UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORÍA CATEGÓRICA DE LOS CONJUNTOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

GARCÍA RAMÍREZ, OCTAVIO

ASESOR: ODGERS LÓPEZ, ALEJANDRO

MÉXICO, DISTRITO FEDERAL 1990

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Universidad Nacional Autónoma De México

Facultad De Ciencias

Teoría Categórica De los Conjuntos.

Octavio García Ramírez.

México, D.F. MATEMATICAS 1990.

ÍNDICE

PRESENTACION

El trabajo de tesis aquí presentado se basó en apuntes que elaboró F. William Lawvere durante un curso que impartió en la Universidad Estatal de Nueva York en Buffalo, en el año de 1985. Dicho curso fué dirigido a estudiantes de la licenciatura en Matemáticas, y llevó por nombre "Curso de Teoría de los Conjuntos."

En general, mi trabajo de tesis consistió en lo siguiente:

(i) Traducir los apuntes del inglés al español.

(ii) Completar y/o complementar algunas demostraciones, así como realizar otras que se omitían.

(iii) Realizar una serie de ejercicios.

Cabe aclarar que; aunque en algunos casos la traducción no fue hecha de manera literal siempre respeté lo fundamental, y en aquellas ocasiones en que se cambió la redacción fue siempre con la intención de dar mayor claridad.

- He escrito la palabra "TESIS" en las demostraciones que me parecieron importantes y que han sido hechas como parte del trabajo de tesis. Es decir que dichas demostraciones no aparecen en los apuntes originales de Lawvere.

Considero relevantes las demostraciones hechas para probar:

(·) $(A \times C) + (B \times C) \cong (A+B) \times C$ Capítulo 14

(··) $\mathbb{N} + \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$ Capítulo 19

Quiero agradecer al director de esta tesis, el Dr. en C. Alejandro Oldys I., su comprensión y ayuda prestadas durante la realización de este trabajo.

INTRODUCCIÓN

Por un conjunto simple tan sólo entenderemos lo que de manera intuitiva se entiende por conjunto.

Un conjunto simple no tiene ningún tipo de estructura, en él sus elementos pueden ser distinguidos y se puede hablar de la cantidad de ellos.

Por otro lado, el concepto de morfismo ó mapeo es una generalización del concepto de función.

Cada mapeo f de A en B satisface que para cada elemento a de A existe exactamente un elemento de B, el cual es llamado "valor de f en a" ó simplemente "f de a". El valor de f en a usualmente se denota por "$f(a)$".

En el presente trabajo siempre se considerarán conjuntos simples.

Estaría de más argumentar sobre la importancia que tienen estos conjuntos

Ahora; el propósito de estos apuntes es hacer ver que los conjuntos simples pueden ser considerados desde otro ángulo.

A lo largo del I capítulo se irán descubriendo de manera intuitiva propiedades fundamentales de dichos conjuntos; estas propiedades se establecen sin embargo desde otro punto de vista, a saber desde el punto de vista categórico y no conjuntista.

Establecidas de esta forma, uno percibe que tales situaciones se presentan en forma muy similar en distintas ramas de la matemática; cabe entonces el deseo de generalizar tales conceptos. Aunque estas generalizaciones están ya a la mano, no son cubiertas en el presente trabajo.

Es decir, al finalizar el estudio de estos apuntes, uno quedará completamente introducido en la Teoría de Categorías sin haber definido siquiera tal concepto.

CAPITULO 1

Definiciones Preliminares

<u>MORFISMO</u>.- Un morfismo de A en B satisface que para cada elemento x de A existe exactamente un elemento de B, el cual es el valor de f en x. El valor de f en x se denota usualmente por f(x), y es éste un elemento de B.

<u>Objeto Terminal</u>.- El objeto terminal es un conjunto de un solo elemento, el cual es único salvo biyecciones. Este conjunto lo denotaremos por 1, y está caracterizado por el hecho de que para cualquier conjunto A existe exactamente un mapeo de A en 1.

$$\forall A \quad \exists! \, [A \xrightarrow{!_A} 1]$$

<u>ELEMENTO</u>.- En un sentido restringido; un ELEMENTO (elemento estricto ó elemento simplemente) de un conjunto A es cualquier mapeo cuyo dominio es 1 y codominio es A. Ahora, en un sentido mas amplio, un elemento de A es cualquier mapeo con codominio A. Cuando hagamos referencia a este sentido mas amplio de lo que es un elemento, nos referiremos a él como un elemento generalizado, elemento variable, una parametrización, o bien, un listado de elementos.

Supondremos la Ley Asociativa y el valor de la composición

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, "x"'] \arrow[d, "fx"] \arrow[dr, "(gf)x = g(fx)"] & \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "gf"'] & B \arrow[r, "g"] & C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & T \arrow[dl, "x"'] \arrow[d, "fx"] \arrow[dr, "(gf)x = g(fx)"] & \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "gf"'] & B \arrow[r, "g"] & C
\end{tikzcd}$$

<u>SEPARADOR</u>.- Un conjunto T es un separador si

$$\forall A,B\ \forall f_1,f_2\ [A \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} B]\ .\ [f_1 \neq f_2] \Rightarrow \exists\ T \xrightarrow{x} A\ ,\ f_1x \neq f_2x$$

Una propiedad importante en los conjuntos simples es que el objeto terminal es un separador, ésto no sucede en todas partes como por ejemplo en los Grupos.

Decimos que f se cancela a la izquierda si para cualesquiera a_1 y a_2 tales que $fa_1 = fa_2$ podemos concluir que $a_1 = a_2$. Si f se cancela a la izquierda decimos que f es un <u>MONOMORFISMO</u>

<u>INYECTIVIDAD</u>.- Dado un conjunto I, decimos que f es <u>I-inyectivo</u> si

$$\forall a_1,a_2\ I \underset{a_2}{\overset{a_1}{\rightrightarrows}} A\ [fa_1 = fa_2 \Rightarrow a_1 = a_2]$$

Claramente cualquier monomorfismo es siempre I-inyectivo para todo objeto I.

<u>Proposición</u>

Si f es I-inyectivo e I es separador, entonces f es monomorfismo.

<u>Demostración</u>

Supongamos $fa_1 = fa_2$ y además $a_1 \neq a_2$

Ya que I es separador existe $I \xrightarrow{x} T\ [a_1x \neq a_2x]$

$$I \overset{x}{\dashrightarrow} T \underset{a_2}{\overset{a_1}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B$$

$fa_1 = fa_2 \Rightarrow fa_1x = fa_2x$, como f es I-inyectivo, entonces $a_1x = a_2x$!

$\therefore a_1 = a_2$ $\quad\therefore$ f es monomorfismo ∎

En el caso de los conjuntos simples usualmente se toma $I=1$. Llamaremos a los morfismos 1-inyectivos simplemente inyectivos. De esta forma, los morfismos inyectivos son considerados bajo definición como los f's que satisfacen

$$fa_1 = fa_2 \Rightarrow a_1 = a_2$$

donde a_1 y a_2 son elementos del dominio de f.

Nota: Recordamos que la palabra ELEMENTO alude al sentido restringido de este concepto.

<u>PARTE</u>: Una parte de un conjunto A es cualquier monomorfismo i cuyo codominio es A.

Su notación será: $\mathrm{Dom}(i_A) \overset{i_A}{\hookrightarrow} A$

Cuando no presente confusión el saber de quién es parte un monomorfismo, omitiremos el subíndice.

<u>PERTENENCIA</u>: Si i es una parte de A, $a \in i_A$ significará que

$\exists \bar{a}\,[a = i_A \bar{a}]$

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, dashed, "\bar{a}"] \arrow[dr, "a"'] & \mathrm{Dom}(i_A) \arrow[d, "i_A"] \arrow[dl, phantom, "="] \\ & A \end{tikzcd}$$

<u>INCLUSION</u>: Si i e i' son ambas, partes de A; $i'_A \subseteq i_A$ significa que

$\exists k\,[i'_A = i_A k]$, lo cual es equivalente a decir que

$\forall a\,[a \in i'_A \Rightarrow a \in i_A]$

INTERSECCION.- Si i_1 e i_2 son partes de A, la intersección $(i_1 \cap i_2)$ es también una parte de A, caracterizada salvo equivalencia, en la siguiente forma:

$$\forall T \xrightarrow{a} A \; [a \in i_1 \cap i_2 \Longleftrightarrow (a \in i_1 \text{ y } a \in i_2)]$$

IMAGEN INVERSA: Si $A \xrightarrow{f} B$ es cualquier morfismo y j_B es cualquier parte de B; la imagen inversa de j_B bajo f (la denotaremos $f^{-1}[j_B]$) es la parte i_A de A caracterizada en la siguiente forma:

$$\forall T \xrightarrow{a} A \quad [a \in f^{-1}[j_B] \Longleftrightarrow fa \in j_B]$$

FUNCION CARACTERISTICA.- Sea i_A una parte de un conjunto A, tomemos a un elemento fijo $1 \longrightarrow V$ de un conjunto V cualquiera, al elemento que hemos fijado lo llamaremos CIERTO ó UNO.

Diremos que $A \xrightarrow{\varphi} V$ es la función característica de i_A si:

$$\forall T \xrightarrow{a} A \quad [a \in i_A \Longleftrightarrow \varphi a = \text{CIERTO}_T]$$

donde CIERTO_T es la composición $T \xrightarrow{!_T} 1 \xrightarrow{\text{CIERTO}} V$.

Usaremos la notación $\varphi = \chi_{i_A}$ en caso de que φ sea la función característica de i_A.

Es facil observar que $i_A = \varphi^{-1}[\text{CIERTO}]$

PROPOSICION

$$\chi_{f^{-1}[j]} = \chi_j f$$

<u>Demostración</u>

Tenemos

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "a"] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "\chi_j"] & V \\ & B \arrow[u, "f^{-1}[j]"] & \mathrm{dom}(j) \arrow[u, "j"] & \end{tikzcd}$$

$$a \in f^{-1}[j] \iff fa \in j \iff \chi_j fa = \text{CIERTO}_T$$

$$\therefore \chi_j f = \chi_{f^{-1}[j]} \quad \blacksquare$$

Es facil demostrar que en Conjuntos simples cada parte i_A tiene una única función característica.

Decimos que f es <u>EPIMORFISMO</u> si:

$$\forall V \ \forall g_1, g_2 \ [g_1 f = g_2 f \Rightarrow g_1 = g_2]$$

En otras palabras, f es epimorfismo si se cancela a la derecha.

<u>SUPRAYECTIVIDAD</u>.- Si $A \xrightarrow{f} B$, decimos que f es <u>I</u>-suprayectivo si:

$$\forall\ b : I \longrightarrow B \qquad \exists\ a : I \longrightarrow A \ [fa = b]$$

$$\begin{tikzcd} & I \arrow[dl, dashed, "a"'] \arrow[dr, "b"] \arrow[d, phantom, "="] & \\ A \arrow[rr, "f"] & {} & B \end{tikzcd}$$

PROPOSICION

Si $A \xrightarrow{f} B$ es morfismo entre conjuntos simples, entonces f es epimorfismo si y solo si es suprayectivo.

Demostración

$\Rightarrow$) Supongamos que f es epimorfismo y que existe $1 \xrightarrow{b_0} B$ tal que $\forall\ 1 \xrightarrow{a} A\ [fa \neq b_0]$. Es claro que b_0 es monomorfismo

Sean $B \underset{\chi_{y_0}}{\overset{F}{\rightrightarrows}} 2$, donde 2 es un conjunto con dos elementos y F es la constante de valor FALSO.

Luego:

$$\forall a \quad (\chi_{y_0} f)(a) = \chi_{y_0}(fa) = \text{FALSO} = F(fa) = (Ff)(x)$$

$$\therefore \chi_{y_0} f = Ff \qquad \text{como } f \text{ es epi tenemos } \chi_{y_0} = F\ !$$

$$\text{ya que} \quad \text{CIERTO} = \chi_{y_0}(y_0) \neq F(y_0) = \text{FALSO} \qquad \therefore f \text{ es sobre.}$$

$\Leftarrow$) Supongamos que f es sobre y que $g_1 f = g_2 f$

Sea $1 \xrightarrow{b} B$ arbitrario, ya que f es sobre existe entonces $1 \xrightarrow{a} A$ y $fa = b$

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] & & \\ A \arrow[rr, "f"'] \arrow[rr, phantom, "//", shift left=3] & & B \arrow[r, shift left, "g_1"] \arrow[r, shift right, "g_2"'] & V \end{tikzcd}$$

Luego:

$$\forall b \quad g_1(b) = g_1(fa) = (g_1 f)a = (g_2 f)a = g_2(fa) = g_2(b)$$

$\therefore g_1 = g_2 \qquad \therefore f$ es epimorfismo ∎

CAPITULO 2

Axioma de objeto inicial y de objeto terminal

Dado un morfismo $A \xrightarrow{f} B$ de conjuntos, podemos hacer las siguientes dos observaciones:

(1) Si tomamos fijo un elemento $1 \xrightarrow{b} B$ y nos fijamos en $f^{-1}[b]$, vemos que los elementos de $f^{-1}[b]$ una misma "propiedad", la de ir bajo f a dar a <u>b</u>.

(2) De alguna manera los elementos de B están en una lista vía los elementos de A bajo la función, aunque esta no sea suprayectiva ni aún inyectiva.

De esta manera, vemos que el conjunto $B=1$ es el único con la característica de no permitirnos distinguir los elementos de A, si usamos solo "propiedades" $A \longrightarrow B$. Igualmente el conjunto $A=\emptyset$ es el único con la característica de proporcionarnos solo un tipo de listado, "la hoja en blanco".

Caracterizamos lo anterior en los axiomas siguientes:

<u>AXIOMA DEL OBJETO INICIAL</u>

Existe un conjunto inicial, que denotaremos por "0", tal que para cualquier conjunto A existe exactamente un morfismo

$$0 \xrightarrow{0_A} A$$

AXIOMA DEL OBJETO TERMINAL

Existe un conjunto "1", tal que para cualquier conjunto A existe exactamente un morfismo

$$A \xrightarrow{!_A} 1$$

Un elemento, como hemos visto, es un caso especial de mapeo, y de esta forma el valor de una función en un elemento es un caso especial de la composición. Igualmente, la evaluación de una composición es un caso especial de la ley asociativa.

Si $X \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} Y$, cabe preguntarse si $f_1 = f_2$. Esto se puede responder haciendo uso de que 1 es un separador.

$$\forall x \; [\, \mathrm{dom}(x) = 1 \Rightarrow f_1 x = f_2 x \,] \Longrightarrow f_1 = f_2$$

CAPITULO 3

Sobre elementos variables

Hemos dicho que un elemento generalizado de A no es mas que un mapeo arbitrario cuyo codominio es A. Una descripción mas fiel sobre un elemento variable $T \longrightarrow A$ sería "Elemento variable de A a lo largo de T; al que podemos llamar un "T-A elemento."

Veamos en que forma nos referimos a la temperatura: Acostumbramos decir "LA Temperatura", lo cual parece ser un elemento del conjunto de temperaturas, y entendiendo por ésta la temperatura actual. Sin embargo ayer una, hoy es otra, está variando en este mismo instante y nosotros sin embargo, al usar el artículo LA, nos referimos a ella como si fuera la misma.

Sea T el conjunto de días. Para cada día hay un elemento del conjunto de temperaturas (elemento en el sentido restringido), que es la temperatura del momento y es el valor de un mapeo. Está variando y, sin embargo, es considerada como una entidad, como un "elemento."

En un modelo para explicar este tipo de variación se involucra un conjunto, que juega el papel de parámetros, otro conjunto que juega el papel de valores y, un mapeo que describe el resultado del proceso de evolución.

Así pues un elemento del conjunto de temperaturas muy bien podría ser:

(•) Un valor simple, sin cambio alguno

(••) La temperatura de San Miguel Allende durante una semana, en cuyo caso sigue siendo un "elemento" del conjunto de temperaturas pero su dominio es T.

Ahora; si A es un conjunto, ¿Qué clases de propiedades $A \longrightarrow V$ habrá?

Si $V=0$, la respuesta es ninguna, salvo que A mismo sea vacío y en cuyo caso habrá solo una.

Si $V=1$, sabemos que hay exactamente una.

Tendremos pues que tomar un V más grande. Tomaremos $V=2$, conjunto de dos elementos, y veremos que efectivamente tendremos suficientes propiedades para distinguir los elementos de A.

<u>COSEPARADOR</u>: V es un coseparador si:

$$\forall T, A \ \forall a_0, a_1 \left[T \overset{a_0}{\underset{a_1}{\rightrightarrows}} A \ \& \ a_0 \neq a_1 \right] \Longrightarrow \exists\, A \xrightarrow{\varphi} V \left[\varphi a_0 \neq \varphi a_1 \right]$$

<u>EJERCICIO</u>

Usar el hecho de que 1 es un separador entre los conjuntos simples para mostrar que en la definición anterior podemos sustituir T por 1.

<u>Demostración</u>

Tomemos como definición de coseparador la siguiente:

V es un coseparador si $\forall A \ \forall a_0, a_1 \left[1 \overset{a_0}{\underset{a_1}{\rightrightarrows}} A \ \ a_0 \neq a_1 \right]$ se tiene que $\exists\, A \xrightarrow{\varphi} V \left[\varphi a_0 \neq \varphi a_1 \right]$

Veamos que esta segunda definición implica la dada anteriormente

Sean V coseparador, $T \overset{a_0}{\underset{a_1}{\rightrightarrows}} A$ con T y A arbitrarios $[a_0 \neq a_1]$

Ya que 1 es separador, entonces $\exists\ 1 \xrightarrow{x} T \quad [a_0 x \neq a_1 x]$

como V es coseparador de acuerdo a la segunda definición dada

$\exists\ A \xrightarrow{\varphi} V$ y $\varphi(a_0 x) \neq \varphi(a_1 x)$

$\therefore \exists\ 1 \xrightarrow{x} T \quad [\varphi a_0(x) \neq \varphi a_1(x)] \quad \therefore \varphi a_0 \neq \varphi a_1$ $\blacksquare$

<u>PROPOSICION</u>: $V = 2$ es un coseparador entre conjuntos simples.

<u>Demostración</u>

Sean A arbitrario y $1 \overset{a_0}{\underset{a_1}{\rightrightarrows}} A$ cualesquiera dos elementos $[a_0 \neq a_1]$

Llamemos cero y uno a los dos elementos de 2, y definamos

$$\varphi(a) = \begin{cases} \text{uno} & a = a_1 \\ \text{cero} & a \neq a_1 \end{cases}$$

Claramente $\varphi(a_1) \neq \varphi(a_0)$ $\blacksquare$

La propiedad de 2 de ser un coseparador, no es mas que la dual de la de 1 de ser separador. De esta forma tenemos que hay suficientes elementos para diferenciar propiedades, lo mismo que hay suficientes propiedades para distinguir elementos.

(•) $a_0 \neq a_1 \Rightarrow \exists\ \varphi\ [\varphi a_0 \neq \varphi a_1]$

(••) $\varphi_1 \neq \varphi_2 \Rightarrow \exists\ a\ [\varphi_1 a \neq \varphi_2 a]$

$$1 \overset{a_0}{\underset{a_1}{\rightrightarrows}} A \overset{\varphi_1}{\underset{\varphi_2}{\rightrightarrows}} 2$$

CAPITULO 4

Coproducto de Dos conjuntos

La mayoría de nuestras definiciones básicas respecto a las operaciones básicas así como la Adición, la Multiplicación y la Exponenciación, todas involucran "propiedades universales" de mapeos; y es así que en cierta forma tienen la misma complicación.

Intuitivamente, pensamos en la suma de dos conjuntos como en la unión ajena de A' y B' tales que respectivamente tienen el mismo tamaño que A y B, los dos conjuntos a sumar.

Suma ó Coproducto de dos Conjuntos

Sean A y B conjuntos, la suma de A y B es un conjunto, que denotaremos $A+B$, junto con dos morfismos $A \xrightarrow{\tau_A} A+B$ y $B \xrightarrow{\tau_B} A+B$ (llamados inyecciones) con la propiedad universal siguiente:

$$[\forall C \quad \forall f,g \quad A \xrightarrow{f} C \quad B \xrightarrow{g} C] \Longrightarrow \exists! \quad A+B \xrightarrow{[f,g]} C$$

tal que el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "\tau_A"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A+B \arrow[r, "{[f,g]}"] & C \\
B \arrow[u, "\tau_B"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Es fácil checar que el coproducto es único salvo isomorfismo
(Consultar Herrlich)

Recordemos que una categoría $\mathcal{C}$ es conexa si $\forall\, A, B$ $\mathcal{C}$-objetos sucede que $hom_{\mathcal{C}}(A, B) \neq \emptyset$

· <u>PROPOSICION</u>: Si $\mathcal{C}$ es una categoría conexa, entonces cada inyección tiene inverso izquierdo, es decir es una sección. (Consultar Herrlich, pag 120)

<u>COROLARIO</u>: Entre los conjuntos abstractos ó simples se tiene que toda inyección es sección, es decir tiene inverso izquierdo.

CAPITULO 5

Sobre Funciones caracteristicas

MORFISMO CONSTANTE.- Sea $A \xrightarrow{f} B$, decimos que f es constante si

$$\forall T \ \forall g,h \ [T \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} A.] \Longrightarrow fg = fh.$$

PROPOSICIÓN.- Sean $A \xrightarrow{f} B$ y T el objeto terminal de la categoría.

(◦) Si f se factoriza a traves de T, f es entonces constante
(◦◦) Si $hom_{\mathcal{C}}(T,A) \neq \emptyset$ y f es constante, entonces f se factoriza a traves de T.
(Consultar Herrlich pág 49).

Sean V un conjunto y $1 \xrightarrow{\text{CIERTO}} V$ un elemento constante. Sea ahora A, conjunto arbitrario, definamos una relación entre las partes de A y los morfismos $A \xrightarrow{\varphi} V$ en la siguiente forma:

Decimos que φ es la función característica de i_A si

$$\forall T \ \forall a \ T \xrightarrow{a} A \ [a \in i_A \Longleftrightarrow \varphi a = \text{CIERTO}_T]$$

donde CIERTO_T es el morfismo constante $T \xrightarrow{!_T} 1 \xrightarrow{\text{CIERTO}} V$

El siguiente es un hecho importante y facil de comprobar:

En conjuntos simples tenemos

(◦) Cualquier $A \xrightarrow{\varphi} 2$ es función característica de una parte de A
(◦◦) Cualquier $\text{Dom}(i) \xrightarrow{i_A} A$ parte de A tiene una única función característica $A \xrightarrow[\chi_{i_A}]{} 2$

Ésto tiene gran utilidad, pues por ejemplo nos permite contar las partes de un objeto por medio de mapeos 2-valuados.

EJERCICIOS

1.- Sea $1 \xrightarrow{\partial} A$ arbitrario. Mostrar que ∂ es monomorfismo.

Demostración

$$T \underset{a_2}{\overset{a_1}{\rightrightarrows}} 1 \xrightarrow{\partial} A$$

como 1 es terminal entonces $a_1 = a_2$ y ∂ es mono.

2.- Mostrar que si φ es la función caract. de i y de j, entonces $i \equiv j$

Demostración

$j \in j$ ya que $j = j\, Id_{Dom(j)}$, entonces $\varphi(j) = \text{CIERTO}$

Como $\varphi = \chi_i$ entonces $[\varphi(j) = \text{CIERTO} \Longleftrightarrow j \in i]$

$\therefore \exists\, a_0\, [j = i a_0]$

Analogamente: $\exists\, a_1\, [i = j a_1]$

Luego:

$i = j a_1 = i a_0 a_1 = i\, Id_{Dom(i)}$ como i es mono, entonces $a_0 a_1 = Id_{Dom(i)}$

$j = i a_0 = j a_1 a_0 = j\, Id_{Dom(j)}$ como j es mono, entonces $a_1 a_0 = Id_{Dom(j)}$

$\therefore i \equiv j$

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Dom}(i) \arrow[d, hook, "i"] & & \\
\mathrm{Dom}(j) \arrow[ur, dashed, "a_0"] \arrow[r, hook, "j"] & A \arrow[r, "\varphi"] & V & 1 \arrow[l, "\text{CIERTO}"'] \\
\mathrm{Dom}(i) \arrow[ur, hook, "i"'] \arrow[dr, "a_1"'] & & & \\
& \mathrm{Dom}(j) \arrow[uu, hook, "j"'] & &
\end{tikzcd}$$

CAPITULO 6

Caracterizaciones de la imagen inversa y la intersección

RESTRICCION DE MORFISMOS: Sean $X \xrightarrow{f} Y$ y $\mathrm{Dom}(i) \xrightarrow{i} X$, la composición fi se llama "la restricción de f a la parte i."

Si, por ejemplo, f describe la variación de temperaturas durante un año y si j es la parte "cero" de los valores de temperaturas, puede entonces haber una semana i en Enero tal que $fi \in j$.

EJERCICIOS

(A) Sean los morfismos ilustrados en el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Dom}(i) \arrow[d, "i:=f^{-1}{[j]}"'] & \mathrm{Dom}(j) \arrow[d, "j"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

Entonces:

(⊜) $\forall T\ \forall x\ [T \xrightarrow{x} X]$ se tiene que $x \in i \Longleftrightarrow fx \in j$

Demostrar que (⊜) implica los dos siguientes puntos:

(•) Existe $\bar{f}$ tal que

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Dom}(i) \arrow[r, dashed, "\bar{f}"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & \mathrm{Dom}(j) \arrow[d, "j"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

(••) Cualquier diagrama conmutativo como el de aquí puede ser expresado en términos de (•) mediante la existencia de un único $\bar{x}$ en la forma siguiente:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, dashed, "\bar{y}"] \arrow[d, "x"'] & \mathrm{Dom}(j) \arrow[d, "j"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, "\bar{x}"] \arrow[drr, bend left, "\bar{y}"] \arrow[ddr, "x"'] & & \\
& \mathrm{Dom}(i) \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, hook, "i"] & \mathrm{Dom}(j) \arrow[d, hook, "j"] \\
& \underline{X} \arrow[r, "f"] & \underline{Y}
\end{tikzcd}$$

Demostración

$\boxed{(\Leftarrow) \Longrightarrow (\cdot)}$ $\quad i = i\,\mathrm{Id} \Longrightarrow i \in i \Longrightarrow f i \in j \Longrightarrow \exists\, \bar{f}\ [f i = j \bar{f}]$

Por tanto:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Dom}(i) \arrow[r, dashed, "\bar{f}"'] \arrow[d, hook, "i"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & \mathrm{Dom}(j) \arrow[d, hook, "j"] \\
\underline{X} \arrow[r, "f"'] & \underline{Y}
\end{tikzcd}$$

■

$\boxed{(\Leftarrow) \Longrightarrow (\cdot\cdot)}$ Supongamos que conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\bar{y}"] \arrow[d, "x"] \arrow[dr, phantom, "//"] & \mathrm{Dom}(j) \arrow[d, hook, "j"] \\
\underline{X} \arrow[r, "f"] & \underline{Y}
\end{tikzcd}$$

$f x = j \bar{y} \Longrightarrow f x \in j \Longrightarrow x \in i \Longrightarrow \exists\, \bar{x}\ [x = i \bar{x}]$

Veamos que $\bar{f}\bar{x} = \bar{y}$:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, "\bar{x}"] \arrow[drr, bend left, "\bar{y}"] \arrow[ddr, "x"'] & ? & \\
& \mathrm{Dom}(i) \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, hook, "i"] \arrow[dr, phantom, "//"] & \mathrm{Dom}(j) \arrow[d, hook, "j"] \\
& \underline{X} \arrow[r] & \underline{Y}
\end{tikzcd}$$

$j \bar{f} \bar{x} = f i \bar{x} = f x = j \bar{y}$

como j es mono, tenemos $\bar{f}\bar{x} = \bar{y}$

La unicidad de $\bar{x}$ es clara ya que si $x = i\bar{x} = i x'$, ent. $\bar{x} = x'$.

■

(B) Mostrar que $(\cdot)$, $(\cdot\cdot)$ y j inyectiva implican i inyectiva.

Demostración

$$\begin{tikzcd} Dom(i) \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & Dom(j) \arrow[d, "j"] \\ \underline{X} \arrow[r, "f"] & \underline{Y} \end{tikzcd}$$

Supongamos $ix' = ix'' = x$
vemos que $x \in i$ entonces $fx \in j$,
entonces $\exists y' \, [fx = jy']$.

