12
29

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"CADENAS DE MARKOV"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

CLAUDIA CARMEN ITURRIAGA VELAZQUEZ

MEXICO, D. F. 1990

INDICE

INTRODUCCION

Pretendemos presentar el concepto de Esperanza Condicional con un enfoque un poco distinto a los usuales, tratando de estuduiar los casos elementales para familiarizarnos con el concepto, hasta llegar al caso en que se define a la Esperanza Condicional através del Teorema de Radon-Nikodym.

Luego estudiamos las Cadenas de Markov hasta llegar al teorema Básico del Límite. En nuestro tercer capítulo simulamos caminatas aleatorias estudiando algunas de sus propiedades vistas en el capítulo anterior.

Estudiando finalmente el modelo de Ehrenfest en donde se juntan estos tres capítulos, ya que encontramos la distribución límite de la manera usual y también lo hacemos usando la Esperanza Condicional. Hacemos también una simulación de este proceso y estudiamos su comportamiento.

CAPITULO I

Esperanza Condicional

1.1 Introducción

Lo que se desea hacer en este capítulo es estudiar en detalle el concepto de esperanza condicional. Queremos hacerlo en un enfoque un poco distinto a los usuales ya que en general en los textos elementales de probabilidad sólo se estudia el caso discreto sin ver sus propiedades, y en los textos avanzados sólo el caso en el que la probabilidad condicional y la esperanza condicional quedan definidos através del teorema de Radon-Nikodym y no aparece en detalle la relación entre ambos conceptos y sus relaciones.

Así se estudiaran:

a. Si X y Y son variables aleatorias discretas.
b. Si X es variable aleatoria definida en $(\Omega, \Im, P)$ espacio de probabilidad y $B \in \Im$.
c. Si $\Im$ es una σ-álgebra con partición numerable.
d. Si $\mathfrak{G}$ es una subσ-álgebra de $\Im$.
e. Si $\Im = \sigma(X)$.

Es decir trataremos de estudiar primero casos elementales para familiarizarnos con el concepto demostrando así algunas propiedades de la esperanza condicional tratando de usar en cada caso la herramienta más simple.

1.2 Esperanza Condicional para X, Y variables aleatorias discretas.

Cuando estudiamos la probabilidad de un evento A podríamos preguntarnos por la ocurrencia del evento A dado que ya sucedió un cierto evento B, a esta probabilidad la definiremos a continuación:

1.2.1 Definición.- Sea $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad y sean $A, B \in \Im$ conjuntos tales que $P(B) > 0$. La **probabilidad condicional de que A suceda dado que B sucedió** la definimos como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

donde esta cumple con las propiedades de una probabilidad :

1.2.2.- $P(A|B) \geq 0$ ya que

Demostración.- $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ donde $P(A \cap B) \geq 0$ y $P(B) > 0$ ∎

1.2.3.- $P(\Omega|B) = 1$

Demostración.-
$$P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

∎

1.2.4.- Sean $A_1, A_2, \ldots \in \Omega$ con $A_i \cap A_j = \emptyset$ donde $i \neq j$ entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k|B) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k|B\right)$$

Demostración.-
$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k|B) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)}$$

por ser P una probabilidad tenemos que lo anterior es igual a:

$$\frac{P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \cap B\right)}{P(B)} = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k|B\right)$$

∎

1.2.5 Definición.- Sean X y Y dos variables aleatorias discretas en un mismo espacio de estados Ω ; tales que:

$$X : \Omega \longrightarrow S_X \subset \mathbb{R}$$
$$Y : \Omega \longrightarrow S_Y \subset \mathbb{R}$$

donde S_X es el conjunto donde toma valores X y S_Y es el conjunto donde toma valores Y. Definimos a la **probabilidad condicional** de $Y = y_i \in S_Y$ dado que $X = x_j \in S_X$ con $i = 1, ..., n$; $j = 1, ..., m$, como:

$$P(Y = y_i|X = x_j) = \begin{cases} \frac{P(Y=y_i, X=x_j)}{P(X=x_j)} = \frac{P([Y=y_i]\cap[X=x_j])}{P(X=x_j)} & \text{si } P(X = x_j) > 0 \\ 0 & \text{si } P(X = x_j) = 0 \,. \end{cases}$$

Esta definición de probabilidad condicional podemos generalizarla condicionando con respecto a varias variables aleatorias como sigue:

1.2.6 Definición.- Sean X, Y y Z variables aleatorias discretas con los conjuntos S_X, S_Y, S_Z definidos análogamente como en **1.2.5**, definimos la **probabilidad condicional** de $Y = y_i \in S_Y$ dado que $X = x_j \in S_X$ y $Z = z_k \in S_Z$ como:

$$P(Y = y_i|X = x_j, Z = z_k) = \begin{cases} \frac{P(Y=y_i,X=x_j,Z=z_k)}{P(X=x_j,Z=z_k)} & \text{si } P(X = x_j, Z = z_k) > 0 \\ 0 & \text{si } P(X = x_j, Z = z_k) = 0 \end{cases}$$

donde ambas definiciones **1.2.5** y **1.2.6** cumplen que la probabilidad condicional es una probabilidad, como se demostró anteriormente en **1.2.2** a **1.2.4**.

Dado que estamos trabajando en los conjuntos S_X, S_Y y S_Z los cuales son los conjuntos en donde toman valores las variables aleatorias X, Y y Z respectivamente, podemos dejar de considerar los casos para los cuales

$$P(X = x_j) = 0 \quad \text{y} \quad P(X = x_j, Z = z_k) = 0.$$

Ahora bien nosotros podríamos preguntarnos por la existencia de una esperanza condicional, basandonos en la misma idea de la definición de esperanza de una variable aleatoria la cual es el valor que toma por la probabilidad de que lo tome, podríamos en este sentido hablar de una esperanza condicional de una variable aleatoria la cual definiríamos como el valor que toma la variable aleatoria por la probabilidad condicional de que lo tome, y este sera su valor en el conjunto sobre el que se está condicionando obteniendo así una nueva variable aleatoria discreta.

De acuerdo con las definiciones **1.2.5** y **1.2.6** definimos a la esperanza condicional como sigue:

1.2.7 Definición.- Sean X y Y dos variables aleatorias discretas en un mismo espacio de estados Ω con los conjuntos S_X y S_Y respectivamente definimos a la **esperanza condicional** de Y dado $X = x_j \in S_X$ con $j = 1, ..., m$ como:

$$E(Y|X = x_j) = \sum_{y_i \in S_Y} y_i P(Y = y_i|X = x_j).$$

1.2.8 Definición.- Sean X, Y y Z variables aleatorias discretas en un mismo espacio de estados Ω con los conjuntos S_X, S_Y y S_Z respectivamente definimos a la **esperanza condicional** de Y dado $X = x_j \in S_X$ y $Z = z_k \in S_Z$ como:

$$E(Y|X = x_j, Z = z_k) = \sum_{y_i \in S_Y} y_i P(Y = y_i|X = x_j, Z = z_k)$$

Observemos que $E(Y|X = x_j)$ y $E(Y|X = x_j, Z = z_k)$ son números reales y son distintos de la $E(Y|X)$ que definiremos a continuación.

1.2.9 Definición.- Sean X y Y dos variables aleatorias discretas, denotaremos a la **esperanza condicional de la variable aleatoria** Y **dada la variable aleatoria** X como $E(Y|X)$ definiéndola como una variable aleatoria que toma el valor

$$a_j = \Big(\sum_{y_i \in S_Y} y_i P(Y = y_i | X = x_j) \Big)$$

sobre el conjunto

$$A_j = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x_j\} \quad \text{para } j = 1, ..., m.$$

es decir

$$E(Y|X) = \sum_{x_j \in S_X} a_j 1_{A_j} = \sum_{x_j \in S_X} \left(\sum_{y_i \in S_Y} y_i P(Y = y_i | X = x_j) \right) \times 1_{(X = x_j)}$$

Definimos análogamente a $E(Y|X, Z)$:

1.2.10 Definición.- Sean X, Y, Z variables aleatorias discretas denotaremos a la **esperanza condicional de** Y **dado** X **y** Z como:

$$E(Y|X, Z)$$

y la definiremos como una variable aleatoria con valor:

$$a_{jk} = \Big(\sum_{y_i \in S_Y} y_i P(Y = y_i | X = x_j, Z = z_k) \Big)$$

$$j = 1, ..., n, \quad k = 1, ..., r$$

sobre el conjunto

$$A_{jk} = \{\omega \in \Omega | X_{(\omega)} = x_j, Z_{(\omega)} = z_k\}.$$

Veamos ahora las propiedades que podemos obtener para la esperanza condicional definida aquí:

Dado que $E(Y|X)$ es una variable aleatoria podemos preguntarnos acerca de su esperanza:

1.2.11 Proposición.-

$$E(E(Y|X)) = E(Y).$$

Demostración.-

$$E(E(Y|X)) = \sum_{x_j \in S_X} \sum_{y_i \in S_Y} y_i P(Y = y_i | X = x_j) P(X = x_j)$$

$$= \sum_{y_i \in S_Y} \sum_{x_j \in S_X} y_i P(Y = y_i, X = x_j)$$

$$= \sum_{y_i \in S_Y} y_i P([\cup_{x_i \in S_X}(X = x_i)], Y = y_j)$$

$$= \sum_{y_i \in S_Y} y_i P(\Omega, Y = y_i) = \sum_{y_i \in S_Y} y_i P(Y = y_i) = E(Y).$$

∎

1.2.12 Proposición.- $E(E(Y|X,Z)) = E(Y)$.

Demostración.-

$$E(E(Y|X,Z)) = \sum_{z_k \in S_Z} \sum_{x_j \in S_X} \sum_{y_i \in S_Y} y_i P(Y = y_i|X = x_j, Z = z_k)P(X = x_j, Z = z_k)$$

$$= \sum_{z_k \in S_Z} \sum_{x_j \in S_X} \sum_{y_i \in S_Y} y_i P(Y = y_i, X = x_j, Z = z_k)$$

$$= \sum_{y_i \in S_Y} y_i P(Y = y_i, [\cup_{x_j \in S_X} X = x_j], [\cup_{z_k \in S_Z} Z = z_k]) = \sum_{y_i \in S_Y} y_i P(Y = y_i) = E(Y).$$

∎

1.2.13 Proposición.-$E(E(Y|X,Z)|X) = E(Y|X)$.

Demostración.-

Conocemos el valor de $E(Y|X,Z)$ el cual es:

$$\sum_{y_i \in S_Y} y_i P(Y = y_i|X = x_j, Z = z_k) = a_{jk}$$

sobre el conjunto

$$A_{jk} = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x_j; Z(\omega) = z_k\}$$

tomemos

$$W = E(Y|X,Z)$$

Entonces $E(W|X)$ toma el valor

$$A_g = \sum_{a_{jk} \in S_W} a_{jk} P(W = a_{jk}|X = x_g)$$

sobre el conjunto $\{X = x_g\}$ desarrollando el término A_g tenemos:

$$A_g = \sum_k \sum_j a_{jk} \frac{P(X = x_j, Z = z_k, X = x_g)}{P(X = x_g)}$$

donde

$$(X = x_j, X = x_g) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } j \neq g \\ (X = x_g) & \text{si } j = g \end{cases}$$

por lo que

$$A_g = \sum_k \sum_j a_{jk} \frac{P(X = x_j, Z = z_k, X = x_g)}{P(X = x_g)} = \sum_k a_{gk} \frac{P(X = x_g, Z = z_k)}{P(X = x_g)}$$

sustituyendo el valor a_{gk}

$$\begin{aligned} A_g &= \sum_k \left(\sum_{y_i \in S_Y} y_i P(Y = y_i | X = x_j, Z = z_k) \times \frac{P(X = x_g, Z = z_k)}{P(X = x_g)} \right) \\ &= \sum_k \left(\sum_{y_i \in S_Y} y_i \frac{P(Y = y_i, Z = z_k, X = x_g)}{P(X = x_g, Z = z_k)} \frac{P(X = x_g, Z = z_k)}{P(X = x_g)} \right) \\ &= \sum_{y_i \in S_Y} y_i \frac{P(Y = y_i, [\cup_{z_k \in S_Z} (Z = z_k)], X = x_g)}{P(X = x_g)} \\ &= \sum_{y_i \in S_Y} y_i P(Y = y_i | X = x_g). \end{aligned}$$

y esto es exactamente el valor de $E(Y|X)$ sobre el conjunto $(X = x_g)$.

Por lo tanto sobre el conjunto $(X = x_g)$ el valor de

$$E(EY|X, Z)|X)$$

coincide con el valor de $E(Y|X)$. Hacemos lo mismo para cada valor posible de X y obtenemos el resusltado.

∎

1.2.14 Proposición.- $E(Y|X = x_j) = \frac{E(Y 1_{[X=x_j]})}{P(X=x_j)}$.

Demostración.-

$$\begin{aligned} E(Y|X = x_j) P(X = x_j) &= \sum_{y_i \in S_Y} y_i P(Y = y_i | X = x_j) P(X = x_j) \\ &= \sum_{y_i \in S_Y} y_i P(Y = y_i, X = x_j) = E(Y 1_{[X=x_j]}). \end{aligned}$$

∎

1.2.15 Proposición.- Si a y b son constantes entonces

$$E(aY + bZ|X = x_j) = aE(Y|X = x_j) + bE(Z|X = x_j).$$

Demostración.-Como $E(aY+bZ|X=x_j)$ toma los valores

$$\sum_{y_i\in S_Y, z_k\in S_Z}(ay_i+bz_k)P(Y=y_i, Z=z_k|X=x_j)$$

$$=\sum_{y_i\in S_Y}\sum_{z_k\in S_Z}(ay_i+bz_k)\frac{P(Y=y_i, Z=z_k, X=x_j)}{P(X=x_j)}$$

$$=a\sum_{y_i\in S_Y}y_i\frac{P(Y=y_i, [\cup_{z_k\in S_Z}(Z=z_k)], X=x_j)}{P(X=x_j)}$$

$$+b\sum_{z_k\in S_Z}z_k\frac{P([\cup_{y_i\in S_Y}(Y=y_i)], Z=z_k, X=x_j)}{P(X=x_j)}$$

$$=a\sum_{y_i\in S_Y}y_i\frac{P(Y=y_i, X=x_j)}{P(X=x_j)}+b\sum_{z_k\in S_Z}z_k\frac{P(Z=z_k, X=x_j)}{P(X=x_j)}$$

tomando todos los valores de X tenemos $aE(Y|X)+bE(Z|X)$. ∎

Veamos la relación que hay entre la esperanza condicional y la probabilidad condicional:

1.2.16 Proposición.- $P(Y=y_i|X=x_j)=E(1_{[Y=y_i]}|X=x_j)$.

Demostración.-

Usando la proposición **1.2.14** tenemos

$$E(1_{[Y=y_i]}|X=x_j)=\frac{E(1_{[Y=y_i]\cap[X=x_j]})}{P(X=x_j)}$$

y es claro que

$$E(1_{[Y=y_i]\cap[X=x_j]})=P(Y=y_i, X=x_j)$$

por otra parte

$$P(Y=y_i|X=x_j)=\frac{P(Y=y_i, X=x_j)}{P(X=x_j)}=\frac{E(1_{[Y=y_i]\cap[X=x_j]})}{P(X=x_j)}.$$

Por lo tanto la proposición se cumple. ∎

1.2.17 Proposición.- Si Y es una variable aleatoria constante, $Y\equiv a$ entonces para toda $x_j\in S_X$

$$E(Y|X=x_j)=a.$$

Demostración.- Tenemos que

$$E(Y|X=x_j) = aP(Y=a|X=x_j) + \sum_{y_i \neq a} y_i P(Y=y_i|X=x_j)$$

como $Y \equiv a$ entonces para $y_i \neq a$

$$P(Y=y_i|X=x_j) = 0$$

y por otro lado sabemos que la probabilidad de que $[Y=a]$ no depende de la probabilidad de que $[X=x_j]$ por lo que

$$P(Y=a|X=x_j) = \frac{P(Y=a, X=x_j)}{P(X=x_j)} = \frac{P(Y=a)P(X=x_j)}{P(X=x_j)}$$

$$= P(Y=a) = 1$$

por lo tanto

$$E(Y|X=x_j) = a.$$

∎

1.2.18 Definición.- Diremos que X y Y son variables aleatorias **independientes** si

$$P(Y=y_i, X=x_j) = P(Y=y_i)P(X=x_j)$$

1.2.19 Proposición.- Si Y es independiente de X entonces:

$$E(Y|X=x_j) = E(Y).$$

Demostración.-

$$E(Y|X=x_j) = \sum_{y_i \in S_Y} y_i \frac{P(Y=y_i, X=x_j)}{P(X=x_j)}$$

Usamos la independencia de X y Y en la segunda igualdad entonces

$$= \sum_{y_i \in S_Y} y_i \frac{P(Y=y_i)P(X=x_j)}{P(X=x_j)} = \sum_{y_i \in S_Y} y_i P(Y=y_i) = E(Y).$$

∎

1.2.20 Proposición.- Si Y es una variable aleatoria no negativa entonces $E(Y|X)$ es también no negativa.

Demostración.- Probaremos que para toda $x_g \in S_X$ se cumple que

$$E(Y|X = x_j) \geq 0.$$

Tenemos

$$E(Y|X = x_j) = \sum_{y_i \in S_Y} y_i P(Y = y_i | X = x_j)$$

tenemos que por ser P una función de probabilidad

$$P(Y = y_i | X = x_j) \geq 0$$

y para toda $y_i \in S_Y$ y $y_i \geq 0$.

Luego entonces

$$E(Y|X = x_j) \geq 0.$$

Esto se cumple para toda $x_g \in S_X$ por lo tanto

$$E(Y|X) \geq 0$$

∎

1.2.21 Proposición.- Si Y y Z son variables aleatorias tales que $Y \geq Z$ entonces:

$$E(Y|X = x_j) \geq E(Z|X = x_j).$$

Demostración.- Tenemos que

$$Y \geq Z \quad \text{entonces} \quad Y - Z \geq 0$$

entonces por la propiedad **1.2.20** tenemos

$$E(Y - Z|X = x_j) \geq 0$$

y por la propiedad **1.2.15**

$$E(Y - Z|X = x_j) = E(Y|X = x_j) - E(Z|X = x_j)$$

teniendo así que

$$E(Y|X = x_j) - E(Z|X = x_j) \geq 0$$
$$E(Y|X = x_j) \geq E(Z|X = x_j).$$

∎

1.2.22 Proposición.- Si $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq Y \leq b$ entonces:

$$a \leq E(Y|X = x_j) \leq b.$$

Demostración.- Usando la propiedad **1.2.20** para $Y - a \geq 0$ y $b - Y \geq 0$ tenemos

$$E(Y|X = x_j) - E(a|X = x_j) \geq 0$$

y

$$E(b|X = x_j) - E(Y|X = x_j) \geq 0$$

por la propiedad **1.2.17** tenemos

$$E(a|X = x_j) = a \quad ; \quad E(b|X = x_j) = b$$

obteniendo entonces

$$a \leq E(Y|X = x_j) \leq b.$$

∎

1.2.23 Proposición.- Si X es una variable aleatoria constante entonces:

$$E(Y|X = x_j) = E(Y).$$

Demostración.-

$$E(Y|X = x_j) = \sum_{y_i \in S_Y} y_i P(Y = y_i|X = x_j)$$

como X es constante, el valor de X no depende del valor que tome la variable aleatoria Y entonces:

$$\sum_{y_i \in S_Y} y_i P(Y = y_i|X = x_j) = \sum_{y_i \in S_Y} y_i \frac{P(Y = y_i)P(X = x_j)}{P(X = x_j)}$$

$$\sum_{y_i \in S_Y} y_i P(Y = y_i) = E(Y).$$

∎

1.2.24 Proposición.- Si ϕ es una función convexa tal que $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ entonces:

$$\phi(E(Y|X = x_j)) \leq E(\phi(Y)|X = x_j).$$

Demostración.- Como ϕ es una función convexa entonces para cada $x_0 \in \mathbb{R}$ hay un número $\lambda(x_0)$ tal que

$$\phi(x) \geq \phi(x_0) + (x - x_0)\lambda(x_0) \quad \text{con} \quad x \in \mathbb{R}$$

tomamos $x_0 = E(Y|X = x_j)$ y $x = Y(\omega)$ tenemos

$$\phi(Y) \geq \phi(E(Y|X = x_j)) + (Y - E(Y|X = x_j))\lambda(E(Y|X = x_j))$$

obteniendo la esperanza condicional de esta expresión y usando las propiedaes **1.2.15** **1.2.17** y **1.2.21** tenemos

$$E(\phi(Y)|X = x_j) \geq \phi(E(Y|X = x_j)).$$

∎

1.2.25 Proposición.- Sean X y Y variables aleatorias tales que

$$E(XY) < \infty \quad \text{y} \quad E(Y) < \infty$$

entonces:

$$E(XY|X) = XE(Y|X).$$

Demostración.- Probaremos que este resultado es valido para toda $x_j \in S_X$

$$E(XY|X = x_j) = \sum_{x_k \in S_X} \sum_{y_i \in S_Y} x_k y_i P(X = x_k, Y = y_i | X = x_j)$$

$$= \sum_{x_k \in S_X} \sum_{y_i \in S_Y} x_k y_i \frac{P(X = x_k, Y = y_i, X = x_j)}{P(X = x_j)} = A_j$$

en donde observamos que

$$(X = x_k, X = x_j) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } k \neq j \\ (X = x_j) & \text{si } k = j \end{cases}$$

entonces

$$\begin{aligned} A_j &= \sum_{y_i \in S_Y} y_i x_j \frac{P(Y = y_i, X = x_j)}{P(X = x_j)} \\ &= x_j \sum_{y_i \in S_Y} y_i P(Y = y_i | X = x_j) \\ &= x_j E(Y|X = x_j) \end{aligned}$$

Esto se cumple para toda $x_j \in S_X$ por lo tanto

$$E(XY|X) = XE(Y|X)$$

∎

1.3 Concepto de Probabilidad y Esperanza Condicional dado $B \in \Im$.

Definamos ahora la esperanza condicional de cualquier variable aleatoria definida sobre $(\Omega, \Im, P)$ pero condicionada a $B \in \Im$ tal que $P(B) > 0$.

En toda la sección **1.3** $(\Omega, \Im, P)$ es un espacio de probabilidad y $B \in \Im$ tal que $P(B) > 0$.

1.3.1 Definición.-Sea X una variable aleatoria defnida sobre $(\Omega, \Im, P)$ tal que

$$E(|X|) < \infty$$

bajo estas condiciones definimos la **esperanza condicional de X dado B** como:

$$E(X|B) = \int_\Omega X dP(\cdot|B).$$

Como tenemos que X es integrable con respecto a P entonces X es también integrable con respecto a $P(\cdot|B)$ ya que ésta es una medida finita tal que

$$P(\cdot|B) \leq \frac{P(\cdot)}{P(B)} = cP(\cdot)$$

1.3.2 Proposición.- Sea X una variable aleatoria definida sobre $(\Omega, \Im, P)$ entonces:

$$E(X|B) = \frac{E(1_B X)}{P(B)}.$$

Demostración.-

Tomemos $X = 1_A$ donde $A \in \Im$

$$\int_\Omega 1_A dP(\cdot|B) = \int_A dP(\cdot|B) = P(A|B)$$

1.3.2.1

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{P(B)} \int_\Omega 1_{A\cap B} dP = \frac{1}{P(B)} \int_B 1_A dP$$

$$= \frac{1}{P(B)} E(1_B X)$$

con lo cual tenemos que la proposición es cierta para funciones indicadoras por lo cual por propiedades de la integral tenemos que también es cierta para funciones simples.

Ahora bien si X es una función medible positiva sabemos que existe una sucesión de funciones simples $\{X_n\}$ tal que $X_n \uparrow X$ y usando el teorema de Convergencia Monótona tenemos:

$$\int_\Omega X dP(\cdot|B) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_n dP(\cdot|B)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{P(B)} \int_B X_n dP$$

usando nuevamente el teorema de Convergencia Monótona

$$= \frac{1}{P(B)} \int_B \lim_{n\to\infty} X_n dP = \frac{E(X1_B)}{P(B)}.$$

Luego entonces para cualquier función integrable X esta igualdad tiene sentido ya que es cierta para X^+ y X^- esto es:

$$E(X|B) = \int_\Omega X dP(\cdot|B) = \int_\Omega (X^+ - X^-) dP(\cdot|B)$$

$$= \int_\Omega X^+ dP(\cdot|B) - \int_\Omega X^- dP(\cdot|B) = \frac{E(X^+1_B)}{P(B)} - \frac{E(X^-1_B)}{P(B)}$$
$$= \frac{1}{P(B)}\left[E\left((X^+ - X^-)1_B\right)\right] = \frac{1}{P(B)} E(X1_B). \blacksquare$$

1.3.3 Corolario.- Bajo las mismas hipótesis que en **1.3.2** tenemos que:

$$P(A|B) = E(1_A|B)$$

Demostración.-

Se puede observar en la relación **1.3.2.1.**

$\blacksquare$

1.4 Esperanza Condicional de Y dada una σ-álgebra generada por una partición de Ω.

1.4.1 Definición.- Sea $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad y $\{B_n; n \geq 1\}$ una partición medible de Ω tal que $P(B_n) > 0$ para toda $n \geq 1$ y sea $\mathfrak{U}$ la σ-álgebra generada por $\{B_n; n \geq 1\}$ definimos la **probabilidad condicional de A dado $\mathfrak{U}$** como:

$$P(A|\mathfrak{U})_{(\omega)} = P(A|B_i) \qquad \text{si} \quad \omega \in B_i$$

En donde tenemos las siguientes propiedades:

1.4.2.- Para cualquier ω fija la $P(\cdot|\mathfrak{U})_{(\omega)}$ es una probabilidad.

Demostración.-

Sea $A \in \Im$ entonces

$$P(A|\mathfrak{U})_{(\omega)} = P(A|B_i) \qquad \text{si} \quad \omega \in B_i$$

en donde sabemos que $P(A|B_i)$ es una probabilidad.

a. Como para toda $i \geq 1$, $P(B_i) > 0$ y la $P(A \cap B_i) \geq 0$ tenemos

$$0 \leq \frac{P(A \cap B_i)}{P(B_i)} = P(A|B_i) \quad \text{si} \quad \omega \in B_i$$

$$= P(A|\mathfrak{U})$$

b. Análogamente $P(\Omega|\mathfrak{U}) = 1$

$$P(\Omega|\mathfrak{U}) = P(\Omega|B_i) \quad \text{si} \quad \omega \in B_i$$

$$\frac{P(\Omega \cap B_i)}{P(B_i)} = \frac{P(B_i)}{P(B_i)} = 1$$

c. Sean $A_1, A_2, ... \in \Im$ con $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j|\mathfrak{U}\right)(\omega) = P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j|B_i\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j|B_i) \quad \text{si}\, \omega \in B_i$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j|\mathfrak{U})(\omega)$$

esto es

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j|\mathfrak{U}\right)(\omega) = P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j|B_i\right) = \frac{P\left(\left[\cup_{j=1}^{\infty} A_j\right] \cap B_i\right)}{P(B_i)}$$

por ser P probabilidad

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{P(A_j \cap B_i)}{P(B_i)} = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j|B_i)$$

si $\omega \in B_i$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j|\mathfrak{U})_{(\omega)}.$$

∎

1.4.3.- Para cada $A \in \Im$ fija $P(A|\mathfrak{U})_{(.)}$, es una función borel-medible con respecto a $\mathfrak{U}$. Esto es debido a que ya que para cada B_i tenemos

$$P(A|B_i) = b_i \in \mathbb{R}$$

$$P(A|\mathfrak{U})_{(\omega)} = \sum_{i=1}^{\infty} b_i 1_{B_i}$$

en donde tenemos que 1_{B_i} es una función medible ya que:

$$1_{B_i}(-\infty, a) = \begin{cases} \Omega & \text{si } a > 1 \\ B_i & \text{si } 0 < a \leq 1 \\ \emptyset & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$$

en donde Ω, B_i y $\emptyset$ estan en $\mathfrak{U}$.

Por otro lado la multiplicación de funciones medibles por una constante es una función medible y la suma de funciones medibles es medible. ∎

1.4.4 Proposición.- Para cada $B \in \Im$ fijo y para todo $C \in \mathfrak{U}$ tenemos

$$P(B \cap C) = \int_C P(B|\mathfrak{U})dP$$

Demostración.-

Ya que $C \in \mathfrak{U}$ entonces [1] $C = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{ij}$ donde $B_{ij} \in \{B_i; i \geq 1\}$ para toda $j \geq 1$

Así tenemos

$$P(C \cap B) = P\left(\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_{ij}\right) \cap B\right) = P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (B_{ij} \cap B)\right)$$

---

[1] Ver Apendice I

debido a que los conjuntos B_{ij} pertenecen a la partición entonces por aditividad numerable tenemos:

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}(B_{ij}\cap B)\right)=\sum_{j=1}^{\infty}P(B\cap B_{ij})$$

como $P(B_{ij})>0$ para toda j y por definición

$$\sum_{j=1}^{\infty}P(B\cap B_{ij})=\sum_{j=1}^{\infty}P(B|B_{ij})P(B_{ij})=\int_C P(B|\mathfrak{U})dP.$$

∎

Veamos la definición de la esperanza condicional correspondiente:

1.4.5 Definición.- Sea $(\Omega,\Im,P)$ un espacio de probabilidad y $\mathfrak{U}$ una σ-álgebra generada por la partición de Ω como $\{B_i; i\geq 1\}$ y sea Y una variable aleatoria integrable definida sobre el mismo espacio definimos a la **esperanza condicional de Y dado $\mathfrak{U}$** como:

$$E(Y|\mathfrak{U})(\omega)=E(Y|B_i)\qquad \text{si}\quad \omega\in B_i$$

la cual es una función tal que:

$$E(Y|\mathfrak{U})_{(\cdot)}:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$$

y se cumplen las siguientes propiedades:

1.4.6 Proposición.- La $E(Y|\mathfrak{U})$ es una función borel-medible con respecto a $\mathfrak{U}$.

Demostración.-

La demostración es análoga a la demostración hecha en **1.4.3.**

∎

Recordando la esperanza condicional definida en **1.2.9** observemos que

$$E(Y|X)$$

es una función medible con respecto a la σ-álgebra generada por el conjunto

$$\{X=x_j\}$$

donde este conjunto genera una partición de Ω.

