{Z^2} + \frac{1}{Z^3} - \frac{1}{Z^4}$$

$$\frac{1}{Z(Z+1)} = \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{Z^3} + \frac{1}{Z^4} - \frac{1}{Z^5} \cdots\cdots$$

$$= \sum_{2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{Z}\right)^n$$

I) $0 < |Z+1| < 1$



$$\frac{1}{Z(Z+1)} = \frac{1}{Z} - \frac{1}{Z+1}$$

$$\frac{1}{(Z+1)-1} = -\frac{1}{1-Z+1} = -\left(1 + (Z+1) + (1+Z)^2 + (1+Z)^3 \cdots\cdots\right)$$

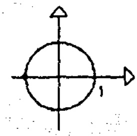
$$\frac{1}{Z(Z+1)} = -\frac{1}{Z+1} - 1 - (Z+1) - (Z+1)^2 - (Z+1)^3$$

$$= -\sum_{-1}^{\infty} (Z+1)^n$$

Encontrar las Series de Laurent para la función $\frac{1}{(Z+1)(Z-2)}$ para cada uno de los siguientes dominios.

a) $|Z| < 1$

$$\frac{Z}{(Z+1)(Z-2)} = \frac{\frac{1}{3}}{Z+1} + \frac{\frac{2}{3}}{Z-2}$$



$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+Z}\right) = \frac{1}{3}\left(1 - Z + Z^2 - Z^3 + Z^4\right)$$

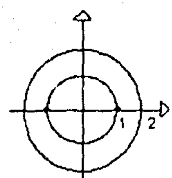
$$\frac{-\frac{2}{3}}{2-Z} = \frac{-\frac{1}{3}}{1-\frac{Z}{2}} = \frac{1}{3}\left(1 + \left(\frac{Z}{2}\right) + \left(\frac{Z}{2}\right)^2 + \left(\frac{Z}{2}\right)^3 \ldots\right)$$

$$\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} \sum_{0}^{\infty} (-1)^n Z^n$$

$$-\frac{\frac{2}{3}}{2-Z} = -\frac{1}{3} \sum_{0}^{\infty} \left(\frac{Z}{2}\right)^n$$

$$\frac{1}{(Z+1)(Z-2)} = \frac{1}{3} \sum_{1}^{\infty} \left[(-1)^n - \frac{1}{2^n}\right] Z^n$$

b) $1 < |Z| < 2$



$$\frac{Z}{(Z+1)(Z-2)} = \frac{\frac{1}{3}}{Z+1} + \frac{\frac{2}{3}}{Z-2}$$

$$-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{Z}{2}} = -\frac{1}{3} \sum_{0}^{\infty} \left(\frac{Z}{2}\right)^n$$

$$\frac{\frac{1}{3}}{1+Z} = \frac{1}{Z\cdot 3}\ \frac{1}{1+\frac{1}{Z}} = \frac{1}{3}\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{Z}\right)^{n+1}(-1)^n$$

$$\frac{1}{(Z+1)(Z-2)} = \left(\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{Z}\right)^{n+1}(1)^n - \left(\frac{Z}{2}\right)^n\right)\frac{1}{3}$$

c) $|Z| > 2$

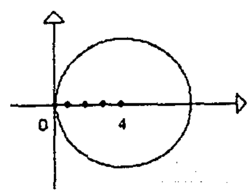
$$\frac{Z}{(Z+1)(Z-2)} = \frac{\frac{1}{3}}{Z+1} + \frac{\frac{2}{3}}{Z-2}$$

$$\frac{Z}{(Z+1)(Z-2)} = \frac{1}{3}\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{Z}\right)^{n+1}(-1)^n + \frac{1}{3}\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{2}{Z}\right)^{n+1}$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{Z}\ \frac{1}{1-\frac{2}{Z}} = \frac{2}{Z\cdot 3}\left(1+\frac{2}{Z}+\left(\frac{2}{Z}\right)^2+\left(\frac{2}{Z}\right)^3+\qquad\right)$$

3) Encontrar la serie de Laurent para

$$I = \frac{Z+1}{Z(Z-4)^3} \quad \text{en} \quad 0<|Z-4|<4$$



$$\frac{Z+1}{Z(Z-4)^3} = \frac{A}{Z} + \frac{B}{(Z-4)^3} + \frac{C}{(Z-4)^2} + \frac{D}{(Z-4)}$$

$$\frac{1}{4^4}\ \frac{1}{1-\frac{(Z-4)}{4}} = \sum_{0}^{\infty}\frac{(Z-4)^n(-1)^{n+1}}{4^{n+4}}$$

$$I = \frac{5/4}{(Z-4)^3} - \frac{1/16}{(Z-4)^2} + \frac{1/64}{(Z-4)} + \sum_{0}^{\infty}\frac{(Z-4)^n(-1)^{n+1}}{4^{n+4}}$$

BIBLIOGRAFIA:

- FUNDAMENTALS OF COMPLEX ANALISIS
  For :
  Mathematics, Science and Engineering

  E. B. SAFF
  A. D. SNIDER

  University of South Florida

- COMPLEX VARIABLES AND APLICATIONS
  International Student Edition

  RUEL V. CHURCHILL

  McGraw-Hill Book Company

- NOTAS DE CLASE DE LA ASIGNATURA:
  MATEMATICAS APLICADAS A LA INGENIERIA PETROLERA

  Impartida por:

  M. en I. RAFAEL HERRERA GOMEZ