Como suponemos (*) y (**) tenemos que $\exists! \, \bar{x} \; [x = i\bar{x}]$
pero $x = ix' = ix''$ Por tanto $x' = x'' = \bar{x}$ ∴ i es inyectiva ∎

(C) Mostrar que (*) y (**) implican (⊖)

Demostración

Por el ejercicio anterior tenemos ya que i es monomorfismo
Sean T y x arbitrarios tal que $T \xrightarrow{x} \underline{X}$

⟹) Supongamos que $x \in i$, entonces $\exists \, x' \, [x = ix']$

Como suponemos (*), entonces $\exists \bar{f}$ tal que conmuta el diagrama de abajo

$$\begin{tikzcd} Dom(i) \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & Dom(j) \arrow[d, "j"] \\ \underline{X} \arrow[r, "f"] & \underline{Y} \end{tikzcd}$$

$fx = f(ix') = fi(x') = j\bar{f}x'$

∴ $fx \in j$

⟸) Supongamos que $fx \in j$, entonces $\exists \, \bar{y} \, [fx = j\bar{y}]$

La suposición de (**) implica la existencia de un único $\bar{x}$ tal que el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, dashed, "\bar{x}"] \arrow[rr, bend left, "\bar{y}"] \arrow[dr, "x"'] & Dom(i) \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "i"] \arrow[dr, phantom, "//"] & Dom(j) \arrow[d, "j"] \\ & \underline{X} \arrow[r, "f"] & \underline{Y} \end{tikzcd}$$

$\therefore\ x = i\bar{x}$, entonces $x \in i$ y $\therefore\ \boxed{(\cdot)\ y\ (\cdot\cdot) \Longrightarrow (\circledcirc)}$ ■

(D) Si $j = g^{-1}[k]$ e $i = f^{-1}[j]$, entonces $i = (gf)^{-1}[k]$

<u>Demostración</u>

$$x \in i \iff fx \in j \iff gf(x) \in k \qquad \therefore\ i = (gf)^{-1}[k] = f^{-1}[g^{-1}[k]]$$ ■

(E) Se tienen los morfismos ilustrados en el diagrama de abajo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Dom}(j) \arrow[d, "j"] & & 1 \arrow[d, "\text{CIERTO}"] \\ Y \arrow[rr, "\psi"] & & 2 \end{tikzcd}$$

Probar que:

$$[\psi = \chi_j] \iff [j = \psi^{-1}[\text{CIERTO}]]$$

<u>Demostración</u>

$$[\psi = \chi_j] \iff \forall T\ \forall_y\ T \xrightarrow{y} Y\ [y \in j \iff \psi_y = \text{CIERTO}] \iff j = \psi^{-1}[\text{CIERTO}]$$

(F) Demostrar que $\chi_{f^{-1}[j]} = \chi_j f$

<u>Demostración</u>

Utilicemos los ejercicios (D) y (E)

$$\begin{tikzcd} D_1 \arrow[d, "f^{-1}[j]"] & D_2 \arrow[d, "j"] & 1 \arrow[d, "\text{CIERTO}"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "\chi_j"] & 2 \end{tikzcd}$$

Por el ejercicio (E):

$$\chi_j f = \chi_{f^{-1}[j]} \iff f^{-1}[j] = (\chi_j f)^{-1}[\text{CIERTO}]$$

Por el ejercicio (D):

$$(\chi_j f)^{-1}[\text{CIERTO}] = f^{-1}\chi_j^{-1}[\text{CIERTO}] = f^{-1}[j] \qquad \therefore\ \chi_{f^{-1}[j]} = \chi_j f$$ ■

Un caso especial de imagen inversa es la intersección, la que se obtiene al tomar la imagen inversa de una parte a lo largo de otra.

(G) Sean los morfismos $D_j \xhookrightarrow{j} \underline{Y}$, $D_i \xhookrightarrow{i} \underline{X}$ y $\underline{X} \xhookrightarrow{f} \underline{Y}$ $[i = f^{-1}[j]]$

Hagamos $m = fi = j\bar{f}$, probar que $m = j \cap f$

<u>Demostración</u>

$\Rightarrow$) Sea $y \in m \Rightarrow \exists!\, \bar{u}\, [y = m\bar{u}] \Rightarrow [y = fi\bar{u} \quad y = j\bar{f}\bar{u}]$

Por tanto $y \in f$ y $y \in j$ $\therefore$ $m \leq j \cap f$.

$$\begin{tikzcd} D_i \arrow[r, hook, "\bar{f}"] \arrow[d, hook, "i"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & D_j \arrow[d, hook, "j"] \\ \underline{X} \arrow[r, hook, "f"'] & \underline{Y} \end{tikzcd} \qquad \bar{f} = j^{-1}[f]$$

$\Leftarrow$) Si $y \in j$ y $y \in f$, entonces $\exists\, r, s\, [y = jr = fs]$

Recordemos la caracterización que hicimos de la imagen inversa

Ya que $i = f^{-1}[j]$

$\Rightarrow \exists!\, \bar{u}\, [s = i\bar{u}]$

$\therefore$ $y = (fi)\bar{u} = m\bar{u}$

$\therefore$ $y \in m$

$$\begin{tikzcd} T \arrow[dr, "\bar{u}"] \arrow[drr, bend left, "r"] \arrow[ddr, bend right, "s"'] & & \\ & D_i \arrow[r, hook, "\bar{f}"] \arrow[d, hook, "i"] \arrow[dr, phantom, "//"] & D_j \arrow[d, hook, "j"] \\ & \underline{X} \arrow[r, hook, "f"'] & \underline{Y} \end{tikzcd}$$

■

De esta forma hemos visto que $m = j \cap f$. Es fácil comprobar que $m = j \cap f = f \cap j$ y que también $f^{-1}[j_1 \cap j_2] = f^{-1}[j_1] \cap f^{-1}[j_2]$.

CAPITULO 7

Sección y Retracción

<u>SECCION</u>.- Sea $\underline{X} \xrightarrow{s} \underline{Y}$, s es sección si existe $\underline{Y} \xrightarrow{r} \underline{X}$ $[rs = Id_{\underline{X}}]$

<u>RETRACCION</u>.- Sea $\underline{X} \xrightarrow{r} \underline{Y}$, r es retracción si existe $\underline{Y} \xrightarrow{s} \underline{X}$ $[rs = Id_{\underline{Y}}]$

Obsérvese que las definiciones no establecen la unicidad de los morfismos. Por otro lado, si $rs = Id_{\underline{X}}$ decimos que "r es un inverso izquierdo de s", o bien que "r es una retracción de s". Es claro que si s es una sección, entonces s es monomorfismo.

<u>PROPOSICION</u>.- Entre conjuntos simples, cualquier monomorfismo $\underline{X} \xrightarrow{i} \underline{Y}$ con $\underline{X} \neq \emptyset$ es sección.

<u>Demostración</u>

$$[\underline{X} \neq \emptyset] \Longrightarrow \exists x_0 [1 \xrightarrow{x_0} \underline{X}]$$

Podemos conseguir entonces un complemento $\underline{X}' \xrightarrow{i'} \underline{Y}$ de tal forma que $\underline{Y} = \underline{X} + \underline{X}'$

$$\begin{tikzcd}
\underline{X} \arrow[d, hook, "i"] \arrow[dr, "Id_{\underline{X}}"] & \\
\underline{Y} \arrow[r, dashed, "{[Id_{\underline{X}}, g]}"] & \underline{X} \\
\underline{X}' \arrow[u, "i'"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

donde g es la composición

$$\underline{X}' \xrightarrow{!_{\underline{X}'}} 1 \xrightarrow{x_0} \underline{X}$$

Tenemos que $[Id_{\underline{X}}, g]\, i = Id_{\underline{X}}$

$\therefore$ i es sección ∎

Esta proposición no es, definitivamente, cierta en otras estructuras. Por ejemplo, en espacios topológicos, donde sólo se consideran mapeos continuos, se tiene que no existe una retracción continua para la inclusión de la esfera de dimensión $(n-1)$ en el espacio de dimensión n.

Observamos que la demostración anterior está basada en el concepto de suma, y másaún en el de complemento de una parte.

Mientras que generalmente la suma existe en las categorías con funciones continuas, no es el caso de que para cada parte $X \overset{i}{\hookrightarrow} Y$ exista otra $X' \overset{i'}{\hookrightarrow} Y$ junto con la cual su suma sea Y. Podríamos tomar, efectivamente, X' como "el resto de Y" después de mapear X, sin embargo la propiedad de suma dice que cualquier par de mapeos pueden ser combinados para obtener un mapeo $Y \longrightarrow Z$, sin embargo restaría ver que f y f' continuas implican que su "combinación" también lo es; ésto no sucederá a menos de que una condicional se verifique.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, hook, "i"'] \arrow[drr, bend left, "f"] & & \\
& Y \arrow[r, dashed, "{[f,f']}"] & Z \\
X' \arrow[ur, hook, "i'"] \arrow[urr, bend right, "f'"'] & &
\end{tikzcd}$$

CAPITULO 8

Producto de Dos conjuntos e Igualadores

Consideremos un ejemplo sencillo pero importante, a saber el producto 2×2, donde 2 es un conjunto de dos elementos que pueden ser llamados 0 y 1. Tenemos que 2×2 tiene cuatro elementos $\langle 0,1\rangle, \langle 0,0\rangle$, $\langle 1,1\rangle$ y $\langle 1,0\rangle$.

La propiedad universal que se requerirá para productos, es en este caso la siguiente: Supongase que $\bar{X} \xrightarrow{\varphi} 2$, $\bar{X} \xrightarrow{\psi} 2$ son cualesquiera dos morfismos dados, entonces hay un único mapeo $\bar{X} \xrightarrow{\langle\varphi,\psi\rangle} 2\times 2$ tal que $\langle\varphi,\psi\rangle x = \langle\varphi x, \psi x\rangle$.

El mapeo $\langle\varphi,\psi\rangle$ puede ser entendido en términos de las partes de $\bar{X}$ para las cuales φ y ψ son funciones características interpretando 1 como cierto y 0 como falso. Si x pertenece a la parte caracterizada por ψ pero no a la de φ, entonces tendremos $\langle\varphi,\psi\rangle x = \langle 0,1\rangle$.

Usualmente los morfismos $2\times 2 \longrightarrow 2$ se llaman "operaciones proposicionales" ó "tablas de verdad". Por ejemplo, el mapeo "$\wedge$" descrito por la siguiente tabla es llamado "CONJUNCION" y lee como "y".

$$2\times 2 \xrightarrow{\wedge} 2$$

u	v	$u \wedge v$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Ahora, una composición como la ilustrada en el diagrama de abajo proporciona una nueva propiedad $\varphi\wedge\psi$. Un principio importante es que una operación proposicional corresponde, vía funciones características, a una operación sobre las partes de cualquier $\underline{X}$ dado.

$$\begin{tikzcd} & 2\times 2 \arrow[dr, "\wedge"] \arrow[d, phantom, "="] & \\ \underline{X} \arrow[ur, "\langle\varphi,\psi\rangle"] \arrow[rr, dashed, "\varphi\wedge\psi"'] & \, & 2 \end{tikzcd}$$

Es fácil checar que si $\varphi=\chi_i$ y $\psi=\chi_j$, entonces $\chi_{i\wedge j}=\varphi\wedge\psi$.

<u>AXIOMA</u>: Dados cualesquiera dos conjuntos A y B, existen mapeos

$A\times B \xrightarrow{\pi^A_{A\times B}} A$ $\quad A\times B \xrightarrow{\pi^B_{A\times B}} B$ tales que

$\forall f,g\ [\underline{X}\xrightarrow{f} A,\ \underline{X}\xrightarrow{g} B]$ se tiene que existe un <u>único</u> morfismo $\underline{X}\xrightarrow{\langle f,g\rangle} A\times B$ $[\pi^A_{A\times B}\langle f,g\rangle = f\ ,\ \pi^B_{A\times B}\langle f,g\rangle = g]$.

$$\begin{tikzcd} & & A \\ \underline{X} \arrow[urr, "f"] \arrow[rr, dashed, "\langle f,g\rangle"] \arrow[drr, "g"'] & \arrow[ur, phantom, "="] \arrow[dr, phantom, "="] & A\times B \arrow[u, "\pi^A_{A\times B}"'] \arrow[d, "\pi^B_{A\times B}"] \\ & & B \end{tikzcd}$$

Los morfismos $\pi^A_{A\times B}$ y $\pi^B_{A\times B}$ son llamados "proyecciones".

Cuando no existe confusión respecto a el dominio y codominio de las proyecciones, omitiremos los subíndices, y en ocasiones los superíndices; de tal forma que podemos escribir:

$$\pi^A_{A\times B}=\pi^A=\pi=\pi_{A,B} \quad \text{y} \quad \pi^B_{A\times B}=\pi^B=\pi'=\pi'_{A,B}$$

El conjunto $A \times B$ lo llamaremos el producto de A y B.

<u>PROPOSICION</u>: Si $\mathcal{C}$ es categoría convexa, entonces cada proyección, en $\mathcal{C}$, es una retracción. (Consultar Herrlich)

<u>EJERCICIO</u>: Mostrar que existe un morfismo $B \times A \xrightarrow{t_{AB}} A \times B$ para el cual $\pi_{A\times B}\, t_{AB} = \pi'_{B\times A}$ y $\pi'_{A\times B}\, t_{AB} = \pi_{B\times A}$. Usando la unicidad del mapeo inducido mostrar que $t_{AB}\, t_{BA} = Id_{A\times B}$.

<u>demostración</u>

$$\begin{tikzcd}
 & & A \\
B\times A \arrow[urr, "\pi'_{B\times A}"] \arrow[rr, "\langle \pi'_{B\times A}, \pi_{B\times A}\rangle"] \arrow[drr, "\pi_{B\times A}"'] & & A\times B \arrow[u, "\pi_{A\times B}"'] \arrow[d, "\pi'_{A\times B}"] \\
 & & B
\end{tikzcd}$$

Hagamos $t_{AB} = \langle \pi'_{B\times A}, \pi_{B\times A}\rangle$ y análogamente $t_{BA} = \langle \pi'_{A\times B}, \pi_{A\times B}\rangle$

$$\pi_{A\times B}\, t_{AB}\, t_{BA} = \pi_{A\times B}\langle \pi'_{B\times A}; \pi_{B\times A}\rangle \langle \pi'_{A\times B}; \pi_{A\times B}\rangle = \pi'_{B\times A}\langle \pi'_{A\times B}; \pi_{A\times B}\rangle = \pi_{A\times B}$$

$$\pi'_{A\times B}\, t_{AB}\, t_{BA} = \pi'_{A\times B}\langle \pi'_{B\times A}; \pi_{B\times A}\rangle \langle \pi'_{A\times B}; \pi_{A\times B}\rangle = \pi_{B\times A}\langle \pi'_{A\times B}; \pi_{A\times B}\rangle = \pi'_{A\times B}$$

Por otro lado, es claro que $\pi_{A\times B}\, Id_{A\times B} = \pi_{A\times B}$ y $\pi'_{A\times B}\, Id_{A\times B} = \pi'_{A\times B}$

Dada la unicidad del mapeo inducido tenemos que $\boxed{t_{AB}\, t_{BA} = Id_{A\times B}}$

Análogamente se deduce que $\boxed{t_{BA}\, t_{AB} = Id_{B\times A}}$ y por tanto $A\times B \simeq B\times A$ ∎

Si $\bar{X} \xrightarrow{f} A$, $\bar{X} \xrightarrow{g} B$ y $T \xrightarrow{x} \bar{X}$ consideremos el diagrama de la derecha.

$$\begin{tikzcd}
 & & A \\
T \arrow[r, "x"] \arrow[urr, bend left, "fx"] \arrow[drr, bend right, "gx"'] & \bar{X} \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\langle f, g\rangle"] \arrow[dr, "g"'] & A\times B \arrow[u, "\pi"'] \arrow[d, "\pi'"] \\
 & & B
\end{tikzcd}$$

Vemos que: $\pi(\langle f,g\rangle x) = (\pi\langle f,g\rangle)x = fx$
$\pi'(\langle f,g\rangle x) = (\pi'\langle f,g\rangle)x = gx$

Dada la unicidad del mapeo inducido obtenemos $\boxed{\langle f,g\rangle x = \langle fx, gx\rangle}$

GRÁFICA DE UN MAPEO: Sea $A \xrightarrow{f} B$, la gráfica de f es el único mapeo cuyas proyecciones son Id_A y f respectivamente.

$$\begin{tikzcd}
 & A \\
A \arrow[ur, "Id_A"] \arrow[r, dashed, "\langle Id_A, f\rangle"] \arrow[dr, "f"'] & A\times B \arrow[u, "\pi"'] \arrow[d, "\pi'"] \\
 & B
\end{tikzcd}$$

La notación será G_f = Gráfica de f.

Por tanto $G_f = \langle Id_A, f\rangle$

Luego entonces $G_f(x) = \langle Id_A, f\rangle x = \langle x, fx\rangle$

PROPOSICIÓN.- (•) La gráfica de f es una parte de $A\times B$
(••) Si $T \xrightarrow{p} A\times B$, entonces $p\in G_f \iff p = \langle a, fa\rangle$ con $a\in A$.

Demostración

(•) Ya que $\pi G_f = Id_A$, entonces G_f es sección y entonces G_f es mono.
(••) Supongamos $p\in G_f$, entonces $\exists\, T \xrightarrow{a} A\ [p = G_f a = \langle a, fa\rangle]$.
Ahora, si $T \xrightarrow{p} A\times B$ entonces $p = \langle a, b\rangle$ donde $a = \pi p$, $b = \pi' p$, y si suponemos $b = fa$, entonces $p = \langle a,b\rangle = \langle a, fa\rangle = G_f(a)$ $\therefore p\in G_f$ ∎

PROPOSICIÓN: Cualquier sección de la proyección $A\times B \xrightarrow{\pi} A$ es la gráfica de un único morfismo $A \to B$.

Demostración

Sea $s: A \to A\times B$ $[\pi s = Id_A]$
Sea $f = \pi' s$

Fijémonos en el diagrama de abajo:

$$\begin{tikzcd} & A \\ A \arrow[ur, "Id_A"] \arrow[r, "s"] \arrow[dr, "f"'] & A \times B \arrow[u, "\pi"'] \arrow[d, "\pi'"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Claramente

$s = \mathcal{G}_{\pi' s} = \mathcal{G}_f$ ■

<u>EJERCICIO</u> Mostrar que $B = \pi^{-1}[a]$, donde $1 \xrightarrow{a} A$ es cualquier elemento.

<u>Demostración</u>

$$\begin{tikzcd} & & 1 \arrow[r, "a"] & A \\ D \arrow[r, shift left, "r"] \arrow[r, shift right, "s"'] & B \arrow[ur, "!_B"] \arrow[rr, "\langle a!_B, Id_B\rangle"] \arrow[drr, "Id_B"'] & & A \times B \arrow[u, "\pi"'] \arrow[d, "\pi'"] \\ & & & B \end{tikzcd}$$

Veamos que $\langle a!_B, Id_B\rangle$ es mono:

$\langle a!_B, Id_B\rangle s = \langle a!_B Id_B\rangle r$

$\Longrightarrow \langle a!_B s, s\rangle = \langle a!_B r, r\rangle$

$\Longrightarrow \pi'\langle a!_B s, s\rangle = \pi'\langle a!_B r, r\rangle$

$\therefore s = r$ y por tanto $\langle a!_B, Id_B\rangle$ es mono.

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "\langle a!_B, Id_B\rangle"] & 1 \arrow[d, "a"] \\ T \arrow[r, "\langle a_0, b_0\rangle"] & A \times B \arrow[r, "\pi"] & A \end{tikzcd}$$

Si $\langle a_0, b_0\rangle \in \langle a!_B, Id_B\rangle$, entonces $\exists\, T \xrightarrow{\tilde{b}} B \; [\langle a_0, b_0\rangle = \langle a!_B, Id_B\rangle \tilde{b}]$

Luego: $a_0 = \pi\langle a_0, b_0\rangle = \pi\langle a!_B \tilde{b}, \tilde{b}\rangle = a(!_B \tilde{b})$ $\quad \therefore \pi\langle a_0, b_0\rangle \in a.$

Ahora; $\pi\langle a_0, b_0\rangle \in a \Longrightarrow a_0 = a!_T$

Fijémonos en $T \xrightarrow{\langle a_0, b_0\rangle} A \times B \xrightarrow{\pi'} B$

$\langle a!_B, Id_B\rangle \pi'\langle a_0, b_0\rangle = \langle a!_B, Id_B\rangle b_0 = \langle a!_B b_0, b_0\rangle = \langle a!_T, b_0\rangle = \langle a_0, b_0\rangle$

Por tanto $\langle a_0, b_0\rangle \in \langle a!_B, Id_B\rangle$ $\quad \therefore B = \pi^{-1}[a]$ ■

<u>IGUALADOR DE MORFISMOS</u>.- Un igualador de f y g $\left[A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B\right]$ es cualquier morfismo $E \xrightarrow{e} A$ tal que:

(·) $fe = ge$

(··) $\forall T\ \forall x\ [fx = gx] \Rightarrow \exists!\ \tilde{x}\ [x = e\tilde{x}]$

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[d, dashed, "\tilde{x}"'] \arrow[dr, "x"] & & \\
E \arrow[r, "e"'] & A \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & B
\end{tikzcd}$$

<u>EJERCICIO</u>.- Cualquier igualador e es una parte de A. $\forall x\ [x \in e \Leftrightarrow fx = gx]$

<u>Demostración</u>

$[er = es] \Rightarrow [fer = ges]$ $\therefore \exists!\ \tilde{x}\ [e\tilde{x} = es = er]$ $\therefore \underline{r = s}$

Luego: $x \in e \Rightarrow \exists\ \tilde{x}\ [x = e\tilde{x}] \Rightarrow [fx = fe\tilde{x} = ge\tilde{x} = gx]$ $\therefore fx = gx$

Finalmente: $fx = gx \Rightarrow \exists!\ \tilde{x} \ni x = e\tilde{x}$, es decir que $x \in e$. ▨

Por su importancia, quisiéramos asumir como un axioma la existencia de igualadores para cualquier par de morfismos. Probaremos sin embargo que la existencia de productos e imágenes inversas implica la existencia de igualadores.

<u>EJERCICIO</u>.- Consideremos en el diagrama de abajo los morfismos f, g, $\langle f,g\rangle$, $i = \langle f,g\rangle^{-1}[\delta_B]$; donde $\delta_B = \langle Id_B, Id_B\rangle$ ("Diagonal en B"). Prueba que i es un igualador de f y g.

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[d, hook, "i"'] & B \arrow[d, hook, "\delta_B"] \\
\mathcal{D} \arrow[r, "\lambda"] & A \arrow[r] \arrow[dr, shift left, "f"] \arrow[dr, shift right, "g"'] & B^2 \arrow[d, shift right, "\pi"'] \arrow[d, shift left, "\pi'"] \\
 & & B
\end{tikzcd}$$

Demostración

Primero: Es claro que δ_B es un igualador de las proyecciones π y π'.
Segundo: $fi = \pi\langle f,g\rangle i = \pi\delta_B\kappa = \kappa = \pi'\delta_B\kappa = \pi'\langle f,g\rangle i = gi$ $\therefore$ $\underline{fi=gi}$
Tercero: $ft = gt \Rightarrow \langle f,g\rangle t = \langle ft, gt\rangle = \langle ft, ft\rangle = \delta_B t$ $\therefore$ $\underline{t \in i}$

Luego entonces $i = \langle f,g\rangle^{-1}[\delta_B]$ es un igualador de f y g. ▨

Sean $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$, considerese $\mathcal{G}_f \cap \mathcal{G}_g$.

PROPOSICIÓN

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "i_g"] \arrow[d, "i_f"'] \arrow[dr, "m"] & A \arrow[d, "\mathcal{G}_g"] \\ A \arrow[r, "\mathcal{G}_f"'] & A\times B \end{tikzcd}$$

probar que $i_f = i_g$.

Demostración

$$[\mathcal{G}_f i_f = \mathcal{G}_g i_g] \Rightarrow [\pi \mathcal{G}_f i_f = \pi\mathcal{G}_g i_g] \Rightarrow [Id_A i_f = Id_A i_g] \Rightarrow [i_f = i_g]$$

EJERCICIO Pruébese que $e = i_f = i_g$ es un igualador de f y g.

Demostración

$$fe = fi_f = \pi'\mathcal{G}_f i_f = \pi'\langle Id_A, f\rangle i_f = \pi'\langle Id_A,g\rangle i_g = g i_g = g i_f = ge \quad \therefore \boxed{fe=ge}$$

$[fx=gx] \Rightarrow [\mathcal{G}_f x = \langle x, fx\rangle$
$= \langle x, gx\rangle = \mathcal{G}_g x]$ $\therefore \mathcal{G}_f x = \mathcal{G}_g x$

$$\begin{tikzcd} T \arrow[dr, "\tilde{x}"] \arrow[drr, bend left, "x"] \arrow[ddr, bend right, "x"'] & & \\ & E \arrow[r, "i_g"] \arrow[d, "i_f"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & A \arrow[d, "\mathcal{G}_g"] \\ & A \arrow[r, "\mathcal{G}_f"'] & A\times B \end{tikzcd}$$

$i_f = \mathcal{G}_f^{-1}[\mathcal{G}_g] \Rightarrow \exists!\, \tilde{x}\ [x = i_f \tilde{x}]$
$\therefore x = e\tilde{x}$ $\therefore e$ es igualador de f y g ▨

CAPITULO 9

Productos fibrados y Límites

PRODUCTO FIBRADO.- Sean $A_0 \xrightarrow{f_0} B \xleftarrow{f_1} A_1$, un producto fibrado de ellos es un par de morfismos $A_0 \xleftarrow{p_0} P \xrightarrow{p_1} A_1$ tales que $f_0 p_0 = f_1 p_1$, y además

$$\forall T\ \forall a_0,a_1 [f_0 a_0 = f_1 a_1] \Longrightarrow \exists!\, a\ [a_0 = p_0 a \ \text{ y } \ a_1 = p_1 a]$$

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, "a"] \arrow[drr, bend left, "a_1"] \arrow[ddr, bend right, "a_0"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_0"] \arrow[dr, phantom, "//"] & A_1 \arrow[d, "f_1"] \\
& A_0 \arrow[r, "f_0"'] & B
\end{tikzcd}$$

PROPOSICION.- Si existen productos binarios e igualadores, entonces existen productos fibrados.

Demostración

$$\begin{tikzcd}
A_0 \times A_1 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_0"'] & A_1 \arrow[d, "f_1"] \\
A_0 \arrow[r, "f_0"'] & B
\end{tikzcd}$$

Muy probablemente el diagrama no conmuta; sea $E \xrightarrow{e} A_0 \times A_1$ el igualador de $f_0 \pi_0$ y $f_1 \pi_1$.

Hagamos $p_0 = \pi_0 e$ $\quad p_1 = \pi_1 e$

Tenemos que $f_0 p_0 = f_1 p_1$

$[f_0 a_0 = f_1 a_1] \longrightarrow f_0 \pi_0 \langle a_0, a_1 \rangle = f_0 a_0 = f_1 a_1 = f_1 \pi_1 \langle a_0, a_1 \rangle$

Es decir que $\langle a_0, a_1 \rangle$ iguala a $f_0 \pi_0$ y $f_0 \pi_1$.

Por tanto: $\exists!\, a\, [\langle a_0, a_1\rangle = e a]$

$a_0 = \pi_0 \langle a_0, a_1\rangle = \pi_0 e a = p_0 a$

$a_1 = \pi_1 \langle a_0, a_1\rangle = \pi_1 e a = p_1 a$

$\therefore\ A_0 \xleftarrow{p_0} E \xrightarrow{p_1} A_1$ es producto fibrado de f_0 y f_1.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, "a"] \arrow[ddrrr, bend left, "a_1"] \arrow[dddrr, bend right, "a_0"'] & & & \\
& E \arrow[dr, "e"] \arrow[drr, "p_1"] \arrow[ddr, "p_0"'] & & \\
& & A_0 \times A_1 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_0"] & A_1 \arrow[d, "f_1"] \\
& & A_0 \arrow[r, "f_0"'] & B
\end{tikzcd}$$

▨

<u>PROPOSICION</u>.- Si existen productos fibrados y objeto terminal, entonces existen:

(·) productos (··) Imágenes inversas (···) Intersecciones (····) Igualadores

<u>Demostración</u>

Hemos visto que los igualadores se pueden obtener de:

(a) Productos e intersecciones

(b) Productos e imágenes inversas

Vemos también que la intersección es un caso especial de imagen inversa. Basta entonces ver que se puede conseguir el producto, y que la imagen inversa es un caso especial de producto fibrado.

Consideremos el producto fibrado de $A_0 \xrightarrow[!_{A_0}]{} 1 \xleftarrow[!_{A_1}]{} A_1$, (derecha).

Sean $A_0 \xleftarrow{a_0} T \xrightarrow{a_1} A_1$, claramente $!_{A_1} a_1 = !_T = !_{A_0} a_0$.

$\therefore\ \exists!\ T \xrightarrow{a} P\ [p_1 a = a_1 \quad p_0 a = a_0]$

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, "a"] \arrow[drr, bend left, "a_1"] \arrow[ddr, bend right, "a_0"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_1"'] \arrow[d, "p_0"] & A_1 \arrow[d, "!_{A_1}"] \\
& A_0 \arrow[r, "!_{A_0}"] & 1
\end{tikzcd}$$

Pero ésto no es mas que la caracterización universal de $A_0 \times A_1$ con p_0 y p_1 como proyecciones. $\therefore$ <u>Existen productos</u>.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_0"'] & A_1 \arrow[d, "f_1"] \\ A_0 \arrow[r, "f_0"] & B \end{tikzcd}$$

Si el diagrama de la izquierda es producto fibrado y <u>f_1 es mono</u>; veamos que p_0 es monomorfismo.

$$[p_0 s = p_0 t] \Longrightarrow [f_0 p_0 s = f_0 p_0 t] \Longrightarrow [f_1 p_1 s = f_1 p_1 t] \quad \therefore \; p_1 s = p_1 t$$

$$\begin{tikzcd} T \arrow[dr, dashed, "x"] \arrow[drr, bend left, "p_1 s"] \arrow[ddr, bend right, "p_0 s"'] & & \\ & P \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_0"] & A_1 \arrow[d, "f_1"] \\ & A_0 \arrow[r, "f_0"] & B \end{tikzcd}$$

En el diagrama de la izquierda el diamante exterior conmuta $\therefore \exists! \, x \, [p_1 x = p_1 s$ y $p_0 x = p_0 s]$.

Dada la unicidad; <u>$t = s$</u> $\therefore$ <u>p_0 es mono</u>

Recordando la caracterización que hicimos de la imagen inversa, vemos que ésta resulta de la propiedad universal del producto fibrado y el hecho de que p_0 sea una parte de A_0.

Luego entonces existen también imágenes inversas. ▨

<u>LÍMITE</u>.- Sean A_i una familia de conjuntos y una familia de morfismos f_j entre ellos. Para describir los morfismos, consideremos el diagrama $J \overset{d}{\underset{c}{\rightrightarrows}} I$, donde J es un conjunto de índices para los morfismos ó flechas e I uno para los conjuntos A_i; $d(j)$ y $c(j)$ proporcionan respectivamente el dominio y codominio de una flecha $A_{d(j)} \xrightarrow{f_j} A_{c(j)}$.

