

17201  
ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES



“ARAGON”

**ANALISIS DE ESTRUCTURAS ESPECIALES  
DE PUENTES POR EL METODO DEL  
ELEMENTO FINITO**

**T E S I S**

Que para obtener el Título de:

**INGENIERO CIVIL**

Presenta:

**DANIEL VELAZQUEZ VAZQUEZ**

**FALLA DE ORIGEN**

México, D. F. 1990



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# CONTENIDO

Pág.

## CAPITULO I

### INTRODUCCION

8

## CAPITULO II

### CONCEPTOS BASICOS

15

- Método de las Rigideces. 16
- Conceptos de Elasticidad. 26
- Circulo de Mohr para Esfuerzos. 36

## CAPITULO III

### MATRIZ DE RIGIDECES PARA EL CASO GENERAL

43

## CAPITULO IV

### CASO DEL ELEMENTO VIGA

52

## CAPITULO V

### CASO DEL ELEMENTO TRIANGULAR PARA ESPUEZOS Y DEFORMACIONES PLANAS

63

## CAPITULO VI

### CASO DEL ELEMENTO RECTANGULAR PARA ESPUEZOS Y DEFORMACIONES PLANAS

76

## CAPITULO VII

ESTRUCTURAS ESPECIALES, SU ANALISIS Y APLICACION DEL METODO POR COMPUTADORA	90
- Aplicación del Programa.	92
- Hipótesis de la Mecánica de Materiales.	93
- Análisis de Esfuerzos de una Viga por la Fórmula de la Escuadría y por el Método del Elemento Finito (Programa SAPV.2).	95
- Análisis de Esfuerzos de Dos Vigas de Gran Peralte por el Método del Elemento Finito (Programa SAPV.2)	100
- Análisis de Esfuerzos de un Muro por el Método del Elemento Finito (Programa SAPV.2).	103
- Análisis de una Pila de Puente por el Método del Elemento Finito (Programa SAPV.2).	105
a) Método Convencional.	109
b) Análisis por Medio del Programa.	114
c) Comparación de Resultados de los Dos Métodos.	119
d) Dirección de los Esfuerzos Principales y Deformación de la Pila.	121
e) Análisis de la Pila Incluyendo la Fuerza Sísmica.	124
- Análisis de una Segunda Pila de Puente por el Método del Elemento Finito (Programa SAPV.2).	126
a) Análisis de la Pila Incluyendo la Fuerza Sísmica.	130
- Análisis de una Tercera Pila de Puente por el Método del Elemento Finito (Programa SAPV.2).	132
a) Análisis Tomando en Cuenta el Acero en la Pila.	137
b) Dirección de los Esfuerzos Principales.	139

	Pág.
<b>CAPITULO VIII</b>	
<b>CONCLUSIONES</b>	<b>141</b>
<b>BIBLIOGRAFIA.</b>	<b>144</b>

## CAPITULO I

### I N T R O D U C C I O N .

## CAPITULO I

### INTRODUCCION

En los años recientes, el método del elemento finito ha tenido amplia aceptación entre los ingenieros como un método de análisis extremadamente valioso. Su aplicación ha dado soluciones satisfactorias para muchos problemas que no tenían solución, y la gran cantidad del esfuerzo dedicado a la investigación, asegura un rápido ensanchamiento del campo de aplicación de este método.

Desafortunadamente, por el alto nivel de la investigación, a este método lo rodea cierta mística. El objetivo de esta tesis es presentar el método y su aplicación en computadora de una manera sencilla y comprensible para remover esta mística entre los ingenieros. Exponemos el planteamiento teórico para esfuerzos y deformaciones planas ya que el análisis tridimensional es más laborioso y su exposición es más complicada.

Para poder aplicar este método es necesaria la creación de un propio programa de computadora o la inteligente aplicación de alguno de los excelentes programas ya disponibles que utilizan el amplio potencial del método.

Esta tesis ayudará a los ingenieros y a los estudiantes de ingeniería que no tienen experiencia con la utilización del método a entender la necesidad de los programas de computadora de este método. Se analizarán algunas estructuras especiales de puentes (pilas), las cuales, analizadas por el método convencional dejan ciertas dudas.

El método de los elementos finitos se utilizó por primera vez en la década de los años cincuenta en el diseño de aeroplanos. Durante algún tiempo se tuvo como un secreto de técnica avanzada, sin embargo, traspuso las barreras de la confidencialidad y actualmente el método se enseña en muchas universidades y colegios técnicos como una técnica numérica para el análisis de esfuerzos y es considerado como uno de los desarrollos más importantes en las últimas décadas.

En realidad, el análisis en ingeniería se orienta a encontrar soluciones numéricas aproximadas en lugar de la solución exacta matemática. El mayor problema de usar las teorías comunes es que la geometría o alguna otra faceta del problema es irregular o arbitraria y es aquí donde las matemáticas puras y rigurosas se quedan inoperantes, y estos problemas son los que constituyen la gran mayoría de los que tendrá que enfrentar el ingeniero. Los profesionales inteligentes han usado su experiencia y criterios propios pero con incertidumbre en tanto no pasan por las pruebas.

El crecimiento del área de aplicación ha revelado lo que realmente es el método, es un procedimiento general para obtener soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales y se extendió a problemas generales de continuos sólidos, líquidos y gases.

En el método se modifica el sistema en elementos finitos (discretización) sustituyendo el continuo real y esta aproximación es en base a su naturaleza física. Estos elementos están interrelacionados y son una serie de problemas mas simples y fáciles de resolver.

El trabajo empieza con la determinación de las propiedades físicas que gobiernan a cada elemento finito. Muchas estructuras en ingeniería están compuestas por una serie de miembros individuales que están conectados. Estas estructuras son llamadas estructuras esqueléticas y los puntos que conectan a los miembros son llamados nudos. Ejemplo de estas estructuras son las vigas continuas y los marcos como los mostrados en la figura 1.1.

El análisis de estas estructuras esqueléticas puede hacerse considerando el comportamiento de cada elemento individual independiente y después ensamblando los elementos de tal manera que se satisfaga el equilibrio de fuerzas y la compatibilidad de desplazamientos en cada nudo.

Por consiguiente, cuando la estructura contiene muchos miembros, como las vigas y marcos que contienen muchos tramos o miembros, este procedimiento puede convertirse en muy laborioso y comprender un gran número de ecuaciones simultáneas. A causa de esto, se ha dedicado mucho esfuerzo en la investigación de técnicas de análisis basadas en la apreciación física del comportamiento de las estructuras, lo cual reduce la cantidad de trabajo requerido de

un análisis completo y no se requiere la solución directa de muchas ecuaciones simultáneas. Un ejemplo es la técnica del método de distribución de momentos de Hardy Cross.

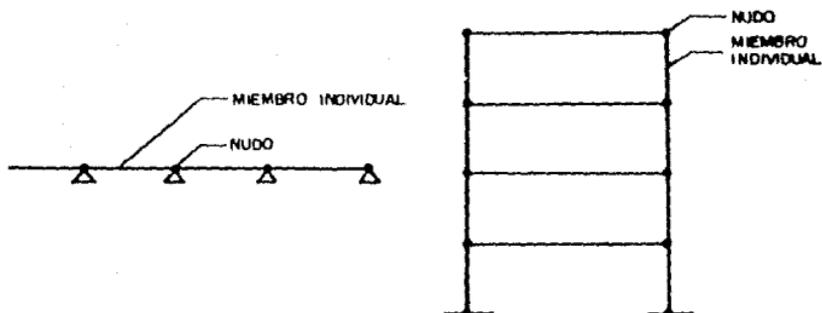


Fig.1.1. Estructuras esqueléticas típicas.

El advenimiento de las computadoras electrónicas digitales ha dispuesto el regreso del método fundamental de análisis que es el método de las rigideces ya que realizan la solución de un gran número de ecuaciones simultáneas. Este método, ya que consiste en pasos repetitivos, es particularmente adecuado para la computadora automática, y su capacidad en la formulación de ecuaciones es de máxima ventaja. Estas computadoras utilizan métodos matriciales para el análisis de estructuras esqueléticas.

En adición a estructuras esqueléticas, los ingenieros se han preocupado por el análisis de estructuras continuas, como las vigas de gran peralte, placas y losas sujetas a flexión, cortinas de presas, placas plegadas y estructuras en cascarón; donde la superficie de la estructura es continua y es sustituida por sus componentes en un número finito de elementos.

El método del elemento finito representa la extensión del método matricial para estructuras esqueléticas en el análisis de estructuras continuas. En el método del elemento finito, el continuo es idealizado como una estructura que consiste en un número de elementos individuales conectados solamente por puntos nodales, como se muestra en la figura 1.2.

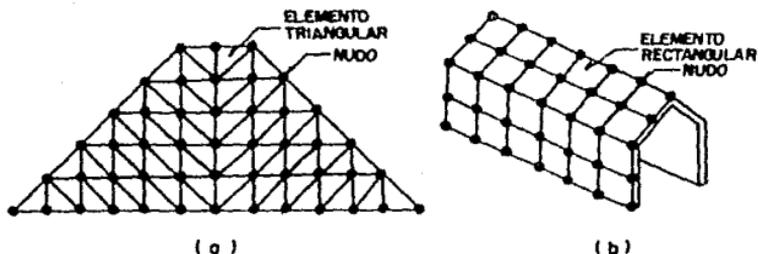


Fig.1.2. Idealización del continuo en elementos finitos. a) Cortina de presa. b) Placa plegada.

Antes de comenzar con los detalles del método discutiremos algunos de los requerimientos del método.

### Requirimientos Fundamentales.

Cualquiera que sea la causa de las fuerzas y deformaciones internas en una estructura, tres son las condiciones básicas que se deben observar:

- a) El equilibrio de fuerzas;
- b) La compatibilidad de desplazamientos; y
- c) Las leyes del comportamiento del material.

Estas primeras condiciones solo son requeridas para el balance entre las fuerzas internas y las cargas externas aplicadas. En algunos problemas estas condiciones son suficientes.

Antes de estas condiciones es necesario conocer las relaciones entre cargas y deformaciones por cada componente de la estructura. Estas relaciones, en problemas de elasticidad lineal se reducen a la ley de Hooke.

El uso de estas tres condiciones es el requerimiento fundamental en cualquier método de análisis estructural.

### Método de las Rigideces o de los Desplazamientos.

En el método de las rigideces se satisface la compatibilidad de desplazamientos y las ecuaciones de equilibrio se determinan y resuelven desconociendo los desplazamientos nodales, ya que éstos se suponen.

### \*Principio del Trabajo Virtual.

El principio de trabajo virtual es usado en la derivación de las rigideces de los elementos. Este principio relaciona las cargas externas y sus correspondientes fuerzas internas de tal manera que satisfagan las condiciones de equilibrio y también los desplazamientos y las correspondientes deformaciones en el miembro

\* Este principio se puede ver desarrollado en textos que tratan de métodos de energía.

que satisfacen la condición de compatibilidad. El principio puede generalizarse como sigue: "El trabajo virtual hecho por las cargas externas es igual al trabajo virtual interno realizado por la estructura". Este principio puede ser expresado matemáticamente de la siguiente manera

$$\delta W = \int \sigma \cdot \epsilon d(\text{Vol.})$$

Donde  $\delta W$  se refiere al sistema de cargas externas,  $\delta$  es la deflexión,  $\sigma$  es el sistema de fuerzas internas y  $\epsilon$  es la deformación interna de la estructura.

## CAPITULO II

### CONCEPTOS BASICOS

---

## CAPITULO II

## CONCEPTOS BASICOS

En este capítulo se asentarán las bases necesarias para la comprensión, análisis y aplicación del método del elemento finito. Se describirá el método de las rigideces, se expondrán las hipótesis en que se basa la teoría de la elasticidad, los conceptos de esfuerzo y deformación y la relación que existen entre ellos, se describirá cuando se debe trabajar con la teoría de esfuerzos planos y deformaciones planas y finalmente se explicará el círculo de Mohr para esfuerzos que ayudará a entender los resultados de los análisis por el método del elemento finito.

## METODO DE LAS RIGIDECES

Las componentes estructurales son para muchos ingenieros familiares a las que tiene un resorte como el mostrado en la figura 2.1

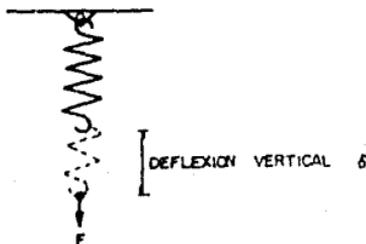


Fig. 2.1 Fuerza aplicada a un resorte

Para las estructuras como para los resortes existen relaciones entre las fuerzas  $F$  y los desplazamientos. Estas relaciones están definidas por la ecuación 2.1

$$F = K \delta \quad (2.1)$$

donde  $K$  es la rigidez del resorte y corresponde a la pendiente del diagrama fuerza-desplazamiento (figura 2.2)

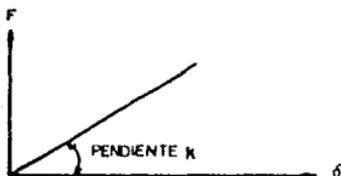


Fig. 2.2.- Diagrama Fuerza-Desplazamiento

Conociendo el valor de la rigidez y de la fuerza aplicada, la ecuación 2.1 puede despejarse para calcular el desplazamiento como

$$\delta = \frac{1}{K} F \quad (2.2)$$

Mientras que el valor de un desplazamiento es suficiente para conocer el estado de deformaciones para un simple resorte, para estructuras más complicadas como lo muestra la figura 2.3, es necesario determinar las deflexiones de las articulaciones B,C,D,E para poder evaluar los esfuerzos en los miembros.

Considerando esta estructura completa, también es posible derivar un valor similar al obtenido en la ecuación 2.1. Para este caso es necesario reescribir la ecuación 2.1 en forma matricial, tal como aparece en la ecuación 2.3.

$$(F) = (K) (\delta) \quad (2.3)$$

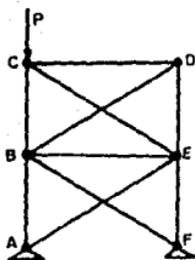


Fig. 2.3.- Estructura con varios miembros y articulaciones

Ya que, un número de miembros está interconectado por un número de nudos, los resultados de la acción fuerza-desplazamiento de la estructura pueden describirse únicamente por medio de una serie de ecuaciones simultáneas. En la ecuación 2.3,  $\{F\}$  y  $\{\delta\}$  son vectores de cargas nodales y desplazamientos nodales respectivamente y  $[K]$  es la rigidez de toda la estructura.

Estos conceptos son la base del análisis del método de las rigideces. La matriz  $[K]$  es determinada por la rigidez de la estructura y relaciona las fuerzas aplicadas en el nudo  $\{F\}$  con los desplazamientos nodales desconocidos  $\{\delta\}$ . Para el resorte mostrado en la figura 2.1, la cual tiene únicamente un solo desplazamiento, la matriz es del orden de  $1 \times 1$  y los vectores  $\{F\}$  y  $\{\delta\}$  contienen un solo término cada uno.

Cuando este resorte es parte de una estructura, cada uno de sus extremos está conectado con otras partes de la estructura y pueden ser desplazados. A cada nudo (extremo del resorte) se le puede aplicar una fuerza.

En la figura 2.4,  $F_1$  y  $U_1$  son la fuerza y desplazamiento en el extremo 1 y  $F_2$  y  $U_2$  son la fuerza y desplazamiento en el extremo 2. Por lo tanto, el vector fuerza y el vector desplazamiento son

$$\{F\} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} ; \quad \{\delta\} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

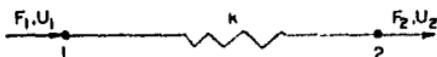


Fig. 2.4.- Resorte que equivale a un elemento conectado en sus extremos con otras partes de la estructura.

La matriz de rigideces del resorte es del orden  $2 \times 2$  y la ecuación 2.3 toma la siguiente forma

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

donde los términos de la matriz de rigideces son aún desconocidos. Estos términos se obtienen permitiendo que adopte cada uno de los elementos un modo independiente de deformación y determinando las relaciones entre los desplazamientos y las fuerzas del nudo.

Adoptaremos la convención de signos que a continuación se muestra en la figura 2.5.



Fig. 2.5.- Convención de signos

Consideremos primero que sólo el extremo 1 puede desplazarse y el extremo 2 permanece fijo.

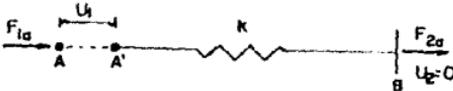


Fig. 2.6.- Caso 1.- Fuerzas aplicadas al elemento con el extremo A libre y el B fijo.

Consecuentemente, la fuerza y desplazamiento del nudo 1 están relacionados por la ecuación.

$$F_{1a} = kU_1$$

Para que exista equilibrio de fuerzas se requiere que

$$F_{1a} + F_{2a} = 0$$

Por lo tanto

$$F_{2a} = -F_{1a} = -k U_1$$

De la misma manera es ahora fijado el nudo 1 en su posición inicial y se permite el desplazamiento al nudo 2.

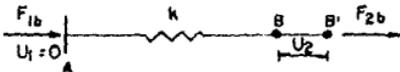


Fig. 2.7.- Caso 2.- Fuerzas aplicadas al elemento con el extremo A fijo y el B libre.

Por lo tanto

$$F_{2a} = k U_1 = - F_{1a}$$

Para obtener las relaciones entre las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  y los desplazamientos  $U_1$  y  $U_2$  para el caso cuando ambos extremos tienen fuerza y desplazamiento.

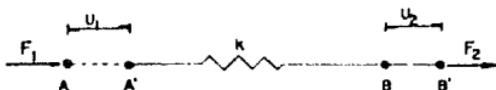


Fig. 2.8.- Caso combinando caso 1 y 2

Aplicando el principio de superposición y combinando los sistemas cargados de las figuras 2.6 y 2.7 tenemos.

Fuerza total en el nudo 1	$F_1 = F_{1a} + F_{1b}$
Fuerza total en el nudo 2	$F_2 = F_{2a} + F_{2b}$
Por lo tanto	$F_1 = kU_1 - kU_2$
	$F_2 = -kU_1 + kU_2$

Y en forma matricial

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

Hasta ahora la matriz de rigideces  $[K^*]$  para el resorte está dada por

$$[K^*] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

donde el sufijo e indica que la matriz es para un elemento individual y no del sistema o estructura.

Una propiedad importante de la matriz de rigideces del elemento es su simetría, ya que, el coeficiente  $k_{12}$  es igual al coeficiente  $k_{21}$ , también debe notarse que es una matriz singular porque el valor de su determinante es cero.

### Ensamble de la Matriz de Rigideces

Como ya se analizó, la matriz de rigideces para un simple elemento es verdaderamente sencilla, el siguiente paso es como estas matrices pueden ser ensambladas para formar la matriz de rigideces de la estructura completa con diversos elementos. En primer lugar, el proceso es similar al descrito anteriormente y para ilustrarlo se presenta la siguiente figura.

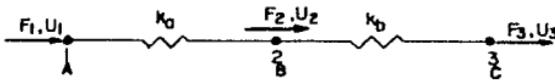


Fig. 2.9.- Dos elementos estructurales unidos por el nudo 2

Procediendo como en el ejemplo anterior,  $U_2$  y  $U_3$  son fijados e igualados a cero, permitiendo únicamente el desplazamiento del nudo 1 como se muestra a continuación

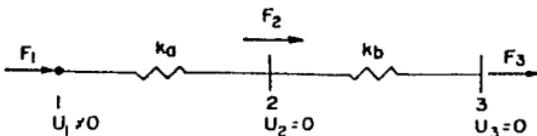


Fig. 2.10.- Caso 1.- Desplazamiento permitido únicamente para el nudo 1.

Para este caso las relaciones entre  $F_1$  y  $U_1$  son

$$F_1 = k_a U_1$$

y por equilibrio  $F_2 = -F_1$

No existe fuerza en el nudo 3 porque  $U_2$  y  $U_3$  valen cero y por lo tanto

$$F_3 = 0$$

Ahora, si  $U_1$  y  $U_3$  se fijan e igualan a cero como lo muestra la siguiente figura

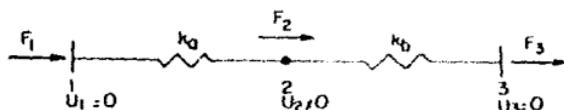


Fig. 2.11.- Caso 2.- Desplazamiento permitido únicamente para el nudo 2.

el nudo 2 requiere que cada uno de los resortes tengan el mismo desplazamiento. La fuerza del nudo 2 consiste en dos componentes  $k_a U_2$  (la fuerza necesaria para extender el resorte AB) y  $k_b U_2$  (la fuerza necesaria para comprimir el resorte BC). Por lo tanto

$$F_2 = (k_a + k_b) U_2$$

considerando el equilibrio en el resorte AB y en el BC

$$F_1 = -k_a U_2$$

$$F_3 = -k_b U_2$$

Finalmente  $U_1$  y  $U_2$  serán fijados e igualados a cero como lo muestra la siguiente figura.



Fig. 2.12.- Caso 3.- Desplazamiento permitido únicamente para el nudo 3

y análogamente al primer caso

$$F_2 = kb U_3$$

$$F_3 = -F_2 = -kb U_3$$

Ya que se considera un comportamiento elástico lineal, se puede aplicar el principio de superposición de los tres casos

$$\text{Caso 1 } F_1 = kaU_1 \quad ; \quad F_2 = -kaU_1 \quad ; \quad F_3 = 0$$

$$\text{Caso 2 } F_1 = -kaU_2 \quad ; \quad F_2 = kaU_2 + kbU_3 \quad ; \quad F_3 = -kbU_3$$

$$\text{Caso 3 } F_1 = 0 \quad ; \quad F_2 = -kbU_3 \quad ; \quad F_3 = kbU_3$$

Expresado en forma matricial

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & -ka & 0 \\ -ka & ka+kb & -kb \\ 0 & -kb & kb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Debe notarse que la matriz de rigideces  $[K]$  es simétrica.

Aunque el ensamble de la matriz  $[K]$  de la ecuación 2.6 no es de gran dificultad en este caso particular, en estructuras con un número grande de elementos el ensamble es extraordinariamente tedioso. Por esta razón se sugiere que la matriz de rigideces  $[K]$  se

obtenga según las matrices de rigideces de los elementos individuales  $(K)$ .

Primero se escriben las matrices de rigideces de los elementos que constituyen la estructura.

Elemento AB

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$$

Elemento BC

$$\begin{Bmatrix} F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_b & -k_b \\ -k_b & k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

Aunque las dos matrices  $(K)$  son del mismo orden no pueden añadirse directamente ya que tienen relación diferente con los desplazamientos. Sin embargo, insertando un renglón y una columna de ceros que relacionen los tres desplazamientos, tenemos

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & k_a & 0 \\ -k_a & k_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_b & k_b \\ 0 & k_b & k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

Con la regla de la suma de matrices puede ahora obtenerse

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a+k_b & k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

## CONCEPTOS DE ELASTICIDAD

La materia puede ser estudiada desde un punto de vista general como una sustancia o medio continuo. Se le consideran propiedades ideales como continuidad y equilibrio, atribuyéndole otras propiedades definidas como isotropía, viscosidad, homogeneidad, elasticidad, etc.

Se considera un medio continuo a la sustancia uniformemente repartida, la cual puede ser idealizada en diversos modelos para su estudio. La mecánica del medio continuo involucra los desplazamientos y flujo de cantidades de materiales sólidos y fluidos.

Para su estudio se considera al material dividido en elementos muy pequeños, o sea, el medio será un conjunto de partículas con cierta disposición y unidas con características determinadas.

El estudio del estado de esfuerzo y del estado de deformaciones de sólidos elásticos da origen a la teoría de elasticidad, designando como sólido al conjunto de partículas unidas por fuerzas cohesivas.

Los cuerpos se clasifican en rígidos y deformables. Un cuerpo elástico es un sólido capaz de deformarse bajo la acción de fuerzas externas, de tal manera que se establezca una relación entre las fuerzas y las deformaciones y cuando dejan de actuar las cargas, el cuerpo recupera su forma inicial. Por el contrario, cuando se trata de cuerpos rígidos el cuerpo conserva su forma inicial y dimensiones al aplicarle un sistema de fuerzas.

### Hipótesis de los Cuerpos Idealmente Elásticos

- En el espacio del sólido definido por sus fronteras, cualquier función que se establezca será continua y derivable.
- El material del cuerpo será elástico, homogéneo e isótropo que consista en mantener las mismas propiedades en todos sus puntos y en cualquier dirección.
- El sistema de cargas actuantes deberá estar en equilibrio.
- Se admite el principio de superposición de causas y efectos.

- Las deformaciones que se presentan en los cuerpos elásticos son pequeñas, de tal manera que no alteran el carácter de las cargas.

Los materiales de construcción que mas condiciones cumplan de las establecidas, tendrán un comportamiento mas congruente con la teoría de elasticidad.

El problema primordial de los sólidos está en conocer el régimen de esfuerzos y deformaciones en cualquier punto. Y no solamente es problema de los sólidos, sino de cualquier medio continuo.

Podemos definir, por lo tanto, que la teoría de la elasticidad es la parte de la física matemática que estudia el problema de la determinación de los esfuerzos y deformaciones en cualquier punto de un sólido elástico. El estudio de la elasticidad puede ser teórico o experimental.

### Esfuerzos

En general, las fuerzas internas que actúan sobre áreas infinitesimales en una sección transversal son de magnitud y dirección variables, como lo muestra la figura 2.13

Estas fuerzas son de naturaleza vectorial y mantienen en equilibrio a las fuerzas exteriormente aplicadas. En la mecánica de sólidos es particularmente significativa la determinación de la intensidad de estas fuerzas sobre las diversas porciones de una sección transversal, pues la resistencia a la deformación y a las fuerzas depende de dichas intensidades. En general varían de un punto a otro y están inclinadas con respecto al plano de la sección. Se acostumbra descomponer las intensidades en direcciones perpendicular y paralela a la sección que se investiga.

Como las componentes de la intensidad de fuerza por unidad de área, esto es, de esfuerzo, se tienen únicamente en un punto, la definición matemática de esfuerzo es

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} \quad (2.8)$$

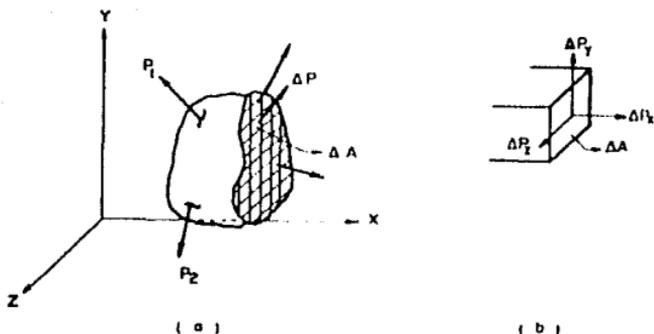


Fig. 2.13.- a) Cuerpo seccionado con fuerzas internas y externas en equilibrio. b) Vista ampliada de  $\Delta A$  con las componentes  $\Delta P$ .

