

PLANEACION DEL SISTEMA DE GENERACION Y  
TRANSMISION USANDO TECNICAS DE DESCOMPOSICION

ASESOR	APROBADA POR EL COMITE DOCTORAL:
<u>Dr. SERGIO FUENTES MAYA</u>	Presidente: <u>Dr. JESUS ACOSTA FLORES</u>
	Vocal: <u>Dr. SERGIO FUENTES MAYA</u>
	Vocal: <u>Dr. ALEJANDRO AFUSO HIGA</u>
	Vocal: <u>Dr. MIGUEL COBIAN SELA</u>
	Secretario: <u>Dr. FRANCISCO VENEGAS MARTINEZ</u>
Jefe de la DEPFI	Suplente: <u>Dr. FELIPE OCHOA ROSSO</u>
<u>Dr. FEDERICO KUHLMANN RODRIGUEZ</u>	Suplente: <u>Dr. EDUARDO ARRIOLA VALDES</u>

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## CONTENIDO

INTRODUCCION	1
CAPITULO 1. EL PROBLEMA DE PLANEACION DE GENERACION Y TRANSMISION	19
1.1 El problema de generación y transmisión y su aproximación DC	20
1.2 El problema de flujo de carga DC	25
1.3 Algunos problemas de planeación y su estrategia de análisis	29
1.4 Ventajas de las técnicas de descomposición en problemas de planeación	33
Anexo A1.1 Problemas relacionados	38
Anexo A1.2 Técnicas de análisis	41
CAPITULO 2. EL PROBLEMA DC Y SU SOLUCION	46
2.1 Un problema de redes de flujo	47
2.2 Algoritmo de solución caso cuadrático	50
2.3 Relación con el flujo de carga DC	54
2.4 Algoritmo de subgradientes para el flujo de carga DC óptimo	58
Anexo A2.1 Estructura de datos	62
Anexo A2.2 Detalles y comentarios sobre el algoritmo caso plezolineal	63
CAPITULO 3. EL PROBLEMA DE EXPANSION Y SU SOLUCION	68
3.1 Descomposición de Benders generalizada	69
3.2 Aplicación al problema de expansión	72
3.3 Derivación de los cortes de Benders	75
3.4 El problema maestro y su solución	78
Anexo A3.1 Comparación entre el modelo de expansión desarrollado y los de EPRI	82

CAPITULO 4. EL PROBLEMA DE PLANEACION Y SU SOLUCION	93
4.1 La técnica de descomposición	94
4.2 Modificación para el caso de generación y transmisión	97
4.3 Determinación de las K mejores soluciones	100
CAPITULO 5. EL SISTEMA DE PLANEACION SIPGT	104
5.1 Estructura y esquema de implantación del sistema SIPGT	105
5.2 Características del sistema en estudio	110
5.3 Análisis de resultados	117
5.4 Experiencia computacional	122
CAPITULO 6. Extensiones del trabajo	130
6.1 Planeación de la potencia reactiva	131
6.2 Asignación de unidades	138
6.3 Coordinación hidrotérmica	141
CONCLUSION	146
BIBLIOGRAFIA	
A. Sistemas eléctricos y su planeación	147
B. Técnicas de optimización	150

## INTRODUCCION

Un recurso básico en el desarrollo de la sociedad actual es la electricidad en sus diferentes manifestaciones y usos. La ausencia de este recurso resulta ser una limitante al crecimiento de los diferentes sectores productivos y de servicios que requiere la vida moderna. El sector energético, constituido fundamentalmente por PEMEX y la CFE (COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD), ha sido un consumidor mayor de energía: consumió en 1987 el 31% de la oferta interna bruta. La participación del sector energético en el PIB (producto interno bruto) ha crecido en México: del 2.6% en 1960 a 5.9% en 1985, experimentando la electricidad el crecimiento más dinámico: 0.6% del PIB en el primer año y 1.9% en el último [UNA83], [PAL90].

Por su parte, el sector eléctrico enfrenta el reto de aumentar la eficiencia y la disponibilidad de las plantas generadoras y disminuir pérdidas en transmitir la electricidad. La generación y suministro de energía eléctrica tienen características peculiares que lo hacen diferente de otros sectores energéticos. Esto hace que exista una amplia variedad de problemáticas tanto técnicas como económicas cuyos métodos de análisis requieren un enfoque especial.

El inicio básico de los trabajos que conducen al descubrimiento y uso masivo de la electricidad se remonta a la última década del siglo pasado. En 1882, Thomas Alva Edison construye la primera estación central de energía eléctrica, basada en el principio de corriente directa, en ciudad de Nueva York. Como consecuencia de este acontecimiento se origina una intensa batalla sobre la mejor forma de generar y suministrar energía eléctrica. Existían básicamente dos partidarios, los que apoyaban la generación y transmisión de corriente directa y los iniciadores de corriente alterna. Debido principalmente a la invención de transformadores, estos últimos ganan la

batalla y se inicia la instalación de centrales de generación en las principales ciudades americanas. Sin embargo en los últimos años, el mejoramiento de la técnica de conversión de corriente hace que la corriente directa empieza a entrar de nuevo en el sistema de transmisión, ya que se presenta ahorros al transmitirla a grandes distancias.

Existen otros aspectos básicos de un sistema eléctrico de generación y transmisión de energía eléctrica que conviene señalar:

El primero es que la electricidad no es como otros recursos que pueden almacenarse y el proveedor de la misma tiene poco control sobre la demanda de energía en cualquier instante. Esto hace que se hable de sistemas de generación de energía por unidad de tiempo o bien de potencia.

El segundo aspecto es que existe un aumento continuo de la demanda de potencia, aunque la tasa de crecimiento ha bajado en los últimos años. Esto origina adiciones masivas a la capacidad de generación de los sistemas existentes.

El tercer aspecto es la dificultad para compatibilizar la distribución de potencia pues las fuentes de generación a veces están demasiado lejanas de los centros de consumo que crecen espacialmente y de manera desordenada. Esto origina problemas técnicos y económicos con la distribución de potencia.

El último aspecto está relacionado con las consideraciones ambientales que deben tomarse en cuenta, especialmente cuando tratamos de la generación de energía por medios nucleares y térmicos.

Conviene señalar algunas estadísticas técnicas y económicas relacionadas con la ingeniería eléctrica de varios países. Dado que las características técnicas son similares [SUL77, WOO84], muchas de estas estadísticas se pueden inferir adecuadamente en todo el mundo y tener una estimación del desarrollo futuro de México en este importante sector. En la figura 1, se muestra el patrón de crecimiento de las instalaciones eléctricas en los Estados Unidos, mientras que en la figura 2, se muestra el pronóstico del crecimiento de la demanda en México. Para esta última figura, el consumo bruto de servicio público (que además de la generación bruta incluye algunos intercambios con el extranjero y con autoprodutores nacionales) creció a una tasa de 8.7% anual entre 1970 y 1975 y a un 6.4% real anual entre 1980 y 1985. En el

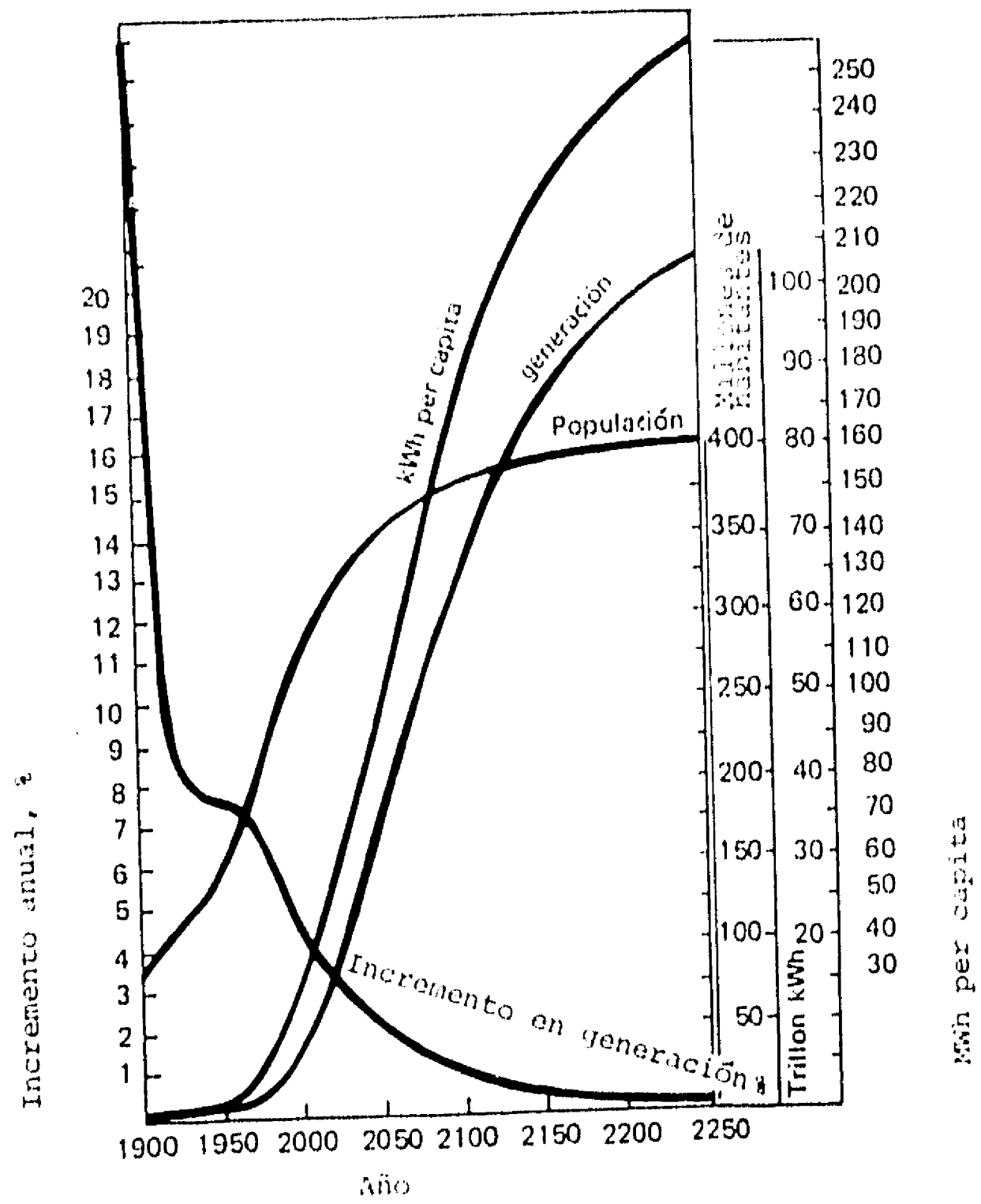


Figura 1 Patrón de crecimiento del sistema eléctrico

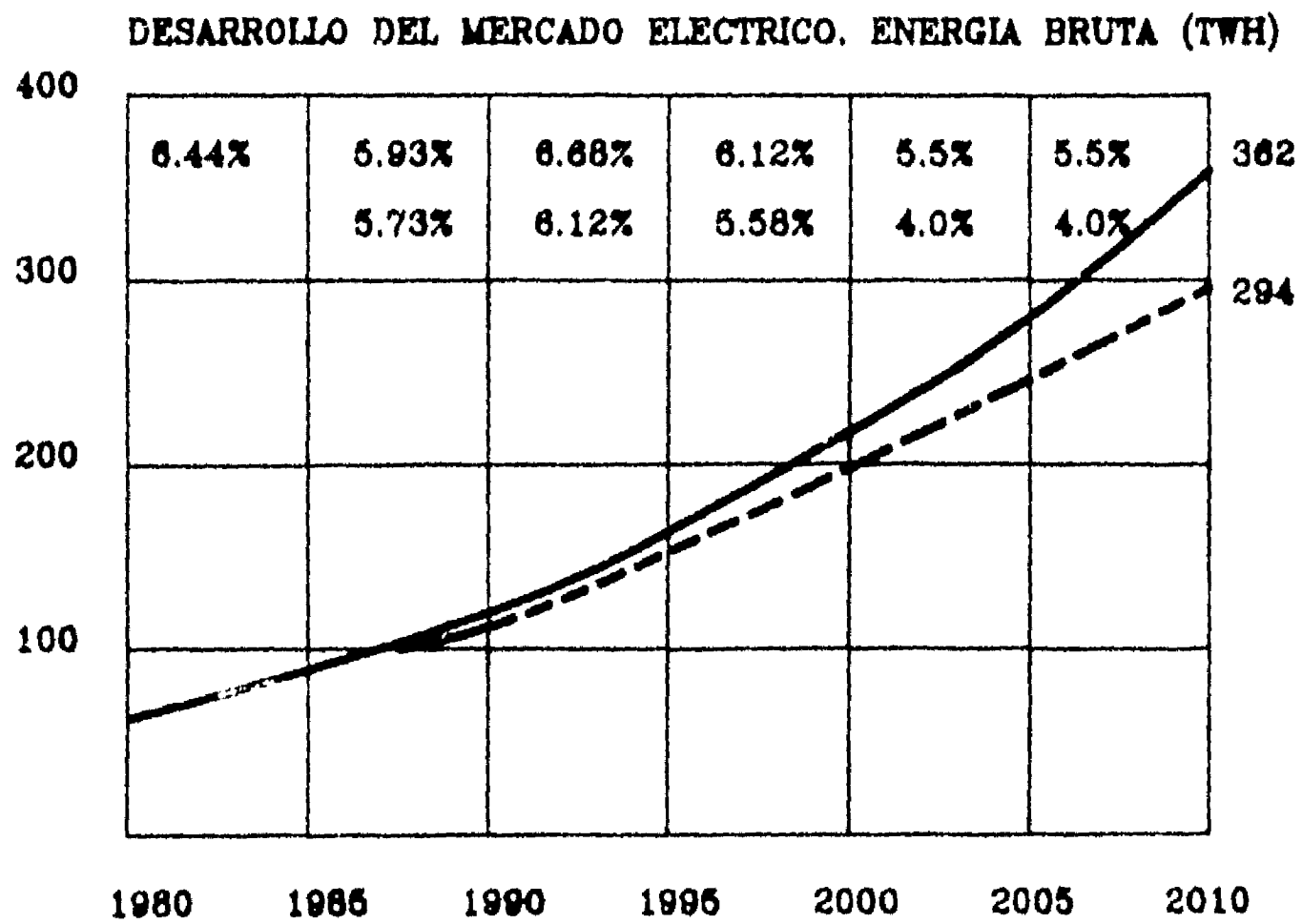
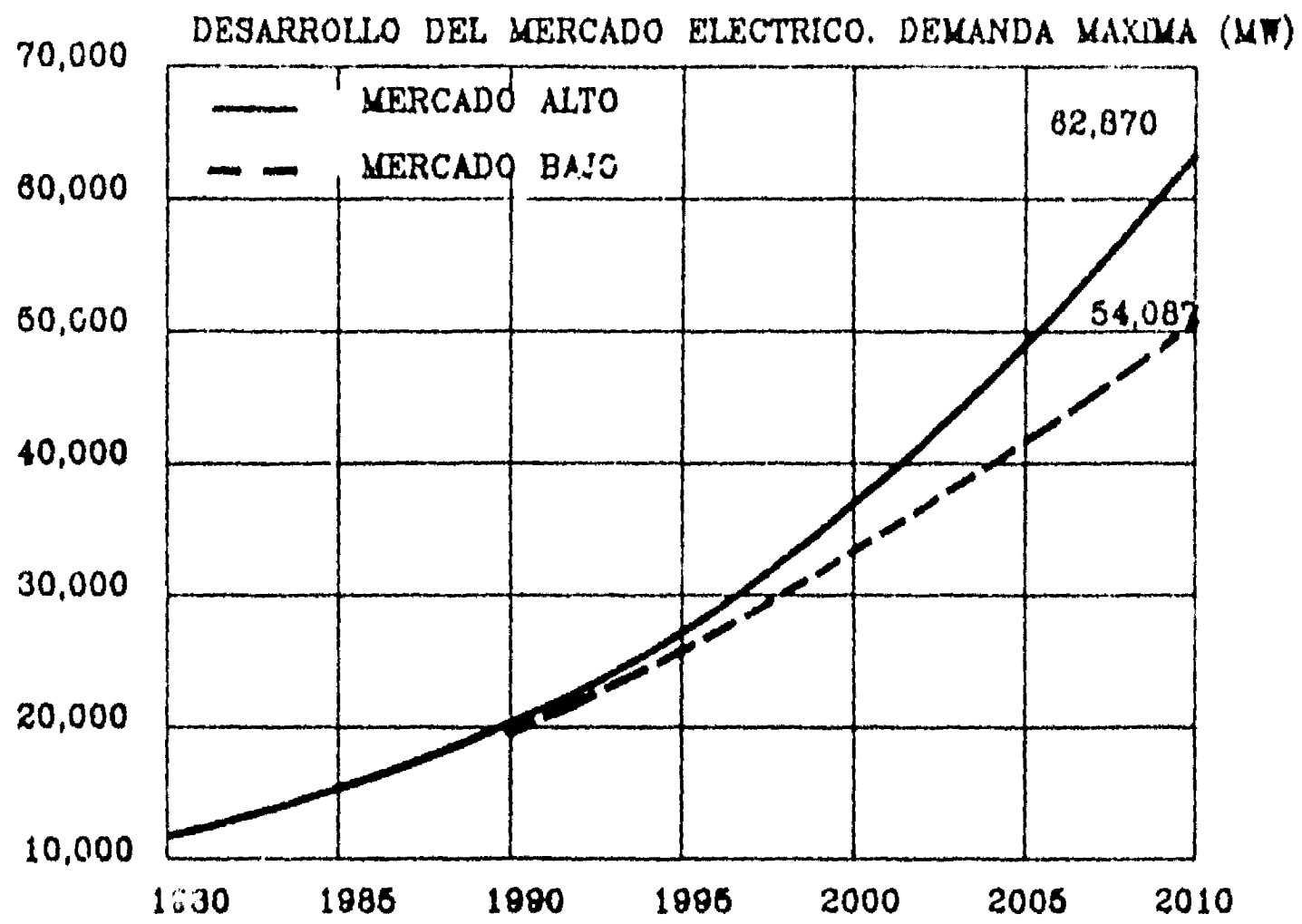


FIGURA 2. CRECIMIENTO DE LA DEMANDA EN MEXICO



período 1982 a 1988 ha sido de 5.6%. La demanda, pues, ha sido creciente y en vista de las tasas registradas en los últimos años no parece ser menor que el 4.9% en promedio.

La estructura de un sistema eléctrico de potencia es muy grande y compleja. Sin embargo sus componentes o subsistemas pueden identificarse como: 1) generación, 2) transmisión y 3) distribución. En el subsistema de generación, se produce la potencia empleando las unidades de generación térmica, hidroeléctrica o nuclear. La potencia generada es llevada en el subsistema de transmisión hasta las subestaciones de distribución. Luego, el subsistema de distribución se encarga de hacer la transferencia de la energía eléctrica desde el subsistema de transmisión hasta el consumidor. En las figuras 3 y 4, se refleja el peso de los subsistemas.

Un análisis del costo de operación también nos puede dar la importancia de la planeación y la operación óptima de un sistema eléctrico. En la siguiente tabla, se muestra el porcentaje del gasto en la industria eléctrica británica.

	%
Costo de capital	
Depreciación	18
Interés	17
Combustible	44
Operación y mantenimiento	15
Transmisión	1
Administrativa etc.	5
	-----
	100

En México, el costo total de inversión se reparte en un 56%, 22% y 22%, respectivamente para generación, transmisión y distribución.

