

22
27



2007 JUN 2007
ASISTENTE U. D.
100
100

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

GRAFICAS Y DIGRAFICAS DE LINEAS

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
M A T E M A T I C O
P R E S E N T A
LAURA PASTRANA RAMIREZ

MEXICO, D. F.

1990

FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

INTRODUCCION	1
PRELIMINARES	3
CAPITULO UNO	10
GRAFICAS DE LINEAS	10
DEFINICION Y PROPIEDADES	10
ISOMORFISMOS Y EL TEOREMA DE WHITNEY	22
CARACTERIZACIONES DE LAS GRAFICAS DE LINEAS	29
DIGRAFICAS DE LINEAS	52
DEFINICION Y PROPIEDADES	52
CARACTERIZACIONES DE LAS DIGRAFICAS DE LINEAS	61

CAPITULO DOS	68
RESULTADOS ELEMENTALES	69
NUMERO DE ABSORCION	69
NUCLEOS	74
SEMINUCLEOS	82
CUASINUCLEOS	87
FUNCIONES DE GRUNDY	88
NUCLEOS, SEMINUCLEOS, CUASINUCLEOS Y FUNCIONES DE GRUNDY EN LA DIGRAFICA DE LINEAS	93
CAPITULO TRES	114
CONCEPTOS Y RESULTADOS ELEMENTALES SOBRE GRAFICAS PERFECTAS	114
LA B.D. CONJETURA Y LAS GRAFICAS DE LINEAS	123
BIBLIOGRAFIA	138

INTRODUCCION

Uno de los métodos más comunes para la solución de problemas es la transformación. Como todos sabemos existen transformaciones de bases, espacios y funciones (por ejemplo) en muy distintos campos de las matemáticas. En el caso de gráficas no es la excepción y se realiza sobre la misma.

La transformación, conocida como gráfica de líneas (digráfica de líneas en el caso de gráficas dirigidas), es de las muchas que se nos podrían ocurrir la más simple, consiste en generar una nueva gráfica a partir de sus aristas o flechas.

El objeto de esta tesis es estudiar las propiedades que se conservan después de la transformación.

En el primer capítulo presentamos los resultados básicos sobre las gráficas y digráficas de líneas (definiciones, propiedades y caracterizaciones).

Dentro de la Teoría de Gráficas hay diversos conceptos que juegan un papel relevante, éste es el caso de núcleos. El capítulo dos engloba los resultados más importantes de este trabajo, con referencia a núcleos y la digráfica de líneas. Es así como demostramos que para una digráfica D donde todos sus vértices tiene ingrado mayor o igual a uno, el número de seminúcleos (cuasinúcleos) es menor o igual al número de seminúcleos (cuasinúcleos) de su digráfica de líneas. Con la misma hipótesis también probamos que el número de funciones de Grundy de D es igual al número de funciones de Grundy de su digráfica de líneas.

Siguiendo con el tema de núcleos, el capítulo tres desarrolla un panorama sobre las gráficas perfectas centrándose en el siguiente resultado: La gráfica de líneas es perfecta si y sólo si es núcleo-perfectible.

PRELIMINARES

Definiremos los conceptos generales de Teoría de las Gráficas utilizados en este trabajo.

Una gráfica G consta de un conjunto finito no vacío de objetos llamados vértices o puntos, denotados por $V(G)$, junto con un conjunto de pares no ordenados de distintos elementos de G llamados aristas o arcos, denotados por $A(G)$.

Si u y v son dos vértices de una gráfica G y $a = (u,v) \in A(G)$ diremos que u y v son extremos de a y que u y v son adyacentes. Dos aristas son adyacentes si tienen un extremo en común. Una arista incide en un vértice v , si v es uno de sus extremos.

El grado de un vértice v en G , denotado por $\delta_G(v)$, es el número de aristas que inciden en v , es decir, el número de vértices adyacentes a v .

Los vecinos de un vértice v de G es el conjunto $N(v) = \{ u \in V(G) \mid (u,v) \in A(G) \}$.

Dos gráficas G y H son isomorfas si existe una función

$f: V(G) \longrightarrow V(H)$ biyectiva tal que:

u es adyacente a v en $G \iff f(u)$ es adyacente a $f(v)$ en H .

Un camino \mathcal{C} , es una sucesión alternada de vértices y aristas tal que vértices y aristas consecutivos son adyacentes. Si el camino empieza en u y termina en v , lo llamaremos un uv -camino.

Un paseo P es un camino en el que no se repiten aristas.

Una trayectoria T es un camino en el que no se repiten vértices.

Un camino cerrado es un camino que empieza y termina en el mismo vértice.

Un ciclo C es un camino cerrado en el que no se repiten vértices, sólo el primero y el último que son iguales.

La longitud de un camino \mathcal{C} , denotada por $l(\mathcal{C})$, es el número de aristas que contiene. Si \mathcal{C} tiene n vértices entonces $l(\mathcal{C})$ es $n-1$.

Una gráfica G es conexa si para todo $u, v \in V(G)$ existe un uv -camino.

Una gráfica H es una subgráfica de G si se cumple que: $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H) \subseteq A(G)$.

Las componentes conexas de una gráfica G son las subgráficas de G máximas con la propiedad de ser conexas.

Una gráfica H es una subgráfica inducida de G , si $V(H) \subseteq V(G)$ y $(u, v) \in A(H)$ si y sólo si $(u, v) \in A(G)$.

Si en una gráfica G todo par de vértices es adyacente entonces

decimos que G es *completa*. La cual denotamos por K_p , donde p es el número de vértices de G .

Denotamos por $K_p - e$ la gráfica completa de p vértices menos la arista e .

Un *clan* de G es un conjunto de vértices que inducen una subgráfica completa máxima.

Una gráfica G es *bipartita* si existe una partición de $V(G)$ en los conjuntos V_1 y V_2 tal que toda arista de G tenga un extremo en V_1 y otro en V_2 .

Una gráfica G es *bipartita completa* si existe una partición (V_1, V_2) de $V(G)$ de tal manera que todo vértice de V_1 es adyacente a todos los vértices de V_2 . La escribiremos como $K_{n,m}$, donde $|V_1| = n$ y $|V_2| = m$. Si $|V_1| = 1$ entonces G recibe el nombre de *estrella* y la denotamos por $K_{1,m}$.

Dada una gráfica G , el *complemento* de G , denotado por G^c , es una gráfica tal que ; $V(G^c) = V(G)$ y u es adyacente a v en G^c si y sólo si u no es adyacente a v en G .

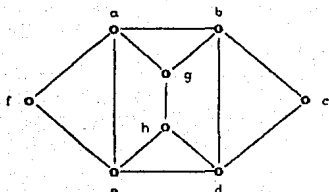
Una gráfica G es un *árbol* si G es una gráfica conexa y sin ciclos.

Sea $v \in V(G)$, si $G - v$ aumenta el número de componentes conexas de G entonces a v lo llamaremos *vértice de corte*.

Sea $\mathcal{A} \subseteq V(G)$, si $G - \mathcal{A}$ aumenta el número de componentes conexas de G entonces a \mathcal{A} lo llamaremos *conjunto de corte*.

Algunos ejemplos de los conceptos anteriores se encuentran en

la Figura No.1.



$V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$
 $\{a, b\}, \{g, h\} \in A(G)$
 a es adyacente a g
 $\{a, f\}$ es adyacente a $\{f, e\}$
 $\{c, d\}$ incide en d
 $N(b) = \{a, g, c, d\}$
 $T = \{f, a, g, b, c\}$
 $C = \{h, g, b, c, d, h\}$
 $\ell(C) = 5$
 $\delta_G^-(e) = 4$

FIGURA No. 1

Una *dirigida* D consiste en un conjunto finito, no vacío, de objetos llamados vértices, denotados por $V(D)$, junto con una colección de pares ordenados de distintos elementos de $V(D)$, llamados flechas (aristas dirigidas), denotados por $F(D)$.

Si $f = (u, v) \in F(D)$ diremos que: u es *adyacente* a v o f *incide* en v .

El *ingrado* de un vértice v en D , denotado por $\delta_D^-(v)$ es el número de vértices adyacentes hacia v , es decir, el número de flechas que llegan a v .

El *exgrado* de un vértice v en D , denotado por $\delta_D^+(v)$ es el número de vértices adyacentes desde v , es decir, el número de flechas que salen de v .

El *grado* de un vértice v en D , denotado por $\delta_D(v)$ es la suma del exgrado y del ingrado de v .

Los *vecinos exteriores* de un vértice x es el conjunto

$$\Gamma^+(x) = \{ y \in V(D) \mid (x,y) \in F(D) \}.$$

Los vecinos interiores de un vértice x es el conjunto

$$\Gamma^-(x) = \{ y \in V(D) \mid (y,x) \in F(D) \}.$$

Sean D y H digráficas, diremos que D es isomorfa a H si existe una función $\sigma: V(D) \longrightarrow V(H)$ biyectiva tal que:

$$(u,v) \in F(D) \iff (\sigma(u),\sigma(v)) \in F(H)$$

Una digráfica H es subdigráfica de D , si $V(H) \subseteq V(D)$ y $F(H) \subseteq F(D)$.

Una digráfica H es subdigráfica inducida de D , si $V(H) \subseteq V(D)$ y $(u,v) \in F(H)$ si y sólo si $(u,v) \in F(D)$ con $u, v \in V(H)$.

Un camino no dirigido \mathcal{C} de D es una sucesión alternada de vértices y flechas $\mathcal{C} = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ tal que $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$ o $(u_{i+1}, u_i) \in F(D)$. Si \mathcal{C} empieza en u y termina en v diremos que \mathcal{C} es un uv - camino no dirigido.

Un camino dirigido $\vec{\mathcal{C}}$ de D es una sucesión alternada de vértices y flechas $\vec{\mathcal{C}} = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)$ tal que $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$.

Una trayectoria no dirigida T de D es un camino no dirigido en el que no se repiten vértices.

Una trayectoria dirigida T^{\rightarrow} de D es un camino dirigido en el que no se repiten vértices.

Un camino cerrado no dirigido es un camino no dirigido en el que el primero y el último vértice son iguales.

Un camino cerrado dirigido es un camino dirigido en el que el primero y el último vértice son iguales.

Un ciclo no dirigido C es un camino cerrado no dirigido en el que no se repiten vértices (sólo el primero y el último).

Un ciclo dirigido \vec{C} es un camino cerrado dirigido en el que no se repiten vértices (sólo el primero y el último).

Una digráfica D es conexa si $\forall u, v \in V(D)$ existe un uv - camino no dirigido y por lo tanto un vu - camino no dirigido.

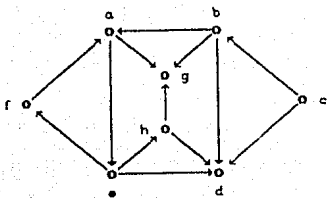
Una digráfica D es fuertemente conexa si $\forall u, v \in V(D)$ existe un uv - camino dirigido.

La matriz de adyacencia $A = (a_{ij})$ de D esta definida como sigue:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (v_i, v_j) \in F(D) \\ 0 & \text{si } (v_i, v_j) \notin F(D) \end{cases}$$

Una diagonal de un ciclo C_n es una arista (respectivamente flecha) en $A(G) - A(C_n)$ (respectivamente $F(D) - F(\vec{C}_n)$) con ambos extremos en C_n .

Algunos ejemplos de los conceptos anteriores se encuentran en la Figura No.2.



$V(D) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$
 $\{(c, d), (h, g)\} \in A(D)$
 c es adyacente a d
 $\{e, f\}$ incide en f
 $\delta_D^+(d) = 0, \delta_D^-(d) = 4, \delta_D(d) = 4$
 $\Gamma^+(h) = \{g, d\}, \Gamma^-(h) = \{e\}$
 $T = \{(f, a, g, b, c)\}$
 $C = (b, d, c, b)$
 $\vec{T} = (c, b, a, e, f)$
 $\vec{C} = (a, e, f, a)$

FIGURA No. 2

CAPITULO UNO

En este capítulo presentamos los resultados básicos sobre las gráficas y digráficas de líneas. Partiendo desde las definiciones hasta llegar a la caracterización de dichas gráficas.

Lo expondremos en dos partes; la primera aborda únicamente las gráficas de líneas y por consiguiente la segunda las digráficas de líneas.

GRAFICAS DE LINEAS

DEFINICION Y PROPIEDADES

El concepto de gráfica de líneas, dentro de las transformaciones de gráficas, surge de manera natural.

Definición No. 1.1. A cada gráfica G le asociamos otra gráfica $L(G)$ llamada *gráfica de líneas* de la siguiente manera;

1) $V(L(G)) = A(G)$

2) Dos vértices son adyacentes en $L(G)$ si y sólo si

son adyacentes en G como aristas.

Aunque los primeros en estudiar este concepto, Whitney [35] y Krausz [21], no le dieron nombre, otros autores que independientemente utilizaron esta transformación, le asignaron uno propio; Fisher [12] la llamó "Gráfica de Cubrimiento"; Ore [27], "Gráfica de Intercambios"; Beineke [4], "Gráfica Derivada"; Menon [24], "Adjunta" y Berge [6], "Gráfica Representativa". Nosotros usaremos en este caso el introducido por Harary y Norman [16] en 1960, "Gráfica de Líneas". Aunque técnicamente era más natural usar gráfica de aristas, el nombre anterior es en este momento aceptado universalmente, además de ser más elegante.

En la Figura No.1 presentamos cuatro ejemplos de gráficas con sus respectivas transformaciones a gráficas de líneas.

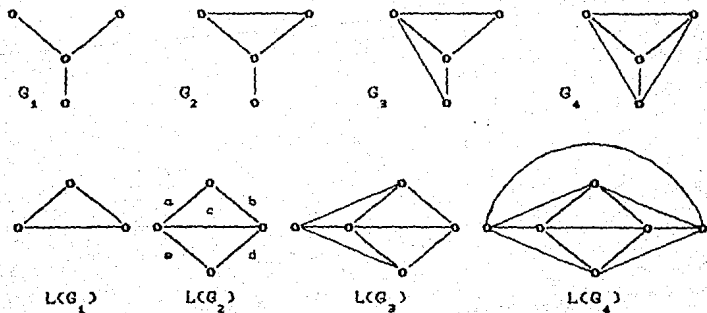


FIGURA No. 1

El siguiente teorema engloba las principales propiedades de una gráfica de líneas.

Teorema No. 1.1. Sea G una gráfica con p vértices y q aristas entonces:

- 1) El número de vértices de $L(G)$ es q .
- 2) $L(G)$ tiene $\sum \frac{1}{2} (\delta(v))^2 - q$ aristas.
- 3) El grado de x en $L(G)$, donde $x = (u,v)$ corresponde a una arista de G , es $\delta_G(u) + \delta_G(v) - 2$.
- 4) G y $L(G)$ tienen el mismo número de componentes conexas, si G no tiene vértices aislados.
- 5) $L(T_n) \cong T_{n-1}$ para $n \geq 1$
- 6) $L(C_p) \cong C_p$ para $p \geq 3$
- 7) $K_2 \cong L(K_{1,2})$
- 8) Si G es conexa y $p \geq 4$ entonces $L(G) \cong K_p$ si y sólo si $G \cong K_{1,p}$

Demostración:

- 1) Ya que $V(L(G)) = A(G)$ tenemos que $|V(L(G))| = |A(G)| = q$.
- 2) Denotemos por q_L las aristas de $L(G)$. Por 1) $L(G)$ tiene q vértices y además las δ_i aristas incidentes al vértice v_i contribuyen en $\left[\frac{\delta_i}{2} \right]$ a q_L , de manera que:

$$q_L = \sum \binom{\delta_i}{2} = \frac{1}{2} \sum \delta_i (\delta_i - 1) = \frac{1}{2} \sum \delta_i^2 - \frac{1}{2} \sum \delta_i = \frac{1}{2} \sum \delta_i^2 - q$$

3) $x = (u, v)$ en G es adyacente por un extremo a $\delta_G(u)$ aristas y por el otro a $\delta_G(v)$, por lo tanto en $L(G)$ x es adyacente a $\delta_G(u) + \delta_G(v)$ menos dos vértices, ya que a $x = (u, v)$ la estamos contando dos veces.

4) Supongamos que G tiene n componentes conexas G_i . Cada G_i tiene por lo menos una arista, ya que G no tiene vértices aislados.

Si G_i es una arista, por definición de $L(G)$, cada arista va a dar exactamente a un vértice aislado, lo que implica que si G tiene m aristas aisladas, en $L(G)$ tenemos exactamente m vértices aislados.

Si G_i consta de más aristas, lo único que tenemos que ver en este caso es que componentes conexas van a dar a componentes conexas. Sean $a, b \in V(L(G_i))$ tal que $a = (u, v)$ y $b = (w, x)$ en G_i . Dado que G_i es conexa \exists un camino de v a w :

$$\mathcal{C} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$$

Donde $a_i = (v_{i-1}, v_i)$, $i=1, 2, \dots, n$, es una arista de G_i , tal que $v_0 = v$ y $v_n = w$. $\forall a_i \in \mathcal{C}$; a_i es adyacente a a_{i+1} , por lo que se sigue que en $L(G)$ también son adyacentes. Por lo tanto:

$$\mathcal{P} = \langle \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, b \rangle$$

es un camino de a a b en $L(G)$.

Veamos que sucede si a y b están en diferentes componentes conexas. Sean $\alpha = \langle u, v \rangle, b = \langle z, w \rangle \in A(G)$ tal que $\alpha \in A(G_i)$ y $b \in A(G_j)$ con $G_i \neq G_j$. Lo que implica que en G no existe un camino de a a b . Supongamos que α y b van a dar a la misma componente conexas en $L(G)$, por lo tanto existe un camino $\mathcal{P} = \langle \alpha, e_1, e_2, \dots, b \rangle$ de a a b . Lo que implica que en G , las aristas e_i , junto con α y b forman un camino de u a w ∇_0 , ya que α y b estaban en diferentes componentes conexas. Con lo que obtenemos que cada G_i componente conexas tal que contiene más de una arista va a dar exactamente a una componente conexas en $L(G)$.

∴ El número de componentes conexas de G es igual al número de componentes conexas de $L(G)$.

5) Sea G una trayectoria T de longitud n ;

$$T = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n \rangle$$

donde $\alpha_i = \langle u_i, u_{i+1} \rangle \in A(G)$, $i = 1, 2, \dots, n$. En $L(G)$ cada arista es un vértice, por lo tanto $L(G)$ tiene n vértices y como T es una trayectoria $\forall \alpha_i \in T$, α_i es adyacente a α_{i+1} . Entonces por definición de gráficas de líneas, dichas adyacencias se respetan, lo

que implica que en $L(G)$ obtenemos la siguiente trayectoria :

$$T = \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n \}$$

Como T' tiene n vértices, su longitud es $n - 1$.

6) Sea $G \cong C_p$ con $p \geq 3$, tal que:

$$C_p = \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p \}$$

donde $\alpha_i = \langle v_{i-1}, v_i \rangle \in A(G)$, $i=1,2,\dots,p$, tal que $v_0 = v_p$. El número de aristas de C_p es p , por lo tanto $L(C_p)$ tiene p vértices. Además $\forall \alpha_i \in A(C_p)$, α_i es adyacente a α_{i+1} , para $i=1,2,\dots,p$, por lo que en $L(C_p)$ obtenemos una trayectoria de α_1 a α_p . Pero como C_p es un ciclo, α_1 es adyacente a α_p , por lo tanto $L(C_p)$ es un ciclo con p vértices.

7) Sea $G \cong K_{1,2}$ y sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sus aristas, lo que implica que $L(K_{1,2})$ consta de sólo tres vértices. Como cada arista de $K_{1,2}$ es adyacente a las otras dos, en $L(K_{1,2})$ cada vértice es adyacente a los otros dos, es decir, $L(K_{1,2}) \cong K_2$.

8) Sea $L(G) \cong K_p$, es decir, $L(G)$ consta de p vértices tal que todos son adyacentes. De lo que se sigue, por definición de gráfica de líneas, que G tiene p aristas, las cuales son todas adyacentes entre sí. Supongamos que $\alpha_1 = \langle v_1, v_2 \rangle$ y $\alpha_2 = \langle v_2, v_3 \rangle$ son aristas de G tal

que tiene un extremo en común, sea α_3 otra arista de G tal que es adyacente a α_1 y a α_2 , existen dos posibilidades que $\alpha_3 = \langle u_1, u_2 \rangle$ o que $\alpha_3 = \langle u_2, u_4 \rangle$. Si $\alpha_3 = \langle u_1, u_2 \rangle$ entonces $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ forman un triángulo, como $p \geq 4$, existe otra arista α_4 adyacente a α_1 , α_2 y α_3 , pero como una arista sólo puede ser adyacente exactamente a dos aristas de un triángulo, implica que $\alpha_3 \neq \langle u_1, u_2 \rangle$. Por lo tanto $\alpha_3 = \langle u_2, u_4 \rangle$, de lo que se sigue que α_1 , α_2 , α_3 y α_4 son adyacentes en el mismo vértice. Si $p > 4$, como toda arista consta solo de dos extremos la única forma que sea adyacente a 4 o más aristas es que sean adyacentes todas en el mismo vértice. Por lo tanto $G \cong K_{i,p}$.

Sea $G \cong K_{i,p}$, es decir, $|A(G)| = p$ y $\forall a \in A(G)$, a comparte un extremo en común con todas las demás aristas de G , es decir, todas las aristas son adyacentes entre sí. Lo que implica que $L(G)$ consta sólo de p vértices, los cuales son adyacentes entre sí. Por lo que concluimos que $L(G) \cong K_{p,p}$.

Notamos en la Figura No.1 que $L(G_2) \cong G_2$, con lo que obtenemos que $L(G_2) \cong L(L(G_2))$.

Definición No.1.2. Llamamos *gráfica de líneas n-iterada* si $L^1(G) \cong L(G)$ y $L^n(G) \cong L(L^{n-1}(G))$ para $n > 1$.

En sus investigaciones sobre $L^n(G)$, Van Rooij y Wilf [31] probaron el siguiente teorema.

Teorema No. 1.2. Si G es una gráfica conexa tal que no es isomorfa a $K_{1,3}$, a una trayectoria o a un ciclo y p_n denota el número de vértices de $L^n(G)$ entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty$$

Demostración:

Observación No. 1. Si G es conexa y no es un ciclo, una trayectoria o $K_{1,3}$ entonces $L^3(G)$ contiene dos ciclos con al menos un vértice en común. Como G no es un ciclo o una trayectoria existe al menos un vértice v en G tal que $\delta_G(v) = n \geq 3$. Si el grado de v es tres, como G no es $K_{1,3}$, existe una arista α en G tal que es adyacente a $\mathcal{N}(v)$. Si α es adyacente a dos vértices de $\mathcal{N}(v)$ entonces G es como la gráfica G_2 de la Figura No. 1, en donde observamos que $L(G_2)$ son dos ciclos con dos vértices en común. Por el teorema 1.1 (inciso 6) ciclos van a dar a ciclos y el tener vértices en común implica que tienen aristas adyacentes entre sí, entonces $L^3(G)$ contiene dos ciclos con al menos un vértice en común. Si α es adyacente a un sólo vértice de $\mathcal{N}(v)$ entonces $L(G)$ es isomorfa a la gráfica G_2 de la Figura No. 1, por lo tanto la observación también se cumple para éste caso. Si el grado de v es igual o mayor a cuatro entonces, por el teorema 1.1 (inciso 8), $L(G)$ contiene una subgráfica completa inducida de cuatro o más vértices, por lo tanto contiene dos ciclos con al menos un vértice en común, lo que implica que $L^3(G)$ cumple con la misma propiedad.

Observación No.2. Si G tiene dos ciclos unidos por una trayectoria de longitud $k \geq 0$, entonces $L(G)$ tiene dos ciclos unidos por una trayectoria de longitud $k + 1$. Sean C_1 y C_2 ciclos y T una trayectoria de longitud $k \geq 0$ en G , tal que:

$$C_1 = \langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_p \rangle; \quad a_i = \langle v_{i-1}, v_i \rangle \in A(G), \quad i=1, \dots, p, \quad v_0 = v_p$$

$$C_2 = \langle b_1, b_2, b_3, \dots, b_n \rangle; \quad b_i = \langle w_{i-1}, w_i \rangle \in A(G), \quad i=1, \dots, n, \quad w_0 = w_n$$

$$T = \langle c_1, c_2, c_3, \dots, c_k \rangle; \quad c_i = \langle u_i, u_{i+1} \rangle \in A(G), \quad i=1, \dots, k$$

Como C_1 y C_2 están unidos por T , existen vértices en T comunes a C_1 y a C_2 . Sin pérdida de generalidad, supongamos que $v_0 = u_1$ y $u_{k+1} = w_0$. Por lo tanto la arista c_1 es adyacente a las aristas a_1 y a_p de C_1 ; y la arista c_k es adyacente a las aristas b_1 y b_n de C_2 . Por el teorema número 1.1. (incisos 6 y 7), C_1 y C_2 van a dar a dos ciclos C'_1 y C'_2 , respectivamente y, T a una trayectoria T' de longitud $k - 1$. Por las adyacencias descritas anteriormente entre T , C_1 y C_2 , existe en $L(G)$ por lo menos una trayectoria de longitud $k + 1$ que une a C'_1 y C'_2 , por ejemplo la trayectoria $T' = \langle a'_1, c_1 \rangle \cup T' \cup \langle c_k, b_1 \rangle$ es de la longitud requerida.