La intensidad de la componente perpendicular a la sección se llama esfuerzo normal en un punto. Los esfuerzos normales que producen tensión en la superficie de una sección transversal se denominan esfuerzos de tensión. Por otra parte, los que actúan o presionan contra la sección transversal reciben el nombre de esfuerzos de compresión. Las otras componentes de intensidad de fuerza actúan tangencial o paralelamente al plano del elemento de área y se llaman esfuerzos cortantes y se denominan por la letra griega  $\tau$ .

### Deformaciones

Un cuerpo cuando es sometido a un sistema de cargas no sólo tiene una deformación lineal (acortamiento o alargamiento en una sola dirección), sino también puede tener deformaciones lineales en otras dos direcciones. En el estudio analítico, las tres direcciones suelen tomarse perpendicularmente entre sí y se identifican por los subíndices X, Y y Z. Un cuerpo también puede deformarse como se ve en la figura 2.14. Estas deformaciones causan un cambio en los ángulos rectos iniciales, entre las líneas de un cuerpo y este cambio de ángulo define la deformación angular o por cortante.

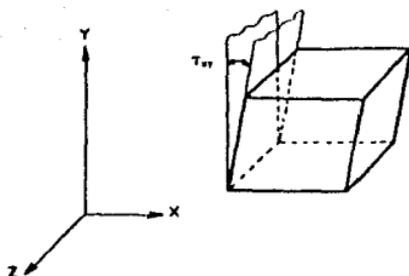


Fig. 2.14.- Deformación angular de un elemento en el plano X,Y

Puesto que las deformaciones varían de un punto a otro, las definiciones de deformación deben relacionarse a un elemento infinitesimal. Consideramos una deformación lineal que ocurre en cierta dirección, como lo indica la figura 2.15a. Algunos puntos como los A y B se mueven a las posiciones A' y B' respectivamente.

Durante el proceso de deformación, el punto A experimenta un desplazamiento  $u$ , el desplazamiento del punto B es  $u+\Delta u$  puesto que además del desplazamiento de cuerpo rígido,  $u$ , común a todo el elemento  $\Delta x$ , se produce un alargamiento  $\Delta u$  dentro del elemento. Con esta base, la definición de deformación lineal es.

$$\epsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \quad (2.9)$$

Si un cuerpo se deforma en direcciones perpendiculares, como se muestra para un caso bidimensional en la figura 2.15b, se deben utilizar subíndices en  $\epsilon$  para indicar la dirección de la deformación. Por la misma razón es necesario cambiar también las derivadas ordinarias por las correspondientes parciales. Por consiguiente, si en un punto de un cuerpo  $u, v,$  y  $w$  son las tres componentes de desplazamiento que ocurren, respectivamente en las direcciones X, Y y Z de los ejes coordenados, las definiciones básicas de deformación lineal se convierten en.

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} \quad ; \quad \epsilon_y = \frac{dv}{dy} \quad ; \quad \epsilon_z = \frac{dw}{dz} \quad (2.10)$$

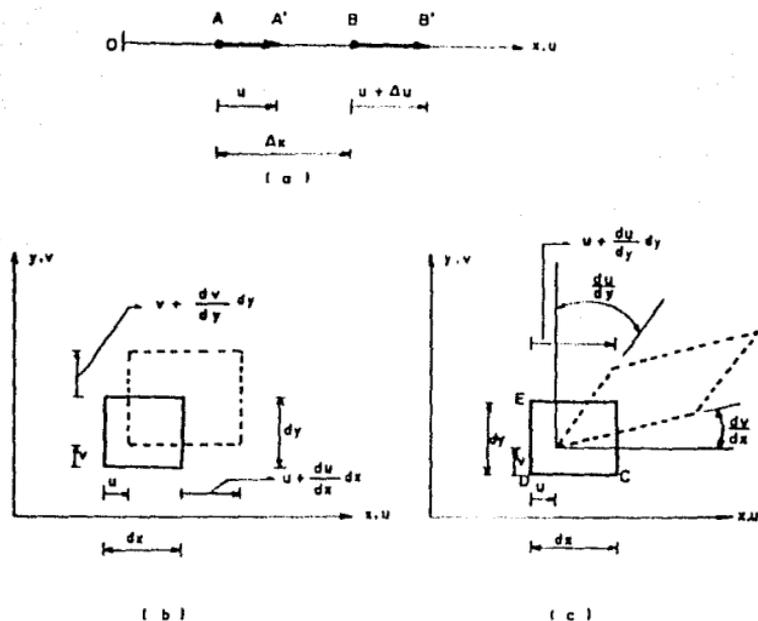


Fig. 2.15.- Elementos deformados en sus posiciones inicial y final.

Además de las deformaciones lineales, un elemento también puede experimentar una deformación angular, como lo ilustra la figura 2.15c. Puesto que  $v$  es el desplazamiento en la dirección  $y$ , a medida que se avanza en la dirección  $x$ ,  $dv/dx$  es la pendiente del lado inicialmente horizontal del elemento infinitesimal. De igual manera, el lado vertical se inclina un ángulo  $du/dy$ . Con base en ello, el ángulo CDE, inicialmente recto, se reduce en la cantidad  $(dv/dx) + (du/dy)$ . Por consiguiente, para cambios de ángulo pequeños la definición de la deformación angular es:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy} \quad (2.11)$$

Las definiciones para las deformaciones angulares correspondientes a los planos XZ y YZ se obtienen en forma semejante y son

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \quad ; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}$$

### Ley de Hooke

La relación entre el estado de esfuerzos y el estado de deformaciones para un medio elástico es

$$\epsilon = K \epsilon \quad (2.12)$$

donde  $K$  es una constante que depende del material para el cual se quiera relacionar el esfuerzo y la deformación cuando esta última es pequeña.

Ahora, la ley de Hooke generalizada para un material isotrópico se puede escribir como

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \\ \epsilon_y &= -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \\ \epsilon_z &= -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \\ \tau_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \tau_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\delta_{xy}}{G}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

donde  $\epsilon$  es la deformación y su subíndice indica la dirección de ésta,  $\gamma$  es la deformación angular y sus subíndices indican el plano de ésta,  $\sigma$  es el esfuerzo y su subíndice indica la dirección en que actúa,  $\tau$  es el esfuerzo cortante y sus subíndices indican el plano en que actúa,  $E$  es el módulo de elasticidad del material,  $G$  es el módulo de rigidez y  $\nu$  la relación de Poisson.

### Esfuerzos Planos

El concepto de esfuerzos planos es aplicable cuando una de sus tres dimensiones es pequeña en relación con las otras dos. Para ilustrar esto consideramos una placa delgada que es cargada con fuerzas aplicadas en su frontera, paralelas al plano de la placa y distribuidas uniformemente sobre su espesor, como lo muestra la figura 2.16,

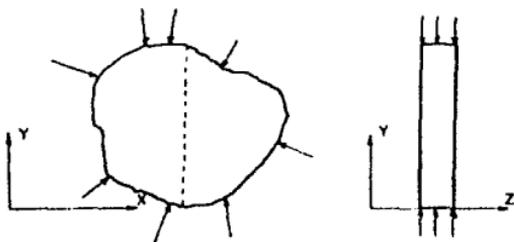


Fig. 2.16.- Placa cargada en su espesor y un corte transversal.

los componentes de esfuerzo  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$  son cero en ambas caras de la placa. Entonces, el estado de esfuerzos es descrito únicamente por  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$ . También puede suponerse que estas tres últimas componentes son independientes de Z ya que son sólo función de X y Y.

### Deformaciones Planas

Es posible una simplificación similar en el otro extremo, es decir, cuando las dimensiones del cuerpo en la dirección Z es muy grande en relación con las otras dos. Por ejemplo, si un prisma cilíndrico es cargado por fuerzas que son perpendiculares a lo largo del elemento y no varían a lo largo de su dimensión más grande, puede considerarse que en todas sus secciones transversales tiene la misma condición, como lo muestra la figura 2.17

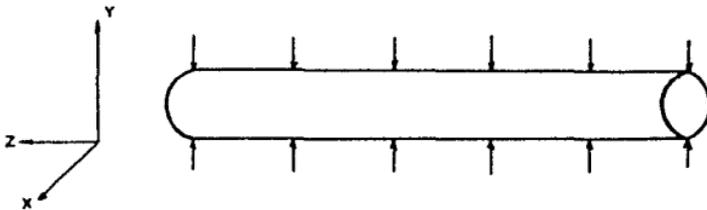


Fig. 2.17.- Tubo sometido a cargas perpendiculares a su longitud

Es simple suponer que las secciones de los extremos están limitadas por planos rígidos, impidiendo el desplazamiento en dirección axial.

Hay muchos problemas importantes donde se aplica este concepto, por ejemplo, en muros de retención donde su presión es lateral o en túneles y alcantarillas como lo muestra la figura 2.18.

En cada caso las cargas no varían a lo largo de su longitud y las condiciones son las mismas para todas las secciones transversales. Por lo tanto, es suficiente con considerar únicamente un corte entre dos secciones separadas a una distancia unitaria. Las componentes  $u$  y  $v$  de los desplazamientos son funciones de  $X$  y  $Y$  y son independientes de la coordenada longitudinal  $Z$ . Ya que el desplazamiento longitudinal  $w$  es cero, las ecuaciones siguientes son iguales a cero.

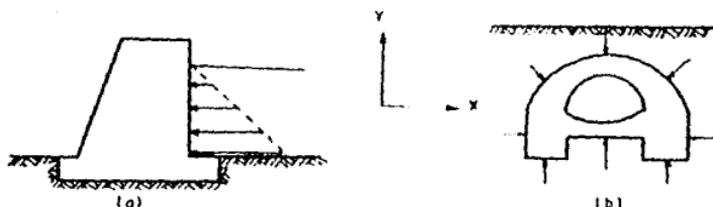


Fig. 2.18.- a) Muro de retención. b) Túnel o alcantarilla

$$\tau_{yz} = \frac{dw}{dz} + \frac{dv}{dy} = 0$$

$$\tau_{xz} = \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} = 0$$

$$\epsilon_z = \frac{dw}{dz} = 0$$

El esfuerzo  $\sigma_z$  puede formularse en términos de  $u$ ,  $v$ , y  $w$ , y por medio de la ley de Hooke generalizada. Ya que  $\epsilon_z = 0$

$$\sigma_z = \nu\sigma_x + \nu\sigma_y = 0$$

$$\sigma_x = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

donde el esfuerzo normal  $\sigma_x$  actúa sobre la sección transversal incluyendo los extremos.

De lo anterior podemos escribir:

**Ley de Hooke para esfuerzos planos**

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E}$$

(2.14)

$$\tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

donde  $G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$

**Ley de Hooke para deformaciones planas**

$$\epsilon_x = (1 - \nu^2) \frac{\sigma_x}{E} - (\nu + \nu^2) \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\epsilon_y = -(\nu + \nu^2) \frac{\sigma_x}{E} + (1 - \nu^2) \frac{\sigma_y}{E}$$

(2.15)

$$\tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

donde  $G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$

## CIRCULO DE MOHR PARA ESFUERZOS

Es evidente que en muchos casos los esfuerzos normales y cortantes actúan simultáneamente en un elemento de un cuerpo. Por ejemplo, un elemento típico A de un miembro sometido a fuerzas axiales y transversales, como lo muestra la figura 2.19, experimenta esfuerzos normales  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$ , debido a las fuerzas axial y flexión, y también un esfuerzo cortante  $\tau_{xy}$ , debido a corte.

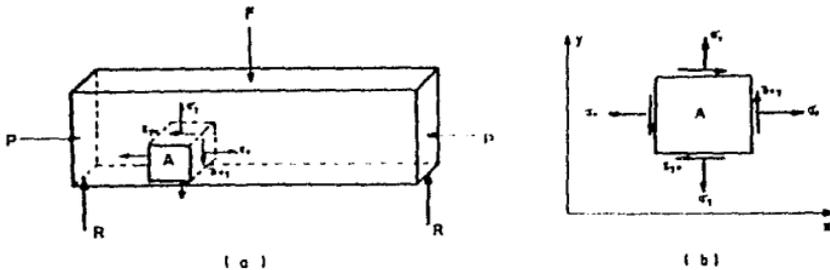


Fig. 2.19.- Estado de esfuerzos en un punto.

Por otra parte, es posible describir el estado de esfuerzos en un punto en términos de los esfuerzos que actúan en un plano inclinado, como lo indica la figura 2.20. Tales descripciones equivalentes del estado de esfuerzo en un punto, ya que los mismos, independientemente de los planos en que actúan, mantienen el equilibrio del elemento.

Aquí se busca la transformación de esfuerzos del sistema  $xy$  de ejes coordenados al sistema  $x'y'$ . Para esto, pasamos un plano BC normal al eje  $x'$  a través del elemento y se aísla la cuña de la figura 2.20b. La sección plana BC forma un ángulo  $\theta$  con el eje vertical  $y$ , si tiene un área  $dA$ , las caras AC y BC tendrán un área de  $dA \cos \theta$  y  $dA \sin \theta$ , respectivamente. Multiplicando los esfuerzos por las áreas respectivas se puede construir un diagrama con las fuerzas que actúan en la cuña, figura 2.20c. Aplicando las

ecuaciones de equilibrio estático a las fuerzas que actúan en la cuña, se obtienen los esfuerzos  $\sigma_{x'}$  y  $\tau_{x'y'}$ .

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\sigma_{x'} dA = \sigma_x dA \cos\theta \cos\theta + \sigma_y dA \sin\theta \sin\theta + 2\tau_{xy} dA \cos\theta \sin\theta$$

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2\tau_{xy} \sin\theta \cos\theta$$

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \frac{(1+\cos 2\theta)}{2} + \sigma_y \frac{(1-\cos 2\theta)}{2} + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (2.16)$$

De igual modo

$$\Sigma F_{y'} = 0$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (2.17)$$

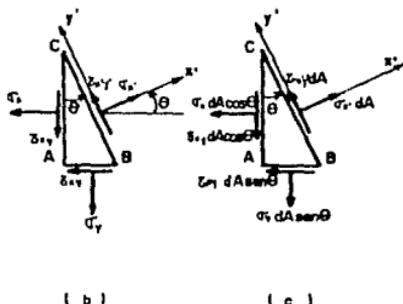
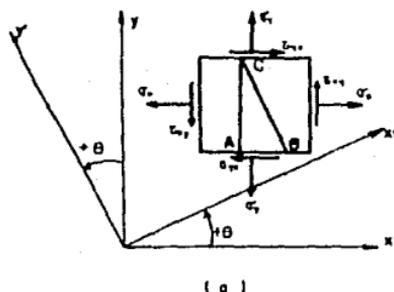


Fig. 2.20.- Esfuerzos en un plano inclinado.

Las ecuaciones 2.16 y 2.17 son las expresiones generales para el esfuerzo normal y el esfuerzo cortante, respectivamente, sobre una sección plana localizada por el ángulo  $\theta$  y causados por un sistema de esfuerzos conocidos.

A menudo el interés se centra en la determinación del máximo esfuerzo posible según las ecuaciones 2.16 y 2.17, y los planos en que ocurren tales esfuerzos deberán hallarse primero. Para localizar el plano de un esfuerzo normal máximo o mínimo, la ecuación 2.16 se deriva con respecto a  $\theta$  y la derivada se iguala a cero.

$$\frac{d\sigma_x}{d\theta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} 2\sin 2\theta + 2\tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

Por lo tanto

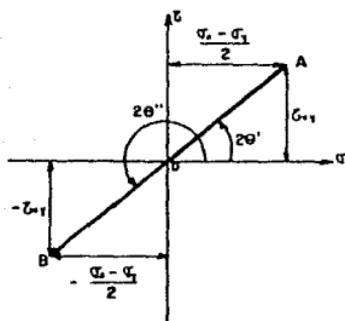
$$\tan 2\theta = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} \quad (2.18)$$

La ecuación 2.18 tiene dos raíces, puesto que el valor de la tangente de un ángulo en cuadrantes diametralmente opuestos es el mismo, como lo muestra la figura 2.21. Tales raíces están a  $180^\circ$  y como la ecuación 2.18 es para un ángulo doble, las raíces de  $\theta$  están a  $90^\circ$ . Una de ellas localiza un plano en el que actúa el esfuerzo normal máximo, la otra sitúa al esfuerzo normal mínimo. Para distinguirlas se utilizará la notación con prima y bprima.

Antes de evaluar los esfuerzos anteriores, se deduce que si se desea la localización de los planos en que no actúan esfuerzos cortantes, la ecuación 2.17 debe igualarse a cero. Esto da por resultado la misma relación que la ecuación 2.18, por lo que se llega a la siguiente conclusión: En planos en que ocurren los esfuerzos normales máximos o mínimos no hay esfuerzos cortantes. Tales planos se llaman planos principales de esfuerzo, y los planos que actúan en ellos, los normales máximos y mínimos, se denominan esfuerzos principales.

La magnitud de los esfuerzos principales se puede obtener sustituyendo en la ecuación 2.16 los valores de las funciones seno y coseno correspondientes al ángulo doble dado por la ecuación 2.18. Después de hacer esto y de simplificar los resultados, las expresiones para el esfuerzo normal máximo (designado por  $\sigma_1$ ) y el esfuerzo normal mínimo (designado por  $\sigma_2$ ) serán

$$(\sigma_{x'})_{\max} = \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.19)$$



$$OA:OB = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sin 2\theta' = \sin 2\theta'' = \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

$$\cos 2\theta' = -\cos 2\theta'' = \frac{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

Fig. 2.21.- Funciones de ángulos para esfuerzos principales.

donde se debe utilizar el signo positivo antes del radical para obtener  $\sigma_1$ , y el signo negativo para  $\sigma_2$ .

Un estudio similar al realizado para los esfuerzos normales se puede efectuar para el esfuerzo cortante. Por lo tanto, para localizar los planos en los que actúan los esfuerzos cortantes máximo o mínimo se debe derivar la ecuación 2.17 con respecto a  $\theta$  e igualar a cero la derivada. Una vez hecho lo anterior y simplificando los resultados, las operaciones dan

$$\tan 2\theta_s = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}} \quad (2.20)$$

donde  $\theta_s$  es el ángulo que define el plano en que es máximo o mínimo el esfuerzo cortante.

Igual que la ecuación 2.18, la 2.20 tiene dos raíces, que también se pueden distinguir por la notación prima y bípima. Los dos planos definidos por esta ecuación son perpendiculares. Además, el valor de  $\tan 2\theta_s$  dado por la ecuación 2.20 es el recíproco negativo del valor de  $\tan 2\theta_n$  de la ecuación 2.18. Por lo tanto, las raíces para los ángulos dobles de la ecuación 2.20 están a  $90^\circ$  de las raíces correspondientes de la 2.18. Esto significa que los ángulos que localizan los planos de esfuerzo cortante máximo o mínimo forman

ángulos de  $45^\circ$  con los de los esfuerzos principales. La sustitución en la ecuación 2.17 de la funciones seno y coseno correspondientes al ángulo doble dado por la ecuación 2.20 y determinadas de manera análoga de la figura 2.21 dará los valores máximos o mínimos de los esfuerzos cortantes. Después de simplificar, tales esfuerzos son.

$$\tau_{\max} = \pm \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{2^2} + \tau_{xy}^2} \quad (2.21)$$

En consecuencia, el esfuerzo cortante máximo difiere únicamente en signo del esfuerzo cortante mínimo. Además, como las dos raíces dadas por la ecuación 2.20 localizan planos a  $90^\circ$ , este resultado significa también que son iguales los valores numéricos de los esfuerzos cortantes en planos mutuamente perpendiculares. Desde el punto de vista físico tales signos no tienen significado y por esta razón al mayor esfuerzo cortante, independientemente de su signo, se le llamará esfuerzo cortante máximo.

A diferencia de los esfuerzos principales, en cuyos planos no ocurren esfuerzos cortantes, los esfuerzos cortantes máximos actúan en planos que usualmente no están libres de esfuerzos normales. La sustitución de  $\theta$ , de la ecuación 2.20 en la 2.16 muestra que los esfuerzos normales que actúan en los planos de los esfuerzos cortantes máximos son.

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (2.22)$$

Ahora, un estudio cuidadoso de las ecuaciones 2.16 y 2.17 revelará que representan una circunferencia en forma paramétrica. Tal representación se puede ver con más claridad escribiéndolas en la siguiente forma.

$$\sigma_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (2.23)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (2.24)$$

Elevando al cuadrado ambas ecuaciones, sumándolas y simplificando.

$$\left[ \sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right]^2 + \tau_{xy}^2 = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{2^2} + \tau_{xy}^2 \quad (2.25)$$

En todo problema dado  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$  son las tres constantes conocidas, y  $\sigma_{x'}$  y  $\tau_{x'y'}$  son las variables. En consecuencia, la ecuación 2.25 se puede escribir en forma más compacta como

$$(\sigma_{x'} - a)^2 + \tau_{x'y'}^2 = b^2 \quad (2.26)$$

donde

$$a = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad \text{y} \quad b^2 = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{2} + \tau_{xy}^2$$

Esta expresión es la familiar de geometría analítica,  $(x-a)^2 + y^2 = b^2$  para una circunferencia de radio  $b$  con su centro en  $(+a, 0)$ . Por lo tanto, si se traza la circunferencia que corresponde a esta ecuación, las coordenadas de un punto de tal circunferencia corresponden a  $\sigma_{x'}$  y  $\tau_{x'y'}$  para una orientación particular de un plano inclinado. La ordenada de un punto de la circunferencia es el esfuerzo cortante  $\tau_{x'y'}$  y su abscisa el esfuerzo normal  $\sigma_{x'}$ . La circunferencia así construida se llama círculo de Mohr para esfuerzo, o simplemente círculo de esfuerzos.

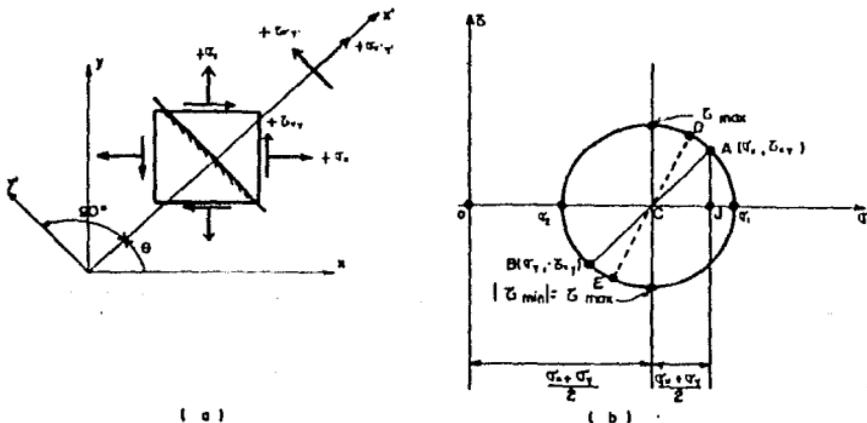


Fig 2.22.- Círculo de Mohr para esfuerzos

Un círculo de Mohr basado en la información de los esfuerzos que se dan en la figura 2.22a se ha trazado en la figura 2.22b con  $\sigma$  y  $\tau$  como ejes coordenados. Su centro se localiza en  $(a, 0)$  y su radio es igual a  $b$ . El punto A del círculo corresponde a los esfuerzos sobre la cara derecha del elemento dado cuando  $\theta=0^\circ$ . Para este punto,  $\sigma_x = \sigma_x$  y  $\tau_{xy} = \tau_{xy}$ . Como  $\text{ANG} = \tau_{xy}/(\sigma_x - \sigma_x)/2$ , de acuerdo con la ecuación 2.18, el ángulo  $\text{ACJ}$  es igual a  $2\theta$ .

Cuando  $\theta=90^\circ$  el eje  $x'$  está dirigido hacia arriba y el eje  $y'$  hacia la izquierda. De esta orientación de los ejes, las coordenadas del punto B del círculo son  $\sigma_x = \sigma_x$  y  $\tau_{xy} = -\tau_{xy}$ . Las coordenadas de los puntos A y B satisfacen la ecuación 2.25. El mismo razonamiento se puede aplicar a cualquier otro par de puntos como D o E. Las coordenadas de tales puntos dan los esfuerzos asociados a una orientación particular de los ejes  $X'$  y  $Y'$ , los cuales definen un plano que pasa a través de un elemento. Todas las formas posibles para describir los esfuerzos en un elemento para diferentes valores de  $\theta$  están representados por puntos en el círculo de Mohr para esfuerzos. Por consiguiente, pueden deducirse las siguientes conclusiones importantes relativas al estado de esfuerzos en un punto:

- 1) El mayor esfuerzo normal posible es  $\sigma_1$ ; el menor es  $\sigma_2$ . No existen esfuerzos cortantes junto con uno u otro de estos esfuerzos principales.
- 2) El mayor esfuerzo cortante  $\tau_{max}$ , numéricamente igual al radio del círculo, es  $(\sigma_1 - \sigma_2)/2$ . Un esfuerzo normal igual a  $(\sigma_1 + \sigma_2)/2$  actúa en cada uno de los planos de esfuerzo cortante máximo.
- 3) Si  $\sigma_1 = \sigma_2$ , el círculo de Mohr degenera en un punto y ningún esfuerzo cortante se desarrolla en absoluto en el plano  $xy$ .
- 4) Si  $\sigma_1 + \sigma_2 = 0$ , el centro del círculo de Mohr coincide con el origen de los ejes  $\sigma$  y  $\tau$ ; existe así el estado de esfuerzo cortante puro.
- 5) La suma de los esfuerzos normales en dos planos mutuamente perpendiculares es invariante, esto es:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y = \text{constante}$$

**CAPITULO III**

**MATRIZ DE RIGIDECES**

**PARA EL CASO GENERAL**

CAPITULO III

**MATRIZ DE RIGIDECES PARA EL CASO GENERAL**

La aplicación del Método del Elemento Finito se basa en siete pasos y son los primeros seis los que definen la matriz de rigideces.

Estos pasos son los siguientes:

- I.- Identificación del problema.
- II.- Selección adecuada de la función desplazamiento.
- III.- Relación general de los desplazamientos dentro de un elemento con los desplazamientos del nudo.
- IV.- Relación Desplazamiento-Deformación.
- V.- Relación Esfuerzo-Deformación
- VI.- Relación entre las cargas de los nudos y los desplazamientos nodales.
- VII.- Relación Esfuerzo-Desplazamiento.

Siguiendo el orden establecido procederemos a ilustrarlo analíticamente.

**I.- Identificación del Problema**

El primer paso conveniente es elegir la coordenada y el número del nudo del elemento en el sistema.

Ya que el grado de libertad que el elemento finito debe tener, es el vector de desplazamiento del nudo ( $\delta^*$ ) y el vector de carga del nudo ( $F^*$ ) del elemento, la matriz de rigideces ( $K^*$ ) de los elementos individuales la define la siguiente ecuación.

$$(F^*) = [K^*](\delta^*) \quad (1)$$

### II.- Selección Adecuada de la Función Desplazamiento

La función desplazamiento es definición única del estado de desplazamiento en todos los puntos dentro del elemento.