1.4.7 Proposición.- Sean X y Z variables aleatorias y $a,b\in\mathbb{R}$ entonces

$$E(aY+bZ|\mathfrak{U})(\omega)=aE(Y|\mathfrak{U})(\omega)+bE(Z|\mathfrak{U})(\omega)$$

Demostración.-

$$E(aY + bZ|\mathfrak{U})(\omega) = E(aY + bZ|B_i) \quad \text{si} \quad \omega \in B_i$$

de acuerdo con la proposición **1.3.2**

$$E(aY + bZ|B_i) = \frac{E((aY + bZ)1_{B_i})}{P(B_i)}$$

y como la esperanza es lineal

$$\frac{E((aY + bZ)1_{B_i})}{P(B_i)} = \frac{aE(Y1_{B_i})}{P(B_i)} + \frac{bE(Z1_{B_i})}{P(B_i)}$$

usando de nuevo la proposición **1.3.2**

$$aE(Y|B_i) + bE(Z|B_i) = aE(Y|\mathfrak{U})(\omega) + bE(Z|\mathfrak{U})(\omega)$$

si $\omega \in B_i$.

∎

1.4.8 Proposición.- Si Y es una variable aleatoria constante, $Y = a$ entonces

$$E(Y|\mathfrak{U})(\omega) = a.$$

Demostración.-

$$E(Y|\mathfrak{U})(\omega) = E(Y|B_i) \quad \text{si} \quad \omega \in B_i$$

usando la proposición **1.3.2**

$$E(Y|B_i) = \frac{E(Y1_{B_i})}{P(B_i)} = \frac{aP(B_i)}{P(B_i)} = a. \blacksquare$$

1.4.9 Proposición.- Si Y es variable aleatoria no negativa entonces

$$E(Y|\mathfrak{U})(\omega) \geq 0.$$

Demostración.-

$$E(Y|\mathfrak{U})(\omega) = E(Y|B_i) \quad \text{si} \quad \omega \in B_i$$

por la proposición **1.3.2**

$$E(Y|B_i) = \frac{E(Y1_{B_i})}{P(B_i)}$$

en donde sabemos que si $Y \geq 0$ entonces $E(Y1_{B_i}) \geq 0$ y la $E(Y|B_i)$ sólo esta definida si $P(B_i) > 0$.

Luego entonces
$$E(Y|B_i) \geq 0.$$

∎

1.4.10 Proposición.- Si Y y Z son variables aleatorias tales que $Y \geq Z$ entonces:
$$E(Y|\mathfrak{U})(\omega) \geq E(Z|\mathfrak{U})(\omega).$$

Demostración.-

Como $Y \geq Z$ entonces $Y - Z \geq 0$ y por **1.4.9**
$$E(Y - Z|\mathfrak{U}) \geq 0$$
y por **1.4.7**
$$E(Y|\mathfrak{U})(\omega) - E(Z|\mathfrak{U})(\omega) \geq 0$$
entonces
$$E(Y|\mathfrak{U})(\omega) \geq E(Z|\mathfrak{U})(\omega).$$

∎

1.4.11 Proposición.- Si $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq Y \leq b$ entonces
$$a \leq E(Y|\mathfrak{U})(\omega) \leq b.$$

Demostración.-

Como tenemos que $a \leq Y \leq b$ por **1.4.10** y **1.4.8**
$$E(a|\mathfrak{U})(\omega) \leq E(Y|\mathfrak{U})(\omega) \leq E(b|\mathfrak{U})(\omega)$$
$$a \leq E(Y|\mathfrak{U})(\omega) \leq b.$$

∎

1.4.12 Proposición.- Para toda $A \in \mathfrak{U}$ tenemos:
$$E(1_A E(Y|\mathfrak{U})) = E(Y1_A)$$

Demostración.-

Tomemos Y como una variable aleatoria no negativa, como $A \in \mathfrak{U}$ entonces $A = \cup_{j=1}^{\infty} B_{ij}$ donde $B_{ij} \in \{B_i; i \geq 1\}$ tomemos $f_n = 1_{\cup_{j=1}^{n} B_{ij}}$ teniendo así que

$$1_A = \lim_{n\to\infty} 1_{\cup_{j=1}^{n} B_{ij}} = \lim_{n\to\infty} f_n$$

con lo que

$$\int_\Omega 1_A E(Y|\mathfrak{U})dP = \int_\Omega (\lim_{n\to\infty} f_n E(Y|\mathfrak{U}))dP$$

Observemos que $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ y como $Y \geq 0$ por **1.4.9** $E(Y|\mathfrak{U})(\omega) \geq 0$ por lo que podemos usar el Teorema de Convergencia Monótona:

$$\int_\Omega (\lim_{n\to\infty} f_n E(Y|\mathfrak{U}))dP = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n E(Y|\mathfrak{U})dP$$

Sustituyendo f_n tenemos lo siguiente

$$= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega 1_{\cup_{j=1}^{n} B_{ij}} E(Y|\mathfrak{U})dP$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \sum_{j=1}^{n} 1_{B_{ij}} E(Y|\mathfrak{U})dP$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega 1_{B_{ij}} E(Y|\mathfrak{U})dP$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int_\Omega 1_{B_{ij}} E(Y|\mathfrak{U})dP$$

por otro lado observemos que:

$$E(1_{B_{ij}} E(Y|\mathfrak{U}))(\omega) = \begin{cases} E(1_{B_{ij}} E(Y|B_{ij})) & \text{si } \omega \in B_{ij} \\ 0 & \text{si } \omega \in B_{ij}^c \end{cases}$$

con esto tenemos:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_\Omega 1_{B_{ij}} E(Y|\mathfrak{U})dP = \sum_{j=1}^{\infty} \int_\Omega 1_{B_{ij}} E(Y|B_{ij})dP$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} E(1_{B_{ij}} E(Y|B_{ij})).$$

De acuerdo con la definición de esperanza tenemos que

$$E(1_{B_{ij}} E(Y|B_{ij}))$$

toma el valor

$$E(Y|B_{ij})$$

con probabilidad

$$P(B_{ij})$$

teniendo en cuenta este hecho es igual a

$$\sum_{j=1}^{\infty} E(1_{B_{ij}} E(Y|B_{ij})) = \sum_{j=1}^{\infty} E(Y|B_{ij}) P(B_{ij})$$

por la proposición **1.3.2** esto es igual a

$$\sum_{j=1}^{\infty} E(Y 1_{B_{ij}})$$

usando el Teorema de Convergencia Monótona de nuevo

$$= E\left(\sum_{j=1}^{\infty} Y 1_{B_{ij}}\right) = E(Y 1_{\cup_{j=1}^{\infty} B_{ij}}) = E(Y 1_A)$$

es decir obtuvimos para Y variable aleatoria no negativa que para toda $A \in \mathfrak{U}$

$$E(1_A(E(Y|\mathfrak{U}))(\omega)) = E(Y 1_A).$$

Ahora si Y es cualquier función medible tenemos $Y = Y^+ - Y^-$ donde por **1.4.7** se tiene

$$E(Y|\mathfrak{U})(\omega) = E(Y^+|\mathfrak{U})(\omega) - E(Y^-|\mathfrak{U})(\omega)$$

y por propiedades de la esperanza

$$E(1_A E(Y|\mathfrak{U})) = E(1_A[E(Y^+|\mathfrak{U}) - E(Y^-|\mathfrak{U})])$$

$$= E(1_A E(Y^+|\mathfrak{U})) - E(1_A E(Y^-|\mathfrak{U}))$$

en donde sabemos que para Y^+ y Y^- se cumple

$$= E(1_A Y^+) - E(1_A Y^-) = E(1_A(Y^+ - Y^-)) = E(1_A Y). \blacksquare$$

1.4.13 Proposición.- Sean X y Y variables aleatorias tales que $E(|XY|) < \infty$ y $E(|Y|) < \infty$. Con

$$X : (\Omega, \mathfrak{U}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$$

entonces:

$$E(XY|\mathfrak{U}) = X E(Y|\mathfrak{U}).$$

Demostración.-

Sea $X = 1_A$ donde $A \in \mathfrak{U}$ usando **1.4.12**

$$\int_\Omega 1_A E(Y|\mathfrak{U})dP = \int_\Omega 1_A Y dP$$

también por **1.4.12**

$$\int_\Omega E(XY|\mathfrak{U})dP = \int_\Omega XY dP = \int_\Omega 1_A Y dP$$

con lo que tenemos

$$\int_\Omega E(1_A Y|\mathfrak{U})dP = \int_\Omega 1_A E(Y|\mathfrak{U})dP$$

Luego entonces

$$E(1_A Y|\mathfrak{U}) = 1_A E(Y|\mathfrak{U})$$

es cierto para funciones indicadoras por lo que también es cierto para funciones simples también, debido a las propiedades de la integral.

Ahora tomemos X variable aleatoria positiva entonces existe una sucesión de funciones simples $\{X_n\} \uparrow X$ tomemos también a Y no negativa aplicando el Teorema de Convergencia Monótona

$$\int_\Omega XE(Y|\mathfrak{U})dP = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} X_n E(Y|\mathfrak{U})dP$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_n E(Y|\mathfrak{U})dP = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega E(YX_n|\mathfrak{U})dP$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega YX_n dP$$

volviendo a usar el Teorema de Convegencia Monótona

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega YX_n dP = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} X_n Y dP = \int_\Omega XY dP$$

$$\int_\Omega E(XY|\mathfrak{U})dP$$

entonces $XE(Y|\mathfrak{U}) = E(XY|\mathfrak{U})$.

Ahora para cualquier variable aleatoria X,

$$E(XY|\mathfrak{U}) = E((X^+ - X^-)Y|\mathfrak{U}) = E(X^+Y|\mathfrak{U}) - E(X^-Y|\mathfrak{U})$$

$$= X^+E(Y|\mathfrak{U}) - X^-E(Y|\mathfrak{U}) = (X^+ - X^-)E(Y|\mathfrak{U}) = XE(Y|\mathfrak{U})$$

sabemos que es válido para cualquier variable aleatoria X hacemos lo mismo para cualquier variable aleatoria Y

$$E(XY|\mathfrak{U}) = E(X(Y^+ - Y^-)|\mathfrak{U}) = E(XY^+|\mathfrak{U}) - XE(Y^-|\mathfrak{U}) = XE(Y|\mathfrak{U}).$$

∎

1.4.14 Proposición.- Sea X una variable aleatoria para la cual esta definida $E(X)$ y X independiente de la σ-álgebra $\mathfrak{U}$ entonces

$$E(X|\mathfrak{U})(\omega) = E(X).$$

Demostración.-

$$E(X|\mathfrak{U})(\omega) = E(X|B_i) \quad \text{si} \quad \omega \in B_i$$

por **1.3.2** tenemos

$$E(X|B_i) = \frac{E(1_{B_i}X)}{P(B_i)}$$

como X es independiente de la σ-álgebra $\mathfrak{U}$ esto es que es independiente de cada función indicadora 1_{B_i}, $B_i \in \mathfrak{U}$ entonces

$$E(1_{B_i}X) = E(1_{B_i})E(X)$$

por otro lado

$$E(1_{B_i}) = \int_\Omega 1_{B_i} dP = \int_{B_i} dP = P(B_i)$$

luego entonces

$$E(X|B_i) = \frac{E(X)P(B_i)}{P(B_i)} = E(X).$$

∎

1.5 Concepto General de Probabilidad y Esperanza Condicional dado X=x.

Observemos que en todo lo anterior estamos definiendo la probabilidad condicional para los conjuntos B tales que $P(B) > 0$, sin embargo por lo general las variables aleatorias más interesantes o más frecuentes tienen la propiedad de que:

$$P(X = x) = 0 \text{ para toda } x$$

(Caso continuo o absolutamente continuo).

Podríamos, para definir estos casos, tratar de tomar el límite de la siguiente manera

$$P(A|X = x) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{P(A, X \in (x-h, x+h))}{P(X \in (x-h, x+h))} \qquad \textbf{1.5.1}$$

Esto en general no es correcto ya que el hecho de que $P(X = x_0) = 0$, no garantiza que en la expresión **1.5.1** el límite existirá para

$$x = x_0.$$

por más condiciones que le demos a P y a X.

Ahora bien mirando a **1.5.1** como una función de x se podría pensar intuitivamente como la derivada de una medida con respecto a otra. Es por esto que resulta natural la utilización del teorema de Radon-Nikodym para definir la esperanza condicional en este caso.

1.5.2 Teorema de Radon-Nikodym.- Sea $(\Omega, \Im)$ un espacio de medida y sean μ, γ dos medidas finitas en este, con γ absolutamente continua con respecto a μ ($\gamma << \mu$) entonces existe una función $f_0 \geq 0$ con

$$f_0 : (\Omega, \Im) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

tal que

1)

$$\gamma(A) = \int_A f_0(\omega)\mu(d\omega) \quad \text{para} \quad A \in \Im.$$

2) Si f es integrable con respecto a γ entonces $(f f_0)$ es integrable con respecto a μ y

$$\int_\Omega f d\gamma = \int_\Omega (f f_0) d\mu.$$

Además la función $f_0(\omega)$ es única excepto en un conjunto de medida cero, es decir si h es otra función $\Im$-medible tal que

$$\gamma(A) = \int_A h(\omega)\mu(d\omega) \quad A \in \Im$$

entonces

$$\mu\{\omega : f(\omega) \neq h(\omega)\} = 0.$$

Nota.- La función f_0 es llamada la derivada de Radon-Nikodym o la densidad de la medida γ con respecto a μ la cual denotamos $d\gamma/d\mu$.

La demostración del teorema de Radon-Nikodym * no la veremos aquí ya que lo que nos interesa de este son sus aplicaciones a nuestra teoría.

Conociendo el teorema de Radon-Nikodym, ya podemos condicionar con eventos de probabilidad cero, como por ejemplo condicionar con respecto a

$$\{X = x\}$$

que como se sabe es muy usual que tenga medida cero.

1.5.3 Definición.- Sea $A \in \Im$ y $X : (\Omega, \Im) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ una variable aleatoria definida sobre $(\Omega, \Im, P)$ definimos a la **probabilidad condicional de** A **dado** $\{X = x\}$ como una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ borel medible e integrable tal que

$$P(\{X \in B\} \cap A) = \int_B g(x) dP_X(x).$$

con $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. La demotaremos

$$P(A|X = x)$$

Con esta definición tiene sentido la expresión **1.5.1** la cual es

$$P(A|X = x) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{P(A, X \in (x - h, x + h))}{P(X \in (x - h, x + h))}$$

en donde tratábamos de dar una definición para el caso

$$P(X = x) = 0$$

Veamos por ejemplo que sucede con este límite cuando tenemos una función g continua y suponiendo que X tiene función de densidad continua f:
tomemos $I_h(x_0) = (x_0 - h, x_0 + h)$

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{P(A, X \in (x - h, x + h))}{P(X \in (x - h, x + h))} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\int_{I_h} g(x) dP_X(x)}{P_X(I_h)}$$

$$= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{P_X(I_h)} \int_{I_h} g(x) f(x) dx$$

* Robert G. Bartle, The Elements of Integration, John Wiley & Sons, Inc. 1966.

por el teorema del valor medio esto es igual a:

$$= \lim_{h \downarrow 0} \frac{g(\xi_h) \int_{I_h} f(x)dx}{P_X(I_h)} = \lim_{h \downarrow 0} g(\xi_h) = g(x) \quad \text{con} \quad \xi_h \in I_h$$

Vemos con esto que la definición dada de probabilidad condicional en **1.5.3** coincide con la expresión **1.5.1** con la cual tratábamos de definir a esta.

1.5.4 Teorema.- Sea $X : (\Omega, \Im) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ una variable aleatoria sobre $(\Omega, \Im, P)$ y sea A un conjunto fijo en $\Im$ entonces existe una función real

$$g : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$$

tal que para cada $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$$P(\{X \in B\} \cap A) = \int_B g(x) dP_X(x).$$

Además si h es otra función con esta propiedad entonces $g = h \quad P_X$-c.s. A esta funciones g y h las llamaremos versiones de la **probabilidad condicional de** A **dado** $X = x$.

Demostración.- Tomamos

$$\gamma(B) = P(\{X \in B\} \cap A), \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

donde γ es absolutamente continua con respecto a P_X ya que

$$0 \leq \gamma(B) \leq P(X \in B) \quad \text{para toda} \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

y aplicando el Teorema de Radon-Nikodym vemos que existe

$$g : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$$

tal que

$$\gamma(B) = \int_B g(x) dP_X(x)$$

que es lo que queríamos probar.

∎

Tomemos

$$\gamma(B) = P(A, X \in B)$$

para $A \in \Im$ fijo, observemos que g es la derivada de Radon-Nikodym de γ con respecto a P_X, es decir

$$g = \frac{d\gamma}{dP_X}$$

1.5.5 Definición.- Sea Y variable aleatoria integrable definida sobre $(\Omega, \Im, P)$ y

$$X : (\Omega, \Im) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

una variable aleatoria definomos la **esperanza condicional de Y dado que $(X = x)$** si para toda $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tenemos

$$\int_{[X \in B]} Y dP = \int_B g(x) dP_X(x).$$

y la denotaremos

$$g(x) = E(Y|X = x).$$

1.5.6 Teorema.- Sea $Y \geq 0$ una variable aleatoria extendida sobre $(\Omega, \Im, P)$ y

$$X : (\Omega, \Im) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

una variable aleatoria. Si Y es integrable entonces existe una función

$$g : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$$

tal que para cada $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\int_{[X \in B]} Y dP = \int_B g(x) dP_X(x).$$

si h es otra función con esta propiedad entonces $g = h$ P_X c.s

Demostración.- Sea

$$\gamma(B) = \int_{[X \in B]} Y dP = \int_\Omega Y 1_{[X \in B]} dP = E(Y 1_{[X \in B]}) \tag{1.5.6.1}$$

demostraremos posteriormente que $\gamma(B)$ así definida es una medida. Ahora bien para toda $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que

$$P(X \in B) = 0$$

tenemos entonces que

$$1_{[X \in B]} = 0$$

luego entonces

$$Y 1_{[X \in B]} = 0$$

obtenindo finalmente que

$$\int_\Omega Y 1_{[X \in B]} dP = 0$$

es decir $\gamma(B) = 0$ por lo tanto γ es absolutamente continua con respecto a P_X, al ser P_X y γ medidas en $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$ entonces podemos aplicar el teorema de Radon-Nikodym por lo que tenemos que existe una función

$$g : (\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}^+, \mathbb{B}(\mathbb{R}^+))$$

tal que

$$\int_{[X\in B]} Y\,dP = \gamma(B) = \int_B g(x)\,dP_X(x).$$

∎

Ahora demostraremos que $\gamma(B)$ definida en **1.5.6.1**

$$\gamma(B) = \int_{[X\in B]} Y\,dP$$

es una medida veamos que es numerablemente aditiva, tenemos

$$\int_{[X\in B]} Y\,dP = \int_\Omega Y 1_{[X\in B]}\,dP = E(Y 1_{[X\in B]})$$

como $E(Y) < \infty$ entonces $E(Y 1_{[X\in B]}) < \infty$.

Sean $B_1, B_2, ..$ tales que $B_i \cap B_j = \emptyset$ con $i \neq j$ y $B = \cup_{i=1}^{\infty} B_i$ entonces

$$\gamma(B) = E[Y 1_{[X\in B]}) = E[Y 1_{[X\in \cup_{i=1}^{\infty} B_i]}]$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^{\infty} Y 1_{[X\in B_i]}\right]$$

en donde tomando

$$f_n = 1_{[X\in \cup_{i=1}^{n} B_i]}$$

con lo que

$$1_{[X\in B]} = \lim_{n\to\infty} 1_{[X\in \cup_{i=1}^{n}] B_i} = \lim_{n\to\infty} f_n$$

tenemos

$$|Y 1_{[X\in \cup_{i=1}^{n} B_i]}| \leq |Y 1_\Omega|$$

y como Y es integrable podemos usar el teorema de Convergencia Dominada teniendo entonces

$$E\left[\sum_{i=1}^{\infty} Y 1_{[X\in B_i]}\right] = \sum_{i=1}^{\infty} E(Y 1_{[X\in B_i]})$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega Y 1_{[X\in B_i]}\,dP = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{[X\in B_i]} Y\,dP$$

teniendo así

$$\gamma(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma(B_i)$$

es decir es numerablemente aditiva.

Además también cumple que

$$\gamma(\emptyset) = \int_{X\in\emptyset} Y dP = 0$$

por lo tanto $\gamma(B)$ es una medida.

∎

1.5.7 Corolario.- Si Y es una variable aleatoria integrable definida sobre $(\Omega, \Im, P)$ entonces existe

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

tal que

$$\int_{(X\in B)} Y dP = \int_B h(x) dP_X(x)$$

Demostración.- Podemos escribir a Y de la siguiente manera

$$Y = Y^+ - Y^-$$

sabemos por teorema **1.5.6** que existe g_1 y g_2 tales que

$$\int_{(X\in B)} Y^+ dP = \int_B g_1(x) dP_X(x)$$

$$\int_{(X\in B)} Y^- dP = \int_B g_2(x) dP_X(x)$$

tomando $h = g_1 - g_2$ tenemos

$$\int_B h(x) dP_X(x) = \int_B (g_1 - g_2)(x) dP_X(x)$$

$$= \int_B h(x) dP_X(x) = \int_B g_1(x) dP_X(x) - \int_B g_2(x) dP_X(x)$$

$$\int_{(X\in B)} Y^+ dP - \int_{(X\in B)} Y^- dP$$

$$\int_{(X\in B)} Y^+ - Y^- dP = \int_{(X\in B)} Y dP$$

∎

Dadas estas definiciones tenemos nuevamente la siguiente relación:

1.5.8 Corolario.- Si X es una variable aleatoria sobre $(\Omega, \Im, P)$ y $A \in \Im$ entonces:

$$E(1_A|X = x) = P(A|X = x) \quad P_X \quad \text{c.s}$$

Demostración.- Por definición tenemos que para $A \in \Im$

$$\int_B E(1_A|X = x)dP_X(x) = \int_{[X\in B]} 1_A dP$$

$$= \int_{[X\in B]\cap A} dP = P([X \in B] \cap A)$$

y por otro lado

$$P([X \in B] \cap A) = \int_B P(A|X = x)dP_{X(x)}$$

por la unicidad [2]:

$$P(A|X = x) = E(1_A|X = x) \quad P_X - \text{c.s.} \blacksquare$$

[2] Ver apéndice II

1.6 Concepto General de Probabilidad y Esperanza Condicional dada una subσ-álgebra de $\Im$.

Así ya hemos definido $P(A|X = x)$ y $E(Y|X = x)$ ahora vamos a definir otro concepto de esperanza condicional más general. Es decir se tomara una $\mathfrak{G} \subset \Im$ subσ-álgebra de $\Im$, donde no necesariamente Y es $\mathfrak{G}$ -medible.

1.6.1 Definición.- Sea $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad y $\mathfrak{G}$ una subσ-álgebra de $\Im$. Definimos a la **probabilidad condicional de $A \in \Im$ dada $\mathfrak{G}$**

$$P(A|\mathfrak{G})$$

como una variable aleatoria definida en este espacio de probabilidad tal que

$$P(C \cap A) = \int_C P(A|\mathfrak{G})dP \quad \text{para toda} \quad C \in \mathfrak{G}$$

para toda $C \in \mathfrak{G}$.

1.6.2 Teorema.- Sea $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad y $\mathfrak{G}$ una subσ-álgebra de $\Im$ y $A \in \Im$ fija entonces existe

$$P(A|\mathfrak{G}) : (\Omega, \Im) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

llamada **probabilidad condicional de A dado $\mathfrak{G}$** tal que:

$$P(C \cap A) = \int_C P(A|\mathfrak{G})dP \quad \text{para toda} \quad C \in \mathfrak{G}.$$

Si existe otra función Z con esta propiedades entonces Z es igual a la probabilidad condicional P-c.s.

Demostración.- Tomamos $\gamma_{(C)} = P(C \cap B)$ y como

$$0 \leq P(C \cap B) \leq P(C)$$

esto es si $P(C) = 0$ entonces $\gamma(C) = 0$ con lo que γ es absolutamente continua con respecto a P podemos aplicar entonces el teorema de Radon-Nikodym con lo cual es inmediato el resultado.

∎

1.6.3 Definición.-Sea Y una variable aleatoria extendida definida sobre $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad y sea $\mathfrak{G}$ una subσ-álgebra de $\Im$. Definimos a la **esperanza condicional de $Y \in \Im$ dada $\mathfrak{G}$**

$$E(Y|\mathfrak{G})$$

como una variable aleatoria definida en este espacio de probabilidad tal que

$$\int_C Y dP = \int_C E(Y|\mathfrak{G}) dP \quad \text{para toda} \quad C \in \mathfrak{G}$$

1.6.4 Teorema.- Sea Y una variable aleatoria extendida definida sobre $(\Omega, \Im, P)$, con $\mathfrak{G} \subset \Im$ una σ-álgebra y sea Y integrable. Entonces existe una función

$$E(Y|\mathfrak{G}) : (\Omega, \mathfrak{G}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

llamada **esperanza condicional de Y dado $\mathfrak{G}$** tal que

$$\int_C Y dP = \int_C E(Y|\mathfrak{G}) dP \quad \text{para toda} \quad C \in \mathfrak{G}$$

y cualesquiera dos funciones con esta propiedad coinciden P-c.s.

Demostración.- Tomemos a

$$\gamma(C) = \int_C Y dP$$

y tenemos que si $P(C) = 0$ entonces $\gamma(C) = 0$ ya que estamos integrando sobre un conjunto de medida cero, y Y es integrable podemos aplicar el teorema de Radon-Nikodym, teniendo que se cumple así el teorema. ∎

1.6.5 Proposición.- Sea $A \in \Im$ y $\mathfrak{G}$ una subσ-álgebra de $\Im$ entonces

$$P(A|\mathfrak{G}) = E(1_A|\mathfrak{G}) \quad P\text{-c.s.}$$

Demostración.- Tenemos que para toda $C \in \mathfrak{G}$ se cumple

$$\int_C E(1_A|\mathfrak{G}) dP = \int_C 1_A dP = \int_{C \cap A} dP$$
$$= P(A \cap C)$$

y también tenemos

$$P(C \cap A) = \int_C P(A|\mathfrak{G}) dP \quad \text{para toda} \quad C \in \mathfrak{G}$$

por la unicidad [2] tenemos que $P(A|\mathfrak{G}) = E(1_A|\mathfrak{G}) \qquad P$-c.s.

∎

Como caso particular importante tenemos que si

$$X : (\Omega, \Im) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

[2] Ver apéndice II

y $\mathfrak{G} = \sigma(X)$ entonces para Y variable aleatoria escribimos:

$$P(A|\sigma(X)) := P(A|X) \quad \text{si} \quad A \in \Im$$

y

$$E(Y|\sigma(X)) := E(Y|X).$$

Hemos definido los siguientes conceptos:

$P(A|X = x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tomando a $A \in \Im$ fija y $X : (\Omega, \Im) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

$E(Y|X = x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde Y es una variable aleatoria integrable y

$$X : (\Omega, \Im) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})),$$

$P(A|X) : \Omega \to \mathbb{R}$ caso particular de $P(A|\mathfrak{G})$ donde $A \in \Im$ es fijo y $\mathfrak{G}$ es una subσ-álgebra de $\Im$ y,

$E(Y|X) : \Omega \to \mathbb{R}$ caso particular de $E(Y|\mathfrak{G})$ donde Y es una variable aleatoria integrable y $\mathfrak{G}$ es una subσ-álgebra de $\Im$.

Veamos la relación que existe entre $P(A|X = x)$ y $P(A|X)$ y entre $E(Y|X = x)$ y $E(Y|X)$.