Sea G una gráfica conexa, como G no es un ciclo, una trayectoria o $K_{1,2}$, por la observación número uno $L^2(G)$ contiene dos ciclos unidos al menos por un vértice, lo que implica, por la

observación número dos, que $L^4(G)$ tiene dos ciclos unidos por una trayectoria de longitud al menos uno y que al ir iterando vamos obteniendo dos ciclos unidos por una trayectoria de longitud mayor a la original.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty \blacksquare$$

Corolario No. 1.2.1. Si G es conexa y $L^n(G) \cong G$ para alguna n entonces $L(G) \cong G$ y G es un ciclo.

Demostración: Como $G \cong L^n(G)$, por el teorema 1.2, G es isomorfa a un ciclo, a una trayectoria o a $K_{1,2}$. Si $G \cong T_p$ entonces $L(G)$ es isomorfa a una trayectoria de longitud menor, y si seguimos iterando $L^n(G)$ resulta siempre una trayectoria de menor longitud a $L^{n-1}(G)$, lo que implica que $L^n(G) \not\cong G$, por lo que G no es una trayectoria. Entonces G es isomorfa a $K_{1,2}$ o a un ciclo, pero no puede ser isomorfa a $K_{1,2}$, ya que $L(K_{1,2}) \cong K_3 \cong L^n(K_3)$, lo que implica que G es un ciclo y como todo ciclo va a dar a un ciclo mediante la transformación de gráfica de líneas, $L(G) \cong G$.

Sea $G \cong L(G)$ tal que G es un ciclo, por lo tanto $L(G)$ es un ciclo, por el teorema 1.1, mediante la transformación $L(G)$ ciclos siempre van a dar a ciclos, por lo que concluimos que $L^n(G) \cong G$. \blacksquare

Por la misma construcción de una gráfica de líneas, muchos de sus estudios están relacionados con el mapeo de una gráfica en otra,

en particular con los isomorfismos (cuando hablemos solamente de isomorfismos se entenderá isomorfismos por vértices).

Denotemos al conjunto de todos los isomorfismos entre las gráficas G y H como $\Gamma(G,H)$.

Definición No.1.3. Un isomorfismo por aristas de G sobre H es una biyección $\rho: A(G) \longrightarrow A(H)$ tal que dos aristas son adyacentes en G si y sólo si sus imágenes son adyacentes en H. Donde $\Gamma(G,H)$ representa el conjunto de todos los isomorfismos por aristas de G sobre H, con lo que se sigue que: $\Gamma(L(G), L(H)) = \Gamma(G,H)$.

El siguiente teorema menciona algunos resultados sobre el mapeo de aristas inducido por isomorfismos.

Sea $\rho \in \Gamma(G,H)$, definimos $\rho^*: A(G) \longrightarrow A(H)$ como $\rho^*(uv) = \rho(u)\rho(v)$ y $\Gamma^*(G,H) = \{ \rho^*, \rho \in \Gamma(G,H) \}$.

Teorema No.1.3. Si G y H son gráficas entonces:

- 1) $\Gamma^*(G,H) \subseteq \Gamma(G,H)$;
- 2) El mapeo $T: \Gamma(G,H) \longrightarrow \Gamma^*(G,H)$ definido como $T(\rho) = \rho^*$ es uno a uno si y sólo si G tiene a lo más un vértice aislado y no tiene aristas aisladas.

Demostración:

1) Sea $\rho^* \in \Gamma^*(G, H)$ y $a = (u, v)$, $b = (v, z)$ aristas adyacentes en G , tal que $\rho^*(uv) = \rho(u)\rho(v)$ y $\rho^*(vz) = \rho(v)\rho(z)$, donde ρ es un isomorfismo por vértices. Como $u \neq z$ tenemos que $\rho(u) \neq \rho(z)$, por lo que las aristas $\rho^*(uv)$ y $\rho^*(vz)$ son distintas en H , con un extremo en común $\rho(v)$, por lo tanto ρ^* preserva adyacencias. Con lo que concluimos que ρ^* es un isomorfismo por aristas.

2) Sin pérdida de generalidad, supongamos que $G \cong H$. Demostremos que T no es uno a uno suponiendo que G tiene más de un vértice aislado y una arista aislada. Tenemos dos casos;

a) G tiene más de un vértice aislado. Sean u, v vértices aislados de G , definamos $\rho: V(G) \longrightarrow V(G)$ un isomorfismo tal que $\rho(u) = v$, $\rho(v) = u$ y, $\rho(z) = z \quad \forall z \in V(G) - \{u, v\}$. Con lo que $\rho \neq I$ y $\rho^* = I^*$, donde I es el isomorfismo identidad. Por lo tanto T no es uno a uno.

b) G tiene una arista aislada. Sea $a = (u, v)$ dicha arista. Definamos $\rho: V(G) \longrightarrow V(G)$ tal que $\rho(u) = v$, $\rho(v) = u$ y, $\rho(z) = z \quad \forall z \in V(G) - \{u, v\}$, por lo que $\rho \neq I$. Sea $b = (x, y) \in A(G)$, existen dos posibilidades:

- i) Si $b = a$ entonces $\rho^*(b) = \rho^*(a) = \rho^*(uv) = \rho(u)\rho(v) = vu$,
- ii) Si $b \neq a$ entonces $\rho^*(b) = \rho^*(xy) = \rho(x)\rho(y) = xy$.

Por lo tanto $\rho^* = I^*$, lo que implica que T no es uno a uno.

Supongamos que G tiene un vértice aislado y no tiene aristas aisladas, por demostrar que T es uno a uno. Sean $\rho_1, \rho_2 \in \Gamma(G, H)$, tal que $\rho_1 \neq \rho_2$. Como $\rho_1 \neq \rho_2$, existe $v \in V(G)$ tal que $\rho_1(v) \neq \rho_2(v)$. Si v es un vértice aislado entonces $\rho_1(v)$ es un vértice aislado y $\rho_2(v)$ también. Como $\rho_1(v) \neq \rho_2(v)$, H tiene dos vértices aislados, lo cual, por hipótesis, no puede suceder. De este modo v no es un vértice aislado. Ya que G no tiene aristas aisladas y como v no es un vértice aislado tenemos que existen $u, w \in A(G)$ tal que son adyacentes a v. Por definición de ρ^* se tiene que $\rho_1^*(vw) = \rho_1(v)\rho_1(w)$. Si $\rho_2(v) \neq \rho_1(v)$ se sigue que

$$\rho_2^*(vw) = \rho_2(v)\rho_2(w) \neq \rho_1(v)\rho_1(w) = \rho_1^*(vw)$$

En caso de que;

$$\rho_2(v) = \rho_1(v) \text{ y } \rho_1(w) = \rho_2(w)$$

obtenemos que;

$$\rho_1^*(vw) = \rho_1(v)\rho_1(w) \text{ y } \rho_2^*(vw) = \rho_2(v)\rho_2(w).$$

Como $\rho_2(v) = \rho_1(v)$ implica que $\rho_2^*(vw) = \rho_1^*(vw)$. ■

ISOMORFISMOS Y EL TEOREMA DE WHITNEY

En esta sección presentamos el teorema de Whitney [35], el cual se centra en el siguiente problema: Si dos gráficas G_1 y G_2 son

isomorfas por aristas es necesario que sean isomorfas por vértices.

El teorema 1.4. responde que sí, con ciertas excepciones, como es el caso del par K_2 y $K_{1,2}$.

Definición No.1.4. Llamamos *estrella* a un subconjunto del conjunto de aristas incidentes a un vértice v . $S(v)$ denota el conjunto de todas las aristas incidentes a v .

Una función $\rho: A(G) \longrightarrow A(H)$ preserva estrellas si manda estrellas en estrellas.

Lema No.1.1. Si G y H son gráficas conexas y $\rho: A(G) \longrightarrow A(H)$ es una biyección entonces ρ es inducido por un isomorfismo de G sobre H si y sólo si ρ y ρ^{-1} preservan estrellas.

Demostración: Sea $\beta: V(G) \longrightarrow V(H)$ un isomorfismo, sea β^* el isomorfismo por aristas de G sobre H inducido por β , lo que implica que β^* preserva adyacencias. Tomemos $\rho = \beta^*$, por lo tanto ρ y ρ^{-1} preservan estrellas.

Supongamos que ρ y ρ^{-1} preservan estrellas. Por lo que para cada vértice v en G existe al menos un vértice v' en H tal que $\rho(S(v)) \subseteq S(v')$. Además v' está determinado de manera única por v , si $\delta_0(v) > 1$, ya que $S(v') \cap S(v'')$ tiene un sólo elemento, si $v' \neq v''$ (debido a que las estrellas se intersectan solamente en una

arista). De este modo, si $\delta_G(v) > 1$ tenemos que $\delta_H(v') \geq \delta_G(v) > 1$. De manera análoga a ρ , concluimos que $\rho^{-1}(S(v')) \subseteq S(v)$. Por todo lo anterior, ρ determina una función bien definida:

$$\lambda: \{ v \in V(G); \delta_G(v) > 1 \} \longrightarrow \{ v' \in V(H); \delta_H(v') > 1 \}$$

tal que $\rho(S(v)) = S(\lambda(v))$.

Supongamos que G tiene al menos tres vértices, ya que de otra manera, el resultado es trivial. De este modo, si $(v, w) \in A(G)$ y $\delta_G(w) = 1$ entonces $\delta_G(v) > 1$ y $\rho(vw) \in \rho(S(v)) = S(\lambda(v))$. Con lo que obtenemos que $\rho(vw) = v'w'$, donde $v' = \lambda(v)$ y $\delta_H(w') = 1$. Si extendemos λ definiendo $\lambda(w) = w'$ entonces λ determina una función $\lambda: V(G) \rightarrow V(H)$ tal que $\rho(S(v)) = S(\lambda(v)) \forall v \in V(G)$, tal que λ es una biyección. Para demostrar que λ es una función biyectiva, fijémonos en la siguiente propiedad de las estrellas: $u = v$ si y sólo si $S(u) = S(v)$.

Si $u = v$ entonces $\mathcal{N}(u) = \mathcal{N}(v)$, por lo cual, $S(u) = S(v)$.

Sea $\alpha \in S(u)$, es decir, u es un extremo de α . Por hipótesis $S(u) = S(v)$, de lo que se sigue que $\alpha \in S(v)$. Como $p \geq 3$, existe otra arista b que es incidente a u o a v . Sin pérdida de generalidad, supongamos que es adyacente a u . Por lo tanto $b \in S(u)$ y por hipótesis $b \in S(v)$. Lo que nos dice que u y v son los extremos de α y de b . Esto sólo puede suceder si $u = v$. Por lo tanto si

$S(u) = S(v)$ entonces $u = v$.

Demostremos que λ es biyectiva:

a) λ es inyectiva. Sea $\lambda(u) = u'$ y $\lambda(v) = v'$ tal que $u' = v'$. De lo que se sigue que $S(u') = S(v')$, sustituyendo tenemos que $S(\lambda(u)) = S(\lambda(v))$, por definición de λ $\rho(S(u)) = \rho(S(v))$. Por hipótesis ρ preserva estrellas, con lo que obtenemos que $S(u) = S(v)$, es decir, $u = v$.

b) λ es sobre. Sea $v' \in V(H)$ y $S(v')$ su estrella, como ρ^{-1} preserva estrellas entonces $\rho^{-1}(S(v')) = S(u)$, para algún $u \in V(G)$. De lo que se sigue que $S(v') = \rho(S(u))$. Por definición de λ tenemos que $\rho(S(u)) = S(\lambda(u))$, tomemos $v' = \lambda(u)$. Por lo tanto $\exists v \in V(G)$ tal que $\lambda(v) = v'$.

Lo único que nos falta para que λ sea un isomorfismo es ver que preserva adyacencias. Sean $u, v \in V(G)$ tal que u y v son adyacentes, $\lambda(u) = u'$ y $\lambda(v) = v'$. Lo que implica que $(u,v) \in S(u)$ y $(u,v) \in S(v)$. Por definición de λ y de ρ tenemos que;

$$\begin{aligned}\rho((u,v)) \in \rho(S(v)) &= S(\lambda(v)) = S(v') \quad \text{y} \\ \rho((u,v)) \in \rho(S(u)) &= S(\lambda(u)) = S(u')\end{aligned}$$

Es decir, $\rho((u,v))$ está en la estrella de v' y de u' . De lo que se sigue que v' y u' son adyacentes.

Por lo tanto λ es un isomorfismo que induce a ρ .

En la Figura No.2 presentamos cuatro ejemplos de isomorfismo por aristas entre gráficas tal que no son inducidos por un isomorfismo. En el caso de la pareja (G_1, H_1) , es claro, que no existe un isomorfismo, ya que $|V(G_1)| > |V(H_1)|$. Para los siguientes tres ejemplos, veamos que los isomorfismos indicados en cada gráfica no preservan estrellas. En el segundo caso, tomemos el extremo de α de grado uno. Su estrella en G_2 tiene un sólo elemento y su imagen en H_2 tiene dos; α y β . En el tercer caso, fijemonos en el extremo de α de grado dos. Su estrella en G_3 consta de dos aristas y su imagen en H_3 contiene tres; α , β , ϵ . Y por último en G_4 , fijandonos en la estrella formada por las aristas α , ϵ y η , bajo el isomorfismo dado en la figura, va a dar a la estrella formada por las aristas α , ϵ y β . Por lo cual en ninguno de los casos el isomorfismo por aristas dado es inducido por un isomorfismo. Whitney probó que éstos son los únicos casos posibles.

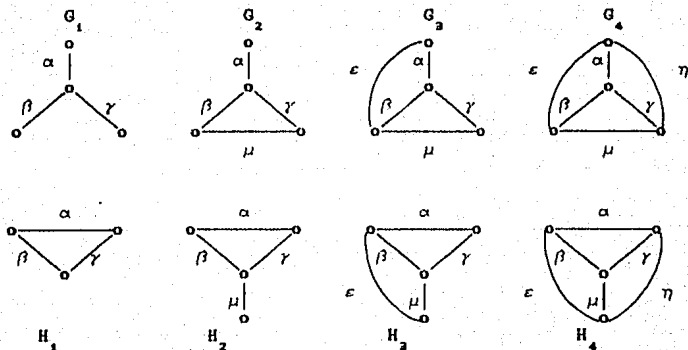


FIGURA No. 2

Teorema No.1.4. Si G y H son gráficas conexas, entonces, excepto por los cuatro casos de la Figura No.2, cada isomorfismo por aristas de G sobre H es inducido por uno de G sobre H .

Demostración: Si ρ es un isomorfismo de aristas de G sobre H tal que no es inducido por un isomorfismo entonces, por el lema 1.1, ρ o ρ^{-1} no preserva estrellas. Sin pérdida de generalidad, supongamos que existe un vértice v en G tal que $\rho(S(v))$ no es una estrella. Entonces $\delta_G(v) = 3 \vee \rho(S(v))$ es un conjunto de aristas de un triángulo (ya que cuatro o más aristas sólo pueden ser adyacentes en una estrella, teorema 1.1 (inciso B)).

Sea $S(v) = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, si $S(v) = A(G)$ entonces tenemos el primer

caso de las gráficas prohibidas, ilustrado en la Figura No.2 por el par (G_1, H_1) . Si $S(v) \neq A(G)$ entonces existe una arista μ en G tal que es adyacente a una de las aristas de $S(v)$, ya que G es conexa. Pero μ debe de ser adyacente a dos aristas de $S(v)$, ya que $\rho(v')$ es adyacente a dos aristas de $\rho(S(v))$, donde v' es un extremo de μ (ya que $\rho(S(v))$ es un triángulo). Existen exactamente tres casos posibles en G ; los pares (G_2, H_2) , (G_3, H_3) y (G_4, H_4) de la Figura No.2, que ilustran las gráficas prohibidas del Teorema de Whitney y corresponden en G a la existencia de una, dos o tres aristas. Por lo tanto cada isomorfismo por aristas de G sobre H , excepto por los cuatro ejemplos de la Figura No.2, es inducido por un isomorfismo de G sobre H . ■

Corolario No.1.2.1. Si G y H son gráficas conexas entonces $L(G) \cong L(H)$ si y sólo si uno de los dos casos siguientes se cumple:

- 1) $G \cong H$
- 2) (G, H) es un isomorfismo sobre el par $(K_2, K_{1,2})$

Demostración: Si $L(G) \cong L(H)$ entonces existe un isomorfismo $\rho: V(L(G)) \longrightarrow V(L(H))$, lo que implica, por definición de $L(G)$, que ρ es un isomorfismo por aristas de G sobre H . Por lo tanto, por el Teorema de Whitney, tenemos dos casos: ρ es un isomorfismo por aristas inducido por un isomorfismo de G sobre H o (G, H) es un par de las gráficas de la Figura No.2. El primero implica que $G \cong H$ y el segundo que $(G, H) \cong (K_2, K_{1,2})$.

Si $G \cong H$, implica que existe un isomorfismo λ de G sobre H , el cual induce un isomorfismo por aristas, por lo tanto $L(G) \cong L(H)$. Si $\langle G, H \rangle$ es un isomorfismo sobre el par $\{K_2, K_{1,2}\}$, como $L(K_2) \cong K_3$ y $L(K_{1,2}) \cong K_3$ (teorema 1.1 (incisos 5 y 7)), concluimos que $L(G) \cong L(H)$. ■

CARACTERIZACIONES DE LAS GRAFICAS DE LINEAS

De manera natural nos pueden surgir las siguientes preguntas ¿ Cuales gráficas son gráficas de líneas ?, ¿ Como podemos caracterizar dichas gráficas ?, ¿ Es posible dar un algoritmo para encontrar la gráfica raíz ?. Presentamos en esta sección algunos resultados obtenidos al respecto.

Una gráfica H es una gráfica de líneas si es isomorfa a una gráfica de líneas $L(G)$ de alguna gráfica G . Por ejemplo, $K_4 - K_2$ es gráfica de líneas (ver Figura No.1 (G_2)). Pero el problema no es tan sencillo, ya que no todas las gráficas son gráficas de líneas. Este es el caso de $K_{1,2}$. Supongamos que $K_{1,2} \cong L(G)$, entonces G tendría cuatro aristas debido a que $K_{1,2}$ tiene cuatro vértices. Como G debe ser conexa y ya que $K_{1,2}$ tiene un vértice adyacente a los otros tres entonces G tendría tres aristas adyacentes a una cuarta. Como una arista tiene dos extremos implicaría que dos incidirían en el mismo extremo y la restante en el otro. Lo cual nos implicaría que $L(G)$ contuviera un triángulo. Por lo tanto $K_{1,2}$ no es gráfica de líneas.

Es por esto, que $K_{1,3}$ juega un papel importante en la caracterización de las gráfica de líneas.

En la Figura No.3 presentamos otros ocho casos de gráficas que no son gráficas de líneas. Por lo cual una caracterización para que G sea gráfica de líneas es que no contenga como subgráficas inducidas dichas gráficas.

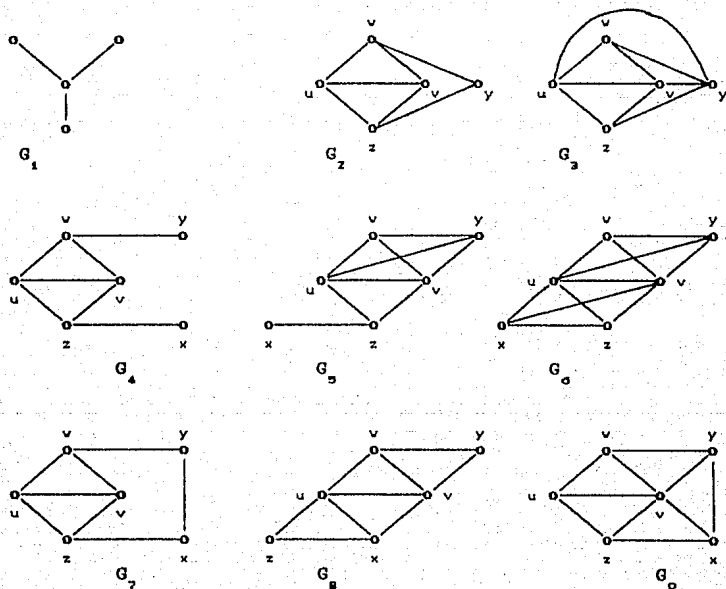


FIGURA No. 3

Este procedimiento de ir dibujando y ver si es gráfica de líneas no es nada fácil y nada rápido. Es por esto que se requiere utilizar otro método. Podemos fijarnos en las subgráficas completas de una gráfica de líneas inducidas por las estrellas de la gráfica raíz, en virtud de que $K_{l,p}$ (estrellas de p vértices) se convierten en subgráficas completas en $L(G)$.

Definición No. 1.5. Llamamos partición de Krausz a una colección \mathcal{K} de subgráficas de H tal que cumple con las siguientes tres propiedades;

- 1) Cada elemento de \mathcal{K} es una gráfica completa,
- 2) Toda arista de H esta en exactamente un elemento de \mathcal{K} ,
- 3) Todo vértice de H esta en exactamente dos elementos de \mathcal{K} .

Es claro que si H es una gráfica de líneas de G entonces la familia de subgráficas $\{S(v)\}$ de H inducida por estrellas de los vértices de G forman una partición de Krausz. En primer término toda estrella va a dar a una subgráfica completa (Teorema No. 1.1). Ya que $S(v) \cap S(u)$ consta de un sólo elemento (una arista pertenece exactamente a dos estrellas) se sigue que un vértice esta en exactamente dos elementos y una arista en un elemento de la partición.

Un ejemplo de una partición \mathcal{K} de Krausz en una gráfica de líneas inducida por las estrellas de la gráfica raíz es el

siguiente; Sea G como en la Figura No.4, G tiene seis vértices, por lo tanto tiene seis estrellas;

- 1) $\mathcal{S}(a) = \{1\}$ induce en $L(G)$ una subgráfica $K_1 = \{1\}$
- 2) $\mathcal{S}(b) = \{1,2\}$ induce en $L(G)$ una subgráfica $K_2 = \{1,2\}$
- 3) $\mathcal{S}(c) = \{2,3,6,7\}$ induce en $L(G)$ una subgráfica $K_3 = \{2,3,6,7\}$
- 4) $\mathcal{S}(d) = \{3,4\}$ induce en $L(G)$ una subgráfica $K_2 = \{3,4\}$
- 5) $\mathcal{S}(e) = \{4,5,7\}$ induce en $L(G)$ una subgráfica $K_3 = \{4,5,7\}$
- 6) $\mathcal{S}(f) = \{5,6\}$ induce en $L(G)$ una subgráfica $K_2 = \{5,6\}$

Por lo tanto;

$$\mathcal{X} = \{ \{1\}, \{1,2\}, \{2,3,6,7\}, \{3,4\}, \{4,5,7\}, \{5,6\} \}$$

es una partición de Krausz en $L(G)$, cada elemento de \mathcal{X} es una subgráfica completa, cada vértice de $L(G)$ aparece en exactamente dos miembros de \mathcal{X} y cada arista en uno sólo (ver Figura No.4).

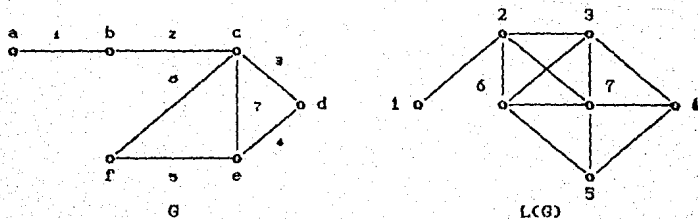


FIGURA No. 4

Los clanes generalmente sirven como miembros de una partición

de Krausz, donde los triángulos juegan un papel muy importante.

Definición No. 1.6. Llamamos a un triángulo *impar* si existe un vértice adyacente a un número impar de sus vértices. En otro caso lo llamamos *par*.

El siguiente lema especifica cuando los clanes juegan el papel de elementos de una partición de Krausz.

Lema No. 1.2. Sea G una gráfica conexa tal que no es ninguna de las G_i de la Figura No. 1, H su gráfica de líneas, \mathcal{X} una partición de Krausz de H inducida por las estrellas de G y $\mathcal{A} \in \mathcal{X}$, entonces:

(i) Si \mathcal{A} tiene al menos tres vértices entonces \mathcal{A} es un clan de H .

(ii) Si \mathcal{A} tiene exactamente tres vértices entonces \mathcal{A} es un triángulo impar.

(iii) Si \mathcal{A} tiene exactamente dos vértices entonces \mathcal{A} es un clan o \mathcal{A} forma parte de un triángulo par.

(iv) Si \mathcal{A} tiene justamente un vértice entonces \mathcal{A} y todos sus vecinos forman un clan, el cual no es un triángulo par.

u) Un clan de H está en \mathcal{X} si y sólo si no es un triángulo par.

v) Si t triángulos poseen una arista en común en H , entonces al menos $t - 1$ son impares y cada impar pertenece a un elemento de \mathcal{X} .