El patrón de desplazamientos conviene representarlo en expresión polinomial y además el intento de expresar el desplazamiento en cualquier punto  $(\delta(x,y))$  en términos del desplazamiento del nudo  $(\delta^*)$ . El polinomio asume lo que debe de contener un coeficiente desconocido por cada grado de libertad que posee el elemento. El estado de desplazamiento en cualquier punto  $(x,y)$  dentro del elemento puede escribirse en forma matricial como:

$$(\delta(x,y)) = [f(x,y)](\alpha) \quad (II)$$

donde  $(\alpha)$  es el vector columna del aún desconocido coeficiente de la función polinomial  $[f(x,y)]$ .

### III.- Relación General de los Desplazamientos Dentro de un Elemento con los Desplazamientos del Nudo.

Los coeficientes de la función desplazamiento  $(\alpha)$  están ahora expresados en términos de los desplazamientos del nudo  $(\delta^*)$  y, por lo tanto, sustituyendo en la ecuación II, el desplazamiento en cualquier punto dentro del elemento está relacionado con el desplazamiento del nudo  $(\delta^*)$ .

Ya que  $(\delta(x,y))$  representa el desplazamiento en cualquier punto  $(x,y)$  el desplazamiento del nudo puede obtenerse según la sustitución de las coordenadas propias del nudo. Por lo tanto, del nudo 1

$$(\delta^*) = (\delta(x_1, y_1)) = [f(x,y)](\alpha)$$

Procediendo similarmente para otros nudos, para el caso de un elemento que contiene n nudos.

$$\{ \delta^* \} = \begin{Bmatrix} \{ \delta_1^* \} \\ \{ \delta_2^* \} \\ \vdots \\ \{ \delta_n^* \} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [ f(x_1, y_1) ] \\ [ f(x_2, y_2) ] \\ \vdots \\ [ f(x_n, y_n) ] \end{bmatrix} \{ \alpha \}$$

$$\{ \delta^* \} = [ A ] \{ \alpha \} \quad (IIIa)$$

Ya que conocemos la matriz  $[ A ]$ , el vector desconocido es el de coeficientes  $\{ \alpha \}$  que puede obtenerse con la inversa de la expresión IIIa.

$$\{ \alpha \} = [ A ]^{-1} \{ \delta^* \} \quad (IIIb)$$

Sustituyendo a  $\{ \alpha \}$  en la ecuación II se desprende la relación entre el desplazamiento en cualquier punto del elemento  $\{ \delta(x,y) \}$  y el desplazamiento del nudo  $\{ \delta^* \}$

$$\{ \delta(x,y) \} = [ f(x,y) ] [ A ]^{-1} \{ \delta^* \}$$

#### IV.- Relación Desplazamiento-Deformación.

Las deformaciones  $\epsilon(x,y)$  en cualquier punto  $(x,y)$  del elemento está descrito por los desplazamientos  $\delta(x,y)$ .

Las deformaciones en cualquier punto del elemento pueden obtenerse según el desplazamiento elegido en función de una diferencial, la forma correcta de la diferencial depende del tipo de problema considerado. Por ejemplo, para el problema del plano de elasticidad las deformaciones corresponden a la primera derivada del desplazamiento, mientras para problemas de flexión las deformaciones están asociadas con la curvatura del elemento y corresponde a la segunda derivada de los desplazamientos. En general

$$\epsilon(x,y) = \text{diferencial de } \delta(x,y)$$

## Matriz de rigideces para el caso general

La forma exacta de esta expresión para cualquier clase de problema en particular puede obtenerse según la teoría de elasticidad. Usando la expresión  $\{ \delta(x,y) \}$  de la ecuación III y sabiendo que  $[ A ]^{-1}$  y  $\{ \delta^* \}$  son independientes de  $x$  y  $y$ , por lo que la deformación puede ser expresada como

$$\{ \epsilon(x,y) \} = [ \text{diferencial } f(x,y) ] [ A ]^{-1} \{ \delta^* \}$$

Definiendo a la matriz  $[ \text{diferencial de } f(x,y) ]$  como la matriz  $[ C ]$  podemos decir que

$$\{ \epsilon(x,y) \} = [ C ] [ A ]^{-1} \{ \delta^* \}$$

donde  $[ C ]$  es constante en términos de  $x, y$ .

La relación entre la deformación en cualquier punto dentro del elemento y los desplazamientos del nudo es

$$[ C ] [ A ]^{-1} = [ B ]$$

quedando

$$\{ \epsilon(x,y) \} = [ B ] \{ \delta^* \} \quad (IV)$$

### V.- Relación Esfuerzo-Deformación.

Los esfuerzos internos  $\{ \sigma(x,y) \}$  ocurridos en el elemento serán ahora relacionados con las deformaciones  $\{ \epsilon(x,y) \}$ .

Ya que las relaciones entre las deformaciones internas y el desplazamiento del nudo  $\{ \delta^* \}$  son ya conocidos, el esfuerzo interno  $\{ \sigma(x,y) \}$  pueden relacionarse con los desplazamientos del nudo. En este paso las propiedades elásticas del elemento toma parte en esta consideración. En general

$$\{ \sigma(x,y) \} = [ D ] \{ \epsilon(x,y) \}$$

## Matriz de rigideces para el caso general

donde [ D ] está en términos de la matriz de elasticidad y contiene las propiedades elásticas, cuantifica los módulos de elasticidad E y la relación de Poisson (  $\nu$  ). De lo anterior se desprende que

$$\{ \sigma(x,y) \} = [ D ] [ B ] ( \delta^e ) \quad (V)$$

### VI.- Relación entre las Cargas en los Nudos y los Desplazamientos.

Los esfuerzos internos (  $\sigma(x,y)$  ) los reemplazamos ahora por cargas estáticas equivalentes en los nudos (  $P^e$  ). De estas cargas en los nudos están relacionados con los desplazamientos en los nudos (  $\delta^e$  ). Con esto definimos que el elemento requiere la matriz de rigideces [ K ].

El principio del trabajo virtual acostumbra a determinar la carga estática en el nudo equivalente a los esfuerzos internos. La condición de equivalencia puede expresarse como sigue: durante algún desplazamiento virtual impuesto al elemento el trabajo total externo hecho cerca del nudo cargado debe igualarse al trabajo total interno hecho por los esfuerzos.

Arbitrariamente se fijan los desplazamientos del nudo representados por el vector (  $\delta^e$  ) seleccionado, donde

$$\{ \delta^e \} = \begin{bmatrix} ( \delta_1^e ) \\ ( \delta_2^e ) \\ \vdots \\ ( \delta_n^e ) \end{bmatrix}$$

El trabajo externo hecho por los nudos cargados (  $W_{ext}$  ) es conocido por

$$W_{ext} = (\delta_1^e)(P_1^e) + (\delta_2^e)(P_2^e) + \dots + (\delta_n^e)(P_n^e) = (\delta^e)^T (P^e)$$

## Matriz de rigideces para el caso general

Si se impone arbitrariamente desplazamientos causando deformaciones  $\{ \epsilon(x,y)^e \}$  en un punto dentro del elemento donde los esfuerzos reales son  $\{ \sigma(x,y) \}$ , entonces el trabajo interno hecho por unidad de volumen se conoce como

$$V_{int} = \{ \epsilon(x,y)^e \}^T \{ \sigma(x,y) \}$$

y el trabajo total interno se obtiene integrando el volumen del elemento, es decir

$$\int V_{int} d(Vol.) = \int \{ \epsilon(x,y)^e \}^T \{ \sigma(x,y) \} d(Vol.)$$

Ahora, de la ecuación IV, las deformaciones fijadas en cualquier punto en el elemento se conoce en términos del desplazamiento  $\{ \epsilon(x,y) \} = [ B ] \{ \delta^e \}$ . De aquí, cuando los desplazamientos del nudo son impuestos  $\{ \delta^e \}$ , los desplazamientos correspondientes pueden escribirse como

$$\{ \epsilon(x,y)^e \} = [ B ] \{ \delta^e \}$$

$$\{ \epsilon(x,y)^e \}^T = [ B ]^T \{ \delta^e \}^T$$

Además, de la ecuación V, el esfuerzo real en el elemento son conocidos relacionado el desplazamiento real del nudo como

$$\{ \sigma(x,y) \} = [ D ] [ B ] \{ \delta^e \}$$

Por lo tanto, estas expresiones pueden sustituirse hacia la ecuación del trabajo virtual por el trabajo interno, obteniendo

$$\int V_{int} d(Vol.) = \int [ B ]^T \{ \delta^e \}^T [ D ] [ B ] \{ \delta^e \} d(Vol.)$$

y

$$V_{int} = \{ \delta^e \}^T \{ P^e \}$$

La operación final es igualar el trabajo externo con el interno hechos durante los desplazamientos virtuales del sistema  $\{ \delta^e \}$ . Ya que el principio básico del desplazamiento virtual es válido para

## Matriz de rigideces para el caso general

cualquier aplicación de desplazamientos. La selección del sistema de desplazamientos virtuales del nudo pueden elegirse a voluntad. Con intención se presenta que es conveniente tomar valores unitarios de los desplazamientos del nudo. Procedemos a igualar el trabajo interno y el externo.

$$V_{int} = \int V_{int} d(Vol.)$$

$$\{ \delta^* \}' \{ F^* \} = \int \{ B \}' \{ \delta^* \}' \{ D \} \{ B \} \{ \delta^* \} d(Vol.)$$

$$\{ \delta^* \}' \{ F^* \} = \left| \int \{ B \}' \{ D \} \{ B \} d(Vol.) \right| \{ \delta^* \}' \{ \delta^* \}$$

$$\{ F^* \} = \left| \int \{ B \}' \{ D \} \{ B \} d(Vol.) \right| \{ \delta^* \}$$

comparando la ecuación VI con la I

$$\{ F^* \} = \{ K^* \} \{ \delta^* \}$$

la matriz de rigideces es

$$\{ K^* \} = \int \{ B \}' \{ D \} \{ B \} d(Vol.)$$

por lo tanto, evaluando la matriz de rigideces del elemento en el caso general, es necesario formular la matriz  $\{ B \}$  que se fija en el paso IV según las matrices  $\{ A \}'$  y  $\{ C \}$  y la matriz  $\{ D \}$  que se fija en el paso V y ejecutando la multiplicación de matrices e integrando definimos la ecuación VI.

### VII.- Relación Esfuerzo-Desplazamiento.

Finalmente, la matriz  $\{ H \}$  de esfuerzos-desplazamientos describe los esfuerzos internos en el elemento  $(v(x,y))$  para sus desplazamientos nodales  $\{ \delta^* \}$  que ya están determinados.

### Matriz de rigideces para el caso general

Las relaciones requeridas ya han sido desarrolladas y se definen por la ecuación V como

$$\{ \sigma(x,y) \} = [ D ] [ B ] \{ \delta^* \}$$

La matriz esfuerzo-desplazamiento [ H ] es conocida como el producto de las matrices [ D ] y [ B ]

$$[ H ] = [ D ] [ B ] \quad (VII)$$

En general, la matriz [ H ] contiene términos en X y Y y por lo tanto describe los esfuerzos en cualquier punto (x,y), dentro del elemento para los desplazamientos del nudo (  $\delta^*$  ). Algunas veces es conveniente su obtención para reducir la expresión que define a los esfuerzos.

## CAPITULO IV

### CASO DEL ELEMENTO VIGA

## CAPITULO IV

## CASO DEL ELEMENTO VIGA

En este capítulo se aplicará el método del elemento finito para el caso del elemento viga. Consideremos un elemento recto con sección transversal uniforme y que sea parte de una estructura sometida a un sistema de fuerzas y momentos que le producen desplazamientos y rotaciones como lo muestra la figura 4.1

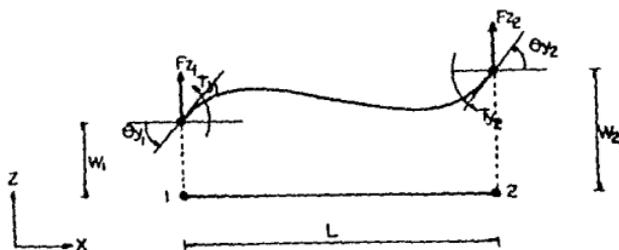


Fig. 4.1 Elemento Viga antes y después de aplicarle el sistema de fuerzas y momentos.

El eje Y de la figura es normal al plano del papel, los círculos del extremo del elemento indican la posición de los nudos y no denotan su dependencia. Ya que el problema es de una viga flexionada y que en el análisis de armaduras en ingeniería la deflexión axial es ignorada, sólo se necesita considerar dos desplazamientos en cada nudo, la deflexión normal de la viga  $W$  y la rotación  $\theta$ . Por lo tanto, el número total de grados de libertad por cada elemento viga son cuatro. El término "grados de libertad" puede considerarse con el mismo significado que desplazamientos del nudo.

Asociado con la rotación y desplazamiento en cada extremo del elemento están las fuerzas correspondientes del nudo, momentos  $M$ , y fuerzas cortantes  $F$ .

## Caso del elemento viga

Los vectores de los desplazamientos y fuerzas del nudo 1 pueden escribirse como

$$\{ \delta_1^* \} = \begin{bmatrix} W_1 \\ \theta_{11} \end{bmatrix} ; \quad \{ F_1^* \} = \begin{bmatrix} F_{11} \\ T_{11} \end{bmatrix}$$

por lo tanto, los vectores de desplazamiento y cargas en los nudos toman la siguiente forma

$$\{ \delta^* \} = \begin{bmatrix} \{ \delta_1^* \} \\ \{ \delta_2^* \} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 \\ \theta_{11} \\ W_2 \\ \theta_{12} \end{bmatrix} ; \quad \{ F^* \} = \begin{bmatrix} \{ F_1^* \} \\ \{ F_2^* \} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} \\ T_{11} \\ F_{21} \\ T_{21} \end{bmatrix}$$

Ya que cada uno de estos vectores contiene cuatro términos, la matriz de rigideces  $[K^*]$  del elemento es del orden  $4 \times 4$ .

### Selección Adecuada de la Función Desplazamiento del Elemento Viga.

El desplazamiento en algún punto dentro del elemento puede definirse con las dos componentes, la deflexión  $W$  y la rotación  $\theta$ . Así el vector desplazamiento es conocido como

$$\{ \delta(x,y) \} = \begin{bmatrix} W \\ \theta \end{bmatrix}$$

Además el elemento posee cuatro grados de libertad  $(W_1, \theta_{11}, W_2, \theta_{12})$ , cuatro coeficientes desconocidos deben aparecer en la representación polinomial del patrón de desplazamientos. La ecuación de la elástica que represente a la viga flexionada deberá tener los cuatro coeficientes y esta puede ser

$$W = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (4.1)$$

donde  $a_0, a_1, a_2, a_3$  son los coeficientes desconocidos.

Además, así como el análisis estructural, el método del elemento finito solo admite desplazamientos y rotaciones pequeñas por lo que podemos escribir

$$\tan \theta, = \theta,$$

por lo tanto

$$\theta, = dV/dx = d( \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 )/dx$$

$$\theta, = \alpha_2 + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2 \quad (4.1a)$$

Según las ecuaciones 4.1 y 4.1a el vector desplazamiento  $(\delta(x,y))$  queda

$$(\delta(x,y)) = \begin{Bmatrix} V \\ \theta, \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}$$

La cual define la matriz  $[f(x,y)]$  y el vector  $(\alpha)$  de la ecuación II del capítulo anterior.

**Relación General de los Desplazamientos Dentro del Elemento Viga con los Desplazamientos de los Nudos.**

Para este caso las coordenadas de los nudos en la dirección  $x$  son 0 en el punto 1 y  $L$  en el punto 2 por lo que las ecuaciones 4.1 y 4.1a toman la siguiente forma.

Cuando  $x=0$

$$V_1 = \alpha_1 \quad (4.2a)$$

$$\theta_{1,} = \alpha_2 \quad (4.2b)$$

Cuando  $x=L$

$$V_2 = \alpha_1 + \alpha_2 L + \alpha_3 L^2 + \alpha_4 L^3 \quad (4.2c)$$

$$\theta_{2,2} = \alpha_2 + 2\alpha_3 L + 3\alpha_4 L^2 \quad (4.2d)$$

Escribiendo estos resultados en forma matricial tenemos

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ \theta_{1,1} \\ V_2 \\ \theta_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

donde se puede identificar fácilmente la matriz  $[A]$  y el vector  $(\alpha)$  de la ecuación 11a del capítulo anterior.

Ahora, la matriz  $[A]^{-1}$  se puede encontrar por medio de resolver de manera simultánea las ecuaciones 4.2c y 4.2d ya que sabemos que  $\alpha_1 = V_1$  y  $\alpha_2 = \theta_{1,1}$  de las ecuaciones 4.2a y 4.2b respectivamente.

$$V_2 = V_1 + \theta_{1,1} L + \alpha_3 L^2 + \alpha_4 L^3 \quad \dots\dots\dots 1$$

$$\theta_{2,2} = \theta_{1,1} + 2\alpha_3 L + 3\alpha_4 L^2 \quad \dots\dots\dots 2$$

Despejando  $\alpha_3$  de 1

$$\alpha_3 = \frac{V_2 - V_1 - \theta_{1,1} L - \alpha_4 L^3}{L^2} \quad \dots\dots\dots 3$$

Sustituyendo 3 en 2

$$\theta_{2,2} = \theta_{1,1} + 2 \frac{(V_2 - V_1 - \theta_{1,1} L - \alpha_4 L^3)}{L^2} L + 3\alpha_4 L^2$$

$$\theta_{2,2} = -\theta_{1,1} + \frac{2}{L} (V_2 - V_1) + \alpha_4 L^2$$

Por lo que

$$\alpha_1 = \frac{1}{L^2} (\theta_{12} + \theta_{21}) - \frac{2}{L^3} (V_2 - V_1) \dots\dots\dots 4$$

Sustituyendo 4 en 3 y reduciendo tenemos

$$\alpha_2 = \frac{-1}{L} (2\theta_{11} + \theta_{22}) + \frac{3}{L^2} (V_2 - V_1) \dots\dots\dots 5$$

Acomodando en forma matricial los resultados anteriores podemos escribir

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/L^2 & -2/L & 3/L^2 & -1/L \\ 2/L^2 & 1/L^2 & -2/L^2 & 1/L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_{11} \\ V_2 \\ \theta_{22} \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

La matriz  $[A]^{-1}$  corresponde a la matriz cuadrada  $4 \times 4$  de la ecuación IIIb del capítulo anterior.

#### Relación Desplazamiento-Deformación del Elemento Viga.

Para el problema particular del elemento viga, la única deformación decisoria de considerar es la curvatura.

En textos de resistencia de materiales y de mecánica de sólidos se encuentra la deducción de las siguientes ecuaciones.\*

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI}$$

\* Estas deducciones las obtenimos del libro "Resistencia de Materiales" de Egor P. Popov del capítulo II "Deformaciones en Vigas" pag. 648

donde  $R$  es el radio de curvatura de una viga flexionada y la relación  $1/R$  define la curvatura de la elástica. También deduce la siguiente relación

$$\frac{1}{R} \approx \frac{d^2V}{dx^2} \quad (\text{para deflexiones pequeñas})$$

donde  $x$  y  $V$  son las coordenadas de un punto de la viga. En el problema que se considera, la distancia  $x$  localiza un punto en la elástica de una viga flexionada y  $V$  es la deflexión, o sea, la desviación del punto con respecto a su posición inicial. Por lo tanto, podemos escribir

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2V}{dx^2}$$

la ecuación anterior es correcta cuando el sentido positivo de  $V$  se toma igual al eje positivo  $Y$ . Por el contrario, cuando la flexión tiene lugar en el plano  $XZ$ , la curvatura inducida por los momentos positivos  $M$  es opuesta a la asociada a la curvatura positiva  $1/R \approx d^2V/dx^2$  de la elástica. Por lo tanto

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

y podemos escribir que

$$\frac{1}{R} = -\frac{d^2V}{dx^2}$$

Ya que la única deformación necesaria de considerar en la viga es la curvatura decimos que

$$(\epsilon(x, y)) = -\frac{d^2V}{dx^2} = -2\alpha_0 - 6\alpha_1 x$$

Reescribiendo este resultado en forma matricial tenemos

$$\{ \epsilon(x,y) \} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -6x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

sustituyendo la ecuación 4.4 en la 4.5

$$\{ \epsilon(x,y) \} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -6x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/L^2 & -2/L & 3/L^2 & -1/L \\ 2/L^2 & 1/L & -2/L^2 & 1/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \theta_{r1} \\ V_2 \\ \theta_{r2} \end{bmatrix}$$

Multiplicando las matrices se reduce a

$$\{ \epsilon(x,y) \} = \begin{bmatrix} 0 & 12x & 4 & 6x & -6 & 12x & 2 & 6x \\ L^2 & L^2 & L & L^2 & L^2 & L^2 & L & L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \theta_{r1} \\ V_2 \\ \theta_{r2} \end{bmatrix}$$

La matriz de la ecuación anterior corresponde a la matriz [ B ] de la ecuación IV del capítulo anterior

#### Relación Esfuerzo-Deformación del Elemento Viga

En el capítulo anterior se llegó a la ecuación

$$\{ \sigma(x,y) \} = [ D ] \{ \epsilon(x,y) \}$$

donde la matriz [ D ] está en términos de la matriz de elasticidad y contiene las propiedades elásticas. Para este caso la matriz [ D ] contiene solo términos correspondientes de la rigidez a la flexión (EI). Por lo tanto, el esfuerzo queda representado por

$$\{v(x,y)\} = [EI] \left[ \begin{array}{ccc} \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} & \frac{-6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \\ \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} & \frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{11} \\ v_2 \\ \theta_{21} \end{Bmatrix}$$

Relaciones entre las Cargas en los Nudos y los Desplazamientos en los Nudos para el Caso del Elemento Viga.

La ecuación VI se establece para completar el caso general, donde se obtiene el trabajo total interno hecho durante el desplazamiento virtual del elemento; el producto del esfuerzo interno y deformaciones internas tienen que ser integrados sobre el volumen total del elemento. Para el caso particular del elemento viga, el esfuerzo interno  $\{v(x,y)\}$  corresponde al momento interno por unidad de longitud, se evalúa el trabajo total interno y el producto del momento interno por unidad de longitud y debe asociarse la curvatura de la integral determinada de la longitud total del elemento. La expresión

$$\int_0^L d(\text{Vol.})$$

en la ecuación VI se reemplaza por la expresión

$$\int_0^L dx$$

para el caso del elemento viga, por lo que escribimos.

$$\{F^e\} = \left[ \int_0^L [B]^T [D] [B] dx \right] \{\delta^e\}$$

$$[K^e] = \int_0^L [B]^T [D] [B] dx$$

Todas las matrices en estas ecuaciones han sido ya resueltas explícitamente. La matriz  $[K^e]$  puede expresarse de la siguiente manera

$$\{K^*\} = \int_0^L (B)^T \left[ \begin{array}{cccc} 6 & 12x & & \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{12x}{L^2} & & \\ & & 4 & 6x \\ -\frac{4}{L^2} & \frac{6x}{L^2} & & \\ & & & & -6 & 12x \\ & & & & \frac{-6}{L^2} & \frac{12x}{L^2} \\ & & & & & & 2 & 6x \\ & & & & & & \frac{2}{L^2} & \frac{6x}{L^2} \\ & & & & & & & & -2 & 6x \\ & & & & & & & & \frac{-2}{L^2} & \frac{6x}{L^2} \\ & & & & & & & & & & 2 & 6x \\ & & & & & & & & & & \frac{2}{L^2} & \frac{6x}{L^2} \\ & & & & & & & & & & & & -2 & 6x \\ & & & & & & & & & & & & \frac{-2}{L^2} & \frac{6x}{L^2} \\ & & & & & & & & & & & & & & 2 & 6x \\ & & & & & & & & & & & & & & \frac{2}{L^2} & \frac{6x}{L^2} \end{array} \right] dx$$

Efectuando la multiplicación de matrices tenemos.

$$\{K^*\} = (B)^T \int_0^L \left[ \begin{array}{cccc} \frac{36}{L^3} - \frac{144x}{L^4} + \frac{144x^2}{L^5} & \frac{24}{L^3} - \frac{84x}{L^4} + \frac{72x^2}{L^5} & -\frac{36}{L^3} - \frac{144x}{L^4} - \frac{144x^2}{L^5} & \frac{12}{L^3} - \frac{60x}{L^4} + \frac{72x^2}{L^5} \\ \frac{24}{L^3} - \frac{84x}{L^4} + \frac{72x^2}{L^5} & \frac{16}{L^3} - \frac{48x}{L^4} + \frac{36x^2}{L^5} & -\frac{24}{L^3} + \frac{84x}{L^4} - \frac{72x^2}{L^5} & \frac{8}{L^3} - \frac{36x}{L^4} + \frac{36x^2}{L^5} \\ -\frac{36}{L^3} + \frac{144x}{L^4} - \frac{144x^2}{L^5} & -\frac{24}{L^3} + \frac{84x}{L^4} - \frac{72x^2}{L^5} & \frac{36}{L^3} - \frac{144x}{L^4} + \frac{144x^2}{L^5} & -\frac{12}{L^3} + \frac{60x}{L^4} - \frac{72x^2}{L^5} \\ \frac{12}{L^3} - \frac{60x}{L^4} + \frac{72x^2}{L^5} & \frac{8}{L^3} - \frac{36x}{L^4} + \frac{36x^2}{L^5} & -\frac{12}{L^3} + \frac{60x}{L^4} - \frac{72x^2}{L^5} & \frac{4}{L^3} - \frac{24x}{L^4} + \frac{36x^2}{L^5} \end{array} \right] dx$$

Integrando

$$\{K^*\} = \frac{EI}{L^3} \left[ \begin{array}{cccc} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{array} \right]$$

Observamos que la matriz de rigideces es simétrica lo que facilita su aplicación en programas de computación.

## Relación Esfuerzo-Desplazamiento del Elemento Viga.

Con las matrices {D} y {B} definimos {H}

$$\{H\} = EI \left[ \begin{array}{ccc} \frac{6}{L^3} - \frac{12x}{L^3} & \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} & -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \\ \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} & & \end{array} \right]$$

y con esto cubrimos los siete pasos básicos del método del elemento finito.

**CAPITULO V**

**CASO DEL ELEMENTO TRIANGULAR**

**PARA ESFUERZOS**

**Y DEFORMACIONES PLANAS**

## CAPITULO V

## CASO DEL ELEMENTO TRIANGULAR PARA ESFUERZOS Y DEFORMACIONES PLANAS

Los pasos básicos en la derivación de la matriz de rigideces del elemento triangular para esfuerzos y deformaciones planas se presentan a continuación.

## Selección Adecuada de Coordenadas del Sistema y Número de Nodos.

Las coordenadas cartesianas de un elemento triangular son  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  y  $(x_3, y_3)$  que corresponden a los tres vértices 1, 2, y 3 respectivamente y se numeran en sentido contrario al giro que hacen las manecillas de un reloj, como se muestra en la figura 5.1.