El límite de estas familias es un conjunto L junto con una familia de morfismos $\{L \xrightarrow{\pi_i} A_i / i \in I\}$ tales que:

$$\begin{tikzcd} & A_{d(j)} \arrow[dd, "f_j"] \\ L \arrow[ur, "\pi_{d(j)}"] \arrow[dr, "\pi_{c(j)}"'] \arrow[r, phantom, "//"] & \\ & A_{c(j)} \end{tikzcd}$$

$$\forall \, 1 \xrightarrow{j} I \; [f_j \pi_{d(j)} = \pi_{c(j)}]$$

y con la propiedad universal siguiente:

Si $T \xrightarrow{a_i} A_i$ para cada $1 \xrightarrow{i} I$, son tales que $\forall\, 1 \xrightarrow{j} J$ se cumple $f_j a_{d(j)} = a_{c(j)}$, entonces:

$\exists!\, T \xrightarrow{a} L \ [a_i = \pi_i a] \ \forall\, 1 \xrightarrow{i} I$

$$\begin{tikzcd}
 & & A_{d(j)} \arrow[dd, "f_j"] \\
T \arrow[urr, "a_{d(j)}"] \arrow[r, dashed, "a"] \arrow[drr, "a_{c(j)}"'] & L \arrow[ur, "\pi_{d(j)}"] \arrow[dr, "\pi_{c(j)}"'] & \\
 & & A_{c(j)}
\end{tikzcd}$$

Como ejemplos, veamos en que forma resultan casos particulares algunos conceptos anteriores.

<u>Producto</u>: El diagrama que describe en este caso los morfismos entre los conjuntos es $0 \overset{d}{\underset{c}{\rightrightarrows}} 2$. donde "0" es objeto inicial (es decir que de él a cualquier otro conjunto existe solamente una flecha ó morfismo). Por tanto los morfismos que asignan dominio y codominio de una flecha son iguales, es decir que no hay morfismo alguno entre distintos conjuntos; y los diagramas conmutan por vacuidad de los f_j.

Si L es el límite de A_0 y A_1 (sin morfismos entre ellos), tenemos que existen $A_0 \xleftarrow{\pi_0} L \xrightarrow{\pi_1} A_1$ tales que si $A_0 \xleftarrow{a_0} T \xrightarrow{a_1} A_1$, entonces existe un único $T \xrightarrow{a} L \ [\pi_0 a = a_0 \quad \pi_1 a = a_1]$

$$\begin{tikzcd}
 & & A_0 \\
T \arrow[urr, "a_0"] \arrow[r, dashed, "a"] \arrow[drr, "a_1"'] & L \arrow[ur, "\pi_0"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & \\
 & & A_1
\end{tikzcd}$$

Claramente ésta es la propiedad de $A_0 \times A_1$ por tanto <u>$L = A_0 \times A_1$</u>

<u>Igualadores</u>: $2 \overset{d}{\underset{c}{\rightrightarrows}} 2$ d y c son los dos mapeos constantes, distintos.

$d(0)=d(1)=A_0$ $\quad c(0)=c(1)=A_1$ $\quad$ Por tanto $A_0 \overset{f_0}{\underset{f_1}{\rightrightarrows}} A_1$

L es límite $\Rightarrow \exists$ n $A_0 \xleftarrow{\pi_0} L \xrightarrow{\pi_1} A_1$ $[f_0\pi_0 = f_1\pi_0 = \pi_1]$

$$\begin{tikzcd} & A_0 \arrow[d, shift right, "f_0"'] \arrow[d, shift left, "f_1"] \\ L \arrow[ur, "\pi_0"] \arrow[r, phantom, "//"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & A_1 \\ & \end{tikzcd}$$

Además, si
$$\begin{tikzcd} & A_0 \arrow[d, "f_0"] \\ T \arrow[ur, "a_0"] \arrow[r, "a_1"'] & A_1 \end{tikzcd}$$
y
$$\begin{tikzcd} & A_0 \arrow[d, "f_1"] \\ T \arrow[ur, "a_0"] \arrow[r, "a_1"'] & A_1 \end{tikzcd}$$
conmutan

Entonces $\exists!\ T \xrightarrow{a} L$ $[\pi_0 a = a_0,\ \pi_1 a = a_1]$

$$\begin{tikzcd} & & A_0 \arrow[d, shift right, "f_0"'] \arrow[d, shift left, "f_1"] \\ T \arrow[r, dashed, "a"] \arrow[urr, bend left, "a_0"] \arrow[drr, bend right, "a_1"'] & L \arrow[ur, "\pi_0"] \arrow[r, "\pi_1"'] & A_1 \\ & & \end{tikzcd}$$

Vemos que $L \xrightarrow{\pi_0} A_0$ es el igualador de f_0 y f_1.

Producto fibrado: $2 \overset{d}{\underset{c}{\rightrightarrows}} 3$ $\quad d(0)=A_0$ $\quad d(1)=A_1$ $\quad c(0)=c(1)=A_2$

[L es límite] $\Rightarrow \exists$ n $T \xrightarrow{\pi_i} A_i$ $i=0,1,2$ tales que en el diagrama siguiente los triángulos conmutan, y por tanto el cuadrado también.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_0"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & A_1 \arrow[d, "f_1"] \\ A_0 \arrow[r, "f_0"'] & A_2 \end{tikzcd}$$

Si $T \xrightarrow{a_i} A_i$ $i=0,1,2$ $[f_0a_0 = f_1a_1 = a_2]$. Entonces existe unívoco $T \xrightarrow{a} L$ $[\pi_1 a = a_1,\ \pi_0 a = a_0,\ \pi_2 a = a_2]$

$$\begin{tikzcd} T \arrow[dr, "a"] \arrow[drr, bend left, "a_1"] \arrow[ddr, bend right, "a_0"'] & & \\ & L \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_0"] & A_1 \arrow[d, "f_1"] \\ & A_0 \arrow[r, "f_0"'] & A_2 \end{tikzcd}$$

Análogamente, observamos que $A_0 \xleftarrow{\pi_0} L \xrightarrow{\pi_1} A_1$ es el producto fibrado de f_0 y f_1.

TEOREMA

Si existen productos e igualadores, entonces existen límites.

<u>Demostración</u>

Sean $J \underset{c}{\overset{d}{\rightrightarrows}} I$, $A_{d(j)} \xrightarrow{f_j} A_{c(j)}$. Formemos los productos $\prod\limits_{1\to I} A_i$ y $\prod\limits_{1\to J} A_{c(j)}$. Observemos que el primer producto tiene todos los A_i, el segundo posiblemente no, pero en él podrán aparecer factores repetidos.

Construyamos dos morfismos $\prod A_i \underset{f}{\overset{g}{\rightrightarrows}} \prod A_{c(j)}$

El morfismo f quedará determinado por la ecuación:

$$\boxed{f_j \circ \overline{\Pi}^{d(j)}_{\Pi A_i} = \overline{\Pi}^{j}_{\Pi A_{c(j)}} \circ f}$$

$$\begin{tikzcd}
\prod A_i \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\overline{\Pi}^{d(j)}_{\Pi A_i}"] & \prod A_{c(j)} \arrow[d, "\overline{\Pi}^{j}_{\Pi A_{c(j)}}"] \\
A_{d(j)} \arrow[r, "f_j"'] & A_{c(j)}
\end{tikzcd}$$

El morfismo g quedará determinado por la ecuación:

$$\boxed{\overline{\Pi}^{c(j)}_{\Pi A_i} = \overline{\Pi}^{j}_{\Pi A_{c(j)}} \circ g}$$

$$\begin{tikzcd}
\prod A_i \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\overline{\Pi}^{c(j)}_{\Pi A_i}"] & \prod A_{c(j)} \arrow[d, "\overline{\Pi}^{j}_{\Pi A_{c(j)}}"] \\
A_{c(j)} \arrow[r, "Id_{A_{c(j)}}"'] & A_{c(j)}
\end{tikzcd}$$

Debe tenerse mucha atención en la manera en que se está proyectando.

Si $T \xrightarrow{\langle a_i\rangle_I} \prod A_i \underset{f}{\overset{g}{\rightrightarrows}} \prod A_{c(j)}$, tendremos

$$[g\langle a_i\rangle_I = f\langle a_i\rangle_I] \Longleftrightarrow [a_{c(j)} = f_j\, a_{d(j)}]\ \forall\ 1 \to J$$

Lo anterior se satisface claramente si $L \xrightarrow{e} \prod A_i$ es el igualador de f y g.

<u>Afirmación</u>: L junto con la familia de morfismos $\boxed{p_i = \prod\pi^{i}_{A_i} \circ e}$ es el límite buscado. Donde $e = \langle e_i \rangle_I$ es el igualador de f y g.

<u>Primero</u>

Veamos que el triángulo central del diagrama de abajo conmuta.

$$\begin{tikzcd}
\prod A_i \arrow[rr, dashed] & & A_{d(j)} \arrow[dd, "f_j"] \\
L \arrow[u, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[urr, "p_{d(j)}"] \arrow[drr, "p_{c(j)}"'] & & \\
\prod A_i \arrow[rr, dashed] & & A_{c(j)}
\end{tikzcd}$$

$(\bullet)\quad f_j\, p_{d(j)} = f_j \circ \prod\pi^{d(j)}_{A_i} \circ e = f_j \circ e_{d(j)}$

$(\bullet\bullet)\quad p_{c(j)} = \prod\pi^{c(j)}_{A_i} \circ e = e_{c(j)}$

$[L \xrightarrow{e} \prod A_i$ es igualador de f y $g] \Longrightarrow \boxed{e_{c(j)} = f_j \circ e_{d(j)}}$

<u>Segundo</u>

Si el diagrama de abajo conmuta, entonces para cada $1 \xrightarrow{j} J$ se tiene

$$\begin{tikzcd}
 & A_{d(j)} \arrow[d, "f_j"] \\
T \arrow[ur, "a_{d(j)}"] \arrow[r, "a_{c(j)}"'] & A_{c(j)}
\end{tikzcd}$$

$f_j a_{d(j)} = a_{c(j)}$ Por tanto $f\langle a_i\rangle_I = g\langle a_i\rangle_I$

$[L \xrightarrow{e} \prod A_i$ es igualador$] \Longrightarrow \exists!\, T \xrightarrow{\tilde{a}} L \; [\langle a_i\rangle = e\tilde{a}]$

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, "\langle a_i\rangle_I"] \arrow[dd, dashed, "\tilde{a}"'] & & \\
 & \prod A_i \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \prod A_{c(j)} \\
L \arrow[ur, "e"'] & &
\end{tikzcd}$$

Luego entonces:

$\prod\pi^{i}_{A_i}\langle a_i\rangle_I = \prod\pi^{i}_{A_i} \circ e \circ \tilde{a}$

Por tanto $\underline{a_i = p_i \tilde{a}}$ ∎

CAPITULO 10

Sobre dualidad

Cada noción de límite tiene su noción dual correspondiente, cuya definición se obtiene invirtiendo las flechas.

<u>SUMA FIBRADA</u>.- Sean $B_0 \xleftarrow{f_0} A \xrightarrow{f_1} B_1$, una suma fibrada de ellos es un par de morfismos $B_0 \xrightarrow{q_0} Q \xleftarrow{q_1} B_1$ tales que $q_0 f_0 = q_1 f_1$, y además

$$\forall T\ \forall b_0, b_1\ [b_1 f_1 = b_0 f_0] \Longrightarrow \exists!\, b\ [b q_0 = b_0 \quad y \quad b q_1 = b_1]$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_0"'] & B_1 \arrow[d, "q_1"'] \arrow[ddr, bend left, "b_1"] & \\ B_0 \arrow[r, "q_0"'] \arrow[drr, bend right, "b_0"'] & Q \arrow[dr, dashed, "b"] & \\ & & T \end{tikzcd}$$

<u>EJERCICIO</u>.- Un morfismo "e" es epimorfismo si y solo si al formar la suma fibrada de "e" consigo mismo $q_0 = q_1$.

<u>Demostración</u>

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e"'] & B \arrow[d, "q_1"'] \arrow[ddr, bend left, "x_1"] & \\ B \arrow[r, "q_0"'] \arrow[drr, bend right, "x_0"'] & Q \arrow[dr, dashed, "x"] & \\ & & T \end{tikzcd}$$

$[q_0 = q_1] \Longrightarrow$ Si $x_0 e = x_1 e$ entonces $\exists!\, Q \xrightarrow{x} T$ tal que $x q_0 = x_0$, $x q_1 = x_1$.
Y por tanto $x_0 = x_1$ $\therefore$ <u>e es epi</u>

Recíprocamente: si e es epimorfismo

$[q_0 e = q_1 e] \Longrightarrow [q_0 = q_1]$ ▨

PROPOSICION: Un morfismo "i" es monomorfismo sí y solo si al formar el producto fibrado de "i" consigo mismo $p_0=p_1$.

Su demostración es la dual de la anterior.

MORFISMO FUERTEMENTE SUPRAYECTIVO.- Un morfismo $\underline{X} \xrightarrow{f} \underline{Y}$ es fuertemente suprayectivo si $\forall T\ \forall_y\ [T \xrightarrow{y} \underline{Y}]$ existe $T \xrightarrow{x} \underline{X}$ $[fx=y]$.

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, dashed, "x"'] \arrow[dr, "y"] & \\ \underline{X} \arrow[rr, "f"'] & & \underline{Y} \end{tikzcd}$$

PROPOSICION.- f es fuertemente suprayectivo sí y solo si f es retracción.

Demostración

$\Rightarrow$) Basta que tomemos $T=\underline{Y}$ y además $T \xrightarrow{Id_{\underline{Y}}} \underline{Y}$.

$\Leftarrow$) Sea $T \xrightarrow{y} \underline{Y}$, hagamos $x=sy$ $[fs=Id_{\underline{Y}}]$ $\therefore fx=fsy=y$ ∎

PROPOSICIÓN.- Si f es retracción, entonces f es epimorfismo.

Su demostración es inmediata.

Entre conjuntos simples, tenemos el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc} f \text{ epimorfismo} & \Longleftrightarrow & f \text{ suprayectivo} \\ \Uparrow & & \Uparrow \\ f \text{ retracción} & \Longleftrightarrow & f \text{ fuertemente suprayectivo} \end{array}$$

La proposición recíproca a la anterior, y que completa el esquema es:

AXIOMA DE ELECCION

f suprayectivo $\longrightarrow$ f fuertemente suprayectivo

f epimorfismo $\Longrightarrow$ f retracción.

CAPITULO 11

Sobre la epi-mono factorización

PARTICIÓN.- Una partición de A es cualquier morfismo suprayectivo "p", cuyo dominio es A.

Las fibras de p son las imágenes inversas, bajo p, de los singuletes del codominio de p.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L} \arrow[d, "p^{-1}[b]"'] & 1 \arrow[d, "b"] \\ A \arrow[r, "p"'] & B \end{tikzcd}$$

MULTIPLICIDAD DE UN ELEMENTO.- La multiplicidad es el tamaño de su fibra.

En términos de particiones, el Axioma de Elección puede establecerse como:

"Para cualquier partición "p" de cualquier conjunto, existe al menos una función de elección "s", la cual elige un elemento de cada fibra de la partición"; $s: B \longrightarrow A$

Otras versiones del Axioma de elección son el Teorema del Buen orden, y el Principio de maximidad de Zorn.

Existe una versión que no asume que el morfismo dado sea suprayectivo y correspondientemente produce otro morfismo que en general es "algo menos" que una sección. Esa versión es la siguiente:

Si $X \xrightarrow{f} Y$ es cualquier morfismo $[X \neq \emptyset]$, entonces existe $Y \xrightarrow[g]{} X$ $[fgf = f]$

EJERCICIOS

(•) Si $fgf=f$, entonces existe $\bar{g}: Y \longrightarrow X$ [$f\bar{g}f=f$ y $\bar{g}f\bar{g}=\bar{g}$]

Demostración

Hagamos $\bar{g}=gfg$, tendremos:

$$\bar{g}f\bar{g}=(gfg)f(gfg)=g(fgf)gfg=g(f)gfg=g(fgf)g=gfg=\bar{g} \quad \therefore \bar{g}f\bar{g}=\bar{g}$$

$$f\bar{g}f=f(gfg)f=fg(fgf)=fgf=f \qquad \therefore f\bar{g}f=f \quad \blacksquare$$

(••) Supongase que $fgf=f$, donde $X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y$. Sea $E \xrightarrow{e} Y$ el igualador de fg y Id_Y. Mostrar que existe un único $X \xrightarrow[p]{} E$ [$f=ep$]. Mostrar que $pge=Id_E$, y portanto, si definimos $s=ge$ $r=pg$ obtendremos $ps=Id_E$ y $re=Id_E$. Más aún $er=fg$ y $sp=gf$.

¿Cómo debe estar relacionado g con f para tener $g=sr$?

Demostración

Supongamos $fgf=f$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f", shift left] \arrow[dr, dashed, "p"'] & Y \arrow[l, dashed, "g", shift left] \arrow[r, shift left, "Id_Y"] \arrow[r, shift right, "fg"'] & Y \\ & E \arrow[u, "e"'] & \end{tikzcd}$$

Tenemos que $Id_Y f=f=(fg)f$

$\therefore \exists!\, X \xrightarrow[p]{} E$ [$f=ep$]

Luego:

$$e=e\circ Id_E=Id_Y\circ e=fge=epge \qquad \therefore e\circ Id_E=epge$$

[e es monomorfismo] $\Longrightarrow$ $Id_E=pge$

Para que $g = sr$, se debe tener que $g = gfg$.

Observemos que p es epimorfismo:

$[hp = kp] \to [hpge = kpge] \to [h \circ Id_E = k \circ Id_E] \therefore h = k$

Tenemos pues que $f = ep$ es una epi-mono factorización de f. Es decir que p es epimorfismo, e es monomorfismo; y se da la igualdad $f = e \circ p$.

(Consultar Goldblatt páginas 110-114).

CAPITULO 12

Introducción a la exponenciación

La propiedad universal del producto, podemos resumirla en la figura

$$\frac{\overline{X} \longrightarrow Y_0 \times Y_1}{\overline{X} \longrightarrow Y_0,\ \overline{X} \longrightarrow Y_1}\ \Big\downarrow \Big\uparrow$$

donde se indica que existen procesos naturales de asignación entre la parte inferior y superior de la barra horizontal.

Estos procesos son inversos uno del otro.

$$\frac{\overline{X} \xrightarrow{\quad f \quad} Y_0 \times Y_1}{\overline{X} \xrightarrow{\pi \circ f} Y_0,\ \overline{X} \xrightarrow{\pi' \circ f} Y}\ \Big\downarrow \qquad\qquad \frac{\overline{X} \xrightarrow{\langle f_0, f_1 \rangle} Y_0 \times Y_1}{\overline{X} \xrightarrow{f_0} Y_0,\ \overline{X} \xrightarrow{f_1} Y_1}\ \Big\uparrow$$

Sean $\overline{X}_0 \xrightarrow{f_0} Y_0$ y $\overline{X}_1 \xrightarrow{f_1} Y_1$ cualesquiera dos morfismos; considérese el morfismo $\overline{X}_0 \times \overline{X}_1 \xrightarrow{f_0 \times f_1} Y_0 \times Y_1$ determinado por la conmutatividad del diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
\overline{X}_0 \times \overline{X}_1 \arrow[r, "f_0 \times f_1"] \arrow[d, "\pi^k_{\overline{X}_0 \times \overline{X}_1}"'] & Y_0 \times Y_1 \arrow[d, "\pi^k_{Y_0 \times Y_1}"] \\
\overline{X}_k \arrow[r, "f_k"'] & Y_k
\end{tikzcd} \qquad \text{con } k = 0, 1.$$

Es decir que $f_0 \times f_1 = \langle f_0\, \pi_{\overline{X}_0 \times \overline{X}_1} ; f_1\, \pi'_{\overline{X}_0 \times \overline{X}_1} \rangle$

de tal forma que $(f_0 \times f_1) \langle x_0, x_1 \rangle = \langle f_0 x_0, f_1 x_1 \rangle$

El morfismo $f_0 \times f_1$ es llamado el producto cartesiano de f_0 y f_1.

EJERCICIO.- Sean los morfismos $X_0 \xrightarrow{f_0} Y_0 \xrightarrow{g_0} Z_0$, $X_1 \xrightarrow{f_1} Y_1 \xrightarrow{g_1} Z_1$. Demostrar que $(g_0 \times g_1)(f_0 \times f_1) = (g_0 f_0) \times (g_1 f_1)$.

Demostración

$$(g_0 \times g_1)(f_0 \times f_1) = (g_0 \times g_1)\langle f_0 \pi_{X_0 \times X_1} ; f_1 \pi'_{X_0 \times X_1} \rangle = \langle g_0 f_0 \pi_{X_0 \times X_1} ; g_1 f_1 \pi'_{X_0 \times X_1} \rangle$$

$$= (g_0 f_0 \times g_1 f_1) \langle \pi_{X_0 \times X_1} ; \pi'_{X_0 \times X_1} \rangle = (g_0 f_0 \times g_1 f_1) \circ Id_{X_0 \times X_1} = g_0 f_0 \times g_1 f_1 \blacksquare$$

Analicemos ahora la exponenciación, cuya descripción involucra también un proceso de dos filas.

Consideremos el diagrama:

$$\begin{array}{c} X \longrightarrow Y^B \\ \hline X \times B \longrightarrow Y \end{array} \quad \downarrow\uparrow$$

En el caso especial $X = 1$:

$$\begin{array}{c} 1 \longrightarrow Y^B \\ \hline 1 \times B \longrightarrow Y \end{array} \quad \downarrow\uparrow$$

Veamos que $1 \times B \simeq B$

Demostración

$$\begin{tikzcd} & 1 \\ B \arrow[ur, "!_B"] \arrow[r, dashed, "\langle !_B, Id_B \rangle"] \arrow[dr, "Id_B"'] & 1 \times B \arrow[u, "\pi"'] \arrow[d, "\pi'"] \\ & B \end{tikzcd}$$

$\pi' \langle !_B, Id_B \rangle = Id_B$

Para ver que $\langle !_B, Id_B \rangle \pi' = Id_{1 \times B}$ proyectemos:

$\pi \langle !_B, Id_B \rangle \pi' = !_B \pi' = !_{1 \times B} = \pi$ (1 es terminal)

$\pi' \langle !_B, Id_B \rangle \pi' = Id_B \pi' = \pi'$

$\therefore \langle !_B, Id_B \rangle \pi' = Id_{1 \times B}$ Por tanto $1 \times B \simeq B$ ■

Tendremos entonces el diagrama de abajo:

$$\frac{1 \longrightarrow Y^B}{B \longrightarrow Y} \Big\updownarrow$$

Vemos pues que para conseguir los elementos de Y^B basta considerar los morfismos $B \longrightarrow Y$.

Ya que este proceso debe ser invertible, tenemos que debe haber tantos elementos de Y^B como morfismos $B \longrightarrow Y$. Los elementos de Y^B servirán como "nombres" para estos mapeos.

Ahora, si tenemos un mapeo $\overline{X} \times B \xrightarrow{f} Y$, para cada elemento $1 \xrightarrow[x_0]{} \overline{X}$ podemos considerar la composición siguiente:

$$\begin{tikzcd} & \overline{X} \times B \arrow[dr, "f"] & \\ B \arrow[ur, "\langle \overline{x}_0, Id_B \rangle"] \arrow[rr, "f_{x_0}"'] & {}\arrow[u, phantom, "//"] & Y \end{tikzcd}$$

Donde $\overline{x}_0$ es morfismo constante de valor x_0, es decir que $\overline{x}_0$ es la composición $B \xrightarrow[!_B]{} 1 \xrightarrow[x_0]{} \overline{X}$

De tal manera que tenemos: $f_{x_0}(b) = f\langle x_0, b \rangle$

Esto es: un mapeo $f : \overline{X} \times B \longrightarrow Y$ proporciona una familia, parametrizada por $\overline{X}$, de mapeos $B \longrightarrow Y$. Pueden tenerse las propiedades siguientes:

(•) Cada mapeo $B \longrightarrow Y$ es un f_x para al menos un elemento $1 \xrightarrow{x} \overline{X}$, es decir que tiene un nombre.

(••) $[f_{x_1} = f_{x_2}] \Longrightarrow [x_1 = x_2]$ Es decir que los morfismos $B \longrightarrow Y$ que tienen nombre, tienen solo uno.

Si ambas propiedades existen, escribiremos entonces Y^B en lugar de $\overline{X}$, y llamaremos <u>evaluación</u> al mapeo $Y^B \times B \longrightarrow Y$, en lugar de f.

Para cualquier $B \xrightarrow{\varphi} Y$, sea $1 \xrightarrow{\ulcorner \varphi \urcorner} Y^B$ el único elemento de Y^B

garantizado por (·) y (··).

Tenemos entonces que:

$$\mathrm{eval}\langle \ulcorner \varphi \urcorner, b\rangle = \varphi b$$

"$\ulcorner \varphi \urcorner$" es el nombre de φ".

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\langle \ulcorner \varphi \urcorner, b_0\rangle"] \arrow[d, "b_0"'] \arrow[dr, phantom, "/\!/"] & Y^B \times B \arrow[d, "\mathrm{eval}"] \\ B \arrow[r, "\varphi"] & Y \end{tikzcd}$$

Tal esquema que goza de las propiedades (·) y (··), tendrá una única relación con cualquier esquema de parametrización X, f; en donde f es tal que $X \times B \xrightarrow{f} Y$, y cualquier elemento $1 \xrightarrow{x} X$ dá origen a $B \xrightarrow{f_x} Y$.

$$\frac{X \xrightarrow{f^*} Y^B}{X \times B \xrightarrow{f} Y} \qquad f^*(x) = \ulcorner f_x \urcorner$$

La forma en que se relaciona este proceso con la evaluación es:

$$\mathrm{eval}\langle f^*(x), b\rangle = \mathrm{eval}\langle \ulcorner f_x \urcorner, b\rangle = f\langle x, b\rangle .$$

Es decir que $\mathrm{eval}\,(f^* \times \mathrm{Id}_B) = f$

Para cualquier morfismo f, f^* es el único morfismo para el cual $\mathrm{eval}\,(f^* \times \mathrm{Id}_B) = f$. Podemos en esta forma decir que cualquier morfismo f es derivable en forma única a partir del mapeo evaluación.

CAPITULO 13

Propiedades de la exponenciación

AXIOMA DE EXPONENCIACION

Para cualesquiera dos conjuntos B y Y, existen un conjunto Y^B y un mapeo evaluación $Y^B \times B \xrightarrow[eval]{} Y$ de tal forma que

$$\forall X \; \forall f \; [X \times B \xrightarrow{f} Y] \Longrightarrow \exists! \; X \xrightarrow{f^*} Y^B \; [eval(f^* \times Id_B) = f].$$

Al morfismo f^* lo llamaremos adjunto exponencial.

Se tiene entonces el esquema de la derecha

$$\frac{X \longrightarrow Y^B}{X \times B \longrightarrow Y} \quad \downarrow\uparrow$$

PROPOSICION.- Si $Y_1 \xrightarrow{\varphi} Y_2$, entonces existe un único morfismo $Y_1^B \xrightarrow[\varphi^B]{} Y_2^B$ $[\varphi^B(\ulcorner g \urcorner) = \ulcorner \varphi g \urcorner]$, donde $B \xrightarrow[g]{} Y_1$ cualquiera.

Demostración

El axioma anterior nos dice que basta construir un morfismo $Y_1^B \times B \longrightarrow Y_2$.

$$\frac{Y_1^B \times B \xrightarrow{eval_1} Y_1 \xrightarrow{\varphi} Y_2}{Y_1^B \xrightarrow{\varphi^B} Y_2^B} \qquad \text{Donde } \varphi^B = (\varphi \, eval_1)^*$$

Sea $1 \xrightarrow{\langle \ulcorner g \urcorner, b \rangle} Y_1^B \times B$ un elemento arbitrario:

$$\begin{tikzcd} Y_2^B \times B \arrow[r, "eval_2"] & Y_2 \\ Y_1^B \times B \arrow[u, dashed, "\varphi^B \times Id_B"] \arrow[r, "eval_1"'] \arrow[ur, phantom, "//"] & Y_1 \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

$eval_2(\varphi^B \times Id_B)\langle \ulcorner g \urcorner, b \rangle = eval_2 \langle \varphi^B \ulcorner g \urcorner, b \rangle$
$= \varphi \, eval_1 \langle \ulcorner g \urcorner, b \rangle = \varphi(g b) = (\varphi g) b$
$= eval_2 \langle \ulcorner \varphi g \urcorner, b \rangle$

Por tanto $eval_2 \langle \varphi^B \ulcorner g \urcorner, b \rangle = eval_2 \langle \ulcorner \varphi g \urcorner, b \rangle$

Ya que el adjunto exponencial es único, podemos concluir que $\underline{\varphi^B \ulcorner g \urcorner = \ulcorner \varphi g \urcorner}$. ⊠

<u>EJERCICIO</u>.- Sean $Y_1 \xrightarrow{\varphi} Y_2 \xrightarrow{\psi} Y_3$, mostrar que $(\psi\varphi)^B = \psi^B \varphi^B$.

<u>Demostración</u>

Consideremos el diagrama de abajo, donde $(\psi\varphi)^B = (\psi \varphi eval_1)^*$

$$\begin{tikzcd}
Y_3^B \times B \arrow[rr, "eval_3"] & & Y_3 \\
 & Y_2^B \times B \arrow[ul, dashed, "\psi^B \times Id_B"'] \arrow[r, "eval_2"] & Y_2 \arrow[u, "\psi"'] \\
Y_1^B \times B \arrow[uu, dashed, "(\psi\varphi)^B \times Id_B"] \arrow[ur, dashed, "\varphi^B \times Id_B"] \arrow[rr, "eval_1"] & & Y_1 \arrow[u, "\varphi"']
\end{tikzcd}$$

Sea $1 \xrightarrow[\langle \ulcorner g \urcorner, b \rangle]{} Y_1^B \times B$ un elemento cualquiera, entonces:

$eval_3 \left[(\psi\varphi)^B \times Id_B \right] \langle \ulcorner g \urcorner, b \rangle = eval_3 \langle (\psi\varphi)^B \ulcorner g \urcorner, b \rangle$

$= \psi \varphi \, eval_1 \langle \ulcorner g \urcorner, b \rangle = \psi \, eval_2 (\varphi^B \times Id_B) \langle \ulcorner g \urcorner, b \rangle$

$= eval_3 (\psi^B \times Id_B)(\varphi^B \times Id_B) \langle \ulcorner g \urcorner, b \rangle = eval_3 (\psi^B \varphi^B \times Id_B) \langle \ulcorner g \urcorner, b \rangle$

$= eval_3 \langle (\psi^B \varphi^B) \ulcorner g \urcorner ; b \rangle$

Por tanto $eval_3 \left[(\psi\varphi)^B \times Id_B \right] = eval_3 (\psi^B \varphi^B \times Id_B)$

Dado que el axioma establece la unicidad, tenemos $\underline{(\psi\varphi)^B = \psi^B \varphi^B}$ ⊠

PROPOSICION.- Sea $B_2 \xrightarrow{\beta} B_1$, entonces existe un único morfismo $Y^{B_1} \xrightarrow{Y^{\beta}} Y^{B_2}$ tal que $Y^{\beta}\ulcorner g \urcorner = \ulcorner g\beta \urcorner$.