Demostración:

Observación No.1. Una arista es adyacente exactamente a dos aristas de un triángulo.

i) Supongamos que \mathcal{A} tiene tres vértices, sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ dichos vértices. Si \mathcal{A} no es un clan, $\exists w \in V(H)$ tal que $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, w\}$ es una subgráfica completa de cuatro vértices. Por definición de \mathcal{X} , $\exists x \in V(G)$ tal que $S(x)$ genera a \mathcal{A} . Por hipótesis $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, w\}$ es una subgráfica completa en H , entonces por definición de gráfica de líneas, en $D w$ es adyacente a las tres aristas de $S(x)$, pero la única forma de que suceda esto es que w tenga como extremo a x , en consecuencia $S(x)$ no es el conjunto de todas las aristas incidentes a $x \nabla$ por lo tanto \mathcal{A} es un clan.

ii) Si \mathcal{A} tiene exactamente tres vértices, \mathcal{A} es un triángulo. Por definición de \mathcal{X} , \mathcal{A} proviene de una estrella $S(v)$ tal que $\delta_0(v) = 3$. Como G es conexa y no puede ser ninguna de las G_i de la Figura No. 1 (en especial $K_{1,3}$), $\exists z \in V(G)$ tal que z es adyacente a algún w_i , $1 \leq i \leq 3$, con $w_i \in \mathcal{A}(v)$.

Si z es adyacente a un vértice w_i de $\mathcal{A}(v)$, entonces existe en G la arista $\alpha_i = (z, w_i)$, lo que implica que en H , α_i es un vértice, de

tal forma que sólo es adyacente a un único vértice de \mathcal{A} . Por lo tanto \mathcal{A} es un triángulo impar.

(ii) Sea $\mathcal{S}(v)$ la estrella que genera a \mathcal{A} , por hipótesis $|V(\mathcal{A})| = 2$, lo que implica que $\delta_G(v) = 2$. Sean $\alpha_1 = (u,v)$ y $\alpha_2 = (w,v)$ las aristas incidentes a v . Si $\mathcal{S}(v)$ va a parar a un clan, ya ésta, en caso contrario forma parte de un triángulo. Veamos ahora que éste es par.

Sea $T = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ dicho triángulo, éste proviene de una triángulo T' ya que α_3 no es adyacente a v y $\delta_G(v) = 2$.

Si no existe en H un vértice adyacente a T , ya acabamos, T es par. En caso contrario, sea $\alpha_4 \in V(H)$ tal que es adyacente a T , lo cual significa que en G es incidente a T' . Por la observación número uno, α_4 sólo puede ser adyacente a dos aristas de T' , por lo tanto, en H α_4 es adyacente exactamente a dos vértices de T . Por lo cual T es un triángulo par.

(iv) \mathcal{A} consta de un sólo elemento $\alpha = (u,v)$. Entonces por definición de \mathcal{X} una de las estrellas de un vértice de α generan a \mathcal{A} y como \mathcal{A} consta de un sólo elemento, dicho vértice tiene grado uno, sin pérdida de generalidad, supongamos que $\mathcal{S}(v)$ induce a \mathcal{A} . Por definición de partición de Krausz, todo vértice de H esta en exactamente dos elementos de \mathcal{X} , sea \mathcal{A}' la otra subgráfica completa a la cual pertenece α , lo que implica que $\mathcal{S}(u)$ genera a \mathcal{A}' , donde u es

el otro extremo de α . Supongamos que \mathcal{H}' no es un clan, es decir, existe un vértice x en H tal que es adyacente a todos los vértices de \mathcal{H}' , por lo cual, es adyacente a α . Como x es adyacente a α y a todos sus vecinos, x debe tener como extremo a u ∇ , ya que $\mathcal{B}(u)$ consideraba a todas las aristas que eran incidentes en u . Por lo tanto \mathcal{H}' y todos sus vecinos forman un clan.

En caso de que \mathcal{H}' sea un triángulo, se sigue que el grado de u es 3. Como G no es $K_{1,3}$, existe otra arista α incidente en $\mathcal{H}(u) - u$ (ya que el grado de u es uno). Si es adyacente a los otros dos vértices obtenemos la gráfica prohibida G_2 de la Figura No.1. Por lo tanto α es adyacente a un sólo vértice de $\mathcal{H}(u) - u$, lo que implica que en $L(G)$ sólo es adyacente a un vértice de \mathcal{H}' .

$\therefore \mathcal{H}'$ es un triángulo impar.

v) H_1 es un clan de H tal que H_1 está en \mathcal{X} :

a) Si $|V(H_1)| \neq 3$ claramente H_1 no es un triángulo.

b) Si $|V(H_1)| = 3$, por definición de \mathcal{X} , H_1 es generado por una estrella $\mathcal{B}(x)$ tal que $\delta_G(x) = 3$. Si $V(G) = \{x, z_1, z_2, z_3\}$ entonces G sería una gráfica prohibida, por lo cual $V(G) - \{x, z_1, z_2, z_3\} \neq \emptyset$ y como G es conexa $\exists y \in V(G) - \{x, z_1, z_2, z_3\}$ tal que y es adyacente al

menos a uno de los z_i , sin pérdida de generalidad, sea $(y, z_2) \in A(G)$, lo que implica que en H (y, z_2) es adyacente a un solo vértice de H_1 , por lo tanto H_1 es un triángulo impar.

Sea H_1 un clan de H tal que no es un triángulo par. Por demostrar que $H_1 \in \mathcal{X}$.

a) Si $|V(H_1)| = 3$, por definición de gráfica de líneas, tenemos dos casos: H_1 proviene de un triángulo o H_1 es generado por un vértice $v \in V(G)$ tal que $\delta_G(v) = 3$.

Si H_1 proviene de un triángulo T . Como H_1 es impar $\exists \alpha \in V(H)$ tal que α es adyacente a uno o a tres vértices de H_1 . Si α es adyacente a uno implica que α es incidente en G a una sola arista de T y si α es adyacente a tres vértices entonces α incide en G a tres aristas de T , lo cual no puede suceder, ya que por la observación No. 1 solo puede ser adyacente a dos. Por lo tanto H_1 no proviene de un triángulo.

De lo que se deduce que H_1 es generado por una estrella, por lo tanto $H_1 \in \mathcal{X}$.

b) Sea $|V(H_1)| \geq 4$, por hipótesis H_1 es una subgráfica completa y utilizando el teorema 1.1 inciso B ($L(G) \cong K_p \Leftrightarrow G \cong K_{4,p}$) $\exists v \in V(G)$ con $S' \subset S(v)$ tal que al pasar a H , H_1 proviene de S' . Si $S(v) - S' \neq \emptyset$ entonces $\exists (x, v) \in S(v) - S'$, por lo cual en H_1 el

vértice $w = (x, v)$ es adyacente a todos los de H_1 , por lo tanto $V(H_1) \cup \{w\}$ genera una subgráfica completa que contiene $H_1 \nabla_0$, con lo cual tenemos que $S(v) - S' = \emptyset$, es decir, $S = S'$.

$$\therefore H_1 \in \mathcal{X}.$$

v) Sean t triángulos en H tal que poseen una arista en común. Denotemos por $T_i = (\alpha_1, \alpha_2, w_i)$, $i=1, 2, \dots, t$, dichos triángulos. En consecuencia en G ; $\alpha_1 = (x, v)$ y $\alpha_2 = (v, w)$ tiene un extremo v en común y las aristas w_i son adyacentes a α_1 y α_2 . Pueden suceder dos cosas; que todas las w_i incidan en el vértice v o que $t-1$ sean incidentes en v y una tenga como extremos a x y a w . En cualquiera de los dos casos al menos $t-1$ aristas inciden en el vértice v , por lo tanto en H para cada $T_i = (\alpha_1, \alpha_2, w_i) \exists w_j \neq w_i$ con $i, j=1, 2, \dots, t-1$, tal que es adyacente a los tres vértices de T_i . Por lo tanto al menos $t-1$ son triángulos impares. ■

La más importante observación que podemos hacer de esta demostración es el resultado de que un 3-clan de H está en \mathcal{X} si y sólo si éste es impar. Lo cual sucede ya que triángulos de G van a dar a triángulos pares en H , mientras estrellas de tres aristas a triángulos impares.

Teorema No. 1.5. Si H es una gráfica de líneas conexa tal que no es ninguna de las gráficas $L(G)$ de la Figura No.1 entonces H tiene una y sólo una partición de Krausz.

Demostración: La demostración de este teorema se basa en los resultados obtenidos en el lema anterior, los cuales son;

Si \mathcal{X} es una partición de Krausz de una gráfica de líneas inducida por las estrellas de su gráfica raíz entonces los elementos de \mathcal{X} con cuatro o más vértices son precisamente los clanes de esos órdenes, los elementos de tres vértices son los clanes de tres vértices impares, los miembros con sólo dos vértices son clanes de dos vértices, donde las aristas de triángulos pares no son elementos de \mathcal{X} , y por último los miembros de un sólo elemento están formados por un sólo vértice tal que al otro miembro de \mathcal{X} al que pertenece no es un triángulo par.

Por lo tanto \mathcal{X} es una única partición de Krausz. ■

Este teorema no es válido para las gráficas de líneas de la Figura No.1 ya que todos los triángulos son pares. En la gráfica $L(G_2)$ de la Figura No.1 (por ejemplo), podemos dar dos particiones de Krausz; $P_1 = \{ (a,b,c), (e), (d) \}$ y $P_2 = \{ (a), (b), (c,d,e) \}$ (ver Figura No.1).

El siguiente teorema engloba las principales caracterizaciones de las gráficas de líneas. La primera se debe a Krausz [21], la segunda a Van Rooij y Wilf [31] y la tercera a Beineke [3].

Teorema No.1.6. Sea H una gráfica entonces los siguientes

enunciados son equivalentes:

a) H es una gráfica de líneas

b) H tiene una partición de Krausz

c) H no contiene a $K_{1,3}$ como subgráfica inducida y cualquier subgráfica inducida isomorfa a $K_4 - K_2$ contiene un triángulo par.

d) H no contiene como subgráfica inducida isomorfa a cualquiera de las gráficas de la Figura No.3.

Demostración:

a) \rightarrow b) Por el lema 1.2 y el teorema 1.5, si H es una gráfica de líneas entonces podemos dar una partición de Krausz, tal que ésta es inducida por las estrellas de G.

b) \rightarrow a) Sea \mathcal{X} una partición de Krausz. Definamos una gráfica G tal que $V(G) = \mathcal{X}$ y para distintos elementos $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{X}$, $\mathcal{A}\mathcal{B} \in A(G)$ si y sólo si $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$. Por las propiedades de una partición de Krausz, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ consta de un sólo elemento, por lo tanto si definimos $\rho: V(L(G)) \rightarrow V(H)$ tal que $\rho(\mathcal{A}\mathcal{B})$ es el único elemento de $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, obtenemos que ρ está bien definida. Lo único que falta ver es que ρ es un isomorfismo, es decir, ρ es biyectiva y preserva adyacencias.

Por demostrar ρ es uno a uno. Supongamos que $\rho(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \rho(\mathcal{C}\mathcal{D})$, es decir, $\rho(\mathcal{A}\mathcal{B}) = x = \rho(\mathcal{C}\mathcal{D})$, por lo cual $x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ y $x \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, por definición de partición de Krausz x está exactamente en dos elementos de \mathcal{X} , lo que implica que $\mathcal{C} = \mathcal{A}$ y $\mathcal{D} = \mathcal{B}$. Por lo tanto

$\mathcal{AB} = \mathcal{ED}$.

Por demostrar que ρ preserva adyacencias, es decir, si tomamos dos vértices adyacentes \mathcal{AB} , \mathcal{ED} en $L(G)$ sus imágenes bajo ρ son adyacentes. Sean $\rho(\mathcal{AB}) = x$ y $\rho(\mathcal{ED}) = y$, por definición de ρ tenemos que $x, y \in \mathcal{B}$ y como \mathcal{B} es una subgráfica completa x es adyacente a y , por lo tanto $\rho(\mathcal{AB})$ es adyacente a $\rho(\mathcal{ED})$.

c) \rightarrow b) Por hipótesis H no tiene a $K_{1,2}$ como subgráfica inducida y cualquier subgráfica inducida isomorfa a $K_4 - K_2$ tiene un triángulo par. Tenemos dos casos; los dos triángulos son pares o uno solamente es par.

1) Supongamos que H tiene dos triángulos pares $T_1 = (u,w,v)$ y $T_2 = (u,x,v)$ con una arista (u,v) en común (como en la Figura No.5(a)). Si H no consta tan sólo de dichos triángulos, existe un vértice y adyacente exactamente a dos vértices de T_1 (ya que éste es par), si y es adyacente a u y a v entonces se genera un $K_{1,2} = \{u,y,w,x\}$ como subgráfica inducida, por lo tanto y es adyacente a w y, sin pérdida de generalidad, supongamos que y es adyacente a v , lo que implica que y es adyacente a un vértice de T_2 , pero como T_2 es par, y debe ser adyacente a otro vértice de él, pero no puede ser u , ya que en ese caso T_1 sería impar, por lo tanto $(y,x) \in A(H)$ (Ver Figura No.5(b)). Si H no es la Figura No.5(b) entonces $\exists z \in V(H)$ tal que es adyacente a dicha gráfica, observemos que en la Figura No. 5(b) tenemos cuatro triángulos pares en los

cuales cada vértice esta en por lo menos dos triángulos entonces, si z fuera adyacente a un vértice tendríamos que tales triángulos serían impares y, si z fuera adyacente a dos tendríamos que T_1 o T_2 sería impar. Por lo tanto el vértice z es adyacente a tres o más vértices. Si el vértice z es adyacente a w, v, x tendríamos $K_{1,3} = \{u, w, z, y\}$ como subgráfica inducida, por lo cual z también debe ser adyacente a y o a u . Si $(z, y) \in A(H)$, el triángulo $T = \{w, v, y\}$ es impar ya que z es adyacente a los tres vértices, por lo tanto z no es adyacente a y . Si $(z, u) \in A(H)$ entonces el triángulo formado por los vértices z, w, v es impar ya que u es adyacente a los tres. Por lo tanto z y ni cualquier otro vértice pueden ser adyacente a w, v, x . Sea z adyacente a w y a v , como T_2 es par z debe ser adyacente a u , lo que implica que z es adyacente a los tres vértices de T_1 , lo cual no puede suceder, por lo tanto z no puede ser adyacente a v y $(z, x) \in A(H)$. Tenemos que los triángulos formados por los vértices w, y, v y x, v, y , son impares y tiene una arista en común, por lo tanto z debe ser adyacente a y o a v , pero ya vimos que a v no puede ser, por lo que es adyacente a y , con lo que obtenemos la gráfica de la Figura No.5(c). Observamos que si a la gráfica de la Figura No.5(c) le agregamos otro vértice b , debido a que cada vértice esta por lo menos en tres triángulos pares tendríamos dos triángulos impares con una arista en común, por lo que ya no podemos aumentar más vértices. Por lo tanto las tres gráficas de la Figura No.5 son los únicos casos en los cuales podemos tener $K_4 - K_2$ con sus dos triángulos pares. Estas gráficas son gráficas de líneas de las gráficas de la Figura No.1. Por lo

cual podemos dar un partición de Krausz.

2) Supongamos que al menos uno de los dos triángulos que comparten una arista es impar. Bajo estas condiciones, el conjunto \mathcal{X} de subgráficas completas de H (descrito anteriormente en el lema 1.2 y en el teorema 1.5) es una partición de Krausz de H .

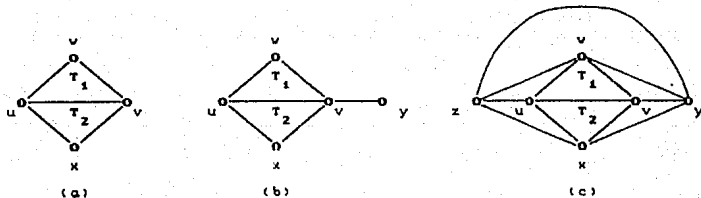


FIGURA No. 3

c) \rightarrow d) Supongamos que H contiene como subgráficas inducidas isomorfas a alguna de las gráficas de la Figura No.3, demostraremos que H contiene a $K_{1,3}$ o alguna subgráfica inducida isomorfa a $K_4 - K_2$ contiene sus dos triángulos impares.

Si H contiene a $G_1 \cong K_{1,3}$ entonces H contiene a $K_{1,3}$.

Si H contiene a G_i , $2 \leq i \leq 7$, entonces los vértices w , u , v , z generan una subgráfica $K_4 - K_2$ tal que sus dos triángulos son impares.

Si H contiene a G_8 entonces los vértices u , v , x , z generan una

subgráfica $K_4 - K_2$ tal que sus dos triángulos son impares.

Si H contiene a G_p entonces los vértices x, y, v, z generan una subgráfica $K_4 - K_2$ tal que sus dos triángulos son impares.

d) \rightarrow c) Demostraremos que los únicos caminos para que H tenga como subgráfica isomorfa inducida $K_4 - K_2$ con dos triángulos impares es que H contenga como subgráfica alguna de las ocho gráficas diferentes a $K_{1,3}$ de la Figura No.3. Partamos de H tal que consta de dos triángulos impares $T_1 = (w, u, v)$ y $T_2 = (u, v, z)$ con w y z no adyacentes. Tenemos dos casos dependiendo de si existe o no un vértice adyacente a un número impar de vértices de dichos triángulos.

Caso No.1. Existe un vértice y adyacente a un número impar de vértices de T_1 y de T_2 . Entonces tenemos las siguientes posibilidades:

a) y es adyacente a todos los vértices de T_1 y de T_2 . En este caso tenemos a G_3 como subgráfica inducida.

b) y es adyacente al menos a un vértice de T_1 y de T_2 . Si es adyacente a u y a v , obtenemos G_1 como subgráfica inducida. Si es adyacente a z y a x , tenemos a G_2 como subgráfica inducida.

Caso No.2. No existe un vértice adyacente a un número impar de vértices de T_1 y de T_2 . En este caso, sean x y y adyacentes a un número impar de vértices de T_1 y de T_2 , respectivamente. Entonces tenemos las siguientes posibilidades:

Antes de analizar cada uno de los casos, consideremos lo siguiente; si x o y es adyacente a u o a v entonces x o y es también es adyacente a w o a z , ya que de otra manera tendríamos como subgráfica inducida a $G_1 \cong K_{1,3}$.

a) y es adyacente exactamente a un vértice de T_1 y x a uno de T_2 . Si $(y,w), (x,z) \in A(G)$ entonces, dependiendo si x y y son o no adyacentes, obtenemos G_4 o G_7 como subgráficas inducidas. Si $(y,v), (x,z) \in A(G)$ entonces $(y,z) \in A(G)$ tal que $(x,w) \notin A(G)$; si x no es adyacente a y entonces los vértices $\{u,z,x,y\}$ inducen a G_1 , si son adyacentes entonces tenemos como subgráfica inducida a G_6 . Si $(x,u), (y,v) \in A(G)$ entonces necesariamente (y,w) y $(x,z) \in A(G)$, si $(x,y) \notin A(G)$ implica que existe G_8 como subgráfica inducida, si $(x,y) \in A(G)$ entonces G_2 aparecería. Finalmente si y y u son adyacentes a v , entonces de nuevo (y,w) y $(x,z) \in A(G)$, con lo que obtenemos a G_9 o a G_1 como subgráficas inducidas dependiendo si x y y son adyacentes o no.

b) Uno de los vértices x o y es adyacente a tres vértices de alguno de los triángulos y el otro sólo a uno. Sea y adyacente a los tres

vértices de T_1 , claramente si y es adyacente a z obtenemos G_3 como subgráfica inducida, entonces $(y,z) \in A(G)$. Tenemos que x puede ser adyacente a z o a v . Si $(x,z) \in A(G)$ entonces; si x no es adyacente a y existe G_3 como subgráfica inducida, y si son adyacentes entonces los vértices (u,v,z,y,x) inducen a G_2 . Si $(x,v) \in A(G)$ entonces; si x es adyacente a w , los vértices (x,w,u,y) inducen a G_1 y, si x es adyacente a y , los vértices (u,w,v,x,y) inducen a G_3 .

c) x y y son adyacentes cada uno a los tres vértices de T_1 y de T_2 . Si (y,z) , (x,w) y $(y,x) \in A(G)$ entonces los vértices (w,y,x,v,z) inducen a G_2 . La Única otra posibilidad es que obtengamos como subgráfica inducida a G_3 .

Ya que la caracterización de las gráficas de Beineke implican a lo más seis vértices, podemos decidir en $O(p^6)$ operaciones cuando una gráfica H de orden p es o no una gráfica de líneas. Lo ideal sería encontrar eficientemente su gráfica raíz. Roussopoulos [32] demostró que para una gráfica de líneas con p vértices y q aristas esto puede darse en $O(\text{máx}\{p,q\})$ pasos por medio de un algoritmo que decide cuando una gráfica es gráfica de líneas. El algoritmo construye una partición de Krausz y esta basado en el siguiente lema.

Lema No. 1.3. Sea X una partición de Krausz de una gráfica de líneas H , sea $\mathcal{A} \in X$ y $\mathcal{A}_1 = \{v \in \mathcal{A} \mid (v) \in X\}$, entonces;

$$\mathcal{X}_A = \mathcal{X} - \{\mathcal{A}\} \cup ((\{v\} \mid v \in \mathcal{A} - \mathcal{A}_1) - (\{v\} \mid v \in \mathcal{A}_1))$$

es una partición de Krausz de la gráfica H_A obtenida a partir de H al suprimir las aristas de \mathcal{A} y los vértices de \mathcal{A}_1 .

Demostración: Sea \mathcal{X} una partición de Krausz de H , donde H es una gráfica de líneas. Sean \mathcal{A} , \mathcal{A}_1 y H_A como se definieron.

Los elementos diferentes a \mathcal{A} , por ser \mathcal{X} una partición de Krausz, son subgráficas completas y como cada vértice de $\mathcal{A} - \mathcal{A}_1$ lo estamos tomando como una subgráfica completa de un solo vértice, todos los elementos de \mathcal{X}_A son subgráficas completas.

Sea $v \in V(H_A)$, si $v \in V(H_A) - V(\mathcal{A} - \mathcal{A}_1)$ entonces v está en un elemento de \mathcal{X} y como ésta es una partición, v está exactamente en dos elementos de \mathcal{X}_A . Si $v \in V(\mathcal{A} - \mathcal{A}_1)$, como \mathcal{A} era un elemento de la partición \mathcal{X} , v en H estaba en dos elementos, como cada arista está en un solo elemento de la partición al quitarlas v queda en un solo elemento de \mathcal{X} , al tomar a v como una subgráfica completa de un solo elemento dichos vértices están en exactamente dos elementos de \mathcal{X}_A .

Las aristas están en exactamente un solo elemento de \mathcal{X}_A , ya que las aristas de H_A están nada más en \mathcal{X} .

$\therefore \mathcal{X}_A$ es una partición de Krausz. ■

Por el lema anterior, los conjuntos de un sólo elemento de la partición de Krausz no causan ningún problema, por lo cual los ignoraremos hasta el final del algoritmo. En donde aparezca la frase " Pon la subgráfica \mathcal{N} dentro de \mathcal{X} ", significa también que eliminamos de H las aristas de \mathcal{N} . El algoritmo es el siguiente;

Paso No. 1. Si no hay aristas, ir al paso tres; de otra manera, escoge una arista e y encuentra el número t de triángulos de H que contienen a e ;

a) Si $t = 0$, pon esa arista como subgráfica dentro de \mathcal{X} y regresa al paso uno.

b) Si $t = 1$, y si otra arista f de ese triángulo esta contenida en más de un triángulo, entonces, reemplaza e por f y ve al paso dos. De otra manera pon ese triángulo dentro de \mathcal{X} y regresa al paso uno.

c) Si $t \geq 2$ continua al siguiente paso.

Paso No. 2. Encuentra el número s de triángulos impares de H que contienen a e ;

a) Si $t = 2$ y $s = 0$ entonces $H \cong L(G_2)$, $L(G_3)$ o $L(G_4)$ de la Figura No.1 o H no es una gráfica de líneas. Pon cualquiera de los dos triángulos dentro de \mathcal{X} y regresa al paso uno (el no ser gráfica

de líneas se puede detectar eventualmente).

b) Si $t = s$ o $s = t - 1$ y los s triángulos impares forman una subgráfica completa de H entonces pon esa subgráfica completa dentro de X y regresa al paso uno.

c) Si nada de lo anterior sucede, H no es gráfica de líneas.

Paso No. 3. Si un vértice v es sólo un elemento de X entonces agrega $\{v\}$ a X .

Paso No. 4. ALTO.

Si en algún momento un vértice aparece en más de dos elementos de X entonces G no es una gráfica de líneas. De otra manera, el algoritmo da una partición X de Krausz y G la podemos construir a partir de X , como lo indica el teorema 1.5.

La prueba de este algoritmo se sigue de las propiedades enunciadas en el lema 1.2.