1.6.6 Teorema.- Sea $X : (\Omega, \Im) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ una variable aleatoria definida sobre $(\Omega, \Im, P)$ y sea A un conjunto fijo en $\Im$ entonces

$$P(A|X) = P(A|X = x) \circ X.$$

Demostración.- Denotemos a

$$g(x) = P(A|X = x)$$

y denotemos a

$$h(\omega) = g(X(\omega))$$

tomemos $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\int_{[X \in B]} h(\omega) dP = \int_{[X \in B]} g(X(\omega)) dP(\omega)$$
$$= \int_{\Omega} g(X(\omega)) 1_B(X(\omega)) dP(\omega)$$

usando el teorema de cambio de variable tenemos

$$\int_{\Omega} g(X(\omega)) 1_B(X(\omega)) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(x) 1_B(x) dP_X(x)$$

como $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ entonces lo anterior es igual

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) 1_B(x) dP_X(x) = \int_B g(x) dP_X(x)$$

y por la definición **1.5.3** obtenemos que

$$\int_B g(x) dP_X(x) = P(\{X \in B\} \cap A)$$

Observemos por otro lado que

$$[X \in B] = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in B\}$$

esto es

$$[X \in B] \in \Im(X)$$

entonces tomando

$$C = [X \in B] \in \Im(X)$$

tenemos ahora que

$$\int_B g(x) dP_X(x) = P(\{X \in B\} \cap A) = P(C \cap A)$$

y por la definición **1.6.1** sabemos que tomando $\mathfrak{G} = \Im(X)$ para $A \in \Im$ fijo y para toda $C \in \Im(X)$

$$P(C \cap A) = \int_C P(A|\mathfrak{G}) dP$$

con esto tenemos que

$$\int_{[X \in B]} h(\omega) dP = \int_C P(A|\mathfrak{G}) dP$$

teniendo entonces por unicidad [2] que

$$P(A|\mathfrak{G}) = h \qquad P\text{-c.s.}$$

∎

1.6.7 Teorema.- Sea Y una variable aleatoria extendida definida sobre $(\Omega, \Im, P)$, donde $E(Y) < \infty$ y

$$X : (\Omega, \Im) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

entonces

$$E(Y|X) = (E(Y|X = x) \circ X).$$

Demostración.- Denotemos por

$$g(x) = E(Y|X = x)$$

---

[2] Ver apéndice II

y

$$h(\omega) = g(X(\omega))$$

entonces para $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ se tiene que

$$\int_{[X \in B]} h(\omega) dP = \int_{\Omega} g(X(\omega)) 1_B(X(\omega)) dP(\omega)$$

usando el teorema de cambio de variable tenemos

$$\int_{\Omega} g(X(\omega)) 1_B(X(\omega)) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(x) 1_B(x) dP_X(x)$$

como $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) 1_B(x) dP_X(x) = \int_B g(x) dP_X(x)$$

y sabemos por la definición **1.5.5** que

$$\int_B g(x) dP_X(x) = \int_{[X \in B]} Y dP$$

obteniendo finalmente

$$\int_{[X \in B]} h(\omega) dP = \int_{[X \in B]} Y dP \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Ahora bien recordando que

$$[X \in B] = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in B\}$$

es decir

$$[X \in B] \in \Im(X)$$

entonces podemos tomar a

$$C = [X \in B]$$

es claro que

$$C \in \Im(X)$$

y tomando $\Im(X) = \mathfrak{G}$ podemos aplicar la deficinión **1.6.3** teniendo así

$$\int_C Y dP = \int_C h(\omega) dP$$

entonces por unicidad [2]

$$h = E(Y|X) \qquad P\text{-c.s.}$$

∎

[2] Ver apéndice II

Ahora veremos las propiedades correspondientes:

a. Si $Y \equiv k$ donde k es una constante entonces

$$E(Y|\mathfrak{G}) = k \qquad P\text{-c.s.}$$

b. Si Y_1 y Y_2 son variables aleatorias integrables y $Y_1 \leq Y_2$ entonces

$$E(Y_1|\mathfrak{G}) \leq E(Y_2|\mathfrak{G}).$$

c. Si $a, b \in \mathbb{R}$ y Y_1, Y_2 son variables aleatorias integrables entonces

$$E(aY_1 + bY_2|\mathfrak{G}) = aE(Y_1|\mathfrak{G}) + bE(Y_2|\mathfrak{G}) \qquad P\text{-c.s.}$$

d. Si $X_n \geq 0$ para toda n y $X_n \uparrow X$ c.s. entonces

$$E(X_n|\mathfrak{G}) \uparrow E(X|\mathfrak{G}) \quad \text{c.s.}$$

e. Si ϕ es una función convexa, X y $\phi(X)$ son integrables entonces

$$\phi(E(X|\mathfrak{G})) \leq E(\phi(X)|\mathfrak{G}).$$

f. Si $|X_n| \leq Y$, con Y integrable y $X_n \to X$ c.s. entonces

$$E(X_n|\mathfrak{G}) \to E(X|\mathfrak{G}) \quad \text{c.s.}$$

g. Si $\Im_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ tenemos que $E(Y|\Im_0) = E(Y)$

h. $E(E(Y|\mathfrak{G})) = E(Y)$.

i. Si Y es $\mathfrak{G}$-medible entonces

$$E(Y|\mathfrak{G}) = Y.$$

j. Si $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}_2$ entonces

$$E(E(Y|\mathfrak{G}_2)|\mathfrak{G}_1) = E(Y|\mathfrak{G}_1) \qquad P - \text{c.s.}$$

y

$$E(E(Y|\mathfrak{G}_1)|\mathfrak{G}_2) = E(Y|\mathfrak{G}_1) \qquad P - \text{c.s.}$$

k. Sea X una variable aleatoria $\mathfrak{G}$-medible, y Y otra variable aleatoria tal que $E(|Y|) < \infty$ y $E(|XY|) < \infty$ entonces

$$E(XY|\mathfrak{G}) = XE(Y|\mathfrak{G}) \qquad P\text{-c.s.}$$

Las cuales demostraremos a continuación:

a. **Demostración.-** Por la definición **1.6.3** tenemos que para toda $C \in \mathfrak{G}$

$$\int_C E(Y|\mathfrak{G})dP = \int_C YdP = \int_C kdP$$

por unicidad [2] tenemos

$$E(Y|\mathfrak{G}) = k \qquad P\text{-c.s.}\blacksquare$$

b. **Demostración.-** Por propiedades de la integral

$$\int_C Y_1 dP \leq \int_C Y_2 dP \quad \text{para toda} \quad C \in \mathfrak{G}$$

por la definición **1.6.3**

$$\int_C Y_1 dP = \int_C E(Y_1|\mathfrak{G})dP$$

$$\int_C Y_2 dP = \int_C E(Y_2|\mathfrak{G})dP$$

luego entonces

$$\int_C E(Y_1|\mathfrak{G})dP \leq \int_C E(Y_2|\mathfrak{G})dP$$

Como $E(Y_1|\mathfrak{G})$ y $E(Y_2|\mathfrak{G})$ son $\mathfrak{G}$-medibles e integrables y le desigualdad es válida para todo $C \in \mathfrak{G}$ [3] tenemos

$$E(Y_1|\mathfrak{G}) \leq E(Y_2|\mathfrak{G}).\blacksquare$$

c. **Demostración.-** Para toda $C \in \mathfrak{G}$ tenemos que al hacer uso la definición **1.6.3**

$$\int_C E(aY_1 + bY_2|\mathfrak{G})dP = \int_C (aY_1 + bY_2)dP$$

---

[2] Ver apéndice II

[3] Ver apendice III

$$= a\int_C Y_1 dP + b\int_C Y_2 dP = a\int_C E(Y_1|\mathfrak{G})dP + b\int_C E(Y_2|\mathfrak{G})dP$$
$$= \int_C aE(Y_1|\mathfrak{G})dP + \int_C bE(Y_2|\mathfrak{G})dP = \int_C \left(aE(Y_1|\mathfrak{G}) + bE(Y_2|\mathfrak{G})\right) dP$$

por unicidad [2] tenemos

$$E(aY_1 + bY_2|\mathfrak{G}) = aE(Y_1|\mathfrak{G}) + bE(Y_2|\mathfrak{G}) \qquad P\text{-c.s.} \blacksquare$$

d. **Demostración.-** Por la definición **1.6.3** tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\int_A E(X_n|\mathfrak{G})dP = \lim_{n\to\infty}\int_A X_n dP$$

para toda $A \in \mathfrak{G}$. Como se cumplen las hipótesis del teorema de Convergencia Monótona tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\int_A X_n dP = \int_A X dP$$

Por otro lado observemos que debido a la propiedad c)

$$E(X_n|\mathfrak{G}) \leq E(X_{n+1}|\mathfrak{G}) \leq E(X|\mathfrak{G})$$

formando así $E(X_n|\mathfrak{G})$ una sucesión creciente, por lo que el siguiente límite existe

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n|\mathfrak{G}) = h$$

nuevamente podemos aplicar el teorema de Convergencia Monótona ya que

$$E(X_n|\mathfrak{G}) \geq 0$$

y $E(X_n|\mathfrak{G}) \uparrow h$ entonces

$$\lim_{n\to\infty}\int_A E(X_n|\mathfrak{G})dP = \int_A h dP$$

para toda $A \in \mathfrak{G}$. Por las igualdades anteriores y por la definición **1.6.3** tenemos

$$\int_A E(X|\mathfrak{G})dP = \int_A X dP = \int_A h dP$$

para toda $A \in \mathfrak{G}$, por lo tanto

$$E(X_n|\mathfrak{G}) \uparrow E(X|\mathfrak{G}) \qquad \text{P-c.s.} \blacksquare$$

e. **Demostración.-** Como ϕ es una función convexa entonces para cada $x_0 \in \mathbb{R}$ hay un número $\lambda(x_0)$ tal que

$$\phi(x_0) + \lambda(x_0)(x - x_0) \leq \phi(x)$$

---

[2] Ver apéndice II

tomamos a $x_0 = E(X|\mathfrak{G})$ y a $x = X$ sustituyendo tenemos

$$\phi E(E(X|\mathfrak{G})) + \lambda(E(X|\mathfrak{G}))(X - E(X|\mathfrak{G})) \leq \phi(X)$$

Suponemos que $E(X|\mathfrak{G})$ es acotada, con lo cual podemos ver que cada uno de los términos de la última desigualdad son integrables tomando la esperanza condicional con repecto a $\mathfrak{G}$ y usando los incisos **a)**, **b)**, **c)**

$$\phi(E(X|\mathfrak{G})) + \lambda E(X|\mathfrak{G})E((X - E(X|\mathfrak{G}))|\mathfrak{G}) \leq E(\phi(X)|\mathfrak{G})$$

de donde

$$\phi(E(X|\mathfrak{G})) \leq E(\phi(X)|\mathfrak{G})$$

Hagamoslo ahora para cualquier $E(X|\mathfrak{G})$, para la cual definimos

$$H_n = \{|E(X|\mathfrak{G})| \leq n\}$$

entonces

$$E(1_{H_n}X|\mathfrak{G})$$

es acotada por lo que la desigualdad en este caso es válida

$$\phi(E(1_{H_n}X|\mathfrak{G})) \leq E(\phi(1_{H_n}X|\mathfrak{G}))$$

trabajando con la parte derecha de la desigualdad

$$E(\phi(1_{H_n}X)|\mathfrak{G}) = E(1_{H_n}\phi(X) + 1_{H_n^c}\phi(0)|\mathfrak{G})$$
$$= E(1_{H_n}\phi(X)|\mathfrak{G}) + 1_{H_n^c}\phi(0) \to E(\phi(X)|\mathfrak{G})$$

por **d)**

Por otro lado debido al continuidad de ϕ

$$\phi(E(1_{H_n}X|\mathfrak{G})) \to \phi(E(X|\mathfrak{G}))$$

finalmente obtenemos

$$\phi(E(X|\mathfrak{G})) \leq E(\phi(X)|\mathfrak{G}). \blacksquare$$

f. **Demostración.-** Sea $Z_n = \sup_{m \geq n} |X_m - X|$ como $X_n \to X$ c.s. entonces

$$Z_n \downarrow 0 \quad \text{c.s.}$$

como $E(X_n)$ y $E(X)$ son finitas, aplicando los incisos **c)** y **e)** tenemos

$$|E(X_n|\mathfrak{G}) - E(X|\mathfrak{G})| = |E(X_n - X|\mathfrak{G})|$$
$$\leq E(|X_n - X||\mathfrak{G}) \leq E(Z_n|\mathfrak{G})$$

Como $E(Z_{n+1}|\mathfrak{G}) \leq E(Z_n|\mathfrak{G})$ c.s. entonces el siguiente límite existe

$$\lim_{n\to\infty} E(Z_n|\mathfrak{G}) = h$$

por lo que

$$0 \leq \int_\Omega h dP \leq \int_\Omega E(Z_n|\mathfrak{G}) dP$$

como $0 \leq Z_n \leq 2Y$ y como Y es integrable podemos aplicar el teorema de Convergencia Dominada obteniendo

$$\int_\Omega Z_n dP \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

por lo tanto

$$\int_\Omega h dP = 0$$

entonces

$$h = 0$$

luego entonces

$$E(X_n|\mathfrak{G}) \to E(X|\mathfrak{G}) \quad \text{c.s.} \quad \blacksquare$$

g. **Demostración.-** Sabemos que las funciones $\Im_0$ son constantes, por lo tanto la $E(Y)$ debe ser constante. Y además se debe cumplir por la definicón **1.6.3** que

$$\int_\Omega E(Y|\Im_0) dP = \int_\Omega Y dP$$

teniendo así

$$E(Y|\Im_0) \times P(\Omega) = E(Y)$$

obteniendo que la constante es $E(Y)$. $\blacksquare$

h. **Demostración.-**Por definición

$$\int_\Omega E(Y|\mathfrak{G}) dP = \int_\Omega Y dP$$

ya que $\Omega \in \mathfrak{G}$

$$E(EY|\mathfrak{G})) = E(Y). \blacksquare$$

i. **Demostración.-** Por la definición **1.6.3** tenemos

$$\int_A E(Y|\mathfrak{G} dP = \int_A Y dP$$

por unicidad [2]

$$E(Y|\mathfrak{G}) = Y. \blacksquare$$

---

[2] Ver apéndice II

j. **Demostración.-** Sea $A \in \mathfrak{G}_1$ por la definición **1.6.3** tenemos

$$\int_A E(Y|\mathfrak{G}_1)dP = \int_A Y dP$$

como $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}_2$ entonces $A \in \mathfrak{G}_2$ por lo tanto

$$\int_A E(E(Y|\mathfrak{G}_2)|\mathfrak{G}_1)dP = \int_A E(Y|\mathfrak{G}_2)dP = \int_A Y dP$$

por lo tanto

$$\int_A E(E(Y|\mathfrak{G}_2)|\mathfrak{G}_1)dP = \int_A E(Y|\mathfrak{G}_1)dP$$

para toda $A \in \Im$ es decir [2] $E(E(Y|\mathfrak{G}_2)|\mathfrak{G}_1) = E(Y|\mathfrak{G}_1) \qquad P\text{-c.s.}$

∎

Demostraremos la segunda igualdad. La $E(Y|\mathfrak{G}_1)$ es $\mathfrak{G}_1$-medible entonces es $\mathfrak{G}_2$-medible que para toda $A \in \mathfrak{G}_1$ por **d)**

$$E(E(Y|\mathfrak{G}_1)|\mathfrak{G}_2) = E(Y|\mathfrak{G}_1)$$

luego entonces [4]

$$E(E(Y|\mathfrak{G}_1)|\mathfrak{G}_2) = E(Y|\mathfrak{G}_1) \qquad P\text{-c.s.} \blacksquare$$

k. **Demostración.-**Sea $A \in \mathfrak{G}$ tomemos $X = 1_A$ demostraremos que

$$E(1_A Y|\mathfrak{G}) = 1_A E(Y|\mathfrak{G})$$

Tenemos para toda $B \in \mathfrak{G}$

$$\int_B 1_A Y dP = \int_B E(1_A Y|\mathfrak{G})dP$$

$$\int_{A\cap B} Y dP = \int_{A\cap B} E(Y|\mathfrak{G})dP$$

como $A \cap B \in \mathfrak{G}$

$$\int_{A\cap B} E(Y|\mathfrak{G})dP = \int_B 1_A E(Y|\mathfrak{G})dP$$

por lo tanto

$$E(1_A Y|\mathfrak{G}) = 1_A E(Y|\mathfrak{G}) \qquad \text{P-c.s.}$$

es cierto para funciones indicadoras por lo que también es cierto para funciones simples, debio a las propiedades de las integrales. Tenemos entonces

$$X_n E(Y|\mathfrak{G}) = E(X_n Y|\mathfrak{G})$$

[2] Ver apéndice II

Sea X una variable aleatoria positiva, existe entonces una sucesión de funciones $\{X_n\}$ tal que $X_n \uparrow X$. Como

$$|X_n Y| \leq |XY|$$

y $|XY|$ es integrable, aplicando el inciso **f)** tenemos

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n Y|\mathfrak{G}) = E(XY|\mathfrak{G})$$

por otro lado

$$\lim_{n\to\infty} X_n E(Y|\mathfrak{G}) = XE(Y|\mathfrak{G})$$

luego entonces

$$XE(Y|\mathfrak{G}) = \lim_{n\to\infty} X_n E(Y|\mathfrak{G}) = \lim_{n\to\infty} E(X_n Y|\mathfrak{G}) = E(XY|\mathfrak{G}).$$

Siendo válido para cualquier variable aleatoria X ya que es válido para X^+ y X^-, por lo que es cierto para

$$X^+ - X^- = X. \blacksquare$$

Observemos que todas las definiciones estan relacionadas entre si, en donde las siguientes propidades son análogas:

a ~ 1.2.17 ~ 1.4.8,
b ~ 1.2.21 ~ 1.4.10,
c ~ 1.2.15 ~ 1.4.7,
e ~ 1.2.24,
g ~ 1.2.19 ~ 1.4.14,
h ~ 1.2.11 ~ 1.2.12 ~ 1.4.12,
j ~ 1.2.13,
k ~ 1.2.25 ~ 1.4.13,
1.2.14 ~ 1.3.2
1.2.16 ~ 1.3.3
1.2.20 ~ 1.4.9

CAPITULO II

Cadenas de Markov

2.1 Definición.- Un **Proceso Estocástico** es una suseción de variables aleatorias $X_t(\omega)$, $t \in T$ definidas en un mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$,en donde T es llamado usualmente espacio de parametros (T suele ser el tiempo).

2.2 Definición.- Una **Cadena de Markov** con espacio de parametros T discreto es un proceso estocástico en donde el espacio de estados S es un conjunto finito o númerable de los valores de las variables aleatorias y cumple con la propiedad:

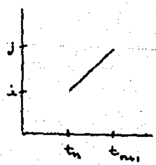
$$P(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | X_{t_n} = x_n, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, ..., X_{t_0} = x_0) = P(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | X_{t_n} = x_n).$$

2.3 Definición.- Llamamos **Probabilidad de Transición** en un paso a:

$$P_{ij}^{n,n+1} = P(X_{t_{n+1}} = j | X_{t_n} = i)$$

donde $i, j \in S$.

La probabilidad de transición en un paso es la probabilidad de pasar del estado i al estado j en una uniadad de tiempo.



Si la cadena es estacionaria entonces $P_{ij}^{n,n+1} = P_{ij}^{1,2}$ para toda n . En tal caso denotaremos de aquí en adelante como P_{ij} solamente.

Haciendo variar i y j encontramos la matriz de probabilidades de transición o matriz de transición en un paso la cual satisface:

a. Para toda $i, j \in S$ $P_{ij} \geq 0$.

b. Para toda $i \in S$ $\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1$

$$P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \cdots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \cdots \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Si S tiene k elementos entonces la matriz de transición es de $k \times k$.

Denotaremos a la matriz de transición por:

$$P = \|P_{i,j}\|_{i,j\in S}$$

2.4 Proposición.- La Cadena de Markov está totalmente determinada por las probabilidades de transición en un paso y por la probabilidad del estado inicial

$$P(X_{t_0} = x_0) = 1.$$

Demostración.-

$$\begin{aligned} &P(X_{t_0} = x_0, X_{t_1} = x_1, ..., X_{t_n} = x_n) \\ &= P(X_{t_n} = x_n | X_{t_0} = x_0, X_{t_1} = x_1, ..., X_{t_{n-1}} = x_{n-1}) \\ &\times P(X_{t_0} = x_0, X_{t_1} = x_1, ..., X_{t_{n-1}} = x_{n-1}) \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

usando la propiedad de Markov y la fórmula de probabilidad total tenemos:

$$\begin{aligned} &P(X_{t_n} = x_n | X_{t_0} = x_0, X_{t_1} = x_1, ..., X_{t_{n-1}} = x_{n-1}) \\ &\times P(X_{t_0} = x_0, X_{t_1} = x_1, ..., X_{t_{n-1}} = x_{n-1}) \\ &= P(X_{t_n} = x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1}) \\ &\times P(X_{t_{n-1}} = x_{n-1} | X_{t_0} = x_0, X_{t_1} = x_1, ...X_{t_{n-2}} = x_{n-2}) \\ &\times P(X_{t_0} = x_0, X_{t_1} = x_1, ..., X_{t_{n-2}} = x_{n-2}) \end{aligned}$$

continuando de la misma manera obtenemos finalmente que:

$$P(X_{t_0} = x_0, X_{t_1} = x_1, ..., X_{t_n} = x_n)$$

$$= P_{x_{n-1},x_n} P_{x_{n-2},x_{n-1}} P_{x_{n-3},x_{n-2}}, ... P_{x_1,x_0} P(X_{t_0} = x_0).$$

∎

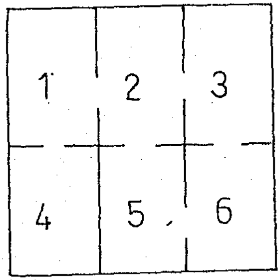
Esta proposición nos garantiza que la distribución conjunta de

$$X_{t_0}, X_{t_1}, ..., X_{t_n}$$

se puede encontrar a partir de las probabilidades de transición.

Veamos un ejemplo:

Se tiene una rata en un laberinto como el de la siguiente figura:



En donde el espacio de estados es

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}.$$

Suponiendo que la rata se mueve de casilla en cada unidad de tiempo, y que todas las salidas posibles son equiprobables,tenemos que la matriz de transición es:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Podríamos preguntarnos que sucede en dos tiempos, es decir la probabilidad de que en el tiempo n esté en el estado j dado que en el tiempo $n-2$ está en el estado i

$$P(X_n = j|X_{n-2} = i).$$

Por ejemplo

$$\begin{aligned} P(X_3 = 2|X_1 = 5) = & P(X_2 = 1|X_1 = 2)P(X_3 = 5|X_2 = 1) \\ & + P(X_2 = 2|X_1 = 2)P(X_3 = 5|X_2 = 2) \\ & + P(X_2 = 3|X_1 = 2)P(X_3 = 5|X_2 = 3) \\ & + P(X_2 = 4|X_1 = 2)P(X_3 = 5|X_2 = 4) \\ & + P(X_2 = 5|X_1 = 2)P(X_3 = 5|X_2 = 5) \\ & + P(X_2 = 6|X_1 = 2)P(X_3 = 5|X_2 = 6) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

La respuesta general a esta pregunta nos la da la ecuación de Chapman-Kolmogorov denotemos

$$P^{(n)} = \|P_{ij}^n\|_{i,j \in S}$$

a la matriz de transición en n pasos. Aqí P_{ij}^n es la probabilidad de ir del estado i al estado j en n pasos.

2.5 Teorema.- Si la matriz de probabilidades de transición de una cadena de Markov es

$$P = \|P_{ij}\|_{i,j \in S}$$

entonces tendremos que la ecuación de Chapman-Kolmogorov se satisface, es decir

$$P_{ij}^n = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^r P_{kj}^s$$

para cualquier par de enteros positivos fijos r y s que satisfacen que $r + s = n$ donde definimos

$$P_{ij}^0 = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

Demostración.-

Si $n = 2$ tenemos

$$P(X_0 = i) \cdot P(X_2 = j | X_0 = i) = P(X_2 = j, X_0 = i) = P(X_2 = j, X_1 \in S, X_0 = i) =$$

$$\sum_{k \in S} P(X_2 = j | X_1 = k, X_0 = i) \cdot P(X_1 = k, X_0 = i) =$$

por la propiedad de Markov y por la fórmula de probabilidad total

$$\sum_{k \in S} P(X_2 = j | X_1 = k, X_0 = i) \cdot P(X_1 = k, X_0 = i)$$

$$= \sum_{k \in S} P(X_2 = j | X_1 = k) \cdot P(X_1 = k | X_0 = i) \cdot P(X_0 = i)$$

en resumen obtenemos que

$$P(X_2 = j | X_0 = i) = \sum_{k \in S} P(X_2 = j | X_1 = k) \cdot P(X_1 = k | X_0 = i)$$

es decir

$$P_{ij}^{(2)} = \sum_{k \in S} P_{ik}^{(1)} P_{kj}^{(1)}$$

La demostración para n es semejante tenemos

$$\begin{aligned} & P(X_0 = i)P(X_n = j|X_0 = i) = P(X_n = j, X_0 = i) \\ & = P(X_n = j, X_r \in S, X_0 = i) = \sum_{k\in S} P(X_n = j, X_r = k, X_0 = i) \\ & = \sum_{k\in S} P(X_n = j|X_r = k)P(X_r = k, X_0 = i) \\ & = \sum_{k\in S} P(X_n = j|X_r = k)P(X_r = k|X_0 = i)P(X_0 = i) \end{aligned}$$

es decir

$$P(X_n = j|X_0 = i) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_n = j|X_r = k)P(X_r = k|X_0 = i)$$

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{kj}^{(n-r)} P_{ik}^{r}.$$

∎

2.6 Corolario.- Si P^n es la matriz de transición de n-pasos entonces

$$P^n = \underbrace{P \times P \times \cdots \times P}_{n \text{ veces}}.$$

Demostración.-

Por la ecuación de Chapman-Kolmogorov tenemos

$$P_{ij}^{2} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik} P_{kj}$$

en donde haciendo variar i y j obtenemos P^2 y esto no es más que el producto de la matriz de transición por ella misma.

Ahora demostrando por inducción tenemos que es válido para $n = 2$ suponemos que es válido para n y demostraremos que es válido para $n + 1$

$$P_{ik}^{n+1} = \sum_{k\in S} P_{ik}^{n} P_{ik}^{1}$$

en donde haciendo variar i y j observamos que no es más que el producto de la matriz P^n por la matriz P por lo que la matriz de transición en $n + 1$ pasos es la multiplicación de esta misma $n + 1$ veces. ∎

Para la clasificación de estados tenemos las siguientes definiciones:

2.7 Definición.- Diremos que el estado j es **accesible** desde el estado i si existe $n \geq 0$ tal que $P_{ij}^{n} > 0$ y lo denotaremos $i \to j$.

2.8 Definición.- Diremos que los estados i y j son **comunicantes** si

$$i \to j$$
$$j \to i$$

y lo denotaremos

$$j \leftrightarrow i.$$

Es decir de i podemos llegar a j y de j podemos llegar a i.

2.9 Proposición.- Los estados comunicantes son una relación de equivalencia en el conjunto de estados.

Demostración.-

a. $i \leftrightarrow i$ ya que $P_{ii}^0 = 1$

b. $i \leftrightarrow j$ entonces $j \leftrightarrow i$ es por definición

c. $i \leftrightarrow j$,$j \leftrightarrow k$ entonces $i \leftrightarrow k$

Sabemos que existen $n, m \in N$ tal que $P_{ij}^n > 0$ y $P_{jk}^m > 0$ entonces

$$P_{ik}^{n+m} = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}^n P_{jk}^m > 0. \blacksquare$$

2.10 Definición.- Llamaremos **clases de estados** a las clases de equivalencia formadas por la relación de ser comunicantes.

2.11 Definición.- La cadena es **irreducible** si la partición es singular

$$\{S, \emptyset\}.$$

2.12 Definición.- Definimos el **período** de un estado i por

$$d(i) = \text{mcd}\{n \geq 1 : P_{ii}^n > 0\}.$$

Si para toda $i \in S$ $d(i) = 1$ la cadena es **aperíodica**.

2.13 Proposición.- El período es una propiedad de clase es decir si $i \leftrightarrow j$ entonces

$$d(i) = d(j).$$

Demostración.-

Para $i = j$ es inmediato

Si $i \neq j$

Sea s tal que $P_{ii}^{s} > 0$ la cual existe ya que existe m tal que $P_{ij}^{m} > 0$ ya que $i \rightarrow j$ y existe n tal que $P_{ji}^{n} > 0$ ya que $j \rightarrow i$ consideramos

$$P_{jj}^{n+s+m} = \sum_{i} P_{ji}^{n} P_{ii}^{s} P_{ij}^{m} > 0$$

Como $P_{ii}^{s} > 0$ entonces $P_{ii}^{2s} > 0$ y por la ecuación de Chapman-Kolmogorov (**2.5**)

$$P_{jj}^{n+2s+m} \geq P_{ji}^{n} P_{ii}^{2s} P_{ij}^{m} > 0$$

en donde tenemos que

a. $d(j) | (n + s + m)$

b. $d(j) | (n + 2s + m)$

entonces $d(j) | s$, pero $d(i) | s$ y por definición de $d(i)$

$$d(i) \geq d(j)$$

Análogamente se prueba que $d(j) \geq d(i)$ con lo que obtenemos que

$$d(i) = d(j).$$

∎

2.14 Proposición.- Si el estado i tiene un periodo $d(i)$ existe un entero N que depende de i $(N_{(i)})$ tal que para toda $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq N$

$$P_{ii}^{nd(i)} > 0.$$

Demostración.- Usaremos el siguiente lema:

Si A es un conjunto de enteros positivos con mcd=d, entonces existe un subconjunto finito de A con mcd=d.[4]

Tomando este subconjunto finito tenemos:

Sean $n_1, ..., n_k$ tales que $P_{ii}^{n_j} > 0 \quad j = 1, ..., k$

$$d(i) = \text{mcd}\{n_1, ..., n_k\}$$

sabemos que por ser $d(i)$ el máximo común divisor de las n_j se puede escribir como combinación lineal de estas es decir

$$d(i) = c_1 n_1 + c_2 n_2 + \cdots + c_k n_k$$

[4] La demostración se encuentra en el apéndice IV

donde $c_j \in Z \quad j = 1, ..., k$ podemos escribir a $d(i)$ separando su parte positiva y su parte negativa.

$$d(i) = M - M'$$

donde M y M' son enteros positivos y tomaremos a N tal que satisfaga que

$$N \geq \frac{(M')^2}{d(i)}$$

teniendo así que para todo entero $n \geq N$ podemos escribir a $nd(i)$ como

$$nd(i) = aM' + bd(i)$$

donde $a, b \in Z^+$ y $a \geq M' > b$

$$P_{ii}^{nd(i)} = P_{ii}^{aM'+bd(i)} \geq P_{ii}^{aM'} P_{ii}^{bd(i)} \geq P_{ii}^{M'} P_{ii}^{d(i)} > 0.$$

∎

2.15 Corolario.- Si $P_{ji}^m > 0$ entonces

$$P_{ji}^{m+nd(i)} > 0$$

para todo $n \in Z^+$ suficientemente grande.

Demostración.-

Escogemos $n \geq N$ con N como en la proposición **2.14** y usando la ecuación de Chapman-Kolmogorov

$$P_{ji}^{m+nd(i)} \geq P_{ji}^m P_{ji}^{nd(i)}$$

y $P_{ji}^m > 0$ por hipótesis y $P_{ji}^{nd(i)} > 0$ por la proposición **2.14** por lo tanto $P_{ji}^{m+nd(i)} > 0$.

∎

2.16 Definición.- Un subconjunto de estados C no vacío es **cerrado**, si no se puede llegar a ningún estado que no este en C. Es decir

$$\sum_{j \in C} P_{ij} = 1$$

para toda $i \in C$

En donde observemos que la submatriz formada por C es estocástica.

Diremos también que la cadena de Markov es irreducible, si no existe ningún otro conjunto cerrado que no sea el total.

2.17 Definición.- Si C es una clase de estados cerrada con período $d > 1$. Para $i_0 \in C$ definimos

$$C_0 = \{j \in C | P^n_{i_0 j} > 0 \quad \text{implica} \quad n \equiv 0 \mod d\}$$

$$C_1 = \{j \in C | P^n_{i_0 j} > 0 \quad \text{implica} \quad n \equiv 1 \mod d\}$$

$$\vdots$$

$$C_{d-1} = \{j \in C | P^n_{i_0 j} > 0 \quad \text{implica} \quad n \equiv d-1 \mod d\}$$

en donde llamaremos a estas C_j $(j = 0, ..., d-1)$ **subclases cíclicas** de C.