Demostración

El morfismo apropiado lo obtenemos del diagrama de abajo

$$\frac{Y^{B_1}\times B_2 \xrightarrow{Id_{Y^{B_1}}\times\beta} Y^{B_1}\times B_1 \xrightarrow{eval_1} Y}{Y^{B_1} \xrightarrow{\quad Y^{\beta}\quad} Y^{B_2}}$$

donde $Y^{\beta} = [eval_1(Id_{Y^{B_1}}\times\beta)]^{*}$. Atendamos ahora al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Y^{B_2}\times B_2 \arrow[r, "eval_2"] & Y \\
Y^{B_1}\times B_2 \arrow[u, dashed, "Y^{\beta}\times Id_{B_2}"] \arrow[r, "Id_{Y^{B_1}}\times\beta"'] \arrow[ur, phantom, "//"] & Y^{B_1}\times B_1 \arrow[u, "eval_1"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
eval_2(Y^{\beta}\times Id_{B_2})\langle\ulcorner g\urcorner, b_2\rangle &= eval_2\langle Y^{\beta}\ulcorner g\urcorner, b_2\rangle \\
&= eval_1(Id_{Y^{B_1}}\times\beta)\langle\ulcorner g\urcorner, b_2\rangle = eval_1\langle\ulcorner g\urcorner, \beta b_2\rangle \\
&= (g\beta)b_2 = eval_2\langle\ulcorner g\beta\urcorner, b_2\rangle
\end{aligned}$$

Análogamente, concluimos que $\underline{\underline{Y^{\beta}\ulcorner g\urcorner = \ulcorner g\beta\urcorner}}$ ■

PROPOSICION.- Sean $B_3 \xrightarrow{\alpha} B_2 \xrightarrow{\beta} B_1$, mostrar que $Y^{\beta\alpha} = Y^{\alpha}Y^{\beta}$.

Demostración

$$Y^{\alpha}\circ Y^{\beta}\ulcorner g\urcorner = Y^{\alpha}\ulcorner g\beta\urcorner = \ulcorner (g\beta)\alpha\urcorner = \ulcorner g(\beta\alpha)\urcorner = Y^{\beta\alpha}\ulcorner g\urcorner \quad ■$$

La siguiente proposición muestra en que forma la operación fundamental entre morfismos, a saber la composición, puede expresarse como un morfismo cuando los tres conjuntos involucrados son fijos.

PROPOSICION.- Existe un morfismo $\varphi_2^{\varphi_1} \times \varphi_1^{B} \xrightarrow{\sigma^*} \varphi_2^{B}$ para el cual $\sigma^*\langle \ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner g\urcorner\rangle = \ulcorner\varphi g\urcorner$, para todos los morfismos $B \xrightarrow{g} \varphi_1 \xrightarrow{\varphi} \varphi_2$

Demostración

Sea $\sigma = eval_{1,2}(Id_{\varphi_2^{\varphi_1}} \times eval_1)$ como se ilustra en el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \varphi_2^{\varphi_1} \times \varphi_1^{B} \times B \arrow[rr, dashed, "\sigma"] \arrow[dr, "Id_{\varphi_2^{\varphi_1}} \times eval_1"'] & \arrow[d, phantom, "//"] & \varphi_2 \\ & \varphi_2^{\varphi_1} \times \varphi_1 \arrow[ur, "eval_{1,2}"'] & \end{tikzcd}$$

Luego entonces, el diagrama que sigue conmuta.

$$\begin{tikzcd} \varphi_2^{B} \times B \arrow[rr, "eval_2"] & & \varphi_2 \\ (\varphi_2^{\varphi_1} \times \varphi_1^{B}) \times B \arrow[u, dashed, "\sigma^* \times Id_B"] \arrow[rr, "Id_{\varphi_2^{\varphi_1}} \times eval_1"'] \arrow[urr, phantom, "//"] & & \varphi_2^{\varphi_1} \times \varphi_1 \arrow[u, "eval_{1,2}"'] \end{tikzcd}$$

Sea $1 \xrightarrow[\langle\langle \ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner g\urcorner\rangle, b\rangle]{} (\varphi_2^{\varphi_1} \times \varphi_1^{B}) \times B$ un elemento arbitrario, entonces:

$$eval_2(\sigma^* \times Id_B)\langle\langle \ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner g\urcorner\rangle b\rangle = eval_2\langle \sigma^*\langle \ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner g\urcorner\rangle, b\rangle$$

$$= eval_{1,2}(Id_{\varphi_2^{\varphi_1}} \times eval_1)\langle \ulcorner\varphi\urcorner; \langle \ulcorner g\urcorner, b\rangle\rangle = eval_{1,2}\langle \ulcorner\varphi\urcorner; eval_1\langle \ulcorner g\urcorner, b\rangle\rangle$$

$$= eval_{1,2}\langle \ulcorner\varphi\urcorner, gb\rangle = \varphi(gb) = (\varphi g)b = eval_2\langle \ulcorner\varphi g\urcorner, b\rangle$$

Por tanto $eval_2\langle \sigma^*\langle \ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner g\urcorner\rangle; b\rangle = eval_2\langle \ulcorner\varphi g\urcorner; b\rangle$

Como el adjunto exponencial es único, se tiene que $\sigma^*\langle \ulcorner\varphi\urcorner; \ulcorner g\urcorner\rangle = \ulcorner\varphi g\urcorner$ ■

De acuerdo al axioma, obsérvese que ϵ^* puede ser traspuesto, para obtener

$$Y_2^{Y_1} \longrightarrow (Y_2{}^{B})^{(Y_1{}^{B})}$$

cuyo valor en cualquier $\ulcorner\varphi\urcorner$ es el nombre $\ulcorner\varphi^{B}\urcorner$.

Recordemos que 2 representa, vía funciones características, las partes de un conjunto arbitrario B; si ésto lo relacionamos con el último axioma visto, tendremos los dos esquemas siguientes.

$$\frac{B \longrightarrow 2}{? \hookrightarrow B} \qquad\qquad \frac{1 \longrightarrow 2^{B}}{? \hookrightarrow B}$$

De esta forma, los elementos del conjunto 2^{B} sirven efectivamente como nombres para las partes de B, y en particular el número de partes de B puede ser definido como el número de elementos de 2^{B}. Más aún, el significado de la evaluación es solo la "pertenencia"; es decir que si $\varphi = \chi_i$, podemos definir $\|b\in i\| = \mathrm{eval}\langle\ulcorner\varphi\urcorner, b\rangle$, llamado el valor de verdad de la proposición "b es elemento de i".

<u>EJERCICIO</u>.- Si $B_2 \xrightarrow{\beta} B_1$, entonces $2^{B_1} \xrightarrow{2^{\beta}} 2^{B_2}$ representa la operación de tomar la imagen inversa de las partes de B_1 a lo largo de β.

<u>Demostración</u>

Anteriormente demostré que $\chi_{f^{-1}[j]} = \chi_j \circ f$.

Sea $1 \xrightarrow{\ulcorner\varphi\urcorner} 2^{B_1}$ un elemento arbitrario. Por un lado $2^{\beta}\ulcorner\varphi\urcorner = \ulcorner\varphi\beta\urcorner$

pero si $\varphi = \chi_j$, entonces $\chi_{\beta^{-1}[j]} = \chi_j \circ \beta = \varphi \circ \beta$. Pues $B_2 \xrightarrow{\beta} B_1 \xrightarrow{\varphi} 2$

El uso de la notación exponencial se justifica en el hecho de que para conjuntos finitos, el número de morfismos de B en Y es el número de elementos de Y elevado al número de elementos de B.

Decimos que $\bar{X}_1$ y $\bar{X}_2$ tienen el mismo número de elementos si existe $\bar{X}_1 \xrightarrow{f} \bar{X}_2$ invertible.

<u>PROPOSICION</u>: (•) $Y^0 \simeq 1$ (••) $Y^{A+B} \simeq Y^A \times Y^B$

<u>Demostración</u>

(•) Consideremos el esquema de abajo.

$$\begin{array}{c} 1 \longrightarrow Y^0 \\ \hline 1 \times 0 \longrightarrow Y \\ \hline 0 \times 1 \longrightarrow Y \\ \hline 0 \longrightarrow Y^1 \end{array}$$

Ya que esta es una correspondencia biunívoca de morfismos y $0 \xrightarrow{0_{Y^1}} Y^1$ es el único morfismo existente, se tiene que existe un solo morfismo $1 \xrightarrow{v} Y^0$.

Tenemos $Y^0 \xrightarrow{!_{Y^0}} 1 \xrightarrow{v} Y^0$. Claramente $\underline{!_{Y^0}\, v = Id_1}$

Por otro lado:

$$\begin{array}{c} Y^0 \longrightarrow Y^0 \\ \hline Y^0 \times 0 \longrightarrow Y \\ \hline 0 \times Y^0 \longrightarrow Y \\ \hline 0 \longrightarrow (Y)^{Y^0} \end{array}$$

Análogamente; ya que existe un solo morfismo $0 \longrightarrow (Y)^{Y^0}$, tenemos que el único morfismo $Y^0 \longrightarrow Y^0$ es la Id_{Y^0}.

Luego entonces $\underline{v\,!_{Y^0} = Id_{Y^0}}$

$\therefore$ $\underline{Y^0 \simeq 1}$

(••) Tenemos los morfismos $A \xrightarrow{i_A} A+B \xleftarrow{i_B} B$.

Aplicando la segunda proposición obtenemos los morfismos:

$$\Upsilon^{A+B} \xrightarrow{\Upsilon^{i_A}} \Upsilon^{A} \qquad \Upsilon^{A+B} \xrightarrow{\Upsilon^{i_B}} \Upsilon^{B}$$

Tendremos entonces el morfismo $\Upsilon^{A+B} \xrightarrow{\langle \Upsilon^{i_A};\, \Upsilon^{i_B}\rangle} \Upsilon^{A} \times \Upsilon^{B}$.

De tal forma que: $\langle \Upsilon^{i_A}; \Upsilon^{i_B}\rangle (\ulcorner f \urcorner) = \langle \ulcorner f i_A \urcorner ; \ulcorner f i_B \urcorner \rangle$

Damos ahora el morfismo inverso $\Upsilon^{A} \times \Upsilon^{B} \xrightarrow{\Delta} \Upsilon^{A+B}$

$$\Delta \langle \ulcorner f_A \urcorner, \ulcorner f_B \urcorner \rangle = \ulcorner [f_A, f_B] \urcorner$$

Veamos que son inversos uno del otro:

$$[\langle \Upsilon^{i_A}; \Upsilon^{i_B}\rangle \circ \Delta] \langle \ulcorner f_A \urcorner, \ulcorner f_B \urcorner \rangle = \langle \Upsilon^{i_A}, \Upsilon^{i_B}\rangle \ulcorner [f_A, f_B] \urcorner = \langle \Upsilon^{i_A} \ulcorner [f_A, f_B] \urcorner, \Upsilon^{i_B} \ulcorner [f_A, f_B] \urcorner \rangle$$

$$= \langle \ulcorner [f_A, f_B] \circ i_A \urcorner ; \ulcorner [f_A, f_B] \circ i_B \urcorner \rangle = \langle \ulcorner f_A \urcorner ; \ulcorner f_B \urcorner \rangle \checkmark$$

Por otro lado:

$$[\Delta \circ \langle \Upsilon^{i_A}; \Upsilon^{i_B}\rangle] \ulcorner f \urcorner = \Delta \langle \Upsilon^{i_A} \ulcorner f \urcorner ; \Upsilon^{i_B} \ulcorner f \urcorner \rangle = \Delta \langle \ulcorner f i_A \urcorner ; \ulcorner f i_B \urcorner \rangle$$

$$= \ulcorner [f i_A ; f i_B] \urcorner = \ulcorner f \urcorner \checkmark$$

Por tanto $\underline{\Upsilon^{A+B} \simeq \Upsilon^{A} \times \Upsilon^{B}}$

$\blacksquare$

PROPOSICION.- $(\cdot)$ $1^B \simeq 1$ $\qquad$ $(\cdot\cdot)$ $(Y_0 \times Y_1)^B \simeq Y_0^B \times Y_1^B$.

Demostración

$(\cdot)$ Consideremos la correspondencia de morfismos siguiente

$$\frac{\frac{1 \longrightarrow 1^B}{1 \times B \longrightarrow 1}}{B \longrightarrow 1}$$

Luego entonces: $B \xrightarrow{!_B} 1$,

$1 \times B \xrightarrow{\pi'} B \xrightarrow{!_B} 1$

Por tanto: $1 \xrightarrow{(!_B\pi')^*} 1^B$.

Hago la observación de que $\ulcorner !_B \urcorner = (!_B\pi')^*$.

Sea $1^B \xrightarrow{!_{1^B}} 1$. Es claro que: $\underline{!_{1^B}(!_B\pi')^* = Id_1}$

Consideremos el diagrama de abajo:

$$\begin{tikzcd}
1^B \times B \arrow[rrd, "eval"] & & \\
1 \times B \arrow[u, "(!_B\pi')^* \times Id_B"] \arrow[rr, "!_B\pi'"] & & 1 \\
1^B \times B \arrow[u, "!_{1^B} \times Id_B"] \arrow[rru, "eval"'] & &
\end{tikzcd}$$

Tenemos que: $eval = !_{1^B \times B}$, luego

$eval\,(((!_B\pi')^* \times Id_B)\,(!_{1^B} \times Id_B))$

$= eval\,(((!_B\pi')^*\, !_{1^B} \times Id_B) = eval$

Pero el adjunto exponencial es único, Por tanto tenemos $\underline{Id_{1^B} = (!_B\pi')^*\, !_{1^B}}$

Luego entonces $\underline{\underline{1^B \simeq 1}}$ ∎

$(\cdot\cdot)$ Tenemos los morfismos

$Y_0 \times Y_1 \xrightarrow{\pi_0} Y_0 \qquad Y_0 \times Y_1 \xrightarrow{\pi_1} Y_1$

Los cuales inducen los morfismos

$$(Y_0\times Y_1)^B \xrightarrow{\pi_0^B} Y_0^B \qquad\qquad (Y_0\times Y_1)^B \xrightarrow{\pi_1^B} Y_1^B$$

$$(Y_0\times Y_1)^B \xrightarrow{\langle \pi_0^B, \pi_1^B\rangle} Y_0^B\times Y_1^B$$

Para el morfismo inverso, consideremos lo siguiente:

$$(Y_0^B\times Y_1^B)\times B \xrightarrow{p_0\times Id_B} Y_0^B\times B \xrightarrow{eval_0} Y_0$$

$$(Y_0^B\times Y_1^B)\times B \xrightarrow{p_1\times Id_B} Y_1^B\times B \xrightarrow{eval_1} Y_1$$

donde $p_0 = \pi_{Y_0^B\times Y_1^B}$ y $p_1 = \pi'_{Y_0^B\times Y_1^B}$.

De estos morfismos obtenemos el siguiente:

$$(Y_0^B\times Y_1^B)\times B \xrightarrow{\langle eval_0(p_0\times Id_B)\,;\,eval_1(p_1\times Id_B)\rangle} Y_0\times Y_1$$

el que llamaremos simplemente π_6

Finalmente obtenemos:

$$Y_0^B\times Y_1^B \xrightarrow{\pi_6^*} (Y_0\times Y_1)^B$$

$$\begin{tikzcd}
(Y_0\times Y_1)^B\times B \arrow[dr, "eval_{0,1}"] & \\
\pi_6^*\times Id_B \arrow[r, phantom, "="] & Y_0\times Y_1 \\
(Y_0^B\times Y_1^B)\times B \arrow[uu, dashed] \arrow[ur, "\pi_6"'] &
\end{tikzcd}$$

Veamos como actúa $\varkappa^*$

$$eval_{0,1}(\varkappa^* \times Id_B)\langle\langle \ulcorner f_0 \urcorner, \ulcorner f_1 \urcorner\rangle ; b\rangle = eval_{0,1}\langle \varkappa^* \langle \ulcorner f_0 \urcorner, \ulcorner f_1 \urcorner\rangle ; b\rangle$$

$$= \varkappa\langle\langle \ulcorner f_0 \urcorner, \ulcorner f_1 \urcorner\rangle ; b\rangle = \langle eval_0(p_0 \times Id_B) ; eval_1(p_1 \times Id_B)\rangle \langle\langle \ulcorner f_0 \urcorner, \ulcorner f_1 \urcorner\rangle ; b\rangle$$

$$= \langle eval_0(p_0 \times Id_B)\langle\langle \ulcorner f_0 \urcorner, \ulcorner f_1 \urcorner\rangle b\rangle ; eval_1(p_1 \times Id_B)\langle\langle \ulcorner f_0 \urcorner, \ulcorner f_1 \urcorner\rangle , b\rangle\rangle$$

$$= \langle eval_0 \langle \ulcorner f_0 \urcorner, b\rangle ; eval_1 \langle \ulcorner f_1 \urcorner, b\rangle\rangle = \langle f_0 b ; f_1 b\rangle$$

$$= \langle f_0, f_1\rangle(b) = eval_{0,1}\langle \ulcorner \langle f_0, f_1\rangle \urcorner , b\rangle$$

Por tanto:

$$\langle \ulcorner f_0 \urcorner, \ulcorner f_1 \urcorner\rangle \xrightarrow{\varkappa^*} \ulcorner \langle f_0, f_1\rangle \urcorner$$

Comprobemos ahora que son inversos uno del otro:

$$\varkappa^* \langle \pi_0^B, \pi_1^B\rangle \ulcorner \langle f_0, f_1\rangle \urcorner = \varkappa^* \langle \pi_0^B \ulcorner \langle f_0, f_1\rangle \urcorner , \pi_1^B \ulcorner \langle f_0, f_1\rangle \urcorner\rangle$$

$$= \varkappa^* \langle \ulcorner \pi_0 \langle f_0, f_1\rangle \urcorner , \ulcorner \pi_1 \langle f_0, f_1\rangle \urcorner\rangle = \varkappa^* \langle \ulcorner f_0 \urcorner, \ulcorner f_1 \urcorner\rangle = \ulcorner \langle f_0, f_1\rangle \urcorner$$

Por tanto $\underline{\varkappa^* \langle \pi_0^B, \pi_1^B\rangle = Id_{(Y_0 \times Y_1)^B}}$

Además:

$$\langle \pi_0^B, \pi_1^B\rangle \varkappa^* \langle \ulcorner f_0 \urcorner, \ulcorner f_1 \urcorner\rangle = \langle \pi_0^B, \pi_1^B\rangle \ulcorner \langle f_0, f_1\rangle \urcorner$$

$$= \langle \pi_0^B \ulcorner \langle f_0, f_1\rangle \urcorner ; \pi_1^B \ulcorner \langle f_0, f_1\rangle \urcorner\rangle = \langle \ulcorner \pi_0 \langle f_0, f_1\rangle \urcorner ; \ulcorner \pi_1 \langle f_0, f_1\rangle \urcorner\rangle = \langle \ulcorner f_0 \urcorner, \ulcorner f_1 \urcorner\rangle$$

Por tanto $\underline{\langle \pi_0^B, \pi_1^B\rangle \varkappa^* = Id_{Y_0^B \times Y_1^B}}$ $\quad \therefore \underline{(Y_0 \times Y_1)^B \simeq Y_0^B \times Y_1^B}$ ▨

PROPOSICION: (·) $Y \cong Y^1$ (··) $Y^{I\times B} \cong (Y^B)^I$

Demostración

(·) $\dfrac{Y \xrightarrow{\pi^*} Y^1}{Y\times 1 \xrightarrow{\pi} Y}$ y definimos g mediante la composición $Y^1 \xrightarrow{\langle Id_{Y^1}, !_{Y^1}\rangle} Y^1\times 1 \xrightarrow{eval} Y$

Con lo que los dos diagramas a continuación conmutan

$$\begin{tikzcd} Y^1\times 1 \arrow[dr, bend left, "eval"] & \\ Y\times 1 \arrow[u, "\pi^*\times Id_1"] \arrow[r, "\pi"'] \arrow[ur, phantom, "//"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y^1 \arrow[rr, dashed, "g"] \arrow[dr, "\langle Id_{Y^1}; !_{Y^1}\rangle"'] & // & Y \\ & Y^1\times 1 \arrow[ur, "eval"'] & \end{tikzcd}$$

Veamos que $g\pi^* = Id_Y$. Sea $1 \xrightarrow{y} Y$ cualquier elemento, tenemos:

$(g\pi^*)y = eval\langle Id_{Y^1}; !_{Y^1}\rangle \pi^* y = eval\langle \pi^* y; !_{Y^1}(\pi^* y)\rangle$

$= eval\langle \pi^* y; Id_1\rangle = eval(\pi^*\times Id_1)\langle y; Id_1\rangle = \pi\langle y; Id_1\rangle = y$

$\therefore\ \underline{g\pi^* = Id_Y}$

Consideremos por otro lado el diagrama de abajo

$$\begin{tikzcd} Y^1\times 1 \arrow[dr, "eval"] & \\ Y\times 1 \arrow[u, dashed, "\pi^*\times Id_1"] \arrow[r, "\pi"] \arrow[ur, phantom, "//"] & Y \\ Y^1\times 1 \arrow[u, dashed, "g\times Id_1"] \arrow[ur, "eval"'] \arrow[ur, phantom, "?"] & \end{tikzcd}$$

$eval(\pi^*\times Id_1)(g\times Id_1)\ \langle \ulcorner y\urcorner; Id_1\rangle$

$= \pi(g\times Id_1)\langle \ulcorner y\urcorner; Id_1\rangle = \pi\langle g\ulcorner y\urcorner; Id_1\rangle$

$= eval\langle Id_{Y^1}; !_{Y^1}\rangle \ulcorner y\urcorner = g\ulcorner y\urcorner$

$= eval\langle \ulcorner y\urcorner; !_{Y^1}\ulcorner y\urcorner\rangle = eval\langle \ulcorner y\urcorner; Id_1\rangle$

Sin embargo el morfismo $Y' \xrightarrow{Id_{Y'}} Y'$ claramente hace conmutar el triángulo externo, y ya que el adjunto exponencial es único, tenemos

$\underline{\pi^* g = Id_{Y'}}$

Luego entonces $\underline{Y \simeq Y'}$ ▨

(••) Consideremos los dos diagramas conmutativos siguientes

$$\begin{tikzcd}
Y^B \times B \arrow[r, "eval_{Y^B}"] & Y \\
(Y^{\bar X \times B} \times \bar X) \times B \arrow[u, "(eval_{\bar X,B} \circ i)^* \times Id_B"] \arrow[r, "i"] & Y^{\bar X \times B} \times (\bar X \times B) \arrow[u, "eval_{\bar X,B}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(Y^B)^{\bar X} \times \bar X \arrow[dr, "eval_{(Y^B)^{\bar X}}"] & \\
Y^{\bar X \times B} \times \bar X \arrow[u, "(eval_{\bar X,B} \circ i)^{**} \times Id_{\bar X}"] \arrow[r, "(eval_{\bar X,B} \circ i)^*"'] & Y^B
\end{tikzcd}$$

donde i es isomorfismo.

Luego:

$eval_{(Y^B)^{\bar X}} \left[(eval_{\bar X,B} \circ i)^{**} \times Id_{\bar X} \right] \langle \ulcorner f \urcorner, x \rangle$

$= eval_{(Y^B)^{\bar X}} \langle (eval_{\bar X,B} \circ i)^{**} \ulcorner f \urcorner ; x \rangle = (eval_{\bar X,B} \circ i)^* \langle \ulcorner f \urcorner, x \rangle.$

Ahora veamos como actúa el morfismo $(eval_{\bar X,B} \circ i)^*$:

$eval_{Y^B} \left[(eval_{\bar X,B} \circ i)^* \times Id_B \right] \langle \langle \ulcorner f \urcorner, x \rangle ; b \rangle$

$= eval_{Y^B} \langle (eval_{\bar X,B} \circ i)^* \langle \ulcorner f \urcorner, x \rangle ; b \rangle = eval_{\bar X,B} \circ i \, \langle \langle \ulcorner f \urcorner, x \rangle ; b \rangle$

$= eval \langle \ulcorner f \urcorner ; \langle x, b \rangle \rangle = f \langle x, b \rangle = eval_{Y^B} \langle \ulcorner f_x \urcorner ; b \rangle$

Como el adjunto exponencial es único, tenemos que:

$$\underline{(eval_{X,B}\circ i)^{*}\langle \ulcorner f\urcorner ; x\rangle = \ulcorner f_x \urcorner}$$

Consideremos por otro lado el diagrama siguiente conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Y^{X\times B}\times (X\times B) \arrow[rr, "eval_{X,B}"] & & Y \\
& & Y^{B}\times B \arrow[u, "eval_Y^{B}"'] \\
(Y^{B})^{X}\times (X\times B) \arrow[uu, dashed, "\underbrace{\left[eval_Y^{B}\circ(eval_{(Y^B)^X}\times Id_B)\circ j\right]^{*}}_{\pi_6}\times Id_{X\times B}"] \arrow[rr, "j"', "\text{(isomorfismo)}"] \arrow[uurr, phantom, "//"] & & \left[(Y^{B})^{X}\times X\right]\times B \arrow[u, "eval_{(Y^B)^X}\times Id_B"']
\end{tikzcd}$$

$$eval_{X,B}\,(\pi_6\times Id_{X\times B})\langle \ulcorner g\urcorner ; \langle x,b\rangle\rangle = eval_{X,B}\langle \pi_6\ulcorner g\urcorner ; \langle x,b\rangle\rangle$$

$$= eval_Y^{B}\,(eval_{(Y^B)^X}\times Id_B)\, j\langle \ulcorner g\urcorner ; \langle x,b\rangle\rangle$$

$$= eval_Y^{B}\,(eval_{(Y^B)^X}\times Id_B)\,\langle\langle \ulcorner g\urcorner , x\rangle ; b\rangle$$

$$= eval_Y^{B}\langle eval_{(Y^B)^X}\langle \ulcorner g\urcorner , x\rangle ; b\rangle = eval_Y^{B}\langle g_x ; b\rangle = g_x(b)$$

Podríamos decir que entonces la aplicación del morfismo π_6 es la siguiente:

$\left[eval_Y^{B}\circ(eval_{(Y^B)^X}\times Id_B)\circ j\right]^{*}\ulcorner g\urcorner$ = "Bautiza a la "g" dándole el nombre según la "x" a la que se aplique".

Esquemáticamente los morfismos son:

$$Y^{X\times B} \longrightarrow (Y^{B})^{X} \qquad\qquad (Y^{B})^{X} \longrightarrow Y^{X\times B}$$

$$\ulcorner f \urcorner \longrightarrow \ulcorner x \rightsquigarrow f(x,-)=f_x \urcorner \qquad\qquad \ulcorner g \urcorner \longrightarrow \ulcorner \langle x,b\rangle \rightsquigarrow g_x(b) \urcorner$$

donde vemos claramente que son inversos uno del otro.

$\therefore\ \underline{Y^{X\times B} \simeq (Y^{B})^{X}}$ ∎

<u>EJERCICIO</u>.- Usando exponenciación, probar que

$$\left[X \xrightarrow{\ f\ } Y \text{ epimorfismo} \right] \Longrightarrow \left[A\times X \xrightarrow{Id_A \times f} A\times Y \text{ es epimorfismo} \right]$$

<u>Demostración</u>

Consideremos el diagrama conmutativo siguiente

$$\begin{tikzcd}
Z^{A}\times A \arrow[r, "eval"] & Z \\
Y\times A \arrow[u, dashed, shift left] \arrow[u, dashed, shift right] \arrow[r, "i=\langle \pi',\pi\rangle"] \arrow[ur, phantom, "//"] & A\times Y \arrow[u, shift left, "h"] \arrow[u, shift right, "g"'] \\
X\times A \arrow[u, "f\times Id_A"]
\end{tikzcd}$$

Supongamos que $h(Id_A\times f) = g(Id_A\times f)$

$eval[(hi)^{*}\times Id_A](f\times Id_A)$

$= hi(f\times Id_A) = h(Id_A\times f) = g(Id_A\times f)$

$= gi(f\times Id_A) = eval[(gi)^{*}\times Id_A](f\times Id_A)$

Por tanto $(hi)^{*}f = (gi)^{*}f$

Por tanto $(hi)^{*} = (gi)^{*}$; luego entonces $hi = gi$.

Pero i es isomorfismo, $\therefore\ \underline{h=g}$ $\qquad \therefore\ \underline{Id_A\times f \text{ es epimorfismo}}$ ∎

CAPITULO 14

Ley Distributiva (TESIS)

La demostración de la siguiente proposición es parte escencial del trabajo de tesis; pues difiere de todas las demostraciones encontradas. Mientras que éstas utilizan resultados muy fuertes, la demostración que aquí se presenta es directa.

Advertimos que particularmente usaremos la primera proposición del capítulo anterior, así como caracterizaciones universales y el lema a continuación.