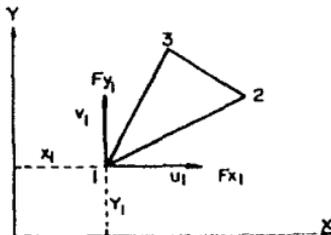


Fig. 5.1.- Numeración de nodos para el plano elástico del elemento triangular.

Para el problema del plano elástico, donde todos los desplazamientos son en el plano, el elemento tiene dos grados de libertad por cada nodo como se muestra en la figura 5.2, haciendo un total de seis grados de libertad ( $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3$ ) para este

elemento. Sus correspondiente fuerzas también son seis ( $F_{x_1}, F_{y_1}, F_{x_2}, F_{y_2}, F_{x_3}, F_{y_3}$ ).

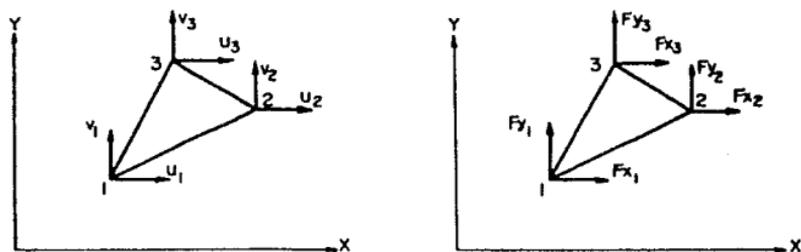


Fig. 5.2.- Desplazamientos y Fuerzas nodales.

Usando la notación matricial, el vector desplazamiento del nudo 1 puede escribirse como

$$\{ \delta_1 \} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix}$$

y su vector de fuerza correspondiente es

$$\{ F_1 \} = \begin{Bmatrix} F_{x_1} \\ F_{y_1} \end{Bmatrix}$$

Para los tres nudos los vectores de fuerza y desplazamiento son

$$\{ \delta^* \} = \begin{Bmatrix} \{ \delta_1 \} \\ \{ \delta_2 \} \\ \{ \delta_3 \} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

Caso del elemento triangular

$$\{ P^* \} = \begin{Bmatrix} ( F_1 ) \\ ( F_2 ) \\ ( F_3 ) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Fx_1 \\ Fy_1 \\ Fx_2 \\ Fy_2 \\ Fx_3 \\ Fy_3 \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

Ya que cada vector contiene seis términos, la matriz de rigideces  $[K^*]$  será de  $6 \times 6$ .

$$\{ P^* \} = [ K^* ] \{ \delta^* \}$$

**Elección de la Función Desplazamiento  $f(x,y)$  que Define el Desplazamiento  $(\delta(x,y))$  en Cualquier Punto del Elemento.**

Para el problema del plano elástico, el desplazamiento en cualquier punto puede obtenerse considerando los movimientos  $u$  y  $v$  en las direcciones  $X$  y  $Y$  respectivamente. Ya que este caso contiene seis grados de libertad, o sea, seis coeficientes desconocidos ( $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_6$ ) se requiere una representación polinomial que permita un desplazamiento patrón. Se recomiendan los dos polinomios siguientes.

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \quad (5.3)$$

Ya que ambos desplazamientos son lineales en  $X$  y  $Y$  la continuidad del desplazamiento es asegurada entre elementos contiguos en cualquier desplazamiento nodal.

Escribiendo las ecuaciones 5.3 en forma matricial

$$\{ \delta(x,y) \} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

o bien

$$\{ \delta(x,y) \} = [ f(x,y) ] \{ \alpha \}$$

Expresar el Estado de Desplazamientos  $\{ \delta(x,y) \}$  Dentro del Elemento en Términos de Desplazamientos Modales  $\{ \delta^* \}$

Este paso se lleva a cabo sustituyendo los valores de las coordenadas del nudo en la ecuación 5.4 y, por lo tanto, obtener expresiones para los coeficientes desconocidos.

Nudo 1

$$\{ \delta_1 \} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \end{bmatrix} \{ \alpha \} \quad (5.5a)$$

Nudo 2

$$\{ \delta_2 \} = \begin{bmatrix} 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \end{bmatrix} \{ \alpha \} \quad (5.5b)$$

Nudo 3

$$\{ \delta_3 \} = \begin{bmatrix} 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \{ \alpha \} \quad (5.5c)$$

Combinando los vectores de desplazamiento tenemos

$$\{ \delta^* \} = \begin{bmatrix} \{ \delta_1 \} \\ \{ \delta_2 \} \\ \{ \delta_3 \} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{ \delta(x_1, y_1) \} \\ \{ \delta(x_2, y_2) \} \\ \{ \delta(x_3, y_3) \} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [ f(x_1, y_1) ] \\ [ f(x_2, y_2) ] \\ [ f(x_3, y_3) ] \end{bmatrix} \{ \alpha \} \quad (5.5d)$$

## Caso del elemento triangular

Sustituyendo las ecuaciones 5.5a,b,c en la ecuación 5.5d tenemos

$$(\delta^*) = \begin{Bmatrix} (\delta_1) \\ (\delta_2) \\ (\delta_3) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (5.6)$$

o bien

$$(\delta^*) = [A](a)$$

donde los términos de la matriz [A] son términos conocidos, ya que consiste en las coordenadas de los nudos del elemento.

Los coeficientes (a) del polinomio desconocido son ahora determinados por la siguiente ecuación

$$(a) = [A]^{-1}(\delta^*) \quad (5.7)$$

Después de operaciones sencillas que proporciona el álgebra lineal y reagrupando llegamos a

$$[A]^{-1} = \frac{1}{(x_2(y_1 - y_3) - y_2(x_1 - x_3) + x_1 y_3 - x_3 y_1)} \begin{bmatrix} x_1 y_3 - x_3 y_1 & 0 & -x_1 y_2 - x_3 y_1 & 0 & x_1 y_2 - x_3 y_1 & 0 \\ y_2 - y_3 & 0 & y_2 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ x_2 - x_3 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 & 0 \\ 0 & x_2 y_3 - x_3 y_2 & 0 & -x_1 y_3 - x_3 y_1 & 0 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ 0 & y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 \\ 0 & x_2 - x_3 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

En libros de geometría analítica se hace la siguiente deducción<sup>8</sup>.

<sup>8</sup> "Geometría Analítica" de Charles H. Lehmann en el capítulo III págs. 87

## Caso del elemento triangular

El área de un triángulo en base a sus coordenadas esta dada por la siguiente expresión.

$$A = \frac{1}{2} [x_2(y_1 - y_3) - y_2(x_1 - x_3) + x_1 y_3 - x_3 y_1] \quad (5.9)$$

Por lo tanto, podemos sustituir el polinomio que divide a la matriz en la ecuación 5.8 por  $2A$  que es el doble del área del triángulo.

### Relación Deformaciones - Desplazamientos en Cualquier Punto.

Para problemas de esfuerzos y deformaciones planas el vector de deformaciones  $(\epsilon(x,y))$  es conocido por la siguiente ecuación

$$(\epsilon(x,y)) = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

donde  $\epsilon_x$  y  $\epsilon_y$  son deformaciones directas y  $\tau_{xy}$  es la deformación por cortante. Según la teoría de elasticidad y según lo asentamos en el capítulo II, las relaciones entre deformaciones y desplazamientos son.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{du}{dx} \\ \epsilon_y &= \frac{dv}{dy} \\ \tau_{xy} &= \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Sustituyendo  $u$  y  $v$  de las ecuaciones 5.3 en las ecuaciones 5.11

$$\epsilon_x = \frac{d}{dx} (\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y) = \alpha_2$$

$$\epsilon_y = \frac{d}{dy} (\alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y) = \alpha_6$$

$$\tau_{xy} = \frac{d}{dy}(\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y) + \frac{d}{dx}(\alpha_4 + \alpha_4 x + \alpha_4 y) = \alpha_3 + \alpha_4$$

Por lo tanto

$$\{ \epsilon(x, y) \} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 + \alpha_4 \end{Bmatrix} \quad (5.12)$$

En forma matricial

$$\{ \epsilon(x, y) \} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_4 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \quad (5.13)$$

o bien

$$\{ \epsilon(x, y) \} = [C] \{ \alpha \} \quad (5.14)$$

Sustituyendo la ecuación 5.7 en la 5.14

$$\{ \epsilon(x, y) \} = [C] [A]^{-1} \{ \delta^* \} \quad (5.15)$$

Ya que

$$[B] = [C] [A]^{-1} \quad (5.16)$$

Podemos escribir

$$\{ \epsilon(x, y) \} = [B] \{ \delta^* \} \quad (IV)$$

La ecuación IV describe las deformaciones  $\{ \epsilon(x, y) \}$  en cualquier punto dentro del elemento con los desplazamientos nodales  $\{ \delta^* \}$ .

La matriz [B] la obtenemos explícitamente multiplicando la matriz [C] de la ecuación 5.13 por  $[A]^{-1}$  obtenida en la ecuación 5.8 sustituyendo su divisor por  $2A$  de la ecuación 5.9. Realizando este producto deducimos a

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_2 - y_1 & 0 & y_2 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_2 - x_1 & 0 & x_1 - x_2 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_1 - x_2 & y_2 - y_1 & x_1 - x_2 & y_2 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

## Relación Refuerzos - Deformaciones.

Para el problema del plano elástico, el estado de esfuerzos  $(\sigma(x,y))$  en cualquier punto puede representarse por tres componentes de esfuerzo

$$\{ \sigma(x,y) \} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

donde  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  son esfuerzos directos y  $\tau_{xy}$  es el esfuerzo cortante. Las componentes de deformación fueron dadas en la ecuación 5.11. Las componentes de los esfuerzos y las deformaciones son relacionados por la matriz [D], donde  $\{ \sigma(x,y) \} = [D] \{ \epsilon(x,y) \}$ . Para problemas del plano elástico [D] es una matriz de 3x3, los términos de dicha matriz dependen de si el problema es de esfuerzos planos o de deformaciones planas.

Para el problema de esfuerzos planos (con el esfuerzo normal  $\sigma_z$  igual a cero), existen las relaciones siguientes entre los esfuerzos y las deformaciones.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_y}{E} \\ \epsilon_y &= -\frac{\nu \sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} \\ \tau_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \end{aligned}$$

donde E es el módulo de elasticidad, G el módulo de rigidez y  $\nu$  es el radio de Poisson's. Escribiendo las ecuaciones anteriores en forma matricial.

$$\{ \epsilon(x,y) \} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Llamamos

$$[D]^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

La inversa de  $[D]^{-1}$  es  $[D]$  y puede demostrarse que

$$[D] = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

De tal forma que

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

o bien

$$\begin{pmatrix} \sigma(x,y) \end{pmatrix} = [D] \begin{pmatrix} \epsilon(x,y) \end{pmatrix} \quad \text{IV}$$

Sustituyendo  $\begin{pmatrix} \epsilon(x,y) \end{pmatrix}$  por la ecuación IV, queda la siguiente relación entre esfuerzos y desplazamientos para esfuerzos planos

$$\begin{pmatrix} \sigma(x,y) \end{pmatrix} = [D][B] \begin{pmatrix} \delta^e \end{pmatrix}$$

Para el problema de deformaciones planas (donde la deformación normal al plano  $\epsilon_z$  es cero), existen las siguientes relaciones entre las deformaciones y esfuerzos según la teoría de elasticidad.

$$\epsilon_x = \frac{(1-\nu^2)}{E} \sigma_x - \frac{(\nu+\nu^2)}{E} \sigma_y,$$

$$\epsilon_y = -\frac{(\nu+\nu^2)}{E} \sigma_x + \frac{(1-\nu^2)}{E} \sigma_y,$$

$$\tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}$$

En forma matricial y ya calculada la matriz  $[D]$  para expresar las ecuaciones en función de las deformaciones tenemos.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

La matriz [ D ] es diferente para esfuerzos planos como para deformaciones planas por lo que es conveniente expresarla como

$$[ D ] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

donde  $d_{11} = d_{22}$  y  $d_{12} = d_{21}$  tanto para deformaciones como para esfuerzos planos.

Reemplazando los Esfuerzos Internos ( $\sigma(x,y)$ ) por Fuerzas Estáticas Equivalentes en los Nodos ( $P^*$ ), Relacionando las Fuerzas en los Nodos con los Desplazamientos Nodales ( $\delta^*$ ) y Obteniendo la Matriz de Rigideces ( $K^*$ ) del Elemento.

Los detalles de este paso son exactamente los mismos que se desarrollaron en el capítulo III y el resultado final fue

$$\{P^*\} = \left[ \int [B]^T [D] [B] d(\text{Vol.}) \right] \{\delta^*\} \quad (VI)$$

Para el plano de elasticidad [B] ha sido obtenida explícitamente para el elemento triangular y fue dada en la ecuación 5.17. La matriz [D] depende de si el problema considerado es de esfuerzos planos (contenida en la ecuación 5.20) o para deformaciones planas (contenida en la ecuación 5.21).

Debe notarse que, ya que las matrices [B] y [D] contiene solo términos constantes, se pueden dejar fuera de la integración, quedando solo

$\int d(\text{vol.})$   
el cual, en el caso de un elemento de espesor constante es igual al área del triángulo (A) multiplicado por su espesor (t). Así, para un elemento de espesor constante.

$$\{P^*\} = [ [B]^T [D] [B] A t ] \{\delta^*\} \quad (5.23)$$

Por lo tanto

$$[K^*] = [B]^T [D] [B] A t \quad (5.24)$$

Los términos de la matriz  $[K^*]$  se puede obtener explícitamente. Se obtiene primero  $[B]^T$

$$[B]^T = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_2 - y_1 & 0 & x_2 - x_1 \\ 0 & x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ y_2 - y_1 & 0 & x_2 - x_1 \\ 0 & x_1 - x_2 & y_2 - y_1 \\ y_1 - y_2 & 0 & x_2 - x_1 \\ 0 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix}$$

Se multiplica  $[D][B]$

$$[D][B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 - y_1 & 0 & x_2 - x_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_2 - x_1 & 0 & x_1 - x_2 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & x_1 - x_2 & y_2 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix}$$

$$[D][B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} d_{11}(y_2 - y_1) & d_{12}(x_2 - x_1) & d_{11}(y_2 - y_1) & d_{12}(x_1 - x_2) & d_{11}(y_1 - y_2) & d_{12}(x_2 - x_1) \\ d_{21}(y_2 - y_1) & d_{22}(x_2 - x_1) & d_{21}(y_2 - y_1) & d_{22}(x_1 - x_2) & d_{21}(y_1 - y_2) & d_{22}(x_2 - x_1) \\ d_{33}(x_2 - x_1) & d_{33}(y_2 - y_1) & d_{33}(x_1 - x_2) & d_{33}(y_2 - y_1) & d_{33}(x_2 - x_1) & d_{33}(y_1 - y_2) \end{bmatrix}$$

Por último, realizamos la siguiente operación  $[K^*] = [B]^T [D] [B] A t$  y el resultado lo escribimos en la página siguiente.

Debe notarse que la matriz  $[K^*]$  es simétrica. Para el caso del esfuerzo plano como para el de deformación plana puede obtenerse sustituyendo  $d_{ij}$  por las contenidas en las ecuaciones 5.20 y 5.21 respectivamente según la ecuación 5.22. Es una práctica sencilla ejecutar la multiplicación de matrices numéricamente en computadora para llegar a la matriz  $[K^*]$ .

Una vez obtenida la matriz de rigideces, los desplazamientos nodales pueden ser calculados según las fuerzas en estos.



## CAPITULO VI

### CASO DEL ELEMENTO RECTANGULAR

#### PARA ESFUERZOS

#### Y DEFORMACIONES PLANAS

4

## Elemento rectangular para esfuerzos y deformaciones planas

### CAPITULO VI

#### CASO DEL ELEMENTO RECTANGULAR PARA ESFUERZOS Y DEFORMACIONES PLANAS

Los siete pasos básicos son empleados para derivar las características de rigidez para el elemento rectangular para esfuerzos y deformaciones planas. Este elemento puede ser aplicado en la solución de problemas a los que pueden resolverse por el elemento rectangular.

#### Selección Adecuada de Coordenadas del Sistema y Número de Nudos.

El elemento rectangular tiene como lados  $a$  y  $b$  y un espesor  $t$ , como lo muestra la figura 6.1a; la numeración de nudos se muestra en la misma figura. Se pudo elegir otro sistema, pero este fue el mas conveniente.

Ya que, para el problema del plano elástico, el elemento tiene dos grados de libertad en cada nudo, por lo que cada elemento tiene ocho grados de libertad. La figura 6.1c muestra las fuerzas en los nudos.

El vector de desplazamientos y el de fuerzas de este elemento se muestran en las ecuaciones 6.1 y 6.2 respectivamente.

$$(\delta^e) = \begin{Bmatrix} (\delta_1) \\ (\delta_2) \\ (\delta_3) \\ (\delta_4) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (6.1)$$

Elemento rectangular para esfuerzos y deformaciones planas

$$\{F^e\} = \begin{Bmatrix} (F_1) \\ (F_2) \\ (F_3) \\ (F_4) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Fx_1 \\ Fy_1 \\ Fx_2 \\ Fy_2 \\ Fx_3 \\ Fy_3 \\ Fx_4 \\ Fy_4 \end{Bmatrix} \quad (6.2)$$

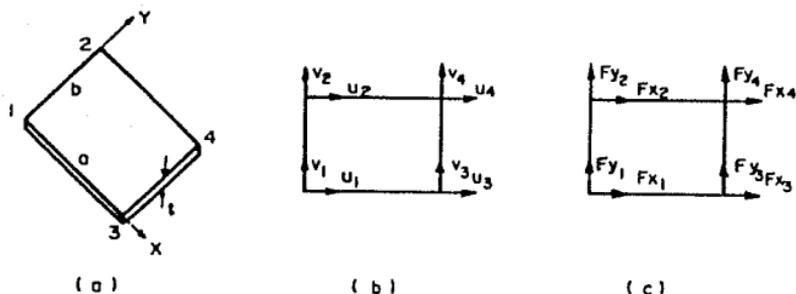


Fig.6.1. Elemento rectangular. a) numeración de nudos. b) desplazamientos en los nudos. c) Fuerzas en los nudos.

Cada uno de estos vectores contiene ocho términos, lo que nos indica que la matriz de rigideces  $\{K^e\}$  será del orden de  $8 \times 8$ .

Elección de la Función Desplazamiento  $\{f(x,y)\}$  que Define el Desplazamiento  $\{\delta(x,y)\}$  en Cualquier Punto del Elemento.

En un problema del plano elástico el estado del desplazamiento en cualquier punto  $(x,y)$  está representado por

Elemento rectangular para esfuerzos y deformaciones planas

$$\delta(x,y) = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA

Ya que el elemento tiene ocho grados de libertad, ocho coeficientes desconocidos serán los que envuelvan el polinomio que representa el desplazamiento patrón. Las ecuaciones 6.3 son las funciones más adecuadas.

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$$

$$v = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy \quad (6.3)$$

En estas ecuaciones, cuando X es constante en u y v varían linealmente con Y, y similarmente, cuando Y es constante en ambos desplazamientos varían linealmente a lo largo de cada lado del elemento rectangular.

La ecuación 6.3 expresada en forma matricial es

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

o bien

$$\delta(x,y) = [f(x,y)]\{\alpha\}$$

Expresado el Estado de Desplazamientos  $\delta(x,y)$  Dentro del Elemento en Términos de Desplazamientos Nodales  $\delta^e$ .

Este paso consiste en la sustitución de valores de las coordenadas del nudo en la ecuación 11

$$\delta(x,y) = [f(x,y)]\{\alpha\} \quad (11)$$

## Elemento rectangular para esfuerzos y deformaciones planas

La sustitución se hace de la siguiente manera

Nudo 1.  $(x_1, y_1) = (0, 0)$

Implica que  $u = \alpha$ , y  $v = \alpha$ , por lo que la matriz  $[f(x, y)]$  quede

$$[f(x, y)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nudo 2.  $(x_2, y_2) = (0, b)$

$$[f(x, y)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b & 0 \end{bmatrix}$$

Nudo 3.  $(x_3, y_3) = (a, 0)$

$$[f(x, y)] = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nudo 4.  $(x_4, y_4) = (a, b)$

$$[f(x, y)] = \begin{bmatrix} 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \end{bmatrix}$$

La ecuación 11 para este caso se puede escribir como

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \{\delta_3\} \\ \{\delta_4\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\delta(x_1, y_1)\} \\ \{\delta(x_2, y_2)\} \\ \{\delta(x_3, y_3)\} \\ \{\delta(x_4, y_4)\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [f(x_1, y_1)] \\ [f(x_2, y_2)] \\ [f(x_3, y_3)] \\ [f(x_4, y_4)] \end{Bmatrix} \{\alpha\} \quad (6.5)$$

## Elemento rectangular para esfuerzos y deformaciones planas

Sustituyendo  $\{f(x_n, y_n)\}$  en la ecuación 6.5.

$$\{\delta^e\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

o bien

$$\{\delta^e\} = [A] \{\alpha\} \quad (6.7)$$

La ecuación 6.7 define la matriz  $[A]$  para el caso particular del elemento rectangular en el problema del plano elástico.

El vector  $\{\alpha\}$  lo podemos conocer mediante la siguiente expresión.

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{\delta^e\} \quad (6.8)$$

El sistema de ecuaciones que plantea la expresión 6.6 es el siguiente.

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_1 \\ v_1 &= \alpha_2 \\ u_2 &= \alpha_1 + b\alpha_3 \\ v_2 &= \alpha_2 + b\alpha_4 \\ u_3 &= \alpha_1 + a\alpha_5 \\ v_3 &= \alpha_2 + a\alpha_6 \\ u_4 &= \alpha_1 + a\alpha_5 + b\alpha_3 + ab\alpha_4 \\ v_4 &= \alpha_2 + a\alpha_6 + b\alpha_7 + ab\alpha_8 \end{aligned}$$

y su solución es

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= u_1 \\ \alpha_2 &= -\frac{1}{a} u_1 + \frac{1}{a} u_2 \end{aligned}$$

Elemento rectangular para esfuerzos y deformaciones planas

$$\alpha_1 = -\frac{1}{b} u_1 + \frac{1}{b} u_2$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{ab} u_1 - \frac{1}{ab} u_2 - \frac{1}{ab} u_3 + \frac{1}{ab} u_4$$

$$\alpha_3 = v_1$$

$$\alpha_4 = -\frac{1}{a} v_1 + \frac{1}{a} v_2$$

$$\alpha_5 = -\frac{1}{b} v_1 + \frac{1}{b} v_2$$

$$\alpha_6 = \frac{1}{ab} v_1 - \frac{1}{ab} v_2 - \frac{1}{ab} v_3 + \frac{1}{ab} v_4$$

expresado en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/a & 0 & 0 \\ -1/b & 0 & 1/b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/ab & 0 & -1/ab & 0 & -1/ab & 0 & 1/ab & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/a & 0 & 0 & 0 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & -1/b & 0 & 1/b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/ab & 0 & -1/ab & 0 & -1/ab & 0 & 1/ab \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

La ecuación anterior define a la matriz  $[A]^{-1}$ . Sustituyendo la ecuación 6.8 en la ecuación 11 tenemos

$$\{ \delta(x,y) \} = [f(x,y)] [A]^{-1} \{ \delta^* \}$$

Relación Deformación-Desplazamientos en Cualquier Punto.

Ahora, las relaciones entre deformaciones y desplazamientos en un punto en el plano elástico es obviamente independiente de la forma del elemento seleccionado. Las ecuaciones 5.10 y 5.11 utilizadas para el elemento triangular son válidas para el elemento rectangular.

Elemento rectangular para esfuerzos y deformaciones planas

$$\{ \epsilon(x,y) \} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx}$$

$$\epsilon_y = \frac{dv}{dy} \quad (5.11)$$

$$\tau_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}$$

Sustituyendo u y v según las ecuaciones 6.3 obtenemos las deformaciones para cualquier punto dentro del elemento.

$$\epsilon_x = \frac{d}{dx} (\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy) = \alpha_2 + \alpha_4 y$$

$$\epsilon_y = \frac{d}{dy} (\alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy) = \alpha_7 + \alpha_8 x$$

$$\tau_{xy} = \frac{d}{dy} (\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy) + \frac{d}{dx} (\alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy) = \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_6 + \alpha_8 y$$

o bien

$$\{ \epsilon(x,y) \} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_2 + \alpha_4 y \\ \alpha_7 + \alpha_8 x \\ \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_6 + \alpha_8 y \end{Bmatrix}$$

o en forma matricial

Elemento rectangular para esfuerzos y deformaciones planas

$$\{ \epsilon(x,y) \} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

$$\{ \epsilon(x,y) \} = [C] \{ \alpha \} \quad (6.10)$$

Sustituyendo  $\{ \alpha \}$  por la ecuación 6.8

$$\{ \epsilon(x,y) \} = [C] [A]^{-1} \{ \delta^* \} \quad (6.11)$$

o bien

$$\{ \epsilon(x,y) \} = [B] \{ \delta^* \} \quad (IV)$$

por que

$$[B] = [C] [A]^{-1} \quad (6.12)$$

Explícitamente  $[B]$  se puede calcular con el siguiente producto.

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/a & 0 & 0 & 0 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ -1/b & 0 & 1/b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/ab & 0 & -1/ab & 0 & -1/ab & 1/ab & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/b & 0 & 1/b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/ab & 0 & -1/ab & 0 & 0 & 1/ab & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

### Elemento rectangular para esfuerzos y deformaciones planas

$$[ B ] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} + \frac{y}{ab} & 0 & -\frac{y}{ab} & 0 & \frac{1}{a} - \frac{y}{ab} & 0 & \frac{y}{ab} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} + \frac{x}{ab} & 0 & \frac{1}{b} - \frac{x}{ab} & 0 & -\frac{x}{ab} & 0 & \frac{x}{ab} \\ -\frac{1}{b} + \frac{x}{ab} & -\frac{1}{a} + \frac{y}{ab} & \frac{1}{b} - \frac{x}{ab} & \frac{y}{ab} & \frac{x}{ab} & \frac{1}{a} - \frac{y}{ab} & \frac{x}{ab} & \frac{y}{ab} \end{bmatrix}$$

### Relación Esfuerzo-Deformación

La relación entre esfuerzos y deformaciones es la misma que se anotó en el capítulo anterior

$$\{ \sigma(x,y) \} = [ D ] \{ \epsilon(x,y) \}$$

o bien

$$\{ \sigma(x,y) \} = [ D ] [ B ] \{ \delta^* \}$$

La matriz [D] es la que se anotó en el capítulo anterior

$$[ D ] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}$$

y como también se apuntó, para esfuerzos planos

$$d_{11} = d_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} ; \quad d_{21} = d_{12} = \frac{\nu E}{1-\nu^2} ; \quad d_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Y para deformaciones planas

Elemento rectangular para esfuerzos y deformaciones planas

$$d_{11} = d_{22} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} ; d_{21} = d_{12} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} ; d_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Relacionando los Esfuerzos Internos ( $\sigma(x,y)$ ) por Fuerzas Estáticas Equivalentes en los Nudos ( $P^*$ ), Relacionado las Fuerzas en los Nudos con los Desplazamientos Nodales ( $\delta^*$ ) y Obteniendo la Matriz de Rigideces [ $K^*$ ] del Elemento.