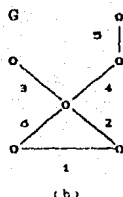
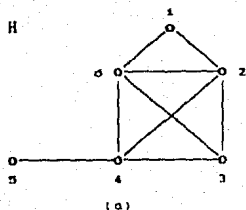


FIGURA No. 6

Apliquemos el algoritmo a la gráfica H de la Figura No.6(a).

Paso 1) Escogemos la arista (5,4):

a) $t = 0$, entonces ponemos la arista (5,4) dentro de \mathcal{X} .

Paso 2) Escogemos la arista (1,2):

a) $t = 1$; $T = \{ (1,2), (6,2), (1,6) \}$, reemplazamos la arista (1,2) por (6,2), ya que la arista (6,2) esta contenida en más triángulos.

Paso 3) $t = 3$ y $s = 2$ entonces ponemos como subgráfica completa en \mathcal{X} a la subgráfica generada por los vértices (6, 2, 3, 4) y eliminamos las aristas de dicha subgráfica.

Paso 4) Escogemos la arista (1,2):

a) $t = 0$, entonces ponemos la arista (1,2) dentro de \mathcal{X} .

Paso 5) Escogemos la arista (6,1):

a) $t = 0$, entonces ponemos la arista $(6,1)$ dentro de \mathcal{A} .

Paso 6) Los vértices 5, 3 están en un sólo elemento de la partición. Escogemos esos vértices como miembros de un sólo elemento de \mathcal{A} .

Paso 7) ALTO

\mathcal{A} queda formada por: $(5,4)$, $(6,2,3,4)$, $(6,1)$, $(2,1)$, (5) y (3) . Cada elemento de \mathcal{A} es una subgráfica completa, cada vértice está en exactamente dos miembros de \mathcal{A} y por último cada arista está en exactamente un elemento de \mathcal{A} . Por lo tanto \mathcal{A} es una partición de Krausz y H es una gráfica de líneas.

Encontremos su gráfica raíz. Aplicando el leorema 1.5 tenemos que cada elemento de \mathcal{A} en G es una estrella de cardinalidad igual al número de vértices que contiene cada miembro de \mathcal{A} . Por lo tanto G tiene 6 estrellas; una de cuatro aristas $(6,2,3,4)$; tres de dos $((5,4)$, $(6,1)$, $(2,1))$; y por último dos de una sola arista $((5)$, $(3))$. De lo que se deduce que la gráfica raíz de H es como la gráfica G de la Figura No.6(b).

DIGRÁFICAS DE LÍNEAS

DEFINICION Y PROPIEDADES

En el caso de las digráficas para definir su digráfica de líneas, pueden surgir diferentes formas, debido a las diversas adyacencias que tenemos. Una, que podría ser la más natural (análogo a las gráficas de líneas), es la que toma en cuenta solamente el principio y el final de las adyacencias entre las flechas.

Definición No.1.7. La digráfica de líneas de $D = (V,F)$ es la digráfica $L(D) = (F,W)$ donde el conjunto de vértices es el conjunto de flechas de D y (h,k) es una flecha de $L(D)$ si y sólo si las flechas correspondientes h, k inducen una trayectoria dirigida en D , es decir, el vértice inicial de h es el vértice final de k . Esta definición es la que utilizaremos y fue introducida en 1960 por Harary y Norman [16].

Algunas definiciones alternativas toman en cuenta otro tipo de adyacencias entre las flechas, una es, por ejemplo, la dada por Hemminger y Kierlein [19] en donde se fijan en todas las adyacencias posibles entre flechas que encontramos en D .

En la Figura No.7 se muestran algunos ejemplos de digráficas con sus correspondientes digráficas de líneas. En las cuales podemos observar algunos hechos interesantes que contrastan con los resultados de gráficas de líneas: $L(D_1) \cong L(D_2)$, $L(D_3) \cong D_3$, $L(D_4) \cong D_5$, $L(D_5) \cong D_4$ y $L(D_4)$ es disconexa mientras D_4 no lo es.

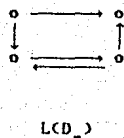
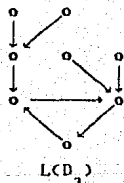
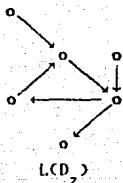
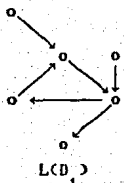
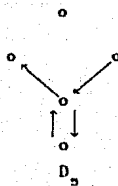
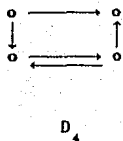
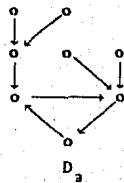
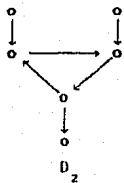
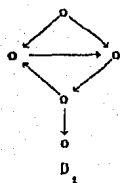


FIGURA No. 7

El siguiente teorema presenta algunos resultados básicos sobre las digráficas de líneas.

Teorema No. 1.7. Si D es una digráfica con p vértices (ninguno es aislado) y q flechas entonces:

- i) $L(D)$ tiene q vértices.
- ii) El número de flechas de $L(D)$ es $\sum \delta_D^+(v) \delta_D^-(v)$.
- iii) El grado exterior en $L(D)$ de (v, w) es $\delta_D^+(w)$ y el grado interior es $\delta_D^-(v)$.

$$iv) L(T_n^+) \cong T_{n-1}^+ \quad \text{para } n \geq 1$$

$$v) L(C_p^+) \cong C_p^+ \quad \text{para } p \geq 3$$

Demostración:

$$i) \text{ Por definición } |V(L(D))| = |F(D)| = q.$$

ii) Sea $v \in V(D)$, a v entran $\delta_D^-(v)$ flechas y salen $\delta_D^+(v)$ flechas, es decir, tenemos $\delta_D^-(v) \delta_D^+(v)$ trayectorias dirigidas. En $L(D)$ cada trayectoria representa una flecha, por lo que podemos concluir que el número de flechas de $L(D)$ es $\sum \delta_D^+(v) \delta_D^-(v)$.

iii) Sea $(v, w) \in F(D)$, v es el vértice final de $\delta_D^-(v)$ flechas, por lo tanto en $L(D)$, $\delta_D^-(v)$ vértices son adyacentes a (v, w) . En D w es el vértice inicial de $\delta_D^+(w)$ flechas, en consecuencia en $L(D)$ (v, w) es adyacente a $\delta_D^+(w)$ vértices.

i) Sea D una trayectoria T^{\rightarrow} de longitud n :

$$T^{\rightarrow} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$$

donde $\alpha_i = (u_i, v_{i+1}) \in F(D)$, $i = 1, 2, \dots, n$. En $L(D)$ cada flecha es un vértice, en consecuencia $L(D)$ tiene n vértices y como T^{\rightarrow} es una trayectoria $\forall \alpha_i \in T^{\rightarrow}$, α_i es adyacente a α_{i+1} , es decir, el vértice final de α_i es el vértice inicial de α_{i+1} . Entonces por definición de digráficas de líneas dichas adyacencias se conservan, lo que implica que en $L(D)$ obtenemos la siguiente trayectoria:

$$T_1^{\rightarrow} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$$

Como T_1^{\rightarrow} tiene n vértices entonces su longitud es $n - 1$.

v) Sea $G \cong \bar{C}_p^{\rightarrow}$ con $p \geq 3$, tal que:

$$\bar{C}_p^{\rightarrow} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p)$$

donde $\alpha_i = (v_{i-1}, v_i) \in F(D)$, $i = 1, 2, \dots, p$, tal que $v_0 = v_p$. El número de aristas de \bar{C}_p^{\rightarrow} es p , por lo tanto $L(\bar{C}_p^{\rightarrow})$ tiene p vértices. Además $\forall \alpha_i \in F(\bar{C}_p^{\rightarrow})$, α_i es adyacente a α_{i+1} , es decir, el vértice final de α_i es el vértice inicial de α_{i+1} . Por lo que en $L(\bar{C}_p^{\rightarrow})$ obtenemos una trayectoria de α_1 a α_p . Pero como \bar{C}_p^{\rightarrow} es un ciclo, el vértice final de α_p es el vértice inicial de α_1 . De lo que se deduce

que $L(\vec{C}_p)$ es un ciclo con p vértices. ■

Definición No. 1.8. Llamamos digráfica de líneas n -iterada si $L^2(D) \cong L(D)$ y $L^n(D) \cong L(L^{n-1}(D))$ para $n > 1$.

El próximo teorema presenta algunos resultados elementales sobre la digráfica de líneas n -iterada.

Teorema No. 1.8. Si D es una digráfica entonces:

1) $L^n(D)$ es una digráfica nula, para alguna n , si y sólo si D no tiene ciclos dirigidos.

2) Si D tiene dos ciclos unidos por una trayectoria dirigida (posiblemente de longitud cero) entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty$$

donde p_n es el número de vértices de $L^n(D)$.

Demostración:

1) Supongamos que D tiene ciclos dirigidos, por el teorema 1.7, inciso cinco, ciclos mediante la transformación $L(D)$ siempre van a dar a ciclos de la misma longitud, por lo cual $L^n(D)$ nunca es una digráfica nula.

Supongamos que D no tiene ciclos dirigidos por demostrar que

$L^n(D)$ es una digráfica nula.

Como D no tiene ciclos dirigidos existe una trayectoria dirigida en D tal que empieza en un vértice de ingrado cero y termina en un vértice de exgrado cero (ya que si no sucediera esto, dicha trayectoria contendría un ciclo dirigido). Al pasar a $L(D)$ obtenemos una nueva trayectoria de longitud menor (teorema 1.7, inciso iv). Además los vértices inicial y final de dicha trayectoria conservan la propiedad de tener ingrado cero y exgrado cero respectivamente (teorema 1.7, inciso ii). Al ir iterando, seguimos obteniendo una trayectoria de longitud menor, de tal manera que llega un momento en que tiene longitud uno, es decir, el vértice de ingrado cero y el vértice de exgrado cero son adyacentes, al volver a iterar la única flecha de la trayectoria es un vértice aislado (ya que el vértice inicial no es adyacente a algún vértice final de una flecha de D y el vértice final no es adyacente a algún vértice inicial de una flecha de D). La nueva digráfica consta de varias componentes que no tiene ciclos dirigidos, en cada componente hacemos el mismo razonamiento, como D es finita cuando n es suficientemente grande y ya que los vértices aislados desaparecen al ir iterando obtenemos que $L^n(D)$ es una digráfica nula.

2) Sean C_1^+ y C_2^+ dos ciclos de D y T^+ una trayectoria de longitud $k \geq 0$ tal que une a C_1^+ y a C_2^+ . Denotados por:

$$C_1^+ = \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \} \quad \alpha_i = \langle v_{i-1}, v_i \rangle \in F(D), \quad i=1,2,\dots,p, \quad v_0 = v_p$$

$$\vec{C}_2^+ = (b_1, b_2, \dots, b_n) \quad b_i = \langle w_{i-1}, w_i \rangle \in F(D), \quad i=1,2,\dots,n, \quad w_0 = w_n$$

$$\vec{T}^+ = (c_1, c_2, \dots, c_k) \quad c_i = \langle u_i, u_{i+1} \rangle \in F(D), \quad i=1,2,\dots,k$$

Como \vec{C}_1^+ y \vec{C}_2^+ están unidos por \vec{T}^+ , existen vértices en \vec{T}^+ comunes a \vec{C}_1^+ y a \vec{C}_2^+ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que $u_0 = u_1$ y $u_{k+1} = w_0$. Por lo tanto el vértice final de la flecha a_p es el vértice inicial de la flecha c_1 y el vértice final de la flecha c_k es el vértice inicial de la flecha b_1 . Por el teorema 1.7 (incisos 4, 5) \vec{C}_1^+ y \vec{C}_2^+ van a dar a dos ciclos \vec{C}_1^+ y \vec{C}_2^+ , respectivamente y \vec{T}^+ a una trayectoria \vec{T}_1^+ de longitud $k-1$. Por las adyacencias descritas entre \vec{C}_1^+ , \vec{C}_2^+ y \vec{T}^+ , existe en $L(D)$ un trayectoria \vec{F}^+ de longitud $k+1$: $\vec{F}^+ = (a_p, c_1) \cup \vec{T}_1^+ \cup (c_k, b_1)$. Entonces al ir iterando siempre vamos obteniendo una trayectoria mayor a la original.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty$$

En la Figura No. 8 ilustramos los enunciados del teorema anterior.

A continuación damos un corolario para digráficas análogo al corolario 1.2.1 para gráficas. En donde asumimos que D es fuertemente conexa, ya que en otro caso no sería cierto (ver la digráfica D_3 , Figura No. 7).

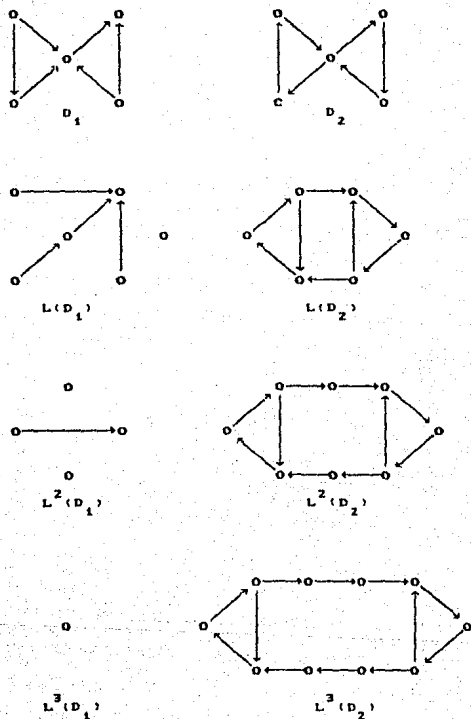


FIGURA No. 8

Corolario No. 1.8.1. Sea D fuertemente conexa y $L^n(D) \cong D$ para alguna n , entonces $L(D) \cong D$ y D es un ciclo dirigido.

Demostración: Por hipótesis D es fuertemente conexa por lo que se sigue que D contiene por lo menos un ciclo dirigido. Supongamos que al menos tiene dos \vec{C}_1 y \vec{C}_2 entonces, como D es fuertemente conexa existe una trayectoria dirigida \vec{T} de \vec{C}_1 a \vec{C}_2 . Entonces por el teorema 1.8 $L^n(D) \neq D$. Por lo tanto D sólo tiene un ciclo dirigido y $L(D) \cong D$ (teorema No.1.7 inciso v).

Teorema No.1.9. Si D es una digráfica con al menos tres vértices (ninguno aislado) entonces;

$L(D)$ es fuertemente conexa $\Leftrightarrow D$ es fuertemente conexa.

Demostración:

Sea D fuertemente conexa y x, y dos vértices de $L(D)$; $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$. Entonces existe un camino dirigido de x_2 a y_1 : $x_2, x_3, \dots, x_p, y_1$ en D . Las correspondientes flechas $(x_2, x_3), \dots, (x_p, y_1)$ forman un camino dirigido de x a y en $L(D)$.

En el otro sentido, sea $L(D)$ fuertemente conexa y x_1, y_1 dos vértices de D . Ya que D no tiene vértices aislados x_1, y_2 son vértices finales (por ejemplo) de ciertas flechas; $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$. El camino dirigido de x a y en $L(D)$ nos da utilizando las flechas un camino dirigido de x_1 a y_2 en D .

Definición No.1.9. Una fuente es un vértice con ingrado cero.

Demostración: Por hipótesis D es fuertemente conexa por lo que se sigue que D contiene por lo menos un ciclo dirigido. Supongamos que al menos tiene dos \vec{C}_1 y \vec{C}_2 entonces, como D es fuertemente conexa existe una trayectoria dirigida T^+ de \vec{C}_1 a \vec{C}_2 . Entonces por el teorema 1.8 $L^n(D) \neq D$. Por lo tanto D sólo tiene un ciclo dirigido y $L(D) \cong D$ (teorema No.1.7 inciso v).

Teorema No.1.9. Si D es una digráfica con al menos tres vértices (ninguno aislado) entonces:

$L(D)$ es fuertemente conexa $\Leftrightarrow D$ es fuertemente conexa.

Demostración:

Sea D fuertemente conexa y x, y dos vértices de $L(D)$: $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$. Entonces existe un camino dirigido de x_2 a y_1 : $x_2, x_3, \dots, x_p, y_1$ en D . Las correspondientes flechas $(x_2, x_3), \dots, (x_p, y_1)$ forman un camino dirigido de x a y en $L(D)$.

En el otro sentido, sea $L(D)$ fuertemente conexa y x_1, y_1 dos vértices de D . Ya que D no tiene vértices aislados x_1, y_1 son vértices finales (por ejemplo) de ciertas flechas: $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$. El camino dirigido de x a y en $L(D)$ nos da utilizando las flechas un camino dirigido de x_1 a y_2 en D .

Definición No.1.9. Una fuente es un vértice con ingrado cero.

Definición No. 1.10. Un pozo es un vértice con exgrado cero.

CARACTERIZACIONES DE LAS DIGRÁFICAS DE LINEAS

Al igual que en gráficas de líneas, tenemos el siguiente problema: dada una digráfica H es ésta digráfica de líneas, y si es así, ¿cuál es su digráfica raíz D ? Es claro que estamos interesados en digráficas raíces tales que no tengan vértices aislados. Pero aún cuando suceda esto, como la transformación $L(D)$ ignora las adyacencias entre las flechas de pozos y fuentes, digráficas raíces de una digráfica pueden diferir. Este es el caso de las cuatro digráficas que aparecen en la Figura No.9, las cuales no tienen vértices aislados, pero su digráfica de líneas coincide para todas, la cual consta solamente de dos flechas aisladas.

Sin embargo el siguiente teorema de Harary y Norman demuestra que el problema con las fuentes y los pozos es el único por el cual dos gráficas raíces pueden diferir. Denotamos por \tilde{D} la subdigráfica inducida de D por lo vértices que no son fuentes o pozos.

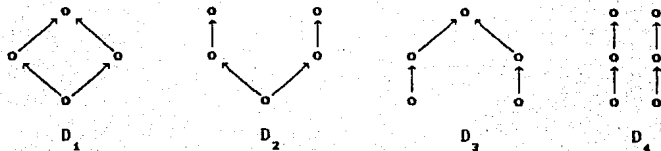


FIGURA No. 9

Teorema No. 1.10. Sean D y H digráficas y σ un isomorfismo de $L(D)$ sobre $L(H)$, entonces la función σ restringida a $F(D)$ es inducida de manera natural por un isomorfismo de \tilde{D} sobre \tilde{H} .

Demostración: Sea $a \in V(\tilde{D})$ tal que $a \in \Gamma^-(a)$ y $\beta \in \Gamma^+(a)$. Entonces existe $a' \in V(\tilde{H})$ con $\sigma(a) \in \Gamma^-(a')$ y $\sigma(\beta) \in \Gamma^+(a')$. Si $\gamma \in \Gamma^-(a)$ entonces, como \tilde{D} no contiene pozos o fuentes, $(\sigma(\gamma), \sigma(\beta))$ es una flecha de H , además $\sigma(\gamma) \in \Gamma^-(a')$, es decir, $\sigma(\Gamma^-(a)) \subseteq \Gamma^-(a')$. Similarmente $\sigma(\Gamma^+(a)) \subseteq \Gamma^+(a')$. Ya que $\sigma^{-1}(\sigma(\beta)) \in \Gamma^+(a)$ y $\sigma^{-1}(\sigma(a)) \in \Gamma^-(a)$ y como σ^{-1} es un isomorfismo de $L(H)$ sobre $L(D)$ tenemos de la misma manera que $\sigma^{-1}(\Gamma^-(a')) \subseteq \Gamma^-(a)$ y $\sigma^{-1}(\Gamma^+(a')) \subseteq \Gamma^+(a)$. Se sigue que $\sigma(\Gamma^-(a)) = \Gamma^-(a')$ y $\sigma(\Gamma^+(a)) = \Gamma^+(a')$. Ya que para $a, b \in V(\tilde{D})$ (o $V(\tilde{H})$), $\Gamma^+(a) = \Gamma^+(b)$ si y sólo si $a = b$, la función σ^* definida por la ecuación $\sigma(\Gamma^+(a)) = \Gamma^+(\sigma^*(a))$ es una función bien definida y uno a uno de $V(\tilde{D})$ sobre $V(\tilde{H})$. Si $b' \in V(\tilde{H})$ entonces por simetría $\sigma^{-1}(\Gamma^+(b')) = \Gamma^+(a)$ para alguna $a \in V(\tilde{D})$ con $b' = \sigma^*(a)$, por lo que se deduce que σ^* es sobre. Además para $a, b \in V(\tilde{D})$ tenemos que $\sigma(\Gamma^+(a) \cap \Gamma^-(b)) = \Gamma^+(\sigma^*(a)) \cap \Gamma^-(\sigma^*(b))$, en consecuencia $|\Gamma^+(a) \cap \Gamma^-(b)| = |\Gamma^+(\sigma^*(a)) \cap \Gamma^-(\sigma^*(b))|$, es decir, σ^* preserva adyacencias. Por lo que podemos concluir que σ^* es un isomorfismo.

Como un corolario inmediato tenemos el resultado de Aigner [1], al cual podemos verlo como una versión directa del Teorema de Whitney.

Corolario No. 1.10.1. Si \mathcal{A} es una clase de digráficas con a lo más una fuente, a lo más pozo y sin vértices aislados entonces para cualquier digráfica de líneas H , existe una única digráfica D en \mathcal{A} con $L(D) \cong H$.

Centremonos ahora en el problema de la caracterización de las digráficas de líneas, es decir, demos respuesta a la pregunta ¿cuáles digráficas son digráficas de líneas?. El siguiente teorema presenta varias respuestas a dicha pregunta; la primera (b) es dada por Harary y Norman [16], la segunda (c) por Heuchenne [20], la cuarta y quinta (d) y (e) por Richards [29]. Las condiciones (b) y (c) fueron descubiertas al mismo tiempo.

Definición No. 1.11. Una colección $\{S_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos (probablemente vacíos) de un conjunto S es llamada una partición general de S si $S = \bigcup_{i \in I} S_i$ y si $S_i \cap S_j = \emptyset$.

Definición No. 1.12. Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} dos conjuntos de vértices (no necesariamente ajenos, pero no ambos vacíos). Entonces la digráfica $K^*(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es aquella tal que el conjunto de vértices es $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ y el conjunto de flechas es $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

Teorema No. 1.11. Sea H una digráfica y M su matriz de adyacencia entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

a) H es una digráfica de líneas;

- b) Existen dos particiones generales $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ y $\{\mathcal{B}_i\}_{i \in I}$ de $V(H)$ tal que $F(H) = \bigcup_{i \in I} K^+(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i)$;
- c) Si (v, w) , (u, w) y (u, x) son flechas de H entonces (v, x) también;
- d) Cualesquiera dos filas de M o son idénticas o son ortogonales;
- e) Cualesquiera dos columnas de M o son idénticas o son ortogonales.

Demostración:

a) \Rightarrow b) Sea $H \cong L(D)$. Para cada $v_i \in V(D)$ definamos \mathcal{A}_i y \mathcal{B}_i los conjuntos de las flechas que entran y salen de v_i . Entonces la subdigráfica de $L(D)$ inducida por $\mathcal{A}_i \cup \mathcal{B}_i$ es $K^+(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i)$ y si (a, b) es una flecha de $L(D)$ entonces $(a, b) \in K^+(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i)$. Donde $a = (v_n, v_i)$ y $b = (v_i, v_j)$ en D .

En primer lugar $\mathcal{A}_i \cup \mathcal{B}_i = V(L(D))$, ya que los conjuntos \mathcal{A}_i y \mathcal{B}_i toman en cuenta todas las flechas de D . Como \mathcal{A}_i son las flechas a_i que entran en v_i y \mathcal{B}_i las flechas b_i que salen de v_i , es decir, el vértice final de las flechas a_i es el vértice inicial de las flechas b_i , entonces por definición de $L(D)$ tenemos que a_i es adyacente a b_i , es decir, $(a_i, b_i) \in K^+(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i)$.