LEMA.- Sean $A+B \xrightarrow{\langle [f,g];[h,k]\rangle} C\times D$, $A+B \xrightarrow{[\langle f,h\rangle;\langle g,k\rangle]} C\times D$

Entonces $\langle [f,g];[h,k]\rangle = [\langle f,h\rangle;\langle g,k\rangle]$

Demostración

$$\langle [f,g];[h,k]\rangle \tau = \langle [f,g]\tau;[h,k]\tau\rangle = \langle f,h\rangle = [\langle f,h\rangle;\langle g,k\rangle]\tau$$

$$\langle [f,g];[h,k]\rangle \tau' = \langle [f,g]\tau';[h,k]\tau'\rangle = \langle g,k\rangle = [\langle f,h\rangle;\langle g,k\rangle]\tau' \blacksquare$$

PROPOSICION.- $(A\times C)+(B\times C) \simeq (A+B)\times C$

Demostración

Fijémonos en la siguiente correspondencia de morfismos, en la cual han sido dados de abajo hacia arriba.

$$
\begin{array}{c}
(A\times C)+(B\times C) \xrightarrow{\left\langle [\nabla_{A+B}\pi_{A\times C};\ \nabla'_{A+B}\pi_{B\times C}]\ ;\ [\pi'_{A\times C};\ \pi'_{B\times C}]\right\rangle = F} (A+B)\times C \\
\hdashline
(A\times C)+(B\times C) \xrightarrow{[\nabla_{A+B}\pi_{A\times C};\ \nabla'_{A+B}\pi_{B\times C}]} A+B \qquad (A\times C)+(B\times C) \xrightarrow{[\pi'_{A\times C};\ \pi'_{B\times C}]} C \\
\hdashline
A\times C \xrightarrow{\nabla_{A+B}\pi_{A\times C}} A+B \qquad A\times C \xrightarrow{\pi'_{A\times C}} C \\
B\times C \xrightarrow{\nabla'_{A+B}\pi_{B\times C}} A+B \qquad B\times C \xrightarrow{\pi'_{B\times C}} C
\end{array}
$$

Para conseguir el otro morfismo, atendamos la siguiente correspondencia:

$$
\begin{array}{c}
(A+B)\times C \xrightarrow{eval\left([\nabla^{*}_{(A\times C)+(B\times C)};\ \nabla'^{*}_{(A\times C)+(B\times C)}]\times Id_C\right) = G} (A\times C)+(B\times C) \\
\hdashline
(A+B) \xrightarrow{[\nabla^{*}_{(A\times C)+(B\times C)};\ \nabla'^{*}_{(A\times C)+(B\times C)}]} [(A\times C)+(B\times C)]^C \\
\hdashline
A \xrightarrow{\nabla^{*}_{(A\times C)+(B\times C)}} [(A\times C)+(B\times C)]^C \qquad B \xrightarrow{\nabla'^{*}_{(A\times C)+(B\times C)}} [(A\times C)+(B\times C)]^C \\
\hdashline
A\times C \xrightarrow{\nabla_{(A\times C)+(B\times C)}} (A\times C)+(B\times C) \qquad B\times C \xrightarrow{\nabla'_{(A\times C)+(B\times C)}} (A\times C)+(B\times C)
\end{array}
$$

$$
\begin{tikzcd}
{[(A\times C)+(B\times C)]^C\times C} \arrow[rr, "eval"] & & (A\times C)+(B\times C) \\
& {} \arrow[u, phantom, "//"] & \\
& (A+B)\times C \arrow[uul, "{[\nabla^{*}_{(A\times C)+(B\times C)};\ \nabla'^{*}_{(A\times C)+(B\times C)}]\times Id_C}"] \arrow[uur, dashed, "G"'] &
\end{tikzcd}
$$

Antes de ver que F y G son inversos uno del otro, veamos dos puntos que requeriremos.

<u>AFIRMACIÓN 1</u>: $\left([\nabla_{A+B}\pi_{A\times C};\nabla'_{A+B}\pi_{B\times C}]\,eval\right)^{*} = [\nabla_{A+B}\pi_{A\times C};\nabla'_{A+B}\pi_{B\times C}]^{C}$

<u>Demostración</u>

Veamos que el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
(A+B)^C \times C \arrow[rr, "e_{A+B}"] & & A+B \\
& {[(A\times C)+(B\times C)]^C \times C} \arrow[ul, "{[\nabla_{A+B}\pi_{A\times C};\nabla'_{A+B}\pi_{B\times C}]^C \times Id_C}"] \arrow[r, "eval"] \arrow[u, phantom, "?"] & (A\times C)+(B\times C) \arrow[u, "{[\nabla_{A+B}\pi_{A\times C};\nabla'_{A+B}\pi_{B\times C}]}"'] \\
& (A+B)\times C \arrow[u, "{[\nabla^{*}_{(A\times C)+(B\times C)};\nabla'^{*}_{(A\times C)+(B\times C)}] \times Id_C}"] &
\end{tikzcd}$$

Sea $1 \xrightarrow{\ulcorner f \urcorner} [(A\times C)+(B\times C)]^C$ arbitrario, tenemos entonces:

$$e_{A+B}\left([\nabla_{A+B}\pi_{A\times C};\nabla'_{A+B}\pi_{B\times C}]^C \times Id_C\right)\langle \ulcorner f \urcorner, c\rangle$$

$$= e_{A+B}\left\langle [\nabla_{A+B}\pi_{A\times C};\nabla'_{A+B}\pi_{B\times C}]^C \ulcorner f \urcorner ; c\right\rangle = e_{A+B}\left\langle \ulcorner [\nabla_{A+B}\pi_{A\times C};\nabla'_{A+B}\pi_{B\times C}]\circ f \urcorner ; c\right\rangle$$

$$= \left([\nabla_{A+B}\pi_{A\times C};\nabla'_{A+B}\pi_{B\times C}]\circ f\right) c \quad = \quad [\nabla_{A+B}\pi_{A\times C};\nabla'_{A+B}\pi_{B\times C}]\,(fc)$$

$$= [\nabla_{A+B}\pi_{A\times C};\nabla'_{A+B}\pi_{B\times C}]\; eval\,\langle \ulcorner f \urcorner ; c\rangle$$

$$\therefore\; e_{A+B}\left([\nabla_{A+B}\pi_{A\times C};\nabla'_{A+B}\pi_{B\times C}]^C \times Id_C\right) = [\nabla_{A+B}\pi_{A\times C};\nabla'_{A+B}\pi_{B\times C}]\; eval$$

dada la unicidad del adjunto exponencial; la afirmación 1 se verifica ▣

De manera análoga verificamos la afirmación 2

<u>AFIRMACION 2.</u>- $\left([\pi'_{A\times C};\pi'_{B\times C}]\ eoal\right)^{*} = [\pi'_{A\times C};\pi'_{B\times C}]^{C}$

<u>Demostración</u>

Análogamente, usamos que el diagrama de abajo es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
C^{C}\times C \arrow[rr, "e_c"] & & C \\
{[(A\times C)+(B\times C)]^{C}\times C} \arrow[u, "{[\pi'_{A\times C};\pi'_{B\times C}]^{C}\times Id_C}"] \arrow[rr, "eoal"] \arrow[urr, phantom, "?"] & & (A\times C)+(B\times C) \arrow[u, "{[\pi'_{A\times C};\pi'_{B\times C}]}"'] \\
(A+B)\times C \arrow[u, "{[\gamma'^{*}_{(A\times C)+(B\times C)};\gamma'^{*}_{(A\times C)+(B\times C)}]\times Id_C}"] & &
\end{tikzcd}$$

Sea $1 \xrightarrow{\ulcorner f \urcorner} [(A\times C)+(B\times C)]^{C}$ arbitrario, tenemos entonces:

$$e_c\left([\pi'_{A\times C};\pi'_{B\times C}]^{C}\times Id_C\right)\langle \ulcorner f\urcorner ; c\rangle = e_c\ \langle [\pi'_{A\times C};\pi'_{B\times C}]^{C}\ulcorner f\urcorner ; c\rangle$$

$$= e_c\ \langle \ulcorner [\pi'_{A\times C};\pi'_{B\times C}] f\urcorner ; c\rangle = \left([\pi'_{A\times C};\pi'_{B\times C}] f\right) c$$

$$= [\pi'_{A\times C};\pi'_{B\times C}]\,(fc) \ = [\pi'_{A\times C};\pi'_{B\times C}]\ eoal\ \langle \ulcorner f\urcorner ; c\rangle$$

Por la unicidad del adjunto exponencial: $\left([\pi'_{A\times C};\pi'_{B\times C}]\ eoal\right)^{*} = [\pi'_{A\times C};\pi'_{B\times C}]^{C}$ ■

Veamos que $G \circ F = Id_{(A\times C)+(B\times C)}$

$$eval\left(\left[\nabla^*_{(A\times C)+(B\times C)}; \nabla'^*_{(A\times C)+(B\times C)}\right] \times Id_C\right)\left\langle\left[\nabla_{A+B}\Pi_{A\times C}, \nabla'_{A+B}\Pi_{B\times C}\right]; \left[\Pi'_{A\times C}; \Pi'_{B\times C}\right]\right\rangle$$

$$= eval\left\langle\left[\nabla^*_{(A\times C)+(B\times C)}; \nabla'^*_{(A\times C)+(B\times C)}\right]\left[\nabla_{A+B}\Pi_{A\times C}; \nabla'_{A+B}\Pi_{B\times C}\right]; \left[\Pi'_{A\times C}; \Pi'_{B\times C}\right]\right\rangle$$

$$= eval\left\langle\left[\nabla^*_{(A\times C)+(B\times C)}\Pi_{A\times C}; \nabla'^*_{(A\times C)+(B\times C)}\Pi_{B\times C}\right]; \left[\Pi'_{A\times C}; \Pi'_{B\times C}\right]\right\rangle$$

Apliquemos el LEMA para obtener la siguiente igualdad.

$$= eval\left[\left\langle\nabla^*_{(A\times C)+(B\times C)}\Pi_{A\times C}; \Pi'_{A\times C}\right\rangle; \left\langle\nabla'^*_{(A\times C)+(B\times C)}\Pi_{B\times C}; \Pi'_{B\times C}\right\rangle\right]$$

$$= \left[eval\left(\nabla^*_{(A\times C)+(B\times C)} \times Id_C\right); eval\left(\nabla'^*_{(A\times C)+(B\times C)} \times Id_C\right)\right]$$

$$= \left[\nabla_{(A\times C)+(B\times C)}; \nabla'_{(A\times C)+(B\times C)}\right]$$

$$= Id_{(A\times C)+(B\times C)}$$

Por tanto $\boxed{G \circ F = Id_{(A\times C)+(B\times C)}}$

Veamos ahora que $F \circ G = Id_{(A+B)\times C}$

Puesto que: $Id_{(A+B)\times C} = \langle \Pi_{(A+B)\times C}; \Pi'_{(A+B)\times C}\rangle$; basta ver que $\langle \varphi, \varphi' \rangle = \langle \Pi_{(A+B)\times C}; \Pi'_{(A+B)\times C}\rangle$, donde

$$\varphi = \left[\nabla_{A+B}\Pi_{A\times C}; \nabla'_{A+B}\Pi_{B\times C}\right] eval\left(\left[\nabla^*_{(A\times C)+(B\times C)}; \nabla'^*_{(A\times C)+(B\times C)}\right] \times Id_C\right)$$

$$\varphi' = \left[\Pi'_{A\times C}; \Pi'_{B\times C}\right] eval\left(\left[\nabla^*_{(A\times C)+(B\times C)}; \nabla'^*_{(A\times C)+(B\times C)}\right] \times Id_C\right)$$

Analicemos φ.

El siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
(A+B)^C \times C \arrow[rr, "e_{A+B}"] & & A+B \\
{[(A\times C)+(B\times C)]^C \times C} \arrow[u, "{[\nabla_{A+B}\Pi_{A\times C};\nabla'_{A+B}\Pi_{B\times C}]^C \times Id_C}"] \arrow[rr, "eval"] \arrow[urr, phantom, "//"] & & (A\times C)+(B\times C) \arrow[u, "{[\nabla_{A+B}\Pi_{A\times C};\nabla'_{A+B}\Pi_{B\times C}]}"'] \\
(A+B)\times C \arrow[u, "{[\nabla^*_{(A\times C)+(B\times C)};\nabla'^*_{(A\times C)+(B\times C)}] \times Id_C}"'] & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\varphi &= [\nabla_{A+B}\Pi_{A\times C};\nabla'_{A+B}\Pi_{B\times C}]\ eval\left([\nabla^*_{(A\times C)+(B\times C)};\nabla'^*_{(A\times C)+(B\times C)}]\times Id_C\right)\\
&= e_{A+B}\left([\nabla_{A+B}\Pi_{A\times C};\nabla'_{A+B}\Pi_{B\times C}]^C\times Id_C\right)\left([\nabla^*_{(A\times C)+(B\times C)};\nabla'^*_{(A\times C)+(B\times C)}]\times Id_C\right)\\
&= e_{A+B}\left\{\left([\nabla_{A+B}\Pi_{A\times C};\nabla'_{A+B}\Pi_{B\times C}]^C[\nabla^*_{(A\times C)+(B\times C)};\nabla'^*_{(A\times C)+(B\times C)}]\right)\times Id_C\right\}\\
&= e_{A+B}\left\{\left[[\nabla_{A+B}\Pi_{A\times C};\nabla'_{A+B}\Pi_{B\times C}]^C\nabla^*_{(A\times C)+(B\times C)};[\nabla_{A+B}\Pi_{A\times C};\nabla'_{A+B}\Pi_{B\times C}]^C\nabla'^*_{(A\times C)+(B\times C)}\right]\times Id_C\right\}
\end{aligned}$$

La siguiente igualdad la obtenemos analizando antes el diagrama siguiente.

$$\begin{tikzcd}
(A+B)^C \times C \arrow[rr, "e_{A+B}"] & & A+B \\
{[(A\times C)+(B\times C)]^C \times C} \arrow[u, "{[\ulcorner \gamma_{A+B}\pi_{A\times C} ; \gamma'_{A+B}\pi_{B\times C}\urcorner]^C \times Id_C}"] \arrow[rr, "eval"] \arrow[urr, phantom, "//"] & & (A\times C)+(B\times C) \arrow[u, "{[\gamma_{A+B}\pi_{A\times C} ; \gamma'_{A+B}\pi_{B\times C}]}"] \arrow[dr, phantom, "//"] \\
& \arrow[ur, phantom, "//"] & & A\times C \arrow[llluu, bend left, "\gamma^{*}_{(A\times C)+(B\times C)} \times Id_C"] \arrow[ul, "\gamma_{(A\times C)+(B\times C)}"'] \arrow[luu, bend right, "\gamma_{A+B}\pi_{A\times C}"']
\end{tikzcd}$$

Luego entonces, la siguiente igualdad será:

$$\varphi = e_{A+B}\left\{\left(\left[(\gamma_{A+B}\pi_{A\times C})^{*} ; (\gamma'_{A+B}\pi_{B\times C})^{*}\right]\right) \times Id_c\right\}$$

La siguiente igualdad requiere el análisis de los siguientes tres diagramas:

1

$$\begin{tikzcd}
(A+B)^C \times C \arrow[r, "e_{A+B}"] & A+B \\
A\times C \arrow[u, dashed, "(\gamma_{A+B}\pi_{A\times C})^{*} \times Id_C"] \arrow[ur, "\gamma_{A+B}\pi_{A\times C}"'] \arrow[ur, phantom, "//"]
\end{tikzcd}$$

2

$$\begin{tikzcd}
(A+B)^C \times C \arrow[r, "e_{A+B}"] & A+B \\
B\times C \arrow[u, dashed, "(\gamma'_{A+B}\pi_{B\times C})^{*} \times Id_C"] \arrow[ur, "\gamma'_{A+B}\pi_{B\times C}"'] \arrow[ur, phantom, "//"]
\end{tikzcd}$$

De los diagramas 1 y 2 obtenemos el diagrama 3

③

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\tau_{A+B}"] \arrow[dr, "a = (\tau_{A+B}\pi_{A\times C})^*"'] \arrow[r, phantom, shift right=6ex, "//"] & A+B \arrow[d, dashed, "{[a,b]}"] & B \arrow[l, "\tau'_{A+B}"'] \arrow[dl, "(\tau'_{A+B}\pi_{B\times C})^* = b"] \arrow[l, phantom, shift left=6ex, "//"] \\
& (A+B)^C &
\end{tikzcd}$$

Sabemos que el morfismo $[a,b]$ es único. Si vemos que $(\pi_{(A+B)\times C})^*$ hace conmutar ambos triángulos, tendríamos que $[a,b] = (\pi_{(A+B)\times C})^*$; de ésta forma daríamos paso a otra igualdad en la serie de igualdades del morfismo φ.

Veamos que $(\pi_{(A+B)\times C})^*$ hace conmutar el triángulo derecho en ③.

$$\begin{tikzcd}
(A+B)^C \times C \arrow[drr, "e_{A+B}"] & & \\
(A+B)\times C \arrow[u, "\pi^*_{(A+B)\times C} \times Id_C"] \arrow[rr, "\pi_{(A+B)\times C}"] \arrow[urr, phantom, "//"] & & A+B \\
B \times C \arrow[u, "\tau'_{(A+B)} \times Id_C"] \arrow[urr, "\tau'_{A+B}\pi_{B\times C}"'] \arrow[urr, phantom, shift left=3ex, "//"] & &
\end{tikzcd}$$

Sea $1 \xrightarrow{\langle b,c\rangle} B\times C$ arbitrario, tenemos:

$$\pi_{(A+B)\times C}\,(\tau'_{(A+B)} \times Id_C)\,\langle b,c\rangle$$

$$= \pi_{(A+B)}\,\langle \tau'_{(A+B)}(b)\,,\ c\rangle$$

$$= \tau'_{A+B}(b)$$

$$= \tau'_{A+B}\,\pi_{B\times C}\,\langle b,c\rangle$$

Por tanto el triángulo exterior conmuta, lo que era previamente claro pues los dos triángulos conmutan.

$$\therefore\ (\tau'_{A+B}\pi_{B\times C})^* = \pi^*_{(A+B)\times C}\,\tau'_{A+B}$$

Análogamente se comprueba que $(\Pi_{(A+B)\times C})^*$ hace conmutar el triángulo izquierdo en (3); y por tanto tenemos la igualdad.

$$[(\nabla_{A+B}\Pi_{A\times C})^*;(\nabla'_{A+B}\Pi_{B\times C})^*] = \Pi^*_{(A+B)\times C}$$

Damos paso ahora a la última igualdad requerida:

$$\varphi = e_{A+B}\left(\Pi^*_{(A+B)\times C} \times Id_C\right)$$

$$= \Pi_{(A+B)\times C}$$

Finalmente hemos obtenido $\underline{\varphi = \Pi_{(A+B)\times C}}$

Resta ver que $\varphi' = \Pi'_{(A+B)\times C}$

Analicemos φ'.

De la AFIRMACION 2 tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
C^C \times C \arrow[rr, "e_C"] & & C \\
{[(A\times C)+(B\times C)]^C \times C} \arrow[u, "{[\Pi'_{A\times C};\Pi'_{B\times C}]^C \times Id_C}"] \arrow[rr, "eval"] \arrow[urr, phantom, "//"] & & (A\times C)+(B\times C) \arrow[u, "{[\Pi'_{A\times C};\Pi'_{B\times C}]}"'] \\
(A+B)\times C \arrow[u, "{[\nabla^*_{(A\times C)+(B\times C)};\nabla'^*_{(A\times C)+(B\times C)}] \times Id_C}"] & &
\end{tikzcd}$$

$$\varphi' = [\pi'_{A\times C};\pi'_{B\times C}]\ \mathrm{eval}\left(\left[\tau^{*}_{(A\times C)+(B\times C)}\,;\,\tau'^{*}_{(A\times C)+(B\times C)}\right] \times \mathrm{Id}_C\right)$$

$$= e_C\left([\pi'_{A\times C};\pi'_{B\times C}]^C \times \mathrm{Id}_C\right)\left(\left[\tau^{*}_{(A\times C)+(B\times C)}\,;\,\tau'^{*}_{(A\times C)+(B\times C)}\right] \times \mathrm{Id}_C\right)$$

$$= e_C\left\{\left([\pi'_{A\times C};\pi'_{B\times C}]^C\left[\tau^{*}_{(A\times C)+(B\times C)}\,;\,\tau'^{*}_{(A\times C)+(B\times C)}\right]\right) \times \mathrm{Id}_C\right\}$$

$$= e_C\left(\left[[\pi'_{A\times C};\pi'_{B\times C}]^C\,\tau^{*}_{(A\times C)+(B\times C)}\,;\,[\pi'_{A\times C};\pi'_{B\times C}]^C\,\tau'^{*}_{(A\times C)+(B\times C)}\right] \times \mathrm{Id}_C\right)$$

La siguiente igualdad la obtendremos despues de analizar el diagrama a continuación.

$$\begin{tikzcd}
C^C \times C \arrow[r, "e_C"] \arrow[dr, phantom, "//"] & C & \\
{[(A\times C)+(B\times C)]^C \times C} \arrow[u, "{[\pi'_{A\times C};\pi'_{B\times C}]^C \times \mathrm{Id}_C}"] \arrow[r, "\mathrm{eval}"] \arrow[drr, phantom, "//"] & (A\times C)+(B\times C) \arrow[u, "{[\pi'_{A\times C};\pi'_{B\times C}]}"] \arrow[r, phantom, "//"] & \\
& & A\times C \arrow[ull, bend left, "\tau^{*}_{(A\times C)+(B\times C)} \times \mathrm{Id}_C"] \arrow[ul, "\tau_{(A\times C)+(B\times C)}"'] \arrow[uul, bend right, "\pi'_{A\times C}"']
\end{tikzcd}$$

Luego entonces la siguiente igualdad será:

$$\varphi' = e_C\left([\pi'^{*}_{A\times C};\pi'^{*}_{B\times C}] \times \mathrm{Id}_C\right)$$

Análogamente como se hizo para φ, la penúltima igualdad en la serie de igualdades para φ' se obtiene de los diagramas ①, ②, ③ y ④, los cuales son conmutativos.

①

$$\begin{tikzcd}
C^C \times C \arrow[r, "e_C"] & C \\
B \times C \arrow[u, dashed, "(\pi'_{B\times C})^* \times Id_C"] \arrow[ur, "\pi'_{B\times C}"'] \arrow[ur, phantom, "//"] &
\end{tikzcd}$$

③

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\nabla_{A+B}"] \arrow[dr, "\pi'^*_{A\times C}"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & A+B \arrow[d, dashed, "{[\pi'^*_{A\times C};\, \pi'^*_{B\times C}]}"] & B \arrow[l, "\nabla'_{A+B}"'] \arrow[dl, "\pi'^*_{B\times C}"] \arrow[dl, phantom, "//"] \\
& C^C &
\end{tikzcd}$$

②

$$\begin{tikzcd}
C^C \times C \arrow[r, "e_C"] & C \\
A \times C \arrow[u, dashed, "\pi'^*_{A\times C} \times Id_C"] \arrow[ur, "\pi'_{A\times C}"'] \arrow[ur, phantom, "//"] &
\end{tikzcd}$$

④

$$\begin{tikzcd}
C^C \times C \arrow[dr, "e_C"] & \\
(A+B) \times C \arrow[u, "\pi'^*_{(A+B)\times C} \times Id_C"] \arrow[r, "\pi'_{(A+B)\times C}"] \arrow[ur, phantom, "//"] & C \\
A \times C \arrow[u, "\nabla_{A+B} \times Id_C"] \arrow[ur, "\pi'_{A\times C}"'] \arrow[ur, phantom, "//"] &
\end{tikzcd}$$

Se verifica igualmente que $\pi'^*_{(A+B)\times C}$ hace conmutar los triángulos en ③.

Obtenemos la igualdad $[\pi'^*_{A\times C}\,;\, \pi'^*_{B\times C}] = \pi'^*_{(A+B)\times C}$, dando paso a la siguiente igualdad:

$$\varphi' = e_C\,(\pi'^*_{(A+B)\times C} \times Id_C)$$

$$= \pi'_{(A+B)\times C}$$

Finalmente hemos obtenido $\underline{\varphi' = \pi'_{(A+B)\times C}}$

Por tanto: $\langle \varphi, \varphi' \rangle = \langle \pi_{(A+B)\times C} \,;\, \pi'_{(A+B)\times C} \rangle$

Por tanto $\boxed{F \circ G = Id_{(A+B)\times C}}$ (==)

De (=) y (==) concluimos que:

$$\boxed{(A\times C)+(B\times C) \simeq (A+B)\times C}$$

CAPITULO 15

Comportamiento de morfismos bajo la exponenciación.

Cualquier ley de cancelación establece de alguna manera la inyectividad de algún proceso. Veamos como algunos de estos procesos se expresan en términos de espacios de morfismos, ó exponenciación.

Por ejemplo, la proposición: [f es inyectiva] $\Longleftrightarrow$ [f es monomorfismo] (entre conjuntos simples) podemos expresarla como:

$$\left[\, X \xrightarrow{f} Y \text{ es inyectiva}\right] \Longleftrightarrow \forall T \left[\, X^T \xrightarrow{f^T} Y^T \text{ es inyectiva}\right]$$

Lo anterior es claro si recordamos como actúa f^T, así como las definiciones involucradas.

Ahora; si f es epimorfismo entonces $[\varphi_1 f = \varphi_2 f \Longrightarrow \varphi_1 = \varphi_2]$. Cabe preguntarse qué proceso es inyectivo.

Veamos la proposición siguiente.

<u>PROPOSICIÓN</u>: Sean $X \xrightarrow{f} Y$ y V dados, entonces

$$\left[\, V^Y \xrightarrow{V^f} V^X \text{ es inyectiva}\right] \text{ si } \forall \varphi_1, \varphi_2 \left[(\varphi_1 f = \varphi_2 f) \Longrightarrow \varphi_1 = \varphi_2\right]$$

<u>Demostración</u>

$$(V^f \ulcorner \varphi_1 \urcorner = V^f \ulcorner \varphi_2 \urcorner) \Longrightarrow (\ulcorner \varphi_1 f \urcorner = \ulcorner \varphi_2 f \urcorner) \Longrightarrow \varphi_1 f = \varphi_2 f$$

Por tanto $\varphi_1 = \varphi_2$, entonces $\ulcorner \varphi_1 \urcorner = \ulcorner \varphi_2 \urcorner$

Por tanto V^f es inyectivo. ▨

COROLARIO: $X \xrightarrow{f} Y$ es epimorfismo si y sólo si $V^Y \xrightarrow{V^f} V^X$ es inyectivo para todo V.

TEOREMA: $X \xrightarrow{f} Y$ es epimorfismo $\Longleftrightarrow$ $2^Y \xrightarrow{2^f} 2^X$ es monomorfismo.

Demostración

Una dirección no es mas que un caso particular del Corolario anterior.

Supongamos ahora que $2^Y \xrightarrow{2^f} 2^X$ es monomorfismo, consideremos el esquema siguiente:

$$X \xrightarrow{f} Y \underset{\varphi_2}{\overset{\varphi_1}{\rightrightarrows}} 2$$

donde $\varphi_1 = \chi_{Im(f)}$ y φ_2 = Constante de valor CIERTO.

Tenemos que $\varphi_1 f = \varphi_2 f$ y por tanto $\varphi_1 = \varphi_2$

Es decir que la imagen de f es todo Y, entonces f es suprayectiva.

Anteriormente vimos que: [f suprayectiva] $\Longleftrightarrow$ [f epimorfismo]

Por tanto f es epimorfismo ∎

TEOREMA: $X \xrightarrow{f} Y$ es monomorfismo $\Longleftrightarrow$ $2^Y \xrightarrow{2^f} 2^X$ es epimorfismo.

Demostración

$\Rightarrow$) Supongamos que $X \xrightarrow{f} Y$ es monomorfismo.

Sea $\ulcorner\varphi\urcorner$ un elemento arbitrario de 2^X.

Entonces $\bar{X} \xrightarrow{\varphi} 2$, sea $\mathrm{Dom} \xrightarrow{i} \bar{X}$ la parte de $\bar{X}$ de tal forma que $\chi_i = \varphi$.

La composición $\mathrm{Dom} \xrightarrow{i} \bar{X} \xrightarrow{f} Y$ es monomorfismo. Sea $Y \xrightarrow{\psi} 2$ tal que $\psi = \chi_{fi}$

Veamos que $2^f \ulcorner \psi \urcorner = \ulcorner \varphi \urcorner$.

Para esto basta ver que $\psi f = \chi_i$

$$[(\psi f)(x) = \psi(fx) = \text{Cierto}] \Longleftrightarrow [fx \in fi] \Longleftrightarrow \exists \bar{a}\, [fx = fi\bar{a}]$$

como f es monomorfismo ésto sucede si y solo si $[x = ia] \Leftrightarrow x \in i$

Por tanto el diagrama de abajo conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Dom} \arrow[r, hook, "i"] & \bar{X} \arrow[r, hook, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & Y \arrow[d, dashed, "\psi"] \arrow[dl, phantom, "="] \\
& 1 \arrow[u, "x"] & 2
\end{tikzcd}$$

Por tanto 2^f es sobre

$\therefore$ 2^f es epimorfismo. ∎

$\Leftarrow$) Supongamos $2^Y \xrightarrow{2^f} 2^{\bar{X}}$ es epimorfismo. Supongamos también que $fx_1 = fx_2$, donde $1 \underset{x_2}{\overset{x_1}{\rightrightarrows}} \bar{X} \xrightarrow{f} Y$.

Luego tenemos:

$$2^Y \xrightarrow{2^f} 2^{\bar{X}} \underset{2^{x_2}}{\overset{2^{x_1}}{\rightrightarrows}} 2^1 \qquad 2^{x_1}2^f = 2^{fx_1} = 2^{fx_2} = 2^{x_2}2^f$$

Por tanto $2^{x_1}2^f = 2^{x_2}2^f$, como 2^f es epimorfismo se tiene que $2^{x_1} = 2^{x_2}$

Queremos entonces concluir que $x_1 = x_2$.