Observemos que

$$C = \bigcup_{j=0}^{d-1} C_j$$

2.18 Teorema.- Si $k \in C_t$ y $P_{kj} > 0$ entonces $j \in C_{t+1}$. Es decir empezando de un estado $i \in C_0$ la cadena se mueve de C_0 a C_1 a ... a C_{d-1} regresando a C_0, ya que $C_0 = C_d$, $C_{d+1} = C_1$.

Demostración.- Sea n tal que $P^n_{ik} > 0$ entonces

$$n = ad + t$$

por la ecuación de Chapman-Kolmogorov tenemos

$$P^{n+1}_{ij} \geq P^n_{ik} P_{kj} > 0$$

ya que C es cerrada $j \in C$ y como

$$n \equiv t \mod d$$

entonces

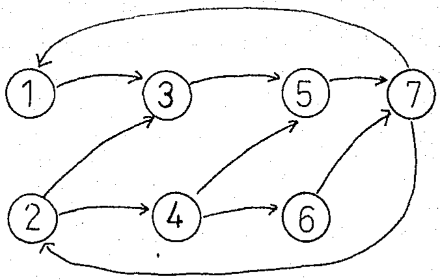
$$n + 1 \equiv t + 1 \mod d$$

por lo que $j \in C_{t+1}$.

∎

Con la ayuda de estas subclases cíclicas podemos encontrar el período de una cadena finita de la siguiente manera:

Observemos la siguiente cadena, la cual es irreducible



partimos de un estado por ejemplo 1 y sea C_0 la subclase cíclica que contiene al 1, por el teorema **2.18** formamos a C_1 por los estados donde llega el estado 1 en un paso, obtenemos que 3 esta en C_1, ahora formamos a C_2 por los estados donde llega el estado 3 en un paso, repitiendo este procedimiento hasta que alguna subclase cíclica C_k contenga algún estado de las anteriores subclases cíclicas C_j con $j < k$.

C_0	C_1	C_2	C_3	C_4
1	3	5	7	1,2

Observemos que $C_0 \cap C_4 = 1$ por definición de las subclases cíclicas tenemos $C_0 = C_4$

Tomemos a C_4 como la subclase cíclica inicial y hagamos el mismo procedimiento

C_0	C_1	C_2	C_3	C_4
1,2	3,4	5,6	7	1,2

como $C_0 = C_4$ y como $C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3 = C$ tenemos que el período de la cadena es 4.

Denotaremos a la probabilidad del primer regreso al estado i saliendo del estado i en n pasos como

$$f_{ii}^n = P(X_n = i, X_j \neq i \quad j \in [1, n-1] | X_0 = i)$$

y la probabilidad de estar en el estado j por primera vez saliendo del estado i en n pasos como

$$f_{ij}^n = P(X_n = j, X_k \neq j \quad k \in [1, n-1] | X_0 = i)$$

y definimos

$$f_{ii}^0 = 0.$$

2.19 Teorema de la Primera Entrada.-

Sea P_{ii}^n la probabilidad de ir del estado i al estado i en n pasos y f_{ii}^k la probabilidad de salir del estado i y regresar por primera vez al estado i en k pasos entonces se cumple la siguiente igualdad:

$$P_{ii}^n = \sum_{k=0}^{n} f_{ii}^k P_{ii}^{n-k} \qquad n \geq 1.$$

Demostración.-

Tomamos A_k como el siguiente evento

$$A_k = \{\omega \in \Omega; X_n = i, X_k = i, X_j \neq i \quad j = 1, ..., k-1 \text{ dado que } X_0 = i\}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
P(A_k) &= P(X_n = i, X_k = i, X_j \neq i, j = 1, ..., k-1 | X_0 = i) \\
&= \frac{P(X_n = i, X_k = i, X_j \neq i, j = 1, ..., k-1, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \\
&\quad \times \frac{P(X_k = i, X_j \neq i, j = 1, ..., k-1, X_0 = i)}{P(X_k = i, X_j \neq i, j = 1, ..., k-1, X_0 = i)} \\
&= \frac{P(X_n = i, X_k = i, X_j \neq i, j = 1, ..., k-1, X_0 = i)}{P(X_k = i, X_j \neq i, j = 1, ..., k-1, X_0 = i)} \\
&\quad \times \frac{P(X_k = i, X_j \neq i, j = 1, ..., k-1, X_0 = i)}{P(X_0 = i)}
\end{aligned}$$

$$= P(X_n = i | X_k = i, X_j \neq i, j = 1, ..., k-1, X_0 = i)$$
$$\times P(X_k = i, X_j \neq i, j = 1, ..., k-1 | X_0 = i)$$

usando la propiedad de Markov y por definición de f_{ii}^k esto es igual a

$$f_{ii}^k P(X_n = i | X_k = i)$$

en donde como los conjuntos A_k's son ajenos tenemos que:

$$P_{ii}^n = P(\bigcup_{k=0}^n A_k) = \sum_{k=0}^n P(A_k) = \sum_{k=0}^n f_{ii}^k P_{ii}^{n-k}.$$

∎

Análogamente podemos obtener

$$P_{ij}^n = \sum_{k=0}^n f_{ij}^k P_{jj}^{n-k} \quad i \neq j \quad n > 0.$$

2.20 Proposición.- Si $d(i)$ es el período del estado i, entonces

$$d(i) = \text{mcd}\{n \geq 1 | f_{ii}^n > 0\}.$$

Demostración.- Sea

$$e(i) = \text{mcd}\{n \geq 1 | f_{ii}^n > 0\}$$

y supongamos que $e(i) \neq d(i)$, con lo que tenemos

$$f_{ii}^{e(i)} > 0$$

por el teorema de la primera entrada tenemos

$$P_{ii}^{e(i)} = \sum_{k=1}^{e(i)} f_{ii}^k P_{ii}^{e(i)-k}$$

de la cual

$$P_{ii}^{e(i)} > 0$$

obtenemos $d(i) = e(i)n$ donde $d(i) > 0$ y $e(i) > 0$, es decir $d(i) \leq e(i)$.

Si $d(i) < e(i)$ y nuevamente por el teorema de la primer entrada tenemos

$$\sum_{k=1}^{d(i)} f_{ii}^k P_{ii}^{d(i)-k} = P_{ii}^{d(i)} > 0$$

existe $k_0 \leq d(i)$ tal que

$$f_{ii}^{k_0} > 0$$

lo cual contradice al hecho de que $e(i)$ sea el máximo común divisor, por lo tanto

$$d(i) = e(i)$$

∎

2.21 Definición.- El estado i es **recurrente** si y sólo si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{n} = 1$.

El estado i es **transitorio** si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{n} < 1$.

Es decir tendremos que el estado es recurrente si saliendo del estado i la probabilidad de regresar a éste en un tiempo finito es uno.

2.22 Teorema.- Un estado i es recurrente si y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{n} = \infty.$$

Demostración.-

Como i es recurrente sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{n} = 1$ como esta serie converge aplicaremos el teorema de Abel [5] (a)) tenemos que

$$\lim_{s \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{n} s^n = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{n} = 1$$

usando la siguiente igualdad la cual se demostrará posteriormente con $|s| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{n} s^n = \frac{1}{1 - \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{n} s^n} \qquad \textbf{2.22}$$

Demostraremos que la igualdad **2.22** es cierta en la cual tenemos que si $|s| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{n} s^n = \frac{1}{1 - \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{n} s^n}$$

[5] Ver apendice V

Demostración.-

Llamemosle

$$P_{ij}(s)=\sum_{n=0}^{\infty}s^nP_{ij}^n \quad \text{para } |s|<1$$

$$F_{ij}(s)=\sum_{n=0}^{\infty}s^nf_{ij}^n \quad \text{para } |s|<1$$

donde

$$F_{ii}(s)P_{ii}(s)=\sum_{n=0}^{\infty}s^n(\sum_{j=0}^{n}f_{ii}^jP_{ii}^{n-j})$$

como $f_{ii}^0=0$ y usando el teorema de la **primer entrada 2.19**

$$\sum_{n=1}^{\infty}s^n(\sum_{j=0}^{n}f_{ii}^jP_{ii}^{n-j})=\sum_{n=1}^{\infty}s^nP_{ii}^n$$

en resumen hemos obtenido que:

$$F_{ii}(s)P_{ii}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}s^nP_{ii}^n$$

2.22.1

Por otro lado

$$P_{ii}(s)=\sum_{n=0}^{\infty}P_{ii}^ns^n=\sum_{n=1}^{\infty}P_{ii}^ns^n+P_{ii}^0s^0$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}P_{ii}^ns^n+1$$

que por **2.22.1** tenemos:

$$P_{ii}(s)=F_{ii}(s)P_{ii}(s)+1$$

y

$$P_{ii}(s)=\frac{1}{1-F_{ii}(s)}.$$

∎

Con esta igualdad tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_{ii}^ns^n=\infty$$

ya que $P_{ii}^n\geq 0$ y

$$\lim_{s\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}P_{ii}^ns^n=\infty$$

podemos aplicar nuevamente el teorema de Abel teniendo

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{n} = \infty$$

Probaremos la segunda implicación por contradicción supongamos que el estado i es transitorio es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{n} < 1$$

usando nuevamente el teorema de Abel

$$\lim_{s \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{n} s^n < 1$$

y usando la igualdad **2.22** tenemos que

$$\lim_{s \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{n} s^n < \infty$$

aplicando ahora del teorema de Abel tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{n} < \infty$$

lo cual es un contradicción por lo tanto el estado i es un estado recurrente ∎

2.23 Proposición.- Recurrencia es una propiedad de clase. Si $i \leftrightarrow j$ tenemos que si i es recurrente entonces j es recurrente.

Demostración.-

Por la ecuación de Chapman-Kolmogorov tenemos

$$P_{jj}^{m+n+p} = \sum_{i=0}^{\infty} P_{ji}^{m} P_{ii}^{n} P_{ij}^{p} \geq P_{ij}^{m} P_{ii}^{n} P_{ij}^{p}$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{m+n+p} \geq \sum_{n=1}^{\infty} P_{ji}^{m} P_{ii}^{n} P_{ij}^{p}$$

$$= P_{ji}^{m} P_{ij}^{p} \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{n} = \infty$$

por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{n+m+p} = \infty$$

es decir j es recurrente. ∎

Veremos ahora que sucede con las caminatas aleatorias.

2.24 Definición.- Sean $\xi_1, \xi_2, \cdots$ variables aleatorias con valores enteros independientes e identicamente distribuidas. Sea X_0 una variable aleatoria que toma valores en $\mathbb{Z}$ y que es independiente de ξ_i para toda $i = 1, 2, ...$ si

$$X_n = X_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n$$

la sucesión de X_n , $n \geq 0$ es llamada una **caminata aleatoria.**

En nuestro caso consideramos para cada i

$$P(\xi_i = 1) = p$$

$$P(\xi_i = -1) = 1 - p$$

La caminata aleatoria describe el comportamiento de una partícula cuyos movimientos toman valores enteros es decir, en la recta la partícula se mueve en los enteros, en el plano se mueve en los puntos con coordenadas enteras.

Veamos si existe recurrencia en la caminata aleatoria en la recta. Tomemos como punto de estudio el cero.

2.25 Proposición.- En una caminata aleatoria en la recta tenemos que el cero es recurrente si y sólo si $p = \frac{1}{2} = q$.

(donde p es la probabilidad de que se mueva la partícula a la derecha y q la probabilidad de que se mueva a la izquierda)

Demostración.-

Tenemos que

$$P_{00}^{2n+1} = 0 \qquad n = 0, 1, ...$$

es decir la probabilidad de que la partícula parta del cero y llegue al cero en un número impar de pasos es cero, ya que si la partícula se aleja del cero n pasos para regresar al cero, tenemos que realizar el mismo número de pasos, moviendose así la partícula un número par de pasos.

Ahora bien

$$P_{00}^{2n} = \binom{2n}{n} p^n q^n$$

Supongamos que $p = \frac{1}{2} = q$ teniendo así

$$P_{00}^{2n} = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{(2n)!}{n!n!} p^n q^n$$

usando la fórmula de Stirling

$$n! \sim n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}$$

tendremos :

$$P_{00}^{2n} \sim (pq)^n \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n} \sqrt{2\pi}}{(n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi})(n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi})} =$$

$$\frac{(pq)^n 2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} = \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{2n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}} = \infty$$

Ya que supusimos que $p = \frac{1}{2}$ tenemos que $pq = \frac{1}{4}$ con lo que tenemos que el cero es recurrente.

Ahora para demostrar la otra implicación, tenemos que el cero es recurrente por lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}} = \infty$$

Sabemos que esta serie diverge si $pq \geq \frac{1}{4}$ si consideramos el caso $pq > 1/4$ nos encontramos

$$4P(1-p) > 1$$

$$p^2 - p + \frac{1}{4} > 0$$

$$(p - \frac{1}{2})^2 < 0$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto la serie diverge por las propiedades de p y q sólo si se cumple $p = \frac{1}{2} = q$. ∎

2.26 Ejemplo.- Veamos ahora la caminata aleatoria en el plano, con movimientos sobre las coordenadas enteras, en donde para pasar de un estado a otro tendremos movimientos hacia arriba, abajo, a la derecha o a la izquierda. Cada movimiento tiene la misma probabilidad. En esta caminata aleatoria el cero es recurrente.

Análogamente como en el ejemplo anterior tomemos como punto inicial al origen teniendo así para toda $n \in N$

$$P_{00}^{2n-1} = 0.$$

Calculemos P_{00}^{2n} en donde:

$X_1 = \#$ de desplazamientos hacia arriba.

$X_2 = \#$ de desplazamientos hacia abajo.

$X_3 = \#$ de desplazamientos hacia la izquierda.

$X_4 = \#$ de desplazamientos hacia la derecha.

Si

$$A_i = (X_1 = i)$$

entonces

$$A_2 = (X_2 = i)$$

y

$$A_3 = (X_3 = n - i)$$

y

$$A_4 = (X_4 = n - i)$$

donde $n - i = j$.

Tenemos $2n$ resultados con cuatro resultados posibles cada uno

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|\bigcap_{i=1}^{2} A_i)P(A_4|\bigcap_{i=1}^{3} A_i\right)$$
$$= P(X_1 = i)P(X_2 = i|X_1 = i)P(X_3 = j|X_1 = i, X_2 = i)$$
$$P(X_4 = j|X_1 = i, X_2 = i, X_3 = j) =$$

$$\binom{2n}{i}\left(\frac{1}{4}\right)^i\left(\frac{3}{4}\right)^{2n-i}\binom{2n-i}{i}\left(\frac{1}{3}\right)^i\left(\frac{2}{3}\right)^{2n-2i}\binom{2n-2i}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^j\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2i-j}\binom{2n-2i-j}{j} =$$

$$\frac{2n!}{i!(2n-i)!}\frac{(2n-i)!}{(2n-2i)!i!}\frac{(2n-2i)!}{(2n-2i-j)!j!}\frac{(2n-2i-j)!}{j!}\frac{3^{2n-i}2^{2n-2i}}{4^i4^{2n-i}3^i3^{2n-2i}2^j2^{2n-2i-j}} =$$

$$\frac{(2n)!}{i!i!j!j!}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$$

teniendo así

$$P_{00}^{2n} = \sum_{i+j=n}\frac{(2n)!}{i!i!j!j!}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n} =$$

$$\sum_{i+j=n}\frac{n!n!}{n!n!}\frac{(2n)!}{i!i!j!j!}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$$

sustituyendo el valor de j tenemos:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{n!n!}{n!n!} \frac{(2n)!}{i!i!(n-i)!(n-i)!} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} =$$

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(2n)!}{n!n!} \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{n!}{i!(n-i)!} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} =$$

$$\binom{2n}{n} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} =$$

$$\binom{2n}{n} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \binom{2n}{n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{00}^{2n} = \sum_{n=0}^{n} \binom{2n}{n}^2 \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$$

usando la fórmula de Stirling

$$n! \sim n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}$$

tenemos

$$\frac{(2n)!}{n!n!} \sim \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n} \sqrt{2\pi}}{n^{2n+1} e^{-2n} 2\pi} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

Así

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{00}^{2n} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{4n}}{\pi n} \left(\frac{1}{2^2}\right)^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{4n}}{\pi n} \frac{1}{2^{4n}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi n} = \infty$$

por lo tanto el origen es recurrente. ∎

2.27 Ejemplo.- La caminata aleatoria en tres dimensiones, donde los movimientos serán hacia arriba, hacia abajo, a la derecha, a la izquierda, hacia adelante o hacia atrás. Los movimientos son igualmente probables.

Tenemos las siguientes variables aleatorias

X_1 = # de desplazamientos hacia arriba.

$X_2 = \#$ de desplazamientos hacia abajo.

$X_3 = \#$ de desplazamientos hacia la izquierda.

$X_4 = \#$ de desplazamientos hacia la derecha.

$X_5 = \#$ de desplazamientos hacia adelante.

$X_6 = \#$ de desplazamientos hacia atrás.

Para toda $n \in N$ tenemos $P_{00}^{2n+1} = 0$ ya que el número de movimientos que haga la partícula alejandose del origen también los tenemos que hacer para acercarnos a este, siendo imposible regresar en un número impar de pasos.

Ahora bien para toda $n \in N$

$$P_{00}^{2n} = \sum_{1 \le i+j \le n} P(X_1 = i, X_2 = i, X_3 = j, X_4 = j, X_5 = n-i-j, X_6 = n-i-j)$$

$$= \sum_{1 \le i+j \le n} P(X_1 = i)P(X_2 = i|X_1 = i)$$

$$P(X_3 = j|X_1 = i, X_2 = i)P(X_4 = j|X_1 = i, X_2 = i, X_3 = j)$$

$$P(X_5 = n-i-j|X_1 = i, X_2 = i, X_3 = j, X_4 = j)$$

$$P(X_6 = n-i-j|X_1 = i, X_2 = i, X_3 = j, X_4 = j, X_5 = n-i-j)$$

$$= \sum_{1 \le i+j \le n} \binom{2n}{i}\left(\frac{1}{6}\right)^i\left(\frac{5}{6}\right)^{2n-i}\binom{2n-i}{i}\left(\frac{1}{5}\right)^i\left(\frac{4}{5}\right)^{2n-2i}$$

$$\binom{2n-2i}{j}\left(\frac{1}{4}\right)^j\left(\frac{3}{4}\right)^{2n-2i-j}\binom{2n-2i-j}{j}\left(\frac{1}{3}\right)^j\left(\frac{2}{3}\right)^{2n-2i-2j}$$

$$\binom{2n-2i-2j}{n-i-j}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-i-j}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-i-j}$$

$$\binom{n-i-j}{n-i-j} =$$

$$\sum_{1 \le i+j \le n} \frac{(2n)!}{(i!)^2(j!)^2((n-i-j)!)^2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2n}\frac{n!n!}{n!n!} =$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\binom{2n}{n}\sum_{1 \le i+j \le n}\left[\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]^2$$

decimos que para toda $n \in N$ sea

$$c_n = \max_{i,j}\left\{\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\right\}$$

con lo que

$$P_{00}^{2n} \leq c_n \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\frac{1}{3^n}$$

usando el hecho de que c_n se maximiza cuando $i_0 = \frac{n}{3}$ y $j_0 = \frac{n}{3}$ tenemos que

$$P_{00}^{2n} \leq \binom{2}{n}\frac{1}{2^{2n}}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n!}{\frac{n}{3}!\frac{n}{3}!\frac{n}{3}!}\right)$$

y utilizando la fórmula de Stirling tenemos

$$P_{00}^{2n} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2\pi^{\frac{3}{2}}n^{\frac{3}{2}}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{n} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi^{\frac{3}{2}}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} < \infty$$

por lo tanto la caminata aleatoria en el espacio es transitoria. ∎

Llamemos $N_i(n)$ al número de veces que el estado i es visitado en las primeras n transiciones, es decir:

$$N_i(n) = s$$

donde s es el número de enteros u que cumplen:

$$X_u = i, \quad 1 \leq u \leq n$$

y tendremos que :

$$\lim_{n\to\infty} N_i(n) = N_i(\infty)$$

sera el número total de veces en que estamos en el estado i.

Usando esta notación definiremos:

a. La probabilidad de visitar el estado i una infinidad de veces dado que el estado inicial es i.

$$Q_{ii} = P(N_i(\infty) = \infty | X_0 = i)$$

b. La probabilidad de visitar el estado j dado que el estado inicial es i.

$$Q_{ij} = P(N_j(\infty) = \infty | X_0 = i)$$

c. La probabilidad de visitar el estado i a lo más N veces dado que el estado inicial es i.

$$Q_{ii}^N = P(N_i(\infty) \leq N|X_0 = i)$$

Análogamente

d. La probabilidad de visitar el estado j a lo más N veces dado que el estado inicial es i

$$Q_{ij}^N = P(N_j(\infty) \leq N|X_0 = i)$$

En ciertos casos podemos encontrarnos que :

$$P(X_0 = i) = 0$$

definiendo entonces Q_{ij} para las X_m que tenga sentido

$$Q_{ij} = P(N_j(\infty) - N_j(m) = \infty|X_m = i)$$

para m tales que $P(X_m = i) \neq 0$.

2.28 Proposición.- Sean Q_{ij}, Q_{jj} y f_{ij}^n como se definieron anteriormente entonces

$$Q_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^n Q_{jj}.$$

Demostración.-

Definamos los siguientes conjuntos

$$A_j = \{N_j(\infty) = \infty\}$$

es decir A_j es el conjunto de pasar una infinidad de veces por j

$$A_j^n = \{N_j(\infty) - N_j(n) = \infty\}$$

A_j^n es el conjunto de pasar una infinidad de veces por el estado j después de n transiciones

$$B_j^n = \{X_n = j|X_m \neq j \quad m = 1, \cdots, n-1\}$$

B_j^n es la primer visita al estado j en n transiciones

$$B_j = \{X_n = j \text{ para algún } n > 1 \quad n \in Z\}$$

teniendo así que:

$$B_j = \cup_{n=1}^{\infty} B_j^n$$

tal que

$$B_j^m \cap B_j^{m'} = \emptyset \quad \forall m \neq m'$$

Cuya relación entre estos conjuntos es como sigue:

$$A_j \cap B_j = A_j \text{ ya que } A_j \subset B_j$$

y

$$A_j B_j^n = A_j^n B_j^n \text{ ya que} A_j \equiv A_j^n$$

teniendo así

$$Q_{ij} = P(A_j|X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_j B_j^n|X_0 = i)$$

en donde

$$\begin{aligned} P(A_j B_j^n|X_0 = i) &= P(A_j^n B_j^n|X_0 = i) \\ &= \frac{P(A_j^n B_j^n, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \frac{P(B_j^n, X_0 = i)}{P(B_j^n, X_0 = i)} \\ &= \frac{P(A_j^n B_j^n, X_0 = i)}{P(B_j^n, X_0 = i)} \frac{P(B_j^n, X_0 = i)}{X_0 = i)} \\ &= P(A_j^n|B_j^n, X_0 = i)P(B_j^n|X_0 = i) \end{aligned}$$

2.28.1

por la propiedad de Markov **2.28.1** es igual a

$$P(A_j^n|B_j^n)P(B_j^n|X_0 = i)$$

con lo que obtenemos

$$Q_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_j^n|B_j^n)P(B_j^n|X_0 = i)$$

y de acuerdo con la definición de cada conjunto

$$Q_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^n Q_{jj}.$$

∎

2.29 Proposición.-

$$Q_{jj} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{jk}^n Q_{kj}.$$

Demostración.- Se hace análogamente que la proposición **2.28** definiendo ahora los conjuntos

$$B_k^n = \{X_n = k\}$$

$$B^n = \{X_n = k \text{ para algún } k \in S\}$$

teniendo así

$$B^n = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k^n$$

tal que

$$B_k^n \cap B_j^n = \emptyset \quad \forall k \neq j \quad k, j \in S$$

teniendo nuevamente las relaciones

$$A_j B^n = A_j \text{ ya que} A_j \subset B_j$$

y

$$A_j B_j^n = A_j^n B_j^n \text{ ya que } A_j = A_j^n.$$

∎

2.30 Teorema.- Si el estado i es recurrente entonces $Q_{ii} = 1$.
Si el estado i es transitorio entonces $Q_{ii} = 0$.

Demostración.-

Tenemos

$$Q_{ii}^N = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^n Q_{ii}^{N-1} = Q_{ii}^{N-1} \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^n$$

$$= Q_{ii}^{N-2}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^n\Big)^2 = Q_{ii}^{N-3}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^n\Big)^3 = \cdots = Q_{ii}^1\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^n\Big)^{N-1}$$

pero por definición

$$Q_{ii}^1 = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^n$$

teniendo así

$$Q_{ii}^N = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^n\Big)^N$$

obteniendo entonces que si el estado i es recurrente

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^n = 1 \text{ entonces } Q_{ii} = 1$$

y si el estado i es transitorio

$$\lim_{N\to\infty} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^n < 1\Big)^N = 0 \quad \text{entonces } Q_{ii} = 0.$$

■

2.31 Teorema.- Si $i \leftrightarrow j$ y la clase es recurrente entonces

$$Q_{ij} = 1.$$

Demostración.-

Por la proposición **2.29** podemos escribir a Q_{jj} de la siguiente manera:

$$Q_{jj} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{jk}^{n} Q_{kj}$$

también sabemos que

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} P_{jk}^{n}$$

con lo que restando estas dos expresiones tenemos

$$1 - Q_{jj} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{jk}^{n}(1 - Q_{kj})$$

como la clase es recurrente tenemos

$$Q_{jj} = 1$$

teniendo así

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} P_{jk}^{n}(1 - Q_{kj})$$

cada uno de los términos del lado derecho es mayor o igual que cero, por lo tanto debido a la igualdad anterior tenemos para cada término de la sumatoria que

$$0 = P_{jk}^{n}(1 - Q_{kj}) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \text{ y } \forall k \in S$$

Si $j \leftrightarrow k$ entonces sabemos que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$P_{ik}^{m} > 0$$

tomando $k = j$ y como

$$0 = P_{ij}^{m}(1 - Q_{ij})$$

entonces

$$Q_{ij} = 1.$$

■

2.32 Corolario.- Si $i \leftrightarrow j$ y la clase es recurrente entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{n} = 1.$$

Demostración.-

Por la proposición **2.28** podemos expresar a Q_{ij} de la siguiente manera

$$Q_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{n} Q_{jj}$$

y como la clase es recurrente tenemos

$$Q_{ij} = 1, \quad Q_{jj} = 1$$

por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{n} = 1.$$

∎

Con este corolario aseguramos que al salir de cualquier estado de la clase visitar a todos los demás estados de la clase recurrente.

2.33 Teorema Básico del Límite para Cadenas de Markov.

a. Sea una cadena de Markov irreducible, recurrente y aperiódica.

$$P_{ii}^{n} = \{X_n = i | X_0 = i\}$$

en donde

$$P_{ii}^{0} = 1$$

y sea

$$f_{ii}^{n} = \{X_n = i, X_m \neq i \quad m = 1, \cdots, n-1 | X_0 = i\}$$

donde

$$f_{ii}^{0} = 0$$

las cuales cumplen

$$P_{ii}^{n} - \sum_{k=0}^{n} f_{ii}^{n-k} P_{ii}^{k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

2.33.1

entonces

$$\lim_{n\to\infty} P^n_{ii} = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} n f^n_{ii}}.$$

b. Bajo las mismas condiciones que en inciso a) tenemos

$$\lim_{n\to\infty} P^n_{ji} = \lim_{n\to\infty} P^n_{ii}.$$

Nota.- A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n f^n_{ii}$ se le llama el **tiempo medio de recurrencia** de i y representa el tiempo promedio de retornos al estado i dado que el estado inicial es i.

Demostración.-

Demostraremos el inciso a). Tenemos que

$$P^n_{ii} - \sum_{k=0}^{n} f^{n-k}_{ii} P^k_{ii} = P^n_{ii} - \sum_{k=0}^{n} f^k_{ii} P^{n-k}_{ii}$$

2.33.2

Sabemos que la sucesión formada por $\{P^n_{ii}\}_{n\in N}$ es acotado, por lo tanto sabemos que

$$\lambda = \limsup_{n\to\infty} P^n_{ii}$$

es finito.