Por lo tanto $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ y $\{\mathcal{B}_i\}_{i \in I}$ son dos particiones generales de $V(H)$ tal que $F(H) = \bigcup_{i \in I} K^+(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i)$.

b) \Rightarrow c) Si (v, w) , (u, w) y $(u, x) \in F(H)$ entonces, por definición de \mathcal{A}_i y \mathcal{B}_i , existen i y j tal que $(u, v) \in \mathcal{A}_i$ y $(w, x) \in \mathcal{B}_j$, por lo

tanto $(v, x) \in F(H)$.

c) \rightarrow d) Sea μ_i la i -ésima fila de $M = (m_{ij})$ y supongamos que no se cumple d), entonces existen i y j tal que μ_i y μ_j no son iguales y no son ortogonales. Por lo que existen h y k tal que $m_{ih} = 1$, $m_{jh} = 0$, $m_{ik} = 1$ y $m_{jk} = 1$. Pero eso significa que (v_i, v_h) , (v_i, v_k) , (v_j, v_k) son flechas de H mientras que (v_j, v_h) no lo es. Lo cual contradice c).

d) \rightarrow e) Para demostrar e) \rightarrow d) son equivalentes los siguientes enunciados:

Para toda i, j, h, k , si $m_{ih} = m_{ik} = m_{jk} = 1$ entonces $m_{jh} = 1$.

d) \rightarrow c) Para cada i y j con $m_{ij} = 1$, sea $\mathcal{A}_{ij} = \{ v_h \mid m_{hj} = 1 \}$ y sea $\mathcal{B}_{ij} = \{ v_k \mid m_{ik} = 1 \}$. Entonces por d) \mathcal{A}_{ij} es el conjunto de vértices cuyo vector fila en M es idéntico al i -ésimo vector fila, de igual manera para \mathcal{B}_{ij} es el conjunto de vértices cuyos vectores columnas en M son idénticos al vector j -ésimo. Por lo tanto $\mathcal{A}_{ij} \times \mathcal{B}_{ij} \subseteq F(H)$ y $F(H) = \bigcup_{i,j} \mathcal{A}_{ij} \times \mathcal{B}_{ij}$. Pero por la condición de ortogonalidad, \mathcal{A}_{ij} y \mathcal{A}_{hk} o son iguales o son ajenos, lo mismo sucede para \mathcal{B}_{ij} y \mathcal{B}_{hk} . Si existe un vector fila cero en M , sea \mathcal{A}_{ij} el conjunto de vértices cuyo vector fila en M es el vector cero y sea $\mathcal{B}_{ij} = \emptyset$. Haciendo lo mismo con los vectores cero columnas de M obtenemos la partición requerida.

b) \rightarrow a) Sea D una digráfica tal que sus vértices son los pares

ordenados $(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i)$ y con $|\mathcal{B}_i \cap \mathcal{A}_j|$ flechas de $(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i)$ a $(\mathcal{A}_j, \mathcal{B}_j)$ para cada i y j (incluyendo $i = j$). Sea σ_{ij} una función uno a uno de $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{A}_j$ sobre el conjunto de flechas de D , por ejemplo si $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{A}_j = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ entonces por definición por cada elemento a_α ponemos una flecha f_α de $(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i)$ a $(\mathcal{A}_j, \mathcal{B}_j)$ hacemos $\sigma_{ij}(a_\alpha) = f_\alpha$. Entonces la función σ definida en los $V(H)$ tomando σ de σ_{ij} es una función bien definida de $V(H)$ sobre $V(L(D))$, ya que $\{\mathcal{B}_i \cap \mathcal{A}_j\}_{i,j \in I}$ son particiones de $V(H)$. Además σ es uno a uno y sobre ya que cada σ_{ij} lo es. Podemos ver claramente que σ es un isomorfismo de H sobre $L(D)$, por ejemplo, si $(a, b) \in F(H)$ entonces existen i, j y k tal que $a \in \mathcal{B}_i \cap \mathcal{A}_j$ y $b \in \mathcal{B}_j \cap \mathcal{A}_k$. De este modo $\sigma(a)$ es una flecha de D de $(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i)$ a $(\mathcal{A}_j, \mathcal{B}_j)$ y $\sigma(b)$ es una flecha de D de $(\mathcal{A}_j, \mathcal{B}_j)$ a $(\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_k)$. Por lo tanto $(\sigma(a), \sigma(b)) \in F(L(D))$.

En la Figura No. 10 ilustramos los resultados obtenidos en el teorema anterior; en la Figura No.10(a) presentamos una digráfica H y su matriz de adyacencia M . A partir de dicha matriz, aplicando las caracterizaciones de las digráficas de líneas (al fijarnos en las entradas distintas de cero, en las columnas y filas iguales o ortogonales y en la columnas o filas cero), podemos obtener las subdigráficas bipartitas completas: $K^*(2, (1,3))$, $K^*(3,4, (5))$, $K^*(1, (2,4))$, $K^*(5, (\phi))$ y su digráfica raíz D (ver Figura No.10(b)). La digráfica raíz la obtuvimos por medio de la función σ definida en la demostración de dicho teorema, donde los vértices de D son los pares ordenados $(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i)$ y con $|\mathcal{B}_i \cap \mathcal{A}_j|$ flechas de $(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i)$ a $(\mathcal{A}_j, \mathcal{B}_j)$ para cada i y j . En nuestro ejemplo

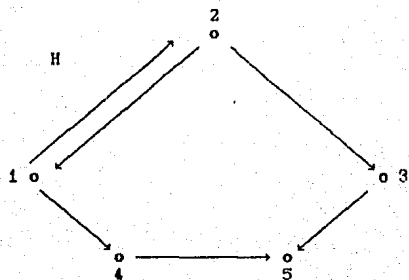
tenemos por lo tanto, cuatro vértices: $\langle \{2\}, \{1,3\} \rangle$, $\langle \{3,4\}, \{5\} \rangle$,
 $\langle \{1\}, \{2,4\} \rangle$, $\langle \{5\}, \{\phi\} \rangle$ y cinco flechas (Ver Figura No.10(b)), ya
 que:

$$|\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{A}_4| = |\mathcal{R}_2 \cap \mathcal{A}_1| = |\mathcal{R}_2 \cap \mathcal{A}_3| = |\mathcal{R}_3 \cap \mathcal{A}_4| = |\mathcal{R}_4 \cap \mathcal{A}_1| =$$

$$|\mathcal{R}_4 \cap \mathcal{A}_2| = |\mathcal{R}_4 \cap \mathcal{A}_3| = \phi$$

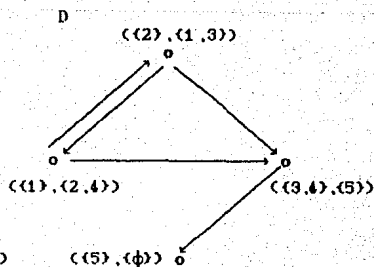
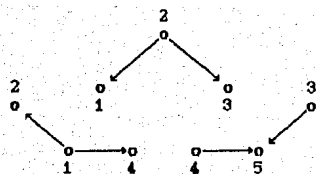
y:

$$|\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{A}_2| = |\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{A}_3| = |\mathcal{R}_2 \cap \mathcal{A}_5| = |\mathcal{R}_3 \cap \mathcal{A}_1| = |\mathcal{R}_3 \cap \mathcal{A}_2| \neq \phi$$



$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a)



(b)

FIGURA No. 10

CAPITULO DOS

En esta sección relacionaremos dos importantes conceptos de Teoría de las Gráficas; digráficas de líneas y núcleos. Es decir, veremos que propiedades de una digráfica, en cuanto a Teoría de Núcleos, se conservan en su digráfica de líneas.

Empezaremos definiendo los conceptos y resultados elementales con respecto a; núcleos, seminúcleos, cuasinúcleos y funciones de Grundy. Y la relación que guardan entre ellos.

En la segunda parte expondremos los resultados que obtuvimos en cuanto a estos conceptos y su digráfica de líneas; el número de seminúcleos (cuasinúcleos) de una digráfica D es menor o igual al número de seminúcleos (cuasinúcleos) de su digráfica de líneas y, el número de funciones de Grundy de D es igual al número de funciones de Grundy de su digráfica de líneas. Donde todo vértice de D tiene ingrado mayor o igual a uno.

RESULTADOS ELEMENTALES

NUMERO DE ABSORCION

Definición No. 2.1. En una digráfica $D = (V, F)$ llamamos a un conjunto $\mathcal{A} \subseteq V(D)$ absorbente si para cada $x \in \mathcal{A} \exists (x, \alpha) \in F(D)$ tal que $\alpha \in \mathcal{A}$.

Si A es la familia de todos los conjuntos absorbentes de la digráfica D entonces se tiene:

$$1) V(D) \in A$$

$$2) \mathcal{A} \in A, \mathcal{A}' \supset \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}' \in A$$

El número de absorción de una digráfica se define como:

$$\beta(D) = \min_{\mathcal{A} \in A} |\mathcal{A}|$$

El problema que nos concierne aquí es el de estudiar los conjuntos absorbentes con el mínimo número de elementos.

Un ejemplo en donde se utiliza este concepto es el problema de las estaciones de radar.

Un cierto número de puntos estratégicos x_1, x_2, \dots , llamados células son vigilados por unidades militares provistos de radares. Admitimos que una unidad colocada dentro de la célula x_4 (Figura

No.1) puede igualmente vigilar con su radar las células x_1, x_2, x_3 . De igual manera x_2 puede vigilar x_3, x_5 , etcétera. Surge la pregunta ¿Cuál es el mínimo número de unidades necesarias para vigilar todas las células? Precisamente este es el número de absorción, el cual es igual a 2, $\beta(D) = 2$, ya que los dos radares colocados en x_4 y x_2 son suficientes para controlar todas las células.

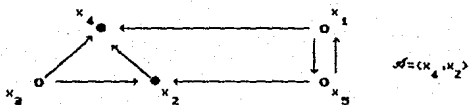


FIGURA NO. 1

Proposición No.2.1. Si D es una digráfica con p vértices y q flechas entonces $\beta(D) \geq p - q$.

Demostración: Sea A el mínimo conjunto absorbente. Cada vértice en $V - A$ es un vértice inicial de una flecha que va hacia A , por lo que;

$$p - |A| = |V - A| \leq q$$

de donde:

$$\beta(D) = |A| \geq p - q \quad \blacksquare$$

Proposición No.2.2. Si D es una digráfica con p vértices entonces:

$$\beta(D) \leq p - \max_{x \in V} \delta_D^-(x)$$

Demostración: Sea $x_0 \in V(D)$ tal que:

$$\delta_D^-(x_0) = \max_{x \in V} \delta_D^-(x).$$

Definamos $\mathcal{A} \subseteq V(D)$ tal que $\mathcal{A} = V(D) - \Gamma_D^-(x_0)$. Claramente este conjunto es absorbente ya que $\forall x \notin \mathcal{A} \quad x \in \Gamma_D^-(x_0)$. De lo que obtenemos:

$$\beta(D) \leq |\mathcal{A}| = p - \max_{x \in V} \delta_D^-(x) \quad \blacksquare$$

Sea D una digráfica, su número de absorción $\beta^*(D)$ es definido como el número de absorción $\beta(D^*)$ de su digráfica simétrica D^* , la cual se obtiene al reemplazar cada flecha de D por dos flechas de sentido opuesto.

Teorema No. 2.1. (Vizing [34] 1965). Si D es una digráfica con p vértices, q flechas y $\beta^*(D) = k \geq 2$, entonces:

$$q \leq \lfloor \frac{1}{2} (p - k) (p - k + 2) \rfloor$$

Demostración: Se hará por inducción sobre el número de vértices de D .

La desigualdad es evidente para $p = 2$. Supongamos $p > 2$. Sea D una digráfica con $p > 2$, $\beta^*(D) = k > 1$ y q flechas. Sea D^* su digráfica simétrica. Sea x_0 un vértice de grado máximo. Por la proposición 2.2 tenemos que:

$$|\Gamma_D(x_0)| = \delta_D^-(x_0) = \max \delta_D^-(x) \leq p - q$$

Por lo que podemos escribir:

$$|\Gamma_D(x_0)| = p - q - r \quad ; \quad 0 \leq r \leq n - k$$

Sea $S = V(D) - \{x_0\} - \Gamma_D(x_0)$; por lo tanto $|S| = k + r - 1$

Si $y \in \Gamma_D(x)$, el conjunto $(S - \Gamma_D(y)) \cup \{x, y_0\}$ es absorbente, ya que los únicos vértices que no están en D son los vecinos de x_0 y de y . Además:

$$|S - \Gamma_D(y)| + 2 \geq k$$

por lo tanto:

$$k + r - 1 - |\Gamma_D(y) \cap S| + 2 \geq k$$

de donde:

$$|\Gamma_D(y) \cap S| \leq r + 1$$

Por otra parte, si consideramos la subgráfica inducida por S , D_S y un conjunto absorbente mínimo \mathcal{A} de dicha subgráfica, tenemos que:

$$|\mathcal{A} \cup \{x_0\}| \geq k$$

ya que $\mathcal{A} \cup \{x_0\}$ es absorbente en D . De donde obtenemos que:

$$\beta^*(D_S) \geq k - 1$$

Por hipótesis de inducción, el número de flechas de D_s es:

$$q(D_s) \leq \frac{1}{2} [k+r-1 - (k-1)] [k+r-1 - (k-1) + 2] = \frac{1}{2} r(r+2)$$

Por lo tanto el número de flechas de D cumple:

$$\begin{aligned} 2q(D) &= 2q(D_s) + |\Gamma_D(x_0)| + \sum_{y \in \Gamma_D(x_0)} [|\Gamma_D(y) \cap S| + |\Gamma_D(y)|] \\ &\leq r(r+2) + (n-k-r) + (n-k-r)(r+1) + (n-k-r)^2 \\ &= (n-k)(n-k+2) - r(n-k-r) \\ &\leq (n-k)(n-k+2) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corolario No. 2.1.1. Si D es una digráfica con p vértices y q flechas entonces: $\beta^*(D) \leq p+1 - \sqrt{1+2q}$

Demostración:

Por el teorema 2.1 tenemos:

$$q \leq \left[\frac{1}{2} (p-k)(p-k+2) \right]$$

De aquí obtenemos:

$$2q \leq (p-k)(p-k+2)$$

$$2q \leq (p-k)^2 + 2(p-k)$$

$$2q+1 \leq (p-k)^2 + 2(p-k) + 1$$

$$2q+1 \leq [(p-k)+1]^2$$

$$\sqrt{2q+1} \leq (p-k)+1$$

y como $p-k \geq 0$ se tiene que:

$$-1 + \sqrt{2q+1} \leq p - k$$

$$k \leq p + 1 - \sqrt{2q+1}$$

NUCLEOS

Definición No. 2.2. Sea D una digráfica, $N \subseteq V(D)$ es un núcleo de D si:

1) N es independiente, es decir, $\forall x, y \in N$ x no es adyacente a y .

2) N es absorbente, es decir, $\forall x \in V(D) - N \exists s \in N$ tal que $(x,s) \in F(D)$.

No toda digráfica tiene núcleo y si tiene no necesariamente es único (Figura No.2).

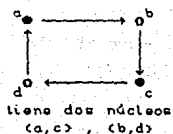


FIGURA No. 2

Estudiaremos los teoremas de existencia y de unicidad.

El concepto de núcleo fue introducido por John Von Neumann [26]

(1944) en la teoría de juegos como solución.

Dado un conjunto de situaciones X , n jugadores — denotados por $(1), (2), \dots, (n)$ — deben elegir un elemento $x \in X$. Entre ellos se debe establecer la preferencia de una situación sobre las demás. Si (i) prefiere la situación a de la b , se escribirá $a \succeq^i b$. Las preferencias individuales pueden no ser compatibles, por lo cual éstas no serán consideradas, requiriéndose así una elección de grupo. Lo anterior hace necesario introducir el concepto de preferencia efectiva, en la cual se tendrá que a es efectivamente preferida a la situación b si entre los n jugadores existe un grupo de ellos capaces de imponer juntos la preferencia de a sobre b .

Podemos construir de manera natural una digráfica $D = (V, F)$, donde $V(D) = X$ y $(a, b) \in F(D)$ si b es efectivamente preferida sobre a , ($a \rightarrow b$). Sea S un núcleo de D (si existe), Von Neumann propuso que la elección de una situación x se limitaba a elegir un punto de S . La independencia de S satisface que ninguna situación en S es efectivamente preferida a otra de S y la absorción determina que para toda situación x que no está en S existe otra en S que es efectivamente preferible a x , por lo cual x se puede descartar inmediatamente.

Otro ejemplo que podríamos citar en donde se aplica el concepto de núcleo es: *Bases de axiomas de una teoría*.

Consideremos una teoría, es decir, un conjunto de proposiciones

a, b, c, \dots . Construyamos una digráfica donde los vértices sean las proposiciones y si la proposición b implica la proposición a ($b \rightarrow a$), a es adyacente a b .

El resultado es una digráfica transitiva es decir:

$$(a, b) \in F \wedge (b, c) \in F \rightarrow (a, c) \in F.$$

Queremos determinar una base de axiomas, es decir, un conjunto de proposiciones (llamadas axiomas) con las dos propiedades siguientes:

1) Toda proposición de la teoría puede ser demostrada a partir de uno de sus axiomas.

2) Ningún axioma se puede deducir a partir de otro axioma.

El problema se reduce a encontrar un núcleo de D . Se verá más adelante que toda digráfica transitiva posee un núcleo. Por lo cual el problema tiene solución.

Proposición No. 2.3. Sea $N \subseteq V(D)$, N es núcleo de D si y sólo si su función característica satisface:

$$p_N(x) = 1 - \max_{y \in \Gamma^+(x)} p_N(y)$$

Demostración:

La función característica $\rho_S(x)$ de un conjunto S la definimos como:

$$\rho_S(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in S \\ 0 & \text{si } x \notin S \end{cases}$$

Si $\Gamma^+(x) = \emptyset$ definamos $\max_{y \in \Gamma^+(x)} \rho_S(y) = 0$.

Sea $N \subseteq V(D)$ tal que N es núcleo de D ;

1) Si $x \in N$, $\rho_N(x) = 1$; como N es independiente entonces $\forall y \in V(D)$ tal que y es adyacente a x implica que $y \notin N$, por lo tanto $\max_{y \in \Gamma^+(x)} \rho_N(y) = 0$, en consecuencia $1 - \max_{y \in \Gamma^+(x)} \rho_N(y) = 1 = \rho_N(x)$.

2) Si $x \notin N$ se tiene que $\rho_N(x) = 0$; como N es absorbente $\exists y \in N$ tal que $(x, y) \in F(D)$, por lo tanto $\max_{y \in \Gamma^+(x)} \rho_N(y) = 1$, en consecuencia

$$1 - \max_{y \in \Gamma^+(x)} \rho_N(y) = 0 = \rho_N(x).$$

Inversamente, sea $N \subseteq V(D)$ tal que:

$$\rho_N(x) = 1 - \max_{y \in \Gamma^+(x)} \rho_N(y),$$

queremos ver que N es núcleo.

a) Sea $x \in N$, lo que implica que $\rho_N(x) = 1$, como

$\rho_N(x) = 1 - \max_{y \in \Gamma^+(x)} \rho_N(y)$ obtenemos que el $\max_{y \in \Gamma^+(x)} \rho_N(y) = 0$, por lo cual

$\exists y \in \Gamma^+(x)$ tal que $\rho_N(y) = 0$ de donde $y \notin N$ y $\Gamma(x) \cap N = \emptyset$.

$\therefore N$ es independiente.

b) Si $x \notin N$ entonces $\rho_N(x) = 0$, como $\rho_N(x) = 1 - \max_{y \in \Gamma^+(x)} \rho_N(y)$ obtenemos

que el $\max_{y \in \Gamma^+(x)} \rho_N(y) = 1$, por lo que $\exists y \in \Gamma^+(x)$ tal que $y \in N \cap \Gamma^+(x)$,

en consecuencia $y \in N$.

$\therefore N$ es absorbente.

Por lo cual podemos concluir que N es núcleo de D . ■

Proposición No. 2.4. Todo núcleo es un conjunto independiente maximal y absorbente minimal.

Demostración: Sea $N \subseteq V(D)$ tal que N es núcleo de D .

a) Supongamos que N no es independiente maximal, es decir, $\exists I$ independiente tal que $N \subsetneq I$, de donde $\exists x \in I$ y $x \notin N$. Como N es absorbente por los menos hay una xN -flecha; pero como $N \subsetneq I$, también hay una xI -flecha ∇ , $\therefore N$ es independiente maximal.

b) Supongamos que N es absorbente minimal, es decir, $\exists \mathcal{A}$ absorbente tal que $\mathcal{A} \subsetneq N$, por lo tanto $\exists x \in N$ tal que $x \notin \mathcal{A}$, como \mathcal{A} es

absorbente $\exists xN$ - flecha, lo cual implica una xN - flecha ∇ , ya que N es independiente.

$\therefore N$ es absorbente minimal. ■

Definición No.2.3. Llamamos a D una digráfica simétrica, si $\forall (x,y) \in F(D)$ se tiene que $(y,x) \in F(D)$.

Teorema No.2.2. Sea D una digráfica simétrica entonces D tiene núcleo. Además $N \subseteq V(D)$ es núcleo de D si y sólo si N es un conjunto independiente maximal.

Demostración: Como N es núcleo de D , por la proposición 2.4 N es un conjunto independiente maximal.

Sea N un conjunto independiente maximal, por lo tanto $\forall x \notin N$ $\exists xN$ - flecha o Nx - flecha, como D es simétrica, siempre $\exists xN$ - flecha, por lo cual N es absorbente.

$\therefore N$ es núcleo de D .

Lo que quiere decir que cualquier digráfica simétrica tiene núcleo. ■

Surge una pregunta ¿Cualquier conjunto independiente maximal de una digráfica es núcleo? Esto es falso, un ejemplo son los ciclos impares dirigidos (Figura No. 3).



a es un conjunto independiente maximal pero no es núcleo.

FIGURA No. 3

Definición No. 2.4. Una digráfica $D = (V, F)$ se llama transitiva si para $(x, y) \in F(D)$ y $(y, w) \in F(D)$ implica que $(x, w) \in F(D)$.

Teorema No. 2.3. Si D es una digráfica transitiva entonces D tiene núcleo. Además $N \subseteq V(D)$ es núcleo de D si y sólo si es un conjunto absorbente minimal.

Demostración: Sea $N \subseteq V(D)$ tal que cada elemento de N proviene de una componente fuertemente conexa terminal de D .

Llamamos componente fuertemente conexa terminal a las componentes donde no salen flechas hacia cualquiera otra componente.

Veremos que N definido de esta manera es núcleo de D .

Sea $u \in N$, u no es adyacente a ningún vértice de N , ya que por definición de N , de u no salen flechas hacia otra componente. Por lo tanto N es independiente.

Como D es transitiva u, v están en la misma componente

fuertemente conexa si y sólo si (u,v) y (v,u) son flechas de D .

Sea $v \in V(D) - N$, v está en alguna componente fuertemente conexa C de D .

1) C es terminal.

En este caso, por definición de N , existe $v \in C$ tal que $v \in N$.

2) C no es terminal.

Como D es finita, existe un camino dirigido de C a una componente terminal. Sean x, z los vértices inicial y final respectivamente de dicho camino, como D es transitiva $(x,z) \in F(D)$ y ya que $x, v \in C$ entonces $(v,x) \in F(D)$, en consecuencia $(v,z) \in F(D)$. Por otro lado existe u en la componente fuertemente conexa terminal que contiene a z , tal que $u \in N$, por lo tanto $(z,u) \in F(D)$, de donde $(v,u) \in F(D)$ con $u \in N$. Con lo que concluimos que N es absorbente.

$\therefore N$ es núcleo de D .

Como N es núcleo de D por la proposición 2.4, N es absorbente minimal.

Inversamente sea N en D tal que N es absorbente minimal. Supongamos que N no es independiente, es decir, $\exists u, v \in N$ tal que $(u,v) \in F(D)$, como D es transitiva si $(x,u) \in F(D)$ entonces $(x,v) \in F(D)$, lo cual implica que $N - \{u\}$ es absorbente \forall ya que N es minimal. Por lo tanto N es núcleo de D . ■

Teorema No. 2.4. (Richardson [30] 1953). Si D es una digráfica sin ciclos dirigidos de longitud impar entonces D tiene núcleo.

La demostración inicial es complicada, pero gracias a la introducción del concepto de seminúcleo por Victor Neumann [25], ésta se hace menos difícil.

SEMINUCLEOS

Definición No. 2.5. Sea $S \subseteq V(D)$, S es seminúcleo de D si y sólo si:

- (i) S es independiente.
- (ii) Si existe una Sx - flecha en D entonces existe una xS - flecha.

Aquí surge la pregunta ¿Todo núcleo es seminúcleo? Esto es claro, ya que por ser núcleo es independiente y además $\forall x \notin S \exists$ una xS - flecha.

Inversamente ¿Todo seminúcleo es núcleo? Esto es falso (Ver Figura No. 4)

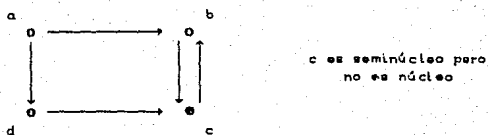


FIGURA No. 4

El siguiente teorema relaciona los conceptos de núcleo y seminúcleo.

Teorema No. 2.5. (Victor Neumann [25] 1970). Sea D una digráfica tal que toda subdigráfica inducida de D posee un seminúcleo entonces D tiene núcleo.

Demostración: La haremos por inducción, sobre los vértices de D . Para $n = 1, 2$ es claro que se cumple.

Supongamos que D' es una digráfica con $|V(D')| < n$ y toda subdigráfica inducida de D' tiene seminúcleo entonces D' tiene núcleo.

Sea D una digráfica tal que $|V(D)| = n$ y toda subdigráfica inducida tiene seminúcleo.

Sea S_0 un seminúcleo de D y:

$$\Gamma^-(S_0) = \{ z \in V(D) \mid \exists z S_0 - \text{flecha} \}$$

Tomemos H de la siguiente manera:

$$H = V(D) - (S_0 \cup \Gamma^-(S_0))$$

1) Si $V(H) = \emptyset$ implica que S_0 es núcleo de D .