Consideremos la siguiente correspondencia de morfismos

$$\begin{array}{c} \overline{X} \xrightarrow{\ \delta_{\overline{X}}\ } \overline{X}\times\overline{X} \\ \hline \overline{X}\times\overline{X} \xrightarrow{\ \chi_{\delta_{\overline{X}}}\ } 2 \\ \hline \overline{X} \xrightarrow{\ \chi^{*}_{\delta_{\overline{X}}}\ } 2^{\overline{X}} \end{array}$$

De tal forma que:

$$\chi^{*}_{\delta_{\overline{X}}}(x) = \chi_{\delta_{\overline{X}}}(x, \text{—})$$

Tenemos entonces las composiciones $\overline{X} \xrightarrow{\ \chi^{*}_{\delta_{\overline{X}}}\ } 2^{\overline{X}} \overset{2^{x_1}}{\underset{2^{x_2}}{\rightrightarrows}} 2^{T}$

Como $2^{x_1} = 2^{x_2}$ tenemos que $\underline{2^{x_1}\chi^{*}_{\delta_{\overline{X}}} = 2^{x_2}\chi^{*}_{\delta_{\overline{X}}}}$

Pero por otro lado tenemos la correspondencia siguiente:

$$\begin{array}{c} \overline{X} \longrightarrow 2^{T} \\ \hline \overline{X}\times T \longrightarrow 2 \end{array}$$

Luego entonces obtenemos dos morfismos iguales $\overline{X}\times T \longrightarrow 2$

$$\begin{array}{c} \overline{X} \xrightarrow{\ 2^{x_1}\chi^{*}_{\delta_{\overline{X}}}\ } 2^{T} \\ \hline \overline{X}\times T \xrightarrow{\ \tilde{g}_1\ } 2 \\ \hline T\times\overline{X} \xrightarrow{\ g_1\ } 2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \overline{X} \xrightarrow{\ 2^{x_2}\chi^{*}_{\delta_{\overline{X}}}\ } 2^{T} \\ \hline \overline{X}\times T \xrightarrow{\ \tilde{g}_2\ } 2 \\ \hline T\times\overline{X} \xrightarrow{\ g_2\ } 2 \end{array}$$

$\underline{g_1 \text{ y } g_2}$ son funciones características iguales, por consiguiente corresponden a partes iguales de $\underline{T\times\overline{X}}$.

Veamos a continuación que $g_1 = \chi_{\langle Id_T, x_1\rangle}$ y $g_2 = \chi_{\langle Id_T, x_2\rangle}$

Hagamos unos calculos:

$$g_1\langle t,x\rangle = \left(2^{x_1}\overset{*}{\chi'_{S\bar{X}}}(x)\right)(t) = \left(2^{x_1}\chi'_{S\bar{X}}(x,-)\right)t = \chi'_{S\bar{X}}\langle x, x_1 t\rangle$$

Luego entonces $\left[\chi'_{S\bar{X}}\langle x, x_1 t\rangle = \text{CIERTO}\right] \Longleftrightarrow \left[x = x_1 t\right]$

Tenemos entonces que para un elemento de la forma $\langle t, x_1 t\rangle$

$g_1\langle t, x_1 t\rangle = \text{CIERTO}$; es decir que $g_1\left(\langle Id_T, x_1\rangle t\right) = \text{CIERTO}$

Recordamos que $\langle Id_T, x_1\rangle = \mathcal{G}_{x_1}$, la cual es una parte de $T\times\bar{X}$.

Por tanto $\langle t, x_1 t\rangle \in \langle Id_T, x_1\rangle$.

Inversamente, si $\langle t', x'\rangle \in \mathcal{G}_{x_1}$ entonces $\langle t', x'\rangle = \langle Id_T, x_1\rangle\tilde{t}$

Por tanto $\langle t', x'\rangle = \langle \tilde{t}, x_1\tilde{t}\rangle$

Luego entonces $g_1\langle t', x'\rangle = g_1\langle \tilde{t}, x_1\tilde{t}\rangle = \text{CIERTO}$.

Podemos así concluir que $g_1 = \chi\langle Id_T, x_1\rangle$. De manera análoga obtenemos que $g_2 = \chi\langle Id_T, x_2\rangle$.

Ya teníamos que $g_1 = g_2$, por tanto $\langle Id_T, x_1\rangle = \langle Id_T, x_2\rangle$

Proyectando obtenemos la igualdad deseada $\underline{x_1 = x_2}$

$\therefore$ f es monomorfismo. ▨

La siguiente definición generaliza la propiedad de 2 establecida en el Teorema acabado de demostrar.

<u>OBJETO</u> <u>INYECTIVO</u>.- Diremos que V es un objeto inyectivo si

$$\forall f, \varphi \left[X \overset{f}{\hookrightarrow} Y,\ X \xrightarrow{\varphi} V \right] \Rightarrow \exists\ Y \xrightarrow{\bar{\varphi}} V \left[\bar{\varphi} f = \varphi \right]$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, hook, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & Y \arrow[dl, dashed, "\bar{\varphi}"] \\ & V \arrow[u, phantom, "="] & \end{tikzcd}$$

El concepto dual es llamado Objeto Proyectivo.

Como ejemplo tenemos que entre conjuntos simples todo conjunto <u>no</u> <u>vacío</u> es objeto inyectivo.

<u>$A \neq \emptyset$</u>

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[rr, hook, "0_A"] \arrow[dr, "Id_\emptyset"'] & & A \arrow[dl, dashed, "\nexists"] \\ & \emptyset \arrow[u, phantom, "\times"] & \end{tikzcd}$$

En términos de exponenciación, y en caso de que ésta exista claro está, se tiene que:

$$\left[V \text{ es inyectivo} \right] \Leftrightarrow \forall\ X \overset{f}{\hookrightarrow} Y \left[V^Y \xrightarrow{V^f} V^X \text{ es sobre} \right]$$

<u>MORFISMO</u> <u>COSUPRAYECTIVO</u>.- Sean V y f arbitrarios, tal que $X \overset{f}{\hookrightarrow} Y$. Diremos que f es cosuprayectivo relativo a V si:

$$\forall \varphi \left[X \xrightarrow{\varphi} V \right] \Rightarrow \exists\ Y \xrightarrow{\bar{\varphi}} V \left[\bar{\varphi} f = \varphi \right]$$

$$\begin{tikzcd} \overline{X} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & Y \arrow[d, dashed, "\overline{\varphi}"] \\ & \overline{V} \end{tikzcd}$$

<u>MORFISMOS CONGRUENTES</u>: Sean $T \overset{x_1}{\underset{x_2}{\rightrightarrows}} \overline{X}$, decimos que x_1 es congruente con x_2 módulo $\overline{V}$ si sucede que $\forall\, \overline{X} \xrightarrow{\varphi} \overline{V}$ se tiene $\varphi x_1 = \varphi x_2$.

Lo anterior lo simplificaremos bajo la notación $x_1 \underset{\overline{V}}{\equiv} x_2$.

<u>PROPOSICION</u>: Si $\overline{X} \xrightarrow{f} Y$ es copuproyectivo relativo a $\overline{V}$, entonces: $[f x_1 \underset{\overline{V}}{\equiv} f x_2] \Longrightarrow [x_1 \equiv x_2]$.

<u>Demostración</u>

Supongamos $f x_1 \underset{\overline{V}}{\equiv} f x_2$, sea $\overline{X} \xrightarrow{\varphi} \overline{V}$ cualquier morfismo.

Queremos concluir que $\varphi x_1 = \varphi x_2$.

Ya que f copuproyectivo relativo a $\overline{V}$, entonces existe $\overline{\varphi}$ $[\varphi = \overline{\varphi} f]$

Luego:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, shift left, "x_1"] \arrow[r, shift right, "x_2"'] & \overline{X} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & Y \arrow[d, dashed, "\overline{\varphi}"] \\ & & \overline{V} \end{tikzcd}$$

$\varphi x_1 = (\overline{\varphi} f) x_1 = \overline{\varphi}(f x_1)$

$= \overline{\varphi} f x_1 = \overline{\varphi} f x_2 = (\overline{\varphi} f) x_2$

$= \varphi x_2$

Por tanto $\varphi x_1 = \varphi x_2$ $\quad\therefore\ x_1 \underset{\overline{V}}{\equiv} x_2$ ▨

CAPITULO 16

Punto fijo

ISOMORFISMO.- Un morfismo $X \xrightarrow{f} Y$ es un isomorfismo, o bién un morfismo invertible, si existe $Y \xrightarrow{g} X$ tal que $gf = Id_X$ y $fg = Id_Y$. En tal caso g es llamado un inverso de f y denotado usualmente por $g = f^{-1}$.

Las demostraciones de las siguientes dos proposiciones son inmediatas.

PROPOSICIÓN: Sean $X \xrightarrow{f} Y \overset{r}{\underset{s}{\rightrightarrows}} X$ tales que $rf = Id_X$ y $fs = Id_Y$. Entonces $r = s$.

PROPOSICION.- Si $fs = Id_Y$ y f es monomorfismo, entonces s es también inverso izquierdo de f.

PUNTO FIJO.- Un automorfismo $Y \xrightarrow{T} Y$ tiene a $1 \xrightarrow{y} Y$ como punto fijo si $Ty = y$.

Por otro lado, T es libre de puntos fijos si carece de ellos. Contrariamente diremos que Y tiene la propiedad del punto fijo si cada endomorfismo tiene al menos uno de ellos.

Un resultado importante, y que solo mencionamos aquí como ejemplo, es que la bola n-dimensional tiene la propiedad del punto fijo.

<u>TEOREMA</u>: Sea Y arbitrario, supóngase que existen $\overline{X}$ y φ [$\overline{X}\times\overline{X}\xrightarrow{\varphi}Y$] con la propiedad de que para todo morfismo $\overline{X}\xrightarrow{f}Y$ existe al menos un elemento $1\xrightarrow{a}\overline{X}$ tal que $f=\varphi\langle a,-\rangle$. Tenemos entonces que Y tiene la propiedad del punto fijo.

<u>Demostración</u>

Sea $Y\xrightarrow{T}Y$ un automorfismo cualquiera. Definamos $\tilde{f}$ mediante la composición ilustrada en el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
\overline{X}\times\overline{X} \arrow[r, "\varphi"] & Y \arrow[d, "T"] \\
\overline{X} \arrow[u, "\delta_{\overline{X}}"] \arrow[r, dashed, "\tilde{f}"'] \arrow[ur, phantom, "/\!/"] & Y
\end{tikzcd}$$

Tenemos que: $\tilde{f}x=T\varphi\langle x,x\rangle$.

Ahora, existe $1\xrightarrow{a}\overline{X}$ tal que

$\forall x\ [\tilde{f}x=\varphi\langle a,x\rangle]$

Por tanto tenemos que $T\varphi\langle x,x\rangle=\varphi\langle a,x\rangle$.

Particularmente para $x=a$ se tiene $T\varphi\langle a,a\rangle=\varphi\langle a,a\rangle$

Es claro que $y=\varphi\langle a,a\rangle$ es un punto fijo de T. ∎

<u>COROLARIO</u> (<u>CANTOR</u>).- Si existe un automorfismo $Y\xrightarrow{T}Y$ que sea libre de puntos fijos; entonces:

$\forall\overline{X}\ \forall\phi\ [\overline{X}\xrightarrow{\phi}Y^{\overline{X}}$ no es suprayectivo].

<u>Demostración</u>

Contrariamente, supongamos que existen $\overline{X},\phi$ [$\overline{X}\xrightarrow{\phi}Y^{\overline{X}}$ es suprayectiva].

En tales condiciones veremos que se satisfacen las hipótesis del teorema anterior y por tanto Y tendría la propiedad del punto fijo, lo cual es una contradicción.

Sea $\bar{X} \xrightarrow{f} Y$ cualquiera; tenemos que existe $1 \xrightarrow{\partial} \bar{X}$ de tal forma que el triángulo de abajo conmuta.

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "\partial"'] \arrow[d, "\ulcorner f \urcorner"] \\ \bar{X} \arrow[r, "\phi"'] \arrow[ur, phantom, "="] & Y^{\bar{X}} \end{tikzcd}$$

Consideremos $\bar{X} \times \bar{X} \xrightarrow{eval(\phi \times Id_{\bar{X}})} Y$.

$$fx = eval\langle \ulcorner f \urcorner, x \rangle = eval(\ulcorner f \urcorner \times Id_{\bar{X}})\langle Id_1, x \rangle$$

$$= eval(\phi \partial \times Id_{\bar{X}})\langle Id_1, x \rangle$$

$$= eval(\phi \times Id_{\bar{X}})\langle \partial, x \rangle$$

Haciendo $\varphi = eval(\phi \times Id_{\bar{X}})$ vemos que se cumplen las hipótesis del teorema anterior. Por tanto Y tiene la propiedad del punto fijo

$\therefore \phi$ no es suprayectiva.

<u>COROLARIO</u>: No existen morfismos suprayectivos de $\bar{X} \to 2^{\bar{X}}$ ni $\bar{X} \to \mathbb{R}^{\bar{X}}$.

<u>Demostración</u>

Basta dar endomorfismos adecuados libres de puntos fijos.

Sean estos morfismos los siguientes:

$2 \xrightarrow{\neg} 2$ la negación lógica

$\mathbb{R} \xrightarrow{j} \mathbb{R}$ $[j(x) = x+1]$

La observación que hiciera Galileo acerca de que un conjunto infinito pueda ser o nó isomorfo a una de sus partes propias, fué tomada por Dedekind como una definición, la cual damos a continuación.

<u>CONJUNTO DEDEKIND-FINITO</u> :- Un conjunto $\overline{X}$ es llamado Dedekind-finito si:

$$\forall\ \overline{X} \xrightarrow{f} \overline{X} \text{ monomorfismo se tiene que } f \text{ es isomorfismo.}$$

Correspondientemente $\overline{X}$ es Dedekind-infinito si:

$$\exists\ \overline{X} \xrightarrow{f} \overline{X} \text{ monomorfismo y no supra yectivo.}$$

CAPITULO 17

Imagen de un morfismo

Hemos introducido ya el morfismo $2^{\underline{X}}$, cuyo comportamiento es el de un funtor contravariante. El morfismo $2^{2^{\underline{X}}}$, que similarmente tiene un comportamiento de un funtor covariante, consiste de todas las "clases" de partes de $\underline{X}$, ya que un morfismo $2^{\underline{X}} \xrightarrow{\alpha} 2$ es la función característica de una parte, o clase, del conjunto $2^{\underline{X}}$ de partes de $\underline{X}$.

Construiremos ahora un morfismo que manda $\underline{X}$ en $2^{\underline{X}}$, el cuál será realmente un funtor covariante.

Empecemos por introducir una notación más conveniente: una parte A de $\underline{X}$ consiste de:

1) El conjunto subyacente $|A|$ de la parte.

2) Un monomorfismo $i_A : |A| \hookrightarrow \underline{X}$.

Decimos que A y B son partes isomorfas de $\underline{X}$, si existe $|A| \xrightarrow{h} |B|$ invertible tal que el triángulo de abajo conmuta; y en cuyo caso escribimos $A \cong B$.

$$
\begin{tikzcd}
|A| \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, hook, "i_A"'] & {} \arrow[d, phantom, "//"] & |B| \arrow[dl, hook', "i_B"] \\
 & \underline{X} &
\end{tikzcd}
$$

En contraste, $|A| \cong |B|$ solamente significa que $|A|$ y $|B|$ tienen el mismo número de elementos, pero no de modo que se respeten las inclusiones.

En ocasiones abusaremos de la notación al suprimir el signo "$|\ |$" y usar el símbolo A para referirnos indistintamente al monomorfismo i_A, o bien a su dominio $|A|$. De tal forma que podremos tener cosas como lo siguiente:

$$x \in A \Longleftrightarrow \exists a\, [\, x = i_A a \,]$$

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr, dashed, "a"] \arrow[dr, "x"'] & \arrow[d, phantom, "="] & {|A|} \arrow[dl, bend left, "i_A"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Hagamos por definición: $P(X) = 2^X$ $\qquad P(Y) = 2^Y$

Para $X \xrightarrow{f} Y$ morfismo cualquiera, construyamos un mapeo inducido por f.

$$P(X) \xrightarrow{P(f)} P(Y)$$

$$2^X \xrightarrow{P(f)} 2^Y$$

Sean $X \xrightarrow{f} Y$ el morfismo dado, y A una parte arbitraria de X; entonces $P(f)$ le asigna el monomorfismo que resulta de la epi-mono factorización de la composición $f \cdot i_A$, resultando de ésto una parte de Y.

$P(f)$ tiene otras notaciones como son $\mathrm{Im} f$ y $f[\ ]$.

$$\begin{tikzcd}
{|A|} \arrow[r, two heads, "A"] \arrow[d, hook, "i_A"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & {|f[A]|} \arrow[d, hook, "i_{f[A]} = \mathrm{Im} f(A) = f[A]"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

EJERCICIO:- Si j_2 es inyectiva, p_1 suprayectiva, y $j_2 p_2 = j_1 p_1$. Existe entonces $B_1 \xrightarrow{h} B_2$ tal que $p_2 = h p_1$ y $j_1 = j_2 h$.

Demostración

En la demostración consideremos el diagrama siguiente.

$$\begin{tikzcd}
 & B_1 \arrow[dr, "j_1"] \arrow[dd, dashed, "h"] & \\
{|A|} \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & & Y \arrow[dl, dashed, bend right, "r_2"'] \\
 & B_2 \arrow[ur, "j_2"'] &
\end{tikzcd}$$

$[j_2 \text{ es mono}] \Rightarrow \exists\, r_2\, [r_2 j_2 = I_{B_2}]$

Definamos $h = r_2 j_1$ y calculemos:

$h p_1 = r_2 j_1 p_1 = r_2 j_2 p_2 = Id_{B_2} p_2 = p_2$

$j_2 p_2 = j_2 h p_1 = j_1 p_1$ pero p_1 es epi.

Por tanto $\underline{j_2 h = j_1}$ y $\underline{h p_1 = p_2}$ ■

EJERCICIO: Para el diagrama conmutativo siguiente se tiene que

$[y \in i_B] \Longleftrightarrow \exists\, x \in A\, [f x = y]$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, hook, "i_A"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & B \arrow[d, hook, "i_B"] & \\
X \arrow[r, "f"] & Y & T \arrow[l, "y"']
\end{tikzcd}$$

<u>Demostración</u>

$\to)$ $y \in i_B \Rightarrow \exists\, T \xrightarrow{b} B\ [y = i_B b]$.

$[p$ es sobre$] \Rightarrow \exists\, a\, [b = pa] \quad \therefore y = i_B b = i_B p a$

Luego: $y\ (i_B p) a = f i_A a$ si hacemos $x = i_A a$

claramente $x \in A$ y además $fx = y$.

$\leftarrow)$ Supongamos existe $x \in A$ y $fx = y$

$x = i_A \tilde{a} \Rightarrow fx = f i_A \tilde{a} = i_B p \tilde{a} = y \quad \therefore y \in i_B$ ∎

<u>EJERCICIO</u>.- Sea E la parte de $2^{\overline{X}} \times \overline{X}$ cuya función caracterís-tica es la evaluación $2^{\overline{X}} \times \overline{X} \xrightarrow{e_{\overline{X}}} 2$. Mostrar que la imagen de E a lo largo del mapeo $Id_{2^{\overline{X}}} \times f$

$$\begin{tikzcd}
\overline{E} \arrow[r, ->>, "\partial"] \arrow[d, hook, "i_E"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & I[E] \arrow[d, hook, "f_{[E]}"] \\
2^{\overline{X}} \times \overline{X} \arrow[r, "Id_{2^{\overline{X}}} \times f"] & 2^{\overline{X}} \times Y
\end{tikzcd}$$

es la parte de $2^{\overline{X}} \times Y$ cuya función característica $2^{\overline{X}} \times Y \longrightarrow 2$ tiene como adjunto exponencial a $2^{\overline{X}} \xrightarrow{Inf} 2^Y$.

Demostración

$$\begin{tikzcd}
 & & 1 \arrow[dll, dashed, bend right, "\tilde{k}"'] \arrow[dl, dashed, "k"'] \arrow[ddl, bend left, "\langle \ulcorner g \urcorner, y \rangle"] \\
E \arrow[r, dashed, two heads, "s"] \arrow[d, hook, "i_E"] \arrow[dr, phantom, "//"] & I[E] \arrow[d, hook, "f[E]"] & \\
2^{X} \times X \arrow[r, "Id_{2^X} \times f"] \arrow[dr, "e_X = \chi_{i_E}"'] & 2^{X} \times Y \arrow[r, "Im f \times Id_Y"] \arrow[d, "\varphi = \chi_{f[E]}"] \arrow[dr, phantom, "?"] & 2^{Y} \times Y \arrow[dl, "e_Y"] \\
 & 2 &
\end{tikzcd}$$

Tenemos lo siguiente: $\boxed{i_E = \langle \alpha, T_X \rangle}$ $\boxed{f[E] = \langle \beta, T_Y \rangle}$

Queremos ver que $e_Y (Im f \times Id_Y) = \varphi$

Observamos que $(Im f \times Id_Y) \circ (Id_{2^X} \times f) = Im f \times f$

Sea $1 \xrightarrow{\langle \ulcorner g \urcorner, y \rangle} 2^X \times Y$ tal que $\langle \ulcorner g \urcorner, y \rangle \in f[E]$, entonces

$\exists\ 1 \xrightarrow{k} I[E]$ $[f[E]k = \langle \beta, T_Y \rangle k = \underbrace{\langle \beta k, T_Y k \rangle = \langle \ulcorner g \urcorner, y \rangle}]$

Tenemos pues:

$\boxed{\beta k = \ulcorner g \urcorner}$ $\boxed{T_Y k = y}$

Por otro lado $\varphi\langle \ulcorner g \urcorner, y\rangle = \text{CIERTO}$

P.D. $e_Y(\mathrm{Im} f \times \mathrm{Id}_Y)\langle \ulcorner g \urcorner, y\rangle = \text{CIERTO}$.

Veámoslo

$$e_Y(\mathrm{Im} f \times \mathrm{Id}_Y)\langle \ulcorner g \urcorner, y\rangle = e_Y\langle \mathrm{Im} f(\ulcorner g \urcorner), y\rangle = e_Y\langle \ulcorner X_{f[g]} \urcorner ; y\rangle$$

$= \| y \in f[g] \|$ El cual es un valor de verdad.

$[s \text{ es sobre}] \Longrightarrow \exists\, 1 \xrightarrow{\tilde{k}} E \quad [s\tilde{k} = k]$

Luego: $\langle \ulcorner g \urcorner, y\rangle = f[E]k = f[E]s\tilde{k} = (\mathrm{Id}_{Z^{\Xi}} \times f)\, i_E \tilde{k} = (\mathrm{Id}_{Z^{\Xi}} \times f)\langle \alpha, T_x\rangle \tilde{k}$

$$= (\mathrm{Id}_{Z^{\Xi}} \times f)\langle \alpha\tilde{k}, T_x\tilde{k}\rangle = \underbrace{\langle \alpha\tilde{k}, f(T_x\tilde{k})\rangle = \langle \ulcorner g \urcorner, y\rangle}$$

Claramente se ve que $i_E\tilde{k} \in i_E$ y como $X_{i_E} = e_{\Xi}$; tenemos que

$T_x\tilde{k} \in \alpha\tilde{k}$ es decir $\underline{\underline{\| T_x\tilde{k} \in \alpha\tilde{k} \| = \text{CIERTO}}}$

Tenemos luego entonces:

$$e_Y(\mathrm{Im} f \times \mathrm{Id}_Y)\langle \ulcorner g \urcorner, y\rangle = e_Y(\mathrm{Im} f \times \mathrm{Id}_Y)(\mathrm{Id}_{Z^{\Xi}} \times f)\, i_E\tilde{k}$$

$$= e_Y(\mathrm{Im} f \times \mathrm{Id}_Y)(\mathrm{Id}_{Z^{\Xi}} \times f)\langle \alpha\tilde{k}, T_x\tilde{k}\rangle$$

$$= e_Y(\mathrm{Im} f \times \mathrm{Id}_Y)\langle \alpha\tilde{k}, f(T_x\tilde{k})\rangle$$

$$= e_Y(\mathrm{Im} f \times \mathrm{Id}_Y)\langle \ulcorner g \urcorner, y\rangle$$

$$= \| y \in f[g] \|$$

Veamos que $\|y \in f[g]\| = \text{CIERTO}$. Fijémonos en el diagrama de abajo:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, two heads, dashed, "p"] \arrow[d, hook, "i_G"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & f[G] \arrow[d, hook, "i_{f[G]} = f[G]"] \\
\bar{X} \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "\chi_{f[g]}"] \\
2 & 2
\end{tikzcd}$$

(NOTACIÓN)

Por el ejercicio anterior tenemos: $y \in f[g] \Longleftrightarrow \exists x \in i_G [fx = y]$

Haciendo $x = T_x \tilde{k}$ vemos que $fx = f(T_x \tilde{k}) = y$ y además,

siendo $\alpha \tilde{k} = g$ ya sabemos que $\|T_x \tilde{k} \in \alpha \tilde{k}\| = \text{CIERTO}$.

$\therefore \|y \in f[g]\| = \text{CIERTO}$. $\therefore \boxed{e_Y (\mathrm{Im}f \times \mathrm{Id}_Y) \langle \ulcorner g \urcorner, y \rangle = \text{CIERTO}}$

Ahora supongamos que $e_Y (\mathrm{Im}f \times \mathrm{Id}_Y) \langle \ulcorner g \urcorner, y \rangle = \text{CIERTO}$

<u>P.D.</u> $\langle \ulcorner g \urcorner, y \rangle \in f[E]$

<u>Veámoslo</u>

$e_Y (\mathrm{Im}f \times \mathrm{Id}_Y) \langle \ulcorner g \urcorner, y \rangle = e_Y \langle \mathrm{Im}f \ulcorner g \urcorner, y \rangle = e_Y \langle f[g], y \rangle$

$= \| y \in f[g] \| = \text{CIERTO}$

$y \in f[g] \Longrightarrow \exists\, 1 \xrightarrow{\pi_G} f[G]\ [y = f[g] \pi_G]$

$$\begin{tikzcd}
 & & 1 \arrow[dll, dashed, bend right, "\tilde{\pi}"'] \arrow[dl, dashed, "\pi"'] \arrow[ddl, bend left, "y"] \\
G \arrow[r, dotted, "p"] \arrow[d, hook, "i_g"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & f[G] \arrow[d, hook, "f[g]"] \arrow[ur, phantom, "//"] & \\
\overline{X} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "\chi_{f[g]}"] & \\
2 & 2 &
\end{tikzcd}$$

Nuevamente por el ejercicio anterior: $\exists\, x \in i_G\, [f x = y]$

Es claro que $x = i_G \tilde{\pi}$, donde $\tilde{\pi} : 1 \longrightarrow G$ tal que $p\tilde{\pi} = \pi$

Luego: $1 \xrightarrow{\langle \ulcorner g \urcorner,\, i_G \tilde{\pi} \rangle} 2^{\overline{X}} \times \overline{X}$

$e_{\overline{X}} \langle \ulcorner g \urcorner, i_G \tilde{\pi} \rangle = \| i_G \tilde{\pi} \in i_g \| = \text{CIERTO}$ $\qquad \therefore \langle \ulcorner g \urcorner, x \rangle \in E$

entonces existe $1 \xrightarrow{q} E$ y $\underline{\langle \ulcorner g \urcorner, x \rangle = i_E q}$

Por un lado $(Id_{2^{\overline{X}}} \times f) \langle \ulcorner g \urcorner, x \rangle = \langle \ulcorner g \urcorner, f x \rangle = \langle \ulcorner g \urcorner, y \rangle$

Por otro $(Id_{2^{\overline{X}}} \times f)\, i_E q = f[E]\, \delta q$

$\therefore \boxed{\langle \ulcorner g \urcorner, y \rangle \in f[E]}$ ■

Así pues, este ejercicio nos muestra la existencia real del morfismo Inf.

Regresemos un momento con 2^f. Recordando que $\chi_{f^{-1}[S]} = \chi_S f$, tenemos que $2^{f}\ulcorner B\urcorner = \ulcorner f^{-1}B\urcorner = Bf$.

La notación Bf es especialmente conveniente si uno piensa a "B" como la función característica de la parte correspondiente.

Ahora, si es una parte de $\bar{X}$ y B una de Y, puede o no existir un mapeo h tal que $fi_A = i_B h$. Cuando existe decimos que $A \underset{f}{\subseteq} B$.

<u>EJERCICIO</u>.- $A \underset{f}{\subseteq} B \iff \forall x \in A\, [fx \in B]$

<u>Demostración</u>

$\Rightarrow$) Supongamos $A \underset{f}{\subseteq} B$ y sea $x \in A$, entonces $\exists \tilde{a}\, [x = i_A \tilde{a}]$

$[fi_A = i_B h] \Rightarrow [fx = fi_A \tilde{a} = i_B h \tilde{a}]$ Por tanto $fx \in B$.

$\Leftarrow$) Supongamos $\forall x \in A\, [fx \in B]$

Sea $A \xrightarrow{Id_A} A$, es claro que $i_A Id_A \in i_A$, luego:

$[i_A Id_A \in i_A] \Rightarrow [f(i_A Id_A) \in B] \Rightarrow \exists!\, A \xrightarrow{h} B\, [fi_A Id_A = i_B h]$

Es decir que $fi_A = i_B h$ $\therefore$ $A \underset{f}{\subseteq} B$ ■

Consideremos el morfismo $\bar{X} \xrightarrow{\{\}} 2^{\bar{X}}$ conocido como el <u>mapeo singular</u>, quien a cada elemento $1 \xrightarrow{x} \bar{X}$ le asigna el nombre de la función característica de x, considerado este como una parte de $\bar{X}$.