Ahora tomando una subsucesión $\{P^{n_j}_{ii}\}$ donde $n_1 < n_2 < \cdots$ y tal que

$$\lim_{j\to\infty} P^{n_j}_{ii} = \lambda$$

y usaremos el hecho que para cualquier entero d tal que

$$f^d_{ii} > 0$$

tenemos el siguiente resultado que demostraremos posteriormente

$$\lim_{n\to\infty} P^{n_j-d}_{ii} = \lambda.$$

2.33.3

Sea ahora

$$a_n = f^{n+1}_{ii} + f^{n+2}_{ii} + f^{n+3}_{ii} + \cdots$$

en donde

$$\sum_{k=0}^{\infty} k f_{ii}^{k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

por lo tanto

$$f_{ii}^{1} = a_0 - a_1$$
$$f_{ii}^{2} = a_1 - a_2$$
$$\vdots$$
$$f_{ii}^{k} = a_{k-1} - a_k$$
$$\vdots$$

ahora sustituyendo en la ecuación **2.33.2**

$$P_{ii}^{n} - \Big[(a_{n-1} - a_n)P_{ii}^{0} + (a_{n-2} - a_{n-1})P_{ii}^{1} + \cdots + (a_0 - a_1)P_{ii}^{n-1} + (a_{-1} - a_0)P_{ii}^{\cancel{0}\,n}\Big] = 1$$

de acuerdo con la definición de a_n tenemos

$$a_{-1} = f_{ii}^{0} + f_{ii}^{1} + f_{ii}^{2} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} f_{ii}^{k} = 1$$

teniendo

$$\begin{aligned} P_{ii}^{n} + P_{ii}^{0}a_n + P_{ii}^{1}a_{n-1} + \cdots + P_{n-1}a_1 + P_{ii}^{\cancel{0}\,n}a_0 \\ = 1 + P_{ii}^{0}a_{n-1} + P_{ii}^{1}a_{n-2} + \cdots + P_{ii}^{n-1}a_0 + P_{ii}^{n} \\ P_{ii}^{0}a_n + P_{ii}^{1}a_{n-1} + \cdots + P_{ii}^{n-1}a_1 + P_{ii}^{\cancel{0}\,n}a_0 \\ = 1 + P_{ii}^{0}a_{n-1} + P_{ii}^{1}a_{n-2} + \cdots + P_{ii}^{n-1}a_0. \end{aligned}$$

2.33.4

Sea

$$A_n = P_{ii}^{n}a_0 + \cdots + P_{ii}^{0}a_n$$

2.33.5

con lo que podemos escribir a **2.33.4** como

$$A_n = A_{n-1} + 1$$

observemos que

$$A_0 = a_0 P_{ii}^{0} = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{k}\Big)P_{ii}^{0} = (1 - f_{ii}^{0})P_{ii}^{0}$$

es decir

$$P_{ii}^{0} - f_{ii}^{0}P_{ii}^{0} = 1$$

es la ecuación **2.33.2** para $n=0$ realizando lo mismo para A_n

$$A_n = (1 - f_{ii}^0)P_{ii}^n + (1 - \sum_{k=0}^{1} f_{ii}^k)P_{ii}^{n-1} + \cdots + (1 - \sum_{k=0}^{n} f_{ii}^k)P_{ii}^0.$$

Agrupando tenemos

$$= P_{ii}^n - \sum_{k=0}^{n} f_{ii}^k P_{ii}^{n-k} + P_{ii}^{n-1} - \sum_{k=0}^{n-1} f_{ii}^k P_{ii}^{(n-1)-k} + \cdots + P_{ii}^0 - f_{ii}^0 P_{ii}^0 = 1$$

ya que por hipótesis la ecuación **2.33.1** es igual a uno si $n=0$ y es igual a cero si $n \neq 0$ ahora para cualquier $N > 0$ fija y $j > 0$

$$a_0 P_{ii}^{n_j} + a_1 P_{ii}^{n_j-1} + \cdots + \acute{a}_N P_{ii}^{n_j-N} \leq A_{n_j} = 1$$

hacemos a j tender a infinito usando así el resultado **2.33.3** para $f_{ii}^d > 0$, no tendremos problemas ya que para las $f_{ii}^d = 0$

$$\lim_{j\to\infty} f_{ii}^d P_{ii}^{n_j-d} = 0$$

y

$$(a_0 + a_1 + \cdots + a_N)\lambda \leq 1$$

$$\lambda \leq \frac{1}{\sum_{k=0}^{N} a_k}$$

y como N es arbitraria tenemos

$$\lambda \leq \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k} = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} k f_{ii}^k}$$

2.33.6

si $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k f_{ii}^k$ diverge es decir si

$$\sum_{k=0}^{\infty} k f_{ii}^k = \infty$$

entonces tendríamos por la desigualdad **2.33.6**

$$\lim_{n\to\infty} P_{ii}^n = \lambda = 0.$$

Ahora bien tomemos

$$\liminf_{n\to\infty} P_{ii}^n = \mu$$

análogamente como en el caso anterior tomamos una subsucesión $\{P_{ii}^{n_j}\}$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} P_{ii}^{n_j} = \mu$$

teniendo también por **2.33.3**

$$\lim_{j\to\infty} P_{ii}^{n_j-d} = \mu$$

para cada $d \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$.

Supongamos

$$\sum_{k=0}^{\infty} k f_{ii}^k < \infty$$

entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_n < \infty$$

tomemos

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} a_n$$

con lo que

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} a_n = 0$$

de acuerdo con lo obtenido en la relación **2.33.5**

$$1 \leq a_0 P_{ii}^{n_j} + a_1 P_{ii}^{n_j-1} + \cdots + a_N P_{ii}^{n_j-N} + M \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

donde

$$M = \sup_{n\geq 0} P_{ii}^n$$

haciendo tender j a infinito

$$1 \leq (a_0 + a_1 + \cdots + a_N)\mu + M \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

y ahora hacemos que N tienda a infinito

$$1 \leq \mu \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

$$\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} a_n} \leq \mu$$

$$\frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} k f_{ii}^k} \leq \mu$$

es decir obtuvimos que

$$\lambda \leq \mu$$

y por definición tenemos

$$\mu \leq \lambda$$

por lo tanto

$$\mu = \lambda$$

y existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} P_{ii}^{n} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} k f_{ii}^{k}}.$$

b) Ahora demostraremos que por **2.33.3**

$$\lim_{j\to\infty} P_{ii}^{n_j'} = \lim_{j\to\infty} P_{ii}^{n_j-d}$$

para cada $d \in Z^{+} \cup \{0\}$ y tal que $f_{ii}^{d} > 0$. Lo demostraremos por contradicción.

Supongamos que

$$\lim_{j\to\infty} P_{ii}^{n_j} = \lambda$$

y

$$\lim_{j\to\infty} P_{ii}^{n_j-d} = \mu \quad \text{donde } \mu \neq \lambda$$

y por definición tenemos

$$P_{ii}^{n_j-d} < \mu$$

para un número infinito de j 's y $\mu < \lambda$ ahora como $f_{ii}^{d} > 0$ tomamos

$$\varepsilon = \frac{f_{ii}^{d}(\lambda - \mu)}{4}$$

y

$$\sup_{n\geq 0} P_{ii}^{n} = M$$

y determinamos N tal que

$$\sum_{k=0}^{n} f_{ii}^{k} > 1 - \frac{\varepsilon}{M} \quad \text{si } n \geq N \qquad \textbf{2.33.7}$$

escogemos j lo suficientemente grande tal que

$$n_j > N, \quad P_{ii}^{n_j} > \lambda - \varepsilon$$

$$P_{ii}^{n_j-d} < \mu < \lambda$$

$$P_{ii}^{n} < \lambda + \varepsilon \quad \forall n > n_j - N$$

2.33.8

usando estas desigualdades tenemos de **2.33.2**

$$P_{ii}^{n_j} = \sum_{k=0}^{n_j} f_{ii}^{k} P_{ii}^{n_j-k}$$

ya que $n_j > 0$

$$\leq \sum_{k=0}^{n_j} f_{ii}^{k} P_{ii}^{n_j-k} + \varepsilon$$

$$< \sum_{k=0}^{N} f_{ii}^{k} P_{ii}^{n_j-k} + M \sum_{k=N+1}^{n_j} f_{ii}^{k} + \varepsilon$$

2.33.9

usando la desigualdad **2.33.7** con $n = N$ obtenemos

$$\sum_{k=0}^{N} f_{ii}^{k} > 1 - \frac{\varepsilon}{M}$$

$$\sum_{k=0}^{N} f_{ii}^{k} > \sum_{k=0}^{N} f_{ii}^{k} + \sum_{k=N+1}^{\infty} f_{ii}^{k} - \frac{\varepsilon}{M}$$

$$\frac{\varepsilon}{M} > \sum_{k=N+1}^{\infty} f_{ii}^{k} \geq \sum_{k=N+1}^{n_j} f_{ii}^{k}$$

con esto tenemos **2.33.9**

$$P_{ii}^{n_j} < \sum_{k=0}^{N} f_{ii}^{k} P_{ii}^{n_j-k} + 2\varepsilon$$

lo cual usando la desigualdad **2.33.8** tenemos

$$< (f_{ii}^{0} + \cdots + f_{ii}^{d-1} + f_{ii}^{d+1} + \cdots + f_{ii}^{N})(\lambda + \varepsilon) + f_{ii}^{d}\mu + 2\varepsilon$$

usando el hecho de que $\sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{n} = 1$ tenemos

$$\leq (1 - f_{ii}^{d})(\lambda + \varepsilon) + f_{ii}^{d}\mu + 2\varepsilon$$

$$< \lambda + 3\varepsilon - f_{ii}^{d}(\lambda - \mu) = \lambda - \varepsilon$$

en resumen obtuvimos que

$$P_{ii}^{n_j} < \lambda - \varepsilon$$

lo cual es una contradicción de acuerdo con **2.33.8** por lo tanto

$$\mu = \lambda.$$

∎

Demostraremos ahora el inciso b) tenemos por **2.33.2**

$$P_{ij}^n = \sum_{m=0}^{n} f_{ji}^m P_{ii}^{n-m} = \sum_{m=0}^{\infty} f_{ji}^{n-m} P_{ii}^m$$

Sea

$$\lim_{m\to\infty} P_{ii}^m = \pi_i$$

y como

$$\sum_{v=0}^{\infty} f_{ii}^v = 1$$

por ser cadena recurrente. Tenemos

$$P_{ji}^n - \pi_i = \sum_{m=0}^{n} f_{ji}^{n-m} P_{ii}^m - \pi_i \sum_{v=0}^{\infty} f_{ii}^v =$$

$$\sum_{m=0}^{n} f_{ji}^{n-m}(P_{ii}^m - \pi_i) - \pi_i \sum_{v=n+1}^{\infty} f_{ii}^v$$

Ahora para $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $m(\varepsilon)$ tal que

$$|P_{ii}^m - \pi_i| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para toda $m > m(\varepsilon)$ teniendo así

$$P_{ji}^n - \pi_i = \sum_{m=0}^{m(\varepsilon)} f_{ji}^{n-m}(P_{ii}^m - \pi_i) + \sum_{m=m(\varepsilon)+1}^{n} f_{ji}^{n-m}(P_{ii}^m - \pi_i) - \pi_i \sum_{v=n+1}^{\infty} f_{ii}^v$$

tomando

$$M = \max_{m\geq 0} |P_{ji}^m - \pi_i|$$

tenemos

$$|P_{ji}^n - \pi_i| \leq M \sum_{m=0}^{m(\varepsilon)} f_{ji}^{n-m} + \frac{\varepsilon}{3} \sum_{m=m(\varepsilon)+1}^{n} f_{ji}^{n-m} + |\pi_i| \sum_{v=n+1}^{\infty} f_{ii}^v.$$

Escogemos también $N(\varepsilon)$ tal que para toda $n \geq N(\varepsilon)$ satisfagan

$$|\pi_i| \sum_{m=n+1}^{\infty} f_{ii}^m < \frac{\varepsilon}{3}$$

y

$$\sum_{m=0}^{m(\varepsilon)} f_{ji}^{n-m} = \sum_{v=n-m(\varepsilon)}^{n} f_{ji}^{v} < \frac{\varepsilon}{3M}$$

$$|P_{ji}^{n} - \pi_i| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} P_{ji}^{n} = \pi_i = \lim_{n\to\infty} P_{ii}^{n}.$$

2.34 Corolario.- Sea una cadena de Markov irreducible y recurrente con período d entonces

$$\lim_{n\to\infty} P_{ii}^{nd} = \frac{d}{\sum_{n=0}^{\infty} n f_{ii}^{n}}$$

Demostración.- Sea $\{X_n\}$ la cadena de Markov irreducible, recurrente con período d ternemos la siguiente subcadena

$$Y_m = X_{nd} \quad n \geq 0$$

tenemos que esta es una cadena irreducible y recurrente cuya matriz de transición es

$$R = P^{d}$$

veamos que esta cadena es aperíodica

$$\text{mcd}\{m|R_{ii}^{m} > 0\} = \text{mcd}\{n|P_{ii}^{nd} > 0\}$$

$$= \frac{1}{d}\text{mcd}\{n|P_{ii}^{n} > 0\} = 1$$

Por lo que podemos usar el teorema **2.33** teniendo

$$\lim_{n\to\infty} P_{ii}^{nd} = \lim_{m\to\infty} R_{ii}^{m}$$

$$= \frac{1}{\sum_{m=0}^{\infty} m f_{ii}^{m}} = \frac{d}{\sum_{n=0}^{\infty} n f_{ii}^{nd}}$$

$$= \frac{d}{\sum_{n=0}^{n} n f_{ii}^{n}}$$

∎

2.35 Corolario.- Si i es una clase aperíodica y recurrente y si

$$\lim_{n\to\infty} P_{ii}^{n} = \pi_i > 0$$

entonces

$$\pi_j > 0$$

para todo j que este en la clase de i.

En este caso llamaremos a la clase **positiva recurrente** o **fuertemente ergódica.**

Y si $\pi_i = 0$ donde i está en una clase recurrente le llamaremos clase recurrente **nula o débilmente ergódica.**

Demostración.-

Como $i \leftrightarrow j$ existe $m, n \geq 1$ tal que

$$P_{ji}^m > 0, \quad P_{ij}^n > 0$$

por la ecuación de Chapman-Kolmogorov tenemos

$$P_{jj}^{m+v+n} \geq P_{ji}^m P_{ii}^v P_{ij}^n$$

$$\pi_j = \lim_{v\to\infty} P_{ji}^m P_{ii}^v P_{ij}^n$$

$$= P_{ji}^m \pi_i P_{ij}^n > 0.$$

∎

2.36 Teorema.- En una clase aperíodica recurrente positiva C, con estados $j = 0, 1, 2, \cdots$

$$\lim_{n\to\infty} P_{jj}^n = \pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij} \qquad \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$$

y las π 's estan únicamente determinadas por las ecuaciones

$$\pi_i \geq 0 \qquad \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1 \qquad \text{y, } \pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij}.$$

A cualquier sucesión $(\pi_i)_{i=0}^{\infty}$ que satisface estas condiciones se le llama **distribución de probabilidad estacionaria.**

Demostración.-

Sean $i, j \in C$ entonces para toda $n \forall N \in \mathbb{Z}$

$$1 = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}^n \geq \sum_{j=0}^{N} P_{ij}^n$$

si tomamos el límite cuando n tiende a infinito por el teorema 2.33

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \lim_{n\to\infty} P_{jj}^n$$

teniendo entonces

$$1 \geq \sum_{j=0}^{N} \lim_{n \to \infty} P_{jj}^{n} = \sum_{j=0}^{N} \pi_j$$

para toda $N \in Z$

Es decir la desigualdad anterior es independiente de la N por lo que podemos hacer que N tienda a infinito

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \leq 1$$

Ahora bien por la ecuación de Chapman-Kolmogorov

$$P_{ij}^{n+1} \geq \sum_{k=0}^{N} P_{ik}^{n} P_{kj}$$

hacemos tender n a infinito y de acuerdo con el teorema **2.33** obtenemos

$$\pi_j \geq \sum_{k=0}^{N} \pi_k P_{kj}$$

nuevamente esta desigualdad es independiente de la N por lo que hacemos que N tienda a infinito

$$\pi_j \geq \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k P_{kj} \tag{2.36.1}$$

Ahora multiplicando por P_{ji}

$$\pi_j P_{ji} \geq \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k P_{kj} P_{ji}$$

Ahora sumando sobre las j y aplicando **2.36.1** tenemos

$$\pi_i \geq \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j P_{ji} \geq \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \sum_{j=0}^{\infty} P_{kj} P_{ji} = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k P_{ki}^{2}$$

$$\pi_i \geq \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k P_{ki}^{2}$$

esto se cumple para cualquier estado i en particular para algún estado j

$$\pi_j \geq \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k P_{kj}^{2}.$$

Ahora suponiendo que esto se cumple para n

$$\pi_j \geq \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k P_{kj}^{n}.$$

Por demostrar que se cumple para $n+1$ multiplicamos por P_{ji} y sumamos sobre las j obtenemos

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j P_{ji}^n \geq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k P_{kj}^n P_{ji} = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \sum_{j=0}^{\infty} P_{kj}^n P_{ji}$$

y como sabemos que se cumple para n

$$\pi_i \geq \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j P_{ji}^n \geq \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \sum_{j=0}^{\infty} P_{kj}^n P_{ji} = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k P_{ki}^{n+1}$$

es decir

$$\pi_i \geq \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k P_{ki}^{n+1}$$

por lo tanto

$$\pi_j \geq \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k P_{kj}^n$$

es cierto para cualquier n. Ahora bien suponiendo estricta esta desigualdad tenemos

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j > \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k P_{kj}^n = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \sum_{j=0}^{\infty} P_{kj}^n = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k$$

lo cual es una contradicción.

Luego entonces

$$\pi_j = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k P_{kj}^n$$

para cualquier n.

Tomando el límite cuando n tiende a infinito tenemos

$$\pi_j = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \lim_{n \to \infty} P_{kj}^n = \pi_j \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k$$

lo cual sucede para toda j por lo tanto como tenemos una clase recurrente positiva $\pi_j > 0$ entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1$$

Supongamos que existe una sucesión de $\{x_n\}$ que satisfacen las relaciones

$$x_i \geq 0 \quad \sum_{i=0}^{\infty} x_i = 1 \quad \text{y } x_j = \sum_{i=0}^{\infty} x_i P_{ij}$$

como demostramos anteriormente tenemos

$$x_j = \sum_{k=0}^{\infty} x_k P_{kj}^n$$

ahora tomando el límite cuando n tiende a infinito

$$x_j = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \lim_{n\to\infty} P_{kj}^n = \pi_j \sum_{k=0}^{\infty} x_k = \pi_k$$

Por lo tanto las π 's quedan únicamente determinadas por estas relaciones.

∎

Hemos visto que si i, j estan en una misma clase recurrente aperíodica

$$P_{ij}^n \to \pi_j \geq 0$$

cuando n tiende a infinito.

Veamos que sucede cuando el estado j es transitorio o cuando el estado i es transitorio y el estado j es recurrente.

2.37 Teorema.- Sea C una cadena de Markov irreducible y j un estado transitorio, $j \in C$ entonces se cumple

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^n < \infty$$

para toda $i \in S$ y

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = 0.$$

Demostración.-

Si suponemos que existe $i \in C$ tal que i es recurrente demostraremos que el ser recurrente es una propiedad de clase, pero esto es una contradicción ya que $j \in C$ y j es transitorio.

Por otro lado tenemos que

$$P_{ij}^n = \sum_{v=1}^{n} f_{ij}^v P_{jj}^{n-v}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{n} f_{ij}^v P_{jj}^{n-v} = \sum_{v=1}^{n} f_{ij}^v \sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{n-v}$$

$$\leq \sum_{m=0}^{\infty} P_{jj}^m$$

Por ser j transitorio tenemos

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_{jj}^{m} < \infty$$

por lo tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^{n} < \infty$$

ahora usando el teorema de Borel Cantelli * que dice que si $\sum_n P(A_n)$ converge entonces $P(\overline{\lim} A_n) = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^{n} < \infty$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{n} = 0.$$

∎

2.38 Proposición.- Si tenemos una cadena finita e irreducible entonces la cadena es recurrente.

Demostración.- Supongamos que no hay estados recurrentes en la cadena entonces por el teorema **2.30**

$$Q_{ii} = 0$$

esto es la probabilidad de visitar el estado i una infinidad de veces partiendo del estado i es cero. Entonces existe n para la cual se visita el estado i por última vez, como los estados son finitos, visitariamos un número finito de estdados a partir de esta n sin regresar al estado i, por lo cual formariamos una clase de equivalencia con estos estados lo cual contradice el hecho de que la cadena es irreducible. Por lo tanto i es recurrente y por la proposición **2.23** tenemos que la cadena es recurrente.

∎

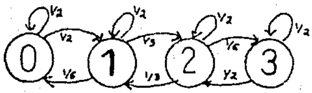
2.39 Ejemplo.- De acuerdo con la siguiente matriz de transición obtendremos las distribuciones límite

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

---

* Patrick Billingsley. Probability and Measure .pp 46. John Wiley & Sons, Inc. 1979

cuya gráfica es:



en la cual podemos observar que la clase de estados es aperíodica y por la proposición **2.38** es recurrente cumpliéndose así la proposición **2.33** por lo que podemos encontrar la distribución límite de esta cadena de Markov

$$\pi_0 = \frac{\pi_0}{2} + \frac{\pi_1}{6}$$

$$\pi_1 = \frac{\pi_0}{2} + \frac{\pi_1}{2} + \frac{\pi_2}{3}$$

$$\pi_2 = \frac{\pi_1}{3} + \frac{\pi_2}{2} + \frac{\pi_3}{2}$$

$$\pi_3 = \frac{\pi_2}{6} + \frac{\pi_3}{2}$$

con la condición de que

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

resolviendo esto tenemos:

$$\pi_1 = 3\pi_0 \quad \pi_2 = 3\pi_0 \quad \pi_3 = \frac{1}{8} \quad \pi_0 = \frac{1}{8}$$

obteniendo la siguiente matriz de transición límite.

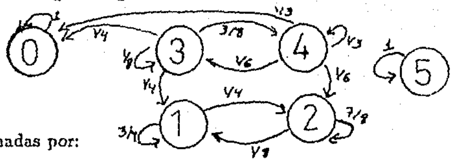
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Lo cual quiere decir que la probabilidad de salir de cualquier estado y regresar al estado cero en n - pasos, al hacer que n tienda a ∞ sera con una probabilidad igual a $\frac{1}{8}$. Análogamente para los demás estados.

2.40 Ejemplo.- Consideremos la siguiente matriz de transición:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{7}{8} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Veamos su comportamiento en la siguiente gráfica:



nuestras clases de estados estan formadas por:

$$\{0\}, \{1,2\}, \{3,4\}, \{5\}$$

cada una de estas clases son aperíodicas, observemos que la clase $\{3,4\}$ no es irreducible por lo que de acuerdo con la proposición **2.38** no es recurrente, pero observemos que la clase de estados $\{1,2\}$ si es irreducible y por la proposición **2.38** es una clase recurrente tenemos que se cumplen las hipótesis del teorema **2.33** por lo cual podemos encontrar la distribución límite de esta clase de estados como sigue:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix}$$

$$\pi_1 = \pi_1 P_{11} + \pi_2 P_{21} = \frac{3}{4}\pi_1 + \frac{1}{8}\pi_2$$

$$\pi_2 = \pi_1 P_{12} + \pi_2 P_{22} = \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{7}{8}\pi_2$$

resolviendo este sistema tenemos que:

$$\pi_1 = \frac{3}{4}\pi_1 + \frac{1}{8}\pi_2$$

$$\pi_1 - \frac{3}{4}\pi_1 = \frac{1}{8}\pi_2$$

$$\pi_2 = 2\pi_1$$

como se debe de cumplir que $\sum_i \pi_i = 1$ tenemos

$$2\pi_1 + \pi_1 = 1$$

$$\pi_1 = \frac{1}{3} \qquad \pi_2 = \frac{2}{3}$$

2.41 Ejemplo.- Consideremos una producción en linea donde cada artículo tiene la probabilidad $p < 1$ de ser defectuoso. Suponemos que las condiciones de cada artículo no dependen de otro. Usemos el siguiente plan de muestreo:

a. Inicialmente todos los artículos son probados conforme van siendo producidos uno por uno hasta que encontremos i_0 artículos consecutivos no defectuosos.

b. A partir de i_0 artículos no defectuosos empezamos a tomar muestras de tamaño r y probamos solo un artículo de cada muestra seleccionado al azar. Esto será realizado hasta que uno de los atrículos sea defectuoso, en donde iniciaremos nuevamente el plan de muestreo.

Llamaremos E_k $(k = 0, 1, ..., i_0)$ al estado que indica que han sido encontrados k artículos consecutivos no defectuosos. Esto es al inicio de nuestro muestreo si el artículo es defectuoso estaremos en el estado E_0 con probabilidad p, o si el artículo es no defectuoso estaremos en el estado E_1 con probabilidad $(1-p)$. Del estado E_1 podemos pasar al estado E_2 si nuestro siguiente artículo es no defectuoso con probabilidad $(1-p)$ o bien pasaremos al estado E_0 con probabilidad p ,si el artículo fue defectuoso. En general de un estado E_k podemos pasar al estado E_{k+1} si el artículo es no defectuoso con probabilidad $(1-p)$, o bien pasaremos al estado E_0 si el artículo es defectuoso con probabilidad p.

Llamemos E_{i_0+1} al estado que indica que el plan de muestreo esta en la segunda fase, es decir permaneceremos en este estado si se toman muestras de tamaño r y el artículo probado es no defectuoso, si el artículo probado es defectuoso regresaremos al estado E_0, es decir volveremos a empezar con nuestro plan de muestreo.

La probabilidad de obtener un artículo defectuoso en una muestra de tamaño r será también p.

Veamos esto para $r = 2$ nuestros posibles resultados son

$$P(N, D) = p(1-p)$$
$$P(D, N) = p(1-p)$$
$$P(D, D) = p^2$$
$$P(N, N) = (1-p)^2$$

Denotamos:

D-artículo defectuoso,

N- artículo no defectuoso.

En donde la probabilidad de que nuestro artículo seleccionado se defectuoso en los primeros dos casos es $\frac{1}{2}$ en el tercero es 1 y en el cuarto caso cero.

$P($ de obtener un artículo defectuoso $) = p^2 + p(1-p) = p$

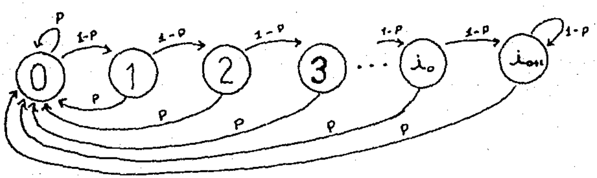
En general para una muestra de tamaño $r = n$ también tenemos que la probabilidad de obtener un artículo defectuoso es p.

Con estos hechos podemos obtener nuestras probabilidades de transición de la siguiente forma:

$P_{jk} = P($ estar en el estado E_k después de $m+1$ observaciones | estamos en el estado E_j después de m observáciones).

$$= \begin{cases} p & \text{si } k=0, \quad j = 0,1,...,i,i+1 \\ (1-p) & \text{si } k = j+1, \quad j = 0,1,...,i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Observemos el comportamiento de esta cadena por medio de la siguiente gráfica:



en donde podemos observar que la cadena es irreducible y aperíodica, verificaremos ahora si es recurrente. Como recurrente es una propiedad de clase como se vió en la proposición **2.23** bastara que veamos si es recurrente el estado 0.

Tenemos

$$\begin{aligned} f_{00}^1 &= p \\ f_{00}^2 &= (1-p)p \\ f_{00}^3 &= (1-p)^3 p \\ &\vdots \\ f_{00}^n &= (1-p)^{n-1}p \end{aligned}$$

en donde

$$f_{00}^n = (1-p)^{n-1} - (1-p)^{n-1}(1-p)$$

denotemos

$$s_n = \begin{cases} (1-p)^n & \text{si } n > 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

por lo que podemos escribir a f_{00}^n de la siguiente forma:

$$\sum_{n=1}^{m} f_{00}^n = \sum_{n=1}^{m} (s_{n-1} - s_n)$$

$$= (1 - s_1) + (s_1 - s_2) + \dots + (s_{m-1} - s_m)$$

esto es

$$\sum_{n=1}^{m} f_{00}^{n} = 1 - s_m$$

en donde el

$$\lim_{m\to\infty} s_m = 0$$

ya que $(1-p) < 1$ por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{n} = 1$$

por lo tanto el cero es recurrente luego entonces por la proposición **2.23** la cadena es recurrente. Teniendo así que se cumplen las hipótesis del teorema **2.33** obtendremos ahora la distribución límite de probabilidad.

Veamos la matriz de transición de esta cadena

$$\begin{pmatrix} p & (1-p) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p & 0 & (1-p) & 0 & \cdots & 0 \\ p & 0 & 0 & (1-p) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p & 0 & 0 & 0 & \cdots & (1-p) \\ p & 0 & 0 & 0 & \cdots & (1-p) \end{pmatrix}$$

en donde obtenemos las siguientes ecuaciones :

$$\begin{aligned} &\pi_0 = p \sum_{k=1}^{i+1} \pi_k \\ &\pi_1 = (1-p)\pi_0 \\ &\pi_2 = (1-p)\pi_1 \\ &\vdots \\ &\pi_i = (1-p)\pi_{i-1} \\ &\pi_{i+1} = (1-p)(\pi_i + \pi_{i+1}) \end{aligned}$$

poniendo las ecuaciones en términos de π_{i+1} tenemos:

$$\begin{aligned} &\pi_i = \tfrac{p}{(1-p)}\pi_{i+1} \\ &\pi_{i-1} = \tfrac{p}{(1-p)^2}\pi_{i+1} \\ &\vdots \\ &\pi_2 = \tfrac{p}{(1-p)^{i-1}}\pi_{i+1} \\ &\pi_1 = \tfrac{p}{(1-p)^i}\pi_{i+1} \\ &\pi_0 = \left[p^2 \textstyle\sum_{k=1}^{i} \frac{1}{(1-p)^k} + p\right] \pi_{i+1} \end{aligned}$$

luego como $\sum_{k=0}^{i+1} \pi_k = 1$ tenemos:

$$\left(p^2 \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{(1-p)^k} + p\right) \pi_{i+1} + p \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{(1-p)^k} \pi_{i+1} + \pi_{i+1} = 1$$

$$\begin{aligned} \pi_{i+1} &= \frac{1}{p \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{(1-p)} (p+1) + (p+1)} \\ &= \frac{1}{(p+1)\left(p \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{(1-p)} + 1\right)}. \end{aligned}$$

CAPITULO III

Simulacion

En este capítulo simularemos distintas caminatas aleatorias, y el modelo de Ehrenfest.

Empezaremos con la caminata aleatoria vista en la proposición **2.25** representada por medio del siguiente juego:

Supongamos que tenemos dos jugadores A y B, y el juego consiste en realizar una secuencia de lanzamientos con una moneda honesta de tal manera que si el resultado del lanzamiento es sol el jugador A gana una unidad de la fortuna del jugador B, y si el resultado del lanzamiento es águila el jugador B gana una unidad de la fortuna del jugador A.

Tomemos la variable aleatoria X_t con $t = 0, 1, \ldots$ como los cambios de la fortuna del jugador A.

Supongamos lo siguiente:

a. $X_0 = 0$

b. $P(X_{t+1} = n+1 | X_t = n) = P(X_{t+1} | X_t = n) = \frac{1}{2}$

y consideremos que nuestro juego termina cuando el jugador A vuelve a tener su fortuna original, es decir $X_t = 0$ para alguna t.