2) Si $|V(H)| > 0$ por hipótesis de inducción H tiene núcleo. Sea N_0 el núcleo de H . Afirmamos que $S_0 \cup N_0$ es núcleo de D :

i) Es independiente debido a que S_0 y N_0 son independientes y por construcción no existe flecha entre ellos.

ii) Si $x \in V(D) - (S_0 \cup N_0)$ se tiene dos casos $x \in \Gamma^-(S_0)$ o $x \in N$, en cualquiera de los dos por construcción, siempre existe una xN - flecha. Por lo tanto N es absorbente. ■

Con lo anterior expuesto podemos demostrar el Teorema de Richardson.

Teorema No. 2.4. (Richardson 1953). Si D es una digráfica sin ciclos dirigidos de longitud impar entonces D tiene núcleo.

Demostración: Para la demostración utilizaremos el siguiente lema:

Lema: Sea D una digráfica con $p \geq 2$ fuertemente conexa sin

ciclos dirigidos de longitud impar entonces existe una partición de $V(D)$ en dos conjuntos V_1 y V_2 tal que V_1 y V_2 son independientes.

Demostración del Lema: Sea $m_0 \in V(D)$ y los siguientes conjuntos:

$$V_1 = \{ z \in V(D) \mid \exists m_0 z - \text{trayectoria dirigida de longitud par} \}$$

$$V_2 = \{ z \in V(D) \mid \exists m_0 z - \text{trayectoria dirigida de longitud impar} \}$$

Como $m_0 \in V_1$ entonces $V_1 \neq \emptyset$ y por lo tanto $\exists m_0 z$ - flecha para algún $z \in V(D)$ de donde $z \in V_2$ y así $V_2 \neq \emptyset$.

Por demostrar $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

Supongamos $\exists z_0 \in V_1 \cap V_2$ por lo tanto:

$$\exists m_0 z_0 - \text{trayectoria dirigida de longitud par } T_1 \text{ y}$$

$$\exists m_0 z_0 - \text{trayectoria dirigida de longitud impar } T_2$$

Como D es fuertemente conexa existe T_3 una $z_0 m_0$ - trayectoria dirigida.

Si $\langle T_3 \rangle$ es par entonces $T_3 \cup T_2$ contiene un ciclo dirigido de longitud impar ∇

Si $\langle T_3 \rangle$ es impar entonces $T_3 \cup T_1$ contiene un ciclo dirigido de longitud impar ∇

$$\therefore V_1 \cap V_2 = \phi$$

Por demostrar V_1 es independiente:

Supongamos $\exists f = (u,v) \in F(D)$ tal que $u, v \in V_1$, por lo tanto:

$\exists T_1 \in \mathcal{T}_0(u)$ - trayectoria dirigida tal que $\langle T_1 \rangle$ es par,

$\exists T_2 \in \mathcal{T}_0(v)$ - trayectoria dirigida tal que $\langle T_2 \rangle$ es par.

y también existe T_3 una \mathcal{T}_0 - trayectoria dirigida, por ser D fuertemente conexa.

Si $\langle T_3 \rangle$ es par, $T_1 \cup (u,v) \cup T_3$ contiene un ciclo dirigido de longitud impar ∇

Si $\langle T_3 \rangle$ es impar, $T_2 \cup T_3$ contiene un ciclo dirigido de longitud impar ∇

De igual manera demostramos que V_2 es independiente.

$\therefore V_1$ y V_2 son independientes. ■

Demostración del Teorema:

Caso a) Si D es fuertemente conexa por el lema exterior existe una partición de $V(D)$ en dos conjuntos independientes y ajenos V_1 y V_2 , además $\forall z \in V(D)$ $\delta_D^+(z) > 1$, por lo tanto, tanto V_1 como V_2 son núcleos de D .

Caso b) Si D no es fuertemente conexa, sea C_0 una componente fuertemente conexa terminal, es decir, de C_0 no salen flechas hacia otra componente, por a) C_0 tiene dos núcleos, por lo tanto cualquiera de los dos es seminúcleo de D y por el teorema anterior D tiene núcleo. ■

El concepto de seminúcleo por sí solo es de gran importancia, ya que dentro de ciertas aplicaciones juega un papel análogo al del núcleo. Sin embargo no todas las digráficas poseen seminúcleos. Por lo cual es necesario recurrir a una nueva generalización del concepto de núcleo, ésta es cuasinúcleo.

CUASINUCLEOS

Definición No.2.6. Un cuasinúcleo C de D es un conjunto independiente de vértices tal que $V(D) = C \cup \Gamma^-(C) \cup \Gamma^-(\Gamma^-(C))$, es decir, $\forall x \in V(D) - C$ existe una trayectoria a lo más de longitud 2 hacia el cuasinúcleo.

Proposición No.2.5. (Lovász, Chvátal [9]). Toda digráfica D tiene cuasinúcleo.

Demostración:

La demostración la haremos por inducción sobre el número de vértices de D .

Supongamos que la proposición se cumple para las digráficas de orden inferior a p . Sea D una digráfica de orden p y supongamos que existe un vértice x_0 tal que $\Gamma^{-1}(x_0) \cup \{x_0\} \neq X$ (si no la proposición se verifica con $C = \{x_0\}$). Por hipótesis de inducción, la subgráfica generada por $X - \Gamma^{-1}(x_0) = \{x_0\}$ admite un cuasinúcleo C_0 . Si en D x_0 no es adyacente a C_0 podemos tomar como cuasinúcleo $C = C_0 \cup \{x_0\}$. Si x_0 es adyacente a C_0 , existe una flecha de x_0 hacia C_0 y no existen flechas de C_0 hacia x_0 , por lo tanto podemos tomar $C = C_0$. ■

Es claro que todo núcleo es cuasinúcleo. Un ejemplo que no todo cuasinúcleo es núcleo es el vértice final de una trayectoria de longitud dos.

FUNCIONES DE GRUNDY

Otro concepto que juega gran importancia en la Teoría de Núcleos es el de las funciones de Grundy.

Definición 2.7. Una función entera no negativa $g(x)$ es llamada función de Grundy de D si para todo vértice x , $g(x)$ es el mínimo número entero no negativo tal que no pertenece al conjunto $\{g(y) \mid y \in \Gamma^+(x)\}$.

Este concepto fue introducido por P.M. Grundy [15] (1939) para digráficas sin ciclos dirigidos. Posteriormente fue extendido por

C. Berge [7] (1956).

La función de Grundy también la podemos definir como una función $g(x)$ tal que cumple con las siguientes propiedades:

1) $g(x) = k > 0$ implica que, para todo $0 \leq j < k$ existe $y \in \Gamma^+(x)$ con $g(y) = j$.

2) $g(x) = 0$ implica que todo $y \in \Gamma^+(x)$ satisface que $g(y) \neq 0$.

Una digráfica no siempre tiene función de Grundy, mas aún, si tiene no necesariamente es único (Figura No.5, los valores de las dos funciones de Grundy están indicados en los vértices correspondientes).

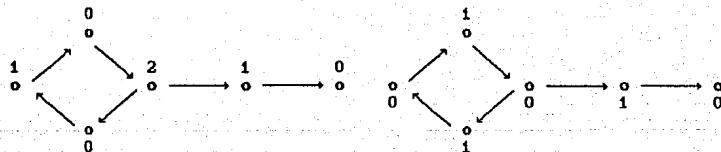


FIGURA No. 5

Proposición No. 2.6. Si D tiene función de Grundy entonces tiene núcleo. En este caso los $g(x)$ tal que $g(x) = 0$ es el núcleo.

Demostración:

$$\text{Sea } N = \{ x \mid g(x) = 0, x \in V(D) \}$$

a) Si $x \in N$ entonces $g(x) = 0$ y por ser $g(x)$ función de Grundy, el $\min_{y \in \Gamma^+(x)} g(y) > 0$, por lo tanto $(x,y) \notin F(D)$ y $(y,x) \notin F(D) \quad \forall x, y \in N$, por lo que concluimos que x no es adyacente a y , es decir, N es independiente.

b) Si $x \notin N$ entonces $g(x) > 0$, por lo tanto $\min_{y \in \Gamma^+(x)} g(y) = 0$, lo que implica que $\forall x, y \in N$ existe $(x,y) \in F(D)$. Por consecuencia N es absorbente.

$\therefore N$ es núcleo de D

El inverso no es cierto, en la Figura No.6, D admite un núcleo (el vértice d), pero no tiene función de Grundy.

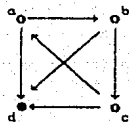


FIGURA No. 6

En la Figura No. 6a se muestran todas las posibilidades por las cuales, la gráfica anterior no tiene función de Grundy.

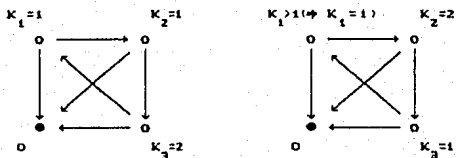


FIGURA No. da

Teorema No. 2.6. Si D es una digráfica tal que cada subdigráfica inducida tiene núcleo entonces D tiene función de Grundy.

Demostración: Definamos los siguientes núcleos:

N_0 el núcleo de D

N_1 el núcleo de $D_1 = D - N_0$

N_2 el núcleo de $D_2 = D_1 - N_1$

\vdots

N_l el núcleo de $D_l = D_l - N_l$

Los conjuntos N_i forman una partición de $V(D)$. Hagamos corresponder a todos los vértices de D un número $g(x)$ de la siguiente manera; $g(x) = k$ si y sólo si $x \in N_k$. Demostraremos que $g(x)$ es una función de Grundy.

a) Sea $g(x) = k$, veremos que para todo $0 \leq j < k$ existe en $\Gamma^+(x)$ un vértice y tal que $g(y) = 0$.

Como $x \in N_k$, $k > j$, x es un vértice de la digráfica D_j y como $x \in N_j$ entonces existe en N_j un vértice y tal que $y \in \Gamma^+(x)$; expresándolo de otra manera existe en $\Gamma^+(x)$ un vértice y tal que $g(y) = 0$.

b) Si $g(x) = k$ entonces en $\Gamma^+(x)$ no existe un vértice y tal que $g(y) = k$, ya que el conjunto N_k es independiente.

$\therefore g(x)$ es una función de Grundy. ■

Corolario No. 2.6.1. Toda digráfica simétrica tiene función de Grundy.

Demostración: Utilizando el teorema 2.2, toda digráfica simétrica tiene núcleo, y como toda subdigráfica inducida de una digráfica simétrica es simétrica entonces, podemos concluir por el teorema anterior que D tiene función de Grundy. ■

Corolario No. 2.6.2. Sea D una digráfica transitiva entonces D tiene función de Grundy.

Demostración: Aplicando el teorema 2.3, toda digráfica transitiva tiene núcleo, y como toda subdigráfica inducida de una digráfica transitiva es transitiva entonces, utilizando el teorema anterior D tiene función de Grundy. ■

Corolario No.2.6.3. Si D es una digráfica tal que toda subdigráfica inducida tiene seminúcleo entonces D tiene función de Grundy.

Demostración: Aplicando el teorema 2.5 tenemos que D y todas sus subdigráficas inducidas tienen núcleo, por lo tanto D tiene función de Grundy. ■

Corolario No.2.6.4. Sea D una digráfica sin ciclos dirigidos de longitud impar entonces D tiene función de Grundy.

Demostración: De manera análoga que los corolarios anteriores por el teorema 2.4 D y sus subdigráficas inducidas tienen núcleo, por lo tanto D tiene función de Grundy. ■

NÚCLEOS, SEMINÚCLEOS, CUASINÚCLEOS Y FUNCIONES DE GRUNDY EN LA DIGRÁFICA DE LINEAS

En esta parte veremos la relación que guardan los conceptos de núcleo, seminúcleo, cuasinúcleo y funciones de Grundy de una digráfica con su digráfica de líneas.

Matúš Harminc [17] prueba que el número de núcleos en una digráfica es igual al número de núcleos de su digráfica de líneas. De manera similar demostraremos que el número de seminúcleos (cuasinúcleos) es menor o igual al número de seminúcleos (cuasinúcleos) de su digráfica de líneas, también veremos que el número de funciones de Grundy de una digráfica es igual al número de funciones de Grundy de su digráfica de líneas, con D una digráfica tal que todo vértice tiene ingrado al menos uno.

Sea $D = (V, F)$ una digráfica y sea $L(D) = (F, W)$ su digráfica de líneas (definición 1.7). En los siguientes resultados denotaremos a la flecha $h = (u, v)$ en D y al vértice h en $L(D)$ con el mismo símbolo. Además si H es un conjunto de flechas de D entonces también será un conjunto de vértices de $L(D)$. Para enfatizar este hecho, en lo consiguiente, usaremos el símbolo H_L cuando H juegue el papel de vértices de $L(D)$.

Denotaremos con $\mathcal{P}(X)$ al conjunto de todos los subconjuntos de V .

Definición No. 2.8. Sea $f: \mathcal{P}(V) \longrightarrow \mathcal{P}(F)$ una función tal que: para cada $Z \subseteq V(D)$, $f(Z) = \{ (u, x) \in F(D) \mid x \in Z \}$.

Lema No. 2.1. Si $Z \subseteq V(D)$ es un conjunto independiente de $D = (V, F)$ entonces $f(Z)_L$ es un conjunto independiente en $L(D) = (F, W)$.

Demostración: Sea $Z \subseteq V(D)$ un conjunto independiente de D . Sean $h, u \in f(Z)_L$, por demostrar que $(h, u) \notin W$, es decir, $f(Z)_L$ es independiente.

Como $h, u \in f(Z)_L$, en D h y u son flechas cuyo vértice final está en Z . Supongamos que $(h, u) \in W$, por lo tanto h y u forman una trayectoria de longitud dos en D . Con lo que obtenemos que el vértice final de h es el vértice inicial de u , por lo que los vértices finales de h y u son adyacentes ∇ ya que Z es independiente.

$\therefore f(Z)_L$ es independiente ■

Teorema No. 2.7. (Matúš Harminc [17]). Sea $D = (V, F)$ una digráfica entonces el número de núcleos de D es igual al número de núcleos de $L(D) = (F, W)$.

Demostración: Sea \mathcal{K} el conjunto de todos los núcleos de D y sea \mathcal{K}^* el conjunto de todos los núcleos de $L(D)$.

Observación No. 1. Si $N \in \mathcal{K}$ entonces $f(N)_L \in \mathcal{K}^*$.

Sea N un núcleo de D , por el lema 2.1 $f(N)_L$ es independiente.

Sea k un vértice de $L(D)$ tal que $k \in F_L - f(N)_L$, por demostrar que $(k, h) \in W$ con $h \in f(N)_L$.

Por definición de $f(N)_L$, en D el vértice final de k no está en

N . Por ser absorbente N en D , existe una flecha $h \in D$ cuyo vértice final esta en N y cuyo vértice inicial es el vértice final de la flecha k , por lo tanto $h \in f(N)_L$ y $(k, h) \in W$, es decir, $f(N)_L$ es absorbente.

$\therefore f(N)_L$ es núcleo de $L(D)$.

Observación No. 2. El mapeo $f': \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}^*$ es inyectivo, donde f' es la restricción de f a \mathcal{X} .

Sean $N_1, N_2 \in \mathcal{X}$ tal que $N_1 \neq N_2$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $N_1 - N_2 \neq \emptyset$. Sea $u \in N_1 - N_2$, como N_2 es núcleo de D $\exists v \in N_2$ tal que $(u, v) \in F(D)$, por lo tanto $(u, v) \in f(N_2)_L$. Por la independencia de N_1 en D $v \notin N_1$, por lo que $(u, v) \notin f(N_1)_L$. Con lo que obtenemos que: $f(N_1)_L \neq f(N_2)_L$.

Observación No. 3. Si $H_L \in \mathcal{X}^*$ entonces $g(H) \in \mathcal{X}$. Donde $g: \mathcal{P}(F) \longrightarrow \mathcal{P}(V)$ es una función tal que si $H \subseteq F$ entonces $g(H) = X(H) \cup Y(H)$, donde $X(H)$ es el conjunto de todos los vértices finales de las flechas de H y $Y(H)$ es el conjunto de todos los vértices cuyo ingrado es cero tal que no son adyacentes a ningún vértice de $X(H)$.

a) $g(H)$ es un conjunto independiente.

Sean $u, v \in g(H)$, $u, v \in V(D)$, entonces tenemos tres casos:

1) $u, v \in X(H)$

2) $u \in X(H)$ y $v \in Y(H)$

3) $u, v \in Y(H)$

1) u es un vértice final de alguna flecha h y v de alguna flecha k , con $h, k \in H_L$. Supongamos que u y v son adyacentes.

Si $k = (u, v)$ entonces $(h, k) \in W \nabla$ ya que H_L es un conjunto independiente.

Si $k = (w, v) \neq (u, v) = d$ entonces la independencia de H_L implica que $d \notin H_L$ y como además es absorbente tenemos que $\exists b = (v, z) \in H_L$ tal que $(d, b) \in W$. El vértice final de k y el inicial de b es v , por lo tanto $(k, b) \in W \nabla$ ya que H_L es un conjunto independiente. En consecuencia $(u, v) \notin F(D)$.

2) Por definición de $Y(H)$, si $v \in Y(H)$ u no es adyacente a ningún vértice de $g(H)$.

3) Si $u, v \in Y(H)$ implica que ninguno de ellos es vértice final de alguna flecha de D , por lo tanto no pueden ser adyacentes.

$\therefore g(H)$ es un conjunto independiente

b) $g(H)$ es un conjunto absorbente (por demostrar que $\forall u \in V - g(H)$
 $\exists v \in g(H)$ tal que $(u, v) \in F(D)$)

Sea $v \in V - g(H) = V - X(H) - Y(H)$, existen dos posibilidades:

a) v es un vértice final de alguna flecha. En este caso existe $l = (t, v) \in F(D)$. Como $v \notin X(H)$ entonces $l = (t, v) \notin H_L$. Por ser absorbente H_L en $L(D) \exists h = (u, v) \in H_L$, con lo que implica que $v \in X(H)$.

b) v es un vértice de ingrado cero adyacente a algún vértice de $X(H)$, por lo tanto $\exists u \in g(H)$ tal que $(u, v) \in F(D)$.

$\therefore g(H)$ es núcleo de D .

Observación No. 4. La función $g': \mathcal{X}^* \longrightarrow \mathcal{X}$ es inyectiva.

Sean $N_L, P_L \in \mathcal{X}^*$ tal que $N_L \neq P_L$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $N_L - P_L \neq \emptyset$. Sea $h \in N_L - P_L$, sea u el vértice final de h , por lo tanto $u \in g(N)$ (ya que u es un vértice final de una flecha de N). Como P_L es absorbente en $L(D)$ y $h \notin P_L$ entonces $\exists k \in P_L$ tal que $(h, k) \in W$ y $k \in F(D)$. Sea v el vértice final de k , por lo anterior u es su vértice inicial. Como $k \in P_L, v \in g(P)$, ya que $g(P)$ es independiente en D , implica que $u \notin g(P)$, por lo tanto $g(N) \neq g(P)$.

$\therefore g$ es una función inyectiva.

Por las observaciones 2 y 4 tenemos que:

$$\text{card } \mathcal{X} \leq \text{card } \mathcal{X}^* \leq \text{card } \mathcal{X}$$

lo que implica:

$$\text{card } \mathcal{X} = \text{card } \mathcal{X}^* \quad \blacksquare$$

En la Figura No.7 ejemplificamos el teorema anterior. Donde N_1 y N_2 , núcleos de D , mediante la función f (definición 2.8), van a dar a H_1 y H_2 núcleos de $L(D)$ respectivamente. Inversamente H_1 y H_2 van a dar a N_1 y N_2 respectivamente bajo la función g (definida en la demostración del teorema 2.7).

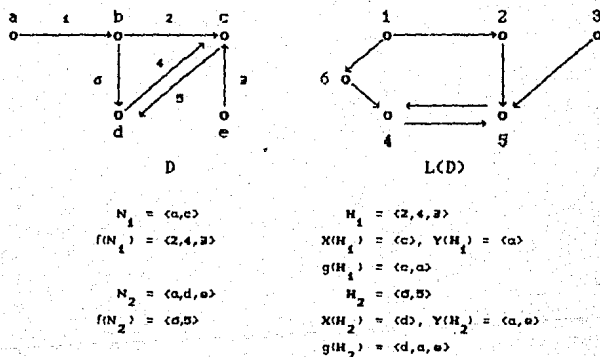


FIGURA NO. 7

Del teorema anterior se sigue de manera natural el siguiente corolario.

Corolario No. 2.7.1. D tiene núcleo si y sólo si $L(D)$ tiene

núcleo.

Si definimos $L(D) = (F, W)$ de tal modo que las flechas de D son los vértices de $L(D)$, y $(h, k) \in W$ si y sólo si los vértices iniciales o finales de h y k coinciden o el vértice final de h es el inicial de k , tenemos que el teorema 2.7 no es válido. En la Figura No.8 podemos observar que D tiene un núcleo (el cual esta indicado con los puntos negros), pero $L(D)$ definida de esta manera no tiene (ya que los dos vértices de ingrado dos y exgrado uno tendrían que estar en el núcleo, lo cual no puede suceder, ya que son advacentes).

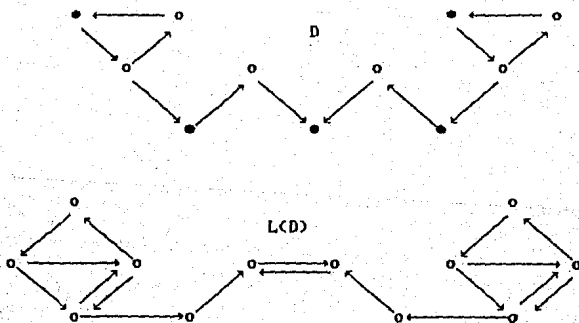


FIGURA NO. 8

La digráfica D de la Figura No.9 no tiene núcleo, en cambio $L(D)$ tiene uno (indicado en la figura con puntos negros).

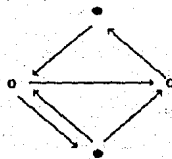
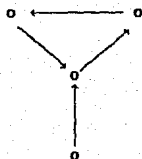
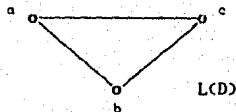
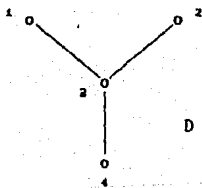


FIGURA No. 9

En el caso simple de gráficas el teorema tampoco se cumple. En la Figura No.10 se muestra que la gráfica G tiene dos núcleos y su gráfica de líneas (definición 1.1) tiene tres.



$$N(D) = \langle (3), (1, 2, 4) \rangle$$

$$N(L(D)) = \langle (a), (b), (c) \rangle$$

FIGURA No. 10

En la Figura No.11 G tiene cinco núcleos $\langle (1,4), (1,5), (1,3), (2,4), (2,5) \rangle$ y $L(D)$ tiene cuatro $\langle (a,c), (a,e), (a,d), (b,d) \rangle$.



FIGURA No. 11

Teorema No. 2.8. Sea D una digráfica tal que todo vértice tiene ingrado al menos uno entonces el número de seminúcleos de D es menor o igual al número de seminúcleos de su digráfica de líneas $L(D)$.

Demostración: Sea \mathcal{S} el conjunto de todos los seminúcleos de D y \mathcal{S}^* el conjunto de todos los seminúcleos de $L(D)$.

En primer lugar probaremos que si S es un seminúcleo de D entonces $f(S)_L$ es un seminúcleo de $L(D)$.

Sea S un seminúcleo de D . Por el lema 2.1 $f(S)_L$ es un conjunto independiente. Sea $(s, h) \in W$ con $s \in f(S)_L$ entonces en D tenemos que $(s = (s_1, s_2), h = (s_2, t)) \in F(D)$ y $s_2 \in S$, como S es seminúcleo de D existe $s_2 \in S$ tal que $(t, s_2) \in F(D)$, con lo que $y = (t, s_2) \in f(S)_L$ y $(h, y) \in W$.

Por último demostraremos que $f': \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}^*$ es una función inyectiva, donde f' es la restricción de f a \mathcal{S} .

Sean $S_1, S_2 \in \mathcal{P}$ tal que $S_1 \times S_2$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $S_1 - S_2 \neq \emptyset$. Sea $v \in S_1 - S_2$, ya que el ingreso de v es al menos uno existe $(x,v) \in F(D)$, claramente, por la definición de f , $(x,v) \in f(S_1)_L - f(S_2)_L$.

$$\therefore \text{card } \mathcal{P} \leq \text{card } \mathcal{P}^{\#}$$

En la Figura No.12(a,b) ejemplificamos el resultado obtenido, en donde se muestra como de un seminúcleo de D , en H podemos encontrar varios seminúcleos a partir de la función dada (Definición 2.8). Dicha digráfica D tiene cuatro seminúcleos y $L(D)$ tiene ocho. Los seminúcleos de cada digráfica de la Figura No.12(a,b) están indicados con puntos negros.