En la tabla 1, podemos observar fácilmente que las plantas térmicas han denominado el subsistema de generación. En México que es un país rico en recursos hidrológicos, actualmente la generación hidroeléctrica es casi una quinta parte de la generación total. En 1988 el Sistema Interconectado Nacional (SIN) de México contaba con una potencia instalada de 23.912 GW, habiendo generado 93.35 TWh [PAL90]. De esta energía, el 20.4% fue producido

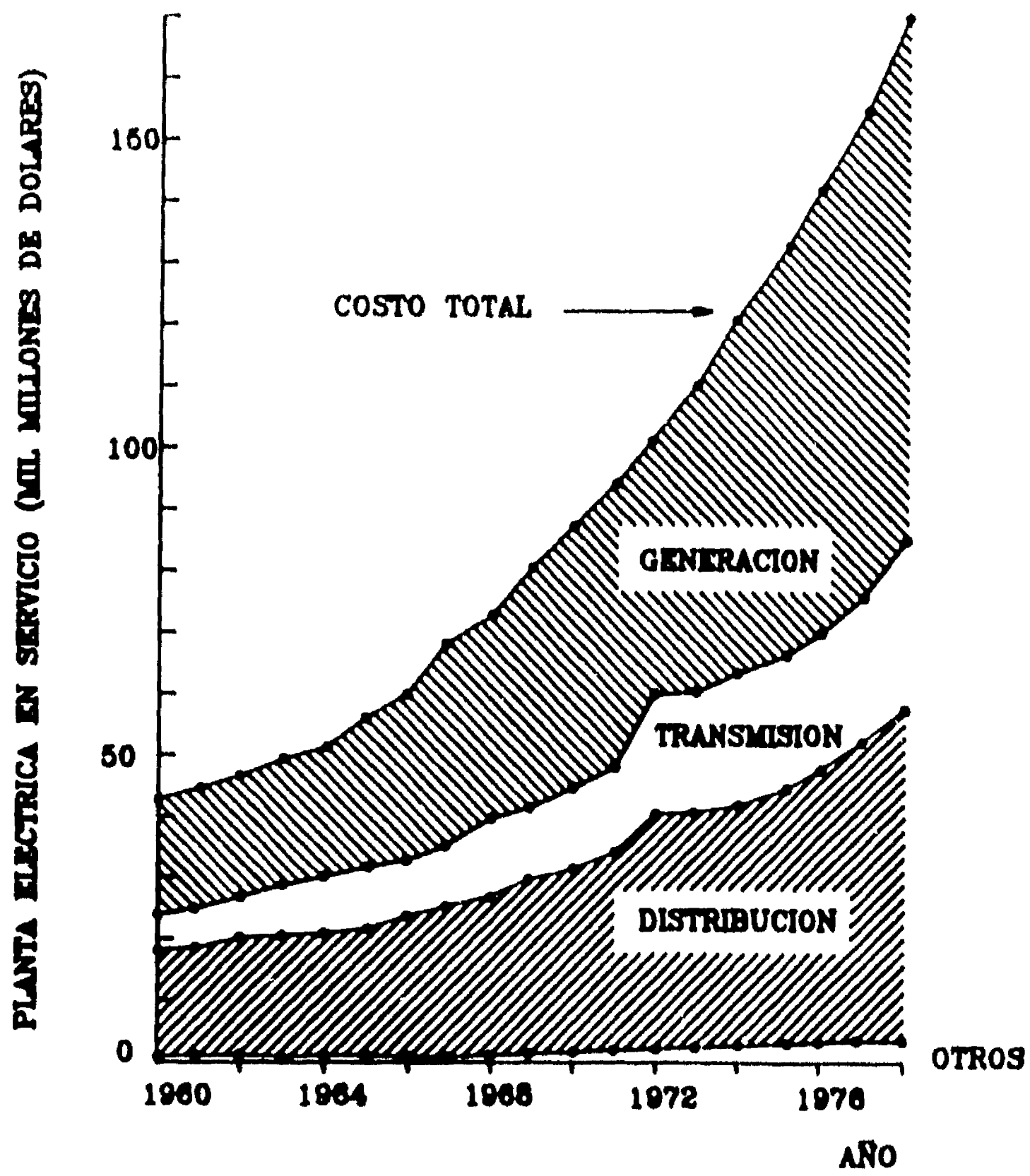


Figura 3 PESOS DE LOS SUBSISTEMAS EN PLANTA ELECTRICA (mil.)

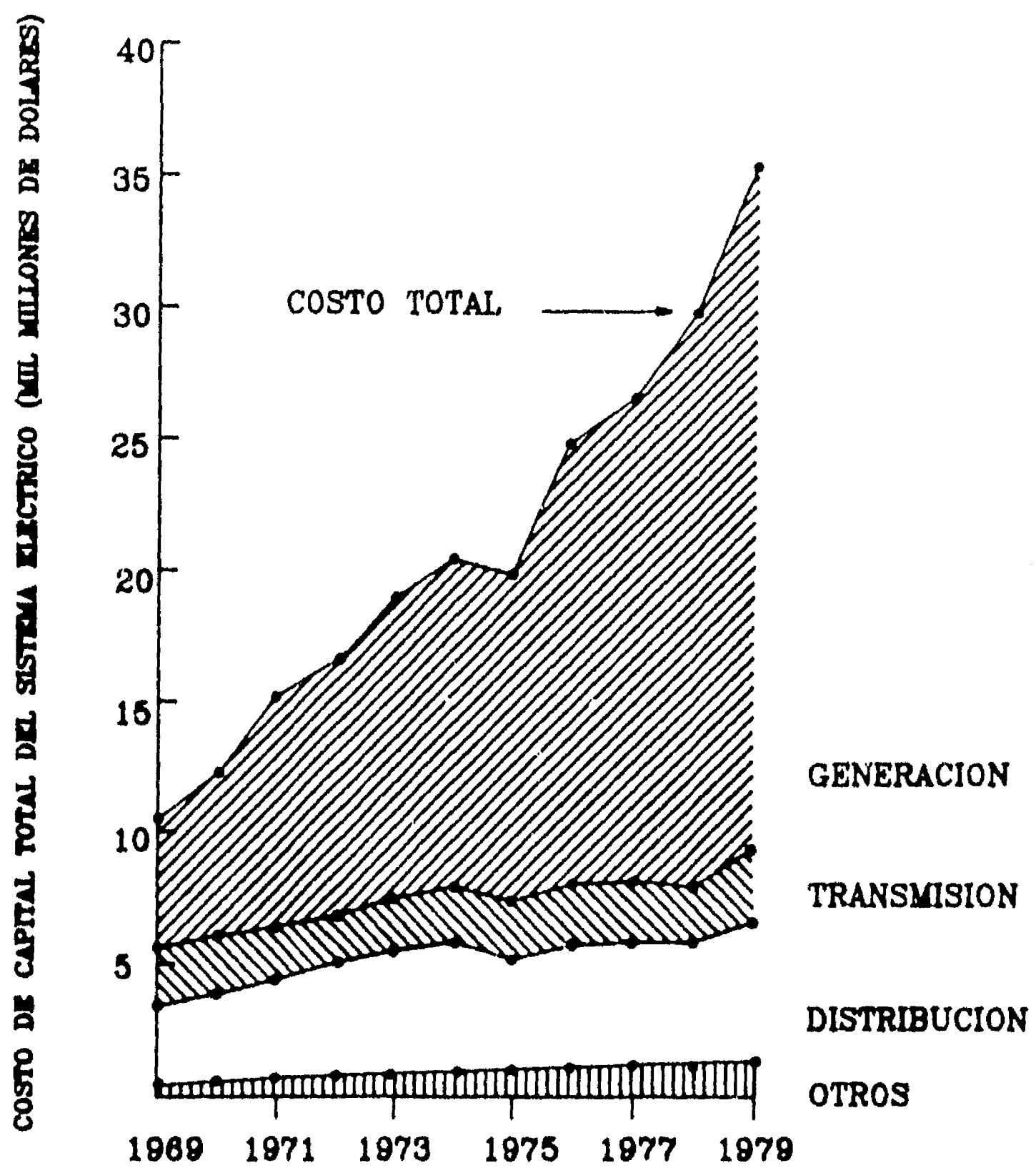


Figura 4 PESOS DE LOS SUBSISTEMAS EN COSTO DE CAPITAL

año	vapor convencional	%	hidro	combustión % interna	turbina de gas	%	nuclear	%	geo- térmica	%	total		
1960	132.5	79	32.4	19	2.8	2	0	0	0.3	0	—	0	168.0
1961	141.8	78	35.5	20	3.0	2	0	0	0.4	0	—	0	180.7
1962	150.0	78	37.3	20	3.0	2	0	0	0.7	0	—	0	191.1
1963	165.7	79	40.2	19	3.2	2	0.6	0	0.7	0	—	0	210.5
1964	175.0	79	42.2	19	3.5	1	0.9	0	0.9	0	—	0	222.3
1965	186.6	79	43.8	19	3.4	1	1.4	1	0.9	0	—	0	236.1
1966	195.4	79	45.0	19	3.5	1	2.0	1	1.9	1	—	0	247.8
1967	211.1	78	48.1	19	3.8	1	3.3	1	2.9	1	0.1	0	269.3
1968	226.8	78	51.2	18	4.0	1	6.2	2	2.8	1	0.1	0	291.3
1969	242.2	77	52.8	17	4.2	1	10.1	3	4.0	1	0.1	0	313.3
1970	260.0	76	55.1	16	4.4	1	15.5	5	6.5	2	0.1	0	341.6
1971	277.8	75	55.9	15	4.5	1	21.9	6	8.7	2	0.2	0	368.9
1972	294.1	74	56.4	14	4.8	1	27.7	7	15.3	4	0.3	0	398.6
1973	320.6	73	62.0	14	5.0	1	33.4	8	21.0	5	0.4	0	442.4
1974	337.3	71	63.6	13	5.0	1	39.6	8	31.6	7	0.4	0	477.6
1975	352.9	69	65.9	13	5.1	1	44.1	9	39.8	8	0.6	0	508.3
1976	367.9	69	67.7	13	5.3	1	46.6	9	42.9	8	0.6	0	531.0
1977	387.8	69	68.7	12	5.3	1	47.9	9	49.9	9	0.6	0	560.2
1978	399.5	69	71.0	12	5.5	1	49.0	8	53.5	9	0.6	0	579.2
1979	411.7	69	75.3	13	5.5	1	50.6	9	53.7	9	0.7	0	597.5

Tabla 1 Capacidad de generación instalada (millones de KW)

año	vapor convencional	%	hidro	combustión % interna	%	turbina de gas	%	nuclear	%	geo- térmica	%	total	
1960	132.5	79	32.4	19	2.8	2	0	0	0.3	0	—	0	168.0
1961	141.8	78	35.5	20	3.0	2	0	0	0.4	0	—	0	180.7
1962	150.0	78	37.3	20	3.0	2	0	0	0.7	0	—	0	191.1
1963	165.7	79	40.2	19	3.2	2	0.6	0	0.7	0	—	0	210.5
1964	175.0	79	42.2	19	3.3	1	0.9	0	0.9	0	—	0	222.3
1965	186.6	79	43.8	19	3.4	1	1.4	1	0.9	0	—	0	236.1
1966	195.4	79	45.0	19	3.5	1	2.0	1	1.9	1	—	0	247.8
1967	211.1	78	48.1	19	3.8	1	3.3	1	2.9	1	0.1	0	269.3
1968	226.8	78	51.2	18	4.0	1	6.2	2	2.8	1	0.1	0	291.3
1969	242.2	77	52.8	17	4.2	1	10.1	3	4.0	1	0.1	0	313.3
1970	260.0	76	55.1	16	4.4	1	15.5	5	6.5	2	0.1	0	341.6
1971	277.8	75	55.9	15	4.5	1	21.9	6	8.7	2	0.2	0	368.9
1972	294.1	74	56.4	14	4.8	1	27.7	7	15.3	4	0.3	0	398.6
1973	320.6	73	62.0	14	5.0	1	33.4	8	21.0	5	0.4	0	442.4
1974	337.3	71	63.6	13	5.0	1	39.6	8	31.6	7	0.4	0	477.6
1975	352.9	69	65.9	13	5.1	1	44.1	9	39.8	8	0.6	0	508.3
1976	367.9	69	67.7	13	5.3	1	46.6	9	42.9	8	0.6	0	531.0
1977	387.8	69	68.7	12	5.3	1	47.9	9	49.9	9	0.6	0	560.2
1978	399.5	69	71.0	12	5.5	1	49.0	8	53.5	9	0.6	0	579.2
1979	411.7	69	75.3	13	5.5	1	50.6	9	53.7	9	0.7	0	597.5

Tabla 1 Capacidad de generación instalada (millones de KW)

con centrales hidroeléctricas, el 67.1% con unidades de vapor-combustóleo, de ciclo combinado, y turbinas de gas, geotermoeléctricas con 4.6% y vapor-carbón (7.9%). Fuera del SIN había 1.9 GW instalados y la generación, de 8.4 TWh se realizó en un 64% con unidades de vapor-combustóleo, un 31% con centrales geotérmicas y el 5% restante con turbinas de gas y motores diesel (Tabla 2). La producción de energía a base de centrales hidroeléctricas se ha visto afectada por los bajos niveles de lluvias registrados en los años de 1986 a 1988. En consecuencia, ha aumentado la generación basada en hidrocarburos. Con año hidrológico medio, la generación hidroeléctrica hubiera sido del orden del 26% del SIN.

También es evidente el rápido crecimiento de las plantas nucleares en la tabla 1 y la figura 5. Como el comportamiento de la curva de costo de generación nuclear es similar a la de generación térmica, se debe enfocar mayor atención en este tipo de costos que en su mayoría es de forma cuadrática.

En 1988 las ventas alcanzaron 81.89 TWh, en tanto que consumos propios, pérdidas de transmisión y distribución fueron 17% de la generación bruta. El 15.7% de la energía fue consumida por clientes comerciales, el 50% por pequeñas industrias, comercio e industria mayor y un 10.8% por los sectores público y agrícola. El total de clientes llegó a 14.8 millones [PAL90].

En la tabla 3, se presentan datos relevantes del sector eléctrico Nacional que introducen al lector a las generalidades de la operación del sistema mexicano en su evolución reciente: 1974-1988: consumos medios por tipo de servicio. Mientras que en la tabla 4, se muestra las ventas por tipo de servicio en México.

Se calcula que una planta térmica de 1000MW cuesta como US\$300,000,000, y una línea de transmisión de mediana longitud cuesta US\$60/kW, si se requiere transmitir 1000MW de potencia, el costo es US\$60,000,000. Por tanto si una solución es 1% mejor que otra, esto ya significa un ahorro de orden de 3 millones de dolares.

Antes de describir el problema de planeación del sistema de generación y transmisión, conviene conocer las características más relevantes de las principales componentes de dicho sistema.

Tabla 2 GENERACION BRUTA EN MEXICO (GWH, 1988)

	HIDRO-ELECTRICA	TERMoeLECTRICA						TOTAL
		vapor	ciclo combinado	turbogas	combustión interna	geotermo-eléctrica	carbo-eléctrica	
Sector eléctrico nacional	20 778	60 838	7 046	474	73	4 661	8 035	101 905
Sistema eléctrico nacional	20 778	60 208	7 046	459	-	4 661	8 035	101 187
Sistema interconectado nacional	20 778	56 986	7 046	289	-	213	8 035	93 347
Sistema interconectado norte	1 566	22 141	2 273	242	-	-	8 035	34 257
Area noroeste	1 176	8 524	-	8	-	-	-	9 708
Area norte	23	5 145	829	173	-	-	-	6 170
Area noreste	367	8 472	1 444	61	-	-	8 035	18 379
Sistema interconectado sur	19 212	34 845	4 773	47	-	213	-	59 090
Area central	5 294	15 200	2 211	21	-	-	-	22 726
Area occidental	1 046	18 814	955	25	-	213	-	21 053
Area oriental	12 872	831	1 607	1	-	-	-	15 311
Baja california norte	-	1 190	-	17	-	4 448	-	5 655
Peninsular	-	2 032	-	153	-	-	-	2 185
Centrales aisladas	-	630	-	15	73	-	-	718

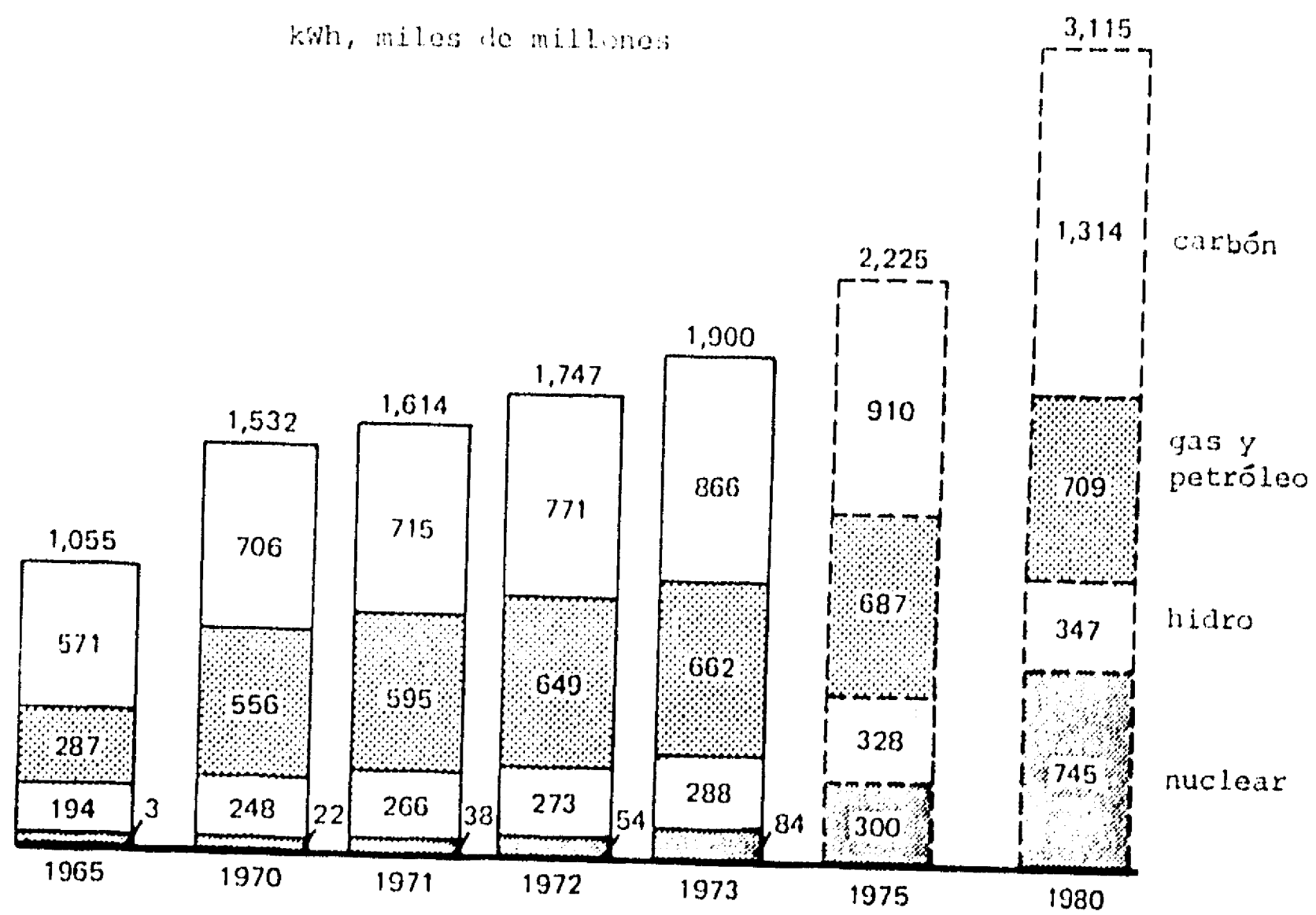


Figura 5 Recursos Energéticos para la industria eléctrica



Tabla 3 CONSUMOS MEDIOS POR TIPO DE SERVICIO EN MEXICO (KWh/usuario-mes)

AÑO	RESIDENCIAL	COMERCIAL	INDUSTRIAL	SERVICIOS	AGRICOLA
1974	79	359	81,255	6,352	9,409
1975	81	360	80,451	6,139	8,905
1976	84	367	80,498	6,361	8,337
1977	88	372	82,033	7,312	8,137
1978	96	397	86,724	7,821	8,372
1979	101	402	85,979	7,504	8,558
1980	103	412	80,318	7,452	8,551
1981	107	423	79,675	7,360	7,823
1982	112	429	76,505	7,368	8,836
1983	109	403	73,255	6,608	7,523
1984	107	400	75,721	6,213	7,278
1985	109	404	77,411	6,269	7,302
1986	109	396	75,216	6,327	7,485
1987	108	394	77,433	6,313	7,711
1988p	110	391	78,231	5,989	7,707

NOTA

p cifras preliminares

Tabla 4 VENTAS POR TIPO DE SERVICIO EN MEXICO (GWH)

AÑO	RESIDENCIAL	COMERCIAL	INDUSTRIAL	SERVICIOS	AGRICOLA	TOTAL*
1974	5,509	4,073	17,752	2,453	2,069	32,054
1975	6,056	4,224	19,202	2,619	2,257	34,567
1976	6,706	4,429	21,205	2,891	2,437	37,888
1977	7,362	4,657	23,085	3,160	2,652	41,159
1978	8,269	5,022	25,271	3,296	2,935	45,058
1979	9,210	5,404	27,521	3,437	3,328	49,197
1980	10,038	5,821	28,744	3,677	3,746	52,301
1981	11,211	6,265	31,731	3,932	3,842	57,044
1982	12,511	6,657	33,254	4,220	4,801	61,457
1983	12,979	6,526	34,300	3,888	4,440	62,217
1984	13,411	6,718	37,471	3,894	4,646	66,233
1985	14,285	7,004	40,115	4,131	4,982	70,614
1986	15,079	7,057	40,948	4,332	5,413	74,288
1987	15,712	7,155	44,071	4,506	6,006	79,491
1988p	16,825	7,303	46,893	4,456	6,409	83,881

NOTA

\* TOTAL incluye energía para reventa y exportación

p cifras preliminares

#### A. CARACTERISTICAS DE LAS UNIDADES DE GENERACION

El subsistema de generación consiste de unidades de generación de potencia eléctrica. Asociada a cada unidad térmica, existe una curva llamada *curva de entrada-salida* que describe la relación entre el combustible necesario y la potencia generada. La mayoría de estas curvas es de forma cuadrática convexa. Si se multiplica el costo unitario de combustible por la cantidad de combustible requerida para una cantidad determinada de potencia demandada, se obtiene la función de costo que es también cuadrática.