Ahora bien partiendo de estos hechos, veamos cual es el tiempo esperado para que el jugador A obtenga su fortuna original conforme el número de juegos crece. Sabemos que la caminata aleatoria que estudiamos forma una Cadena de Markov irreducible, recurrente y con período 2, por lo que podemos usar el corolario **2.34** en donde se tiene

$$\lim_{n\to\infty} P_{00}^n = \frac{2}{\sum_{n=0}^{\infty} n f_{00}^n}$$

mediante esta igualdad podemos encontrar el valor esperado de que el jugador A obtenga su fortuna original conforme el número de juegos n crece,

$$\sum_{n=0}^{\infty} n f_{00}^n = \frac{2}{\lim_{n\to\infty} P_{00}^n}$$

Recordemos que en la proposición **2.25** habíamos obtenido

$$P_{00}^{2n} = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

y haciendo uso de la fórmula de Stirling obtenemos

$$P_{00}^{2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

y al hacer tender n a infinito tenemos

$$\lim_{n\to\infty} P_{00}^{2n} \sim \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = 0$$

Luego entonces el tiempo medio de recurrencia al cero tiende a infinito, cuando n tiende a infinito, es decir

$$\sum_{n=0}^{\infty} n f_{00}^{n} = \infty$$

El siguiente programa simula la caminata aleatoria que hemos descrito. Este programa consiste en lo siguiente:

Se genera un número aleatorio u con distribución uniforme $U(0,1)$ y si u es menor o igual a p el cambio de fortuna del jugador A aumentará en 1, (el cambio de fortuna esta representado por la variable *cambfort*), si u es mayor que p entonces la fortuna disminuye en 1, se continua este proceso hasta que la caminata regrese al cero es decir hasta que la fortuna del jugador A regrese a su estado inicial. Cada uno de estos procesos sera considerado como un juego, y se simularon 1000 juegos.

Para cada juego observamos:

a. El número de lanzamientos requeridos en un juego, es decir la longitud del juego.

b. El promedio de retornos al cero.

En el caso de $p = 1/2$, tomamos tres semillas diferenntes para poder observar que en circunstancias distintas, se tiene el mismo comportamiento.

En las siguientes tablas se muestran los resultados para cada una de las tres semillas utlizadas. En cada una se anota en la parte superior el tiempo en que se inician y el tiempo en que se acaban los 1000 juegos. En estos observamos como se vio anteriormente que el valor de $\sum n f_{00}^{n}$ va creciendo a medida que el número de juegos aumenta.

NOTA.-Para permitir números mayores al número límite manejado por el lenguaje Pascal hemos multiplicado por 10^{-5} los valores para obtener el promedio. Por lo que los valores reales se obtienen multiplicando por 10^{5} los valores obtenidos en las tablas.

La semilla es : 184813579

Hora en la que inicia

11 35 47 71

Hora en la que termina

11 35 55 40

N	Promedio	Lanzam.	V
1	2.0000000000E-05	2	0
2	6.0000000000E-05	10	0
3	4.6666666667E-05	2	0
4	4.0000000000E-05	2	0
5	6.4000000000E-05	16	0
6	6.3333333333E-05	6	0
7	5.7142857143E-05	2	0
8	5.2500000000E-05	2	0
9	5.1111111111E-05	4	0
10	4.8000000000E-05	2	0
20	3.6000000000E-05	2	0
30	6.3913333333E-03	4	0
40	4.8020000000E-03	6	0
50	3.9864000000E-03	2	0
60	3.3490000000E-03	12	0
70	2.8957142857E-03	12	0
80	2.6702500000E-03	2	0
90	2.3946666666E-03	12	0
100	2.2120000000E-03	22	0
200	5.0731000000E-03	2	0
300	3.5340666666E-03	6	0
400	3.8821499999E-03	2	0
500	3.1924799999E-03	2	0
600	2.8972333332E-03	2	0
700	2.5500142856E-03	2	0
800	2.4357999999E-03	20	0
900	2.6206777776E-03	4	0
1000	2.5002499998E-03	2	0

La semilla es [illegible]

Hora en la que inicia
11 17 48 86
Hora en la que termina
11 18 7 70

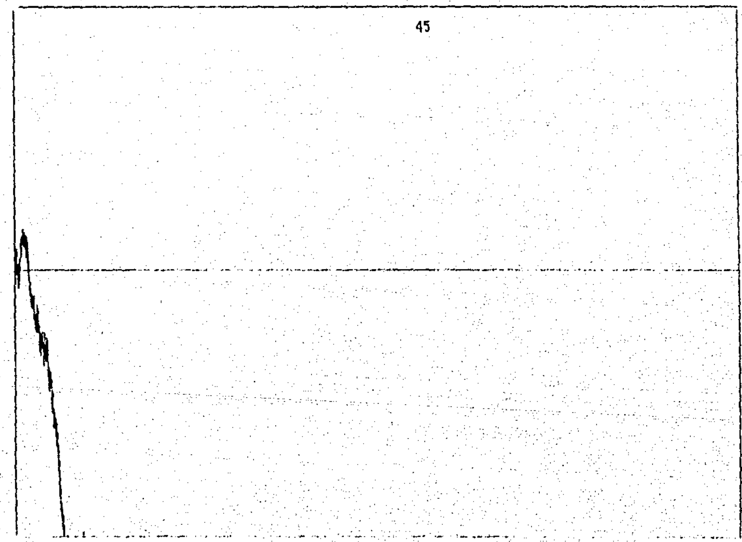
N	Promedio	Lanzam.	V
1	1.2000000000E-04	12	0
2	7.0000000000E-05	2	0
3	1.1333333333E-04	20	0
4	3.2500000000E-04	96	0
5	2.7200000000E-04	6	0
6	2.3666666667E-04	6	0
7	2.1428571429E-04	8	0
8	1.9000000000E-04	2	0
9	1.9111111111E-04	20	0
10	1.7400000000E-04	2	0
20	2.1500000000E-04	8	0
30	1.9733333333E-04	4	0
40	6.8650000000E-04	2	0
50	5.6480000000E-04	2	0
60	1.1326666667E-02	108	0
70	9.8788571429E-03	2	0
80	8.7157500001E-03	2	0
90	8.4173333331E-03	2	0
100	7.5850000001E-03	2	0
200	1.1046250000E-02	4	0
300	7.5220333332E-03	12	0
400	5.9346749998E-03	10	0
500	1.0892080000E-02	6	0
600	9.5493333330E-03	2	0
700	8.3026571424E-03	8	0
800	7.4032999996E-03	2	0
900	6.9349555551E-03	10	0
1000	6.2831799995E-03	2	0

La semilla es : 941757985

Hora en la que inicia
22 10 48 70
Hora en la que termina
22 53 5 98

N	Promedio	Lanzam.	V
1	2.0000000000E-05	2	0
2	2.0000000000E-05	2	0
3	1.0000000000E-04	26	0
4	9.5000000000E-05	8	0
5	8.0000000000E-05	2	0
6	7.0000000000E-05	2	0
7	3.3428571428E-04	192	0
8	2.9500000000E-04	2	0
9	2.6444444444E-04	2	0
10	2.5200000000E-04	14	0
20	4.1600000000E-04	4	0
30	1.5720000000E-03	2	0
40	1.4460000000E-03	2	0
50	1.1632000000E-03	2	0
60	9.8599999997E-04	12	0
70	1.0237142857E-03	2	0
80	5.7898949995E-01	2	0
90	5.1466844440E-01	2	0
100	4.6322279996E-01	2	0
200	2.3226959996E-01	142	0
300	1.5561546663E-01	6	0
400	1.1835452497E-01	6	0
500	9.4963259970E-02	2	0
565	2.9445877870E-01	23577	369
600	2.7731524994E-01	36	0
700	2.3783287136E-01	8	0
800	2.0929286249E-01	2	0
900	1.8545805548E-01	2	0
1000	1.6697698993E-01	2	0

Las siguientes gráficas ilustran el comportamiento de la caminata cuando $p \neq q$, en las cuales observamos que no se regresa al cero.(Esta discución se hizo en la proposición **2.25**).



Ahora bien modificaremos nuestra caminata aleatoria observando nuevamente el tiempo esperado de recurrencia al cero. Para estas modificaciones daremos la siguiente definición.

3.1 Definición.- Una **Barrera Reflejante** se define como un estado el cual, cuando es cruzado en cualquier dirección, se permanecera en este estado hasta que se pueda pasar al estado anterior reanudando el proceso.

Modificaremos la caminata aleatoria en los siguientes dos casos:

a. Colocaremos dos barreras reflejantes, una en el estado cero y otra en el estado n en las cuales permaneceremos con probabilidad $(1-p)$ y las abandonaremos con probabilidad p.

b. Colocamos dos barreras reflejantes una en el estado cero y la otra en el estado n estas serán abandonadas con probabilidad 1.

3.2 Caso 1.- Consideremos 2 barreras reflejantes en nuestra caminata aleatoria, una en el estado n y otra en el estado cero.

Asi tenemos las siguientes probabilidades:

$$P(X_{k+1}=j|X_k=i)=\begin{cases} p & \text{si } j=i+1 \text{ o } i=j=n \\ q & \text{si } j=i-1 \text{ o } i=j=0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

con $q=(1-p)$, cuya matriz de transición es

$$\begin{array}{c} . \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \end{array} \\
\begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q & p \end{pmatrix} \end{array}$$

Para la cual encontraremos la distribución de equilibrio, mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} &\pi_0=q(\pi_0+\pi_1) \\ &\vdots \\ &\pi_k=p\pi_{k-1}+q\pi_{k+1} \quad k=1,...,n-1 \\ &\vdots \\ &\pi_n=p(\pi_{n-1}+\pi_n) \end{aligned}$$

escribiendo las ecuaciones en términos de π_0 obtenemos

$$\pi_1=\pi_0\tfrac{p}{q}$$

$$\pi_1 = p\pi_0 + q\pi_2$$

entonces

$$\frac{p}{q}\pi_0 = p\pi_0 + q\pi_2$$

$$\pi_2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \pi_0$$

obteniendo en general

$$\pi_k = \left(\frac{p}{q}\right)^k \pi_0 \qquad k = 0, ..., n$$

y como $\sum_{k=0}^{n} \pi_k = 1$ tenemos

$$\sum_{k=0}^{n} \pi_k = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{p}{q}\right)^k \pi_0$$

Ahora bien observemos que si $p = q$ tendremos que

$$\pi_0 = \frac{1}{n+1} = \pi_k$$

y tenemos que es una cadena irreducible, aperíodica y recurrente, por lo cual aplicando el teorema **2.33** tenemos que cuando n crece

$$\lim_{n\to\infty} P_{00}^n = 0$$

por lo que el valor esperado del tiempo medio de recurrencia al cero tiende a infinito cuando n crece, es decir

$$\sum_{n=0}^{\infty} n f_{00}^n = \infty$$

Ahora estudiaremos el caso en que $p \neq q$

$$\sum_{k=0}^{n} \pi_k = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{p}{q}\right)^k \pi_0$$

$$1 = \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{n+1}}{1 - \frac{p}{q}} \pi_0$$

entonces

$$\pi_0 = \frac{1 - \frac{p}{q}}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{n+1}} \left(\frac{p}{q}\right)^k \qquad k = 0, ..., n$$

En el caso de que $p < q$ tendremos que cuando n crece

$$\pi_k = \left(1 - \frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right)^k$$

la cual es una distribucuón geométrica.

En este caso tendremos que π_k decrece geométricamente desde la barrera reflejante n.

En el caso de $p > q$ tendremos que π_k decrece gemétricamente desde la barrera reflejante cero.

Análogo al caso anterior simulamos la caminata aleatoria con nuestras barreras reflejantes. El procedimiento es el mismo sólo que ahora cada vez que lleguemos a alguna de las barreras permaneceremos en ella si el número aleatorio generado u es menor que p y saldremos en el caso contrario. Recordemos que nuestros juegos empiezan en cero, y que ahora consideramos como un juego el caso de ir del cero al cero en un paso , por lo que el número total de jugadas disminuye ya que tenemos juegos más cortos.

Tomamos una de las semillas estudiada en el caso anterior, y ponemos a la barrera reflejante n en tres lugares distintos. En las siguintes tablas mostramos que el valor esperado de retornos al cero crece conforme los juegos aumentan.

Colacamos la barrera reflejante en 100, 200 y 300. Es claró que para visitar la barrera reflejante en 200 al menos se debe visitar la barrera reflejante 100 en un número de veces igual a la distancia que hay entre estas dos. Análogamente para visitar la barrera 300 se debió de visitar a la barrera 100 en al menos un número de veces igual a la distancia entre estas.

NOTA.- Tenemos que multiplicar por 10^5 para obtener los valores reales de las tablas.

Reflejante 100
Reflejante 0
La semilla es : 337908750
Hora en la que se incia:
12 1 2 72
Hora en la que se termina:
12 1 5 68

La probabilidad de abandonar una barrera reflejante es (1-p)
La probabilidad con la que pierde es: 0.50
Número de visitas a la relejante 100 es: 734
Número de visitas a la reflejante cero es: 1000

N	Promedio	Lanzam.	V
1	1.0000000000E-05	1	0
2	1.0000000000E-05	1	0
3	1.0000000000E-05	1	0
4	1.2500000000E-05	2	0
5	2.9000000000E-04	140	0
6	7.2166666667E-04	288	0
7	6.5000000000E-04	22	0
8	5.8125000000E-04	10	0
9	5.1777777778E-04	1	0
10	4.6700000000E-04	1	0
20	2.5000000000E-04	1	0
30	2.2200000000E-04	144	0
40	7.3400000000E-04	1	0
50	5.9780000000E-04	1	0
60	5.0716666667E-04	1	0
70	4.3757142857E-04	2	0
80	3.8637500000E-04	2	0
90	8.6200000000E-04	2	0
100	3.5646000000E-03	1	0
200	1.9678000000E-03	1	0
300	2.1367666667E-03	1	0
400	1.6802000000E-03	1	0
500	1.5257200000E-03	34	0
600	1.2835500000E-03	1	0
700	1.1401000000E-03	1	0
800	1.0408125000E-03	1	0
900	1.0451000000E-03	2	0
1000	9.6553999998E-04	1	0

Reflejante 200
Reflejante 0
La semilla es : 337908750
Hora en la que se incia:
12 6 7 12
Hora en la que se termina:
12 6 13 54

La probabilidad de abandonar una barrera reflejante es (1-p)
La probabilidad con la que pierde es: 0.50
Número de visitas a la relejante 200 es: 940
Número de visitas a la reflejante cero es: 1000

N	Promedio	Lanzam.	V
1	1.0000000000E-05	1	0
2	1.0000000000E-05	1	0
3	1.0000000000E-05	1	0
4	1.2500000000E-05	2	0
5	2.9000000000E-04	140	0
6	7.2166666667E-04	288	0
7	6.5000000000E-04	22	0
8	5.8125000000E-04	10	0
9	5.1777777778E-04	1	0
10	4.6700000000E-04	1	0
20	2.5000000000E-04	1	0
30	2.2200000000E-04	144	0
40	7.3400000000E-04	1	0
50	5.9780000000E-04	1	0
60	5.0716666667E-04	1	0
70	4.3757142857E-04	2	0
80	3.8637500000E-04	2	0
90	7.5343333333E-03	2	0
100	6.7849000000E-03	1	0
200	3.8413500000E-03	2	0
300	2.6221000000E-03	1	0
400	2.0769000000E-03	2	0
500	1.6757800000E-03	1	0
600	2.2712833333E-03	2	0
700	2.0113857142E-03	1	0
800	1.7711499999E-03	2	0
900	1.6152111110E-03	2	0
1000	2.2156899999E-03	8	0

Reflejante 300
Reflejante 0
La semilla es : 337908750
Hora en la que se incia;
12 8 7 68
Hora en la que se termina.
12 8 15 42

La probabilidad de abandonar una barrera reflejante es (1-p)
La probabilidad con la que pierde es: 0.50
Número de visitas a la relejante 300 es: 566
Número de visitas a la reflejante cero es: 1000

N	Promedio	Lanzam.	V
1	1.0000000000E-05	1	0
2	1.0000000000E-05	1	0
3	1.0000000000E-05	1	0
4	1.2500000000E-05	2	0
5	2.9000000000E-04	140	0
6	7.2166666667E-04	288	0
7	6.5000000000E-04	22	0
8	5.8125000000E-04	10	0
9	5.1777777778E-04	1	0
10	4.6700000000E-04	1	0
20	2.5000000000E-04	1	0
30	2.2200000000E-04	144	0
40	7.3400000000E-04	1	0
50	5.9780000000E-04	1	0
60	5.0716666667E-04	1	0
70	4.3757142857E-04	2	0
80	3.8637500000E-04	2	0
90	8.4845555556E-03	7880	0
100	7.6518000000E-03	80	0
200	3.8588000000E-03	1	0
300	2.7317000000E-03	4	0
400	2.0917250000E-03	1	0
500	2.8138000000E-03	44	0
600	2.3605833333E-03	1	0
700	2.0734999990E-03	1	0
800	3.0262249999E-03	1	0
900	2.9547555554E-03	1	0
1000	2.6660399999E-03	2	0

3.3 Caso 2.- Tomemos nuevamente barreras reflejantes en los estados cero y n de tal forma que al llegar a éstas no se les permita permanecer en ellas, es decir

$$P(X_{k+1}=j|X_k=i)=\begin{cases}1 & \text{si } i=n, j=n-1 \quad o \quad i=0, j=1\\ p & \text{si } j=i+1, j\neq 0\\ q & \text{si } j=i-1, j\neq n\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

la cual tiene la siguiente matriz de transición

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \end{array}\\
\begin{array}{c} 0\\ 1\\ 2\\ \vdots\\ n-1\\ n\end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 & p\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}
\end{array}$$

Para encontrar la distribución de equilibrio tenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
&\pi_0 = q\pi_1\\
&\pi_1 = \pi_0 + q\pi_2\\
&\vdots\\
&\pi_k = p\pi_{k-1} + q\pi_{k+1}\\
&\vdots\\
&\pi_{n-1} = p\pi_{n-2} + \pi_n\\
&\pi_n = p\pi_{n-1}
\end{aligned}$$

escribiendo las ecuaciones en términos de π_0:

en la primera

$$\pi_1 = \frac{\pi_0}{q}$$

sustituyendo el valor de π_1 en la segunda

$$\pi_2 = \frac{p}{q^2}\pi_0$$

desarrollando

$$\begin{aligned}
\pi_2 &= p\pi_1 + q\pi_3\\
\frac{p}{q^2}\pi_0 &= \frac{p}{q}\pi_0 + q\pi_3
\end{aligned}$$

obteniendo finalmente

$$\pi_3 = \left(\frac{p^2}{q^3}\right)\pi_0.$$

En general

$$\pi_k = \frac{p^{k-1}}{q^k}\pi_0$$

y como $\sum\limits_{k=0}^{n} \pi_k = 1$ tenemos

$$\sum_{k=0}^{n} \pi_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{k-1}}{q^k}\pi_0$$

$$1 = p^{-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{p^k}{q^k}\pi_0$$

entonces

$$\pi_0 = p\frac{1-\frac{p}{q}}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{n+1}}$$

observemos el caso $p = q$

$$\pi_k = \frac{p}{n+1} = \pi_0$$

como la cadena es irreducible, recurrente y con período 2 por el corolario **2.34** tenemos

$$\lim_{n\to\infty} P_{00}^{2n} = 0$$

por lo que el tiempo esperado de regreso al cero tiende a infinito cuando n crece

$$\sum_{n=0}^{\infty} n f_{00}^{n} = \infty$$

En el caso $p \neq q$ tendremos

$$\pi_k = \frac{1-\frac{p}{q}}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{n+1}}\left(\frac{p}{q}\right)^k \qquad k = 0, ..., n$$

Simulemos la caminata aleatoria para el caso de estas barreras reflejantes. Tomemos la misma semilla seleccionada en el caso anterior. Recordemos que en este caso

$$P_{01}^{1} = 1 \qquad \text{y} \qquad P_{n(n-1)}^{1} = 1$$

estos pasos forzados por las barreras reflejantes los contaremos como un lanzamiento, es decir cada juego tendrá longitud mínima de dos.

Debido a estos pasos forzados iniciaremos nuestra caminata aleatoria en 1, contando el paso que se dá en esta salida.

Nuevamente tenemos las barreras reflejantes en 100, 200 y 300. Teniendo también que el número de visitas a la reflejante 100 debe ser al menos igual a la distancia que hay entre las reflejantes 200 y 300 para que éstas sean visitadas.

Y también que no necesariamente cuando la berrera reflejante se aleja el número de visitas disminuye. Ya que mientras la barrera esta más cerca del cero nuetros juegos son más cortos. Es decir la barrera más cercana al cero en este caso 100, podemos terminar nuestros 1000 juegos más rápidamente, y como en nuestra barrera más lejana 200 nuestros juegos pueden ser más largos, continuaremos jugando, permitiendo así más posibilidades de visitar más veces a la barrera 200.

NOTA.- Nuevamente para obtener los valores reales tenemos que multiplicar los valores obtenidos en las tablas por 10^5.

Reflejante 100
Reflejante 0
La semilla es : 337908750
12 19 12 77
12 19 17 49

La probabilidad de permanecer en una barrera reflejante es cero
Número de visitas a la relejante 100 es: 868
Número de visitas a la reflejante cero es: 1000

La probabilidad de que pierda es: 0.50

N	Promedio	Lanzam.	V
1	2.0000000000E-05	2	0
2	2.0000000000E-05	2	0
3	2.0000000000E-05	2	0
4	1.1750000000E-03	464	0
5	9.4400000000E-04	2	0
6	8.1000000000E-04	14	0
7	6.9714285714E-04	2	0
8	6.3250000000E-04	18	0
9	5.6444444444E-04	2	0
10	5.1000000000E-04	2	0
20	1.4820000000E-03	8	0
30	1.0293333333E-03	2	0
40	1.9385000000E-03	2	0
50	7.1408000000E-03	4	0
60	6.5063333333E-03	2	0
70	5.5837142857E-03	24	0
80	4.8902500000E-03	2	0
90	4.3642222222E-03	2	0
100	3.9442000000E-03	6	0
200	3.3610500001E-03	4	0
300	2.5713333335E-03	2	0
400	2.0898000002E-03	4	0
500	1.8981400002E-03	86	0
600	1.7476666668E-03	18	0
700	1.8762428573E-03	2	0
800	1.7134625001E-03	18	0
900	1.5837888889E-03	2	0
1000	1.6826600000E-03	2	0

Reflejante 200
Reflejante 0
La semilla es ; 337908730
12 21 50 2
12 21 58 15

La probabilidad de permanecer en una barrera reflejante es cero
Número de visitas a la relejante 200 es: 498
Numero de visitas a la reflejante cero es: 1000

La probabilidad de que pierda es: 0.50

N	Promedio	Lanzam.	V
1	2.0000000000E-05	2	0
2	2.0000000000E-05	2	0
3	2.0000000000E-05	2	0
4	1.1750000000E-03	464	0
5	9.4400000000E-04	2	0
6	8.1000000000E-04	14	0
7	6.9714285714E-04	2	0
8	6.3250000000E-04	18	0
9	5.6444444444E-04	2	0
10	5.1000000000E-04	2	0
20	1.4820000000E-03	8	0
30	1.0293333333E-03	2	0
40	1.6961250000E-02	598	0
50	1.3580600000E-02	2	0
60	1.1350500000E-02	176	0
70	9.7535714287E-03	2	0
80	8.5538750002E-03	16	0
90	8.4947777779E-03	2	0
100	7.6913000002E-03	10	0
200	4.1639500002E-03	2	0
300	4.5487333335E-03	6	0
400	3.5508000001E-03	4	0
500	4.4269200000E-03	2	0
600	4.0432333333E-03	2	0
700	3.8118285713E-03	2	0
800	3.5481749999E-03	2	0
900	3.2144444443E-03	2	0
1000	2.9356399998E-03	2	0

Reflejante 300
Reflejante 0
La semilla es : 337908750
12 23 24 71
12 23 34 5

La probabilidad de permanecer en una barrera reflejante es cero
Número de visitas a la relejante 300 es: 298
Número de visitas a la reflejante cero es: 1000

La probabilidad de que pierda es: 0.50

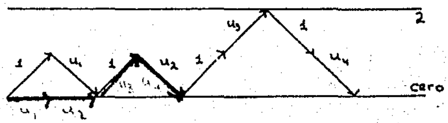
N	Promedio	Lanzam.	V
1	2.0000000000E-05	2	0
2	2.0000000000E-05	2	0
3	2.0000000000E-05	2	0
4	1.1750000000E-03	464	0
5	9.4400000000E-04	2	0
6	8.1000000000E-04	14	0
7	6.9714285714E-04	2	0
8	6.3250000000E-04	18	0
9	5.6444444444E-04	2	0
10	5.1000000000E-04	2	0
20	1.4820000000E-03	8	0
30	1.0293333333E-03	2	0
40	1.9100500000E-02	7884	0
50	1.5370800000E-02	8	0
60	1.2818333333E-02	2	0
70	1.0999142857E-02	46	0
80	9.6420000001E-03	2	0
90	8.5788888891E-03	2	0
100	7.7346000002E-03	4	0
200	4.1935000002E-03	2	0
300	4.7310333334E-03	4	0
400	6.0598250000E-03	2	0
500	5.3325399999E-03	2	0
600	4.7275499999E-03	2	0
700	4.1299857141E-03	2	0
800	3.6670374998E-03	2	0
900	3.6047444442E-03	581	0
1000	3.3669099998E-03	2	0

Observemos que estos dos casos de caminatas aleatorias no tienen relación alguna entre el número de visitas a las barreras reflejantes, aunque se han generado con la misma semilla, esto es cada vez que se tira se tienen los mismos números aleatorios.

De acuerdo con la semilla estudiada obtuvimos:

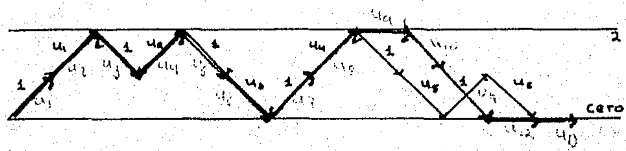
Barreras Reflejantes	Caso 1	Caso 2
100	868	734
200	498	940
300	298	566

Veamos que sucede para el caso de 3 juegos, colocando nuestra barrera reflejante en 2 y la barrera reflejante en cero. La caminata que de color rojo representa el caso 1 y la negra el caso 2.

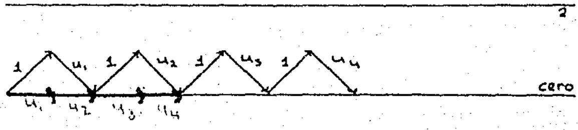


Las visitas hechas a la barrera reflejante 2 fueron mayores por la caminata negra que por la caminata roja.

Observemos el siguiente caso en donde sucede lo contrario, la caminata roja tiene más visitas a la reflejante 2 que la negra.



o bien el número de visitas puede ser igual,



En el siguiente ejemplo encontraremos la distribucuión límite de dos maneras diferentes, en la primera usaremos el concepto de esperanza condicional por medio de la función generadora de momentos. La segunda la haremos por el método tradicional.

3.4 Ejemplo.- Modelo de Ehrenfest:

Consideremos dos celdas A y B que contienen en conjunto α moléculas de gas. A cada instante se elige al azar una molécula de las α como sigue:
si la molécula elegida está en la celda A se cambia a la celda B y si esta en la celda B se cambia a la celda A.

Donde estudiaremos la variable aleatoria X_n como el número de moléculas en la celda A al tiempo n, y nuestro espacio de estados el conjunto:

$$S = \{0, 1, 2, ..., \alpha\}.$$

Observemos que la probabilidad de que la molécula sea escogida de la celda A en el instante $n+1$ es $\frac{i}{\alpha}$ donde i es el número de moléculas en la celda A en el instante n, y la probabilidad de que sea escogida la celda B si en A hay i moléculas es $\frac{\alpha-i}{\alpha}$ obteniendo así las probabilidades de transición como:

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = \begin{cases} \frac{i}{\alpha} & \text{si } j = i-1 \\ \frac{\alpha-i}{\alpha} & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

con la matriz de transición:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n & n+1 & \cdots & \alpha-1 & \alpha \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \\ \vdots \\ \alpha \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & \frac{\alpha-1}{\alpha} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\alpha} & 0 & \frac{\alpha-2}{\alpha} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{n}{\alpha} & 0 & \frac{\alpha-n}{\alpha} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Otra de las muchas interpretaciones que se le da al modelo de Ehrenfest, es el intercambio de temperatura de dos cuerpos, en donde la temperatura representa el número de bolas en la urna y el intercambio de calor no es un proceso ordenado.

Por otra parte para encontrar la distribucuón de equilibrio usaremos la función generadora de probabilidades *. Supongamos que en el estado cero hay i bolas en la

* Kai Lai Chung, Teoría Elemental de la Probabilidad y de los Procesos Estocásticos, Reverté, 1983, pp207

celda A, esto es:

$$P(X_0 = i) = 1$$

Observemos que:

$$E(u^{X_{n+1}}|X_0 = i) = \sum_{j=0}^{\alpha} u^j P(u^{X_{n+1}} = u^j|X_0 = i)$$

$$= \sum_{j=0}^{\alpha} u^j \frac{P(u^{X_{n+1}} = u^j, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} = E(u^{X_{n+1}})$$

esta última es la función generadora de probabilidades de X_{n+1}, denotemos por

$$F_{n+1} = E(u^{X_{n+1}}|X_0 = i).$$

En donde la variable aleatoria

$$E(u^{X_{n+1}}|X_0)$$

toma el valor

$$\sum_{k=0}^{\alpha} u^k P(X_{n+1} = k|X_0 = m)$$

sobre el conjunto

$$\{\omega \in \Omega; X_0(\omega) = m\}$$

y como hemos partido del hecho de que en el estado inicial la celda A tiene i moléculas esta variable aleatoria tiene sentido sólo si $m = i$ ya que

$$P(X_0 = m) = 0 \quad \text{para toda } m \neq i$$

es decir

$$E(u^{X_{n+1}}|X_0)$$

toma el valor

$$\sum_{k=0}^{\alpha} u^k P(X_{n+1} = k|X_0 = i) = E(u^{X_{n+1}}|X_0)$$

con probabilidad uno.