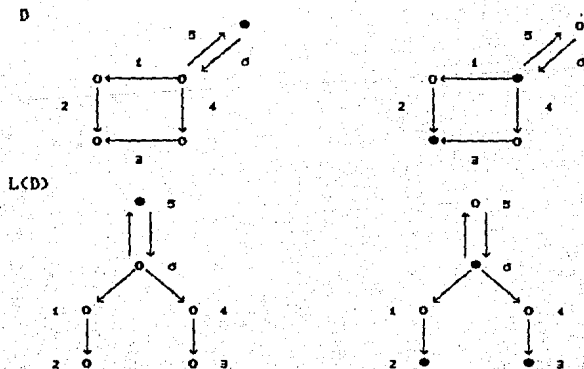
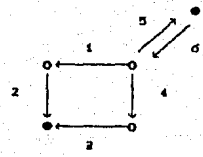
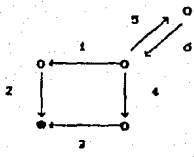


FIGURA NO. 12a

D



L(D)

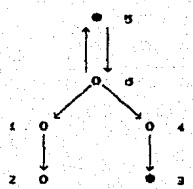
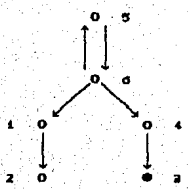
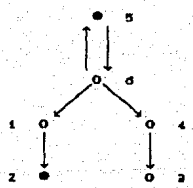
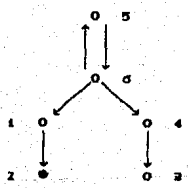
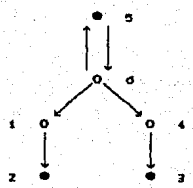
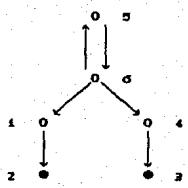


FIGURA No. db

Teorema No. 2.9. Sea D una digráfica tal que cada vértice tiene ingrado mayor o igual a uno entonces el número de cuasinúcleos de D es menor o igual al número de cuasinúcleos de $L(D)$.

Demostración: Sea Q el conjunto de todos los cuasinúcleos de D y Q^* el conjunto de todos los cuasinúcleos de $L(D)$.

En primer término probaremos que si Q es un cuasinúcleo de D entonces $f(Q)_L$ es un cuasinúcleo de $L(D)$.

Sea Q un cuasinúcleo de D , por el lema 2.1 $f(Q)_L$ es un conjunto independiente en $L(D)$.

Sea h un vértice de $L(D)$, $h = (x,y) \in F_L$ tal que $h \in F_L - f(Q)_L$. Como $h \notin f(Q)_L$ entonces $y \notin Q$ y como Q es un cuasinúcleo de D existe un camino dirigido de y a Q de longitud al menos dos. Analicemos los dos posibles casos:

caso 1) Existe un camino dirigido de y a Q de longitud uno. Sea $\bar{T}^1 = (y,u)$ dicho camino, entonces $u \in Q$, $k = (y,u) \in f(Q)_L$ y $(h,k) \in W$.

caso 2) Existe un camino dirigido de y a Q de longitud dos. Sea $\bar{T}^2 = (y,u,w)$ tal camino, lo que implica que $w \in Q$, $k = (u,w) \in f(Q)_L$ y denotando $b = (y,u)$ tenemos que $\bar{T}^2 = (h,b,k)$ es un camino dirigido de longitud dos en $L(D)$ con $k \in f(Q)_L$.

Ahora veremos que $f'' : Q \longrightarrow Q^*$ es una función inyectiva, donde f'' es la restricción de f a Q .

Sea $Q_1, Q_2 \in Q$ tal que $Q_1 \neq Q_2$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $Q_1 - Q_2 \neq \emptyset$ y $v \in Q_1 - Q_2$. Ya que el grado de v es al menos uno existe $(x,v) \in F(D)$ y como $v \notin Q_2$ entonces $(x,v) \in f(Q_1) - f(Q_2)$. Por lo tanto $f(Q_1) \neq f(Q_2)$.

Sea K_2^* una gráfica completa simétrica dirigida con 3 vértices y H_n la digráfica obtenida al tomar n copias ajenas de K_2^* . El número de cuasinúcleos de $L(H_n)$ menos el número de cuasinúcleos de H_n es al menos n . (Ver Figura No.13, donde $n = 1$ y cada vértice de H_1 y $L(H_1)$ es un cuasinúcleo).

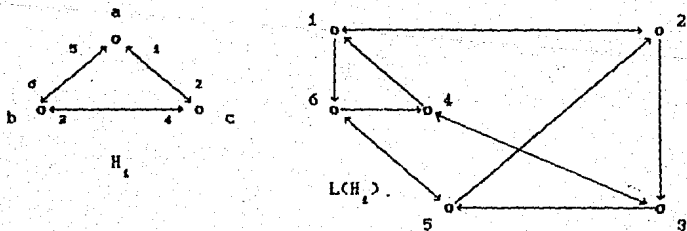


FIGURA NO. 13

La hipótesis todo vértice tiene grado al menos uno no puede

ser omitida en los teoremas 2.8 y 2.9. Es suficiente considerar a D con $V(D) = \{u_1, u_2, u_3\}$ y $F(D) = \{(u_1, u_2), (u_2, u_3)\}$. D tiene dos seminúcleos (cuasinúcleos) y $L(D)$ tiene solamente uno.

Lema No. 2.2. Sea D una digráfica y $x_0 \in V(D)$. Si f_1 y f_2 son funciones de Grundy en D tal que para todo $y \in \Gamma^+(x_0)$, $f_1(y) = f_2(y)$ entonces $f_1(x_0) = f_2(x_0)$.

Demostración: La prueba se sigue directamente de la definición de función de Grundy. Sea $x_0 \in V(D)$ y f_1 y f_2 funciones de Grundy. $f_1(x_0)$ es el mínimo número entero no negativo tal que no pertenece al conjunto $\{f_1(y) \mid y \in \Gamma^+(x_0)\}$, pero por hipótesis $\{f_1(y) \mid y \in \Gamma^+(x_0)\} = \{f_2(y) \mid y \in \Gamma^+(x_0)\}$, por lo tanto $f_1(x_0) = f_2(x_0)$. ■

Teorema No. 2.10. Sea D una digráfica tal que cada vértice tiene ingrado al menos uno entonces el número de funciones de Grundy de D es igual al número de funciones de Grundy de $L(D)$.

Demostración: Supongamos que $f: V(D) \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ es una función de Grundy en D . Denotamos por $f_L: V(L(D)) \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ la función definida como sigue: $f_L(x) = f(x_2)$ para cada $x = (x_1, x_2) \in F_L$.

Observación No. 1. f_L es una función de Grundy en $L(D)$.

(1) $f_L(x) = k > 0$ implica que para cada $0 \leq j \leq k$ existe $y \in \Gamma_{L(D)}^+(x)$ tal que $f_L(y) = j$.

Supongamos que $f_L(x) = k > 0$ y $0 \leq j < k$, entonces, por definición de f_L , $x = (x_1, x_2) \in F(D)$ y $f(x_2) = k > 0$. Ya que f es una función de Grundy en D y $0 \leq j < k$ existe $x_2 \in \Gamma_D^+(x_2)$ tal que $f(x_2) = j$. Con lo que obtenemos que $y = (x_2, x_2) \in F(D)$ con $(x, y) \in W$ y $f_L(y) = j$, es decir, $\exists y \in \Gamma_{L(D)}^+(x)$ tal que $f_L(y) = j$.

(2) $f_L(x) = k$ implica que para cada $y \in \Gamma_{L(D)}^+(x)$ $f_L(y) \neq k$.

Supongamos que $f_L(x) = k$ y $y \in \Gamma_{L(D)}^+(x)$, entonces por definición de f_L y de $L(D)$, $x = (x_1, x_2)$ y $y = (x_2, x_2) \in F(D)$, $f(x_2) = k$ y $x_2 \in \Gamma_D^+(x_2)$, como f es una función de Grundy en D , se sigue que $f(x_2) \neq k$. Por lo tanto $f_L(y) = f(x_2) \neq k$.

Observación No. 2. Si f^1, f^2 son funciones de Grundy tal que $f^1 \neq f^2$ entonces $f_L^1 \neq f_L^2$.

Supongamos que $f_L^1 = f_L^2$ y $x_0 \in V(D)$. Dado que el ingrado de x_0 es al menos uno, existe una flecha $(z, x_0) \in F(D)$. Por hipótesis tenemos que $f_L^1(z, x_0) = f_L^2(z, x_0)$, es decir, $f^1(x_0) = f^2(x_0)$.

Sea $g: V(L(D)) \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ una función de Grundy en $L(D)$.
 Definamos $g_D: V(D) \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ una función tal que para cada $x_0 \in V(D)$ y $t = (y, x_0) \in F(D)$ cualquier flecha de D , donde x_0 es su vértice final (el cual existe por hipótesis), $g_D(x_0) = g(t)$.

Observación No. 3. g_D está bien definida.

Sea $x_0 \in V(D)$, supongamos que $t_1 = (y_1, x_0)$ y $t_2 = (y_2, x_0) \in F(D)$.

Si $\Gamma_D^+(x_0) = \emptyset$ entonces $\Gamma_{L(D)}^+(t_1) = \Gamma_{L(D)}^+(t_2) = \emptyset$. Se sigue por la definición de función de Grundy que $g(t_1) = g(t_2) = 0$.

Observación No. 4. g_D es una función de Grundy en D .

a) $g_D(x) = k > 0$ implica que para cada $0 \leq j < k$ existe $y \in \Gamma_{L(D)}^+(x)$ tal que $g_D(y) = j$.

Supongamos que $g_D(x) = k > 0$ y $0 \leq j < k$, por la definición de g_D y la hipótesis del teorema tenemos que existe $t = (z, x) \in F(D)$ con $g(t) = k > 0$ y como g es una función de Grundy en $L(D)$ existe $t' \in \Gamma_{L(D)}^+(t)$ tal que $g(t') = j$ y $t' = (x, w)$ para algún vértice w en D , $g_D(w) = g(t') = j$. Claramente $w \in \Gamma_D^+(x)$, hagamos $w = y$.

b) $g_D(x) = k$ implica que para cada $y \in \Gamma_D^+(x)$ $g_D(y) \neq k$.

Supongamos que $g_D(x) = k$, entonces existe $t = (z, x) \in F(D)$ tal que $g(t) = k$. Sea $y \in \Gamma_D^+(x)$, por consiguiente $(x, y) \in \Gamma_{L(D)}^+(t)$. Ya que g es una función de Grundy en $L(D)$ se sigue que $g((x, y)) \neq k$. Por lo tanto $g_D(y) = g((x, y)) \neq k$.

Observación No. 5. Si g^1, g^2 son funciones de Grundy en $L(D)$ tal que $g^1 \neq g^2$ entonces $g_D^1 \neq g_D^2$.

Supongamos que $g_D^1 = g_D^2$. Sea $t = (x, y) \in F(D)$, entonces $g_D^1(y) = g_D^2(y)$. Por la definición de g_D^1 y g_D^2 tenemos que $g^1(t) = g^2(t)$.

Por las observaciones 2 y 5 tenemos que el número de funciones de Grundy de D es igual al número de funciones de Grundy de $L(D)$. ■

El siguiente corolario se sigue de manera natural del teorema anterior.

Corolario No. 2.10.1. Si D es una digráfica tal que todo vértice tiene ingrado mayor o igual a uno entonces, D tiene función de Grundy si y sólo si $L(D)$ tiene función de Grundy.

Corolario No. 2.10.2. Si D es una digráfica tal que todo vértice tiene ingrado mayor o igual a uno entonces el número de funciones de Grundy de D es igual al número de funciones de Grundy de $L^n(D)$.

Demostración: La haremos por inducción sobre n .

Observación No.1. Por el teorema 1.7 (inciso 3) el grado interior de (v,w) en $L(D)$ es $\delta_D^-(v)$, por lo tanto por la hipótesis del teorema, al ir iterando el grado interior de la nueva digráfica siempre es mayor o igual a uno.

Por el teorema es inmediato que se cumple para $n = 1$.

$n = 2$. Sea D una digráfica tal que tiene m funciones de Grundy entonces $L(D)$ tiene m funciones de Grundy. Sea $D_1 \cong L(D)$, por lo cual D_1 tiene m funciones de Grundy. Por la observación uno y por el teorema anterior $L(D_1)$ contiene m funciones de Grundy. Por lo tanto $L^2(D) \cong L(D_1)$ tiene m funciones de Grundy.

Supongamos que se cumple para $n-1$, es decir, si D tiene m funciones de Grundy entonces $L^{n-1}(D)$ tiene m funciones de Grundy.

Sea D una digráfica tal que contiene m funciones de Grundy entonces por hipótesis $L^{n-1}(D)$ tiene m funciones de Grundy. Tenemos que $L^n(D) \cong L(L^{n-1}(D))$, haciendo el mismo procedimiento que para $n = 2$ obtenemos que $L^n(D)$ tiene m funciones de Grundy. ■

En la Figura No.14(a,b) ilustramos los resultados obtenidos en el teorema anterior. En donde damos dos funciones de Grundy (f^1, f^2) para la digráfica D y dos funciones (g^1, g^2) para $L(D)$, las cuales están indicadas en los vértices correspondientes.

Aplicando estos resultados a las digráficas D y L(D) de la Figura No.14(a) tenemos que; f^1 define una función de Grundy f_L^1 en L(D) y g^1 define una función de Grundy g_D^1 de tal manera que:

$$f_L^1(a_1) = f^1(b) = 0$$

$$f_L^1(a_2) = f^1(a) = 2$$

$$f_L^1(a_3) = f^1(c) = 1$$

$$f_L^1(a_4) = f^1(c) = 1$$

$$f_L^1(a_5) = f^1(c) = 0$$

$$g_D^1(a) = g_D^1(a_2) = 2$$

$$g_D^1(b) = g_D^1(a_1) = 0$$

$$g_D^1(c) = g_D^1(a_3) = g_D^1(a_4) = 1$$

$$g_D^1(d) = g_D^1(a_5) = 0$$

Haciendo lo mismo para las digráficas D' y L(D') de la Figura No.14(b) tenemos que; f^2 define una función de Grundy f_L^2 en L(D') y g^2 define una función de Grundy g_D^2 de tal manera que:

$$f_L^2(a_1) = f^2(b) = 2$$

$$f_L^2(a_2) = f^2(a) = 0$$

$$f_L^2(a_3) = f^2(c) = 1$$

$$f_L^2(a_4) = f^2(c) = 1$$

$$f_L^2(a_5) = f^2(d) = 0$$

$$g_D^2(a) = g_D^2(a_2) = 0$$

$$g_D^2(b) = g_D^2(a_1) = 2$$

$$g_D^2(c) = g_D^2(a_3) = g_D^2(a_4) = 1$$

$$g_D^2(d) = g_D^2(a_5) = 0$$

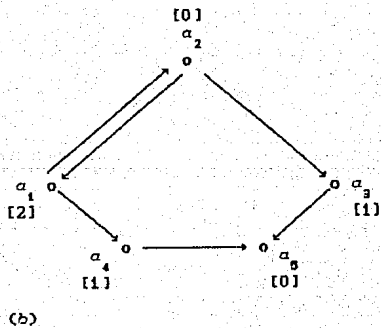
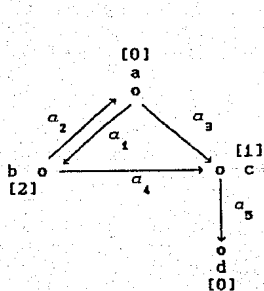
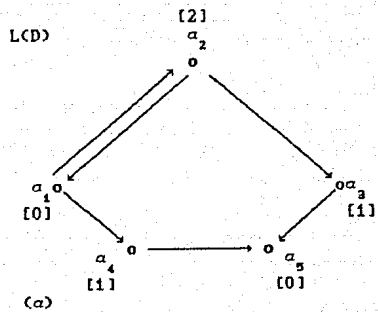
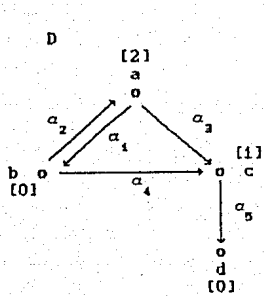


FIGURA NO. 44

CAPITULO TRES

Claude Berge y Pierre Duchet [5] plantearon en 1984 una interesante conjetura (la B.D. conjetura) que relaciona dos conceptos fundamentales de Teoría de las Gráficas; el concepto de coloración y el concepto de núcleo;

"Una gráfica es perfecta si y sólo si es núcleo perfectible"

Los resultados obtenidos hasta este momento han sido pocos y estos han estado enfocados principalmente a encontrar clases amplias de gráficas que satisfagan la conjetura.

En este capítulo presentamos una clase de gráficas que cumplen la B.D. conjetura: las gráficas de líneas.

CONCEPTOS Y RESULTADOS ELEMENTALES

A lo largo de esta sección nos serán de gran utilidad los

siguientes conceptos:

a) El número de independencia $\alpha(G)$ (también llamado el número de estabilidad), definido como el máximo número de vértices dos a dos no adyacentes en G .

b) El número de cubrimiento $\theta(G)$, definido como el mínimo número de clanes que cubren a todos los vértices de G .

c) El número de clan $\omega(G)$, definido como el máximo número de vértices dos a dos adyacentes de G .

d) El número cromático $\chi(G)$ (algunas veces denotado por $\gamma(G)$), definido como el mínimo número de colores necesarios para colorear todos los vértices de tal forma que cualesquiera dos vértices adyacentes tengan asignado distinto color.

A continuación definiremos lo que es una gráfica perfecta y los resultados importantes que se han obtenido referentes a la B.D. conjetura.

En 1961, C. Berge inventó las gráficas perfectas.

Definición No. 3.1. Una gráfica G es perfecta si sus vértices se pueden colorear de tal manera que cualesquiera dos vértices adyacentes tengan asignado diferente color y el número total de colores sea igual a la máxima cardinalidad de un clan de G , e igual

para cada subgráfica H inducida de G, es decir, $\chi(H) = \omega(H)$.

Claramente para cualquier gráfica G se cumple $\chi(H) \geq \omega(H)$.

Los siguientes ejemplos son los más sencillos de gráficas perfectas y no perfectas:

a) Las gráficas completas K_p , ya que $\chi(K_p) = p = \omega(K_p)$ y cada subgráfica inducida es una gráfica completa.

b) Las gráficas bipartitas, ya que la cardinalidad del máximo clan es dos, el número cromático también es dos y toda subgráfica inducida es una gráfica bipartita.

c) Los ciclos impares C_{2n+1} , $n \geq 1$ no son gráficas perfectas, ya que $\chi(C_{2n+1}) = 3$ y $\omega(C_{2n+1}) = 2$.

d) El complemento de un ciclo impar C_{2n+1}^c no son gráficas perfectas.

A partir de la definición de gráficas perfectas observamos que el problema de la coloración de sus vértices se reduce a la coloración de sus subgráficas completas, de tal manera que es suficiente conocer el número cromático de sus subgráficas completas (el cual es igual al número de vértices) para poder conocer el número cromático de la gráfica. Lo mismo es válido para cada una de

sus subgráficas inducidas.

Para ver la relación que guardan los conceptos de coloración y núcleo, definamos los siguientes términos relacionados con la Teoría de Núcleos.

Definición 3.2. Una digráfica D es núcleo-perfecta si toda subdigráfica inducida de D posee un núcleo.

Este concepto fue introducido por Victor Neumann Lara [25].

Ejemplos:

- 1) Digráficas sin ciclos dirigidos son núcleos-perfectas
- 2) \vec{C}_{2n+1}^+ no es núcleo perfecta.

En el caso de los conceptos de gráficas perfectas y de coloración la orientación es irrelevante, en cambio, para los conceptos de núcleo y de núcleo-perfecta juega un papel trascendental.

G. Berge y P. Duchet relacionaron los conceptos de coloración y núcleo al definir el concepto de gráfica núcleo-perfectible.

Dada una gráfica G le podemos asociar de manera natural una digráfica \vec{G}^+ obtenida a partir de G , orientando cada arista de G en al menos una de las dos direcciones. Una digráfica obtenida así es

llamada una orientación de G .

Definición No.3.3. Una orientación por pozos de G es una orientación \vec{G} de G en la cual cada subgráfica completa de G tiene un núcleo (también llamado pozo, esto es un punto tal que desde cada otro vértice del clan hay una flecha hacia él).

Definición No.3.4. Una gráfica G es llamada núcleo-perfectible si toda orientación por pozos de G es una digráfica núcleo-perfecta.

Ejemplos:

- 1) Las gráficas completas son núcleo-perfectibles.
- 2) Los ciclos de longitud par son núcleo-perfectibles.
- 3) Las gráficas bipartitas son núcleo-perfectibles.
- 4) Los ciclos impares no son núcleo-perfectibles.
- 5) El complemento de un ciclo impar no es núcleo-perfectible.

En la Figura No.1 se da una orientación por pozos de una gráfica completa, en donde podemos observar que cada subgráfica completa contiene exactamente un pozo y una fuente.

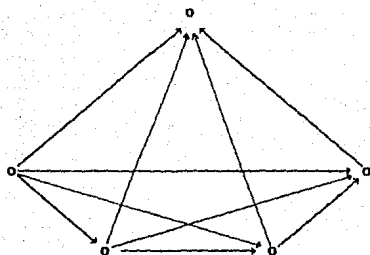


FIGURA NO. 1

Observamos que en una gráfica núcleo-perfectible el problema de la existencia de núcleo (para una orientación dada) queda reducido a la existencia de núcleo en cada una de sus subgráficas completas; de tal manera que es suficiente saber que cada una de sus subgráficas completas tiene núcleo para que cada una de sus subgráficas inducidas tenga núcleo (en una orientación dada).

Así, la relación entre los conceptos de núcleo y coloración propuesta en la B.D. conjetura es la siguiente:

Para una gráfica dada G , el problema de la coloración de vértices (encontrar $\chi(G)$) queda resuelto por los clanes (esto es, encontrando el número cromático de los clanes) si y sólo si el problema de la existencia de núcleos (para una orientación dada de G) queda resuelto para los clanes (este es, si la orientación es por pozos).

Se han dado varias caracterizaciones de las gráficas perfectas, de las cuales algunas son todavía problemas abiertos. En este caso sólo mencionaremos las que utilizaremos en este trabajo.

La siguiente caracterización es una de las más importante y fue obtenida por L. Lovasz [22] (1972).

Teorema No. 3.1. Para cualquier gráfica G las siguientes condiciones son equivalentes:

- 1) $\chi(H) = \omega(H) \quad \forall H \subseteq V(G)$
- 2) $\alpha(H) = \theta(H) \quad \forall H \subseteq V(G)$
- 3) $\alpha(H)\omega(H) \geq |H| \quad \forall H \subseteq V(G)$

Donde H es una subgráfica inducida de G .

Es claro que la equivalencia de 1 y de 2 implica que el complemento de una gráfica perfecta es una gráfica perfecta.

Tomando en cuenta que los ciclos impares no son gráficas perfectas y el resultado anterior tenemos lo siguiente:

Observación No.1. Si una gráfica G y su complemento G^c contienen un ciclo impar de longitud mayor que tres, sin diagonales entonces G no es perfecta.

Una caracterización en términos de subgráficas inducidas prohibidas ha sido conjeturada por G. Berge.

Conjetura Fuerte de las Gráficas Perfectas (Berge, 1964).

Una gráfica es perfecta si y sólo si no contiene como subgráficas inducidas C_{2n+1} ciclos impares ni su complemento C_{2n+1}^c .

Ejemplos de gráficas perfectas que constituyen un importante apoyo a esta conjetura son las siguientes:

a) Las gráficas trianguladas (gráficas sin ciclos inducidos de longitud mayor o igual que 4) son perfectas.

b) Las gráficas de Meyniel (gráficas en las que cada ciclo impar tiene al menos dos diagonales) son perfectas.

c) Las gráficas que no contienen como subgráfica inducida a $K_{1,3}$ cumplen con la conjetura fuerte de las gráficas perfectas.

En cuanto a las digráficas núcleo-perfectas también observamos que la existencia de núcleos también está relacionada con la estructura de los ciclos impares dirigidos (Ver capítulo dos). Y esto lo podemos constatar en los siguientes ejemplos de clases de gráficas núcleo-perfectas.

1) Digráficas en las que cada ciclo dirigido impar tiene al menos dos flechas simétricas.

2) Digráficas en las que cada ciclo impar tiene dos diagonales de la forma $(i, i+2)$ y $(j, j+2)$.

3) Digráficas en las que cada ciclo dirigido impar tiene dos diagonales con punta consecutiva.

En cuanto a las gráficas núcleo-perfectibles tenemos los siguientes resultados:

Teorema No. 3.2. Toda digráfica núcleo-perfectible no contiene como subgráficas inducidas C_{2n+1} y C_{2n+1}^c [23].

Mas aún se tiene que la conjetura B.D. es cierta en un sentido, toda gráfica núcleo-perfectible es perfecta, si se tiene por hipótesis que admite la conjetura fuerte de las gráficas perfectas.

En el otro sentido tenemos ejemplos de clases amplias de gráficas perfectas que son núcleo-perfectibles [23]:

1) El complemento de las fuertemente perfectas. Una gráfica es fuertemente perfecta si toda subgráfica inducida de H contiene un conjunto independiente que intersecta a todos los clanes maximales de H . En general, toda gráfica fuertemente perfecta es perfecta.

2) Las gráficas de Meyniel, definidas anteriormente.

3) Las gráficas perfectas que no contienen como subgráficas inducidas a $K_{1,3}$ y $K_4 - e$. Este resultado se probará más adelante.