Con propósito de disminuir la pérdida de potencia en las líneas de transmisión, se usan los transformadores para elevar el voltaje de la corriente después de que ésta es generada. Cabe señalar que cuando se considera la expansión de las unidades de generación, los transformadores normalmente están diseñados para tales unidades, esto es, el costo de transformador está incluido en el costo de la construcción de la unidad de generación.

En el subsistema de generación que es el componente más importante de un sistema eléctrico, los aspectos principales que requieren planeación son:

- a) Selección de la ubicación, tipo y la dimensión de unidades de generación.
- b) Uso de recursos limitados para la generación tales como agua, combustible.
- c) Asignación de unidades para la operación y el mantenimiento.

#### B. CARACTERISTICAS DE LAS LINEAS DE TRANSMISION

El subsistema de transmisión hace la transferencia de potencia de alto voltaje desde el subsistema de generación hasta el subsistema de distribución. Cuando la potencia eléctrica pasa por una línea de transmisión, incurre una pérdida de forma cuadrática.

En un sistema eléctrico el voltaje en cada nodo (*bus*) es un número complejo, i.e., aparte de la magnitud, existe un ángulo de defasamiento. Basado en los modelos establecidos y los cálculos, la potencia transmitida está sujeto a la restricción del ángulo de voltaje que se describe detalladamente en 1.1.

En el subsistema de transmisión, como se maneja voltajes muy altos para evitar la pérdida de la potencia, existe muchas restricciones sobre la potencia transmitida y la potencia reactiva que se genera por diversos dispositivos. De tal manera, los problemas más importantes en este subsistema son:

- a) Diseño de la red de transmisión.
- b) Adquisición de derecho del suelo para la línea de transmisión.
- c) Compensación de la potencia reactiva para regular el voltaje.

#### C. CARACTERISTICAS DE LA RED DE DISTRIBUCION

El subsistema de distribución conduce la energía eléctrica desde el subsistema de transmisión hasta los usuarios. La diferencia entre la distribución y transmisión consiste principalmente de las distancias, las magnitudes de voltaje que se maneja ya que en la transmisión, los valores de estas variables son mucho mayor. En la distribución, la red normalmente tiene forma radial, i.e. como un árbol de expansión mientras que en la transmisión las líneas pueden formar circuitos (mallas). Sin embargo, si se modela este subsistema, generalmente existe un número muy grande de variables. Con la planeación del subsistema de distribución se intenta programar su desarrollo para satisfacer la demanda futura en forma económica, con fiable y en el rango de calidad preestablecido. Para lograr esto, se resuelve una serie de subproblemas. Entre los que destacan los siguientes [AFU84]:

- a). Programar la expansión de subestaciones de distribución.
- b). Programar la expansión de alimentadores primarios.
- c). Diseñar el conjunto transformador-red secundaria.

#### D. CARACTERISTICA EN EL ASPECTO DE CONFIABILIDAD

El subsistema de generación es un sistema *coherente* en el sentido de que cuando se mejora el funcionamiento de sus componentes, no se deteriora el funcionamiento del sistema. Mientras más unidades de generación de potencia dispongamos, más con fiable se encuentra el sistema.

Sin embargo para el subsistema de transmisión, el sistema no es coherente por las restricciones de ángulo de voltaje que hemos mencionado [MOS84]. Mientras más líneas de transmisión se agrega, no necesariamente logramos una mejor confiabilidad. Por lo tanto, la evaluación de la confiabilidad es mucho más complicada.

Como el análisis de confiabilidad es demasiado complejo para el SGT, muchas veces se sustituye por el análisis de *contingencias*. Esto es, se considera un conjunto de posibles situaciones de fallas en los componentes, se calcula las consecuencias, y se busca una solución para cada situación.

El problema de la planeación del sistema eléctrico es minimizar el costo sujeto a las restricciones siguientes:

- a) Satisfacer la demanda estimada en los años futuros
- b) Satisfacer las restricciones eléctricas
- c) Mantener una confiabilidad adecuada

El análisis y la planeación de los tres subsistemas eléctricos en conjunto son bastante complejos. Por ejemplo, un subsistema de distribución de tamaño como la ciudad de Morelia, podría contener 3,500 variables binarias y 24,000 variables continuas. Sin embargo, esto es un solo nodo para el subsistema de transmisión. Debido a esta complejidad, el análisis del sistema eléctrico se efectúa separadamente.

Dadas las características del sistema, en el sentido estricto, cualquier planeación, programación de operación es complicada, ya que el problema fundamental: Flujo de carga óptimo (FCO) es un problema difícil de resolver. Como se indica en el artículo "Operations Research: the next decade" [CON88]:  
- Los métodos de propósito especial utilizados para resolver tales problemas en los 1960s eran lentos y no confiables, y su funcionamiento pobre deja la conclusión de que los problemas FCO de tamaño real nunca serán resueltos eficientemente. La programación cuadrática secuencial de propósito general y el método secuencial de restricciones lineales han aplicado a FCO en los pasados 4 años tan exitosamente que estos métodos ahora son utilizados en la industria de potencia.- Aún así, con el software del estado de arte para programación no lineal MINOS implantado en una computadora PDP 11/780, se tarda 35-60 minutos en resolver problemas de tamaño mediano. Lo anterior implica que todavía existe una distancia entre la aplicación de tiempo real que requiere solución en menos de 10 minutos.

Al momento de resolver un problema de planeación en el sistema eléctrico, el FCO sólo es una subrutina. Como FCO no es un problema de programación convexa, hace mucho más difícil la planeación de cualquier índole. Por tanto se usa ampliamente aproximaciones tal que FCO sea de programación convexa. Consecuentemente, la dificultad de los problemas como asignación de unidades, coordinación hidrotérmica depende de la aproximación utilizada.

La planeación del sistema es todavía más difícil si se considera el aspecto de confiabilidad y el análisis de sensibilidad. Es difícil convertir la confiabilidad en restricciones explícitas del problema de optimización. Por tanto, este problema se resuelve principalmente con simulación, analizando las contingencias para cada configuración del sistema.

El otro aspecto que atrae mucha atención últimamente es la planeación

Integral. Tal problema puede ser programar la expansión conjunta de instalaciones de potencia real y reactiva, instalaciones de generación y transmisión, análisis estadístico con base de datos, etc.

En la década de los años 70 y al principios de los 80, los avances en programación matemática consisten en la madurez de la teoría de la optimización de redes de flujo, programación entera y programación no lineal. Las novedades más grandes durante este periodo han sido el desarrollo de la optimización no diferenciable, y la fusión de programación matemática con la teoría de gráfica, de ahí nació la optimización combinatoria y el estudio de la complejidad computacional.

Una parte de estos avances se resume en la teoría recién desarrollada llamada programación monotrópica. El formato general del problema monotrópico consiste en optimización de funciones no diferenciables, convexas y separables. Las restricciones del problema en consideración pueden ser cualquier sistema lineal. Apoyado en la teoría de dualidad y la programación no lineal, este análisis ha sido capaz de generar un conjunto de algoritmos que resuelven el problema monotrópico. Estos algoritmos especializados en la optimización de redes de flujo y combinados con la estructura de datos avanzada, pueden ser 300 veces más rápidos que el uso del método de Simplex normal.

Otro resultado de estos avances de la programación matemática es el desarrollo de las técnicas de descomposición. Con estas técnicas un problema complejo puede ser descentralizado y analizado por medio de subproblemas más sencillos; lo que hace posible aplicar algoritmos de propósito especial para estos subproblemas. Una de las técnicas que nos sirve de gran utilidad para la planeación es la descomposición de etapas. Normalmente la dimensión del problema de expansión crece exponencialmente con respecto al número de etapas en consideración, si no usamos técnicas especiales para resolverlo. Un método de descomposición se describe en [AFU84], con el cual se disminuye considerablemente el esfuerzo computacional en la planeación de subsistema de distribución eléctrica.

En esta tesis se trata de aplicar los avances de programación matemática y desarrollar técnicas de optimización apropiadas en el sector eléctrico. Se analiza y se resuelve la planeación de generación y transmisión conjuntamente. Las aportaciones más importantes son:

1. Desarrollo de un algoritmo para resolver el problema de optimización de flujo en una red donde los costos son convexos diferenciables y las pérdidas son cuadráticas.

2. Una técnica de descomposición de etapas para la planeación del sistema de generación y transmisión ya que se presenta cierta dificultad al intentar resolver estos dos problemas en conjunto.

3. Algoritmos eficientes para encontrar el conjunto de mejores soluciones tanto para el problema de expansión de una etapa como para el problema de planeación a largo plazo con lo que se pueda utilizar en la evaluación de confiabilidad, creación de escenarios etc.

4. Una Formulación alternativa del problema de flujo de carga DC y la descomposición de éste en subproblemas de flujo en redes, y luego resolverlo mediante técnicas de subgradientes y búsqueda direccional.

5. Implantación de los programas de computación. Tales programas han sido aplicados al estudio de un caso real. Se reporta la experiencia computacional en la planeación del sistema de generación y transmisión peninsular sureste de México.

6. Formulación de la optimización de la potencia reactiva, con la cual hace posible la planeación de los dispositivos de potencia reactiva junto con la selección de las alternativas de unidades de generación y líneas de transmisión.

Este trabajo se desarrolla como sigue:

En el capítulo 1, se formula el problema de planeación del sistema de generación y transmisión, así como los subproblemas asociados. Se describe la estrategia de análisis y se efectúa una revisión bibliográfica de los métodos existentes para dicha planeación.

En el capítulo 2, se desarrolla un algoritmo para optimizar el flujo en una red donde las pérdidas son cuadráticas, y se discute la aplicación de este algoritmo para optimizar el flujo de potencia.

En el capítulo 3, se aplica la descomposición de Benders generalizada al problema de expansión en una etapa, asimismo, las simplificaciones de esta técnica cuando se utiliza en la optimización del sistema de generación y transmisión.

En el capítulo 4, se desarrolla una modificación de una técnica de descomposición de etapas que reduce considerablemente el esfuerzo computacional y se describe algoritmos para encontrar el conjunto de las soluciones cercanas a la óptima.

En el capítulo 5, se describe la implantación computacional reflejada en el sistema denominado SIPGT, y se reporta los resultados y la experiencia computacional de un caso de estudio y los sistemas de prueba.

En el último capítulo, se estudia diversas posibilidades de aplicación del algoritmo desarrollado en otros problemas relacionados en el sistema eléctrico: planeación de la potencia reactiva, asignación de unidades y coordinación hidrotérmica.

---

## CAPITULO 1

---

### EL PROBLEMA DE PLANEACION DE GENERACION Y TRANSMISION

---

En un sistema eléctrico la parte más importante en cuanto a infraestructura y operación es el subsistema de Generación y Transmisión (SGT). Por otra parte, la operación adecuada del sistema eléctrico requiere resolver una serie de problemas técnicos y de planeación, algunos bien conocidos y analizados, así como otros de mayor complejidad. Para tal propósito resulta indispensable conocer la estructura y características tanto estructurales como operacionales del sistema, así como los objetivos y restricciones a que está sometido.

El problema de optimizar el costo de generación sujeto a las restricciones eléctricas en la transmisión es un problema complejo cuyas técnicas de solución actuales requieren una cantidad considerable de esfuerzo y tiempo de computación. Esto es de esperarse, pues el problema de optimización que se plantea es no convexo. Sin embargo, una simplificación de tipo práctico al analizar el problema de planeación de la generación y transmisión es considerar la potencia como un flujo. Equivalentemente, se efectúa una aproximación, denominada DC, que consiste en linealizar la relación entre la potencia real y los parámetros de voltaje. Esto permite una modelación accesible y la consideración de una estrategia de solución eficiente en algunos problemas de planeación.

Este capítulo se desarrolla como sigue: en la primera sección se describe el modelo de flujo de carga DC como instrumento de aproximación al modelo de optimización analizado en la generación y transmisión. La segunda sección describe el problema de flujo de carga óptimo DC y en la tercera, los problemas de planeación a considerar así como las estrategias de solución desarrolladas en este trabajo. En la cuarta sección se discute las ventajas del enfoque de descomposición adoptado en el análisis. Se anexa un resumen de los problemas más importantes de optimización relacionados en el sistema de generación y la revisión bibliográfica de los métodos actuales de planeación de un sistema eléctrico.

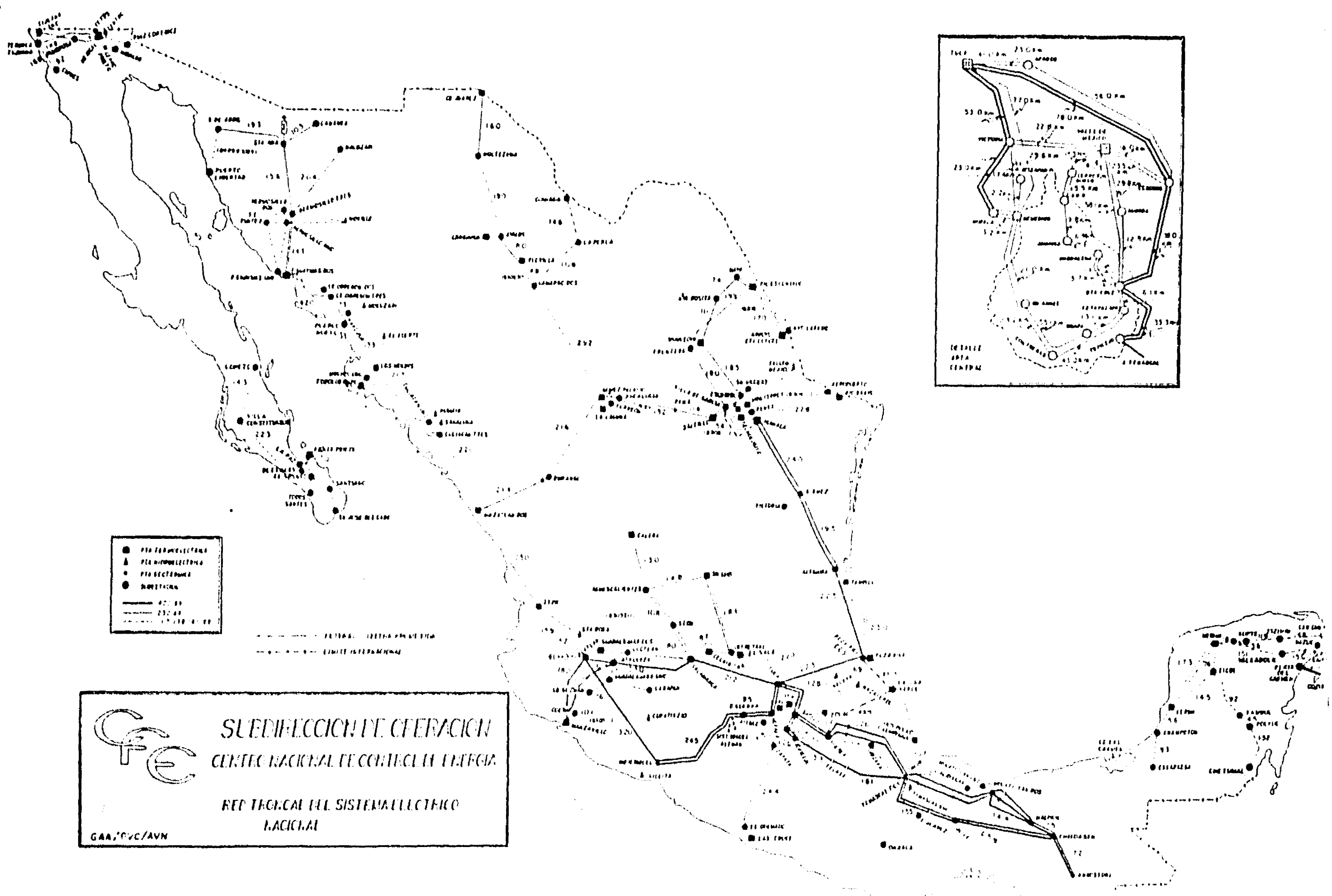


## 1.1 EL PROBLEMA DE GENERACION/TRANSMISION Y SU APROXIMACION DC

La planeación del sistema de generación y transmisión (SGT) es una de las etapas cruciales en el crecimiento del sistema eléctrico. Las decisiones hechas en esta etapa tiene grandes efectos sobre todas las otras fases del sistema y el desarrollo financiero del mismo. Una planeación adecuada del SGT debe prever el hecho que la capacidad de la instalación satisfaga las necesidades de energía y potencia de los consumidores a un precio razonable y con suministro confiable.

La dimensión del problema de optimización de potencia depende del nivel de detalle que se considere. Por ejemplo, en el caso del sistema de generación y transmisión interconectado mexicano (figura 1.1.1), en 1988 el Sector Eléctrico Nacional disponía de 175 centrales con un total de 552 unidades generadoras. La red de Alta Tensión comprendía 8380 Km de líneas en 400 kV, 15283 Km en 230 kV, 30217 Km entre 115 y 161 kV y 5309 Km entre 69 y 85 Kv. si asociamos una variable continua a la potencia real generada en cada nodo de generación, el número de estas variables es 175. Sin embargo si asociamos una variable continua a cada unidad de generación que la CFE tiene en operación, este número puede ascender hasta 552. Lo mismo sucede con las líneas de transmisión. La figura 1.1.1 muestra una configuración simplificada en la red de transmisión, pero una forma detallada de la misma red puede contener aproximadamente 300 líneas. En la figura 1.1.2, se muestra un sistema mayor de generación y transmisión que se consideran casi 500 líneas de transmisión. Al efectuar la planeación, el número de variables continuas puede incrementarse, ya que para una línea sujeta a expansión se debe considerar dos variables continuas, asociadas al flujo que puede ir en ambos sentidos de la línea (en caso de considerar únicamente potencia real), y una variable 0-1 asociada a la decisión de poner o no una línea. Esto incrementa la complejidad del problema.

En el sistema de generación y transmisión, existen ciertas restricciones sobre la potencia transmitida que se deben considerar explícitamente. Una de ellas es la famosa ley de Ohm en un circuito de corriente directa, esto es,  $E=Ir$  donde  $E$ ,  $I$  y  $r$  son el voltaje, la corriente y la resistencia respectivamente. Sin embargo, en el análisis de la corriente alterna, ésta tiene la forma senoidal y se debe representar por un número complejo que





**SUBDIRECCION DE OPERACION**  
**CENTRO NACIONAL DE CONTROL EN ENERGIA**  
**REGISTRAL DEL SISTEMA ELECTRICO NACIONAL**  
 GAA, P/C/AVM

Figura 1.1.1 Sistema de generación y transmisión de México

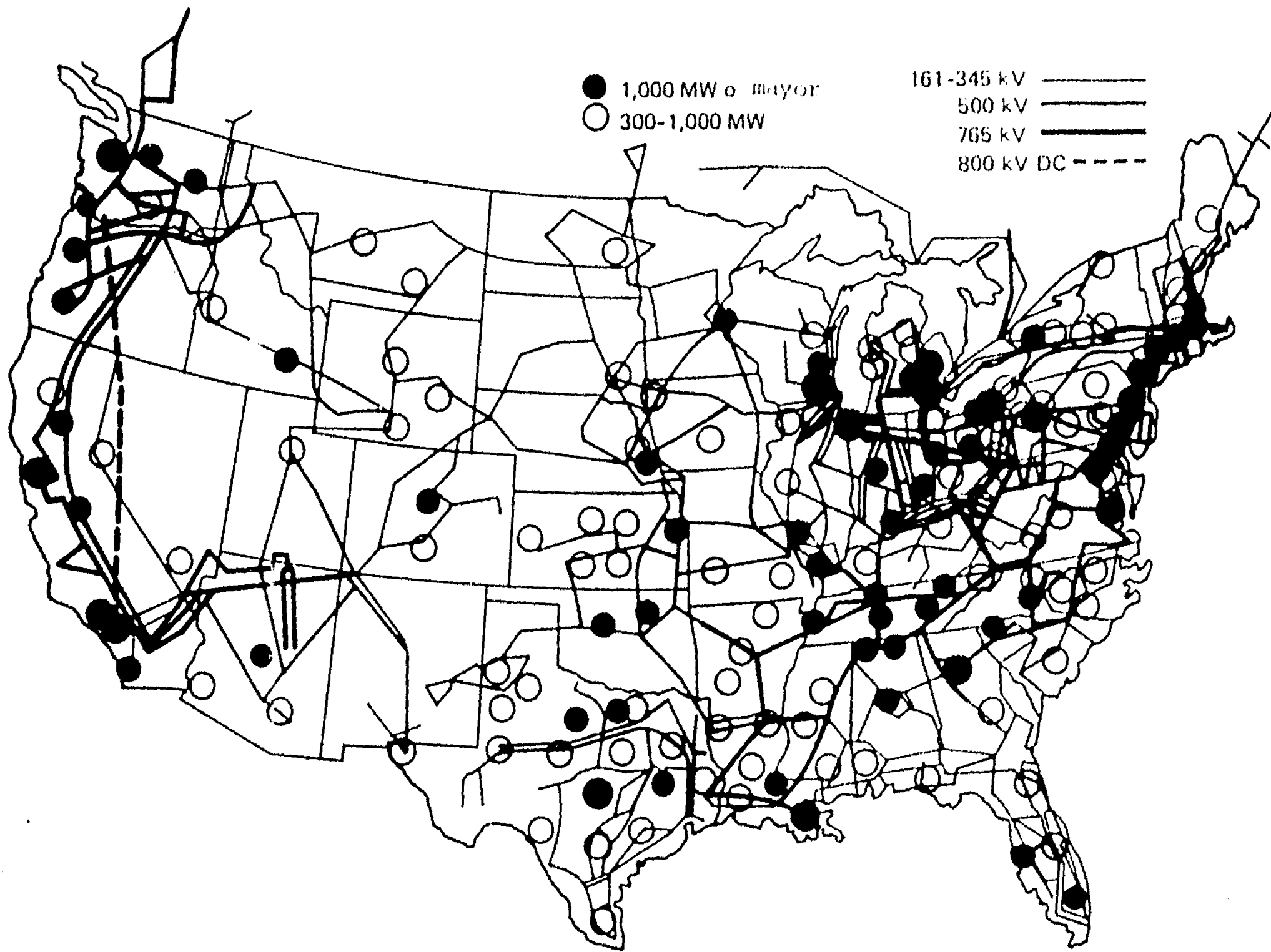


Figura 1.1.2 Sistema de generación y transmisión en los Estados Unidos

consiste de una magnitud y un ángulo. Dicha magnitud es el valor máximo de la corriente mientras que el ángulo es el defasamiento de la corriente con respecto a otra curva senoidal de referencia. Según la ley de Ohm se generaliza como  $E=IZ$  donde  $E$ ,  $I$ ,  $Z$  son el voltaje, la corriente y la impedancia respectivamente y son números complejos. La parte real de esta impedancia es precisamente la resistencia  $r$ . Como es de esperar, entre cualquier par de puntos donde haya conexión en el sistema eléctrico, se tiene que respetar esta ley.