Este mapeo puede construirse en los tres pasos ilustrados a continuación:

$$(\cdot)\ \overline{X} \xrightarrow{\delta_{\overline{X}}} \overline{X}\times\overline{X} \qquad (\cdot\cdot)\ \overline{X}\times\overline{X} \xrightarrow{⊜_{\overline{X}} = \chi_{\delta_{\overline{X}}}} 2 \qquad (\cdot\cdot\cdot)\ \overline{X} \xrightarrow{\{\,\} = ⊜_{\overline{X}}^{*}} 2^{\overline{X}}$$

EJERCICIO: Para cualquier morfismo $\overline{X} \xrightarrow{f} Y$, el cuadrado conmuta

$$\begin{tikzcd}
\overline{X} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\{\,\}"'] & Y \arrow[d, "\{\,\}'"] \\
P(\overline{X}) \arrow[r, "P(f)"] & P(Y)
\end{tikzcd}$$

demostración

Hagamos la notación siguiente: $\{\,\}(x_0) = \{x_0\}$

Tenemos el diagrama de abajo.

$$\begin{tikzcd}
 & & 2^{\overline{X}}\times\overline{X} \arrow[dr, "eval"] & \\
\overline{X} \arrow[r, "\delta_{\overline{X}}"] & \overline{X}\times\overline{X} \arrow[ur, "\{\,\}\times Id_{\overline{X}}"] \arrow[rr, "⊜_{\overline{X}}"'] \arrow[urr, phantom, "//"] & & 2
\end{tikzcd}$$

$[a ⊜_{\overline{X}} b = \text{CIERTO}] \Longleftrightarrow [a=b]$

$⊜_{\overline{X}}\langle a,b\rangle = eval(\{\,\}\times Id_{\overline{X}})\langle a,b\rangle$

$= eval\,\langle \{a\}, b\rangle = \{a\}(b)$

Observamos que $x_0 \rightsquigarrow \underline{x_0 ⊜_{\overline{X}}\ ?}$

Es claro que el mapeo $\underline{x_0} ⊜_{\overline{X}} \underline{?}$ es la función característica del elemento $1 \xrightarrow{x_0} \overline{X}$, quien también es una parte.

Consideremos un diagrama que sigue la epi-mono factorización de fx_0.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "Id_1"] \arrow[d, "x_0"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & 1 \arrow[d, "f x_0"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Finalmente tomamos χ'_{fx_0}

Por tanto

$(P(f)\{\})\, x_0 = \chi'_{fx_0}$

Análogamente, la otra composición es:

$$\begin{tikzcd} & & 2^Y \times Y \arrow[dr, "eval"] & \\ Y \arrow[r, "\delta_Y"] & Y \times Y \arrow[ur, "\{\}' \times Id_Y"] \arrow[rr, "\circledequal_Y"'] & // & 2 \end{tikzcd}$$

Aprovechemos el análisis anterior para obtener que:

$$Y \xrightarrow{\{\}'} 2^Y$$
$$y_0 \rightsquigarrow y_0 \circledequal_Y \underline{?}$$

Particularmente para $y_0 = fx_0$ se tiene que $[fx_0 \circledequal_Y \underline{\tilde{y}} = \text{CIERTO}] \longleftrightarrow [fx_0 = \tilde{y}]$

De tal forma que entonces $\chi'_{fx_0} = \underline{fx_0} \circledequal_Y \underline{?}$

Y es así como el cuadrado conmuta. ∎

<u>EJERCICIO</u>: $f[A] \subseteq_Y B \longleftrightarrow A \subseteq Bf$

Demostración

Tenemos el diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, hook, "i_A"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & f[A] \arrow[d, hook, "i_{f[A]}"] & \\
f^{-1}[B] \arrow[r, hook] & X \arrow[r, "f"] & Y & B \arrow[l, hook', "i_B"']
\end{tikzcd}$$

$\to$) Supongamos $f[A] \subseteq_Y B$

$\partial \in A \Rightarrow \exists r [\partial = i_A r] \Rightarrow f\partial = f i_A r = i_{f[A]} \partial r \Rightarrow f\partial \in f[A]$

$\Rightarrow f\partial \in B \Rightarrow \partial \in f^{-1}[B] = Bf.$

$\leftarrow$) Supongamos $A \subseteq Bf$

Por un ejercicio anterior tenemos: $\partial \in f[A] \Rightarrow \exists a \in A [fa = \partial]$

$[a \in A] \Rightarrow a \in Bf \Rightarrow fa = \partial \in B.$ ▨.

PROPOSICIÓN: Si f es monomorfismo, entonces 2^f es retracción y $P(f)$ es una sección para 2^f.

Demostración

Por el anterior ejercicio anterior tenemos que

$$f[A] \subseteq B \Longleftrightarrow A \subseteq Bf = 2^f(B)$$

En particular: $f[A] \subseteq f[A] \iff A \subseteq 2^f(f[A]) = (2^f \circ \mathrm{Im} f)(A)$.

$\therefore \ A \subseteq (2^f \circ \mathrm{Im} f)(A)$.

Tenemos los morfismos $2^{X} \xrightarrow{\mathrm{Im} f} 2^{Y} \xrightarrow{2^f} 2^{X}$

El cuadrado de la derecha conmuta.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, equals, "Id_A"] \arrow[d, hook, "i_A"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & f[A]=A \arrow[d, hook, "i_{f[A]} = i_{\mathrm{Im} f(A)}"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Siendo f monomorfismo

$\underline{i_{f[A]} = f i_A = i_{\mathrm{Im} f(A)}}$

cuya imagen inversa $2^f(i_{f[A]})$ es A.

Por tanto $A = 2^f(\mathrm{Im} f(A)) \quad \forall A \in 2^{X}$

$\therefore \boxed{(2^f \circ \mathrm{Im} f) = Id_{2^{X}}}$ y 2^f es retracción ■

CAPITULO 18

Morfismo entre $\mathcal{P}(\overline{X})$ y $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\overline{X}))$

Describiremos ahora una relación entre $\mathcal{P}(\;)$ y $2^{2^{(\;)}}$.

$$2^{\overline{X}} \xrightarrow{\quad \int_{\overline{X}} \quad} 2^{2^{\overline{X}}}$$

Dada cualquier parte $A \hookrightarrow \overline{X}$, tendremos un morfismo $2^{\overline{X}} \xrightarrow{\int_{\overline{X}}(\;)A} 2$ cuyo valor en cualquier $\overline{X} \xrightarrow{\varphi} 2$ es el siguiente:

Es 1: Si $\exists\, x \in A\ [\varphi_x = 1]$ Es 0: En otro caso.

Ya que los morfismos $\overline{X} \xrightarrow{\varphi} 2$ son funciones características, podemos describir $\int_{\overline{X}}$ en la siguiente forma:

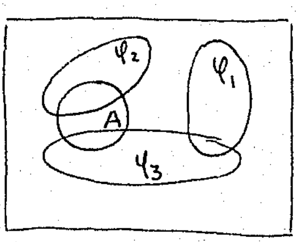
Para cualquier parte A de $2^{\overline{X}} = \mathcal{P}(\overline{X})$, considerar cualquier parte φ en $2^{\overline{X}}$ y preguntarse si φ intersecta con A; si es así la respuesta es 1, y 0 en caso contrario.

Ejemplo:

$$\int_{\overline{X}} \varphi_1(x)\, A(d_x) = 0$$

$$\int_{\overline{X}} \varphi_2(x)\, A(d_x) = 1$$

$$\int_{\overline{X}} \varphi_3(x)\, A(d_x) = 1$$



Veamos en el siguiente ejercicio, como la existencia del morfismo $\int_X$ puede ser deducida.

<u>EJERCICIO</u>: Definamos el morfismo $2^2 \xrightarrow{\mu} 2$ tal que

$\mu(\{0,1\}) = \mu(\{1\}) =$ CIERTO $\qquad \mu(\{0\}) = \mu(0) =$ FALSO

De tal forma que sus funciones características son respectivamente

$\{0,1\} \longrightarrow K_1$ Constante de valor 1.

$\{1\} \longrightarrow Id_2$ Identidad en 2.

$\{0\} \longrightarrow Neg$ Negación en 2.

$0 \longrightarrow K_0$ constante de valor 0

Observemos que tenemos la siguiente Latiz:

$$\begin{tikzcd}
 & K_1 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
Id_2 \arrow[dr, dash] & & Neg \arrow[dl, dash] \\
 & K_0 &
\end{tikzcd}$$

Para cualesquiera X, Y tenemos el morfismo $Y^X \times 2^X \xrightarrow{h} 2^Y$, tal que $h\langle f, A\rangle = f[A]$.

Particularmente para $Y=2$ Tenemos la composición

$$2^X \times 2^X \xrightarrow{h} 2^2 \xrightarrow{\mu} 2$$

demuestra que el adjunto exponencial de $\nu \circ h$ es el mapeo $\int_{\overline{X}}$.

Demostración

El diagrama siguiente es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
2^{2^{\overline{X}}} \times 2^{\overline{X}} \arrow[rrd, "eval"] & & \\
2^{\overline{X}} \times 2^{\overline{X}} \arrow[u, dashed, "(\nu h)^* \times Id_{2^{\overline{X}}}"] \arrow[r, "h"] \arrow[ru, phantom, "//"] & 2^2 \arrow[r, "\nu"] & 2
\end{tikzcd}$$

Sean $\varphi, \psi : \overline{X} \longrightarrow 2$ cualesquiera dos morfismos, tenemos

$$eval\,(\textstyle\int_{\overline{X}} \times Id_{2^{\overline{X}}}) \langle \ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner \rangle \;=\; eval\,\langle \textstyle\int_{\overline{X}} (\ ) \varphi_x\, dx\,,\, \ulcorner\psi\urcorner \rangle$$

$$= \textstyle\int_{\overline{X}} \psi_x\, \varphi_x\, dx \;=\; \text{Cierto} \qquad (\text{Si y sólo si } \psi \wedge \varphi \neq \emptyset\,)$$

Esto último ocurre si y sólo si $\exists\ 1 \xrightarrow{x} \overline{X}\ [\varphi_x = \psi_x = \text{Cierto}]$

Sean las partes $A \overset{i_A}{\rightarrowtail} \overline{X}$ y $B \overset{i_B}{\rightarrowtail} \overline{X}$ tales que $\chi_{i_A} = \varphi$ y $\chi_{i_B} = \psi$.

Consideremos en el diagrama siguiente la epi-mono factorización de la composición φi_B. Por tanto el diagrama será conmutativo.

$$
\begin{tikzcd}
 & B \arrow[r, "A"] \arrow[d, hook, "i_B"] \arrow[dr, phantom, "//"] & \varphi[B] \arrow[d, hook, "i_{\varphi[B]}"] \\
A \arrow[r, hook, "i_A"] & \bar{X} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"] & 2 \arrow[d, "\beta = \lambda i_{\varphi[B]}"] \\
 & 2 & 2
\end{tikzcd}
$$

Por otro lado:

$$\mathrm{eval}\left((\mu h)^{\bar{x}} \times \mathrm{Id}_2{}^{\bar{x}}\right) \langle \ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner \rangle = \mu h \langle \ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner \rangle$$

Fijándose en como actúa μ obtenemos lo siguiente.

$$\left[\mu h \langle \ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner \rangle = \mu\left(h \langle \ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner \rangle\right) = \text{CIERTO}\right] \Longleftrightarrow$$

$$\left[h \langle \ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner \rangle = \mathrm{Id}_2 \quad \text{ó} \quad h \langle \ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner \rangle = K_1\right]$$

Pero siendo $2 \xrightarrow{h\langle \ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner \rangle} 2$ tenemos que:

$$\left[h \langle \ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner \rangle = \mathrm{Id}_2 \quad \text{o} \quad h \langle \ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner \rangle = K_1\right] \longleftrightarrow \left[h \langle \ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner \rangle(\text{uno}) = \text{CIERTO}\right.$$

$$\left.\text{donde } 1 \xrightarrow{\text{uno}} 2\right]$$

Hagamos $\beta = h \langle \ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner \rangle$ y fijémonos en el diagrama a continuación, en donde $h \langle \ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner \rangle = \lambda' i_{\varphi[B]}$.

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[r, "s"] \arrow[d, tail, "i_B"] \arrow[dr, phantom, "//"] & \varphi[B] \arrow[d, tail, "i_{\varphi[B]}"] & \\
A \arrow[r, tail, "i_A"] & \overline{X} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & 2 \arrow[d, "\beta"] & 1 \arrow[l, "uno"'] \\
 & 2 & 2 &
\end{tikzcd}$$

$\beta(uno) = \text{CIERTO} \iff uno \in i_{\varphi[B]}$

Por un ejercicio anterior tenemos:

$uno \in i_{\varphi[B]} \iff \exists\, 1 \xrightarrow{x} \overline{X}\ [x \in i_B \ \text{ y } \ \varphi x = uno]$

$\iff \exists\, 1 \xrightarrow{x} \overline{X}\ [\psi_x = \text{CIERTO} \ \text{ y } \ \varphi_x = uno]$

$\iff \exists\, 1 \xrightarrow{y} \overline{X}\ [\psi_x = \text{CIERTO} \ \text{ y } \ \varphi_x = \text{CIERTO}]$

$\iff \varphi \wedge \psi \neq \emptyset$

Por tanto

$[\mathrm{eval}\,(\int_{\overline{X}} \times \mathrm{Id}_{2^{\overline{X}}})\langle \ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner\rangle = \text{CIERTO}] \iff [\nu h \langle \ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner\rangle = \text{CIERTO}]$

Por la unicidad del adjunto exponencial concluimos

$$\underline{\underline{\int_{\overline{X}} = (\nu h)^*}}$$

$\boxtimes$

EJERCICIO: Para cualquier $\bar{X} \xrightarrow{f} Y$ el cuadrado siguiente conmuta.

$$
\begin{tikzcd}
2^{\bar{X}} \arrow[r, "\int_{\bar{X}}"] \arrow[d, "P(f)"'] & 2^{2^{\bar{X}}} \arrow[d, "2^{2^{f}}"] \\
2^{Y} \arrow[r, "\int_{Y}"] & 2^{2^{Y}}
\end{tikzcd}
$$

Demostración

Sea $1 \xrightarrow{\ulcorner\varphi\urcorner} 2^{\bar{X}}$ arbitrario, y sea $P(f)(\ulcorner\varphi\urcorner) = \ulcorner\psi\urcorner$.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, two heads, "s"] \arrow[d, hook, "i"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & f[A] \arrow[d, hook, "j"] \\
\bar{X} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[d, "\psi"] \\
2 & 2
\end{tikzcd}
$$

Tenemos los morfismos

$$2^{\bar{X}} \xrightarrow{\int_{\bar{X}} (\ )\, i\, d_x} 2 \quad \text{y}$$

$$2^{Y} \xrightarrow{\int_{Y} (\ )\, j\, d_y} 2 .$$

Donde $\int_Y (\ )\, j\, d_y = \int_Y (\ )\, Pf(\ulcorner\varphi\urcorner)\, d_y$.

Sea $Y \xrightarrow{\alpha} 2$ cualquiera.

$\int_Y \alpha(y)\, j\, d_y = \int_Y \alpha(y)\, \psi\, d_y = \text{CIERTO} \iff$

$\exists\, 1 \xrightarrow{y} Y\ [\alpha(y) = \text{CIERTO} \ \text{ y } \ \psi(y) = \text{CIERTO}] \iff$

$\exists\, 1 \xrightarrow{y} Y\ [\alpha(y) = \text{CIERTO} \ \text{ y } \ y \in j] \iff$

$\exists\, 1 \xrightarrow{x} \bar{X}\ [x \in i,\ fx = y \ \text{ y } \ \alpha(fx) = \text{CIERTO}] \iff$

$\exists\, 1 \xrightarrow{x} \bar{X}\ [\varphi x = \text{CIERTO} \ \text{ y } \ \alpha(f x) = \text{CIERTO}] \iff$

$\int_{\bar{X}} \alpha f(x)\ \varphi\ d_x = \text{CIERTO}$ $\quad \therefore$ El cuadrado conmuta ▨

EJERCICIO: Sea el morfismo $\overline{X} \xrightarrow{\ \delta\ } 2^{2^{\overline{X}}}$ tal que $\delta_x(\varphi) = \varphi_x$. Entonces el triángulo siguiente conmuta.

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{X} \arrow[dl, "\{\ \}"'] \arrow[dr, "\delta"] & \\
2^{\overline{X}} \arrow[rr, "\int_{\overline{X}}"] & & 2^{2^{\overline{X}}}
\end{tikzcd}$$

Demostración

Hacemos la observación siguiente:

$$\frac{\dfrac{\overline{X} \xrightarrow{\ \delta\ } 2^{2^{\overline{X}}}}{\overline{X} \times 2^{\overline{X}} \xrightarrow{\ \mathrm{eval}\langle \pi', \pi\rangle\ } 2}}{2^{\overline{X}} \times \overline{X} \xrightarrow{\ \mathrm{eval}\ } 2}$$

Resulta que entonces

$$\delta = (\mathrm{eval}\langle \pi', \pi\rangle)^*$$

Sea $1 \xrightarrow{\ x_0\ } \overline{X}$, entonces $2^{\overline{X}} \xrightarrow{\ \delta_{x_0}\ } 2$, $2^{\overline{X}} \xrightarrow{\ \int_{\overline{X}} (\ )\{x_0\}\,dx\ } 2$.

$\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0) = \text{CIERTO} \iff x_0 \in \varphi.$

Por otro lado:

$$\left[\left(\int_{\overline{X}} (\ )\{x_0\}\,dx\right)(\varphi) = \int_{\overline{X}} \varphi(x)\{x_0\}\,dx = \text{CIERTO}\right] \iff \varphi \cap \{x_0\} \neq \emptyset$$

Ya que $\{x_0\} = X_{x_0}$ tenemos: $[\varphi \cap \{x_0\} \neq \emptyset] \iff \varphi(x_0) = \text{CIERTO}$

$\iff x_0 \in \varphi$ Por tanto el triángulo conmuta. ■

CAPITULO 19

Números Naturales

Denotemos por $\mathcal{S}$ la categoría de conjuntos simples y mapeos arbitrarios entre ellos, tal como los hemos estudiado hasta ahora. En las distintas ramas de la matemática surgen algunas categorías $\mathcal{X}$ de conjuntos no necesariamente simples, junto con mapeos respectivos entre ellos.

La relación entre $\mathcal{S}$ y las categorías $\mathcal{X}$ es al menos triple:

(•) En general los conjuntos en $\mathcal{X}$ tienen algun tipo de estructura de la cual carecen como conjuntos simples en $\mathcal{S}$. Podemos establecer sin embargo un funtor $\mathcal{X} \xrightarrow{|\,|} \mathcal{S}$ que determina el número $|X|$ de elementos de X.

(••) Un gran número de propiedades de tales categorías $\mathcal{X}$ son muy similares a las propiedades de la categoría $\mathcal{S}$; de tal forma que el conocimiento de estas últimas se hace indispensable. Entre las principales de estas propiedades se encuentran los conceptos de espacio de funciones X^T y el conjunto potencia 2^X.

(•••) Algunas categorías de conjuntos variables se pueden construir a partir de $\mathcal{S}$.

Denotemos por $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$ la categoría de conjuntos variables X, en la cual X no solo tiene elementos sino también una "dinámica" interna; y los morfismos entre ellos respetan esta dinámica interna.

$S^{\circlearrowleft}$ puede construirse a partir de S en la manera siguiente:

Un conjunto X de $S^{\circlearrowleft}$ es un conjunto de S junto con un endomorfismo como dinámica.

$$X \circlearrowleft^{d_X} \quad \text{en } S$$

Un mapeo de $S^{\circlearrowleft}$ es una terna de mapeos en S que hacen conmutar el diagrama de abajo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d_X"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & Y \arrow[d, "d_Y"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

La composición de dos mapeos $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ en $S^{\circlearrowleft}$ está definida sólo en el caso en que el codominio de f en $S^{\circlearrowleft}$ coincida con el dominio de g en $S^{\circlearrowleft}$, y no únicamente en S.

El diagrama siguiente nos muestra en forma clara que la composición de dos mapeos en $S^{\circlearrowleft}$ resulta nuevamente un mapeo en $S^{\circlearrowleft}$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d_Z"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "d_Y"] \arrow[dr, phantom, "//"] & Z \arrow[d, "d_Z"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z
\end{tikzcd}$$

Apuntamos que si 1 es objeto terminal en S, entonces 1 con la única dinámica posible también es terminal en $S^{\circlearrowleft}$.

Ahora, un morfismo $1 \xrightarrow{x} \bar{X}$ en $S^{\circlearrowleft}$ no es más que un punto fijo de la dinámica de $\bar{X}$, es decir un elemento x del conjunto simple $\bar{X}$, tal que $d_{\bar{X}}(x) = x$.

Así que aunque los mapeos $1 \longrightarrow \bar{X}$ son un aspecto importante de los conjuntos en $S^{\circlearrowleft}$, éstos son deficientes para detectar todos los elementos del conjunto $\bar{X}$ pues sólo captura los puntos fijos. Para tal propósito nos valdremos de otro objeto que denotaremos $\mathbb{N}$.

$\mathbb{N}$ deberá estar equipado con un S-endomorfismo usualmente llamado "sucesor" y denotado por $\mathbb{N} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{N}$.

Deseamos que exista una correspondencia invertible

$$\frac{\mathbb{N} \xrightarrow{\quad x \quad} \bar{X} \quad \text{en } S^{\circlearrowleft}}{1 \xrightarrow{\quad x_0 \quad} \bar{X} \quad \text{en } S}$$

Consideremos entonces el caso $\bar{X} = \mathbb{N}$ y $x = Id_{\mathbb{N}}$; de lo que deducimos que debe existir un elemento distinguido

$$1 \xrightarrow{\quad x_0 = 0 \quad} \mathbb{N}$$

Como un morfismo $\mathbb{N} \xrightarrow{x} \bar{X}$ en $S^{\circlearrowleft}$ debe satisfacer $x\sigma = d_{\bar{X}}\, x$ en S.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "x"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & \mathbb{N} \arrow[d, "x"] \\
\bar{X} \arrow[r, "d_{\bar{X}}"'] & \bar{X}
\end{tikzcd}$$

Obtenemos entonces una propiedad que caracteriza al sistema $1 \longrightarrow \mathbb{N}^{\circlearrowleft \sigma}$.

Axioma de Dedekind-Peano

Para cualquier diagrama $1 \xrightarrow{x_0} X^{\circlearrowleft d_X}$ existe una única sucesión $\mathbb{N} \xrightarrow{x} X$ para la cual.

$$x(0) = x_0$$

$$x\,\sigma = d_X\,x$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{N} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, dashed, "x"] \arrow[dr, phantom, "//"] & \mathbb{N} \arrow[d, dashed, "x"] \\
1 \arrow[ur, "0"] \arrow[r, phantom, "//"] \arrow[dr, "x_0"'] & X \arrow[r, "d_X"] & X \\
 & &
\end{tikzcd}$$

Usamos "sucesión" como el nombre usual para mapeos en S con dominio $\mathbb{N}$.

La ecuación que corresponde a la conmutatividad del cuadrado es la condición que x debe respetar como mapeo de conjuntos variables, mientras que la ecuación triangular expresa que el elemento x_0 está representado por x.

Usaremos la notación acostumbrada $x_n = x(n)$ para los valores de una sucesión $\mathbb{N} \xrightarrow{x} X$.

La propiedad universal del sucesor $\mathbb{N} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{N}$ dice que dada cualquier regla de "paso siguiente" $X^{\circlearrowleft d_X}$ sobre cualquier conjunto X, y dado cualquier valor inicial $1 \longrightarrow X$; existe una única sucesión $\mathbb{N} \xrightarrow{x} \mathbb{N}$ para la cual:

$$x_0 = \text{valor inicial dado}$$

$$x_{n+1} = d_{\Sigma}(x_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se dice entonces que la sucesión x está definida por recursión simple a partir de x_0.

Probemos a continuación una de las propiedades características de conjuntos infinitos.

<u>TEOREMA</u>: $\mathbb{N} + 1 \simeq \mathbb{N}$

<u>Demostración</u>

Consideremos el coproducto $\mathbb{N} + 1$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[dr, "i_{\mathbb{N}}"] \arrow[drr, bend left, "\sigma"] & & \\
& \mathbb{N} + 1 \arrow[r, "{[\sigma, 0]}"] & \mathbb{N} \\
\underline{1} \arrow[ur, "i_1"] \arrow[urr, bend right, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

Definamos una inversa $\mathbb{N} \xrightarrow{g} \mathbb{N} + 1$ como sigue

$$g(0) = i_1 \qquad\qquad g(n+1) = i_{\mathbb{N}}(n)$$

$$([r,0]g)(0) = [r,0](g(0)) = [r,0]\, i_1 = 0$$

$$([r,0]g)(n+1) = [r,0](g(n+1)) = [r,0]\, i_{\mathbb{N}}(n) = r(n) = n+1$$

Ya que la sucesión es única y el diagrama de abajo conmuta; podemos concluir que $\underline{[r,0]\, g = Id_{\mathbb{N}}}$

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{N} \arrow[r, "r"] \arrow[dd, dashed, "Id_{\mathbb{N}}"] & \mathbb{N} \arrow[dd, dashed, "Id_{\mathbb{N}}"] \\
1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] \arrow[r, phantom, "//"] & {} \arrow[r, phantom, "//"] & {} \\
& \mathbb{N} \arrow[r, "r"] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

Por otro lado:

$$(g[r,0])\, i_{\mathbb{N}} = g([r,0]\, i_{\mathbb{N}}) = g r = i_{\mathbb{N}}$$

$$(g[r,0])\, i_1 = g([r,0]\, i_1) = g(0) = i_1$$

Recordemos que $Id_{\mathbb{N}+1} = [i_{\mathbb{N}}, i_1]$

Por tanto $\underline{g\,[r,0] = Id_{\mathbb{N}+1}}$ $\therefore$ $\underline{\mathbb{N}+1 \cong \mathbb{N}}$ ■

LEMA DE RECURSIÓN

Si $\mathbb{N}\times A \xrightarrow{h} A$ y $1 \xrightarrow{a_0} A$ son cualesquiera morfismo y elemento dados, entonces

$$\exists!\ \mathbb{N} \xrightarrow{g} A \quad [g(0)=a_0 \quad \text{y} \quad g(n+1) = h\langle n, g(n)\rangle]$$

Demostración

Definamos la siguiente dinámica $\mathbb{N}\times A \xrightarrow{D} \mathbb{N}\times A$

$D\langle n,a\rangle = \langle n+1, h\langle n,a\rangle\rangle$. Consideremos $x_0 = \langle 0, a_0\rangle$.

Por el Axioma de Dedekind-Peano:

$\exists!\ \mathbb{N} \xrightarrow{x} \mathbb{N}\times A \quad [x_0 = \langle 0, a_0\rangle \quad y \quad x_{n+1} = D(x_n) = D\circ x(n)]$

Sean $u = \pi x$ y $g = \pi' x$. Entonces $x(n) = \langle u(n), g(n)\rangle$

Luego:

$x(0) = \langle u(0), g(0)\rangle = \langle 0, a_0\rangle$

$x(n+1) = \langle u(n+1), g(n+1)\rangle = D(x_n) = D\langle u(n), g(n)\rangle$

$= \langle u(n)+1 ; h\langle u(n), g(n)\rangle\rangle$

Tomando proyecciones obtenemos

$u(0) = 0$

$u(n+1) = u\circ\sigma(n) = u(n)+1 = \sigma\circ u(n)$

Pero el cuadrado de abajo conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{N} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "Id_{\mathbb{N}}"] \arrow[dr, phantom, "//"] & \mathbb{N} \arrow[d, "Id_{\mathbb{N}}"] \\
1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] \arrow[r, phantom, "//"] & \mathbb{N} \arrow[r, "\sigma"] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

Por tanto

$\underline{\underline{u = Id_{\mathbb{N}}}}$

Tenemos entonces que: $x(n+1) = \langle u(n+1), g(n+1) \rangle = \langle n+1, h\langle n, g(n) \rangle \rangle$

Tomando nuevamente proyecciones obtenemos lo deseado

$\underline{g(0) = a_0}$ y $\underline{g(n+1) = h\langle n, g(n) \rangle}$

Veamos la unicidad. Si $\mathbb{N} \xrightarrow{f} A$ es tal que $f(0) = a_0$ y $f(n+1) = h\langle n, f(n) \rangle$.

Definamos ψ mediante el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{N} \\
\mathbb{N} \arrow[urr, bend left, "Id_{\mathbb{N}}"] \arrow[rr, "\langle Id_{\mathbb{N}}, f \rangle = \psi"] \arrow[drr, bend right, "f"'] & & \mathbb{N} \times A \arrow[u, "\pi"'] \arrow[d, "\pi'"] \\
 & & A
\end{tikzcd}$$

Veamos que $\psi = x$

$\psi(0) = \langle Id_{\mathbb{N}}, f \rangle (0) = \langle 0, f(0) \rangle = \langle 0, a_0 \rangle$

$\psi(n+1) = \psi \circ \sigma(n) = \langle Id_{\mathbb{N}}, f \rangle (n+1) = \langle n+1, f(n+1) \rangle = \langle n+1, h\langle n, f(n) \rangle \rangle$

Por tanto $\psi = x$, y el cuadrado de abajo conmuta.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{N} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\psi"] \arrow[dr, phantom, "//"] & \mathbb{N} \arrow[d, "\psi"] \\
O \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "\langle 0, a_0 \rangle"'] \arrow[r, phantom, "//"] & \mathbb{N} \times A \arrow[r, "D"] & \mathbb{N} \times A
\end{tikzcd}$$

$D \circ \tau_b(n) = D\langle n, f(n)\rangle = \langle n+1, h\langle n, f(n)\rangle\rangle$

Tomando nuevamente proyecciones concluimos que $\underline{f = g}$ ▨

<u>COROLARIO</u>.- Existe un único morfismo $\mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$, llamado usualmente el <u>Predecesor</u>, para el cual $p(0)=0$ y $p \circ \tau = Id_{\mathbb{N}}$.

<u>Demostración</u> (TESIS)

Consideremos los morfismos $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \xrightarrow{\pi} \mathbb{N}$ y $1 \xrightarrow{0} \mathbb{N}$

Por el Lema de Recursión: $\exists!\ \mathbb{N} \xrightarrow{g} \mathbb{N}$ para el cual

$g(0) = 0$ y $g(n+1) = g \circ \tau(n) = \pi\langle n, g(n)\rangle = n$

Sea $p = g$, claramente $\underline{p \circ \tau = Id_{\mathbb{N}}}$ ▨

<u>PROPOSICIÓN</u>.- Dado cualquier morfismo $A \xrightarrow{\alpha} A$ existe una única sucesión $\mathbb{N} \xrightarrow{\alpha^{(\ )}} A^A$ para la cual $\alpha^0 = Id_A$ y $\alpha^{n+1} = \alpha \circ \alpha^n$.

<u>Demostración</u>

Queremos advertir primeramente el abuso de notación que se está haciendo al ignorar el símbolo de <u>nombre</u>: $\ulcorner\ \urcorner$.