Luego por otro lado tenemos por la proposición **1.2.13** que:

$$E(u^{X_{n+1}}|X_0) = E(E(u^{X_{n+1}}|\sigma(X_n, ..., X_0))|X_0)$$

en donde la variable alearoria

$$E(u^{X_{n+1}}|\sigma(X_n, ..., X_0))$$

Toma el valor
$$\sum_{j=0}^{\alpha} u^j P(u^{X_{n+1}} = u^j | X_n = i_n, ..., X_0 = i)$$
sobre el conjunto
$$\{\omega \in \Omega; X_n(\omega) = i_n, ..., X_0(\omega) = i\}$$
debido a la propiedad de Markov
$$\sum_{j=0}^{\alpha} u^j P(u^{X_{n+1}} = u^j | X_n = i_n, ..., X_0 = i) = \sum_{j=0}^{\alpha} u^j P(u^{X_{n+1}} = u^j | X_n = i_n)$$
sobre el conjunto
$$\{\omega \in \Omega; X_n = i_n\}$$
es decir que:
$$E(u^{X_{n+1}} | \sigma(X_n, ..., X_0)) = E(u^{X_{n+1}} | X_n)$$
así resumiendo hemos obtenido:
$$E(u^{X_{n+1}} | X_0) = E(Eu^{X_{n+1}} | \sigma(X_n, ..., X_0)) | X_0) = E(E(u^{X_{n+1}} | X_n) | X_0)$$
Ahora bien denotemos
$$h(k) = E(u^{X_{n+1}} | X_n = k)$$
donde si $k = 0$ quiere decir que la celda A esta vacía en el instante n por lo que:
$$P(X_n = j | X_n = 0) = 0 \quad \text{para toda } j \neq 1$$
teniendo así que
$$E(u^{X_{n+1}} | X_n = 0) = uP(X_{n+1} = 1 | X_n = 0) = u$$
si $k = \alpha$ tenemos análogamente que
$$P(X_{n+1} = j | X_n = \alpha) = 0 \quad \text{para toda } j \neq \alpha - 1$$
con lo que
$$E(u^{X_{n+1}} | X_n = \alpha) = u^{\alpha-1} P(X_{n+1} = \alpha - 1 | X_n = \alpha) = u^{\alpha-1}$$
si $0 < k < \alpha$ tenemos que
$$P(X_{n+1} = j | X_n = k) = 0 \quad \text{para toda } j \neq k+1, k-1$$
entonces
$$E(u^{X_{n+1}} | X_n = k) = u^{k+1} P(X_{n+1} = k+1 | X_n = k) + u^{k-1} P(X_{n+1} = k-1 | X_n = k)$$

$$= u^{k+1}\left(\frac{\alpha - k}{\alpha}\right) + u^{k-1}\left(\frac{k}{\alpha}\right)$$

esto es:

$$h(k) = \begin{cases} u & k = 0 \\ \frac{k}{\alpha}u^{k-1} + \frac{\alpha-k}{\alpha}u^{k+1} & k = 1, 2, ..., \alpha - 1 \\ u^{\alpha-1} & k = \alpha \end{cases}$$

obteniendo una expresión general para h

$$h(k) = \frac{(1 - u^2)}{\alpha} k u^{k-1} + u^{k+1} \quad k = 0, 1, ..., \alpha$$

Con lo cual podemos ver que la variable aleatoria

$$E(u^{X_{n+1}} | X_n)$$

toma el valor

$$\frac{(1 - u^2)}{\alpha} k u^{k-1} + u^{k+1} \quad k = 0, 1, ..., \alpha$$

sobre el conjunto

$$\{\omega \in \Omega; X_n(\omega) = k\}$$

usando el teorema **1.6.7**

$$(h \circ X_n)(\omega) = E(u^{X_{n+1}} | X_n)$$

tenemos que

$$X_n(\omega) = \sum_{k=0}^{\alpha} k 1_{A_k}$$

donde

$$A_k = \{\omega \in \Omega; X_n(\omega) = k\}$$

generando las A_k's una partición de Ω esto es si $\omega \in \Omega$ entonces existe k tal que $X_n(\omega) = k$ es decir

$$h(X_n(\omega) = h(k) \quad \text{si } \omega \in A_k$$
$$= \sum_{k=1}^{\alpha} h(k) 1_{A_k}$$

teniendo entonces

$$(h \circ X_n)(\omega) = h\left(\sum_{k=0}^{\alpha} k 1_{A_k}\right) = \sum_{k=0}^{\alpha} h(k) 1_{A_k}$$

$$\sum_{k=0}^{\alpha} \left[\frac{(1 - u^2}{\alpha} k u^{k-1} + u^{k+1}\right] 1_{A_k}$$

$$= \frac{(1 - u^2)}{\alpha} X_n u^{X_n - 1} + u^{X_n + 1}$$

hemos obtenido

$$E(u^{X_{n+1}}|X_n) = \frac{(1-u^2)}{\alpha} X_n u^{X_n - 1} + u^{X_n + 1}$$

regresando a nuestro problema original y usando la proposición **1.2.15**

$$E(Eu^{X_{n+1}}|X_n)|X_0 = i) = \frac{(1-u^2)}{\alpha} E(X_n u^{X_n-1}|X_0 = i) + uE(u^{X_n}|X_0 = i)$$

$$= \frac{(1-u^2)}{\alpha} E\Big(\frac{d}{du}(u^{X_n})|X_0 = i\Big) + uE(u^{X_n}|X_0 = i)$$

esto es

$$F_{n+1}(u) = \frac{1}{\alpha}(1-u^2)F_n'(u) + uF_n(u)$$

$$\alpha F_{n+1}(u) = (1-u^2)F_n'(u) + \alpha u F_n(u)$$

Ahora haremos otra suposición,que

$$\lim_{n\to\infty} F_n(u)$$

existe y es una función generadora de probabilidades y vale $F_\infty(u)$, también supondremos que:

$$\lim_{n\to\infty} F_n'(u)$$

existe y vale $F_\infty'(u)$.

Usando la existencia de estos límites tenemos que cuando n tiende a infinito en:

$$\alpha F_{n+1}(u) = (1-u^2)F_n'(u) + \alpha u F_n(u)$$

obtenemos

$$\alpha F_\infty(u) = (1-u^2)F_\infty'(u) + \alpha u F_\infty(u)$$

$$\alpha(1-u)F_\infty(u) = (1-u^2)F_\infty'(u)$$

$$F_\infty(u) = \frac{(1+u)}{\alpha} F_\infty'(u)$$

Ahora resolviendo esta ecuación diferencial

$$\frac{\alpha}{1+u} = \frac{F_\infty'(u)}{F_\infty(u)}$$

obtenemos

$$F_\infty(u) = c(1+u)^\alpha$$

Para $u = 1$ tenemos que $F_\infty(u) = 1$, con esto podemos calcular el valor de $c = \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha$ y

$$F_\infty(u) = \frac{1}{2^\alpha}(1+u)^\alpha = \frac{1}{2^\alpha}\sum_{k=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{k}u^k$$

en donde tomando

$$p_k^{\infty} = \binom{\alpha}{k}\frac{1}{2^{\alpha}}$$

esta es una distribución binomial con parámetros $(\alpha, 1/2)$.

$$F_{\infty} = \sum_{k=0}^{\alpha} p_k^{\infty} u^k$$

teniendo así que la distribución de equilibrio es:

$$\binom{\alpha}{0}\frac{1}{2^{\alpha}}, \binom{\alpha}{1}\frac{1}{2^{\alpha}}, \ldots, \binom{\alpha}{n}\frac{1}{2^{\alpha}}, \ldots, \binom{\alpha}{\alpha}\frac{1}{2^{\alpha}}.$$

Ahora bien como la cadena es irreducible y finita por la proposición **2.38** la cadena es recurrente y sabemos que el período es 2 por lo que cumple las hipótesis del corolario **2.34** por lo que podemos encontrar las distribuciones límite.

De acuerdo con la matríz de transición tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
&\pi_0 = \tfrac{1}{\alpha}\pi_1 \\
&\pi_1 = \pi_0 + \tfrac{2}{\alpha}\pi_2 \\
&\pi_2 = \tfrac{\alpha-1}{\alpha}\pi_1 + \tfrac{3}{\alpha}\pi_3 \\
&\pi_3 = \tfrac{\alpha-2}{\alpha}\pi_2 + \tfrac{4}{\alpha}\pi_4 \\
&\vdots \\
&\pi_k = \tfrac{\alpha-(k-1)}{\alpha}\pi_{k-1} + \tfrac{k+1}{\alpha}\pi_{k+1} \\
&\vdots \\
&\pi_\alpha = \tfrac{1}{\alpha}\pi_{\alpha-1}
\end{aligned}$$

Esto es:

$$\begin{aligned}
&\pi_0 = \tfrac{1}{\alpha}\pi_1 \\
&\pi_k = \tfrac{\alpha-(k-1)}{\alpha}\pi_{k-1} + \tfrac{k+1}{\alpha}\pi_{k+1} \qquad k = 1, \ldots, \alpha - 1 \\
&\pi_\alpha = \tfrac{1}{\alpha}\pi_{\alpha-1}
\end{aligned}$$

Ahora bien escribiendo estas ecuaciones en términos de π_0 tenemos:

$$\pi_1 = \alpha\pi_0$$

$$\pi_2 = \frac{\alpha}{2}(\pi_1 - \pi_0) = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\pi_0$$

$$\pi_3 = \frac{\alpha}{3}\left(\pi_2 - \frac{\alpha-1}{\alpha}\pi_1\right) = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2\cdot 3}\pi_0$$

$$\pi_4 = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{2\cdot 3\cdot 4}\pi_0$$

en general tenemos :

$$\pi_k = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(k-1))}{k!}\pi_0$$

como $\sum_{j=0}^{\alpha}\pi_j = 1$ tenemos

$$\pi_0 + \pi_0\sum_{k=1}^{\alpha}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(k-1))}{k!} = 1$$

$$\pi_0 = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{\alpha}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(k-1))}{k!}}$$

observemos que

$$2^{\alpha} = (1+1)^{\alpha} = 1 + \sum_{k=1}^{\alpha}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(k-1))}{k!}$$

Luego entonces

$$\pi_0 = \frac{1}{2^{\alpha}}$$

y sustituyendo tenemos que

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \alpha\tfrac{1}{2^{\alpha}}\\
\pi_2 &= \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}\tfrac{1}{2^{\alpha}}\\
&\vdots\\
\pi_k &= \tfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(k-1))}{k!}\tfrac{1}{2^{\alpha}}
\end{aligned}$$

en donde entonces podemos expresar a las π_i de la siguiente manera

$$\pi_0 = \binom{\alpha}{0}\frac{1}{2^{\alpha}}, \pi_1 = \binom{\alpha}{1}\frac{1}{2^{\alpha}}, \ldots$$

en general tenemos

$$\pi_k = \binom{\alpha}{k}\frac{1}{2^{\alpha}} \quad \text{para} \quad k = 0, \ldots, \alpha$$

Las cuales coinciden con las π_k's encontradas por el método anterior.

Retomando la función generadore de probabilidades obtenida

$$F_{n+1}(u) = \frac{1}{\alpha}(1-u^2)F_n'(u) + uF_n(u)$$

para a partir de esta calcular la esperanza y varianza de X_n, ya que sabemos que

$$F'_{n+1}(1) = E(X_{n+1})$$
$$F''_{n+1}(1) = E(X^2_{n+1} - E(X_{n+1}$$

Denotaremos $E(X_n) = \mu_n$ y $\text{Var}(X_n) = \sigma_n^2$. Calculemos la primera derivada de la función generadora de probabilidades

$$F'_{n+1}(u) = \frac{1}{\alpha}(1-u^2)F''_n - \frac{2}{\alpha}uF'_n(u) + uF'_n + F_n(u)$$

entonces

$$\mu_{n+1} = 1 + \left(1 - \frac{2}{\alpha}\right)\mu_n$$

sustituyendo μ_n

$$\mu_{n+1} = 1 + \left(1 - \frac{2}{\alpha}\right)\left(1 + \left(1 - \frac{2}{\alpha}\right)\mu_{n-1}\right)$$
$$= 1 + \left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) + \left(1 - \frac{2}{\alpha}\right)^2 \mu_{n-1}$$

En general tenemos

$$\mu_{n+1} = \sum_{j=0}^{n}\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right)^j + \left(1 - \frac{2}{\alpha}\right)^{n+1}\mu_0$$

$$= \frac{1 - \left(1 - \frac{2}{\alpha}\right)^{n+1}}{\frac{2}{\alpha}} + \left(1 - \frac{2}{\alpha}\right)^{n+1}\mu_0$$

$$= \frac{\alpha}{2}\left[1 - \left(1 - \frac{2}{\alpha}\right)^{n+1} + \frac{2}{\alpha}\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right)^{n+1}\mu_0\right]$$

Hemos obtenido

$$\mu_{n+1} = \frac{\alpha}{2}\left[1 - \left(1 - \frac{2}{\alpha}\right)^{n+1} + \frac{2}{\alpha}\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right)^{n+1}\mu_0\right]$$

y si $n \to \infty$ tenemos

$$\mu_n \to \frac{\alpha}{2}$$

3.3.1

es decir a medida que n crece, el número esperado de bolas es igual en las 2 urnas.(O bien en términos de la temperatura de dos cuerpos , lo que dice es que a medida que n crece, los cuerpos tienden a tener la misma temperatura.)

Calculemos ahora la segunda derivada de la función generadora de probabilidades

$$F''_{n+1}(u) = \frac{1}{\alpha}(1-u^2)F''_n(u) - \frac{4u}{\alpha}F''_n(u)$$

$$-\frac{2}{\alpha}F_n'(u)+uF_n''(u)+2F_n'(u)$$

Si hacemos $E(X_{n+1}^2)=\tau_{n+1}$. Como

$$F_{n+a}''(1)=E(X_{n+1}^2)-E(X_{n+1})$$

tenemos

$$F_{n+1}''(1)=\tau_{n+1}-\mu_{n+1}$$

sustituimos en la expresión obtenida anteriormente

$$\tau_{n+1}-\mu_{n+1}=-\frac{4}{\alpha}(\tau_n-\mu_n)-\frac{2}{\alpha}\mu_n+(\tau_n-\mu_n)+2\mu_n$$

$$\tau_{n+1}-\mu_{n+1}=\tau_n\left(1-\frac{4}{\alpha}\right)+\mu_n\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)$$

Ahora bien para obtener la varianza tenemos

$$\sigma_{n+1}^2=\tau_{n+1}-\mu_{n+1}^2=\mu_{n+1}-\mu_{n+1}^2+\tau_n\left(1-\frac{4}{\alpha}\right)+\mu_n\left(\frac{2}{\alpha}+1\right)$$

sustituimos μ_{n+1}

$$\sigma_{n+1}^2=\left[1+\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)\mu_n\right]-\left[1+\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)\mu_n\right]^2+\tau_n\left(1-\frac{4}{\alpha}\right)+\mu_n\left(\frac{2}{\alpha}+1\right)$$

$$\left[1+\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)\mu_n\right]-\left[1+\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)^2\mu_n^2+2\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)\mu_n\right]+\tau_n\left(1-\frac{4}{\alpha}\right)1+\mu_n\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)$$

$$=1+\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)\mu_n+\left(1-\frac{4}{\alpha}\right)(\tau_n-\mu_n^2)-1-\frac{4}{\alpha^2}\mu_n^2-2\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)\mu_n+\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)\mu_n$$

$$\left(1-\frac{4}{\alpha}\right)\sigma_n^2-\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)\mu_n+\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)\mu_n-\frac{4}{\alpha^2}\mu_n^2$$

$$\left(1-\frac{4}{\alpha}\right)\sigma_n^2+\frac{4}{\alpha}\left(1-\frac{\mu_n}{\alpha}\right)\mu_n$$

Finalmente

$$\sigma_{n+1}^2=\left(1-\frac{4}{\alpha}\right)\sigma_n^2+\frac{4}{\alpha}\left(1-\frac{\mu_n}{\alpha}\right)\mu_n$$

en donde si tomamos el límite cuando $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{n+1}^2=\left(1-\frac{4}{\alpha}\right)\lim_{n\to\infty}\sigma_n^2+\frac{4}{\alpha}\left(1-\frac{1}{2}\right)\frac{\alpha}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{n+1}^2=\left(1-\frac{4}{\alpha}\right)\lim_{n\to\infty}\sigma_n^2+1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sigma^2_{n+1} = \frac{1}{1-\left(1-\frac{4}{\alpha}\right)} = \frac{\alpha}{4}$$

Simulemos ahora este modelo de la siguiente manera:

a. Se da el número total de bolas, y el número inicial de bolas en la urna A, seleccionando aleatoriamente las bolas que estarán en esta urna, anotando que bolas quedaran en A.

b. Generamos un número aleatorio u con distribucuón uniforme en $\{1, 2, ..., \alpha\}$, que identificará a la bola que se va a selecionar. De tal manera que si en el instante n tenemos k bolas ,esto es $X_{n+1} = k - 1$, si la bola selecionada esta en la urna A al instante n, si la bola seleccionada no esta en la urna tendremos que será agregada a al urna, $X_{n+1} = k + 1$

c. Generamos m de estas cadenas de longitud n

$$\begin{aligned} Z_1 &= X_{11}, X_{12}, ..., X_{1n} \\ Z_2 &= X_{21}, X_{22}, ..., X_{2n} \\ &\vdots \\ Z_m &= X_{m1}, X_{m2}, ..., X_{mn} \end{aligned}$$

para poder estimar a μ_k y σ_k^2 mediante

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_{ik} \quad \text{y} \quad \hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(X_{ik} - \mu_i)^2$$

para toda $k = 1, 2, ..., n$

d. Repetiremos r veces el inciso b) para encontrar r estimadores de μ_k y σ_k^2 (veremos ver que tan buenos estímadores son $\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n^2$ con respecto a $\mu_n \sigma_n^2$). El fin de hacer esto es que en Estadística Clásica el criterio para definir buenos estímadores es el error cuadrático medio * definido como $E(M(\hat{\theta})) = E(\theta - \hat{\theta}_n)^2$ donde θ es lo que se quiere estimar y $\hat{\theta}_n = \theta(X_1, ..., X_n)$ con lo que se estima y se dice que $\hat{\theta}_n$ es "bueno" si $E(M(\hat{\theta}_n))$ es mínimo. Esto es debido a que si $E(M(\hat{\theta}_n)) \to \infty$, entonces $\theta_n \xrightarrow{P} \theta$.

En lugar de calcular $E(M(\hat{\theta}_n))$, basandonos en la ley de los grandes números podemos hacer la siguiente aproximaxión:

$$E(\theta - \hat{\theta}_n)^2 \sim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\hat{\theta}_{n_i} - \theta)^2$$

y así veremos que tan buenos estímadores son $\hat{\mu}_n$ y $\hat{\sigma}_n^2$

* Kendall.MG. & Shuart, A. The Advanced Theory of Statistics Vol. 2, London:Griffin,1973)

e. Tomaremos las últimas variables aleatorias generadas en cada cadena ya que nos interesa ver que tan rápido nos aproximamos a μ_∞ (obtenida en 3.3.1) para la cual calcularemos

$$E(\frac{\alpha}{2} - \mu_{200}^2)^2 \sim \frac{1}{n}\sum(\mu_k - \frac{\alpha}{4})^2$$

y

$$E(\frac{\alpha}{4} - \sigma_{200}^2)^2 \sim \frac{1}{n}\sum(\sigma_{200}^2 - \frac{\alpha}{4})^2$$

ya que si $E(\widehat{\theta}_n - \theta)^2 \to 0$ entonces $\widehat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$.

En las siguentes tablas mostramos los resultados obtenidos y observamos que $\mu_n \to \frac{\alpha}{2}$ rápidamente, y $\sigma_n^2 \to \frac{\alpha}{4}$ de manera un poco más lenta. No fue necesario hacer a parte el inciso e) ya que como μ_n y σ_n^2 tiende rápidamente a $\frac{\alpha}{2}$ y $\frac{\alpha}{4}$, y estos cálculos fueron hechos en el inciso d)

Por otro lado $\widehat{\mu}_n$ se empieza a parecer a μ_n aproximadamente para $n = 80$, mientras que el comportamiento de $\widehat{\sigma}_n^2$ tiene mucha variación.

Los valores que se muestran en la tabla del error cuadrático medio muestran que $\widehat{\mu}_n$ y $\widehat{\sigma}_n^2$ son buenos estímadores.

El tamaño de la cadena es: 300

El número de muestras de vectores aleatorios es: 80

El número de muestras de vectores promedios es: 20

El número total de bolas es: 60

	μ_k	σ_k^2
1	2.0000000000E+00	0.0000000000E+00
2	2.9966740741E+01	1.2888888889E-01
3	2.9998891358E+01	1.1202950672E+00
4	2.9999963045E+01	2.0456087280E+00
5	2.9999998768E+01	2.9092348128E+00
6	2.9999999959E+01	3.7152858253E+00
7	2.9999999999E+01	4.4676001036E+00
8	3.0000000000E+01	5.1697600967E+00
9	3.0000000000E+01	5.8251094236E+00
10	3.0000000000E+01	6.4367687953E+00
20	3.0000000000E+01	1.0704581965E+01
30	3.0000000000E+01	1.2845367519E+01
40	3.0000000000E+01	1.3919210869E+01
50	3.0000000000E+01	1.4457863391E+01
60	3.0000000000E+01	1.4728057866E+01
70	3.0000000000E+01	1.4863590610E+01
80	3.0000000000E+01	1.4931575437E+01
90	3.0000000000E+01	1.4965677430E+01
100	3.0000000000E+01	1.4982783393E+01
200	3.0000000000E+01	1.4999982637E+01
300	3.0000000000E+01	1.4999999982E+01

	$\hat{\mu}_k$	$\hat{\sigma}^2_k$
1	2.0000000000E+00	0.0000000000E+00
2	3.0000000000E+00	0.0000000000E+00
3	3.7500000000E+00	4.3750000000E-01
4	4.5750000000E+00	6.6937500003E-01
5	5.4000000000E+00	1.0400000001E+00
6	6.2750000000E+00	1.2243750001E+00
7	7.1000000000E+00	1.7900000000E+00
8	7.7250000000E+00	2.2243750000E+00
9	8.3250000000E+00	3.0443750001E+00
10	9.3250000000E+00	3.0443750001E+00
20	1.4700000000E+01	7.5100000000E+00
30	1.9175000000E+01	1.0019375001E+01
40	2.2225000000E+01	1.1849375001E+01
50	2.5050000000E+01	1.1397500001E+01
60	2.6500000000E+01	1.7649999999E+01
70	2.8175000000E+01	1.5669375001E+01
80	2.8700000000E+01	1.4710000001E+01
90	2.8875000000E+01	1.1434374999E+01
100	2.9650000000E+01	1.3077500000E+01
200	2.9500000000E+01	1.6649999999E+01
300	3.0200000000E+01	1.8560000001E+01

	$\hat{\mu}_k$	$\hat{\sigma}^2_k$
1	2.0000000000E+00	0.0000000000E+00
2	2.8750000000E+00	2.3437500000E-01
3	3.8750000000E+00	2.3437500000E-01
4	4.8750000000E+00	2.3437500000E-01
5	5.6500000000E+00	6.7750000005E-01
6	6.4750000000E+00	8.7437500001E-01
7	7.3750000000E+00	1.0593750000E+00
8	8.1500000000E+00	1.2775000001E+00
9	8.9750000000E+00	1.4993750001E+00
10	9.7500000000E+00	2.1375000000E+00
20	1.6025000000E+01	5.7993749999E+00
30	1.9900000000E+01	1.2390000001E+01
40	2.2900000000E+01	1.3190000000E+01
50	2.4700000000E+01	1.2810000001E+01
60	2.6400000000E+01	1.2340000001E+01
70	2.7675000000E+01	1.1394375001E+01
80	2.8400000000E+01	1.1840000000E+01
90	2.9425000000E+01	1.2869375001E+01
100	2.9850000000E+01	1.6477500002E+01
200	2.9650000000E+01	1.6777500000E+01
300	2.9950000000E+01	1.2997500001E+01

	Error Cuadratico Medio de Mu.	Error Cuadratico Medio de de Sigma.
1	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00
2	7.3146333659E+02	1.6303107399E-02
3	6.8705319317E+02	5.8855258205E-01
4	6.4024344240E+02	2.4112028663E+00
5	5.9782243976E+02	4.4832957901E+00
6	5.6024415430E+02	6.9353266401E+00
7	5.2334643743E+02	9.5931338181E+00
8	4.9223828125E+02	1.1517782413E+01
9	4.5734475000E+02	1.4052758990E+01
10	4.2763756250E+02	1.6870237945E+01
20	2.2517481250E+02	2.5475632018E+01
30	1.1408943750E+02	1.2956918618E+01
40	6.1118937500E+01	1.1592094484E+01
50	3.0995593750E+01	5.8678490481E+00
60	1.4400031250E+01	6.2404571132E+00
70	6.8670312500E+00	5.8144568262E+00
80	3.9016562500E+00	5.0520989795E+00
90	1.9622500000E+00	4.8832099805E+00
100	1.3547187500E+00	4.5463454386E+00
200	2.5543750000E-01	4.0001163625E+00
300	1.0284375000E-01	3.8938976914E+00

Apendice

APENDICE

I Prposición.- Sea $\{B_n; n \geq 1\}$ una partición de Ω y sea U la σ-álgebra generada por esta partición. Si $C \in U$ entonces $C = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{i_j}$ donde $B_{i_j} \in \{B_n; n \geq 1\}$

Demostración.- Si $C \in U$ entonces C es de alguna de las siguientes formas:

a. $C = B_i^c$ para alguna i debido a que las B_n forman una partición tenemos que $C = \cup_k B_k$ con $k \neq i$.

b. $C = \cup \cap B_i$ y como las B_i forman una partición tenemos que $\cap_i B_i = \emptyset$ por lo tanto $C = \emptyset$.

c. $C = \cap \cup B_i$ análogamente al ser las B_i una partición de Ω tenemos que $C = \cup_j B_{i_j}$ donde $B_{i_j} \in \{B_n; n \geq 1\}$ para toda j.

∎

II Teorema.- Sean $f, g : (\Omega, \Im, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$ funciones integrables y

$$\int_A f dP = \int_A g dP$$

para toda $A \in \Im$ entonces

$$f = g \quad \text{c.s.}$$

Demostración.-

Como

$$\int_A f dP = \int_A g dP$$

para toda $A \in \Im$ entonces

$$\int_A f dP - \int_A g dP = 0$$

$$\int_A (f - g) dP = 0$$

tomemos para todo $n \in N$

$$A_n = \{x, f(x) - g(x) > 1/n\}$$

y sea

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{\omega \in \Omega | f(x) > g(x)\}$$

tenemos

$$P(A_n) \leq n \int_A (g(x) - f(x))dP = 0$$

por lo tanto

$$P(A_n) = 0 \text{ para toda } n$$

$$P(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = 0$$

tomamos análogamente para toda $m \in N$

$$C_m = \{x; g(x) - f(x) > 1/m\}$$

y sea

$$D = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = \{\omega \in \Omega | g(x) > f(x)\}$$

$$P(C_m) \leq m \int_A (g(x) - f(x))dP = 0$$

por lo tanto

$$P(C_m) = 0 \text{ para toda } m$$

$$P(D) \leq \sum_{m=1}^{\infty} P(A_m) = 0$$

como difieren en un conjunto de medida cero

$$f = g \quad \text{c.s.}$$

∎

III Corolario.- Sean $f, g : (\Omega, \Im, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$ funciones integrables y

$$\int_A f dP \leq \int_A g dP$$

para toda $A \in \Im$ entonces

$$f \leq g \quad \text{c.s.}$$

Demostración.- Como para toda $A \in \Im$ tenemos

$$\int_A f dP \leq \int_A g dP$$

entonces

$$\int_A f dP - \int_A g dP \leq 0$$

$$\int_A (f - g) dP \leq 0$$

para toda $A \in \Im$. Tomemos el siguiente conjunto con $n \in N$

$$A_n = \{x, f(x) - g(x) > 1/n\}$$

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{\omega \in \Omega | f(x) > g(x)\}$$

para el cual

$$P(A_n) \leq n \int_A (f(x) - g(x)) dP \leq 0 \quad \text{para toda} \quad n$$

Obtenemos

$$P(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = 0$$

por lo tanto

$$f(x) - g(x) \leq 0$$

$$f(x) \leq g(x) \qquad P - \text{c.s.}$$

∎

IV Lema.- Sea A un conjunto de enteros positivos con máximo común divisor d, entonces existe un subconjunto finito de A con máximo común divisor d.

Demostración.- Tomamos $n_1 \in A$ entonces

$$n_1 = r_1 d.$$

Si $r_1 = 1$ entonces $\{n_1\}$ es el subconjunto buscado. Si $r_1 \neq 1$ entonces tomamos $n_2 \in A$ de tal forma que $n_1 | n_2$. Tenemos que

$$n_2 = r_1' d$$

entonces

$$\text{mcd}(n_1, n_2) = \text{mcd}(r_1 d, r_1' d) = r_2 d$$

para algún $r_2 \in Z^+$ tal que $r_2 \leq r_1$.

Si $r_2 = r_1$ entonces $n_1 | n_2$ lo cual contradice la forma en que se escogió n_2, por lo tanto $r_2 < r_1$.

Observemos que si n_2 no existiera entonces $n_1 = d$ y esto se reduce al caso r_1.

Nuevamente si $r_2 = 1$ el conjunto buscado es $\{n_1, n_2\}$. Si $r_2 \neq 1$ buscamos $n_3 \in A$ tal que $r_2 d | n_3$. Bajo los mismos hechos de que existe n_2 tenemos que n_3 existe, y

$$n_3 = r_2' d$$

entonces

$$\text{mcd}(n_1, n_2, n_3) = \text{mcd}(r_2 d, r_2' d) = r_3 d.$$

Análogamente se tiene que $r_3 < r_2$ y si $r_3 = 1$, $\{n_1, n_2, n_3\}$ es el conjunto buscado. Si $r_3 \neq 1$ repetimos el proceso, obteniendo así una sucesión de enteros positivos decreciente

$$r_1 > r_2 > r_3 > \ldots$$

la cual termina en un número finito de pasos, los cuales producen el conjunto buscado.