En una red eléctrica en estado permanente, los voltajes y corrientes senoidales no estén necesariamente en fase y la potencia se maneja como una cantidad compleja que denotamos por  $EI^*$ , donde  $I^*$  es la conjugada de  $I$ . Es bien conocido que la parte real de  $EI^*$  es la potencia promedio consumida, o *potencia real*, mientras que la parte imaginaria es la *potencia reactiva* (o potencia que no se aprovecha).

Con el propósito de analizar el comportamiento de la potencia en una red eléctrica consideramos un circuito equivalente PI ( $\pi$ ) como se muestra en la figura 1.1.3 donde  $P_{ij}$ ,  $Q_{ij}$  denotan las potencias real y reactiva respectivamente;  $E_i$  es el voltaje complejo del bus  $i$  con ángulo  $\theta_i$ ;  $y_{ij}$  es la admitancia de la línea que consiste la parte real (conductancia)  $G_{ij}$  y la parte imaginaria (susceptancia)  $B_{ij}$ ; y  $B_{CAP ij}$  es la susceptancia de la línea con respecto a la tierra. La interpretación de esta equivalencia se debe a la interrelación entre los diversos elementos involucrados en la transmisión.

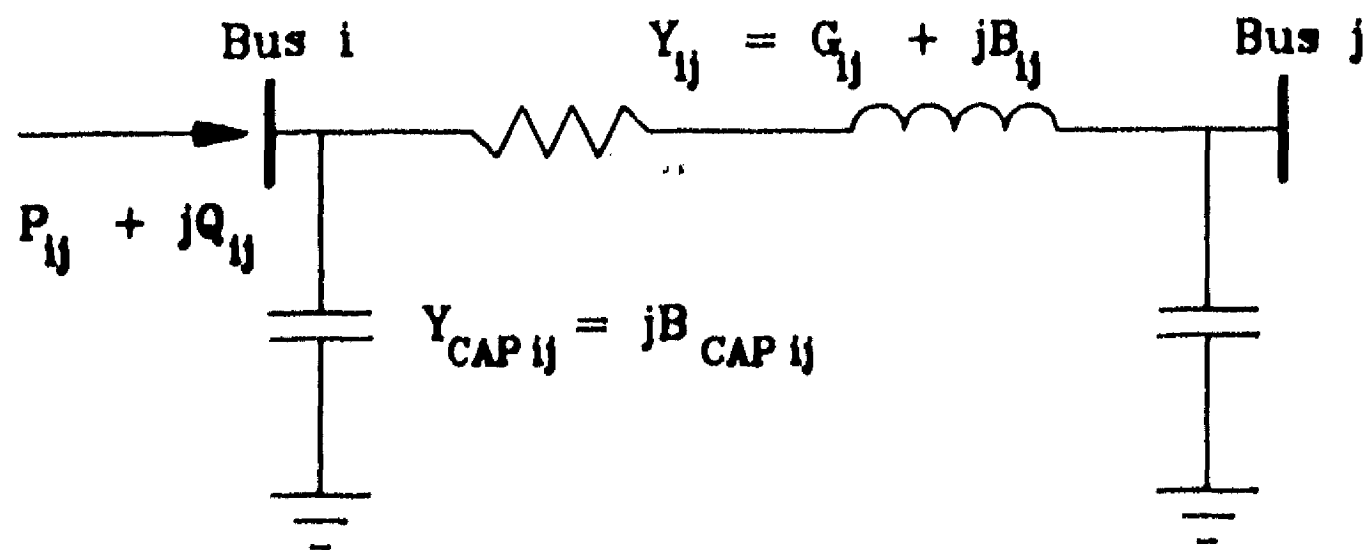


Figura 1.1.3 Circuito equivalente PI ( $\pi$ ) de una línea de transmisión

Específicamente la razón es como sigue: dos cuerpos de conducción separados por un aislante constituye un capacitor. Una línea de transmisión de corriente alterna consiste de tres conductores de potencia soportados arriba de la tierra, la cual es otro conductor. Por tanto se explica la existencia del capacitor  $Y_{CAP1J}$ . La reactancia en la línea es el resultado del campo magnético que existe entre los conductores cuando circula la corriente.

En el caso de un circuito PI la ecuación para la potencia que fluye por la línea en el bus  $i$  es:

$$\begin{aligned}
 P_{1J} + j Q_{1J} &= E_1 [(E_1 - E_J) y_{1J}]^* + E_1 [E_1 y_{CAP1J}]^* & (1.1.1) \\
 &= |E_1| \exp(j\theta_1) [ (|E_1| \exp(j\theta_1) - |E_J| \exp(j\theta_J)) (G_{1J} + jB_{1J}) ]^* - j |E_1|^2 B_{CAP1J} \\
 &= (|E_1|^2 - |E_1| |E_J| \cos(\theta_1 - \theta_J) - j |E_1| |E_J| \sin(\theta_1 - \theta_J)) (G_{1J} + jB_{1J})^* - j |E_1|^2 B_{CAP1J}
 \end{aligned}$$

De donde podemos implicar que

$$P_{1J} = G_{1J} |E_1|^2 - G_{1J} |E_1| |E_J| \cos(\theta_1 - \theta_J) - B_{1J} |E_1| |E_J| \sin(\theta_1 - \theta_J)$$

Una aproximación ampliamente utilizada al analizar el problema de flujo de carga de corriente alterna (AC) es el *flujo de carga "linealizado"* o "DC", que consiste linealizar la relación entre la potencia real y los parámetros de voltaje [WOO84]. Tal conversión supone:

1.  $|E_1| = |E_J| = 1$  p.u. En la realidad se controla el voltaje tal que  $.95 \leq |E_1| \leq 1.05$
2.  $G_{1J} = 0$ , Normalmente  $G_{1J}$  es menor que 0.06 de la susceptancia  $B_{1J}$ .
3.  $(\theta_1 - \theta_J)$  es muy pequeño y normalmente está dentro del rango  $(-0.2, 0.2)$ , por lo que

$$\cos(\theta_1 - \theta_J) \approx 1 \quad \sin(\theta_1 - \theta_J) \approx \theta_1 - \theta_J$$

Es por ello que  $P_{1J} = -B_{1J}(\theta_1 - \theta_J)$  y la pérdida en la línea de transmisión  $(1, J)$  es dada por  $r_{1J} P_{1J}^2$ . Como  $B_{1J}$  y  $r_{1J}$  son constantes, la potencia real transmitida en una línea está sujeto a restricciones lineales y tiene una pérdida cuadrática. Esto convierte el problema original a uno más simple de análisis de circuito en que la relación entre potencia y ángulo de voltaje es lineal.

En la práctica, las potencias en las líneas determinadas por el flujo de carga DC son suficientemente precisas en la etapa de planeación [PAD88]. Este método ha sido adoptado en un gran número de planes de expansión de transmisión por ser más sencillo que el asociado AC.

## 1.2 PROBLEMA DE FLUJO DE CARGA DC

En una red eléctrica, podemos considerar la potencia real transmitida como un flujo en una red, es decir, existe conservación de flujo de potencia en cada nodo. Sin embargo, una manera de considerar de forma sencilla tal pérdida consiste en representar a la línea de transmisión como dos arcos dirigidos con un escalar asociado para reflejar la pérdida de potencia. Específicamente considere la figura 1.2.1, donde  $\bar{x}_j$  denota la capacidad de la línea  $j$ ,  $r_j$  es el coeficiente de pérdida cuadrática. Si el flujo enviado desde el nodo inicial del arco  $j$  denotado  $s(j)$  es  $x_j$ , el flujo que llega al nodo final, denotado  $e(j)$ , es  $x_j - r_j x_j^2$ . Por otra parte, la potencia transmitida ( $x_j$ ) está sujeto a la restricción del ángulo de voltaje que equivale a cumplir

$$x_j = -B_j (\theta_{s(j)} - \theta_{e(j)})$$

La capacidad de una línea de transmisión  $j$  es el mínimo de la razón térmica y el límite de estabilidad de la línea. Esta última está dada en términos de la máxima diferencia permitida de ángulos de voltaje en sus extremos. Por tal razón, se requiere considerar una de las siguientes alternativas de límites:

- i) límite en la diferencia de ángulos:  $\theta_{s(j)} - \theta_{e(j)} \leq \bar{\theta}_j$
- ii) límite en la capacidad de flujo:  $x_j \leq \bar{x}_j$

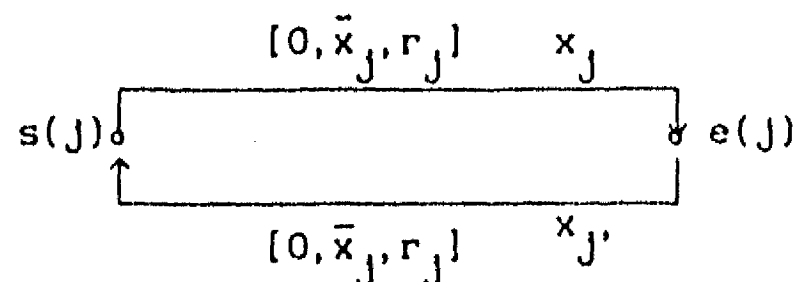


Figura 1.2.1 Representación de una línea de transmisión

Estas observaciones permiten formular matemáticamente el problema de flujo de carga óptimo DC como:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar } \sum_{l \in N_g} f_l(x_l) \\
 & \text{s. a.} \\
 (P1) \quad & \sum_{J \in \mathcal{J}} (x_J, -r_J x_J^2, -x_{J'}) + \sum_{J \in \mathcal{J}} (x_J - r_J x_J^2 - x_{J'}) \geq \begin{cases} d_l & l \in N_d \\ d_l - x_l & l \in N_g \end{cases} & (1.2.1) \\
 & x_J - x_{J'} = -B_J (\theta_{s(J)} - \theta_{e(J)}) \quad J \in \mathcal{J} & (1.2.2) \\
 & x_J x_{J'} = 0 \quad J \in \mathcal{J} & (1.2.3) \\
 & 0 \leq x \leq \bar{x} & (1.2.4)
 \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{J}$  denota el conjunto de líneas dirigidas de transmisión en la red;  $N_d$ , conjunto de buses de demanda;  $N_g$ , conjunto de buses de generación;  $d_l$ , demanda del bus  $l$ ;  $s(J)$ ,  $e(J)$ , los buses inicial y final de la línea  $J$ . El flujo de potencia en el sentido (contrario) de la línea de transmisión  $J$  se denota por  $x_J$  ( $x_{J'}$ ). Cada función de costo de producción se supone convexa y diferenciable y  $x_l$  ( $l \in N_g$ ) denota la potencia generada en el bus  $l$ . El vector de variables  $x = (x_J, x_{J'}, x_l \mid J \in \mathcal{J}, l \in N_g)$  es acotado por el vector de capacidad  $\bar{x}$ . La resistencia en la línea  $J$  es  $r_J$  mientras que la susceptancia es  $B_J$ .

En el modelo anterior podemos observar que la demanda de cada bus se satisface debido a (1.2.1), mientras que las ecuaciones (1.2.2) son las restricciones sobre el ángulo de voltaje; similares a la segunda ley de Kirchhoff. Las ecuaciones (1.2.3) obligan a que el flujo real vaya en una dirección. Conviene señalar que en otras formulaciones ([SHA85], [PER85]), toman las restricciones (1.2.1) en forma de igualdad. La formulación presentada aquí es ligeramente diferente en los siguientes aspectos [YOU89]:

<1> Se considera de una manera más exacta las funciones de costos de generación y se supone que estas son convexas y diferenciables.

<2> Se introdujo la desigualdad en la restricción sobre las demandas. El cambio de la igualdad por la desigualdad puede modificar la solución. Pero tal desigualdad se justifica por las siguientes razones:

i). El problema se convierte en uno de programación convexa y se aprovecha todos los aspectos estructurales de estos problemas por ejemplo, obtiene soluciones óptimas globales en lugar de locales.

ii). El costo por pérdida es implícitamente incluido en el costo de generación; si las restricciones (1.2.2) son ligeramente limitantes, es

decir, tienen los multiplicadores de Lagrange con valor pequeño, en la solución óptima, la igualdad se alcanza. Por ejemplo, en el sistema de prueba de seis buses de EPRI (ver los capítulos 2 y 5), los multiplicadores de sus tres circuitos fundamentales son (0.0215, 0.0031, -0.007). Los multiplicadores pequeños también significan que el valor objetivo óptimo es similar a su valor por no tomar en cuentas estas restricciones. En nuestro caso de estudio, cuando el flujo de carga DC tiene solución, la diferencia entre los valores objetivos con y sin restricciones de ángulo de voltaje es menos de 1%.

iii). El sobrante de la potencia real en un bus se disipa rápidamente por el sistema completo como se indica en Elgerd (p.274 de [ELG77]). Elgerd indicó que si existe un sobrante grande en un bus, este sobreflujo tiende a distribuir en todos los buses cerca de él. En la realidad, tal sobrante puede resolverse fácilmente por estimular la demanda o desgastarlo con algún dispositivo. Además, existe otra pérdida de la potencia real causada por la potencia reactiva transmitida. Entonces, la desigualdad se justifica con mayor razón.

iv). Es posible aplicar la técnica de descomposición de etapas. En la planeación multietapa, como las demandas son crecientes, una configuración factible en una etapa específica también factible para etapas anteriores. Sin embargo, si usamos la igualdad en la restricción, este principio puede fallar.

Regresando al problema (P1) conviene puntualizar que no es de programación convexa debido a las restricciones (1.2.3). Sin embargo, dicho problema es equivalente (Teorema 1.1) al siguiente problema convexo cuando optimizamos el flujo:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } \sum_{l \in N_g} f_l(x_l) \\ & \text{s.a.} \\ (P) \quad & \sum_{\substack{j \in J \\ s(j)=1}} (x_j - r_j x_j^2, -x_j) + \sum_{\substack{j \in J \\ e(j)=1}} (x_j - r_j x_j^2 - x_{j'}) \geq \begin{cases} d_l & l \in N_d \\ d_l - x_l & l \in N_g \end{cases} \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

$$\frac{x_j - x_{j'}}{B_j} + \sum_{L \in C_j^+} \frac{x_L - x_{L'}}{B_L} - \sum_{L \in C_j^-} \frac{x_L - x_{L'}}{B_L} = 0 \quad j \in J \setminus T \quad (1.2.6)$$

$$0 \leq x \leq \bar{x} \quad (1.2.7)$$

donde  $T$  es un árbol de expansión formado por las líneas de transmisión, i.e.



$T \subset J$ . Sea  $C_j$  el circuito único formado en la sub-red  $TU\{j\}$ .  $C_j^+$  es el conjunto de arcos del circuito en el mismo sentido que  $j$ ,  $C_j^-$  el conjunto de arcos en el sentido contrario de  $j$ .

En la formulación original (i.e. problema (P1)), las restricciones en los ángulo de voltaje  $\theta_1$  son  $x_j - x_{j'} = -B_j(\theta_{s(j)} - \theta_{e(j)})$  mientras que en el problema (P) las variables de ángulo de  $\theta_1$  son eliminadas debido a la formación de circuitos fundamentales (independientes) [YOU88-2]. Es por ellos que las restricciones (1.2.6) pueden ser vistas como *restricciones de ángulo de voltage*. Cabe mencionar que si la red no está conectada, el árbol  $T$  se reemplaza por árboles de expansión arbitrarios para cada componente.

Teorema 1.1: Los problemas (P1) y (P) son equivalentes.

Prueba: Divida ambos lados de (1.2.2) por  $-B_j$  y sume estas ecuaciones para cada circuito independiente formado por los arcos de  $J$ . Esto implica que

$$\sum_{L \in C} \frac{x_L - x_{L'}}{B_L} = 0$$

Forme un árbol de expansión  $T$  usando los arcos de  $J$ . Agregando cada  $j \in J \setminus T$ , se obtiene un circuito independiente. Por tanto las ecuaciones (1.2.2) y (1.2.6) son equivalentes. Falta demostrar que en la solución óptima de (P), se cumple que  $x_j x_{j'} = 0$ .

Supongamos que en la solución óptima de (P), existe un arco  $j$  tal que  $x_j > 0$ ,  $x_{j'} > 0$ , y sin pérdida de generalidad,  $x_j \geq x_{j'}$ . Definamos  $\delta = x_j - x_{j'}$ . En esta solución el flujo entra al bus  $e(j)$  denotado por  $D(e(j))$  debido a los arcos  $j, j'$  (ver la figura 1.2.1) es

$$D(e(j)) = x_j - r_j x_j^2 - x_{j'} \quad \text{y} \quad D(s(j)) = x_{j'} - r_j x_{j'}^2 - x_j$$

Consideremos otra solución dada por

$$x_j^* = \delta, \quad x_{j'}^* = 0 \quad \text{y} \quad x_k^* = x_k \quad \text{para } k \neq j, k \neq j'$$

Por definición, se sigue cumpliendo las ecuaciones (1.2.6) y

$$\begin{aligned} D(e(j))^* &= x_j^* - r_j (x_j^*)^2 - 0 = \delta - r_j \delta^2 = x_j - x_{j'} - r_j (x_j - x_{j'})^2 \\ &> x_j - r_j x_j^2 - x_{j'} = D(e(j)) \end{aligned}$$

$$D(s(j))^* = 0 - x_{j'}^* = 0 - \delta = x_{j'} - x_j > x_{j'} - r_j x_{j'}^2 - x_j = D(s(j))$$

Por tanto

$$\sum_{l \in Ng} f_l(x_l^*) \leq \sum_{l \in Ng} f_l(x_l)$$

La nueva solución es tan buena como  $x$  y cumple  $x_j x_{j'} = 0$ . ■

Por lo tanto, resolver (P) es equivalente a resolver P1. Sin embargo, (P) es un problema de programación convexa, mucho más fácil de atacar, aplicando las técnicas de optimización. Otra ventaja de (P) es el ahorro de las variables  $\theta_1$  y el número de restricciones adicionales de (P1) que se reduce de  $|J|$  (número de elementos de  $J$ ) a  $|J| - |N_g + N_d|$ .

### 1.3 ALGUNOS PROBLEMAS DE PLANEACION Y SU ESTRATEGIA DE ANALISIS

Suponga que en el problema (P) se desea considerar la expansión de capacidad de la red. Equivalentemente se desea considerar dos tipos de adición de equipos: construcción de capacidad adicional de generación en buses existentes o bien construcción de líneas de transmisión adicionales. Ambos casos se analizan a continuación y se especifican los cambios que sufre el modelo DC propuesto en la sección anterior.