Consideremos el morfismo $A^A \xrightarrow{\delta} A^A$ tal que $\delta(\beta) = \alpha\beta$ para todo $A \xrightarrow{\beta} A$.

Por el Axioma de Dedekind-Peano:

$\exists!\ \mathbb{N} \xrightarrow{\alpha^{(\,)}} A^A$ tal que hace conmutar el diagrama siguiente.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{N} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\alpha^{(\,)}"] \arrow[dr, phantom, "//"] & \mathbb{N} \arrow[d, "\alpha^{(\,)}"] \\
1 \arrow[ur, "0"] \arrow[r, phantom, "//"] \arrow[r, "\mathrm{Id}_A"'] & A^A \arrow[r, "\delta"] & A^A
\end{tikzcd}$$

Es decir que: $\alpha^0 = \mathrm{Id}_A$ y $\alpha^{n+1} = \alpha\,\alpha^n$

Puesto que $\alpha^{(\,)} \circ \sigma(n) = \alpha^{(\,)}(n+1) = \alpha^{n+1} = \delta \circ \alpha^{(\,)}(n) = \delta\,\alpha^n = \alpha\,\alpha^n$ ■

<u>TEOREMA</u>.- Para cualquier conjunto A existe un mapeo $A^A \xrightarrow{\text{itera}_A} (A^A)^{\mathbb{N}}$, el cual asigna a cualquier $A \xrightarrow{\alpha} A$ el nombre de la sucesión de iteraciones de α.

<u>Demostración</u>

La existencia de este mapeo es clara dada la proposición anterior.

$A^A \xrightarrow{\text{itera}_A} (A^A)^{\mathbb{N}}$ $\qquad \text{itera}_A(\alpha) = \ulcorner \alpha^{(\,)} \urcorner$ ■

<u>Por ejemplo</u>:

Si $A=\mathbb{N}$ tendremos un procedimiento $\mathbb{N} \xrightarrow{\text{iter}_{\mathbb{N}}} (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \simeq \mathbb{N}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ el cual asigna a cada morfismo $\mathbb{N} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{N}$ una <u>operación binaria</u> $\bar{\alpha}$ en $\mathbb{N}$, la cual satisface

$$\bar{\alpha}\langle 0,m\rangle = \alpha^0(m) = \mathrm{Idm}(m) = m$$

$$\bar{\alpha}\langle n+1,m\rangle = \alpha^{n+1}(m) = \alpha\alpha^n(m) = \alpha(\bar{\alpha}\langle n,m\rangle)$$

Es decir: $\bar{\alpha}\langle 0,m\rangle = m$ y $\bar{\alpha}\langle n+1,m\rangle = \alpha(\bar{\alpha}\langle n,m\rangle)$

Vemos que $\bar{\alpha}$ no es mas que aplicar $\alpha^{(\ )}$ a la primera coordenada, y ésto aplicarlo a la segunda coordenada (es decir a m)

Tomemos $\underline{\alpha = \sigma}$ (el sucesor), tendremos entonces

$$\bar{\sigma}\langle 0,m\rangle = m \quad \text{y} \quad \bar{\sigma}\langle n+1,m\rangle = \sigma(\bar{\sigma}\langle n,m\rangle) = \bar{\sigma}\langle n,m\rangle + 1$$

Obtenemos en esta forma la <u>ADICIÓN</u> de números naturales como la existencia de un morfismo particular

$$\bar{\sigma}\langle n,m\rangle = n+m$$

La notación será la familiar: $0+m=m$ y $(n+1)+m=(n+m)+1$

Consideremos ahora la composición $\mathbb{N} \xrightarrow{\ \Delta\ } \mathbb{N}\times\mathbb{N} \xrightarrow{\ +\ } \mathbb{N}$ donde $\underline{+ = \bar{\sigma}}$. Denotemos $2(\ ) = +\circ\Delta$, llamada "multiplicación por 2".

<u>EJERCICIO</u>.- Determina la operación $\bar{\alpha}:\mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ la cual satisface las relaciones

$$\bar{\alpha}\langle 0,m\rangle = m \quad \text{y} \quad \bar{\alpha}\langle n+1,m\rangle = 2(\bar{\alpha}\langle n,m\rangle)$$

Determinación

Tenemos ya definidos los morfismos $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{iter_{\mathbb{N}}} \mathbb{N}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ y $\mathbb{N} \xrightarrow{2(\ )} \mathbb{N}$.

Consideremos $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \xrightarrow{iter_{\mathbb{N}}[2(\ )]} \mathbb{N}$.

Llamemos $\alpha = 2(\ )$, entonces tenemos $\bar{\alpha} = iter_{\mathbb{N}}[2(\ )]$

Entonces se satisfacen las siguientes relaciones:

$(\cdot)\ \bar{\alpha}\langle 0, m\rangle = m$ $\qquad (\cdot\cdot)\ \bar{\alpha}\langle n+1, m\rangle = \alpha(\bar{\alpha}\langle n, m\rangle)$

Sustituyendo tenemos:

$$(\cdot)\ (iter_{\mathbb{N}}[2(\ )])\langle 0, m\rangle = Id_{\mathbb{N}}(m) = m$$

$$(\cdot\cdot)\ (iter_{\mathbb{N}}[2(\ )])\langle n+1, m\rangle = 2(\ )\big[(iter_{\mathbb{N}}[2(\ )])\langle n, m\rangle\big]$$

$$= 2\big((iter_{\mathbb{N}}[2(\ )])(\langle n, m\rangle)\big) = 2(\bar{\alpha}\langle n, m\rangle)$$

Es decir que:

$\bar{\alpha}\langle 0, m\rangle = m$ $\qquad$ y $\qquad \bar{\alpha}\langle n+1, m\rangle = 2(\bar{\alpha}\langle n, m\rangle)$ $\blacksquare$

<u>EJERCICIO</u>: Use los morfismos $2(\ )$ y $2(\ )+1$ para dar explícitamente un isomorfismo $\mathbb{N}+\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

· <u>Demostración</u> (TESIS)

Antes de iniciarla quiero recomendar el cuidado necesario en la revisión de ésta; pues para lograrla se hacen paralelamente varias pequeñas demostraciones mediante el uso de diagramas.

La demostración está inspirada en la que se haría para Conjuntos simples, donde $\mathbb{N}$ es el conjunto familiar de números naturales. Es decir que los morfismos fueron sugeridos a partir del comportamiento que se observa en los morfismos involucrados en la demostración con conjuntos simples y $\mathbb{N}$ los números naturales.

Empecemos dando el morfismo f bajo el siguiente diagrama.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[d, "i_0"'] \arrow[drr, "2(\ )"] & & \\
\mathbb{N}+\mathbb{N} \arrow[rr, "f"] \arrow[r, phantom, shift left=3, "//"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "//"] & & \mathbb{N} \\
\mathbb{N} \arrow[u, "i_1"] \arrow[urr, "2(\ )+1"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad f = [2(\ ),\ 2(\ )+1]
$$

Demos ahora una dinámica en $\mathbb{N}+\mathbb{N}$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[dr, "i_0"] \arrow[drr, bend left, "i_1"] & & \\
& \mathbb{N}+\mathbb{N} \arrow[r, "{[i_1,\ i_0\sigma]}"] \arrow[r, phantom, shift left=4, "//"] \arrow[r, phantom, shift right=4, "//"] & \mathbb{N}+\mathbb{N} \\
\mathbb{N} \arrow[ur, "i_1"'] \arrow[urr, bend right, "i_0\sigma"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Por tanto: $\exists!\ \mathbb{N} \xrightarrow{s} \mathbb{N}+\mathbb{N}$ que hace conmutar el diagrama de abajo

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "//"] & \mathbb{N} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, dashed, "s"] \arrow[dr, phantom, "//"] & \mathbb{N} \arrow[d, dashed, "s"] \\
1 \arrow[r, "i_0(0)"'] & \mathbb{N}+\mathbb{N} \arrow[r, "{[i_1, i_0\sigma]}"'] & \mathbb{N}+\mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

Ya tenemos pues dos morfismos candidatos

$$\mathbb{N}+\mathbb{N} \xrightarrow{[2(\,);\, 2(\,)+1]} \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \mathbb{N} \xrightarrow{s} \mathbb{N}+\mathbb{N}.$$

<u>Veamos que $[2(\,), 2(\,)+1] \circ s = Id_{\mathbb{N}}$.</u>

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "//"] & \mathbb{N} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, dashed, "s"] \arrow[dr, phantom, "//"] & \mathbb{N} \arrow[d, dashed, "s"] \\
1 \arrow[r, "i_0(0)"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "?"] & \mathbb{N}+\mathbb{N} \arrow[r, "{[i_1, i_0\sigma]}"] \arrow[d, "{[2(\,),2(\,)+1]}"] \arrow[dr, phantom, "?"] & \mathbb{N}+\mathbb{N} \arrow[d, "{[2(\,),2(\,)+1]}"] \\
1 \arrow[r, "0"] & \mathbb{N} \arrow[r, "\sigma"] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

$$([2(\,);2(\,)+1]\circ s)(0) = [2(\,);2(\,)+1]\, i_0(0) = 2(0).$$

Claramente a partir de la definición de $\mathbb{N} \xrightarrow{2(\,)} \mathbb{N}$ se obtiene: $2(0)=0$

$\therefore$ <u>$([2(\,);2(\,)+1]\circ s)(0)=0$</u>

Ahora

$$([2(\,),2(\,)+1]\circ\Delta\circ\sigma)(n)=[2(\,),2(\,)+1](\Delta\sigma(n))=([2(\,),2(\,)+1]\,[i_1,i_0\sigma]\Delta)n$$

$$=([2(\,)+1,2(\,)\circ\sigma]\circ\Delta)(n)$$

Por tanto $[2(\,),2(\,)+1]\circ\Delta\circ\sigma=[2(\,)+1;2(\,)\circ\sigma]\circ\Delta$

Por otro lado

$$\sigma\circ[2(\,);2(\,)+1]\circ\Delta=[\sigma\cdot 2(\,);\sigma\circ(2(\,)+1)]\circ\Delta=[2(\,)+1,\sigma\circ(\sigma\circ 2(\,))]\circ\Delta$$

$$=[2(\,)+1;\sigma^2\circ(2(\,))]\circ\Delta$$

Por tanto $\sigma\circ[2(\,),2(\,)+1]\circ\Delta=[2(\,)+1,\sigma^2\circ 2(\,)]\circ\Delta$

Esperamos que el cuadrado con vértices en $\mathbb{N}$ conmute; para lo cual sólo resta ver que los morfismos encerrados en círculo son iguales.

Consideremos $\mathbb{N}\xrightarrow{\sigma^2}\mathbb{N}$, entonces existe un único $\mathbb{N}\xrightarrow{h}\mathbb{N}$ que hace conmutar el diagrama anexo.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "//"] & \mathbb{N} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, phantom, "//"] & \mathbb{N} \arrow[d, "h"] \\
1 \arrow[r, "2"] & \mathbb{N} \arrow[r, "\sigma^2"] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

$h(0)=2$

$h\sigma=\sigma^2 h$

Veamos que $2(\,)\circ\sigma$ y $\sigma^2\circ 2(\,)$ satisfacen estas ecuaciones.

(a) $(2(\,)\circ\sigma)(0)=2(\,)(\sigma(0))=2(1)=2$

(b) $[\sigma^2 \circ 2() \circ \sigma](n) = [\sigma^2 \circ 2()]\,\sigma(n) = \sigma^2(2(n+1)) = 2(n+1)+2 = 2n+4$ ✓

(c) $[2() \circ \sigma \circ \sigma](n) = [2() \circ \sigma](\sigma(n)) = 2()(\sigma(n+1)) = 2()(n+2) = 2(n+2) = 2n+4$ ✓

De (a), (b) y (c) concluimos $\underline{2() \circ \sigma = h}$

(a') $[\sigma^2 \circ 2()](0) = \sigma^2(2(0)) = \sigma^2(0) = 2$ ✓

(b') $[\sigma^2 \circ \sigma^2 \circ 2()](n) = (\sigma^2 \circ \sigma^2)(2(n)) = \sigma^2(2(n)+2) = 2n+4$ ✓

(c') $[\sigma^2 \circ 2() \circ \sigma](n) = [\sigma^2 \circ 2()](\sigma(n)) = \sigma^2(2(n+1)) = 2(n+1)+2 = 2n+4$ ✓

De (a'), (b') y (c') concluimos $\underline{\sigma^2 \circ 2() = h}$

Por tanto $\underline{\underline{2() \circ \sigma = \sigma^2 \circ 2()}}$

Hemos obtenido que el cuadrado con los 4 vértices en $\mathbb{N}$, conmuta. Sin embargo es obvia la conmutatividad del diagrama.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "//"] & \mathbb{N} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "Id_{\mathbb{N}}"] \arrow[dr, phantom, "//"] & \mathbb{N} \arrow[d, "Id_{\mathbb{N}}"] \\
1 \arrow[r, "0"] & \mathbb{N} \arrow[r, "\sigma"] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

Como la sucesión es única, entonces $\boxed{[2(), 2()+1] \circ s = Id_{\mathbb{N}}}$

<u>Veamos ahora que $s \circ [2(); 2()+1] = Id_{\mathbb{N}+\mathbb{N}}$</u>

Recordemos para esto que $Id_{\mathbb{N}+\mathbb{N}} = [i_0, i_1]$

Empezamos considerando que $(s\circ[z(), z()+1])\circ i_0 = s\circ z()$

Veamos que $s\circ z() = i_0$

$$\begin{tikzcd}
\underline{1} \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "//"] & \mathbb{N} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "i_0"] \arrow[dr, phantom, "//"] & \mathbb{N} \arrow[d, "i_0"] \\
\underline{1} \arrow[r, "i_0(0)"] & \mathbb{N}+\mathbb{N} \arrow[r, "{[i_0\sigma;\, i_1\sigma]}"] & \mathbb{N}+\mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

Ya que i_0 hace conmutar el diagrama y tal morfismo es único, si $s\circ z()$ también lo hiciera conmutar, tendríamos la igualdad deseada

$$\begin{tikzcd}
\underline{1} \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "?"] & \mathbb{N} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "s\circ z()"] \arrow[dr, phantom, "?"] & \mathbb{N} \arrow[d, "s\circ z()"] \\
\underline{1} \arrow[r, "i_0(0)"] & \mathbb{N}+\mathbb{N} \arrow[r, "{[i_0\sigma;\, i_1\sigma]}"] & \mathbb{N}+\mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

Recordemos que ya fué probada la igualdad $\underline{z()\circ\sigma = \sigma^2\circ z()}$

Tenemos lo siguiente:

$(\cdot)$ $s\circ z()\circ\sigma = s\circ(z()\circ\sigma) = s\circ(\sigma^2\circ z()) = (s\circ\sigma)\circ(\sigma\circ z())$

$= ([i_1, i_0\sigma]\circ s)\circ(\sigma\circ z()) = [i_1, i_0\sigma]\circ(s\circ\sigma)\circ z() = [i_1, i_0\sigma]\circ([i_1, i_0\sigma]\circ s)\circ z()$

$= [i_0\sigma, i_1\sigma]\circ s\circ z()$.

Por tanto $\underline{s\circ z()\circ\sigma = [i_0\sigma, i_1\sigma]\circ s\circ z()}$

$(\cdot\cdot)$ $[s\circ z()](0) = s(z(0)) = s(0) = i_0(0)$, donde la última igualdad se debe a la definición de $\underline{s}$.

De (*) y (**) obtenemos $\underline{i_0 = s\circ 2()}$

$\therefore \quad \underline{s\circ[2(),2()+1]\circ i_0 = i_0}$ *

Veamos que pasa con la otra inclusión:

$(s\circ[2(),2()+1])\circ i_1 = s\circ 2()+1$

Veamos, en forma análoga a i_0, que $s\circ(2()+1) = i_1$

Consideremos el diagrama anexo

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "//"] & \mathbb{N} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "i_1"] \arrow[dr, phantom, "//"] & \mathbb{N} \arrow[d, "i_1"] \\
1 \arrow[r, "i_1(0)"] & \mathbb{N}+\mathbb{N} \arrow[r, "{[i_0\sigma, i_1\sigma]}"] & \mathbb{N}+\mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

i_1 es el *único* morfismo que hace conmutar este diagrama.

Tenemos lo siguiente:

$(***)\quad s\circ(2()+1)\circ\sigma = s\circ\sigma\circ 2()\circ\sigma = s\circ\sigma\circ[2()\circ\sigma] = s\circ\sigma\circ(\sigma^2\circ 2())$

$= s\circ\sigma\circ\sigma\circ(\sigma\circ 2()) = s\circ\sigma\circ\sigma\circ(2()+1) = (s\circ\sigma)\circ\sigma\circ(2()+1)$

$= ([i_1;i_0\sigma]\circ s)\circ\sigma\circ(2()+1) = [i_1;i_0\sigma]\circ(s\circ\sigma)\circ(2()+1)$

$= [i_1,i_0\sigma]\circ[i_1,i_0\sigma]\circ s\circ(2()+1) = [i_0\sigma, i_1\sigma]\circ s\circ(2()+1)$

Por tanto $\quad \underline{\underline{s\circ(2()+1)\circ\sigma = [i_0\sigma, i_1\sigma]\circ(s\circ(2()+1))}}$

$(\circ\circ\circ\circ)\ \left(s\circ(2()+1)\right)(0) = (s\circ\sigma\circ 2())(0) = (s\circ\sigma)(2()) = (s\circ\sigma)\ (0)$

$= \left([i_1, i_0\sigma]\circ s\right)(0) = [i_1, i_0\sigma]\,(s(0)) = [i_1, i_0\sigma]\,(i_0(0)) = i_1(0)$

Por tanto $\left(s\circ[2()+1]\right)(0) = i_1(0)$

Es decir que el diagrama a continuación es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\underline{1} \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "//"] & \mathbb{N} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "s\circ[2()+1]"] \arrow[dr, phantom, "//"] & \mathbb{N} \arrow[d, "s\circ[2()+1]"] \\
\underline{1} \arrow[r, "i_1(0)"] & \mathbb{N}+\mathbb{N} \arrow[r, "{[i_0\sigma, i_1\sigma]}"] & \mathbb{N}+\mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

De $(\circ\circ\circ)$ y $(\circ\circ\circ\circ)$ obtenemos $\underline{\underline{s\circ[2()+1] = i_1}}$

$\therefore\ \underline{\left(s\circ[2();2()+1]\right)\circ i_1 = i_1}\qquad **$

De $*$ y $**$ obtenemos $\boxed{s\circ[2()\,;\,2()+1] = Id_{\mathbb{N}+\mathbb{N}}}$

Hemos así demostrado que $\underline{\underline{\mathbb{N}+\mathbb{N} \simeq \mathbb{N}}}$ ▭

Pasando a otra cuestión, veamos la forma en que podemos obtener la multiplicación como un morfismo particular.

Dado cualquier conjunto A equipado con una operación binaria asociativa, llamada Adición, $A\times A \xrightarrow{+} A$ y un elemento "cero" $\underline{1} \xrightarrow{\textcircled{a}} A$; podemos considerar entonces la composición

$$A \xrightarrow{(+)^*} A^A \xrightarrow{iter_A} (A^A)^{\mathbb{N}} \xrightarrow{ev_{\textcircled{a}}^{\mathbb{N}}} A^{\mathbb{N}}$$

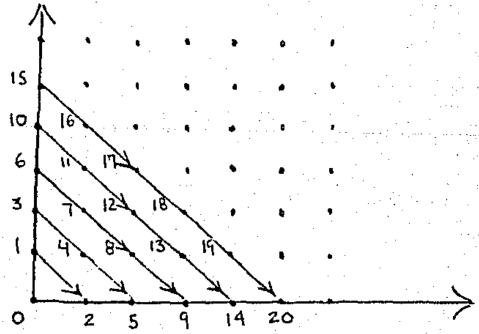
Esto es, la iteración aplicada a la transpuesta de la suma y seguido este resultado de la evaluación en el elemento ⓪.

· La transpuesta de esta composición es, finalmente, el morfismo $\mathbb{N} \times A \xrightarrow{\ \cdot\ } A$ a quien llamamos usualmente MULTIPLICACIÓN.

Otro hecho importante es que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$.

De ésto, existen demostraciones rigurosas pero también sofisticadas, las cuales no están al alcance del presente trabajo. Es decir que hasta el momento no hay alguna regla explícita de correspondencia, la cual establesca dicho isomorfismo. No tiene caso por tanto meramente repetir alguna de estas demostraciones, y así nos concretaremos a bosquejar una demostración de manera intuitiva.

La idea para probar $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$ está basada en la observación de que las fibras del morfismo $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{+} \mathbb{N}$ son de longitud finita, y ésto hace posible definir un morfismo inverso $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$; el cual recorre una fibra tras otra. (Gráficamente el recorrido es de manera diagonal)



La inversa $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ de esta enumeración, simplemente indicará el número de pasos que se han dado en la trayectoria hasta llegar al punto dado $\langle x, y\rangle$.

Observamos que todos los puntos $\langle x, y\rangle$ que descansan en la n-ésima diagonal son tales que sus coordenadas satisfacen $x+y=n$, y que estos puntos son $n+1$. La diagonal cero es la que pasa sólo por el origen $\langle 0,0\rangle$.

Luego; hasta el tope inicial (superior) de la n-ésima diagonal el número de pasos que ha tomado la trayectoria es

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2}$$

Si el punto dado $\langle x, y\rangle$ no es tope inicial de la diagonal (fibra), habrá que descender sobre ésta tantos pasos como su abscisa x.

$$f\langle x, y\rangle = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$$

Solo por añadidura, doy la construcción del morfismo $\mathbb{N} \xrightarrow{\Delta} \mathbb{N}+\mathbb{N}$ antes descrito. Para ésto demos la dinámica siguiente en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N}\times\mathbb{N} \xrightarrow{\quad d \quad} \mathbb{N}\times\mathbb{N} \qquad d\langle x, y\rangle = \begin{cases} \langle x+1, y-1\rangle & y\neq 0 \\ \langle 0, x+1\rangle & y=0 \end{cases}$$

Por tanto: $\exists !\ \mathbb{N} \xrightarrow{s} \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & \mathbb{N} \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "s"] & \mathbb{N} \arrow[d, "s"] \\ 1 \arrow[r, "\langle 0,0\rangle"] & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[r, "d"] & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \end{tikzcd}$$

puede uno checar que bajo d se tienen las asignaciones ilustradas:

$\langle 0,0\rangle \rightsquigarrow \langle 0,1\rangle \rightsquigarrow \langle 1,0\rangle \rightsquigarrow \langle 0,2\rangle \rightsquigarrow \langle 1,1\rangle \rightsquigarrow \langle 2,0\rangle \rightsquigarrow \langle 0,3\rangle$
etcétera.

Por consiguiente, también puede checarse que:

$s(0)=\langle 0,0\rangle$ $\quad$ $s(2)=\langle 1,0\rangle$ $\quad$ $s(4)=\langle 1,1\rangle$

$s(1)=\langle 0,1\rangle$ $\quad$ $s(3)=\langle 0,2\rangle$ $\quad$ $s(5)=\langle 2,0\rangle$ $\quad$ etcétera.

EJERCICIO.- Si A es cualquier conjunto equipado con una operación binaria, conmutativa y asociativa $A\times A \xrightarrow{+} A$ con elemento cero $1 \xrightarrow{Ⓐ} A$. Entonces existe un mapeo $A^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\Sigma} A^{\mathbb{N}}$ el cual asigna a cualquier sucesión $\{a\}_{n\in\mathbb{N}}$ su sucesión de sumas parciales.

$$(\Sigma a)_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

(Obsérvese que $(\Sigma a)_0 = Ⓐ$ independientemente de la sucesión $\{a\}$)

Demostración

Sea $\mathbb{N} \xrightarrow{\{a\}} A$ una sucesión arbitraria.

Consideremos el morfismo $\mathbb{N} \xrightarrow{q} A$ definido por la composición

$q = + \circ \langle q \circ p, \{a\} \circ p \rangle$.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{N} \arrow[r, "q"] & A & \\
\mathbb{N} \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "p"'] \arrow[rr, "\langle q\circ p; \{a\}\circ p\rangle"] & & A \times A \arrow[u, "\pi"'] \arrow[d, "\pi'"] \arrow[r, "+"] & A \\
 & \mathbb{N} \arrow[r, "\{a\}"] & A &
\end{tikzcd}
$$

donde $\mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ es el morfismo predecesor, y q se define recursivamente a partir de A.

Es decir que el valor inicial de q es: $q_0 = q(0) = A$

Veamos como actúa q en otros valores:

$$q(1) = + \circ \langle q \circ p ; \{a\} \circ p \rangle (1) = + \circ \langle q(p(1)) ; \{a\}(p(1)) \rangle$$

$$= + \circ \langle q(0), \{a\}(0) \rangle = + \circ \langle q_0, a_0 \rangle = + \langle A ; a_0 \rangle$$

$$= A + a_0 = a_0 \qquad \therefore\ q(1) = a_0$$

$$q(2) = + \circ \langle q \circ p ; \{a\} \circ p \rangle (2) = + \circ \langle q_1, a_1 \rangle = + \langle a_0, a_1 \rangle = a_0 + a_1$$

$\therefore q(2) = a_0 + a_1$

$$q(3) = + \circ \langle q \circ p ; \{a\} \circ p \rangle (3) = + \circ \langle q_2, a_2 \rangle = + \circ \langle a_0 + a_1, a_2 \rangle = a_0 + a_1 + a_2$$

$\therefore q(3) = a_0 + a_1 + a_2$.

Vemos que: $\underline{q_0 = A}$ y $\underline{q_{n+1} = q_n + a_n}$

Tenemos pues que $\sum a = q$ $\quad (\sum a)_{n+1} = q_{n+1}$

q es entonces la sucesión de sumas parciales de $\{a\}$.

Hay un método sumamente útil para probar propiedades acerca de números naturales conocido como PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA, y el cual presentamos bajo el Teorema siguiente.

TEOREMA.- Si A es una parte de $\mathbb{N}$ tal que:

(i) $0 \in A$ $\qquad$ (ii) $\forall n [n \in A \Rightarrow n+1 \in A]$

Puede entonces concluirse que la inclusión $A \xrightarrow{i_A} \mathbb{N}$ es un isomorfismo $A \simeq \mathbb{N}$. En otras palabras; si A satisface lo anterior, A debe ser entonces todo $\mathbb{N}$. Este Teorema también es conocido como POSTULADO DE PEANO

Demostración

Para el morfismo $A \xrightarrow{\sigma_A} A$ se satisface $i_A \sigma_A = \sigma i_A$.

El morfismo τ_A es una dinámica de A; ya que $0 \in A$ entonces existe una única sucesión $\mathbb{N} \xrightarrow{x} A$ que hace conmutar el diagrama de abajo.

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "//"] & \mathbb{N} \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "x"] \arrow[dr, phantom, "//"] & \mathbb{N} \arrow[d, "x"] \\
1 \arrow[r, "0"] & A \arrow[r, "\tau_A"] & A
\end{tikzcd}
$$

Tenemos $\mathbb{N} \xrightarrow{x} A \xrightarrow{i_A} \mathbb{N}$

$$i_A x(0) = i_A(x_0) = i_A(0) = 0$$

$$(i_A x)\tau = i_A \tau_A x = \tau i_A x = \tau(i_A x)$$

Con esto obtenemos la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "//"] & \mathbb{N} \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "i_A x"] \arrow[dr, phantom, "//"] & \mathbb{N} \arrow[d, "i_A x"] \\
1 \arrow[r, "0"] & \mathbb{N} \arrow[r, "\tau"] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}
$$

Claramente entonces $\underline{i_A x = Id_{\mathbb{N}}}$

De esta igualdad obtenemos que i_A es suprayectivo, lo cual implica que es epimorfismo.

Por tanto i_A es monomorfismo y epimorfismo

$\therefore$ i_A es isomorfismo

$\therefore$ $\underline{A \cong \mathbb{N}}$

Obsérvese que la igualdad $i_A \tau_A = \tau i_A$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "i_A"] \arrow[d, "\tau_A"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & \mathbb{N} \arrow[d, "\tau"] \\
A \arrow[r, hook, "i_A"] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}
$$

significa que A es una parte en el sentido dado a S.

SIMBOLOGIA

$\forall$	Para todo
$\exists$	Existe
$\exists n$	Existen
$\Longrightarrow$	Implicación
$\Longleftrightarrow$	Si y solo si
$\exists$	Existe exactamente uno
$\hookrightarrow$	Monomorfismo
$\twoheadrightarrow$	Morfismo suprayectivo, epimorfismo
$\ni$	Tal que
$\in$	Pertenece
$\subseteq$	Inclusión
$\cap$	Intersección
$\therefore$	Por tanto
$//$	Conmutatividad del diagrama
$\square$	Final de la demostración

$\top$	Negación
1	Conjunto de un solo elemento (Objeto Terminal)
0	Conjunto vacío (Objeto Inicial)
$!_A$	Morfismo único $1 \xrightarrow{!_A} A$
0_A	Morfismo único $0 \xrightarrow{0_A} A$
χ_i	Función característica del monomorfismo i.
G_f	Gráfica de f
$\ulcorner \varphi \urcorner$	Nombre de φ
f^*	Adjunto exponencial de f
eval	Morfismo evaluación
$Im(f)$	Imagen de f
$P(A)$	Equivale a 2^A (Conjunto Potencia)
eq	Igualador de morfismos
$\mathbb{N}$	Números Naturales (Objeto de números Naturales)

BIBLIOGRAFÍA

(·) Apuntes de F. William Lawvere
Curso en la Universidad Estatal de Nueva York, 1985.

(··) Category Theory
Horst Herrlich and George E. Strecker
Allyn and Bacon Inc., Boston, 1973.

(···) Topoi - The Categorial Analysis of Logic.
Robert Goldblatt
North-Holland Publishing Company, 1979.

(····) Categories for the Working Mathematician
Saunders Mac Lane
Springer-Verlag New York Inc., 1971.

(—) Introduction to the theory of categories and functors
Ion Bucur and Aristide Deleanu
John Wiley & Sons Ltd, 1968.