∎

V Teorema de Abel

a. Si $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge entonces

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = a$$

b. Si $a_k \geq 0$ y

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a \leq \infty$$

entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} a_k = a$$

Demostracion.-

a. Tenemos que

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x^k - 1)\right|$$

Como $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge podemos encontrar que para toda $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon)$ tal que para toda $N' \geq N$

$$\left|\sum_{N'}^{\infty} a_k\right| < \frac{\epsilon}{4} \qquad \mathrm{I}'$$

separando de la siguiente forma tenemos:

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x^k - 1)\right| = \left|\sum_{k=0}^{N} a_k (x^k - 1) + \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k (x^k - 1)\right|$$

$$\leq \left|\sum_{k=0}^{N} a_k (x^k - 1)\right| + \left|\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k (x^k - 1)\right|$$

si tomamos

$$M = \max_{0\le k\le N} |a_k| < \infty$$

y con $0 \le x \le 1$ tenemos

$$|\sum_{k=0}^{N} a_k(x^k - 1)| \le MN(x^N - 1)$$

por lo que teniendo x lo suficientemente cercana a uno, tenemos:

$$|\sum_{k=0}^{N} a_k(x^k - 1)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Por otro lado si tomamos

$$A_k = \sum_{s=k}^{\infty} a_s$$

tenemos

$$|\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k(x^k - 1)| = |\sum_{k=N+1}^{\infty} (A_k - A_{k+1})(x^k - 1)|$$

$$= |A_{N+1}(x^{N+1} - 1) + \sum_{k=N+2}^{\infty} A_k(x^k - 1) - A_k(x^{k-1} - 1)|$$

$$= |A_{N+1}(x^{N+1} - 1) + \sum_{k=N+2}^{\infty} A_k(x^k - x^{k-1})|$$

usando I′ tenemos que

$$|A_{N+1}(x^{N+1} - 1) + \sum_{k=N+2}^{\infty} A_k(x^k - x^{k-1})| \le \frac{\epsilon}{4}|(x^{N+1} - 1)| + \frac{\epsilon}{4}x^{N+1} \le \frac{\epsilon}{2}$$

obteniendo que

$$|\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x^k - 1)| < \epsilon$$

para x suficientemente cercana a uno.

Con lo que hemos demostrado que

$$|\lim_{x\to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k| = 0.$$

∎

b. Tenemos que para $0 < x < 1$ que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

por lo que si $a = \infty$ tenemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$$

ahora bien si $a < \infty$ tenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k < a \quad \text{con} \quad 0 < x < 1$$

de aqui que

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} a_k \leq a \quad \text{para toda} \quad n$$

como $f(n)$ es una función monótona creciente y acotada, tiene un límite finito llamemosle a' pero por el inciso a. tenemos que

$$a' = a.$$

∎

```
(*
 ┌──────────────────────────────────────────────────────────────────────┐
 │ Claudia C. Iturriaga Velazquez.                                      │
 │                     "PROGRAMA CAMINATA ALEATORIA"                    │
 │      El Programa genera caminatas aleatorias de la siguiente manera  │
 │      Tenemos dos jugadores A y B con ciertas fortunas y se reali-    │
 │ za el siguiente juego:                                               │
 │ Se lanza una moneda que esta balanceada con cierta probabilidad si   │
 │ obtenemos aguila el jugador A gana una unidad de la fortuna del ju-  │
 │ gador B si sale sol B gana una unidad de la fortuna de A terminan    │
 │ el juego cuando ambos jugadores vuelvan a obtener sus fortunas ini-  │
 │ ciales.                                                              │
 │      Nuestras caminatas seran generadas con respecto a los cambios   │
 │ de la fortuna del jugador A.                                         │
 └──────────────────────────────────────────────────────────────────────┘ *)


Program Regreso0;
  Uses Crt,Dos;
 TYPE
   info = Record                        (* Guarda los siguientes valores: *)
            promedio  : Real;           (* Timpo promedio de regreso al 0 *)
            veces,                      (* Veces que los lanzamintos reba-*)
                                        (* za 32,000 lanzamientos.        *)
            lanzamien : Integer;
          END;
 VAR
   proba,                               (* Probabilidad de la moneda.     *)
   tirada,                              (* Resultado del lanzamiento.     *)
   tlanza,                              (* Numero total de lanzamientos.  *)
   lanza2         : Real;               (* Numero de lanzamientos de cada *)
                                        (* juego multiplicado por 0.00001 *)
   n,                                   (* Numero de juego.               *)
   cambfort,                            (* Cambios de la fortuna del juga-*)
                                        (* dor A.                         *)
   lanza,                               (* Numero de lanzamientos del jue-*)
                                        (* go n.                          *)
   vez,                                 (* Indica si el numero de veces   *)
                                        (* que los lanzamientos pasan de  *)
                                        (* 32,000.                        *)
   vfort,                               (* Numero de veces que se revasa  *)
                                        (* la fortuna maxima.             *)
   maxfort,                             (* Fortuna maxima.                *)
   mod1,mod2,
   j              : Integer;
   guarda         : Array [1..1000] of info;
                                        (* Guarda la informacion de cada  *)
                                        (* juego.                         *)
   resp,resp1     : Char;
   archi          : Text;               (* Archivo donde se guardan los   *)
                                        (* resultados.                    *)
   semilla        : longint;            (* Almacena la semilla para la    *)
                                        (* funcion ramdon.                *)
   hora,minuto,
   segundo,sec    : Word;
```

```
(*
   ┌──────────────────────────────────────────────────────────────┐
   | Lanzamiento.- De acuerdo con la tirada obtenida la fortuna del ju-
   | gador se incrementa en uno o disminuve en uno este procedimiento
   | se repite hasta que la fortuna del jugador sea igual a la fortuna
   | inicial, es decir hasta que nuestra variable que indica el cambio
   | de la fortuna (cambfort) sea igual a cero.
   └──────────────────────────────────────────────────────────────┘ *)

Procedure Lanzamiento;
BEGIN
  REPEAT
    INC(lanza);
    IF lanza > 32000 THEN
      begin
        lanza:=0;
        INC(vez);
      end;
    INC(cambfort);
    tirada:=random;
    IF tirada <=proba THEN
      cambfort:=cambfort - 2;
    IF cambfort>maxfort then
      begin
        Inc(vfort);
        cambfort:=maxfort;
      end;
  UNTIL cambfort =0;
END; (* Lanzamiento *)

(*
   ┌──────────────────────────────────────────────────────────────┐
   | Menu.- Da un menu que permite elegir entre la funcion random de la
   | maquina v Rand nuestro generador de numeros aleatorios.
   └──────────────────────────────────────────────────────────────┘ *)
Procedure Menu;
BEGIN
  ClrScr;
  WriteLn('Dame el numero maximo de la fortuna: (maxomo 32,000)');
  ReadLn(maxfort);
  ClrScr;
  Repeat
    WriteLn('¿Quieres dar la semilla? (S/N)');
    respl:=ReadKev;
    respl:=UpCase(respl);
  Until respl in ['S','N'];
  If respl='N' then
    begin
      Randomize;
      WriteLn(archi,'La semilla es : ',RandSeed)
    end
  else
    begin
      ClrScr;
      WriteLn('Dame la semilla : ');
      ReadLn(semilla);
      WriteLn(archi,'La semilla es : ',semilla);
      WriteLn(archi);
      RandSeed:=semilla;
    end;

END; (* Menu *)
```

```
BEGIN    (* Programa Principal *)
  Assign(archi,'guarda.pas');
  ReWrite(archi);
  Menu;
  ClrScr;
  WriteLn('¿Cual es la probabilidad?');
  ReadLn(proba);
  tlanza:=0;
  WriteLn(archi,'Hora en la que inicia');
  GetTime(hora,minuto,segundo,sec);
  WriteLn(archi,hora,' ',minuto,' ',segundo,' ',sec);
  FOR n:=1 to 1000 DO
    begin
      lanza:=0;
      cambfort:=0;
      vez:=0;
      vfort:=0;
      lanzamiento;
      lanza2:=lanza*0.00001;
      If vez >0 then
        For j:=1 to vez do
          lanza2:=lanza2 + 0.32000;
      tlanza:=tlanza + lanza2;
      WITH guarda[n] DO
        begin
          promedio:=tlanza/n;
          lanzamien:=lanza;
          veces:=vez;
        end;
    end; {for}
  GetTime(hora,minuto,segundo,sec);
  WriteLn(archi,'Hora en la que termina');
  WriteLn(archi,hora,' ',minuto,' ',segundo,' ',sec);
  WriteLn(archi);
  WriteLn(archi,'N':4,' ','    Promedio     ',' ','Lanzam.':5,' ','V':2);
  WriteLn(archi);
  FOR n:=1 to 1000 DO
    begin
      mod1:= n mod 10;
      mod2:= n mod 100;
      IF ((n<= 10) or ((n<=100) and (mod1 =0)))
        or ((n>100) and (mod2 =0)) THEN
          WITH guarda[n] DO
            WriteLn(archi,n:4,' ',promedio,' ',lanzamien:5,' ',veces:3);
    end;
  Close(archi);
  WriteLn(#7,'Ya termine!!!!');
  WriteLn('El numero de veces que la fortuna revasa a ',maxfort,' es: ',vfort);
  ReadLn;

END.
```

```
(*
    Claudia C. Iturriaga Velazquez.
                      "PROGRAMA CAMINATA ALEATORIA"
         Se genera la caminata aleatoria de manera analoga a la ante-
    rior.
         Sera tratado el caso 2 teniendo dos barreras reflejantes una
    en cero y otra en n con probabilidad de permanecer en la berrera de
    (1-p) y abandonarlas con probabilidad p.
                                                                        *)

Program Regreso0;
  Uses Crt,Dos;
CONST
  REFLE    = 0;                     (* Barrera Reflejante en cero.      *)
 TYPE
   info = Record                    (* Guarda los siguientes valores: *)
           promedio   : Real;       (* Timpo promedio de regreso al 0 *)
           lanzamien,
           veces      : Integer;    (* Numero de veces que los lanza- *)
                                    (* mientos rebasan a 32,000.      *)
          END;
 VAR
   proba,                           (* Probabilidad de la moneda.     *)
   tirada,                          (* resultado del lanzamiento.     *)
   tlanza,                          (* Numero total de lanzamientos.  *)
   lanza2        : Real;
   n,                               (* Numero de juego.               *)
   cambfort,                        (* Cambios de la fortuna del juga-*)
                                    (* dor A.                         *)
   lanza,                           (* Numero de lanzamientos del jue-*)
                                    (* go n.                          *)
   vrefle1,                         (* Numero de veces que llega a la *)
                                    (* reflejante uno.                *)
   vrefle2,                         (* Numero de veces que llega a la *)
                                    (* reflejante en el cero.         *)
   refle1,                          (* Reflejante.                    *)
   vez,                             (* Indica el numero de veces que  *)
                                    (* se rebasan los 32,000 lanza-   *)
                                    (* mientos.                       *)
   mod1,mod2,
   j             : Integer;
   guarda        : Array [1..1000] of info;
                                    (* Guarda la informacion de cada  *)
                                    (* juego.                         *)
   resp          : Char;
   archi         : Text;            (* Archivo donde se guardan los   *)
                                    (* resultados.                    *)
   semilla       : longint;         (* Guarada el valor de la funcion *)
                                    (* Ramdon.                        *)
   hora,minuto,
   segundo,sec   : Word;
```

```
(*
   Lanzamiento.- De acuerdo con la tirada obtenida la fortuna del ju-
   gador se incrementa en uno o disminuye en uno este procedimiento
   se repite hasta que la fortuna del jugador sea igual a la fortuna
   inicial, es decir hasta que nuestra variable que indica el cambio
   de la fortuna (cambfort) sea igual a cero.
        Si el punto toca una Barrera Reflejante permanecera en estas
   si la tirada es menor o igual a proba y las abandonara si es mayor.
                                                                         *)

Procedure Lanzamiento;
BEGIN
  REPEAT
    INC(lanza);
    IF lanza > 32000 THEN
      begin
        lanza:=0;
        INC(vez);
      end;
    tirada:=random;
    IF tirada <=proba THEN
      DEC(cambfort)
    ELSE
      INC(cambfort);
    IF cambfort>=refle1 THEN
      begin
        INC(vrefle1);
        cambfort:=refle1;
      end;
    IF cambfort < 0 THEN
      cambfort:=0;

  UNTIL cambfort =0;
  INC(vrefle2);

END; (* Lanzamiento *)

(*
   Menu.- Lee el valor dela Barrera Reflejante refle2 y da la opcion
   de dar la semilla que genera la funcion random.
                                                                         *)
Procedure Menu;
BEGIN
  ClrScr;
  WriteLn('Dame la primer reflejante:');
  ReadLn(refle1);
  WriteLn(archi,'Reflejante ',refle1);
  WriteLn(archi,'Reflejante ',REFLE);
  ClrScr;
  Repeat
    WriteLn('¿Quieres dar la semilla? (S/N)');
    resp:=ReadKey;
    resp:=UpCase(resp);
    Until resp in ['S','N'];
    IF resp='N' THEN
      begin
        Randomize;
        WriteLn(archi,'La semilla es : ',RandSeed)
      end
    ELSE
      begin
        ClrScr;
        WriteLn('Dame la semilla : ');
```

```pascal
        WriteLn('Dame la semilla : ');
        ReadLn(semilla);
        RandSeed:=semilla;
        WriteLn(archi,'La semilla es : ',RandSeed);
      end;
END; (* Menu *)


BEGIN    (* Programa Principal *)
  Assign(archi,'guarda.pas');
  ReWrite(archi);
  Menu;
  ClrScr;
  WriteLn('¿Cual es la probabilidad?');
  ReadLn(proba);
  WriteLn(archi,'Hora en la que se incia:');
  GetTime(hora,minuto,segundo,sec);
  WriteLn(archi,hora,' ',minuto,' ',segundo,' ',sec);
  tlanza:=0;
  vrefle1:=0;
  vrefle2:=0;
  cambfort:=0;  FOR n:=1 to 1000 DO
    begin
      lanza:=0;
      vez:=0;
      Lanzamiento;
      lanza2:=lanza*0.00001;
      IF vez > 0 THEN
        FOR j:=1 to vez DO
          lanza2:=lanza2 + 0.32000;
      tlanza:=tlanza + lanza2;
      WITH guarda[n] DO
        begin
          promedio:=tlanza/n;
          lanzamien:=lanza;
          veces:=vez;
        end;
    end; {FOR}  GetTime(hora,minuto,segundo,sec);
  WriteLn(archi,'Hora en la que se termina:');
  WriteLn(archi,hora,' ',minuto,' ',segundo,' ',sec);
  WriteLn(archi);
  WriteLn(archi,'La probabilidad de abandonar una barrera reflejante es (1-p)');
  WriteLn(archi,'La probabilidad con la que pierde es: ',proba:2:2);
  WriteLn(archi,'Numero de visitas a la relejante ',refle1,' es: ',vrefle1);
  WriteLn(archi,'Numero de visitas a la reflejante cero es: ',vrefle2);
  WriteLn(archi);
  WriteLn(archi,'N':4,' ','    Promedio    ',' ','Lanzam.':5,' ','V':2);

  WriteLn(archi);  FOR n:=1 to 1000 DO
    begin
      mod1:= n mod 10;
      mod2:= n mod 100;
      IF ((n<= 10) or ((n<=100) and (mod1 =0)))
        or ((n>100) and (mod2 =0)) THEN
          WITH guarda[n] DO
            WriteLn(archi,n:4,' ',promedio,' ',lanzamien:5,' ',veces:3);
    end;
  Close(archi);  WriteLn(#7,'Ya termine!!!');

  ReadLn;


END.END.
```

```
(*
 ┌──────────────────────────────────────────────────────────────┐
 │ Claudia C. Iturriaga Velazquez.                              │
 │                    "PROGRAMA CAMINATA ALEATORIA"             │
 │       Se genera de manera analoga la caminata aleatoria, y en este │
 │ caso tendremos 2 barreras reflejantes que, una en cero y otra en │
 │ refle2, las cu'tes se abandonaran con probabilidad 1.        │
 └──────────────────────────────────────────────────────────────┘ *)


Program Regreso0;
  Uses Crt,Dos;
CONST
   REFLE    = 0;                       (* Barrera Reflejante en cero.      *)
 TYPE
   info = Record                       (* Guarda los siguientes valores: *)
            promedio  : Real;          (* Timpo promedio de regreso al 0 *)
            lanzamien,
            veces     : Integer;       (* Numero de veces que los lanza-  *)
                                       (* mientos rebasan a 32,000.       *)
          END;
 VAR
   proba,                              (* Probabilidad de la moneda.      *)
   tirada,                             (* Resultado del lanzamiento.      *)
   tlanza,                             (* Numero total de lanzamientos.   *)
   lanza2          : Real;
   n,                                  (* Numero de juego.                *)
   cambfort,                           (* Cambios de la fortuna del juga-*)
                                       (* dor A.                          *)
   lanza,                              (* Numero de lanzamientos del jue-*)
                                       (* n.                              *)
   vrefle1,                            (* Numero de veces que llega a la  *)
                                       (* reflejante uno.                 *)
   vrefle2,                            (* Numero de veces que llega a la  *)
                                       (* reflejante en el cero.          *)
   refle1,                             (* Reflejante.                     *)
   vez,                                (* Indica el numero de veces que   *)
                                       (* se rebasan los 32,000 lanza-    *)
                                       (* mientos.                        *)
   mod1,mod2,
   j               : Integer;
   guarda          : Array [1..1000] of info;
                                       (* Guarda la informacion de cada   *)
                                       (* juego.                          *)
   resp            : Char;
   archi           : Text;             (* Archivo donde se guardan los    *)
                                       (* resultados.                     *)
   semilla         : longint;          (* Semilla de la funcion random    *)
   hora,minuto,
   segundo,sec     : Word;
```

```
(*
    | Lanzamiento.- De acuerdo con la tirada obtenida la fortuna del ju-  |
    | gador se incrementa en uno o disminuye en uno este procedimiento     |
    | se repite hasta que la fortuna del jugador sea igual a la fortuna    |
    | inicial, es decir hasta que nuestra variable que indica el cambio    |
    | de la fortuna (cambfort) sea igual a cero.                           |
    |      Si el punto toca una Barrera Reflejante sera regresado inme-    |
    | diatamente al estado anterior.                                       |
                                                                            *)

Procedure Lanzamiento;
BEGIN
  REPEAT
    INC(lanza);
    If lanza > 32000 then
      begin
        lanza:=0;
        INC(vez);
      end;
    tirada:=random;
    IF tirada <=proba THEN
      DEC(cambfort)
    ELSE
      INC(cambfort);
    IF cambfort=refle1 THEN
      begin
        INC(vrefle1);
        DEC(cambfort);
      end;
  UNTIL cambfort =0;
  INC(vrefle2);
  INC(cambfort);
END; (* Lanzamiento *)

(*
    | Menu.- Lee el valor dela Barrera Reflejante refle2 y da la opcion    |
    | de dar la semilla que genera la funcion random.                      |
                                                                            *)
Procedure Menu;
BEGIN
  ClrScr;
  WriteLn('Dame la primer reflejante:');
  ReadLn(refle1);
  WriteLn(archi,'Reflejante ',refle1);
  WriteLn(archi,'Reflejante ',REFLE);
  ClrScr;
  REPEAT
    WriteLn('¿Quieres dar la semilla? (S/N)');
    resp:=ReadKey;
    resp:=UpCase(resp);
    UNTIL resp in ['S','N'];
    IF resp='N' THEN
      begin
        Randomize;
        WriteLn(archi,'La semilla es : ',RandSeed)
```

```
      end    ELSE
      begin
        ClrScr;
        WriteLn('Dame la semilla : ');
        ReadLn(semilla);
        RandSeed:=semilla;
        WriteLn(archi,'La semilla es : ',RandSeed);
      end;
END; (* Menu *)


BEGIN    (* Programa Principal *)
  Assign(archi,'guarda.pas');
  ReWrite(archi);
  Menu;
  ClrScr;
  WriteLn('¿Cuál es la probabilidad?');
  ReadLn(proba);
  GetTime(hora,minuto,segundo,sec);
  WriteLn(archi,hora,' ',minuto,' ',segundo,' ',sec);
  tlanza:=0;
  vrefle1:=0;
  vrefle2:=0;
  lanza:=1;
  cambfort:=1;  FOR n:=1 to 1000 DO
    begin
      vez:=0;
      lanzamiento;
      lanza2:=lanza*0.00001;
      IF vez > 0 then
        For J:=1 to vez do
          lanza2:=lanza2 + 0.32000;
      tlanza:=tlanza + lanza2;
      WITH guarda[n] DO
        begin
          promedio:=tlanza/n;
          lanzamien:=lanza;
          veces:=vez;
        end;
      lanza:=1;
    end; {for}
  GetTime(hora,minuto,segundo,sec);
  WriteLn(archi,hora,' ',minuto,' ',segundo,' ',sec);
  WriteLn(archi);
  WriteLn(archi,'La probabilidad de permanecer en una barrera reflejante es cero');
  WriteLn(archi,'Numero de visitas a la relejante ',refle1,' es: ',vrefle1);
  WriteLn(archi,'Numero de visitas a la reflejante cero es: ',vrefle2);
  WriteLn(archi);
  WriteLn(archi,'La probabilidad de que pierda es: ',proba:2:2);
  WriteLn(archi);
  WriteLn(archi,'N':4,' ','    Promedio    ',' ','Lanzam.':5,' ','V':2);
  WriteLn(archi);  FOR n:=1 to 1000 DO
    begin
      mod1:= n mod 10;
      mod2:= n mod 100;
      IF ((n<= 10) or ((n<=100) and (mod1 =0)))
        or ((n>100) and (mod2 =0)) THEN
          WITH guarda[n] DO
            WriteLn(archi,n:4,' ',promedio,' ',lanzamien:5,' ',veces:3);
    end;
  Close(archi);
  WriteLn(#7,'Ya termine!!!!');

  ReadLn;
```

```
Program Ehrenfest;
uses
  Crt;
Type
  rangbol = 1..100;                     (* Rango de bolas permitido.        *)
Var
  alfa,                                 (* Numero total de bolas.           *)
  alfa0,                                (* Numero de bolas en la caja A.    *)
  numval,                               (* Numero de variables aleatorias.*)
  nummues,                              (* Numero de muestras.              *)
  nummu,                                (* Numero de muestra de los vec-    *)
                                        (* tores mu (max 10)                *)
  mod1,mod2,
  k,c,n,m,i   : integer;
  numbol      : rangbol;                (* Numero de bola selecciondada.    *)

  bola        : Array[1..100] of integer; (* Caja en la que se encuentran ca*)
                                        (* da una de las bolas              *)
  sum,sumc    : Array [1..1000] of real;  (* Cadena de Markov       *)
  semilla     : Array [1..500] of longint; (* Semilla de numeros              *)
  semi        : longint;
  mu1,sigma1  : Array [1..1000] of real;   (* la media de  la variable i      *)
  mu,sigma    : Array[1..1000] of real;
  mu2v,sigma2: Array [1..1000] of real;     (* el estimador de la media       *)
  conjbol     : set of rangbol;         (* conjunto de bolas en la caja A *)
  resp        : char;
  aux,aux1    : real;
  exte,s1,s2 : string[10];
  h,lec,h2    : Text;

Procedure Inicibolas;                   (* Inializa que las bolas no se    *)
Var j :integer;                         (* encuentra en ninguna caja.       *)
begin
    For j:=1 to alfa do
      bola[j]:=0;
end; {Inicibolas}

Procedure Inicializa;
BEGIN
  FOR n:=1 to numval do
    begin
      sum[n]:=0;
      sumc[n]:=0;
      mu[n]:=0;
      sigma[n]:=0;
    end;
END;

function Poten(r:real;k:integer):real; (* Calcula el valor de un numero   *)
Var                                     (* real r elevado a la k.           *)
  temp:real;
  i:integer;
begin
  temp:=1;
  For i:=1 to k do
    temp:=r *temp;
  poten:=temp;
end; {Poten}
```

```
Procedure Menu;                              (* Pide los valores necesarios.   *)
begin
  WriteLn('Escribe el tamano de la cadena: (maximo 1000)');
  ReadLn(numval);
  WriteLn(h,'El tamano de la cadena es: ',numval);
  WriteLn('Escribe el numero de muestras de vectores aleatorios es: (maximo 1000)');
  ReadLn(nummues);
  WriteLn(h,'El numero de muestras de vectores aleatorios es: ',nummues);
  WriteLn('Escribe el numero de muestras de vectores promedios es: (maximo 1000)');
  ReadLn(nummu);
  WriteLn(h,'El numero de muestras de vectores promedios es: ',nummu);
  WriteLn('Escribe el numero total de bolas debe ser par:');
  ReadLn(alfa);
  WriteLn(h,'El numero total de bolas es: ',alfa);
  WriteLn('El numero de bolas iniciales de la caja A es:');
  ReadLn(alfa0);
  WriteLn('Quieres dar la semilla para cada muestra?');
  resp:=ReadKey;
  resp:=UpCase(resp);
  If resp = 'S' then
    begin
      ClrScr;
      WriteLn('La semilla sera leída del archivo semilla.txt');
      Assign(lec,'semilla.txt');
      Reset(lec);
      m:=1;
      While not EOF(lec) do
        begin
          ReadLn(lec,semi);
          semilla[m]:=semi;
          Inc(m);
        end;
      Close(lec);
      If (m -1) <> nummues then
        begin
          WriteLn('ERROR El numero de semillas no corresponde al tamaño de la muestr
          Halt(1);
        end;
    end;
end; {Menu}

Procedure LlenaCaja;                         (* Hace la distribucuion inicial *)
begin                                        (* de las bolas, con alfa0 bolas *)
  For i:=1 to alfa0 do                       (* en la caja A.                 *)
    begin
      Repeat
        numbol:=random(alfa) +1;
        bola[numbol]:=1;
      until Not(numbol in Conjbol);
      conjbol:=conjbol + [numbol];
    end;
end; {LlenaCaja}
```

```
Procedure GenerVec:                    (* Genera la Cadena de Markov de  *)
begin                                  (* tamano numval. Y la genera     *)
  For m:=1 to nummues do               (* "nummues" veces.               *)
    begin
      k:=alfa0:
      if resp='N' then
        begin
          Randomize:
          semilla[m]:=RandSeed
        end
      else
        RandSeed:=semilla[m]:
      conjbol:=[]:
      sum[1]:=k + sum[1]:
      sumc[1]:=k*k + sumc[1]:
      IniciBolas:
      LlenaCaja:
      For n:=2 to numval do
        begin
          numbol:=random(alfa) +1:
          If bola[numbol]=1 then
            begin
              bola[numbol]:=0:
              Dec(k):
              sum[n]:=k + sum[n]:
              sumc[n]:=sumc[n] + k*k:
            end
          else
            begin
              bola[numbol]:=1:
              Inc(k):
              sum[n]:=k + sum[n]:
              sumc[n]:=sumc[n] + k*k:
            end:
        end: (* FOR n*)

  end: (* For m*)
    str(c,exte):
    s2:=Concat('sem',exte):
    s2:=Concat(s2,'.txt'):
    Assign(h,s2):
    ReWrite(h):
    For m:=1 to nummues do
     begin
      Write(h,semilla[m],' '):
      if odd(m) then
        WriteLn(h):
      end:
    Close(h):

end: (GenerVec)
```

```
BEGIN                         (* P R O G R A M A   P R I N C I P A L *)
  ClrScr;
  Assign(h,'EHRF.TXT');
  ReWrite(h);
  Menu;
  Close(h);
  ClrScr;
  GoToXY(10,10);
  WriteLn('Estov haciendo los calculos');
  aux1:=1-2/alfa;
  Assign(h2,'limit.txt');
  ReWrite(h2);
  mu1[1]:=alfa0;
  sigma1[1]:=0;
   WriteLn(h2,'1':6,mu1[1]:20,sigma1[1]:20);
  For n:=2 to numval do
    begin
      aux:=poten(1-aux1,n);
      mu1[n]:=(alfa/2)*(1-aux)+(2/alfa)*aux*mu1[1];
      mu1[n]:=mu1[n];
      sigma1[n]:=(1- 4/ alfa ) *sigma1[n-1] + (4/alfa)*(1-mu1[n-1]/alfa)*mu1[n-1];
      sigma1[n]:=sigma1[n];
      mod1:= n mod 10;
      mod2:= n mod 100;
      IF ((n<= 10) or ((n<=100) and (mod1 =0)))
         or ((n>100) and (mod2 =0)) THEN
           WriteLn(h2,n:6,mu1[n]:20,sigma1[n]:20);
    end;
  Close(h2);
  FOR n:=1 to numval DO
    begin
      mu2v[n]:=0;
      sigma2[n]:=0;
    end;
  For c:=1 to nummu do
  Begin
    Inicializa;
    GenerVec;

    s1:=concat('ehr',exte);
    s1:=concat(s1,'.txt');
    Assign(h,s1);
    ReWrite(h);
    WriteLn(h,'          Valor Esperado        Varianza ');
    For n:=1 to numval do
      begin
      mu[n]:=sum[n] / nummues;
      sigma[n]:=(sumc[n]/nummues) - sqr(mu[n]);
      mu2v[n]:=mu2v[n] + sqr(mu[n] - mu1[n]);
      sigma2[n]:=sigma2[n] + sqr(sigma[n]-sigma1[n]);
      mod1:= n mod 10;
      mod2:= n mod 100;
      IF ((n<= 10) or ((n<=100) and (mod1 =0)))
         or ((n>100) and (mod2 =0)) THEN
           WriteLn(h,n:6,mu[n]:20,sigma[n]:20);
      end;
      Close(h);
    end; {for de c}


    Assign(h,'prom.txt');
    ReWrite(h);
    WriteLn(h,'         Error Cuadratico Medio      Error Cuadratico Medio de');
```

```
  WriteLn(h,'        de Mu.                                de Sigma.                ');
  For n:=1 to numval do
  begin
    mod1:= n mod 10;
    mod2:= n mod 100;
    IF ((n<= 10) or ((n<=100) and (mod1 =0)))
      or ((n>100) and (mod2 =0)) THEN
        WriteLn(h,n:6,mu2v[n]/nummu:20,sigma2[n]/nummu:20);
  end;
  Close(h);
  GoToXY(10,20);
  WriteLn('Ya termine!!');
End.
```

BIBLIOGRAFIA

- ASH ROBERT, Basic Probability Theory,
  John Wiley & Sons, Inc, 1970.

- ASH ROBERT, Real Analysis and Probability,
  Academic Press, 1972.

- COX, MILLER , The Theory of Stochastic Processes,
  Methuen & CO LTD, 1965.

- HOEL, PORT, STONE, Introduction to Stochastic Processes,
  Houghton Mifflin Company, 1972.

- KARLIN S., TAYLOR H., A First Course in Stochastic Processes,
  Academic Press, 1975.

- SIDNEY J. YAKOWITZ, Computational Probability and Simulation,
  Addison-Wesley Publishing Company, 1977.

- SHIRYAYEV A.N., Probability,
  Springer-Verlag, 1984.