Considere la posibilidad de agregar una unidad de generación con capacidad  $\bar{x}_k$  en el bus  $l$ . Denotamos por  $y_{lk}$  la variable de decisión de tipo 0-1 cuya interpretación es como sigue:  $y_{lk}$  igual a uno si se decide construir la alternativa  $k$  (con capacidad  $\bar{x}_k$ ) en el bus  $l$ , y cero si no se construye. Sea  $\mathbb{I}$  el conjunto de alternativas factibles de expansión y  $x_{lk}$  la potencia producida por esta nueva unidad de generación con capacidad  $\bar{x}_k$ . En este caso la restricción asociada a la satisfacción de la demanda se reemplaza por

$$\sum_{\substack{j \in J \\ s(j)=l}} (x_j - r_j x_j^2 - x_j) + \sum_{\substack{j \in J \\ e(j)=l}} (x_j - r_j x_j^2 - x_j) \geq \begin{cases} d_l - \sum_{k \in \mathbb{I}} x_{lk} & l \in N_d \\ d_l - x_l - \sum_{k \in \mathbb{I}} x_{lk} & l \in N_g \end{cases} \quad (1.3.1)$$

donde  $x_{lk} \leq \bar{x}_k y_{lk}$ . También debemos agregar un costo de construcción anualizado  $\sum_{l \in \mathbb{I}} c_{lk} y_{lk}$  y el costo de producción  $f_{lk}(x_{lk})$  en la función objetivo.

Considera ahora la posibilidad de agregar una línea de transmisión  $j$  entre los buses  $s(j)$ ,  $e(j)$  con capacidad  $\bar{x}_k$  y denote por  $y_{jk}$  la variable de decisión de tipo 0-1. Para incorporar esta posibilidad al problema original (P), debemos agregar dos variables de decisión al problema (P) denotadas por  $x_{jk}$  y  $x'_{jk}$ , además de las siguientes restricciones:

$$0 \leq x_{jk} \leq \sum_{k \in \mathbb{K}} y_{jk} \bar{x}_{jk} \quad 0 \leq x'_{jk} \leq \sum_{k \in \mathbb{K}} y_{jk} \bar{x}'_{jk} \quad (1.3.2)$$

donde  $\mathbb{K}$  denota el conjunto de alternativas de expansión. Por otra parte, es

necesario sumar a la función objetivo un costo de construcción anualizado  $\sum_{k \in K} c_{jk} y_{jk}$ . Observe que si  $y_{jk}=1$  se debe agregar la restricción  $\Phi(jk)=0$  definida explícitamente como:

$$\Phi(j) = \frac{x_j - x_{j'}}{B_j} + \sum_{L \in C_j^+} \frac{x_L - x_{L'}}{B_L} - \sum_{L \in C_j^-} \frac{x_L - x_{L'}}{B_L}$$

Claro que si  $y_{jk}=0$ , no se agrega ninguna restricción adicional, o bien

$$-\sum_{L \in C_{jk}} \bar{x}_L / B_L \leq \Phi(jk) \leq \sum_{L \in C_{jk}} \bar{x}_L / B_L$$

Como resultado de lo anterior podemos imponer una restricción equivalente que toman en cuenta ambos casos:

$$(y_{jk}-1) \sum_{L \in C_{jk}} \bar{x}_L / B_L \leq \Phi(jk) \leq (1-y_{jk}) \sum_{L \in C_{jk}} \bar{x}_L / B_L \quad (1.3.3)$$

Cuando las líneas existentes no forman un árbol de expansión, las desigualdades (1.3.3) son más difíciles de obtener. En tal caso podemos usar las ecuaciones de ángulos de voltaje.

La discusión anterior permite resumir el proceso de formulación del problema de expansión como

$$(PE) \quad \begin{array}{l} \text{Min } Q(x) + c^T y \\ x, y \\ \text{s. a. } Ax - R|x|^2 + By \geq C, \quad x \geq 0, \quad y \in Y \end{array}$$

donde  $x$  denota el flujo en la red,  $|x|^2$  se define como el vector  $(x_1^2, \dots, x_n^2)^T$ .  $Q(x)$  es la función de costo total de generación,  $c^T y$  el costo de construcción anualizado y  $R$  denota la matriz de resistencias en la posición correspondiente a las líneas de transmisión. Las matrices  $A$ ,  $B$ , y el vector  $C$  describen las restricciones (1.2.5) - (1.2.7), (1.3.1) - (1.3.3), mientras que  $Y$  representa el conjunto de vectores de variables 0-1 con dimensión  $N_y$  (número de variables 0-1); algunas restricciones de las variables  $y$  pueden ser: la capacidad total de generación es mayor que la demanda total por un factor, restricciones financieras, etc.

Dado que el problema de expansión de capacidad en una etapa puede formularse como:

$$(PE) \quad \begin{array}{l} \text{Min } Q(x) + c^T y \\ x, y \\ \text{s. a. } Ax - R|x|^2 + By \geq C, \quad x \geq 0, \quad y \in Y \end{array}$$

Entonces para una demanda estocástica cuyas ocurrencias modifican el vector C del (PE) en  $C_1, C_2, \dots, C_m$  con probabilidad  $P_1, P_2, \dots, P_m$  respectivamente, el *Problema de Expansión Estocástica* es

$$\begin{aligned}
 \text{(PEE)} \quad & \text{Min}_{x,y} E(Q(x)+c^T y) = \text{Min} \sum_{i=1}^m (Q(x(i))+c^T y) P_i \\
 & \text{s.a. } Ax(1)-R[x(1)]^2+By \geq C, \quad x(1) \geq 0 \\
 & \dots\dots\dots \\
 & Ax(m)-R[x(m)]^2+By \geq C, \quad x(m) \geq 0 \\
 & y \in Y
 \end{aligned}$$

donde  $x(i)$  denota el flujo asociado al nivel de demanda  $i$ .

En la formulación anterior, se supone que las demandas tienen una distribución discreta. Si la distribución dada es continua, la solución analítica del problema es casi imposible. Sin embargo, se puede discretizar la distribución convirtiendo el problema en el formato de (PEE).

Observe que para una configuración fija, un flujo factible para la demanda alta, también es factible para las demandas menores. De modo que se puede aprovechar esta propiedad para una implantación eficiente.

En este documento, usamos el término "problema de expansión" para la adición de instalaciones en UNA SOLA ETAPA, y el término "problema de planeación" para la adición de instalaciones en un horizonte de varias etapas, es decir, planeación a largo plazo.

**FORMULACION DEL PROBLEMA DE PLANEACION**

El problema de planeación de la expansión en T etapas equivale a:

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar}_{x(t), y(t)} \quad & \sum_{t=0}^T \frac{1}{(1+\beta)^t} \{ Q^{(t)}(x^{(t)})+c^T y^{(t)} \} \\
 \text{(PPM')} \quad & \text{s.a. } A^{(t)} x^{(t)} - R^{(t)} [x^{(t)}]^2 + B^{(t)} y^{(t)} \geq C^{(t)}, \quad t=0, \dots, T \\
 & x^{(t)} \geq 0, \quad y^{(t)} \in Y^{(t)} \quad t=0, \dots, T
 \end{aligned}$$

donde  $\beta$  es la tasa de descuento y  $(.)^{(t)}$  denota el valor de una función o variable  $(.)$  en la etapa  $t$ . Las restricciones del problema (PPM') son las correspondientes de los problemas de expansión (PE) (o (PEE) en el caso

estocástico) y la función objetivo es la suma de los costos anualizados de los problemas de expansión en las etapas  $0, \dots, T$ .

El problema de planeación multietapa en un horizonte de  $T$  etapas también se puede escribir como

$$(PPM) \quad \underset{(y^{(0)}, \dots, y^{(T)}) \text{ factible}}{\text{Minimizar}} \quad \sum_{t=0}^T \frac{Z_{SP}^{(t)}(y^{(t)})}{(1+\beta)^t}$$

donde  $Z_{SP}^{(t)}(y^{(t)})$  es el costo óptimo de subproblema de flujo de carga (incluyendo el costo de operación y costo de construcción) en la etapa  $t$  con la configuración  $y^{(t)}$ . Un vector  $(\bar{y}^{(0)}, \bar{y}^{(1)}, \dots, \bar{y}^{(T)})$  tal que  $\bar{y}_l^{(t-1)} \leq \bar{y}_l^{(t)}$  para todo  $l=1, \dots, N_y$  y  $t=1, \dots, T$  se dice que es una *trayectoria factible*. I.e. La adición de un equipo en una etapa se considera en las etapas posteriores. Nótese que si se tiene una configuración factible  $\bar{y}^{(T)}$  para la última etapa,  $y^{(0)} = y^{(1)} = \dots = \bar{y}^{(T)}$  es una trayectoria factible.

El enfoque utilizado para la planeación del sistema de generación y transmisión a largo plazo, es desarrollar una técnica de descomposición que permita reducir la complejidad y obtener la solución eficientemente. Esta técnica consiste de tres niveles: descomposición en redes de flujo, descomposición de Benders generalizada y descomposición en etapas.

En relación al primer nivel de descomposición, se observa que el problema de flujo de carga DC tiene estructura de flujo en redes, esto hace posible aplicar técnicas de descomposición usando la relajación lagrangeana. Los subproblemas generados por esta descomposición son problemas de flujo que se pueden resolver muy eficientemente. Con las estructuras de datos actuales, se logra este objetivo mediante un algoritmo desarrollado en el capítulo 2. Este algoritmo usa la estructura de tres etiquetas para la representación del árbol de la base, el método Simplex convexo para los costos convexos y la aproximación implícita sucesiva para las pérdidas cuadráticas. Una vez resuelto el problema de flujo, se busca el valor de los multiplicadores de las restricciones de ángulo de voltaje. Diversos métodos han sido implantados y probados para la búsqueda de los multiplicadores y la estimación del valor de la función objetivo. Los métodos más eficientes encontrados para nuestro caso han sido la técnica de subgradientes y la de ascenso máximo.

Para resolver el problema de expansión, se aplica la descomposición de Benders generalizada, ya que el número de variables 0-1 en el problema de generación y transmisión es adecuado usando esta técnica. Además esta técnica puede aprovechar la estructura especial de los subproblemas generados que corresponden a la optimización de flujo de carga DC. Por otro lado, los cortes de Benders se puede obtener fácilmente por el análisis de los parámetros de la red en la solución aunque se aplica la descomposición del flujo de carga. De tal manera se resuelve el problema de expansión del SGT eficientemente. Otra alternativa bien conocida para resolver este problema es la técnica de ramificación y acotamiento. Sin embargo tal alternativa desaprovecha la estructura especial del flujo de carga DC, por lo que se excluye en este estudio.

El problema de planeación tiene una estructura de bloques diagonales en sus restricciones que permite descomponerlo en subproblemas de expansión. En este trabajo, se utiliza los cortes de Benders generados en los problemas de expansión, se combina con la técnica de enumeración implícita con el fin de estimar el costo de operación óptimo de cada configuración. Con estos costos se plantea un problema de programación dinámica que encuentra el plan con menor costo estimado. Se aplica un esquema iterativo resolviendo muy pocos subproblemas adicionales de flujo de carga DC para lograr a obtener la solución óptima de planeación. Con esta técnica, también se puede encontrar el conjunto de mejores planes usando programación dinámica, llegando así a la solución de nuestro problema. Dicho conjunto de mejores planes puede servir para la creación de escenarios, el análisis de confiabilidad etc.

#### **1.4. VENTAJAS DE LAS TECNICAS DE DESCOMPOSICION EN PROBLEMAS DE PLANEACION**

El problema de planeación del sistema eléctrico a largo plazo es complejo y las actividades de planeación han sido tradicionalmente "descompuestas" en subproblemas separados usando un juicio ingenieril que resulta práctico para propósitos de análisis. Un ejemplo típico es la planeación de instalaciones de generación y transmisión que ha sido efectuado con cálculos separados. Diversos conjuntos específicos de datos y modelos son desarrollados para resolver cada subproblema, y las mejores alternativas en cada caso son

"combinadas" para formar el conjunto final de alternativas preferidas. Sin embargo, para el procedimiento anterior no existe una verificación sistemática tal que los resultados sean consistentes y se den soluciones insesgadas. La formulación del problema también depende del juicio humano; esto es, no se formula el problema como un todo y luego se desacopla analíticamente en subproblemas. Como una consecuencia, las siguientes deficiencias se encuentran en los métodos aplicados en muchas empresas de electricidad:

- a) El mantenimiento de la consistencia entre diferentes conjuntos de datos es difícil.
- b) La segmentación de modelos y bases de datos resulta difícil al coordinar entre varios grupos involucrados en el análisis cuando se requiere integrar los resultados.
- c) Los esfuerzos frecuentemente se duplican en diferentes grupos. Por ejemplo, los modelos de costo de producción separados han sido desarrollados para la planeación corporativa, pero la planeación de generación, los estudios de administración de carga, y los estudios ambientales son llevados por grupos separados.
- d) Las formulaciones del modelo son muy específicos a cada problema y falta la representación necesaria de las interacciones con problemas relacionados.
- e) No se puede detallar el modelaje en la optimización y los métodos del balance multi-objetivo.
- f) Puede existir conflictos entre diferentes horizontes de planeación. Dado que la mejor solución a corto plazo no necesariamente forma parte de una buena solución a largo plazo.

Las técnicas de la descomposición matemática tiene el potencial para aliviar parte de los problemas anteriores. Estas técnicas son diseñadas para lograr una optimización global de un problema mediante solución repetida de subproblemas separados. Por ejemplo, el problema de planeación a largo plazo se descompone naturalmente en dos partes:

- (1) determinar la inversión óptima en la nueva capacidad del sistema;
- (2) determinar el costo de operación del sistema y la confiabilidad de suministro asociado con la construcción de la nueva capacidad.

Esta descomposición natural puede ser explotada por técnicas de descomposición matemática. La optimización global de la inversión y los costos de operación puede lograrse mediante una solución iterativa de subproblemas separados de inversión y operación, como se ilustra en la figura 1.4.1.

Esta técnica tiene muchas ventajas en términos de flexibilidad, modularidad y consistencia. Por el ejemplo, los subproblemas de inversión y operación se pueden modelar separadamente y usar diferentes algoritmos de solución.

En resumen, las técnicas de descomposición puede presentar un balance adecuado entre la necesidad práctica de descomponer un problema complejo en subproblemas que son más fácil de entender y la necesidad de tener un modelo global agregado que hace posible tener soluciones óptimas y consistentes aunque sin mucho detalle.

Cabe mencionar, esta filosofía ha sido adoptada en la planeación del sector eléctrico (CFE) como podemos observar la tabla 1.4.1. Este trabajo puede verse como un intento de hacer más eficiente este proceso, proporcionar una formulación del problema tal que se pueda aplicar las técnicas de descomposición y explotar sus usos. El modelo básico de operación es el de flujo de carga DC con pérdidas. Las nuevas ideas introducidas son adecuadas para la planeación de largo o mediano plazo, ya que en esta etapa normalmente se considera la red hasta el nivel de transmisión (ver la tabla 1.4.2).

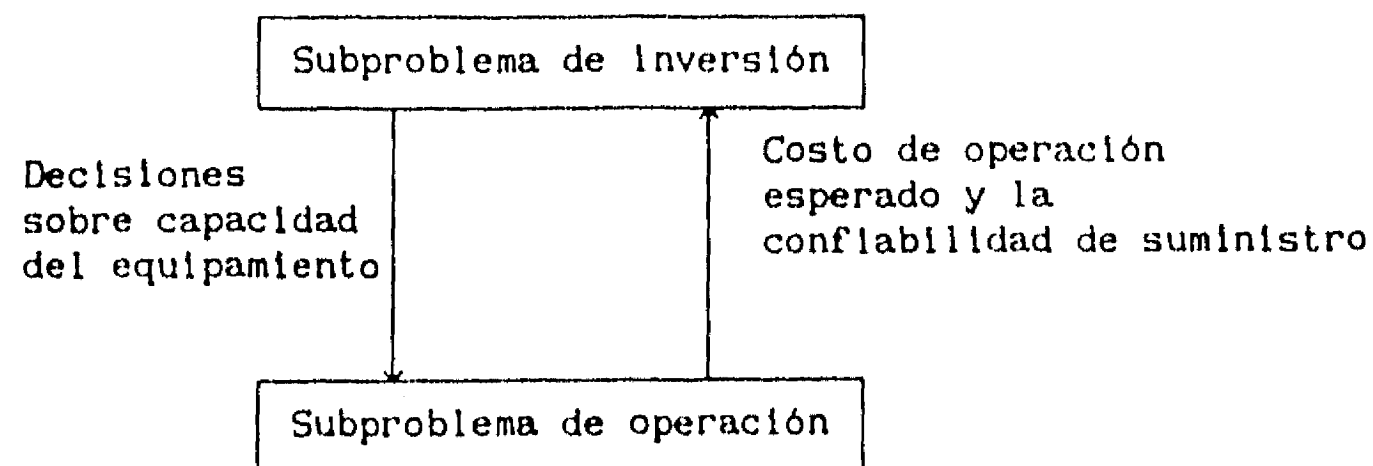


Figura 1.4.1 Técnica de descomposición



Tabla 1.4.1 Metodología integrada de planeación para sistemas de potencia en CFE

Características principales	Estructura coordinada de los modelos	{ detalles de la representación computación práctica
	Enfoque de descomposición	{ tiempo espacio
	Variables estocásticas	{ cargas hidrología confiabilidad del equipo
	Modelos	{ programación no lineal teoría del control óptimo programación lineal técnicas de simulación
	Conceptos económicos	{ minimiza costos actualizados (inversión, operación y energía no suministrada) análisis de beneficio-coste

Tabla 1.4.2 Esquema cronológico del proceso de planeación de un sistema eléctrico en CFE

ETAPAS	Estudios de generación	Estudios de red		
		troncal	subtransmisión	distribución
Largo plazo de N+10 a N+30 años	Lineamientos para la estructura del sistema de generación	Lineamientos para localización de centrales generadoras y transmisión en bloque		
Mediano plazo de N+5 a N+10 años	Programa tentativo de centrales generadoras	Estudios simplificados del comportamiento de la red y programa de localización de subestaciones y líneas		
Corto plazo de N+3 a N+5 años	Ajuste de decisiones	Estudios detallados del comportamiento de la red y ajuste de decisiones	Programa de localización subestaciones y líneas	Programa de obras de distribución
Corto plazo de N a N+3 años	Diagnósticos sobre cambios en fechas del programa de de obras e inversiones	Diagnósticos sobre cambios en fechas del programa de de obras e inversiones	Estudios detallados del comportamiento de la red y ajuste de decisiones	Estudios detallados del comportamiento de la red y ajuste de decisiones

## ANEXO A1.1 PROBLEMAS RELACIONADOS

El funcionamiento del sistema eléctrico requiere resolver una serie de problemas de optimización que describimos en esta sección.

### A1.1.1 EL PROBLEMA DE DESPACHO ECONOMICO

Este problema consiste en determinar los niveles de potencia de cada una de las unidades de generación disponibles para satisfacer una potencia dada. En la figura A1.1.1, se puede observar que este sistema consiste de  $N$  unidades de generación térmica conectadas a un bus (un nodo) sirviendo a una carga eléctrica  $P_R$ . La entrada de cada unidad, denotada por  $F_i$ , representa el costo de la unidad. La salida de cada unidad,  $P_i$ , es la potencia eléctrica generada por la unidad particular. El costo total de este sistema es la suma de los costos de cada una de las unidades. La restricción esencial sobre la operación de este sistema es que la suma de las potencias de salida debe ser igual a la carga de demanda.

### A1.1.2 ASIGNACION DE UNIDADES

Es usual que la actividad económica siga un ciclo y lo mismo, la carga total en el sistema eléctrico. Por ejemplo, la carga es generalmente más alta durante el día y el atardecer cuando las cargas industriales son altas y el uso de energía a nivel urbano es mayor. Adicionalmente, el uso de la corriente eléctrica tiene ciclos semanales, siendo la carga más baja en el fin de semana que días laborales. Esta es la razón principal de la asignación de unidades. Asignar una unidad de generación es elevar la velocidad de esta unidad, sincronizarla con el sistema y conectarla de manera tal que pueda suministrar la potencia a la red. Suponiendo que ciertas unidades son disponibles y que tenemos una demanda pronosticada a satisfacer. La pregunta

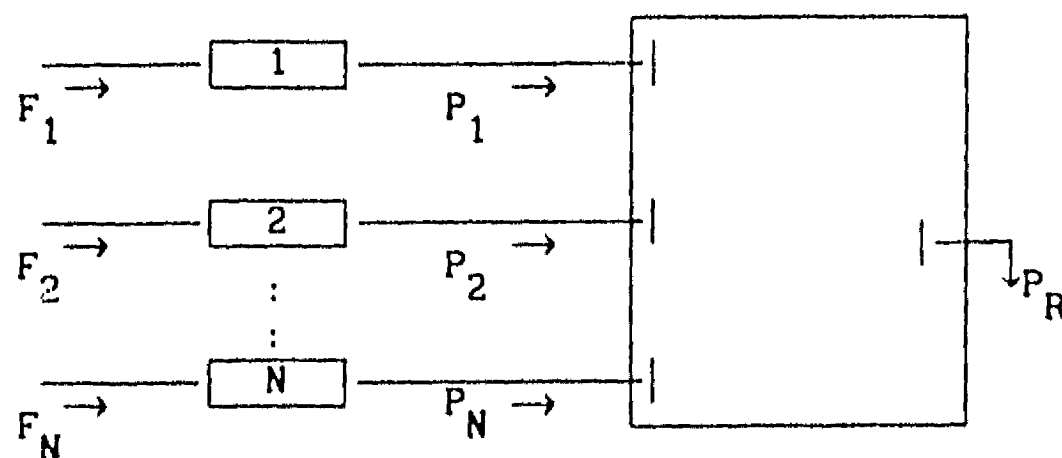


Figura A1.1.1 Despacho económico

en el problema de asignación de unidades es : dado que existen un número de subconjuntos del conjunto completo de  $N$  unidades de generación que puedan satisfacer la demanda esperada, determinar el subconjunto de unidades para minimizar el costo de operación.