La ecuación general para obtener la matriz de rigideces es

$$[K^*] = \int [B]^T [D] [B] d(\text{Vol.}) \quad (6.15)$$

donde la matriz [B] y la [D] contiene términos constantes y pueden quedar fuera de la integral para el elemento triangular, pero para el presente caso, la matriz [B] contiene términos en X y en Y y por lo tanto, se tienen que realizar los productos de matrices y después integrar.

Para un elemento de espesor constante podemos escribir

$$[K^*] = t \iint [B]^T [D] [B] dx dy \quad (6.16)$$

Realizando el producto de [D][B]

$$[D][B] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} \frac{y}{ab} & 0 & -\frac{y}{ab} & 0 & \frac{1}{a} \frac{y}{ab} & 0 & \frac{y}{ab} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} \frac{x}{ab} & 0 & \frac{1}{b} \frac{x}{ab} & 0 & -\frac{x}{ab} & 0 & \frac{x}{ab} \\ -\frac{1}{b} \frac{x}{ab} & -\frac{1}{a} \frac{y}{ab} & \frac{1}{b} \frac{x}{ab} & \frac{y}{ab} & \frac{x}{ab} & -\frac{1}{a} \frac{y}{ab} & \frac{x}{ab} & \frac{y}{ab} \end{bmatrix}$$

Elemento rectangular para esfuerzos y deformaciones planas

$$(D)[B] = \begin{bmatrix}
 d_{11} \left[ \frac{1}{a} \frac{y}{ab} \right] & d_{12} \left[ \frac{1}{b} \frac{x}{ab} \right] & d_{13} \left[ -\frac{y}{ab} \right] & d_{14} \left[ \frac{1}{b} \frac{x}{ab} \right] & d_{15} \left[ \frac{1}{a} \frac{y}{ab} \right] & d_{16} \left[ \frac{x}{ab} \right] & d_{17} \left[ \frac{y}{ab} \right] & d_{18} \left[ \frac{x}{ab} \right] \\
 d_{21} \left[ \frac{1}{a} \frac{y}{ab} \right] & d_{22} \left[ \frac{1}{b} \frac{x}{ab} \right] & d_{23} \left[ -\frac{y}{ab} \right] & d_{24} \left[ \frac{1}{b} \frac{x}{ab} \right] & d_{25} \left[ \frac{1}{a} \frac{y}{ab} \right] & d_{26} \left[ \frac{x}{ab} \right] & d_{27} \left[ \frac{y}{ab} \right] & d_{28} \left[ \frac{x}{ab} \right] \\
 d_{31} \left[ \frac{1}{b} \frac{x}{ab} \right] & d_{32} \left[ \frac{1}{a} \frac{y}{ab} \right] & d_{33} \left[ \frac{1}{b} \frac{x}{ab} \right] & d_{34} \left[ -\frac{y}{ab} \right] & d_{35} \left[ \frac{x}{ab} \right] & d_{36} \left[ \frac{1}{a} \frac{y}{ab} \right] & d_{37} \left[ \frac{x}{ab} \right] & d_{38} \left[ \frac{y}{ab} \right]
 \end{bmatrix}$$

La matriz  $[B]'$  es

$$[B]' = \begin{bmatrix}
 \frac{1}{a} \frac{y}{ab} & 0 & -\frac{1}{b} \frac{x}{ab} \\
 0 & \frac{1}{b} \frac{x}{ab} & \frac{1}{a} \frac{y}{ab} \\
 \frac{y}{ab} & 0 & \frac{1}{b} \frac{x}{ab} \\
 0 & \frac{1}{b} \frac{x}{ab} & \frac{y}{ab} \\
 \frac{1}{a} \frac{y}{ab} & 0 & \frac{x}{ab} \\
 0 & \frac{x}{ab} & \frac{1}{a} \frac{y}{ab} \\
 \frac{y}{ab} & 0 & \frac{x}{ab} \\
 0 & \frac{x}{ab} & \frac{y}{ab}
 \end{bmatrix}$$

Si hacemos  $l = \left[ \frac{1}{a} \frac{y}{ab} \right]$ ;  $m = \left[ \frac{1}{b} \frac{x}{ab} \right]$ ;  $n = \left[ \frac{y}{ab} \right]$  y  $o = \left[ \frac{x}{ab} \right]$

y efectuando el producto  $[B]'[D][B]$ , tenemos



Elemento rectangular para esfuerzos y deformaciones planas

		$4d_{11}P^{-1}$ $+4d_{22}P$					
		$3d_{21}$ $+3d_{32}$	$4d_{22}P$ $+4d_{33}P^{-1}$				
		$2d_{11}P^{-1}$ $-4d_{22}P$	$3d_{12}$ $-3d_{21}$	$4d_{11}P^{-1}$ $+4d_{22}P$			
		$-3d_{21}$ $+3d_{32}$	$-4d_{22}P$ $+2d_{33}P^{-1}$	$-3d_{21}$ $-3d_{32}$	$4d_{22}P$ $+4d_{33}P^{-1}$		
	$t$						
	12	$-4d_{11}P^{-1}$ $+2d_{22}P$	$-3d_{21}$ $+3d_{32}$	$-2d_{11}P^{-1}$ $-2d_{22}P$	$3d_{21}$ $+3d_{32}$	$4d_{11}P^{-1}$ $+4d_{22}P$	
		$3d_{21}$ $-3d_{32}$	$2d_{22}P$ $-4d_{33}P^{-1}$	$3d_{21}$ $+3d_{32}$	$-2d_{22}P$ $-2d_{33}P^{-1}$	$-3d_{21}$ $-3d_{32}$	$4d_{22}P$ $+4d_{33}P^{-1}$
		$-2d_{11}P^{-1}$ $-2d_{22}P$	$-3d_{21}$ $-3d_{32}$	$-4d_{11}P^{-1}$ $+2d_{22}P$	$3d_{21}$ $-3d_{32}$	$2d_{11}P^{-1}$ $-4d_{22}P$	$-3d_{21}$ $+3d_{32}$
		$-3d_{21}$ $-3d_{32}$	$-2d_{22}P$ $-2d_{33}P^{-1}$	$-3d_{21}$ $+3d_{32}$	$2d_{22}P$ $-4d_{33}P^{-1}$	$3d_{21}$ $-3d_{32}$	$-4d_{22}P$ $+2d_{33}P^{-1}$
						$3d_{21}$ $+3d_{32}$	$4d_{22}P$ $+4d_{33}P^{-1}$

SIMETRICA

CAPITULO VII

ESTRUCTURAS ESPECIALES,

SU ANALISIS Y APLICACION

DEL METODO POR COMPUTADORA

## CAPITULO VII

## ESTRUCTURAS ESPECIALES, SU ANALISIS Y APLICACION DEL METODO POR COMPUTADORA

En este capítulo se recordarán algunas hipótesis en las que se basa la mecánica de materiales para el cálculo de desplazamientos y de esfuerzos. Se diferenciará cuando son aplicables estas hipótesis y cuando no son aplicables. Designamos como estructuras especiales a aquellas en las que las hipótesis hechas por la mecánica de materiales no concuerdan con ellas.

Algunas pilas de puente entran en la clasificación de estructuras especiales ya que no cumplen con las suposiciones antes mencionadas.

Como se ha podido observar en los capítulos anteriores, el método del elemento finito consiste en la determinación de la matriz de rigideces de la estructura y en la solución del sistema de ecuaciones simultáneas que resultan de esta matriz y del sistema de cargas para conocer los desplazamientos y así, los esfuerzos. El número de ecuaciones que resultan es igual al número de grados de libertad de la red en la que se supone una estructura; en ocasiones, una red llega a generar ciertos o miles de ecuaciones simultáneas. Por esta razón es por la que el método del elemento finito debe ser aplicado por medio de un programa de computadora.

Los análisis que se realizaron en esta tesis fueron hechos con el programa SAPV.2 cuyos autores son Klaus-Jürgen Bathe, Edward L. Wilson y Fred B. Peterson de la Universidad de Southern California. Las corridas se llevaron a cabo en el Departamento Civil Concreto del S.I.P.B del Instituto Mexicano del Petróleo con la gran ayuda y capacitación del Ing. J. Manuel Cervantes Martínez y la autorización del Ing. Raul López Chávez.

Este programa además de calcular los esfuerzos de todos los elementos en que se supone la estructura y los desplazamientos en todos los nudos que se generan en la red, calcula los esfuerzos principales de cada elemento y la dirección en que se encuentran. Estos resultados los anota como sigue

$$\begin{array}{ll} S_{11} = \sigma_1 & S_{12} = \tau_{12} \\ S_{22} = \sigma_2 & S_{23} = \tau_{23} \\ S_{33} = \sigma_3 & S_{34} = \tau_{34} \end{array}$$

para el plano YZ. Se debe tener siempre en cuenta que los esfuerzos calculados son para el centroide del elemento.

#### Aplicación del Programa

Ahora, para la aplicación del programa tenemos que discretizar la pila en un número finito de elementos, es decir, sustituir la estructura original por una red en la que sus intersecciones son llamados los nudos de la red.

Los requerimientos del programa son los siguientes.

- Coordenadas de los nudos y condiciones de borde. Con esto el programa calcula el número de ecuaciones que las condiciones de borde dan de acuerdo al número de desplazamientos para cada nudo, es decir, se describe cuando un nudo se encuentra sobre un apoyo y sus desplazamientos están restringidos y cuando no lo están.
- Temperatura. En este programa también considera la temperatura en que se encontrará sometida la estructura. En estos análisis hicimos caso omiso de este requerimiento.
- Constante Gravitacional. La constante gravitacional que se incluyó en las corridas que hice fue de  $981 \text{ cm/s}^2$  ya que las unidades fueron manejadas en  $\text{kg/cm}$ . Esta constante es requerida para que el programa considere las fuerzas de cuerpo de la estructura a analizar. También se le indica en que dirección debe ser aplicada esta constante.
- Material del Elemento. Pide las características elásticas de cada uno de los elementos y su densidad de masa. Para el análisis consideramos que tenían las siguientes características todos los elementos.

Módulo de elasticidad	= E = 198,000	Kg/cm <sup>2</sup>	(Concreto).
Relación de Poisson	= $\nu$ = 0.18		(Concreto).
Módulo de Rigidez	= G = 84,000	Kg/cm <sup>2</sup>	(Concreto).
Densidad de Masa	= D = 0.0024	Kg/cm <sup>3</sup>	(Concreto).
- Los Nudos de cada Elemento. Consiste en describir que nudos rodean a cada elemento y determinar como están conectados estos.
- Espesor de cada Elemento.

- Presión sobre los Elementos. Se define la presión externa a la que está sometida cada elemento. Para nuestros análisis repartimos la carga entre el área del elemento que resulta de multiplicar el lado del elemento y su espesor.
- Fuerzas en los Nudos. Si se presentan fuerzas concentradas en los nudos se anotan en cualquiera de las tres direcciones x, y ó z y el ángulo de inclinación con respecto a los ejes.
- Combinaciones de Carga. Si se consideran mas de un tipo de carga se pueden combinar.

Antes de entrar en la aplicación del programa se anotarán las hipótesis de la mecánica de materiales para el cálculo de esfuerzos. También se apuntarán algunos inconvenientes en el análisis de esfuerzos en pilas del método convencional.

#### Hipótesis de la Mecánica de Materiales.

La mecánica de materiales recurre a una visión hipotética simplificada que busca establecer los desplazamientos que se generan en un cuerpo deformable cuando se somete a la acción de fuerzas conocidas. Esta hipótesis es una visión macroscópica que intenta establecer secuencias de cálculo que se generan en cuerpos deformables.

Para obtener los desplazamientos que se generan en todos los puntos de una barra prismática sometida a la acción de momento flexionante constante, la mecánica de materiales acepta las siguientes hipótesis.

- 1.- La barra debe de ser de eje recto.
- 2.- La sección prismática de la barra debe ser constante a todo lo largo.
- 3.- La sección debe tener un plano de simetría.
- 4.- La geometría de la barra es tal que su largo sea cinco veces o mas mayor que su peralte, es decir  $l/h \geq 5$
- 5.- El material que ocupa la barra es homogéneo e isótropo.
- 6.- El material es elástico lineal.

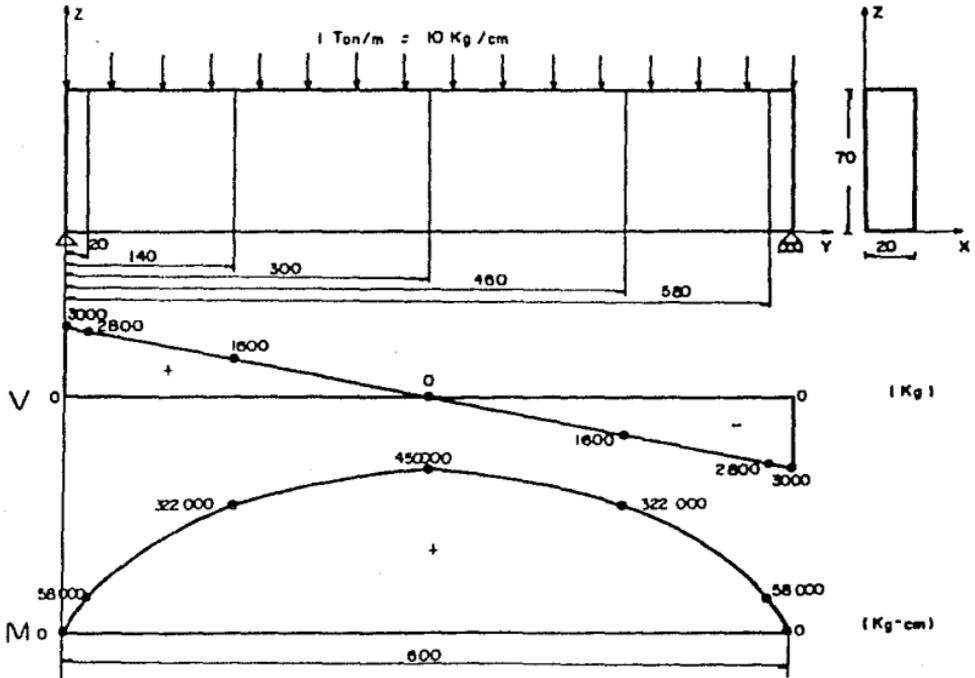
- 7.- Se considera que todas las cargas que actúan sobre la barra se encuentran en el mismo plano.
- 8.- El plano de cargas coincide con el plano de simetría de la barra.
- 9.- No existen problemas de inestabilidad en la barra.
- 10.- Las secciones planas antes de la deformación permanecen planas al aplicar las cargas al cuerpo deformable y se cumple que

$$\sigma_x = - \frac{M}{I} Y$$

Como se puede observar, muchas hipótesis en las que se basa la mecánica de materiales para el cálculo de desplazamiento son discutibles, pero cuando se plantea un problema que se acerque a estas suposiciones, los resultados son satisfactorios.

**Análisis de Esfuerzos de una Viga por la Fórmula de la Escuadría y por el Método del Elemento Finito. (Programa SAPV.2)**

Describiremos los esfuerzos que se generan en una viga en la que suponemos cumple con las diez hipótesis antes mencionadas.



Datos:

$$I = (bh^3)/12 = 571,667 \text{ cm}^4$$

Viga de concreto

Acot. cm

Fig. 7.1.-Viga cargada con sus diagramas de cortante y momento flexionante.

Ya que la relación  $L/h > 5$  se cumple, podemos aplicar la fórmula de la esquadria que para el plano considerado YZ queda expresada como sigue

$$\sigma_x = -\frac{M}{I_y} Z \quad (7.1)$$

y se tiene que considerar que el eje Y pasa por el eje neutro de la viga. La ecuación 7.1 expresa que para compresiones tendremos esfuerzos negativos y positivos para esfuerzos en tensión. A continuación tabularemos los esfuerzos que se generan en secciones a 20cm., 140cm. y 300cm. de distancia del apoyo izquierdo, según los diagramas de la figura 7.1.

	A 20cm.	A 140cm.	A 300cm.
Z	$\sigma_x$	$\sigma_x$	$\sigma_x$
30	-3.04	-16.90	-23.62
20	-2.03	-11.27	-15.74
10	-1.01	-5.63	-7.87
0	0	0	0
-10	1.01	5.63	7.87
-20	2.03	11.27	15.62
-30	3.04	16.90	23.62

A pesar de que el peralte es de 70cm., calculamos los esfuerzos a 30cm. del eje neutro para después compararlos con los que calcula el programa y verificar los resultados.

Lógicamente, para esta viga, los esfuerzos que se generan a 20cm. son los mismos que a 580cm. de distancia del apoyo izquierdo y los que se encuentran a 140cm. son los mismos que a 460cm.

Los esfuerzos cortantes máximos que se presentan en estas secciones son los siguientes.

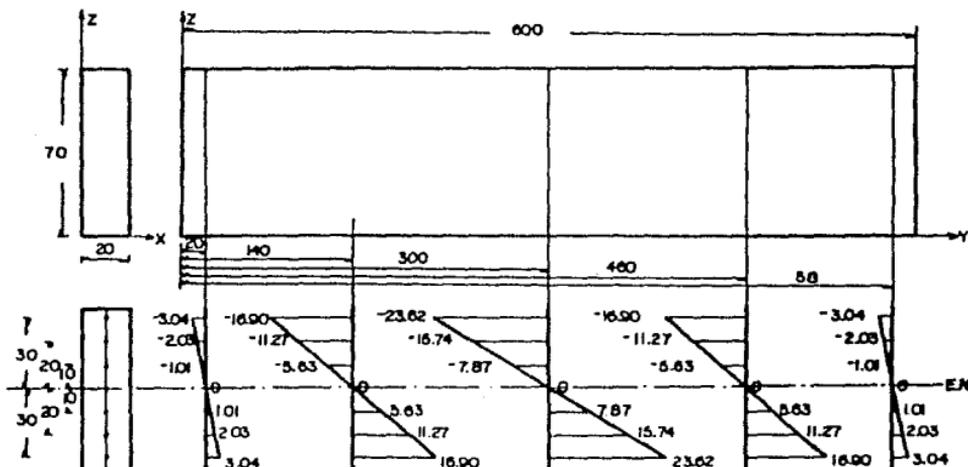
A 20cm.

A 140cm.

$$\tau_{max} = \frac{3(V)}{2(A)} = \frac{3(2800)}{2(1400)} = 3 \text{ Kg/cm}^2 \quad ; \quad \tau_{max} = \frac{3(2600)}{2(1400)} = 1.714 \text{ Kg/cm}^2$$

A 300cm.

$$\bar{z}_{max} = \frac{3(0)}{2(1400)} = 0$$

Los esfuerzos  $v$ , de la viga en forma gráfica son.

Acot. cm.

Acot. de esfuerzos  $\frac{kg}{cm^2}$ 

Fig. 7.2.- Distribución de esfuerzos de la viga.

La distribución de esfuerzos de la figura 7.2 es una distribución lineal y concuerda con la teoría de la mecánica de materiales. Sabemos que esta distribución no es la que se presenta en la realidad ya que el momento no es constante a lo largo de la viga.

Para comprobar el funcionamiento del programa SAPV.2 y su utilización, haremos el análisis de la viga por medio de este programa.

La discretización que se hará de la viga y la numeración de nudos y elementos se puede observar en la figura 7.3a. La distribución de esfuerzos de las figuras 7.3b y 7.3c corresponden a los esfuerzos  $\sigma_x$  y  $\tau_{xy}$  respectivamente y los calculó la computadora. No se debe olvidar que el plano en que se trabaja es el YZ.

En las figuras 7.3b y 7.3c los esfuerzos fueron calculados por el método del elemento finito y se nota que son semejantes con los obtenidos por las fórmulas que ofrece la mecánica de materiales.

Un inconveniente que se nota en la teoría de la mecánica de materiales es la hipótesis de la distribución lineal a lo largo de toda la viga. El método del elemento finito toma en cuenta la rigidez diferente que tendrán los elementos cercanos a los apoyos, lo cual es más lógico. En la figura 7.3b en la distribución de esfuerzos a 20cm. de los apoyos ya no es lineal y el eje neutro baja con respecto al centroide de la sección, lo cual se interpreta como una mayor presencia de compresiones y pasa de ser flexión pura a lo que normalmente se conoce como flexocompresión.

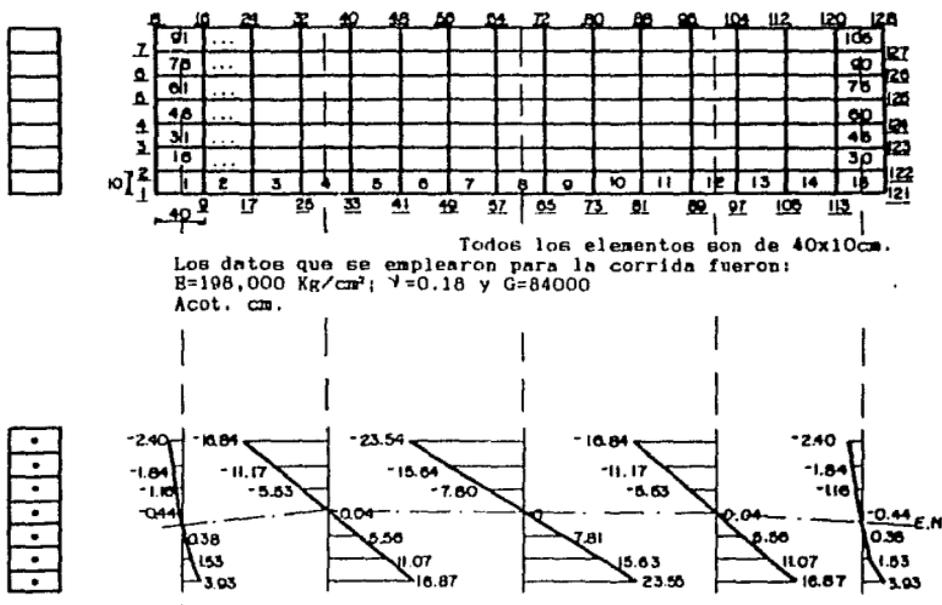
El método del elemento finito arroja resultados más aproximados por que toma en cuenta la rigidez de todos los elementos en que se compone la estructura y sus condiciones de frontera, es decir, las condiciones de carga, de apoyo y su conexión con los otros elementos.

La corrida incluye el cálculo de desplazamiento. Los nudos que corresponden al centro de la viga son el 57 y 65 y el desplazamiento que sufren es de -0.15308cm. en la dirección Z. La mecánica de materiales ofrece la siguiente expresión para este objetivo.

$$f = V = - \frac{5wl^4}{384 EI} \quad (7.2)$$

$$V = - \frac{5(10 \text{ kg/cm})(600 \text{ cm})^4}{384(198,000 \text{ kg/cm}^2)(571,667 \text{ cm}^4)}$$

$$V = - 0.14908 \text{ cm} \approx - 0.15308 \text{ cm}$$



Los esfuerzos están en  $\text{Kg/cm}^2$

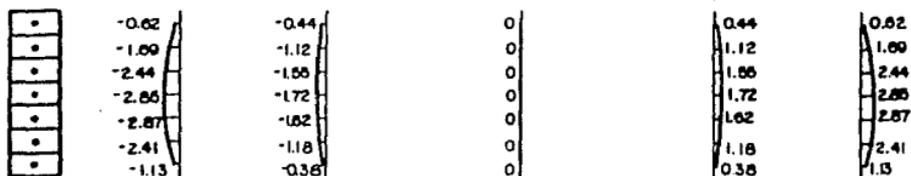


Fig. 7.3.- a) Viga discretizada. b) Distribución de esfuerzos  $\sigma_x$ .  
 c) Distribución de esfuerzos cortantes  $\tau_{xy}$ .

Los desplazamientos por el programa SAPV.2 son aproximados a los de la M de M. Los datos que se consideraron, para la aplicación del método, como  $B$ ,  $\nu$ ,  $f'c$ , etc. aparecen al principio de este capítulo, en el inciso de "Aplicación del Programa".

### Análisis de Refuerzos de Dos Vigas de Gran Peralte por el Método del Elemento Finito (Programa SAPV.2).

Se les llama vigas de gran peralte o vigas diafragma a aquellas que no cumplen con la relación  $L/h > 5$ . Para estas vigas la mecánica de materiales no ofrece soluciones satisfactorias como lo hizo con las que sí cumplen la relación antes mencionada.

Analizamos estas vigas por que deseamos saber como se va comportando conforme aumentó el peralte. Como se dijo en la introducción para el elemento finito no existen restricciones de geometría ni del tipo de material.

No se incluye en esta tesis las corridas de estas vigas pero los resultados los pondremos en las figuras 7.4 y 7.5, así como el problema planteado y la discretización.

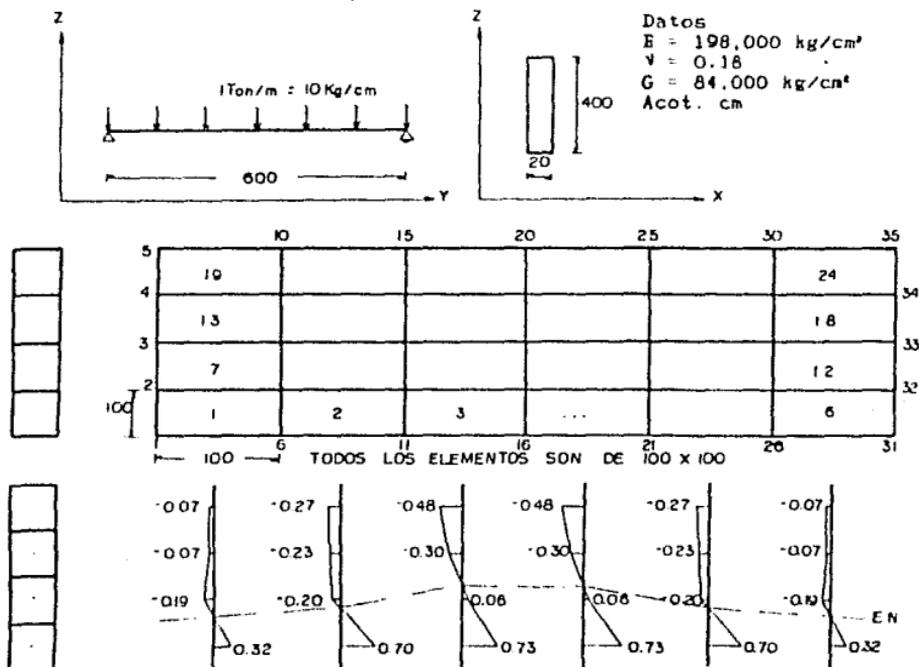
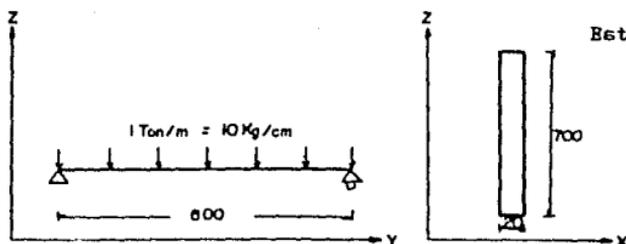


Fig. 7.4. - Distribución de esfuerzos de viga de gran peralte.  
Esfuerzos en Kg/cm

Estructuras especiales



Datos:  
 $E = 198,000 \text{ kg/cm}^2$   
 $\nu = 0.18$   
 $G = 84,000 \text{ kg/cm}^2$   
 Acot.cm.