Otros resultados sobre gráficas perfectas y gráficas núcleo-perfectibles que utilizaremos son:

Teorema No. 3.3. Si G es una gráfica conexa con un conjunto de corte A , el cual es un clan y si cada componente conexa de $G - A$ es una gráfica perfecta entonces G es perfecta ([5] capítulo 16).

Teorema No. 3.4. Si G es una gráfica conexa con un conjunto de corte A , el cual es un clan y si cada componente conexa de $G - A$ es núcleo-perfectible entonces G es núcleo-perfectible [23].

LA B.D. CONJETURA Y LAS GRAFICAS DE LINEAS

Una clase de gráficas que cumplen con la B.D. conjetura son las gráficas de líneas, para demostrar ésto utilizaremos el siguiente resultado.

Teorema No. 3.5. Si $G \cong L(H)$ entonces las tres condiciones siguientes son equivalentes:

a) G es una gráfica perfecta;

b) H no contiene como subgráfica inducida por aristas un ciclo impar de longitud al menos 5;

c) Toda subgráfica inducida por aristas conexas H' de H posee una de las propiedades siguientes:

1) H' es una gráfica bipartita.

2) H' es el clan K_1 .

3) H' tiene exactamente $p + 2$ vértices $x_1, x_2, \dots, x_p, a, b$ tal que (x_1, x_2, \dots, x_p) es independiente y (x_i, a, b) generan un clan ($i = 1, 2, \dots, p$).

4) H' tiene un vértice de corte.

Demostración: Probaremos sucesivamente las tres implicaciones.

a) \Rightarrow b) Supongamos lo contrario, es decir, H contiene un ciclo impar de longitud al menos cinco. Tenemos que los vértices que representan las aristas de este ciclo en G inducen un ciclo impar sin cuerda, de la misma longitud (teorema 1.1, inciso 6). Entonces esta subgráfica contradice la perfección de G .

b) \Rightarrow c) Sea H' una subgráfica inducida por aristas conexas de H y w la cardinalidad del clan máximo de H' .

Si $w \leq 2$, entonces H' no tiene ciclos de longitud tres y, por la hipótesis, no tiene ciclos impares de longitud al menos cinco.

Por lo tanto H' es una gráfica sin ciclos impares, es decir, H' es una gráfica bipartita.

Si $w = 3$, sea (a, b, x_1) un triángulo de H' . Si H' no tiene otros vértices entonces H' verifica la propiedad tres. Si no, como H' es conexa, existe un vértice c adyacente a algún vértice del triángulo.

Si alguna arista del triángulo (a, b, x_1) no pertenece a otro triángulo entonces podemos suponer que c es vecino de a . Entonces a es un vértice de corte que desconecta a c de b y de x_1 . Ya que si no sucediera ésto, existiría un camino \mathcal{C} de longitud al menos dos de c a b (por ejemplo), que junto con las aristas (b, x_1) , (x_1, a) , (a, c) o bien las aristas (b, a) y (a, c) , según si \mathcal{C} es de longitud impar o par, formarían un ciclo impar de longitud al menos cinco. Lo cual contradice la hipótesis b). Por lo tanto H' cumple con la propiedad 4.

Si una arista del triángulo (a, b, x_1) , por ejemplo, (a, b) pertenece a otro triángulo (a, b, x_2) , entonces no existe otra arista que pertenezca a otro triángulo. De lo contrario, existiría un vértice y adyacente, por ejemplo a a y x_1 , por lo que obtendríamos un ciclo impar (a, y, x_1, b, x_2, a) contradiciendo la hipótesis b .

Sean (x_1, x_2, \dots, x_p) todos los vértices de H' adyacentes a la vez a a y b . Los cuales no son adyacentes entre sí, por que si no obtendríamos un clan K_p , lo cual contradice la hipótesis $w = 3$. Si

H' no tiene otros vértices entonces H' cumple la propiedad tres. Si no, gracias a la conexidad de H' existe un vértice c adyacente a a , o bien a x_1 (por ejemplo). Entonces la supresión de a o respectivamente de x_1 desconecta la gráfica, si no sucediera esto, obtendríamos un camino \mathcal{C} de c a b o a x_1 (respectivamente a a o a x_2). Dentro de todos los casos posibles podemos concluir que la prolongación de \mathcal{C} genera un ciclo impar de longitud al menos cinco, lo cual es una contradicción.

Si $w = 4$, sea $\{a, b, c, d\}$ un clan de cardinalidad cuatro de H' . Si H' no tiene otros vértices entonces H' es K_4 . Si no, existe por razones de conexidad, un vértice e adyacente a a (por ejemplo). Afirmamos que a es un vértice de corte.

Supongamos lo contrario que a no es un vértice de corte. Entonces existe un camino \mathcal{C} que une e con b (por ejemplo). En consecuencia las aristas (b, c) , (c, a) y (a, e) , o bien (b, c) , (c, d) , (d, a) y (a, e) según si \mathcal{C} es de longitud impar o par, forman junto con \mathcal{C} un ciclo impar de longitud al menos cinco, lo cual no puede suceder. Por lo tanto a es un vértice de corte, es decir, H' verifica la propiedad cuatro.

Si $w \geq 5$ entonces H' contiene un clan $\{a, b, c, d, e\}$ de cardinalidad cinco. El ciclo $\{a, b, c, d, e\}$ contradice la hipótesis b. Por lo tanto este caso queda excluido.

$c) \Rightarrow a)$ Demostraremos que G es perfecta por inducción sobre el número de vértices de G .

Para $n = 1, 2$ es claro que se cumple. Supongamos que G satisface $c)$ y $|V(G')| < n$ entonces G' es perfecta.

Sea G tal que $|V(G)| = n$ y satisface $c)$. Es decir H cumple con alguno de los cuatro casos especificados.

Observación. Podemos suponer que H es conexa, ya que si no la demostración se haría para cada componente conexa de H .

Analicemos los cuatro casos posibles:

1) H es una gráfica bipartita. Un clan de G corresponde a una estrella $S(u)$ de H (capítulo uno). Por lo tanto la cardinalidad máxima de un clan de G corresponde al grado máximo de H . Por el teorema de König-Hall ([5] capítulo 7) para gráficas bipartitas podemos afirmar que existe un apareamiento que satura a todos los vértices de grado máximo. Este apareamiento corresponde en G a un subconjunto independiente de vértices que se encuentran en todos los clanes de cardinalidad máxima. Por hipótesis de inducción, esto es cierto para todas las subgráficas de G . Por lo tanto G es fuertemente perfecta, de lo que se deduce que G es perfecta.

2) H es el clan K_4 (Ver Figura No.2). Sean a_1, a_2, \dots, a_6 , $i=1, 2, \dots, 6$ las aristas de H . Sea a un vértice de H ,

$\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ el conjunto de todas las aristas de H adyacentes a a , es decir, \mathcal{A} es la estrella de a y $\mathcal{B} = (a_4, a_5, a_6)$ el conjunto de todas las aristas no adyacentes a a . \mathcal{A} y \mathcal{B} inducen en G dos clanes que cubren todos sus vértices, ya que: $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = A(G)$. \mathcal{A} por ser una estrella de cardinalidad tres va a dar a un clan de la misma cardinalidad y por último \mathcal{B} es un triángulo, por lo tanto va a dar a también a un triángulo (ver capítulo uno). Por lo tanto su complemento G^c es bipartita. Por el teorema 3.1. se deduce que el complemento de una gráfica perfecta es perfecta y como las gráficas bipartitas son perfectas, podemos concluir que G es perfecta.

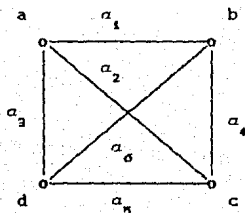


FIGURA No. 2

3) H tiene exactamente $p + 2$ vértices $x_1, x_2, \dots, x_p, a, b$ tal que $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ es independiente y $\{x_1, a, b\}$ generan un clan ($j=1, 2, \dots, p$). En este caso llegamos a la misma conclusión que el inciso anterior utilizando el mismo procedimiento, tomando en este caso \mathcal{A} el conjunto de todas las aristas adyacentes a a y \mathcal{B} el conjunto de todas las aristas adyacentes a b menos la arista (a, b) .

4) H tiene un vértice de corte a . Sea H_1 una componente conexa de $H - a$. Las aristas adyacentes a a y H_1 forman en G un clan de corte donde las partes son por hipótesis de inducción perfectas. Utilizando el teorema 3.3, obtenemos que G es perfecta. ■

Teorema No. 3.2. Una gráfica de líneas de una gráfica H es perfecta si y sólo si es núcleo-perfectible.

Demostración: Dado que G es una gráfica de líneas, G no contiene como subgráfica inducida a $K_{1,3}$ (Beineke, teorema 1.6.) entonces G satisface la conjetura fuerte de las gráficas perfectas (toda gráfica tal que no contiene a $K_{1,3}$ como subgráfica inducida cumple con la conjetura fuerte de las gráficas perfectas (K.R. Parthasarathy y G.Ravindra [28])). por lo tanto G es núcleo-perfectible, ya que G es perfecta y satisface la conjetura de las gráficas perfectas.

Recíprocamente, supongamos que G es perfecta. Demostraremos por hipótesis de inducción que G es núcleo-perfectible.

Para $n = 1, 2$ es claro que se cumple. Supongamos que G' es perfecta y $|V(G')| < n$ entonces G' es núcleo-perfectible.

Sea G perfecta tal que $|V(G)| = n$.

Como G es perfecta, H cumple con una de las cuatro propiedades

del teorema 3.5.

Si H cumple con dos o tres, utilizando la demostración del teorema anterior (incisos 2 y 3) obtenemos que el complemento de G es una gráfica bipartita. Por lo tanto G es el complemento de una gráfica fuertemente perfecta, estas gráficas son núcleo perfectibles.

Si H cumple con cuatro entonces por la demostración anterior (inciso 4) G es un clan de corte. Sea D una orientación por pozos de G . Por hipótesis de inducción, las partes de D que corresponden a este conjunto de corte son núcleo perfectibles. Como este conjunto es un clan, el teorema 3.4, nos permite concluir la núcleo-perfección de D .

Si H es una gráfica bipartita entonces G es una gráfica tal que no contiene a $K_{4,3}$ (configuración excluida de todas las gráficas de líneas) y no contiene a $K_4 - e$ (ya que implicaría la existencia en H de un triángulo). En este caso el resultado es consecuencia del teorema siguiente:

Teorema No. 3.6. Si G es una gráfica perfecta tal que no contiene como subgráficas inducidas las gráficas $K_{4,3}$ y $K_4 - e$ entonces G es núcleo-perfectible.

Demostración: La demostración la haremos por inducción sobre el

número de vértices de G .

Para $n = 1, 2$ es claro que se cumple.

Supongamos que G' es una gráfica tal que $|V(G')| < n$ y no contiene como subgráficas inducidas a $K_{1,3}$ y $K_4 - e$ entonces G' es núcleo-perfectible.

Sea G una gráfica tal que $|V(G)| = n$ y satisface las hipótesis del teorema.

Sea D una orientación por pozos de G . Supongamos en primer término que D no posee aristas simétricas.

Como G no contiene a $K_{1,3}$ ni a $K_4 - e$, todo vértice de G aparece en a lo más dos clanes maximales.

Sea x un vértice de G tal que aparece en un sólo clan maximal de G . Sus vecinos forman un clan de corte en G . Por hipótesis de inducción este clan de corte y las componentes conexas que quedan al quitar dicho clan son núcleo-perfectibles, por lo tanto, utilizando de nuevo el teorema 3.4 tenemos que D es núcleo-perfectible.

Supongamos que todo vértice de G aparece en exactamente dos clanes maximales. Sea \mathcal{A} un clan maximal de G , x un pozo de \mathcal{A} en D (este es único ya que D no contiene aristas simétricas) y \mathcal{B} el segundo clan que contiene a x . Demostraremos que x es una fuente de

\mathcal{B} en D . En caso contrario, sea s la fuente de \mathcal{B} en D . La subdigráfica $D - s$ tiene un núcleo N por hipótesis de inducción. Si $x \in N$, por ser fuente s en D , x es su vecino exterior, por lo tanto N es núcleo de D . Si $x \notin N$, entonces existe $t \in N$ tal que es vecino exterior de x . Pero todos los vecinos exteriores de x están en $\mathcal{B} - s$, por lo tanto t es un vecino exterior de s en D , por lo que concluimos que N es núcleo de D .

Por lo tanto el conjunto \mathcal{P} de los pozos de clanes maximales de D está contenido en el conjunto de las fuentes de dichos clanes maximales.

Como éstos dos conjuntos tienen la misma cardinalidad (todo clan posee exactamente un pozo y una fuente) podemos concluir que son iguales.

Sea H la subdigráfica de D generada por los vértices de \mathcal{P} . Cada vértice x de H cumple que $\delta_H^-(x) = 1$ y $\delta_H^+(x) = 1$, ya que cada clan tiene exactamente un pozo y una fuente. Por lo tanto H es una digráfica donde cada componente conexa es un ciclo dirigido par, ya que G es perfecta.

Sean H_1, H_2, \dots, H_k dichos ciclos dirigidos. Cada H_i tiene exactamente dos núcleos Q_i y R_i , los cuales forman una bipartición de H_i . Escogeremos un núcleo N_i de cada H_i de manera que $\bigcup_{i=1}^k N_i$ sea un núcleo de D , el cual también es un núcleo de H .

Si $D \cong H$, la elección de N_i dentro de cada H_i es indiferente.

Si $D \not\cong H$ entonces $\exists x \in D - H$ tal que x no es ni pozo ni fuente de un clan de D , x por hipótesis aparece en dos clanes \mathcal{A} y \mathcal{B} de D , los cuales poseen cada uno un pozo y una fuente. Sean P_A, F_A, P_B, F_B respectivamente dichos pozos y fuentes. Estos cuatro son los únicos vecinos de x en H .

Si estos cuatro vértices aparecen en la misma componente H_i de H , la elección de H_i es indiferente a x . En efecto un núcleo N_i de H_i contiene siempre uno de los dos vértices P_A o P_B . Si no sucede esto significa que P_A y P_B están a distancia par en H . Entonces podemos obtener un ciclo dirigido impar en H_i de P_A a F_B utilizando las flechas (F_B, x) y (x, P_A) . Ya que la longitud del camino dirigido de P_A a P_B es par, implica que de P_A a F_B sea impar, al agregar las dos flechas anteriores obtenemos el ciclo dirigido impar. Este ciclo no tiene ninguna diagonal debido a que H_i no posee, x es solamente vecino de P_A y F_B en el ciclo y, F_A y F_B no pertenecen a este ciclo. Lo que corresponde dentro de G a un ciclo dirigido impar sin diagonales, lo cual contradice la perfección de G .

Si $x \in D - H$ tal que los pozos de los clanes a los cuales pertenece están en diferentes componentes, es decir, P_A y $F_A \in H_i$ y, P_B y $F_B \in H_j$ ($i \neq j$), a x se le llama vértice mixto, entonces tenemos, por ejemplo, que $F_A \in Q_i$, $P_A \in R_i$, $P_B \in Q_j$ y $F_B \in R_j$. Diremos que Q_i fuerza a Q_j (ya que si Q_i ha sido seleccionado para

formar parte del núcleo, x no tiene ningún sucesor en Q_i , estamos forzados a elegir Q_j para que x tenga a P_B como sucesor dentro del núcleo). Remarquemos que si Q_i fuerza a Q_j , entonces R_j fuerza a R_i . De manera general diremos que Q_i fuerza a Q_j si existe una serie $Q_i = Q_{i_0}, Q_{i_1}, Q_{i_2}, \dots, Q_{i_p} = Q_j$ tal que Q_{i_r} fuerza a $Q_{i_{r+1}}$ ($0 \leq r \leq p-1$).

Construiremos entonces el núcleo de la siguiente manera:

Elegimos como N_1 uno de los núcleos de H_1 . Para todas las componentes H_i donde N_1 fuerza un núcleo, llamamos N_i el núcleo de H_i forzado por N_1 . Si existe una componente, por ejemplo H_2 , donde N_1 no fuerza nada, escogemos arbitrariamente N_2 , después tomamos los núcleos N_j forzados por N_2 para las componentes H_j .

Iteramos este procedimiento hasta que toda componente H_i se le atribuya un núcleo N_i , por elección o bien por forzamiento. Para la coherencia de este procedimiento verifiquemos los puntos siguientes:

a) Si N_i fuerza a Q_m , no existe otro N_j ($j > i$) que fuerce a R_m en la misma componente H_m .

b) Un N_i no fuerza a la vez a Q_m y a R_m en una cierta componente H_m .

Para el inciso a), es suficiente constatar lo que sucede dentro

del caso contrario. Si, por ejemplo, $N_j = R_j$ y si N_j fuerza a R_m , entonces Q_m fuerza a Q_j , por lo tanto N_l fuerza a Q_j y por consecuencia no podemos elegir $N_j = R_j$.

Para el caso b), que N_l fuerce a Q_m significa que existe una serie $N_l = Q_{l_0}, Q_{l_1}, \dots, Q_{l_p} = Q_m$ tal que Q_{l_r} fuerza a $Q_{l_{r+1}}$ para un vértice mixto x_{l_r} . Si N_l fuerza a R_m implica que existe otra serie $N_l = R_{j_0}, R_{j_1}, \dots, R_{j_q} = R_m$, tal que R_{j_s} fuerza a $R_{j_{s+1}}$ para un vértice mixto y_{j_s} ($0 \leq s \leq q-1$). Deducimos entonces un ciclo dirigido impar utilizando x_{l_0} después x_{l_1} , etc., hasta un vértice t de Q_m , posteriormente tomamos el camino de Q_m entre t y un vértice u de R_m , continuamos por u hasta y_{j_0} (a través de los R_{j_s} y los y_{j_s}). Después nos seguimos de y_{j_0} hasta x_{l_0} . Este ciclo no contiene diagonales, ya que de otro modo obtendríamos una subgráfica inducida $K_{t,3}$ o $K_4 - e$. Este ciclo dirigido corresponde en G a un ciclo impar sin diagonales lo cual contradice su perfección.

La definición de forzamiento implica que todo vértice mixto de $D - H$ tenga un sucesor en $\bigcup_{i=1}^k N_i$, por lo cual constituye un núcleo de D .

Finalmente revisaremos el caso donde D posee arcos simétricos. Sea (a,b) una arista de G que esta orientada simetricamente en

D. Como G no contiene como subgráfica inducida a $K_4 - e$, esta arista aparece en un sólo clan \mathcal{A} de G , ya que el que pertenezca a dos clanes nos genera dicha gráfica (tomando un vértice de cada clan junto con los otros dos de dicha arista).

Sea x_0 un pozo de \mathcal{A} en D , sea x_1 un pozo de $\mathcal{A} - (x_0)$, continuando de esta manera sea x_j un pozo de $\mathcal{A} - (x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$. Prosigamos de este modo hasta tomar en cuenta el último vértice de \mathcal{A} . Tomemos $a = x_i$ y $b = x_j$, con $i < j$. Al suprimir la flecha (a, b) obtenemos una digráfica D_1 , la cual es una orientación por pozos de G . En efecto si C es un clan de D_1 tenemos dos casos posibles:

1) C no contiene a la vez a a y b . Entonces C es un clan de D que no es afectado por la supresión de la flecha (a, b) . Por lo tanto C posee un pozo en D .

2) C contiene a a y b . Entonces $C \subset \mathcal{A}$ y el pozo de C es el vértice x_k tal que $k = \min \{ m \mid x_m \in C \}$.

Iterando este procedimiento para cada par de flechas simétricas de D , obtenemos finalmente una digráfica D' tal que es una orientación por pozos de G , sin ninguna flecha simétrica. Entonces D' tiene un núcleo N . Las flechas simétricas al regresar a D no afectan en nada a la independencia de N . Por lo que N es núcleo de D .

Por lo tanto si H es una gráfica bipartita (caso 4) entonces G es núcleo-perfectible.

Por lo que podemos concluir que G es núcleo-perfectible. ■

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Aigner, *On the linegraph of a directed graph*, Math.Z. 102 (1967), p.p. 56-61.

[2] L. W. Beineke and R. J. Wilson, *Selected Topics in Graph Theory*, Academic Press, London (1978), p.p. 271-305

[3] L. W. Beineke, *Characterizations of derived graphs*, J. Combinatorial Theory 9 (1970), p.p. 129-135.

[4] L. W. Beineke, *On derived graphs and digraphs*, in Beiträge zur Graphentheorie (ed. H. Sachs et al.), Teubner-Verlag, Leipzig (1968), p.p. 17-23.

[5] C. Berge, *Graphs*, North-Holland, Amsterdam (1985).

[6] C. Berge, *Graphs and hypergraphs*, North-Holland, Amsterdam, and American Elsevier, New York (1973).

- [7] C. Berge, *La fonction de Grundy d'un graphe infini*, C. R. Acad. Sciences, Paris 242 (1956), p.p. 1404-1405.
- [8] G. Chartrand and Linda Lesniak, *Graphs and Digraphs*, Wodsworth and Brooks, California (1986), p.p. 261-270.
- [9] V. Chvátal, L. Lovász, *Every Directed Graph has a Semi-Kernel*, Hypergraph Seminar (Berge, Ray-Chaudhuri, eds.) Lecture Notes in Math., Springer Berlin 411 (1972), p.p. 175.
- [10] P. Duchet, *Représentation: noyaux en théorie des graphes et hypergraphes*, Thèse, Paris (1979).
- [11] P. Duchet, Y.O. Hamidoune et H. Meyniel, *Sur les quasi-noyaux d'un graphe*, Discrete Math. 65 (1987), p.p. 231-235.
- [12] M. E. Fisher, *Critical probabilities for cluster size and percolation problems*, J. Math. Phys. 2 (1961), p.p. 620-627.
- [13] H. Galeana Sánchez, *A theorem about a conjecture of H. Meyniel on Kernel Perfect graphs*, Discrete Mathematics 59 (1986), p.p. 35-41, North-Holland.
- [14] H. Galeana Sánchez and V. Neumann Lara, *On kernels and Semikernels of Digraphs*, Discrete Mathematics 48 (1984), p.p. 67-76, North-Holland.

- [15] P. M. Grundy, *Mathematics and Games*, Eureka, 2 (1989), 6-8.
- [16] F. Harary and R. Z. Norman, *Some properties of line digraphs*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 9 (1960), p.p. 161-168.
- [17] M. Harminc, *Solutions and Kernels of a directed graph*, Math. Slovaca 32, No. 3 (1982), p.p. 263-267.
- [18] R. L. Hemminger, *Line Digraphs*, in *Graph Theory and Applications*, Lecture Notes in Mathematics 303 (ed. Y. Alavi et al.), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972, p.p. 149-163.
- [19] R. L. Hemminger and J. B. Klerlein, *Line pseudodigraphs*, J. Graph Theory 1 (1977), p.p. 365-377.
- [20] G. Heuchenne, *Sur une certaine correspondance entre graphs*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 33 (1964), p.p. 743-753.
- [21] J. Krausz, *Démonstration nouvelle d'un théoreme de Whitney sur les reseaux* (Hungarian with French summary), Mat. Fiz Lapok 50 (1943), p.p. 75-85.
- [22] L. Lovász, *Normal Hypergraphs and the weak Perfect-Graphs Conjectura*, Annals of Discrete Mathematics 21 (1984), p.p. 29-42.

[23] F. Maffray, *Sur l'existence de noyaux dans les graphes parfaits*, Thèse, Paris (1984).

[24] V. V. Menon, *The isomorphism between graphs and their adjoint graphs*, *Canad. Math. Bull.* 8 (1965), p.p. 7-15.

[25] V. Neumann Lara, *Seminúcleos de una digráfica*, *Anales del Instituto de Matemáticas II* (1971), U.N.A.M.

[26] J. Von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton Univ. Press, Princeton (1944).

[27] O. Ore, *Theory of Graphs*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. XXXVIII, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (1962).

[28] K. R. Parthasarthy and G. Ravindra, *The Strong Perfect Graph Conjecture is True for $K_{1,3}$ -free graphs*, *J. Comb. Theory B* 21 (1976), p.p. 212-223.

[29] P. I. Richards, *Precedence constraints and arrow diagrams*, *SIAM Rev.* 9 (1967), p.p. 548-553.

[30] M. Richardson, *Solutions of Irreflexive Relations*, *Annals of Math.* 58 (1953), p.p. 573-580.

[31] A. G. M. Van Rooij and H. S. Wilf, *The interchange graph of a finite graph*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar 16 (1965), p.p. 263-269.

[32] N. D. Roussopoulos, *A max (m,n) algorithm for determining the graph H from its line graph G*, Information Processing Lett.2 (1973), p.p. 108-112.

[33] Philippe Vincke, *Quasi-Kernels of minimum weakness in a graph*, Discrete Mathematics 20 (1977), p.p. 187-192.

[34] V. G. Vizing, *A Bound on the External Stability Number of a Graph*, Doklady A. N. 164 (1965), p.p. 729-731.

[35] H. Whitney, *Congruent graphs and the connectivity of graphs*, Amer. J. Math. 54 (1932), p.p. 150-168.