#### A1.1.3 COORDINACION HIDROTERMICA

La coordinación hidrotérmica de la operación de un sistema de plantas de generación es usualmente muy complicada. La razón es simple ya que las plantas hidrotérmicas pueden ser acopladas tanto eléctrica (i.e. pueden servir a la misma carga) como hidráulicamente (i.e. el derrame del agua de una planta puede ser una porción muy importante del escurrimiento del agua de otras plantas en río abajo). La configuración de los ríos puede ser con pocas presas tributarias en serie a lo largo del río, o bien, puede abarcar también miles de hectáreas, extenderse sobre áreas vastas multiregionales, e incluir muchos tributarios y arreglos complejos de vasos de almacenamiento.

En la operación de un sistema de potencia hidroeléctrico, surgen problemas que dependen del balance entre la generación hidroeléctrica, generación térmica y la carga. En raras ocasiones, el sistema está sin generación térmica. El programa económico de estos sistemas es un problema de programación de la salida del agua para satisfacer todas las restricciones hidráulicas y satisfacer la demanda de la energía eléctrica. Los sistemas hidrotérmicos se pueden programar por plantear el sistema minimizando el costo de producción de generación térmica considerando otras diversas restricciones existentes. Estos son básicamente los problemas en programar la energía. Existen dos niveles a considerar:

##### 1) A corto plazo

La extracción del agua a corto plazo (1 día o 1 semana) requiere el programa por hora de todas las unidades de generación para llegar a minimizar el costo de producción en un periodo dado. En tal problema de programación, la carga, el escurrimiento hidráulico y las disponibilidades de unidades se suponen conocidos. Un conjunto de condiciones iniciales (por ejemplo: niveles en los vasos) es dado y se busca el programa óptimo por hora que minimice un objetivo deseado sujeto a las restricciones hidráulicas, de las máquinas de vapor y del sistema eléctrico. Una parte de las restricciones hidráulicas es cumplir con la condición del punto final al terminar el intervalo de programa de acuerdo con el programa a largo plazo previamente establecido.

#### 11) A largo plazo

La coordinación de la operación de las plantas hidrotérmicas, involucra el programa de derrame del agua. El problema del programa de hidros a largo plazo requiere el pronóstico a largo plazo de la disponibilidad del agua y el programa del derrame del agua en el vaso en un intervalo de tiempo, que depende de las capacidades de los vasos. El programa típico a largo plazo es de una semana a varios años.

El pronóstico del escurrimiento del agua puede basarse en el pronóstico del clima en el futuro cercano. Para el programa de derrame a largo plazo, se puede definir una política básica. El control de agua puede realizarse basando en la estadística promedio, o bien en la predicción del "peor caso". En la primera instancia, es posible ahorrar una gran cantidad de producción costosa por desplazar la generación térmica por hidráulica. En la segunda instancia, las plantas hidros funcionarán de tal manera que minimice el riesgo de violar cualquier restricción hidrológica. (e.g. no hay suficiente agua para otros usos).

#### A1.1.4 ANALISIS DE CONFIABILIDAD EN EL SISTEMA ELECTRICO

Seleccionar un plan de expansión del sistema entre tantos planes disponibles es complicado, especialmente porque las instalaciones a expandir deben considerar la mejor estrategia en un ambiente de incertidumbre. Además de la incertidumbre inherente en la demanda futura pronosticada, el planeador debe considerar incertidumbres asociadas con:

1. Confiabilidad de las unidades y el programa de mantenimiento
2. Costo y disponibilidad de combustibles
3. Legislación de combatir contra contaminación y sus costos
4. Costos de construcción
5. Tiempo de poner en marcha
6. Disponibilidad y costos del capital.

Es difícil de predecir las incertidumbres mencionadas. Sin embargo, podemos determinar si un plan de expansión satisface un nivel deseado de confiabilidad definida por dos índices básicos de confiabilidad: probabilidad de pérdida de carga, LOLP (loss of load probability), y el valor esperado de la demanda no servida,  $\epsilon$ (DNS). Como ningún sistema puede estar operando en un

ambiente libre de contingencias, debemos probar los planes de expansión para asegurar que la operación requerida se mantiene en presencia de disturbios inevitables.

Existen muchos factores a considerar en la protección de un sistema. Con el objetivo de mantener un registro de alta calidad de operación determinado por el voltaje y la frecuencia, y también por frecuencia y duración de las fallas, un sistema debe ser capaz de sobrevivir en los disturbios anormales, tales como fallas y pérdidas de los elementos del sistema, ocasionadas por mal funcionamiento del equipo, sobretensión por switcheo, relámpagos etc.

En los años recientes, el análisis de contingencias en el estado permanente viene siendo más y más sofisticado, primeramente por el desarrollo de la computadora digital. En el tiempo antiguo, el analista de redes se acostumbraba a simular los efectos de fallas de elementos en la carga de línea. Hoy tenemos métodos eficientes y efectivos de flujo de potencia AC, pero éstos frecuentemente no son atractivos computacionalmente y requieren demasiado tiempo para el estudio de contingencias. Mejor dicho, la industria prefiere los métodos rápidos aproximados para ubicar el lugar del problema potencial, que puede ser estudiado con más detalle si es necesario, usando flujo de potencia AC.

## **ANEXO A1.2 TECNICAS DE ANALISIS**

El análisis y la planeación de los tres subsistemas eléctricos (esto es, generación, transmisión y distribución) en conjunto es bastante complejo. Por ejemplo, el problema de la planeación del subsistema de distribución del tamaño de la ciudad de Morelia, podría tener 3,500 variables 0-1 y 24,000 variables continuas [AFU84]. Sin embargo, esto es un solo nodo para el subsistema de transmisión. Debido a esta complejidad, el análisis del sistema eléctrico se efectúa normalmente por separado. En el Electricité De France, la expansión del SGT se plantea separadamente como se puede observar en [GAR78]. En el libro de Sullivan [SUL77], se describen con bastante detalle la planeación del sistemas de generación y el de transmisión individualmente. Estos modelos no consideran la optimización global y nos pueden conducir a una política de expansión no óptima.

En este anexo, efectuamos primeramente una revisión y diagnóstico de las

técnicas desarrolladas para la planeación del sistema de generación y transmisión en conjunto. Después revisamos las técnicas utilizadas para la planeación del sistema de distribución que tiene mucha similitud con el SGT.

#### A1.2.1 DESARROLLO HISTORICO

Pocos trabajos se han publicado para la planeación del sistema de generación y transmisión conjuntamente. Entre los trabajos desarrollados, encontramos los siguientes:

En 1977, Saway et al [SAW77] formuló el problema como uno de programación lineal mixta, y resolvió unos ejemplos pequeños por un paquete comercial. En su trabajo, las unidades que representan el crecimiento de capacidades de las líneas de transmisión se consideran continuas. Desde el punto de vista práctica, esta suposición es cuestionable ya que las líneas agregadas sólo tienen capacidades finitas.

En 1978, Ramachandran [RAM78] propuso otra formulación considerando ambos sistemas (generación y transmisión). El problema de expansión se formula como la minimización de una función objetivo que representa el costo fijo de instalación, costo de construcción y costo de operación sujeto a restricciones de la seguridad del sistema y limitaciones tales como la capacidad máxima de una ubicación y el número máximo de líneas permitidas en una ruta disponible para la expansión. La función de costo de operación es linealizada y el problema se resuelve por la descomposición de Benders. En este modelo, las pérdidas no están consideradas.

En el trabajo conjuntamente desarrollado del Electricité De France y la Comisión Federal de Electricidad de México, se propuso otro método de solución [ALB75]. Tal método consiste en resolver un problema de expansión de generación y uno de transmisión iterativamente hasta que la diferencia entre los valores obtenidos de costo en las iteraciones sea suficientemente pequeña. Para el problema de expansión de generación se usa programación lineal, y para la adición de líneas de transmisión se usa el algoritmo de Ford-Fulkerson y simulación. La desventaja de este modelo es que no están consideradas las pérdidas en la transmisión ni las restricciones adicionales (e.g. ángulo de voltaje) de transmisión.

En 1985, Perreira et al [PER85] resolvió el problema de expansión de

generación y transmisión usando la técnica de descomposición de Benders. La función objetivo que minimiza es la suma de la energía no suministrada para los centros de demanda. Sin embargo, el problema formulado no es de programación convexa, para algunos casos, la solución no necesariamente es óptima. Pero en dicho modelo, las pérdidas en las líneas no son consideradas. La otra desventaja es que no se toma en cuenta el costo de operación.

La planeación de un sistema de distribución muestra cierta similitud con la de un SGT. En términos de la programación matemática, las técnicas de solución son muy similares. Por ejemplo, en los dos sistemas, se requiere optimizar el flujo de potencia. Una diferencia importante entre los dos sistemas es que en el SGT la función objetivo es el costo de generación, el costo de pérdida en las líneas es implícitamente considerado en la matriz de incidencia de la red, e involucrado en el costo de generación. Mientras que en el sistema de distribución, como no existen unidades de generación, la función objetivo a minimizar es la pérdida total en las líneas. Otras diferencias consisten en la configuración de las líneas, distancias y magnitudes de voltaje que se maneja. Por la similitud mencionada, cabe revisar los métodos más importantes desarrollados para resolver el problema de distribución.

El problema de la síntesis de la red y la determinación del año de inversión de las nuevas instalaciones para satisfacer la demanda futura es resuelto por Boardman y Hogg [BOA69], Adams y Laughton [ADA73], Afuso [AFU84] usando los métodos de programación dinámica. Masud [MAS74] empleó la programación lineal y entera para optimizar el tamaño de la subestación y el tiempo de expansión o de la construcción nueva. Adams y Laughton [ADA74] usó el programación entera mixta para la planeación de la red eléctrica de potencia. Su método se basa en el modelo de transporte con costo fijo y se representa el costo de la pérdida no lineal en la red por una función lineal por segmentos. Crawford [CRA75] adoptó el algoritmo de trayectoria mínima y el algoritmo de transporte de Ford-Fulkerson para localizar y determinar el tamaño de las subestaciones de distribución, y derivar su área óptima de servicio. Un método de ramificación y acotamiento para el problema de transporte con capacidad limitada es utilizado por Hindi y Brameller [HIN77] para determinar la configuración radial óptima de la red de distribución de bajo voltaje.



Este método también considera el costo de la pérdida como una función linealizada. Wall et al [WAL80] usaron un programa de computación de transporte con cota superior para planear la red de distribución radial. Más tarde, Thompson y Wall [THO81] propusieron un método de ramificación y acotamiento para la selección óptima de la ubicación de subestación. Sus modelos otra vez se basan en la aproximación de costos lineales para el costo de pérdida no lineal. Gonen y Foote [GON81] presentaron un modelo compuesto para optimizar el número, el tamaño y la localización de las subestaciones, enrutamiento de la red, el tamaño de conductor, el calibre y la transferencia simultáneamente por la programación entera mixta. El costo que se considera en su trabajo se linealiza por segmentos. Sun et al [SUN82] formularon el problema de planeación óptima de subestación y alimentadores primarios como uno de transporte con carga fija. Ellos sugirieron un método que emplea el algoritmo de ramificación y acotamiento e incluye modelaje explícito de carga fija y componentes de variables por precisión mejorada. Kaplan y Braunstein [KAP81] empleó un método de análisis gráfico para optimizar el tamaño de subestación.

#### A1.2.2 DIAGNOSTICO DE LOS METODOS EXISTENTES

Se puede notar de la revisión anterior de los trabajos existentes que en la mayoría de ellos se usan modelos de optimización con costos lineales haciendo que las funciones de costo no lineal con linealizadas. La ventaja de estas linealizaciones es facilitar el uso de los paquetes computacionales comerciales, sobre todo en el caso de carecer la capacidad de desarrollar métodos de programación no lineal más sofisticados. Evidentemente estas linealizaciones requieren la introducción de más variables y restricciones al problema, el proceso de solución puede tardar mucho tiempo o la solución obtenida puede ser demasiado distante de la solución óptima.

Recientemente Ponnavaikko et al [PON87] aplicaron una técnica de programación cuadrática que resuelve el problema de la expansión de una red de flujo con costos cuadráticos. Esta técnica trata las variables de decisión (variables 0-1) como variables continuas en la programación cuadrática. Después de obtener la solución, redondea estas variables de decisión a cero o uno. Obviamente, este método es heurístico, puede producir una solución de mucho mayor costo que la óptima, o una solución no factible.

Como conclusión de la revisión anterior, se observa que para la planeación

del SGT, no existen trabajos que consideren costos no lineales explícitamente y que aprovechan la estructura del problema simultáneamente.

---

## CAPITULO 2.

---

### EL PROBLEMA DC Y SU SOLUCION

---

El software para la optimización de flujo en una red con ganancia lineal se aplica en muchas áreas de ingeniería y en problemas matemáticos. En la ingeniería de potencia eléctrica, algoritmos de este tipo se usan para estimar la operación óptima en el futuro y para ayudar la planeación. Pero en realidad, la pérdida de potencia en una línea de transmisión es cuadrática como hemos visto en 1.1. Como el software de programación no lineal de propósito general consume demasiado tiempo y memoria, para una mejor aproximación, normalmente se usa funciones lineales por pedazos continuos (*piezolineal*). Para cada segmento lineal, se le asocia un arco con pérdida lineal. Sin embargo la introducción de tales segmentos lineales incrementa el requerimiento de memoria y disminuye la velocidad de solución.

Por otro lado, como el problema de flujo de carga óptimo tiene estructura de flujo en redes, es posible aplicar alguna técnica de descomposición. Por tanto es necesario resolver eficientemente el problema de flujo en redes con pérdidas cuadráticas, y luego resolver una secuencia de tales problemas para obtener la solución óptima de DC.

En este capítulo primero describimos un problema de redes de flujo con pérdida convexa. Se proporciona un algoritmo para resolver este problema de flujo usando estructura de tres etiquetas para la representación de la base. Luego se analiza la relación entre la solución del dicho problema con el flujo de carga óptimo DC, para que en la sección 2.4, se usa la técnica de subgradiente para la solución del problema DC. Se da una justificación más sencilla de la fórmula de actualización de las variables duales propuesta en [HEL74]. Finalmente se anexa la estructura de datos y la detalle de la implantación del algoritmo para flujo con pérdida piezolineal.

## 2.1 UN PROBLEMA DE REDES DE FLUJO

Considere una red denotada  $G=(N,A)$  donde  $N$  es el conjunto de nodos y  $A$  el correspondiente conjunto de arcos. Sea  $g_i(x_i)$  el costo de generación de una cantidad  $x_i$  de flujo en el nodo  $i$  y denote por  $x_{ij}$  el flujo del nodo  $i$  al  $j$  mientras que  $f_{ij}(x_{ij})$  es el correspondiente costo de transporte. Denote por  $L_{ij}(x_{ij})$  la pérdida de flujo incurrida al enviar una cantidad  $x_{ij}$  del nodo  $i$  al  $j$ . El problema que se desea analizar consiste en:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } \sum_{(i,j) \in A} f_{ij}(x_{ij}) + \sum_{i \in N_g} g_i(x_i) \\ & \text{s. a.} \\ (Q) \quad & \sum_{(i,j) \in A} [x_{ij} - L_{ij}(x_{ij})] - \sum_{(j,i) \in A} x_{ji} \geq \begin{cases} d_j & j \in N_d \\ d_j - x_j & j \in N_g \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

$$0 \leq x \leq c \quad (2.1.2)$$

donde  $N_d$  ( $N_g$ ) denota el conjunto de nodos de demanda (oferta), mientras que  $d_j$  es la demanda del nodo  $j$  y  $c$  es el vector de capacidades máximas de flujo en los arcos.

Proposición 2.1. Si las funciones  $f_{ij}$ ,  $g_i$  y  $L_{ij}$  son convexas, el problema (Q) es convexo, esto es, consiste en la minimización de una función convexa en un conjunto convexo.

Prueba: La función objetivo es convexa y las restricciones definen conjuntos convexas que se intersectan. ■

El caso en que la función de pérdida de flujo es cuadrática, es de especial interés por su aplicación a problemas eléctricos. Específicamente se supone que cuando el flujo pasa por un arco  $k=(i,j)$ , existe una pérdida  $r_k x_k^2$  donde  $r_k \geq 0$  y se satisface  $c_k - r_k c_k^2 \geq 0$ . El problema convexo definido de esta forma se denotará como (Q').

Una manera de resolver el problema (Q') es efectuar una aproximación por segmentos lineales de la función  $r_k x_k^2$ . Cada segmento lineal se define en los intervalos sucesivos  $[0, c_{k,1}]$ ,  $[c_{k,1}, c_{k,2}]$ , ...,  $[c_{k,Ns-1}, c_{k,Ns}]$  con pendientes  $m_{k,1}, m_{k,2}, \dots, m_{k,Ns}$  tal que  $m_{k,1} \leq m_{k,2} \leq \dots \leq m_{k,Ns}$  para  $l < j$ ,  $c_{k,Ns} = c_k$  y  $r_k c_{k,j}^2 = r_k c_{k,j-1}^2 + m_{k,j} (c_{k,j} - c_{k,j-1})$  (ver la figura 2.1.1). Los puntos  $c_{k,j}$  se denominan puntos de ruptura.

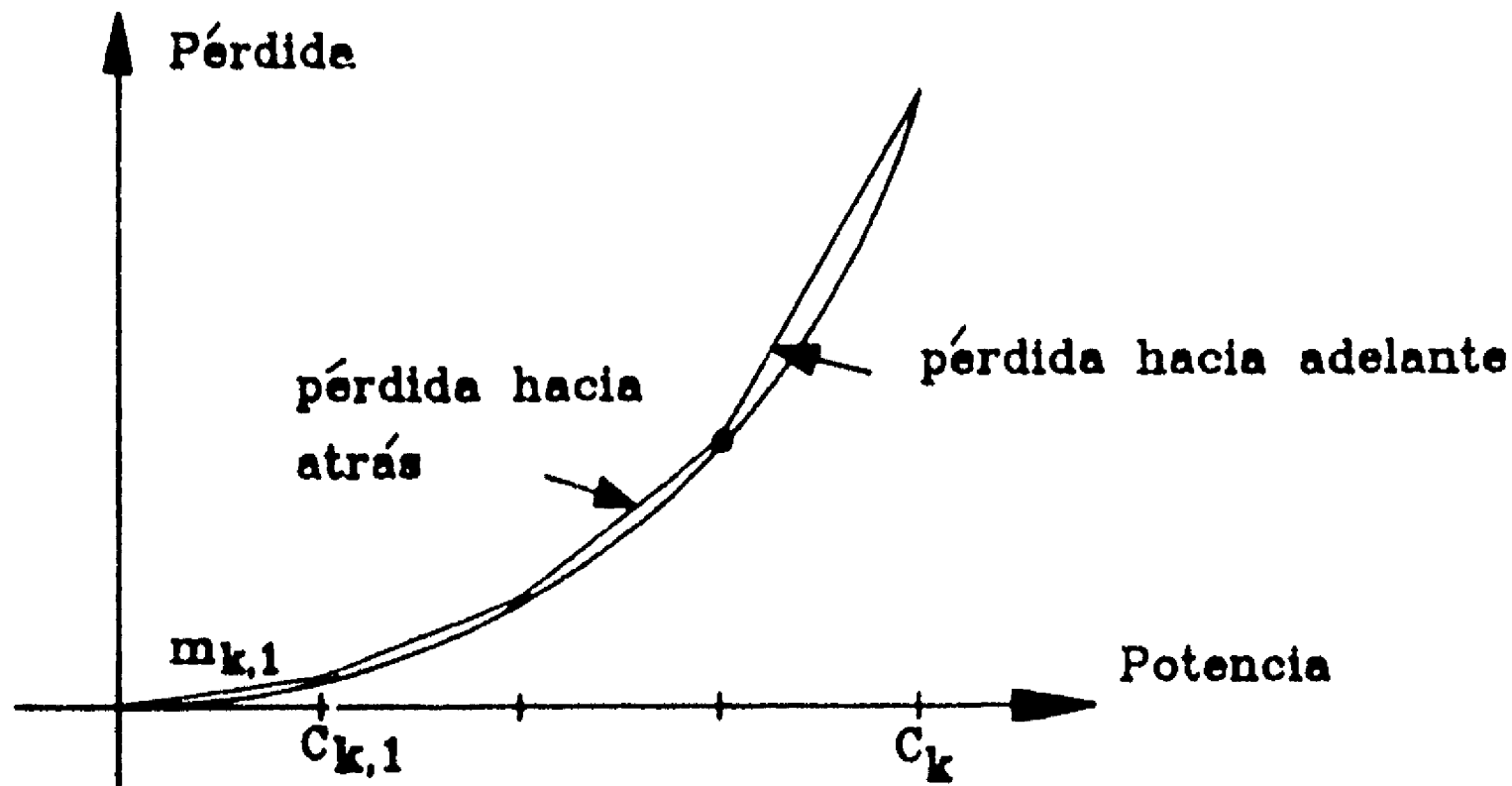


Figura 2.1.1 Aproximación plezolineal de la curva de de pérdida

En muchos casos el costo de generación y de transporte son no decrecientes, entonces en la solución óptima, la igualdad en (2.1.1) se alcanza.