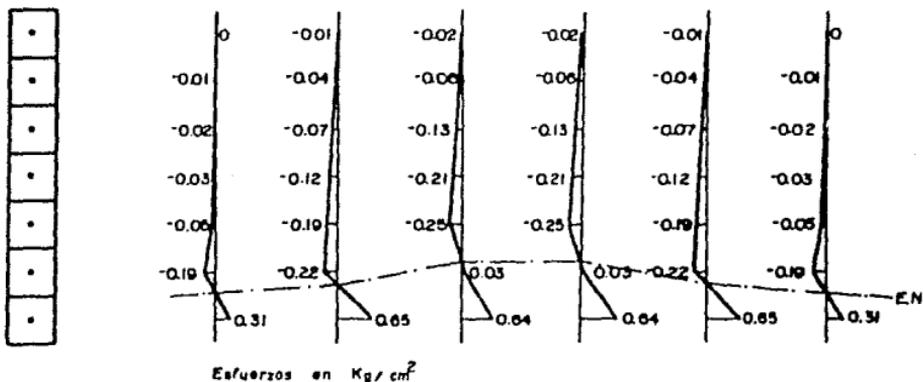
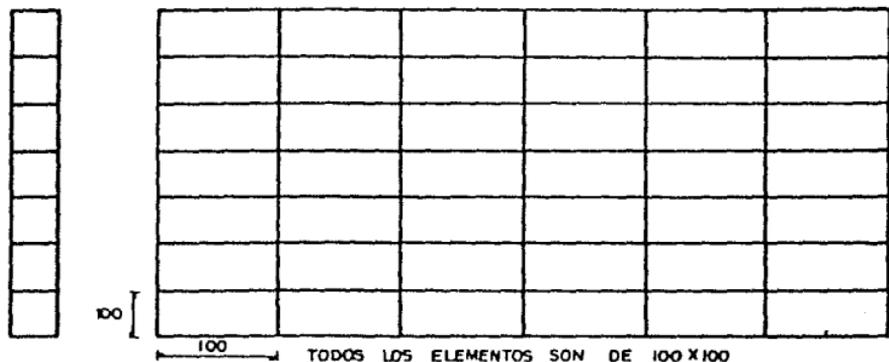


Fig. 7.5.- Distribución de esfuerzos de viga de gran peralte.

Como se observa en las figuras 7.4 y 7.5 no existe flexión pura en las vigas de gran peralte y la distribución de esfuerzos no es lineal. A medida que aumenta el peralte el eje neutro baja con respecto al centroide de la sección, y por lo tanto, el área de tensiones en la sección transversal de la viga es menor comparada con el área que trabaja a compresión.

Podemos afirmar que a medida que la relación  $L/h$  disminuye, el comportamiento de esta viga se asemeja al comportamiento de un muro, el cual teóricamente, trabaja solo a compresión.

Finalmente, los puntos donde no existen esfuerzos en las secciones de estas vigas están mas cercanos a las fibras inferiores mientras mas próximas estén de los apoyos.

**Análisis de Esfuerzos de un Muro por el Método del Elemento Finito (Programa SAPV.2).**

Existen dos razones para hacer este análisis. La primera es por que algunas pilas son en base a muros y la segunda es para comprobar que los muros trabajan básicamente a compresión y al mismo tiempo demostrar que existen pequeñas tensiones.

El planteamiento del problema, la discretización, la numeración de nudos y elementos y la distribución de esfuerzos se presentan en la figuras 7.6 y 7.7.

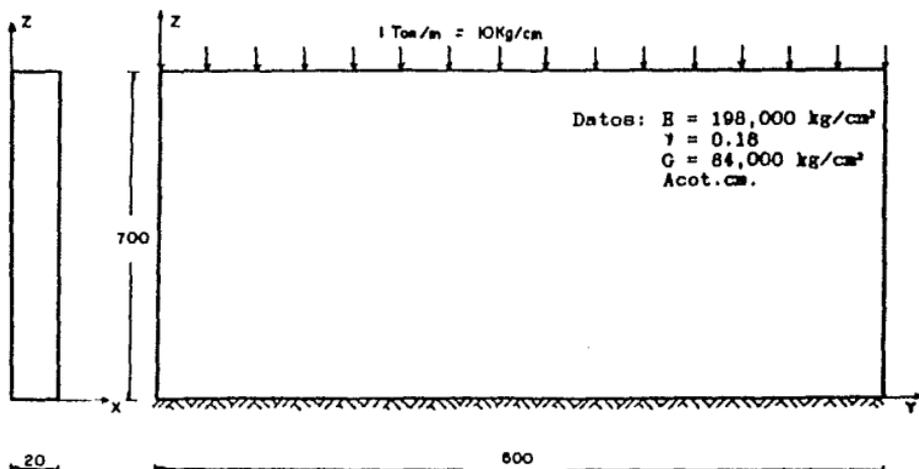


Fig. 7.6.- Muro con carga uniformemente distribuida.

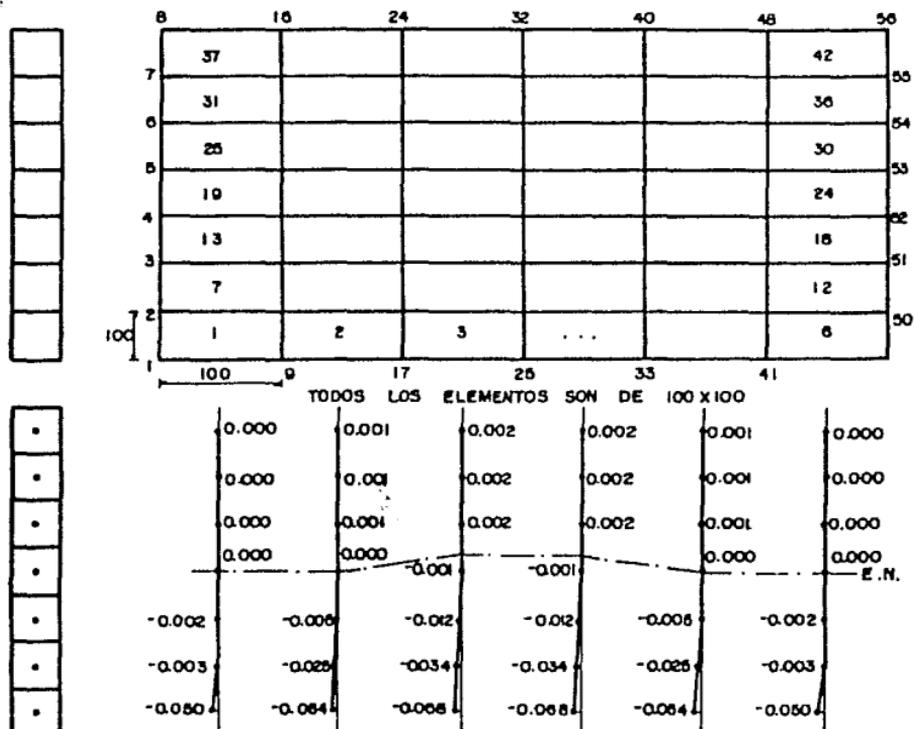
Esfuerzos en kg/cm<sup>2</sup>

Fig. 7.7.- Distribución de esfuerzos de muro.

**Análisis de una Pila de Puente por el Método del Elemento Finito (Programa SAPV.2).**

Muchas de las pilas de los puentes entran en la clasificación de lo que llamamos "estructuras especiales" por que la geometría de estas no están considerada en las teorías simples de la mecánica de materiales.

El método convencional que se emplea para el análisis de las pilas ha sido creado basado en la intuición y experiencia de los ingenieros dedicados al análisis y diseño de estructuras para puentes, pero no tiene un fundamento matemático de análisis que respalde a este método. Este método se basa en la determinación de los momentos que actúan en las secciones de la pila debido a las cargas por su brazo de palanca y con estos momentos se supone una distribución lineal de esfuerzos que se obtiene de la aplicación de la fórmula de la escuadría.

De acuerdo al análisis de esfuerzos por el método del elemento finito de las vigas, observamos que no se presenta una distribución lineal de esfuerzos y coincide en suponer que una pila que tiene una geometría que no considera la teoría de flexión, no tiene una distribución lineal.

A pesar de lo anterior, las pilas que se diseñan en base al análisis convencional no han representado evidencias de que la aplicación del método sea inconveniente. La inteligencia y conciencia de los ingenieros ha hecho que se diseñen de una manera conservadora, debido a la incertidumbre que tienen de este método, y en ocasiones colocan refuerzos de más, es decir, no cumplen el balance entre la economía y la seguridad.

Los ingenieros llevamos a cuestras la misión de crear obras que sean seguras, funcionales y económicas. Para lograr este objetivo, contamos con el acervo de conocimientos y experiencia que a lo largo de varios siglos hemos heredado. De tal suerte que no cumpliríamos con la sociedad y con el país si no tomamos en cuenta los tres aspectos antes mencionados.

Un método de análisis que tenga una base de comprobación matemática es el método del elemento finito.

La Secretaría de Comunicaciones y Transporte por medio del Ingeniero Amílcar Galindo Solórzano me proporcionó los datos de cargas que actúan en una pila de puente y su dimensionamiento. Esta pila corresponde al puente "Holanda" ubicado en Apatzingán-Holanda en el Km. 18+500 con origen en Apatzingán, Michoacán. El planteamiento de la pila a analizar y su dimensionamiento aparecen en las figuras 7.8 y 7.9.

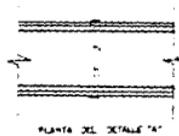
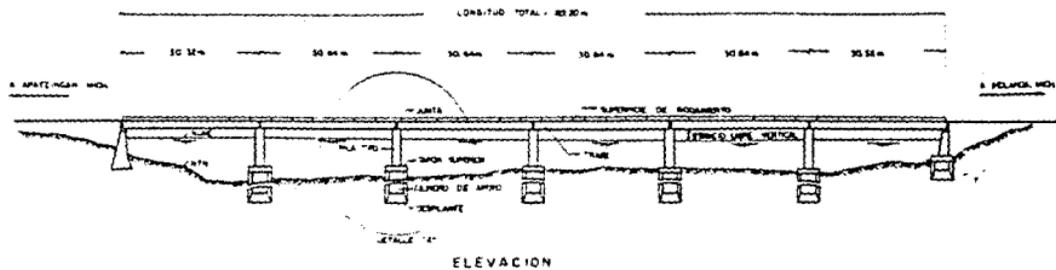
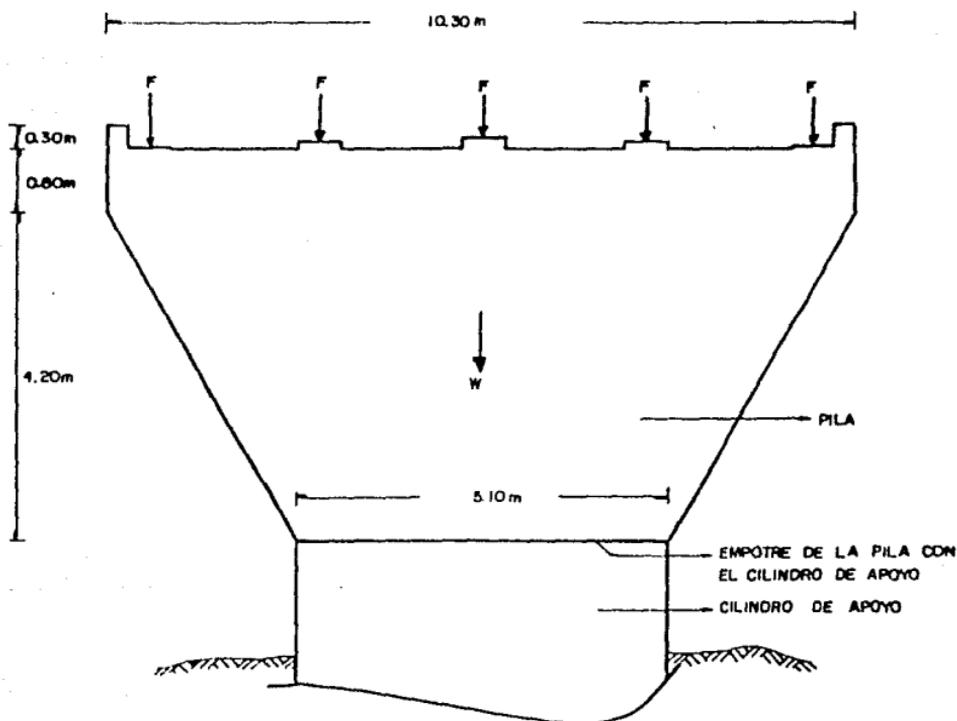


FIG. 22. PUENTE "MAYOLA"

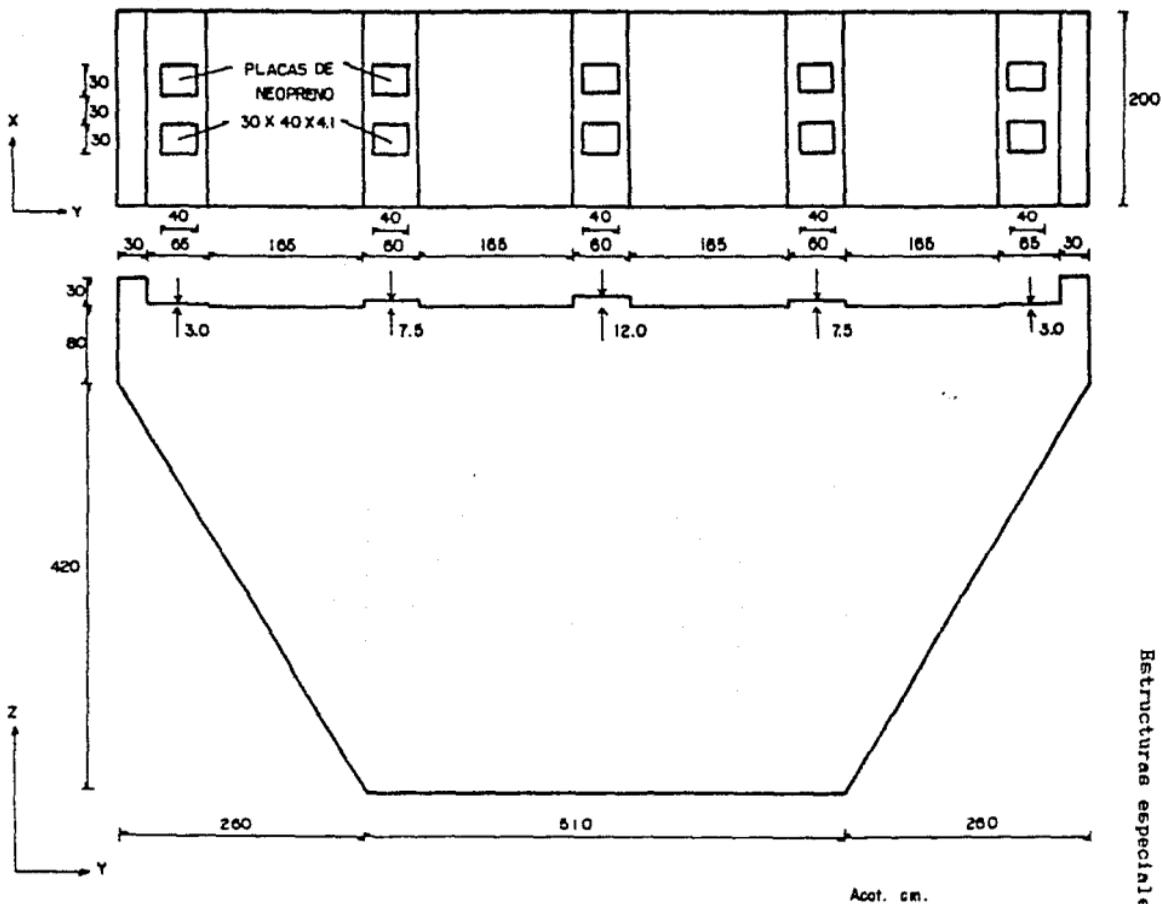
ESTUDIO DE INGENIERIA

$F = 96\,770\text{ Kg}$  = Fuerza que descarga cada trabe de la superestructura a la pila



DETALLE DE LA PILA TIPO

FIG. 7.9. - Dimensionamiento de la Pila.



## a) Método Convencional

Antes de analizar la pila por medio del programa, aplicaremos el método convencional de análisis para las siguientes secciones.

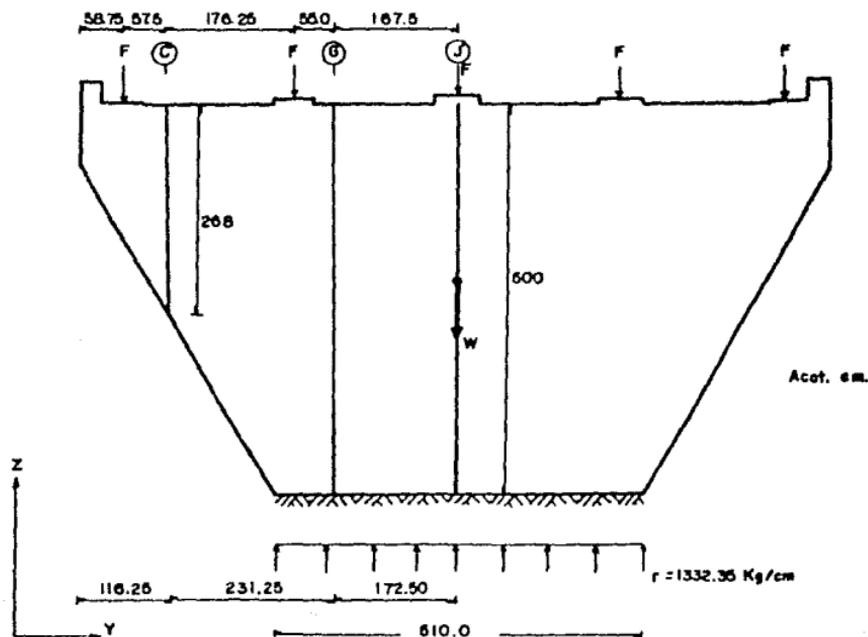


Fig. 7.10.- Secciones a analizar por el método convencional.

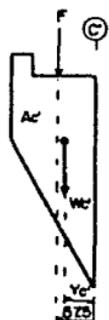
Las secciones de los ejes C', G' y J' no son arbitrarios, sino que corresponden a ejes que resultaron del análisis por el método del elemento finito el cual se expondrá posteriormente. Por el momento se pueden considerar como secciones cualquiera.

Las fuerzas F son las cargas a las que está sometida la pila y su valor es de  $F=96,700$  Kg; el peso V de la pila es de  $V=195,648$  kg (con  $\gamma = 2.4$  ton/m<sup>3</sup>). La reacción del cilindro a las fuerzas a que es sometido, son uniformemente repartidas y se calcula de la siguiente manera.

$$r = \frac{5(96,770) + 195,648}{510} \frac{\text{kg}}{\text{cm}} = 1332.35 \frac{\text{kg}}{\text{cm}}$$

Para calcular el momento al que está sometido alguna sección, se multiplican las fuerzas actuantes a la izquierda de la sección por su brazo de palanca. A continuación se calcularán los momentos de las secciones de los ejes C', G' y J'.

## Sección C'



Fácilmente se pueden calcular las siguientes igualdades

$$A_c = \text{Área a la izquierda de la sección } C' = 21,115.3 \text{ cm}^2$$

$$Y_c = \text{Centroide de del área } A_c = 49.95 \text{ cm}$$

Por lo tanto, el peso  $W_c$  es

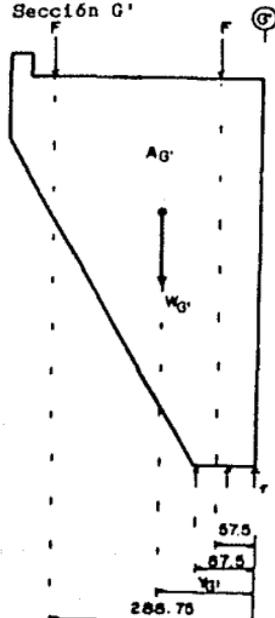
$$W_c = (200 \text{ cm})(21,115.3 \text{ cm}^2)(0.0024 \text{ Kg/cm}^3) = 10,135.3 \text{ Kg.}$$

Por lo que el momento en la sección es

$$M_c = -(57.5 \text{ cm})(96,770 \text{ Kg.}) - (49.95 \text{ cm})(10,135.3 \text{ Kg.})$$

$$M_c = -6'070,535 \text{ Kg-cm}$$

## Sección G'



Una secuencia de cálculo similar a la anterior se realiza para las secciones G' y J'

$$A_g = 120,050 \text{ cm}^2$$

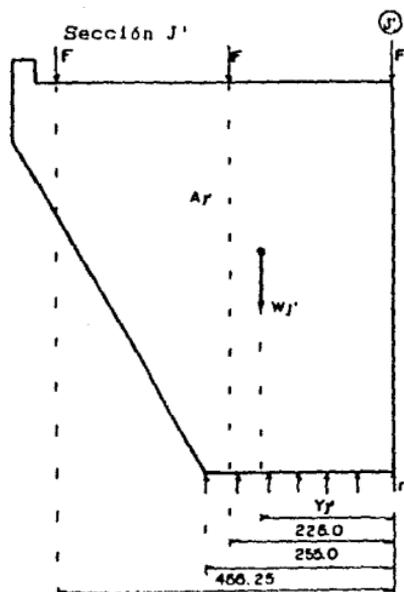
$$Y_g = 135.34 \text{ cm}$$

$$W_g = (200 \text{ cm})(120,050 \text{ cm}^2)(0.0024 \text{ Kg/cm}^3) = 57,624 \text{ Kg.}$$

Por lo tanto, el momento generado en la sección G' es

$$M_g = -(57.5 \text{ cm} + 288.75 \text{ cm.})(96,770 \text{ Kg.}) - (135.34 \text{ cm})(57,624 \text{ Kg.}) + (87.5 \text{ cm}/2)(1332.35 \text{ Kg/cm})(87.5 \text{ cm})$$

$$M_g = -36'205,042 \text{ Kg-cm}$$



$$A_r = 203,800 \text{ cm}^2$$

$$Y_r = 204.77 \text{ cm}$$

$$W_r = (200 \text{ cm}) (203,800 \text{ cm}^2) (0.0024 \text{ Kg/cm}^3)$$

$$W_r = 97,824 \text{ Kg.}$$

Por lo tanto, el momento generado en la sección J' es

$$M_r = -(225 \text{ cm} + 456.25 \text{ cm}) (96,770 \text{ Kg}) - (204.77 \text{ cm}) (97,824 \text{ kg}) + (225 \text{ cm}/2) (1332.35 \text{ Kg/cm}) (255 \text{ cm})$$

$$M_r = -42'637,954 \text{ Kg-cm}$$

Este método de análisis supone que existe una distribución lineal de esfuerzos en las secciones y los calcula por la fórmula de la escuadría.

$$\sigma = \frac{MY}{I}$$

Los momentos de inercia para las tres secciones son

$$I_1 = \frac{200 \text{ cm} (268 \text{ cm})^3}{12} = 320'813,867 \text{ cm}^4$$

$$I_4 = \frac{200 \text{ cm} (500 \text{ cm})^3}{12} = 2083'333,333 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = I_3 = 2083'333,333 \text{ cm}^4$$

El momento flexionante y el momento de inercia permanecen constantes en toda la sección a la que corresponden y solo varía la distancia  $Y$  del eje neutro al punto donde se requiere conocer el esfuerzo.

Las distancias a las cuales se calcularán los esfuerzos tampoco son arbitrarias, sino que corresponden a ejes que resultaron del análisis por el método del elemento finito el cual se expondrá posteriormente. Por el momento se pueden considerar como puntos cualquiera.

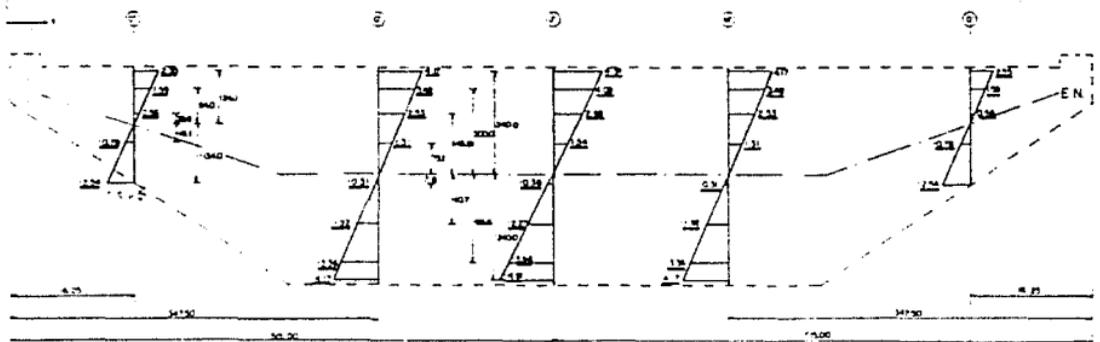
Distribución de esfuerzos de las secciones

Z	Sección C'
	$\sigma, (\text{Kg}/\text{cm}^2)$
124.0	2.35
84.0	1.59
29.6	0.56
-41.1	-0.78
-134.0	-2.54

Z	Sección G'	Sección J'
	$\sigma, (\text{Kg}/\text{cm}^2)$	$\sigma, (\text{Kg}/\text{cm}^2)$
240.0	4.17	4.91
200.0	3.48	4.09
145.8	2.53	2.98
75.1	1.31	1.54
-17.8	-0.31	-0.36
-110.7	-1.92	-2.27
-193.6	-3.36	-3.96
-240.0	-4.17	-4.91

Los resultados de este método en forma gráfica los podemos observar en la figura 7.11.

Debido a la simetría del sistema de cargas y al eje de simetría de la pila podemos dibujar la distribución de las secciones M' y Q' como aparecen en la figura 7.11.