La ventaja de la aproximación descrita anteriormente es que podemos usar la optimización en redes de flujo con costo convexo y pérdida lineal cuya solución es eficiente. Por ejemplo, Jensen [JEN80] resolvió el problema de costo lineal usando la estructura de datos de 3 etiquetas del siguiente formato:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar } \sum_{(i,j) \in A} h_{ij} x_{ij} \\
 & \text{s.a.} \\
 \text{(PL)} \quad & \sum_{(i,j) \in A} -a_{ij} x_{ij} + \sum_{(j,i) \in A} x_{ji} = 0 \quad j \in N_d, j \neq s, t \\
 & \sum_{(i,j) \in A} -a_{ij} x_{ij} + \sum_{(j,i) \in A} x_{ji} = -d_j \quad j = t \\
 & 0 \leq x \leq c
 \end{aligned}$$

donde  $h_{ij}$  y  $a_{ij}$  son costo y ganancia del arco  $(i, j)$  respectivamente.

En la figura 2.1.2 se muestra la gráfica asociada a este problema donde  $s$  es un nodo fuente con capacidad de oferta ilimitada y  $t$  es un nodo pozo artificial. Nótese que los problemas de flujo con costo lineal se pueden transformar en este formato agregando a cada nodo de oferta ( $j \in N_g$ ) un arco artificial  $(s, j)$ , mientras a cada nodo de demanda ( $j \in N_d$ ), un arco artificial  $(j, t)$ .

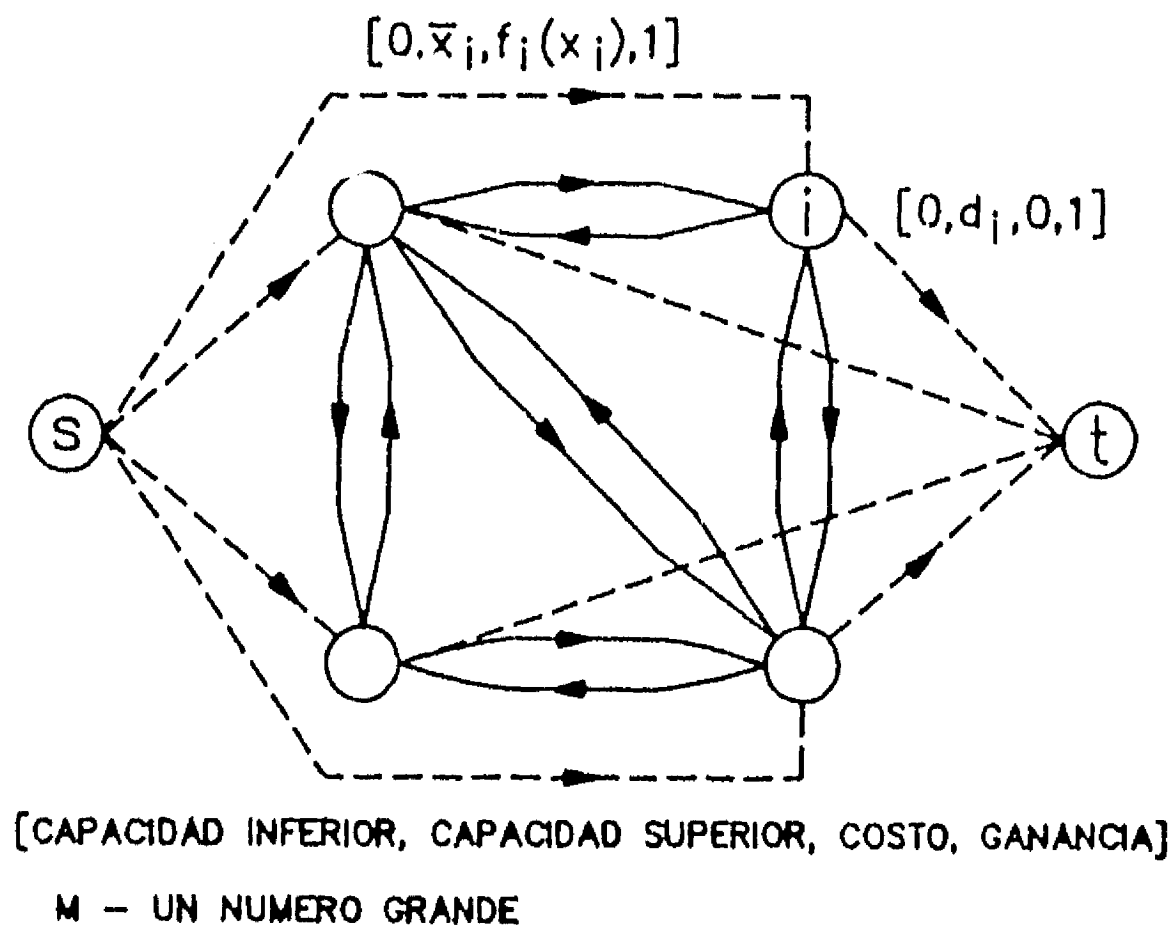


Figura 2.1.2 Gráfica asociada al problema de optimización de flujo

El problema dual asociado es sencillo de establecer y es:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } -\pi_t d_t + \sum_{k \in A} \delta_k c_k \\ & \text{s.a. } \pi_i - a_k \pi_j + \delta_k \geq -h_k \quad \text{for } k \sim (i, j) \in A \quad i \neq s \\ & \quad -a_k \pi_j + \delta_k \geq -h_k \quad \text{for } k \sim (s, j) \in A \end{aligned}$$

Los algoritmos para la solución de este problema son conocidos y un resumen de la estructura de datos se describe en el anexo 2.1. Definiendo  $\pi_s = 0$ , como  $c_k > 0$ , se sigue las condiciones de optimalidad de ambos problemas en la siguiente condición de *holgura complementaria*:

$$\begin{aligned} 1. \pi_i + h_k &= a_k \pi_j && \text{para } 0 < x_k < c_k \\ 2. x_k &= 0 && \text{para } \pi_i + h_k > a_k \pi_j \\ 3. x_k &= c_k && \text{para } \pi_i + h_k < a_k \pi_j \end{aligned}$$

Aquí la variable dual  $\pi_i$  representa el costo de obtener una unidad de flujo en el nodo  $i$  desde nodo  $s$ . Si  $\pi_i + h_k > a_k \pi_j$  y  $x_k < c_k$  podemos reducir el costo total por enviar alguna cantidad de flujo a través del arco  $k$ .

Cuando se aplica este algoritmo a nuestro problema (Q') se presenta dos dificultades:

- a. Cuando el flujo cae en un punto de ruptura de la curva de pérdida con la aproximación piezolineal, no se puede reflejar las dos pérdidas

diferentes (hacia adelante y hacia atrás).

- b. El costo convexo diferenciable en el problema (Q') no se considera en (PL).

Por tales razones se desarrolla en la siguiente sección un algoritmo que supera estas dificultades.

## 2.2 ALGORITMO DE SOLUCION CASO CUADRATICO

En esta sección se presenta un método de solución alternativo del problema convexo (Q') que reduce el espacio de memoria consumida y el tiempo de ejecución. El algoritmo se basa en método Simplex convexo y se usa aproximación piezolineal implícita para la curva de pérdida cuadrática. La idea principal del método es resolver primeramente el problema de optimización de flujo que resulta al dividir el intervalo de capacidad en un número pequeño de segmentos con pérdidas lineales. Cuando el flujo es óptimo con respecto a tales segmentos, el número de segmentos se aumenta de acuerdo a un factor y el algoritmo de optimización se sigue aplicando. El algoritmo así planteado presenta ventajas que discutiremos a lo largo de esta sección.

Conviene señalar que un problema pequeño de redes de flujo fue resuelto primero con un paquete comercial de programación no lineal denominado GINO (General Interactive Nonlinear Optimization), y para el problema particular analizado el tiempo en una PC (4.7MH) fue 80 segundos. El método propuesto consumió únicamente dos segundos y la función objetivo es 0.01% mayor que la solución exacta producida por GINO. Otra ventaja es que podemos seguir aumentando el número de segmentos lineales hasta que la precisión sea satisfactoria, sin incrementar el requerimiento de memoria. El tiempo consumido, cuando 16 segmentos son utilizados para aproximar la curva de pérdida, es casi doble que el consumido por el un problema de misma dimensión pero con pérdida lineal.

Para solucionar el problema con pérdida cuadrática usando la técnica de aproximación sucesiva, primero se desarrolla una subrutina que resuelve el problema con la curva de pérdida piezolineal (subrutina 2.1). Luego con el algoritmo 2.2, se resuelve el problema con pérdida cuadrática. Dado que el problema es convexo, la solución factible para caso piezolineal es factible para caso cuadrático. El procedimiento anterior equivale la técnica de

dirección de descenso factible en la programación no lineal. En el momento en que tal dirección no existe, se tiene la solución óptima.

Usando la interpretación de la relación entre el flujo y las variables duales, para la pérdida cuadrática, se aumentan las siguientes variables:

1. Se asocia a cada arco  $k$  dos parámetros de ganancia, la ganancia cuando el flujo se incrementa (ganancia hacia adelante) denotada por  $A(k)$ , y la ganancia cuando el flujo se disminuye (ganancia hacia atrás) denotada por  $AR(k)$ .

2. Similarmente, se asocia a cada nodo dos variables duales: el costo de obtener una unidad de flujo desde la raíz del árbol de la base, tal costo denotamos por  $FPI(i)$ ; el costo de envío de regreso una unidad de flujo  $RPI(i)$ . En el algoritmo para pérdidas lineales, únicamente se requiere la variable dual  $FPI(i)$  porque para cada arco existe una ganancia única.

3. El intervalo de capacidad de arco  $k$  se reemplaza temporalmente por  $\{c_k, \bar{c}_k\}$  donde  $c_k$  es el punto de ruptura inmediatamente menor que  $x_k$ , excepto cuando  $x_k=0$ , se toma  $c_k=0$ ;  $\bar{c}_k$  es el punto de ruptura inmediatamente mayor que  $x_k$ , excepto cuando  $x_k=c_k$ , se toma  $\bar{c}_k=c_k$ .

A continuación, describimos el algoritmo aproximado de optimización de flujo cuando la ganancia es piezolineal y el costo convexo diferenciable. Detalles de implantación se encuentran en el anexo A2.2.

#### SUBROUTINA 2.1

Propósito: Encontrar una solución aproximada al problema de optimización de flujo con ganancia piezolineal y costo convexo diferenciable.

#### DESCRIPCION

Paso 1. Empezar con una solución básica factible inicial. Asignar las variables duales que satisfagan la condición de holgura complementaria.

Paso 2. Encontrar un arco que viola la factibilidad dual. Sea este el arco  $(k_e)$  que entra a la base. Si no existe, terminar con la solución óptima.

Paso 3. Encontrar una trayectoria de flujo aumentante que incluye  $k_e$  y arcos básicos. Aumentar el flujo a través de la trayectoria hasta no pueda disminuir el costo total. Determinar el arco  $(k_l)$  que sale de la base.



Paso 4. Cambiar la base por borrar  $k_1$  e insertar  $k_e$ . Modificar las variables duales para satisfacer la holgura complementaria para la nueva base. Ir al paso 2.

Ahora describimos el algoritmo de aproximación implícita sucesiva para resolver el problema (Q').

ALGORITMO 2.2 Algoritmo de aproximación sucesiva

Propósito: Resolver el flujo óptimo con pérdida cuadrática y costo convexo diferenciable.

DESCRIPCION

Paso 1. Escoge un  $N_s$  como el número inicial segmentos de aproximación lineal. Como el algoritmo de optimización normal, agregamos a la red original (N,A) 3 arcos artificiales como se ilustra en la figura 2.2.1. donde M es un número muy grande. Inicialmente existen  $\sum_{i \in N_d} d_i$  unidades de flujo en el arco  $k_{a1}$ , 0 en otros arcos. Como el costo es muy grande en  $k_{a1}$  y muy pequeño en los arcos de tipo  $k \sim (j,t)$ , el algoritmo 2.1 tratará de enviar el flujo a t por k.

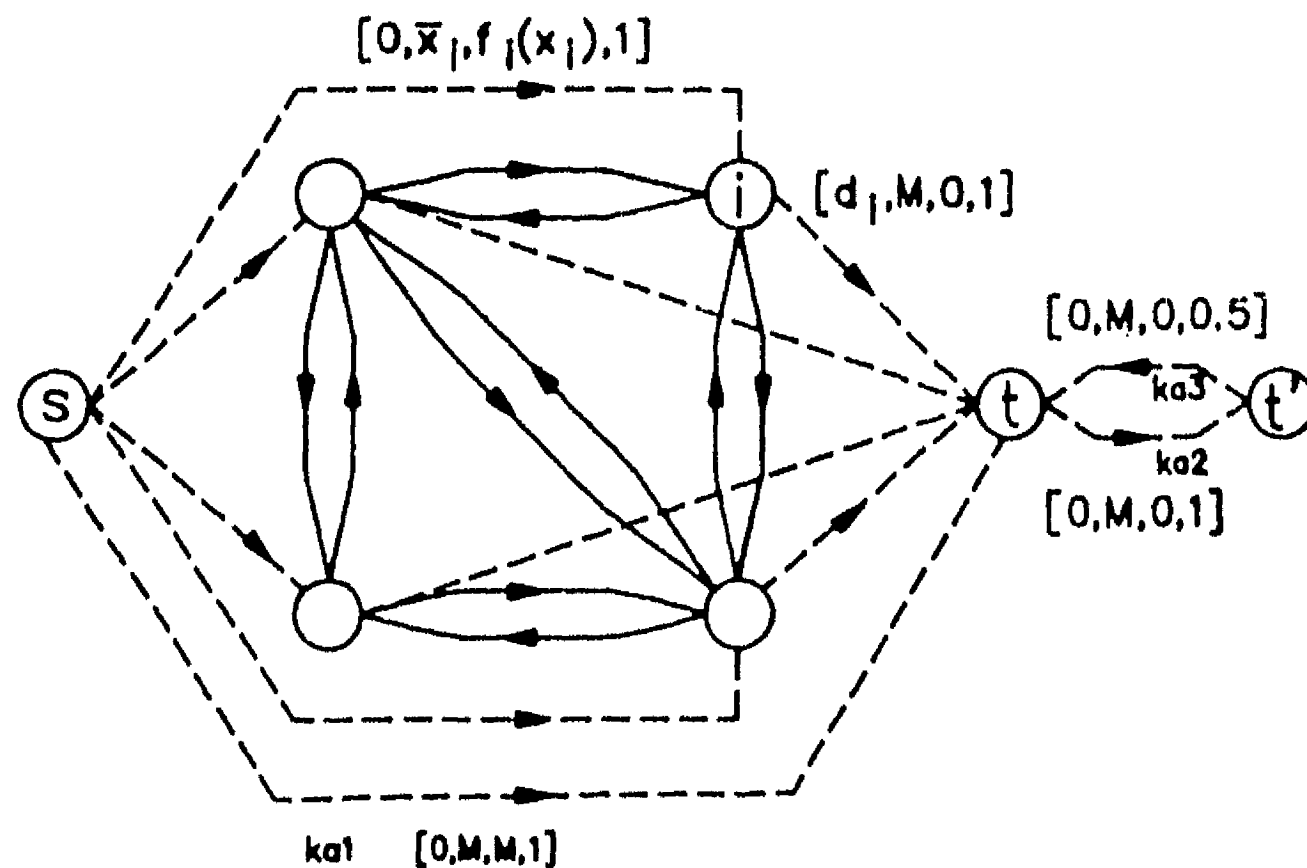


Figura 2.2.1 Representación del problema de flujo con pérdida cuadrática

Paso 2. Aplicar la subrutina 2.1. Suponga que en alguna iteración,  $x_{jt}$  se aumenta para alcanzar  $d_j$  entonces asignamos su costo el valor cero y el intervalo de capacidad  $[d_j, M]$ .

Paso 3. Cuando la subrutina 2.1 termina, y el número de segmentos lineales es menor que NTOT (el número de segmentos requeridos para la aproximación), dividimos el intervalo por un factor predeterminado FACT.  $N_s$  se reemplaza por  $N_s' = N_s \times \text{FACT}$ . Denotamos la curva piezolineal que usa  $N_s$  segmentos por  $L_{N_s}$ . Como la curva de pérdida  $L_{N_s'}$  está debajo de  $L_{N_s}$ , el sobrante de flujo se envía por  $(j, t)$  y se absorbe por el ciclo formado por los arcos  $ka2, ka3$ . De esta manera, esta implantación refleja correctamente la desigualdad (2.1.1). Para cada arco  $k \sim (i, j)$ ,  $x_k \in [c_{k, n-1}, c_{k, n}]$ ,  $x_k \in [c_{k, n'-1}, c_{k, n'}]$ , definimos el sobrante

$$\begin{aligned} \ell_j &= L_{N_s}(x_{1j}) - L_{N_s'}(x_{1j}) \\ &= \{r_k c_{k, n-1}^2 + (x_k - c_{k, n})^{m_{k, n}}\} - \{r_k c_{k, n'-1}^2 + (x_k - c_{k, n'})^{m_{k, n'}}\} \end{aligned}$$

$x_{jt}$  se incrementa por  $\ell_j$ ,  $x_{ka2}$  por  $2\ell_j$ ,  $x_{ka3}$  por  $2\ell_j$ . Entonces el flujo se conserva en los nodos  $i, j, t, t'$ , ya que existe una pérdida  $\ell_j$  en el arco  $(t', t)$ .

Si el número de segmentos es mayor que NTOT entonces el algoritmo termina. Si no, regresa al paso 2.

Cuando los costos son piezolineales, el algoritmo Simplex Convexo termina en un número finito de pasos [ROC84]. Para el caso cuadrático, la convergencia es más difícil de establecer según la misma referencia. Sin embargo, en el algoritmo desarrollado, podemos switchear a la aproximación piezolineal para el costo convexo cuando se observa que la disminución de costo total durante un número de iteraciones es suficientemente pequeña. De tal manera se garantiza la convergencia finita pero posiblemente con una solución subóptima. Otro criterio de terminación del algoritmo es proporcionar una tolerancia del costo reducido. Esto es, si el ahorro por modificar una unidad de flujo en un circuito es menor que esta tolerancia, se termina el algoritmo.

Teorema 2.1. Suponga que  $(Q')$  tiene una solución óptima  $X^*$  y denota  $X_{N_s}$  como la solución del algoritmo 2.2. Entonces cuando  $N_s \rightarrow \infty$ ,  $X_{N_s} \rightarrow X^*$ .

Prueba: Como la curva de aproximación piezolineal está debajo de la curva cuadrática,  $X_{N_s}$  es factible para el problema  $(Q')$ . Por otro lado, el

algoritmo 2.2 elimina la posibilidad de que un arco fuera del árbol de la base forma circuito con algunos arcos en la base que pueda reducir el costo total. Cuando  $N_s \rightarrow \infty$ ,  $A(k) = 1 - r_k(2x_k + \bar{x}_k/N_s) \rightarrow AR(k) = 1 - r_k(2x_k - \bar{x}_k/N_s)$ ,  $FPI(1) \rightarrow RPI(1)$ , la terminación del algoritmo 2.2 implica que no existe la dirección de desenso factible (para pérdida piezolineal, el algoritmo 2.2 equivale al método de Simplex convexo [ROC84], [KEN80]. Por tanto  $X_{N_s} \rightarrow X^*$ . ■

Entonces para cada arco con pérdida cuadrática, lo representamos únicamente por un arco con dos factores de ganancia (hacia adelante y hacia atrás). La valuación de la función del costo y pérdida en el programa de computadora se puede reemplazar por otras funciones convexa y diferenciables.