1. ESPALDA EN MORTAR  
 2. ESPALDA EN CEMENTO  
 3. ESPALDA EN TIERRA

4. EL ESPALDA EN CEMENTO EN CADA SECCION DE LA PILA SEGUN EL METODO CONVENIENTE

2.000.000.000

b) Análisis por Medio del Programa

Ahora, teniendo en cuenta los requerimientos del programa, la discretización de la pila y la numeración de elementos y nudos que aparecen en las figuras 7.12 y 7.13, se realizó la corrida.

Los ejes de la pila sobre los que son calculados los esfuerzos aparecen en la figura 7.14 y son representados en forma gráfica en la figura 7.15.

La discretización que se hace de cualquier estructura está restringida por la geometría de esta, aunque siempre se debe buscar una red en la que las dimensiones de los elementos sean del mismo tamaño. El método del elemento finito calcula los esfuerzos en el centroide de cada elemento y esta es la razón por la que se tiene que procurar que los elementos sean cuadrados, además de que existen problemas de rigidez al crear elementos alargados.

En la discretización que hicimos de la pila aparece elementos alargados en la parte superior e inferior porque nos interesa saber los esfuerzos cercanos a los apoyos y a las cargas.



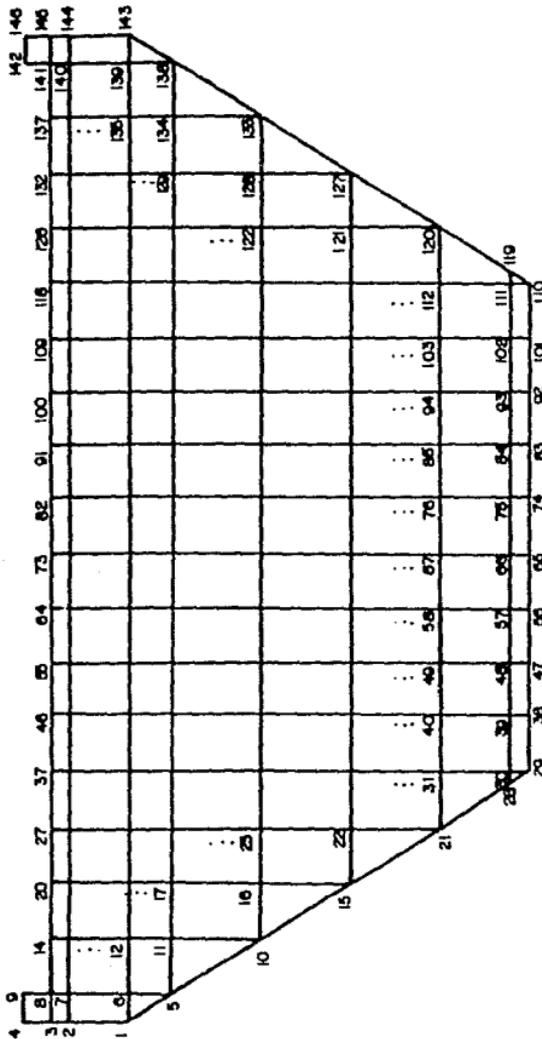
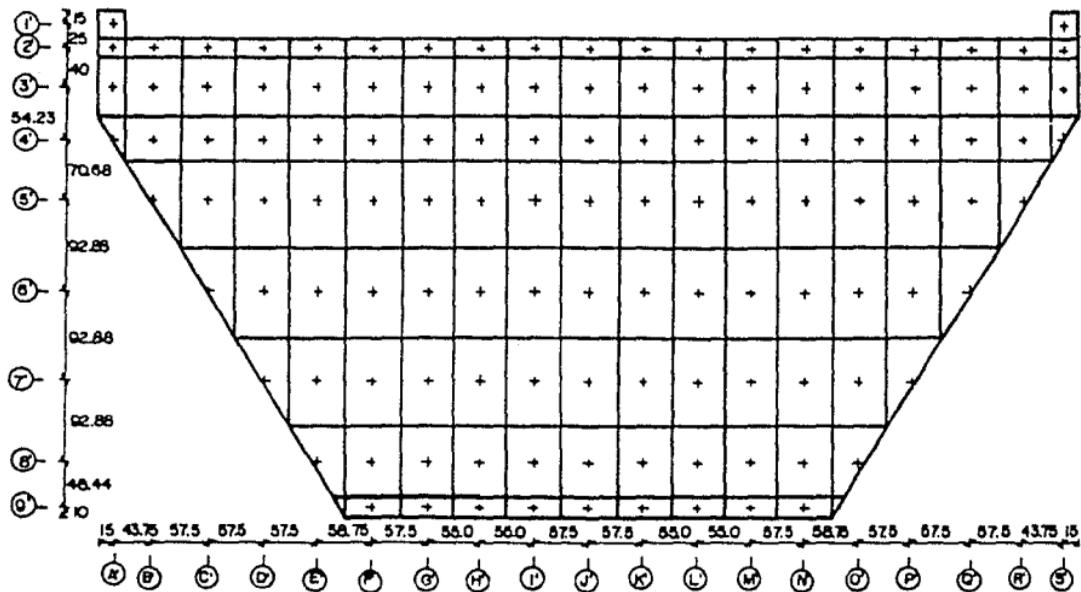
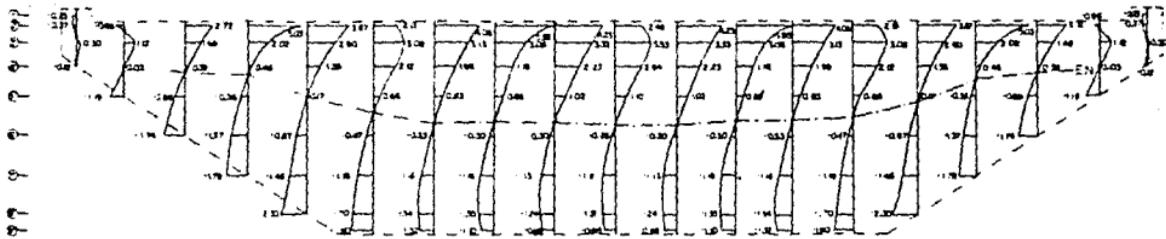


Fig. 7.13.- Numeración de Nudos.



Acot. cm

Fig. 7.14.- Ejes para los que se calculan los esfuerzos.



ESFUERZO EN kg/cm<sup>2</sup>

FIG. 79. DISTRIBUCIÓN DE ESFUERZOS EN LA PILA CALCAN POR EL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO (PROGRAMA SAPSI)

- 62 - ESTACIONES ESTERIAS

Como era de esperarse, la distribución de esfuerzos que resultaron del análisis con el programa no fue lineal y el eje neutro no se localiza en el centroide de la sección, además en las cuatro secciones mas próximas a los extremos existen dos puntos en los que no se generan esfuerzos.

El resultado de este análisis es mas cercano a lo que en realidad ocurre en el interior de la pila.

### c) Comparación del Resultado de los Dos Métodos.

En la figura 7.16 representamos de manera simultanea los resultados obtenidos en la aplicación del método convencional y los obtenidos por medio del programa. Notamos que en la zona donde ocurren esfuerzos en tensión la diferencia entre los resultados es muy poca, pero en la zona de compresión los resultados del método convencional son hasta cinco veces mayores a los obtenidos por medio de la aplicación del programa.

De lo anterior podemos concluir que las pilas que son analizadas por el método convencional nos lleva a reforzar, en algunas zonas, varias veces mas de lo que es necesario para que la estructura cumpla con su objetivo. Si a todo esto agregamos la incertidumbre que se tiene de su comportamiento, lo que resulta es una estructura mucho muy reforzada.

Sin embargo, a pesar de la falta de la herramienta matemática de análisis, los ingenieros inteligentemente han cubierto la necesidad que se tiene de estas estructuras.

Este método del elemento finito, además de proporcionar la certidumbre del conocimiento de lo que sucede en la estructura, reditua grandes cantidades de dinero en ahorro al no colocar refuerzos donde no se necesita.

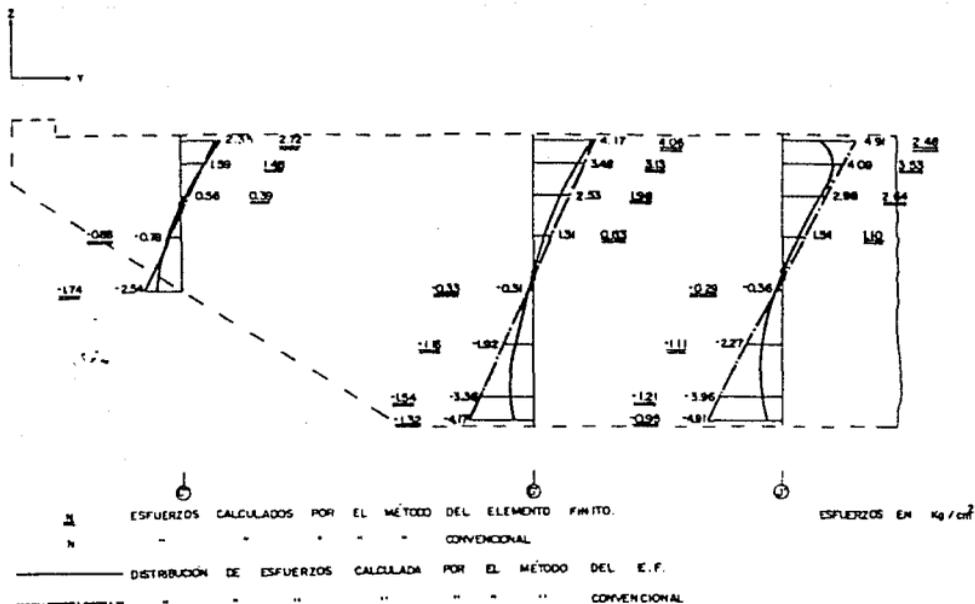


FIG 716 - COMPARACIÓN DE RESULTADOS ENTRE EL MÉTODO CONVENCIONAL Y EL MÉTODO DEL E.F. PARA LAS SECCIONES C, G y J.

d) Dirección de los Esfuerzos Principales y Deformación de la Pila.

Los esfuerzos principales  $\sigma_{max}$  y  $\sigma_{min}$  que se describieron en el capítulo dos y que se obtienen con la expresión 2.19 son calculados también por el programa y se encuentran en la corrida de esta pila para cada elemento, donde aparecen como S-MAX para el esfuerzo máximo y S-MIN para el esfuerzo mínimo.

Es necesario, para el diseño en la colocación del acero de refuerzo, la dirección en que se encuentran los esfuerzos principales. La dirección de estos esfuerzos se pueden calcular por medio de la ecuación 2.18 que aparece en el capítulo dos. El ángulo de esta dirección con respecto a la horizontal aparecen también en la corrida de esta pila para cada elemento.

La configuración de la dirección de estos esfuerzos en base a los ángulos que aparecen en la corrida se pueden observar en la figura 7.17, y la deformación que tendrá la pila a causa de las cargas, se representa en la figura 7.18 por medio de los desplazamientos que aparecen en la corrida para cada nudo. Esta representación de la deformación es mil veces mayor que la real

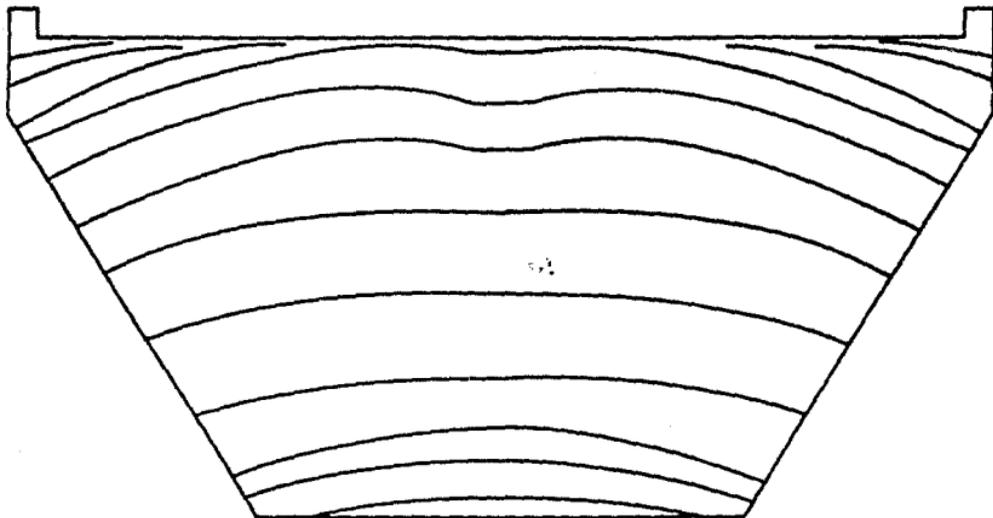


Fig. 7.17.- Dirección de los esfuerzos principales en la pila, que definen la colocación del acero de refuerzo que llevará.

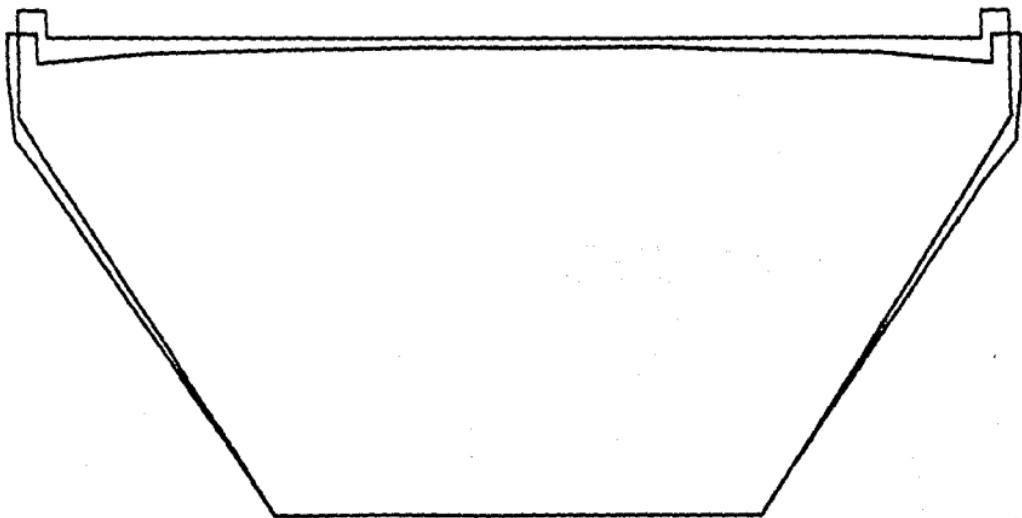


Fig. 7.18.- Deformación que tendrá la pila a causa de la carga.  
Esta representación es mil veces mayor que la real.

## e) Análisis de la Pila Incluyendo la Fuerza Sísmica.

Para analizar esta pila incluyéndole la fuerza que provoca un sismo sobre esta, se estimó que sería de aproximadamente el 20% de las cargas sobre la estructura, es decir, 100 toneladas en dirección Y en sentido positivo. Esta fuerza horizontal debe situarse en las cinco cargas.

Descrito de otra manera, se le aplicaron fuerzas concentradas de 20 ton. en dirección horizontal y en sentido positivo a los nudos 8, 37, 73, 109 y 137 además de las cargas causadas por las traveses y el peso propio, como lo muestra la figura 7.19.

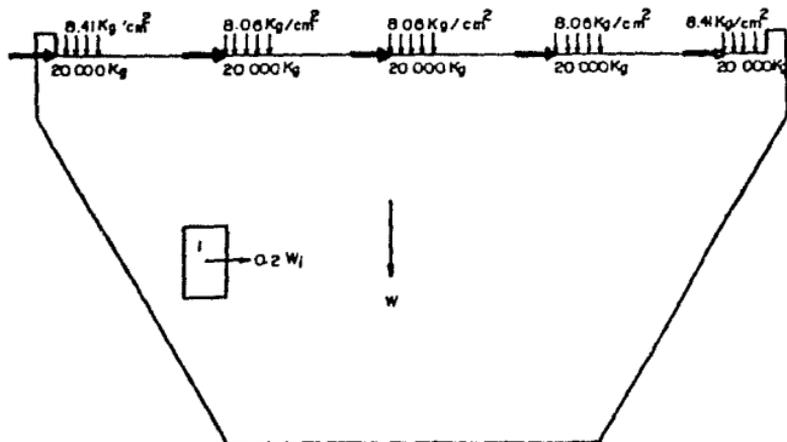
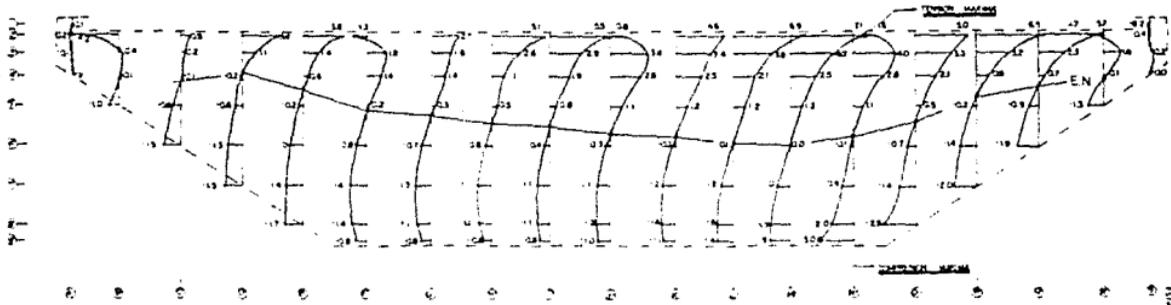


Fig. 7.19.- Pila sometida a carga de superestructura, peso propio y fuerza sísmica.

También se incluye el 20% del peso de la pila, por lo que en la corrida se anota el 0.2 de la gravedad en dirección Y. Con esto el programa considera el 20% del peso de cada elemento como lo muestra la figura 7.19. En lo referente a la discretización, numeración de nudos y elementos, no cambia. Los resultados de este análisis aparecen en la figura 7.20.



ESPESORES EN  $\text{kg/cm}^2$

ES UNO DISTRIBUCION DE ESPESORES DE LA PILA RELACIONADO LA FUERZA ESTATICA

ESTRUCTURA PRECISADA

**Análisis de una Segunda Pila de Puente por el Método del Elemento Finito (Programa SAPV.2).**

Ya analizada la primera pila, proponemos una segunda como la que muestra la figura 7.21. El sistema de carga y de apoyo no cambian en comparación con la primera pila, únicamente varía en cuanto a la geometría, ya que esta se compone de un sistema de elementos unidos entre sí.

El diseño y dimensionamiento de pilas ha tenido una gran variedad en todo el mundo, pero ante todo se ha buscado que sean seguras. Por esta necesidad que tiene el ingeniero, es prudente saber como se comportaría otro tipo de pila ante un mismo sistema de cargas y elegir entre ellas. Esta elección también se basa en la economía que representa la construcción de cualquiera de ellas.

En la figura 7.22 se presenta la discretización de la pila y los ejes que conforman la red, así como los ejes que marcan los puntos para los que se calcularán los esfuerzos.

La figura 7.23 muestra los resultados del análisis (únicamente se incluyen las once primeras secciones ya que las otras once son exactamente iguales a su respectiva, debido a la simetría de la pila y de las cargas). En esta figura se observa que el elemento sobre el cual descansa la superestructura del puente tiene una distribución de esfuerzos casi lineal en el centro del claro. Tiene un comportamiento semejante al que tendría una viga doblemente empotrada. El elemento que descansa sobre el cilindro se comporta como una viga sometida a fuerza axial y no tiene una distribución de esfuerzos lineal, además de que las tensiones predominan. En las uniones es donde las secciones están sometidas a mas cambios en el carácter de los esfuerzos, aparecen en estas secciones mas de un punto de esfuerzo neutro, por ejemplo, la sección D' tiene tres puntos en los que no se generan esfuerzos y la distribución no es lineal.

En la figura 7.24 se ilustra el planteamiento de un análisis de esta pila incluyendo la fuerza sísmica, la cual es obtenida de la misma manera como para la primera pila y en la figura 7.25 se presenta de manera como para la primera pila, y en la figura 7.25 se presenta de manera gráfica los resultados del análisis. La discretización y numeración de elementos y nudos fué la misma que para el análisis sin fuerza sísmica. En la figura 7.25 se presenta únicamente seis secciones que son las mas representativas para el conocimiento del comportamiento de la pila ante un sismo.

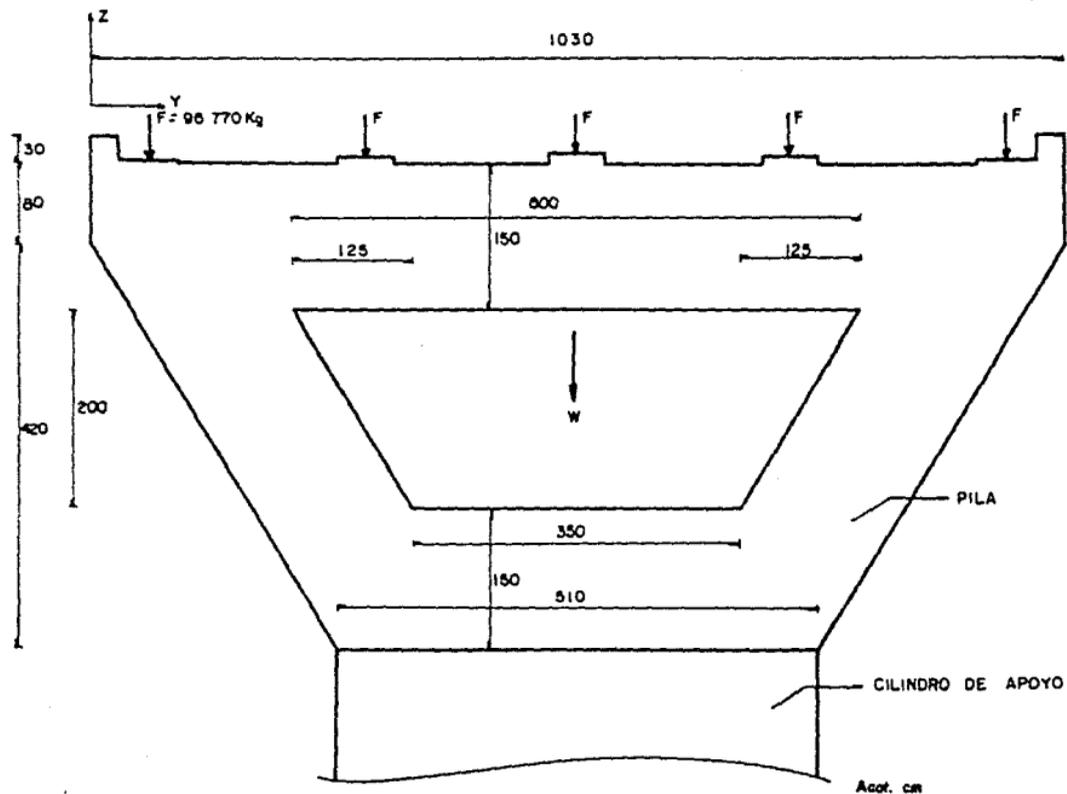


Fig. 7.21.- Pila número 2.- Dimensiones, sistema de cargas y de apoyo, donde la planta de la pila es la misma que la de la pila número 1.

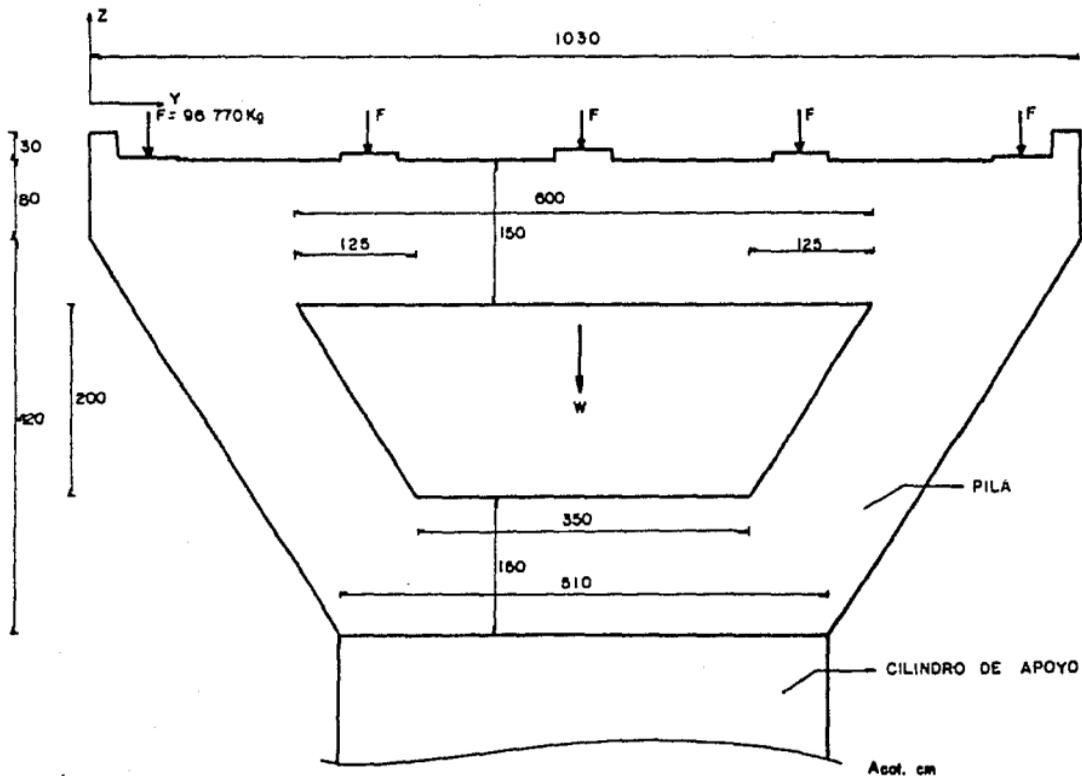


Fig. 7.21.- Pila número 2.- Dimensiones, sistema de cargas y de apoyo, donde la planta de la pila es la misma que la de la pila número 1.

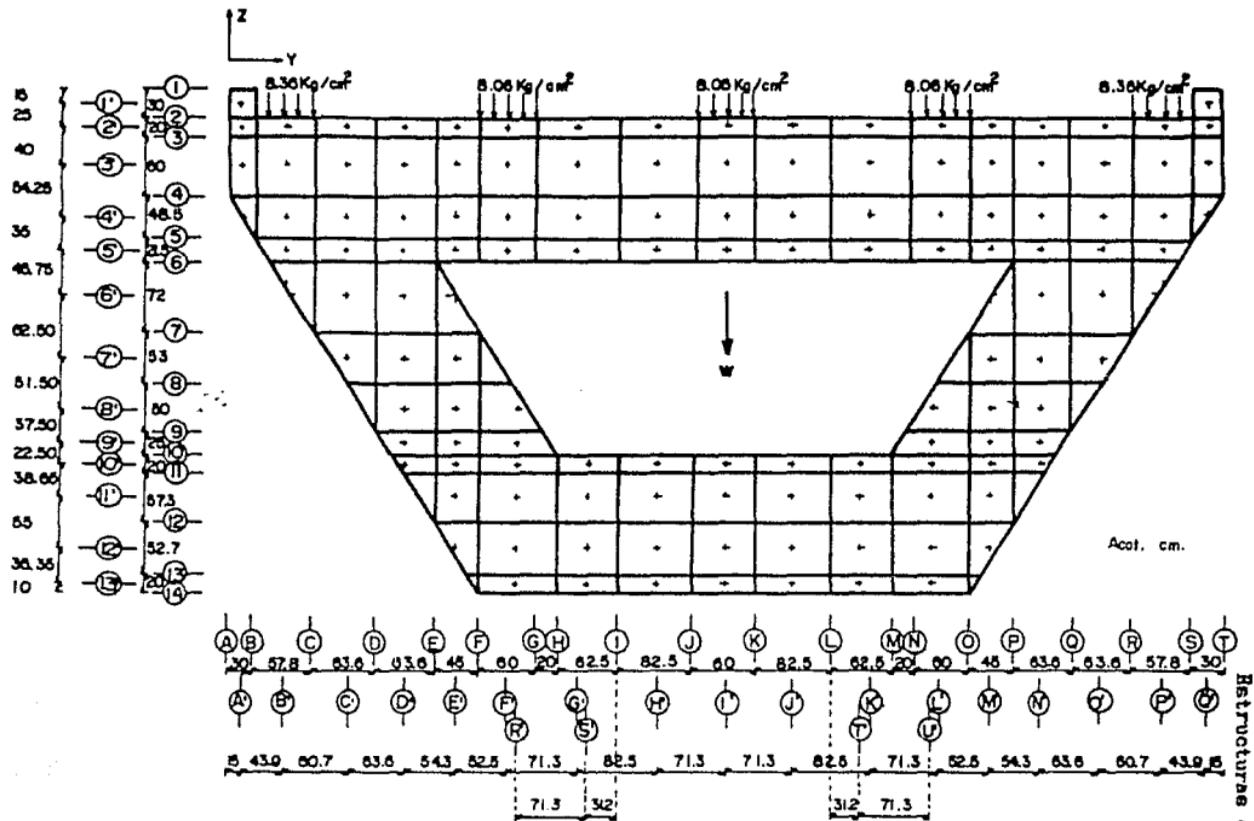
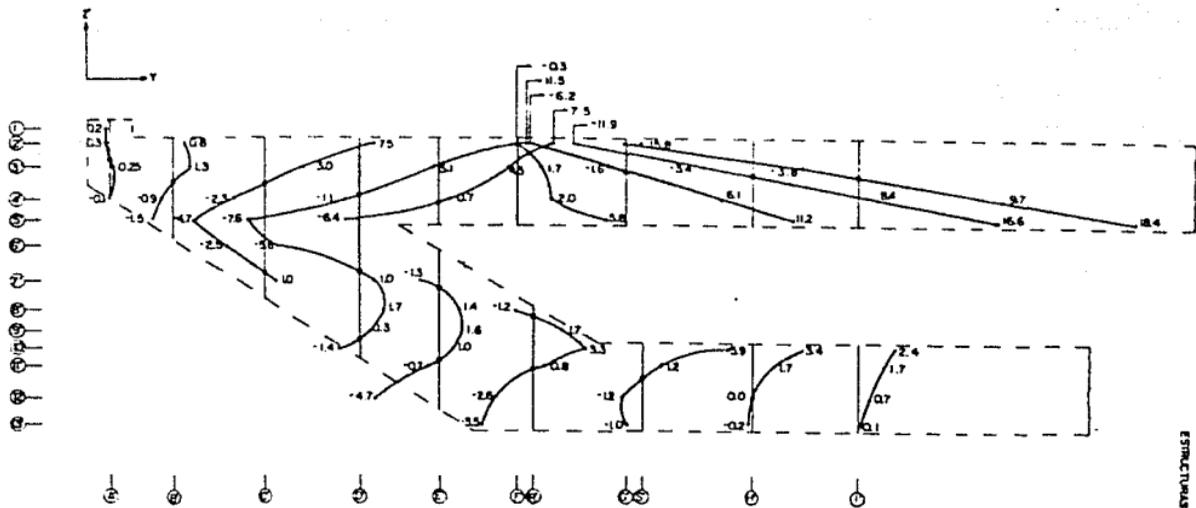


Fig. 7.22.- Discretización de la Pila. Los ejes 1,2,3,...,14 y A,B,C,...,T son los que definen a los elementos y los que tienen ejes marcados con prima definen los puntos para los que se calculan los esfuerzos.

Estructuras especiales



ESFUERZOS EN Kg/cm<sup>2</sup>

FIG. 7.23.. DISTRIBUCIÓN DE ESFUERZOS DE LA SEGUNDA PILA

a) Análisis de la Pila Incluyendo la Fuerza Sísmica.

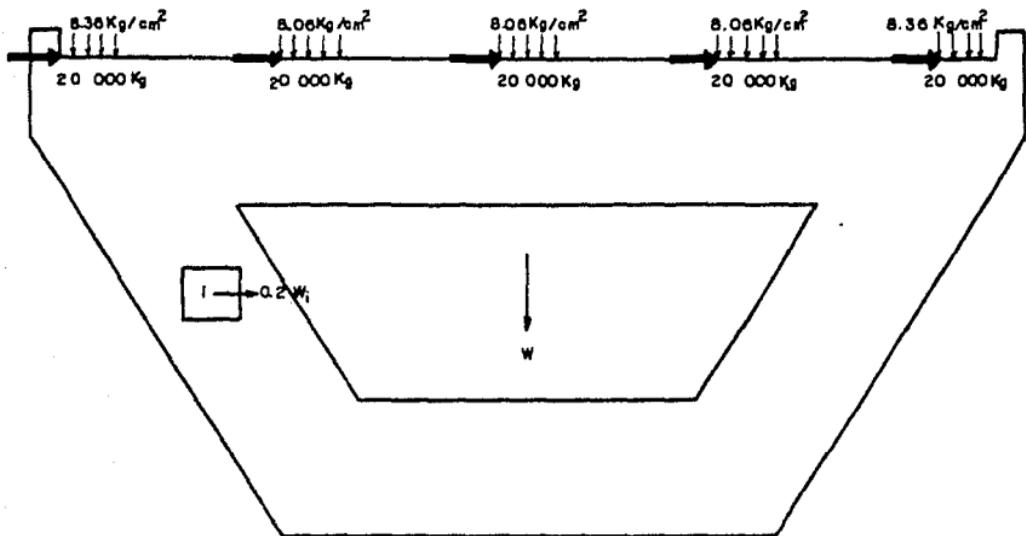
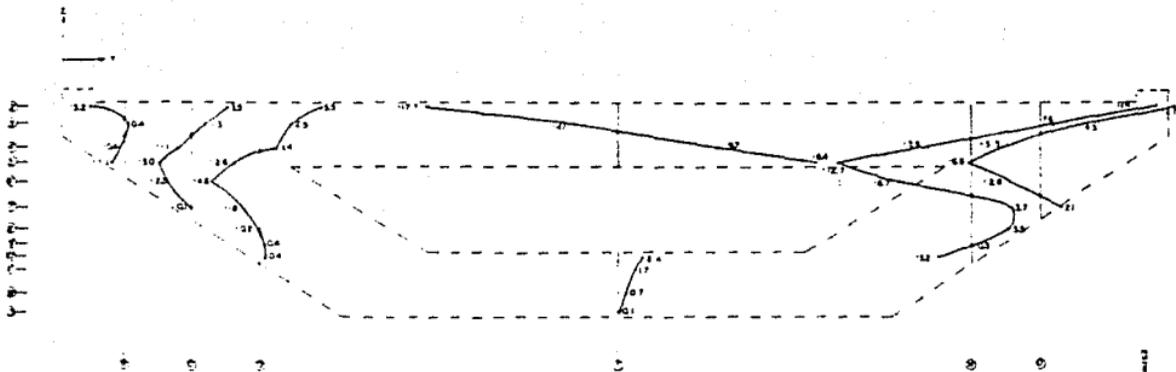


Fig. 7.24.- Pila número 2 incluyendo las fuerzas sísmicas.



ESFUEROS EN MPa

FIG. 125. DISTRIBUCION DE ESFUEROS DE LA SECCION PILA SI HOLME EN ESTE ANALISIS LA FUERZA SENSICA

ESFUEROS EN MPa

### Análisis de una Tercera Pila de Puente por el Método del Elemento Finito (Programa SAPV.2)

En la figura 7.26 se presenta la tercera pila que proponemos. El sistema de cargas y de apoyo no cambian en comparación con las dos pilas anteriores, únicamente varía en cuanto a su geometría, ya que consta de una viga de sección variable y que sí cumple con la relación  $L/h > 5$ , es decir, se podrían calcular los esfuerzos que se generan en ellas con la teoría propuesta por la mecánica de materiales.

Se realizó estos análisis para comprobar la linealidad en la distribución de esfuerzos en una viga de sección variable que cumple con la relación antes mencionada, además de que en este análisis incluimos un análisis en el que se considera una hilera de elementos de acero y los demás de concreto.

Primeramente se realizó el análisis de la pila considerando que toda es de concreto. La discretización que se llevó a cabo es la mostrada en la figura 7.27, donde también se identifican los ejes que conforman la red y los que determinan los puntos en los que serán calculados los esfuerzos en los elementos y el sistema de carga. El resultado de este análisis se ilustra de manera gráfica en la figura 7.28, donde únicamente aparecen las secciones del centro de la pila a la izquierda, ya que las otras secciones tienen la misma distribución a sus respectivas de acuerdo al plano de simetría de la pila. Los esfuerzos que aparecen de este análisis no presentan linealidad en las secciones paralelas y sobre el cilindro que sirve como apoyo. Las secciones situadas fuera del apoyo sí presentan "cierta linealidad" a excepción de las dos cercanas al extremo de la pila. Un resultado interesante de observar es que las mayores compresiones no se localizan en las secciones sobre el apoyo.

Un segundo análisis de esta pila es la planteada en la figura 7.29, donde los elementos 91, 92, 93, ..., 104 y 105 están constituidos de acero. Ya conociendo el comportamiento de la pila, observamos que se necesita armar con acero en la parte superior de esta para que resista las tensiones generadas por el sistema de cargas, es por esto que, los elementos antes mencionados, consideramos que son de acero. Las propiedades que le atribuimos a estos elementos son:

$$\begin{aligned} E &= 2'039,000 \text{ Kg/cm}^2 \\ \nu &= 0.285 \\ G &= 793,000 \text{ Kg/cm}^2 \\ D &= 0.0070 \text{ Kg/cm}^3 \end{aligned}$$

Como se puede observar en las propiedades que se le atribuyen al acero, este material tiene una mayor elasticidad que el concreto y con la combinación de materiales se tendrá un resultado del comportamiento de la pila ya armada.

Los resultados de este análisis se representan gráficamente en la figura 7.30. De estos resultados observamos una comprobación de lo que suponemos los ingenieros, en cuanto a que consideramos que las tensiones se concentran en el material de mayor elasticidad en una estructura sometida a un sistema de cargas. Baste es un resultado muy interesante que posibilita el análisis de la pila ya armada y la comprobación del comportamiento del concreto y del acero.

Si observamos las figuras 7.28 y la 7.30 notamos que los elementos de concreto sometidos a esfuerzos de compresión mantienen casi el mismo valor, pero en lo referente a los esfuerzos de tensión, los elementos de concreto cercanos a los de acero son liberados en gran medida de esfuerzos para concentrarse en los elementos constituidos de acero.

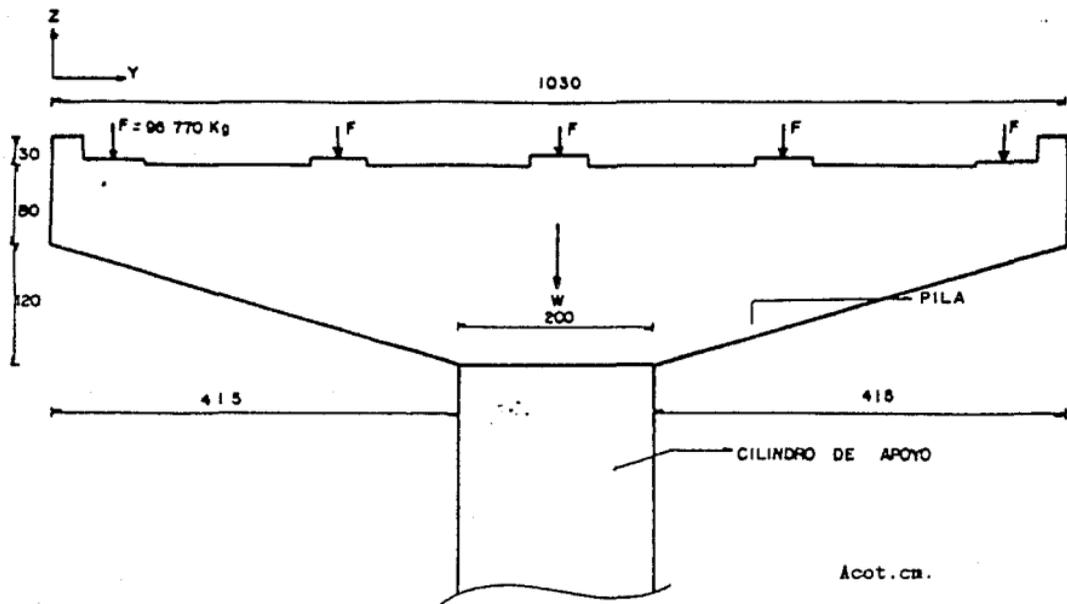


Fig. 7.26.- Pila número 3.- Dimensionamiento y sistema de cargas y de apoyo, donde la planta de la pila es la misma que la de la pila número 2

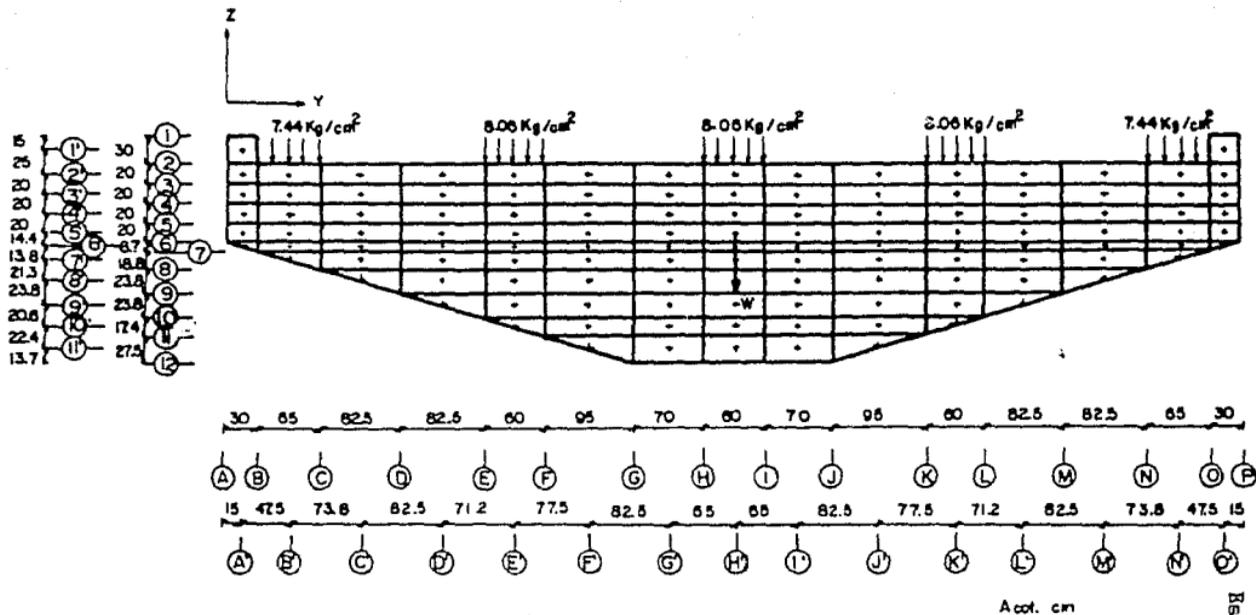


Fig. 7.27.- Discretización de la pila. Los ejes 1,2,3,...,12 y A,B,C,...,P son los que definen a los elementos y los que tienen ejes marcados con prima definen los puntos para los que se calculan los esfuerzos.

Estructuras especiales

A cot. cm



n) Análisis Tomando en Cuenta el Acero en la Pila.

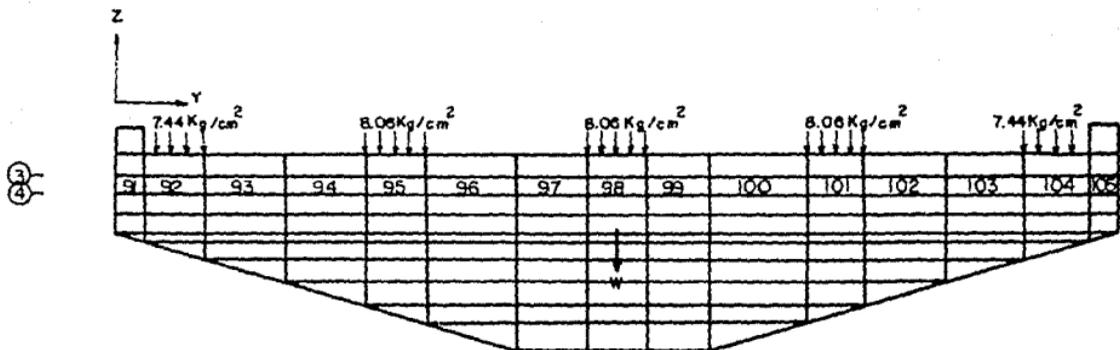
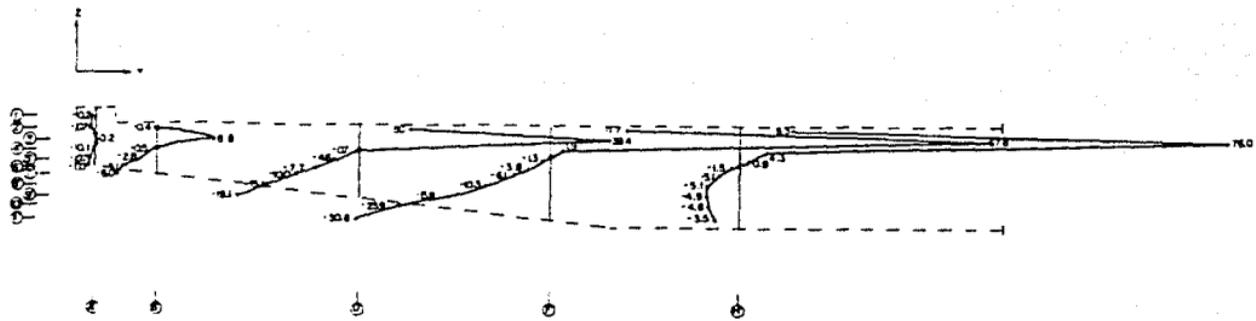


Fig. 7.29.- Discretización de la pila número 3. La numeración de los elementos es de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba. Los elementos 91, 92, 93, ..., 104 y 105 son de acero y todos los demás de concreto.



ESFUEROS  $\times 10^4 \text{ cm}^2$

FIG. 7.30 DISTRIBUCION DE ESFUEROS DE LA TENDONERA P.L.A., DONDE EL EJE Z DEFINE LOS ESFUEROS EN LOS ELEMENTOS CONSTITUIDOS DE ACERO.

ESTRUCTURAS ESPECIALES

b) Dirección de los Esfuerzos Principales.

La configuración de la dirección de los esfuerzos principales para esta tercera pila cuando es considerada de puro concreto y cuando se le coloca acero de refuerzo aparecen en la figura 7.31.

Notamos en esta figura (7.31) que la dirección de los esfuerzos principales cambia cuando a la pila se le calculan los esfuerzos con el acero de refuerzo que llevará que cuando no se toma en cuenta este. Una vez que la pila tiene el acero, los esfuerzos tienen direcciones más verticales, también notamos que la zona donde los esfuerzos son totalmente verticales suben con respecto al análisis donde no se considero el acero y aparecen esfuerzos horizontales en las fibras cercanas al apoyo.

La dirección de los esfuerzos que se debe tener en cuenta para armar de acero de refuerzo a la pila es de acuerdo a la figura 7.31(b) ya que es más cercano a su comportamiento real.

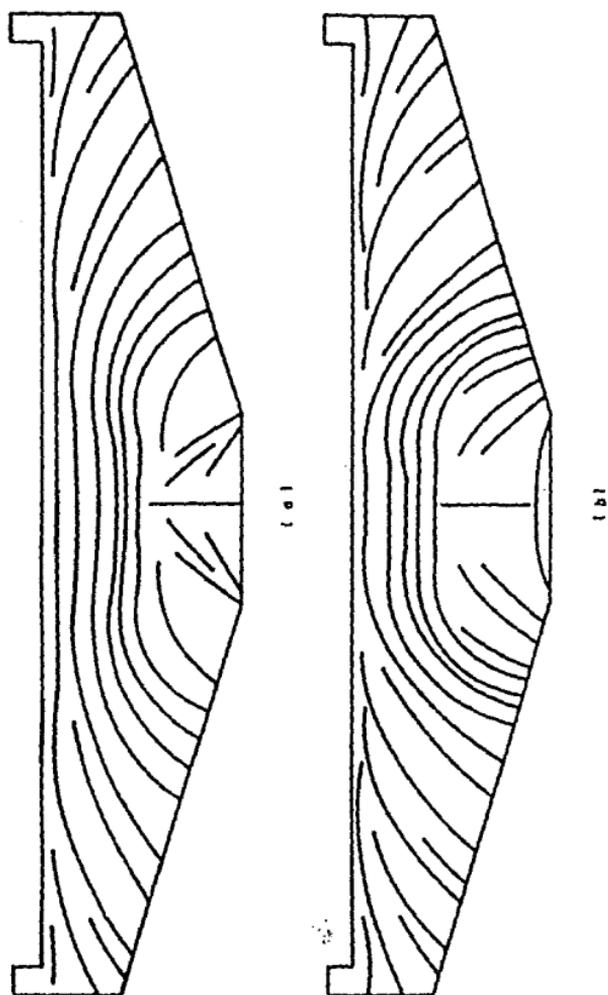


Fig. 7.31.- Configuración de los esfuerzos principales. a) Para la pila constituida únicamente de concreto y b) Para cuando se le considera el acero de refuerzo.

## CAPITULO VIII

## CONCLUSIONES

## CAPITULO VIII

### CONCLUSIONES

El método del elemento finito constituye una poderosa herramienta para el análisis de estructuras complejas como las pilas de los puentes de composición de materiales diversos y geometrías complicadas. Para fines prácticos, las soluciones obtenidas mediante la aplicación adecuada del método a problemas elásticos pueden considerarse como exactas.

El caso de las pilas de puentes se puede modelar adecuadamente considerando que se trata de un problema de esfuerzos planos, es decir, aceptando que son nulos los esfuerzos fuera del plano de la pila. Las matrices de rigideces para los elementos que se obtubieron en este trabajo se pueden aplicar para los problemas de esfuerzos y deformaciones planas y mientras mas pequeños sean los elementos, la solución es más aproximada. En caso de tener acceso a los grandes programas como lo es el SAPV.2 se recomienda que sea usado adecuadamente para obtener los resultados correctos y multiplicar la rapidez de los análisis.

A pesar de que no existen cuerpos idealmente elásticos, el método del elemento finito, con esta suposición, da soluciones a estructuras para las que no tienen por medio de las hipótesis de la mecánica de materiales. Retoma el concepto de energía de deformación y le da utilidad a las leyes constitutivas de los materiales de que se constituye la estructura, es decir, relaciona los esfuerzos con las deformaciones por medio de la ley de Hooke.

En la práctica del análisis de esfuerzos se ha observado una aplicación indiscriminada de la fórmula de la escuadría haciendo poco caso de las restricciones que encierra esta fórmula, la cual supone una distribución lineal en todas las secciones de una viga, lo cual ha quedado en duda para cualquier problema. Sin embargo, hemos visto con mucho gusto la aproximación que para fines prácticos se obtiene con la fórmula de la escuadría para el cálculo de esfuerzos en las pilas para puentes. Los ingenieros que sin tener un respaldo matemático para comprobar el método convencional, lo han creado inteligentemente y le han dado, a lo largo de muchos años, solución a los problemas que enfrentaron.

Esperamos que con los análisis expuestos en este trabajo dé la certidumbre de que el método convencional da soluciones exactas para fines prácticos y de no tener posibilidad de uno de los grandes programas de análisis, se utilice con seguridad.

La ventaja mas grande que tiene el método del elemento finito es que se pueden analizar estructuras compuestas de varios materiales, como es el caso de la pila en la que le incluimos el acero de refuerzo además del concreto. De tal manera que podemos conocer el comportamiento de la estructura con acero de refuerzo y sin él, siendo los resultados del análisis, con los materiales que realmente tendrá la pila, los mas interesantes.

Una manera de empezar los análisis es, hacer uno primero atribuyendo la composición de la estructura únicamente de concreto, después se diseña la colocación y cantidad del acero de refuerzo para los resultados obtenidos. Una vez teniendo la cantidad y distribución del acero en la pila de concreto, se calcula un promedio pesado de los materiales que constituyen cada elemento. Se realiza un segundo análisis con las nuevas características elásticas y de densidad de los elementos del material ya combinado, y por último, se rediseña.

Finalmente, debemos hacer notar que los análisis por el método del elemento finito son costosos. Si se realizan por medio de un programa de computadora comercial que valen muchos millones de pesos, también se necesita una computadora potente que sea capaz de correr el programa y, por el otro lado, si se emplean las matrices de rigideces y se formulan las ecuaciones para resolver el sistema, el tiempo requerido para un problema dado es de varias semanas, sin pensar en los errores en que se podría caer.

## B I B L I O G R A F I A

- 1.- The Finite Element Method. K.C. Rockey, H.R. Evans, D.V. Griffiths, D.A. Nethercot. Ed. Granaola, 1975.
- 2.- Elementos Finitos. Introducción para Ingenieros. R.K. Livesley. Ed. Limusa, 1988.
- 3.- Apuntes de Fundamentos de Elasticidad del Análisis Estructural con Introducción al Método del Elemento Finito. Dr. Porfirio Bellesteros Barocio. División de Educación Continua de la Facultad de Ingeniería, UNAM.
- 4.- Introducción a la Mecánica de Sólidos. Egor P. Popov. Ed. Limusa, 1989.
- 5.- Mecánica de Materiales. James M. Gere y Stephen P. Timoshenko. Ed. Iberoamericana.
- 6.- Geometría Analítica. Charles H. Lehmann. Ed. Limusa, 1988.
- 7.- Análisis Matricial de Estructuras Reticulares. Carlos Magdaleno. Apuntes de la Unidad Profesional de Zacatenco, 1982.
- 8.- Apuntes de Álgebra Lineal. Eduardo Solar González y Leda Speziale de Guzmán. Facultad de Ingeniería, UNAM.