### 2.3 RELACION CON EL FLUJO DE CARGA DC

Considere el problema de flujo de carga óptimo (P) sin las restricciones (1.2.6), específicamente, el problema:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } \sum_{l \in N_g} f_l(x_l) \\ & \text{s.a.} \\ \text{(NFP)} \quad & \sum_{\substack{j \in J \\ s(j)=1}} (x_j, -r_j x_j^2, -x_j) + \sum_{\substack{j \in J \\ e(j)=1}} (x_j, -r_j x_j^2, -x_j) \geq \begin{cases} d_l & l \in N_d \\ d_l - x_l & l \in N_g \end{cases} \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

$$0 \leq x \leq \bar{x} \quad (1.2.7)$$

Dicho problema puede ser resuelto satisfactoriamente usando el algoritmo descrito en la sección anterior. En esta aplicación conviene puntualizar que usaremos implícitamente el siguiente resultado [BAR87]:

Una corriente que respecta a la primera ley de Kirchhoff y minimiza la pérdida también satisface la segunda ley de Kirchhoff si todos los arcos no están saturados. Equivalentemente, si minimizamos el costo cuadrático  $\sum_{j \in C} r_j I_j^2$  en una red sin pérdida, en la solución óptima, la segunda ley de Kirchhoff se cumple, i.e.  $\sum_{j \in C} r_j I_j = 0$  para cada circuito  $C$ .

Lo anterior es cierto sustituyendo la corriente  $I_j$  por la potencia  $(x_j - x_{j'})$ .

La experiencia muestra que en el problema (P), cuando los costos de generación son similares en todos los buses de generación, el proceso de minimización de (NFP) nos conduce a una solución que "casi satisface"  $\sum_{j \in C} r_j(x_j - x_{j'}) = 0$ . Por ejemplo, en el sistema de seis buses de EPRI (ver los capítulos 3 y 5), cuando la optimización del flujo sin restricciones de ángulo de voltaje termina, los valores de  $\sum_{j \in C} r_j(x_j - x_{j'})$  de sus tres circuitos fundamentales son (0.002, -7.5E-5, 0.00028). En una red de transmisión eléctrica, usualmente se maneja pocos voltajes (en el sistema peninsular sureste de México y en el sistema sureño de Brasil, dos voltajes son utilizados), entonces pocos tamaños de conductores son utilizados. Suponga el caso más simple en se utiliza un solo tipo de conductor, y la reactancia es aproximadamente un factor de la resistencia, i.e.  $X_j = \alpha r_j$  donde  $\alpha$  es una constante. Entonces  $\sum_{j \in C} r_j(x_j - x_{j'}) = 0$  implica que  $\sum_{j \in C} (x_j - x_{j'})/B_j \approx -\sum_{j \in C} X_j(x_j - x_{j'}) = -\alpha \sum_{j \in C} r_j(x_j - x_{j'}) \approx 0$ , i.e., casi se cumple las restricciones de ángulo de voltaje. Por tanto la solución de (NFP) está cerca de la solución correspondiente de (P), especialmente, cuando el número de segmentos para aproximar la curva de pérdida es grande. Para ilustrar esta observación consideremos el caso de dos líneas de transmisión idénticas que conjuntamente lleva una potencia  $x_j$  a suministrar la demanda del bus e(j) (Figura 2.3.1). Si el intervalo de capacidad individual  $[0, \bar{x}_j]$  se divide en N segmentos, obviamente en la solución óptima de programación lineal u otras técnicas de optimización, la diferencia máxima entre la potencia transmitida en estas dos líneas es  $\bar{x}_j/N$ . Si usamos un número muy grande de segmentos para aproximar la curva de pérdida, los flujos en las dos líneas son casi iguales, entonces la segunda ley de Kirchhoff casi se satisface.

Consideramos de nuevo el problema de flujo de carga DC (P) expresado en la siguiente forma

$$(DCP) \quad \text{Minimizar } \sum_{l \in N} f_l(x_l) \quad \text{s.t. (1.2.5), (1.2.7) y } Ex=0.$$

donde E denota la matriz asociada a las restricciones (1.2.6) con dimensión  $|J \setminus T| \times |X|$ .

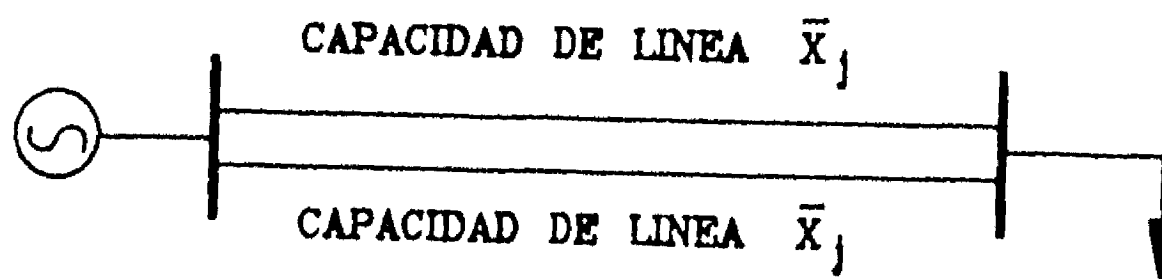


Figura 2.3.1 Ejemplo de la importancia de número de segmentos de aproximación

El problema lagrangeano es un problema de flujo en redes parametrizado por  $v \in \mathbb{R}^{|\mathcal{J} \setminus \mathcal{T}|}$  (números reales con dimensión  $|\mathcal{J} \setminus \mathcal{T}|$ )

$$(NFP(v)) \quad Z_{NFP}(v) = \min_x \sum_{l \in \mathcal{N}_g} f_l(x_l) + v^T Ex \quad \text{s.a. (1.2.5) (1.2.7)}$$

Por teoría de dualidad, (DCP) es equivalente a

$$\max_v Z_{NFP}(v) \quad v \in \mathbb{R}^{|\mathcal{J} \setminus \mathcal{T}|} \quad (2.3.1)$$

Por otro lado, podemos encontrar una cota superior del problema (DCP) usando la descomposición Dantzig-Wolfe. El programa lineal maestro relajado es

$$Z_{LP} = \max_{z, v} z$$

$$(LP) \quad \text{s.a.} \quad \sum_{l \in \mathcal{N}_g} f_l(x_l^k) + v^T Ex^k \geq z \quad k=1, \dots, S$$

donde  $x^k$ ,  $k=1, \dots, S$  son soluciones factibles de  $(NFP(v))$ . Después de resolver el problema (LP),  $Z_{LP}$  es una cota superior de  $(NFP(v))$ .

En los últimos 20 años, el método de relajación lagrangeana (RL) ha resuelto exitosamente muchos problemas de optimización. En el campo de programación entera, se ha mostrado que la RL es más poderosa y sistemática para obtener cotas que el método convencional de ramificación y acotamiento (Branch and Bound). Considerando la buena aproximación del valor óptimo del problema dual, el uso de métodos de subgradiente es particularmente recomendable por su simplicidad de implantación y su eficiencia. En este método, si un problema de optimización tiene estructura especial cuando algunas de sus restricciones no se toma en cuenta, entonces el problema completo puede resolverse usando una sucesión de subproblemas con la estructura especial. Obviamente, eso requiere que tales subproblemas se resuelvan eficientemente.

El algoritmo descrito en las secciones anteriores es mucho más eficiente que programación no lineal de propósito general aplicado al problema de redes y podemos aplicar método de relajación para el problema de flujo de carga DC aprovechando la estructura de flujo en redes.

Un procedimiento sistemático que resume la discusión anterior y resuelve el problema (DCP) es:

### ALGORITMO 2.3. EL FLUJO DE CARGA OPTIMO DC

Propósito: Encontrar la solución óptima del problema de flujo de carga DC mediante la relajación lagrangiana.

#### DESCRIPCION

Paso 0.  $v=0$ ,  $Z_{LP}=\infty$ ,  $S=0$

Paso 1. Resuelve (NFP( $v$ )) y obtiene la solución  $x^*$ , asigna  $S=S+1$ ,  $x^S=x^*$ , resuelve (LP).

Paso 2. Si  $Ex^k=0$  o  $Z_{NFP}(v) \geq Z_{LP}$  termina, tenemos la solución óptima. En caso contrario, va al paso 3.

Paso 3. Depende del valor de  $Ex$  y  $Z_{NFP}(v)$ , realiza una búsqueda multidimensional para encontrar otro valor de  $v$  que incrementa  $Z_{NFP}(v)$ . Regresa al paso 1.

De hecho el criterio de terminación en el paso 2 se puede remplazar por:  $Ex^k$  es suficientemente pequeño en comparación con su valor inicial, o  $Z_{NFP}(v) \geq Z_{LP} - \epsilon$  con un número pequeño  $\epsilon$ . Para la implantación práctica, la búsqueda de  $v$  puede ser limitada en un intervalo grande. Basado en nuestra experiencia computacional, cuando el número de variables  $v_1$  es pequeño (menor que 10), la solución dada por (LP) de la descomposición Dantzig-Wolfe en el paso 1 puede servir del valor de  $v$  en el paso 3. Sin embargo, cuando el número de variables sea grande, se vuelve ineficiente en la solución del flujo de carga DC.

Una técnica en el paso 3 es la de ascenso máximo. Se efectúa búsqueda lineal sobre la dirección de ascenso máximo  $Ex^k$ , i.e. resolver el problema

$$\max_{\lambda_k} Z_{NFP}(v^k + \lambda_k^T Ex^k).$$

Cuando se encuentra el valor óptimo  $\lambda_k^*$ , tenemos un nuevo multiplicador  $v^{k+1} = v^k + \lambda_k^{*T} Ex^k$ . El algoritmo converge en un número finito de pasos como se demuestra en [BAZ79]. El método de ascenso máximo usualmente trabaja bien en

las primeras etapas del proceso de optimización. Sin embargo cuando el punto estacionario se aproxima, el método usualmente mejora la solución problemente.

## 2.4 ALGORITMO DE SUBGRADIENTE PARA EL FLUJO DE CARGA DC OPTIMO

Una gran variedad de problemas de programación matemática se puede escribir como

$$Z^* = \text{Maximizar } Z(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \quad (2.4.1)$$

donde

$$Z(v) = \text{Min} \{c_k + v^T d_k, k=1, \dots, K\} \quad (2.4.2)$$

$c_k$  es un escalar,  $v_k = (v_{k1}, \dots, v_{kn})^T$  es un vector real de dimensión  $n$  para todo  $k$ . Tal es el caso de la solución del problema (DCP), cuando se desea maximizar la función lagrangeana que consiste en

$$Z_{NFP}(v) = \text{Min}_x \sum_{i \in N_g} f_i(x_i) + v^T Ex \quad \text{s.a. (1.2.5) (1.2.7)}$$

En esta sección, se describe el método de subgradientes para encontrar los valores de los multiplicadores  $v$ . La aplicación de tal método permite resolver eficientemente el problema de flujo de carga DC óptimo.

Supongamos que  $Z$  en (2.4.2) es acotada superiormente. Como es piezolineal, existe al menos un punto  $v^*$  tal que  $Z(v^*) = Z^*$ .

Para cualquier  $v$ , se supone que existe al menos un valor del índice  $k$  para el mínimo en (2.4.2). El valor de  $c_k$  y  $d_k$  debido a este  $v$  se denota por  $c_k(v)$ ,  $d_k(v)$ . Si tal índice es único,  $Z(v)$  es diferenciable en  $v$ . Si son más índices, debemos usar el concepto de subdiferenciabilidad como sigue.

El vector  $u$  de dimensión  $n$  es un *subgradiente* en  $x \in \mathbb{R}^n$  de la función cóncava  $f$  si  $f(y) - f(x) \leq u^T(y-x) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$ .

Sea  $Z(y) = c_k(y) + y^T d_k(y)$ ,  $Z(x) = c_k(x) + x^T d_k(x)$  entonces

$$Z(y) - Z(x) \leq [c_k(x) + y^T d_k(x)] - [c_k(x) + x^T d_k(x)] = d_k^T(x)(y-x)$$

Esto es,  $d_k(x)$  es un subgradiente de  $Z(x)$ . Un ejemplo se muestra en la figura 2.4.1 donde  $n=1$ .

Sea  $v^*$  cualquier punto en el conjunto óptimo, i.e.  $Z(v^*) = Z^*$ . Supongamos que en un paso resolvemos  $Z(v^k)$ . Usando la desigualdad anterior, tenemos que

$$Z^* - Z(v^k) \leq d(v^k)^T (v^* - v^k) \quad (2.4.3)$$

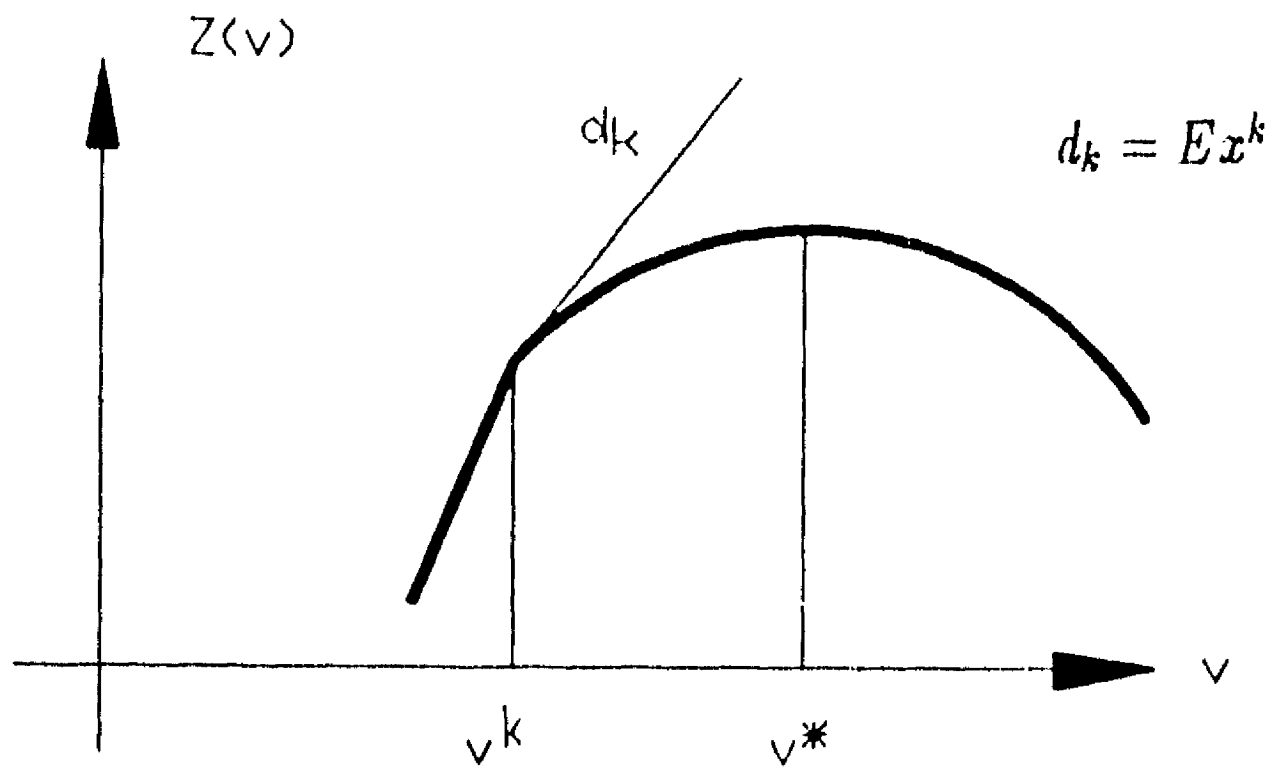


Figura 2.4.1 Ejemplo de subgradiente

$$0 \leq Z^* - Z(v^k) \leq d(v^k)(v^* - v^k)$$

$$\text{Movimiento M\u00e1ximo} = 2(Z^* - Z(v^k)) / \|d(v^k)\|^2$$

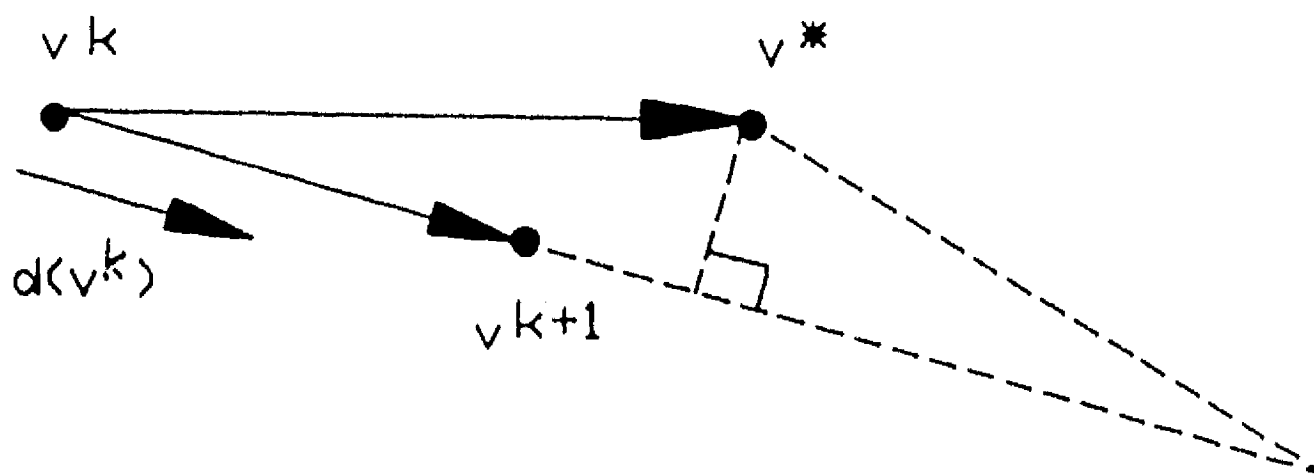


Figura 2.4.2 Ilustraci\u00f3n de m\u00e9todo de subgradiente

Por tanto si  $v^k$  no es \u00f3ptimo,  $0 \leq d(v^k)(v^* - v^k)$ , entonces la direcci\u00f3n  $d(v^k)$  hace un \u00e1ngulo agudo con  $(v^* - v^k)$ . Consecuentemente, si movemos una distancia suficientemente peque\u00f1a sobre  $d(v^k)$ , el punto  $v^{k+1}$  estar\u00e1 m\u00e1s cerca de  $v^*$  que  $v^k$  (ver la figura 2.4.2). Por tanto la secuencia de  $v$  generada de esta manera aproxima al conjunto \u00f3ptimo, aunque el valor objetivo  $Z(v^k)$  no es mon\u00f3tono.

Ahora vamos a determinar la distancia que se mueve a lo largo de la direcci\u00f3n  $d(v^k)$ . Es obvio desde la figura que

$$\|td(v^k)\| \leq 2\|v^* - v^k\| \cos \alpha = 2\|v^* - v^k\| \frac{(v^* - v^k)^T d(v^k)}{\|v^* - v^k\| \|d(v^k)\|}$$



donde  $\|\cdot\|$  es la norma euclídeana, por tanto

$$t \leq 2 \frac{(v^* - v)^T d(v^k)}{\|d(v^k)\|^2} \quad (2.4.4)$$

Pero por (2.4.3), sabemos que si se escoge  $t$  tal que

$$t \leq 2 \frac{Z^* - Z(v^k)}{\|d(v^k)\|^2}$$

$v^{k+1}$  será mejor que  $v^k$  y cumplirá con (2.4.4).

Para aplicar la técnica de subgradiente a nuestro problema, sea  $v^*$  cualquier punto en el conjunto óptimo, i.e.  $Z_{NFP}(v^*) = \max_v Z_{NFP}(v)$ . La regla para generar la secuencia de  $v$  es:

$$v^{k+1} = v^k + t^k Ex^k \quad \text{donde } t^k = \frac{\lambda^k (Z^* - Z_{NFP}(v^k))}{\|Ex^k\|^2}$$

En la fórmula anterior,  $\lambda^k$  es un escalar que satisface  $0 < \lambda^k \leq 2$ ,  $Z^*$  es el óptimo valor del problema (DCP).

En la fórmula anterior, si se puede estimar  $Z^*$  exactamente, el algoritmo es convergente [MIN86]. Sin embargo, dada la dificultad de estimar  $Z^*$  con exactitud, Fisher [FIS81] propuso reemplazar  $Z^*$  por la cota superior. Si en un número fijo de iteraciones, no se mejora la solución el problema lagrangeano, se reduce el valor de  $\lambda$  a la mitad. De esta manera se compensa la sobre-estimación de  $Z^*$ . El concluyó que esta fórmula trabaja mejor que otras alternativas en la práctica.

Nuestra implantación es similar a [FIS81], pero tomamos 1 como el valor inicial de  $\lambda$  y usamos la solución del programa lineal  $Z_{LP}$  como  $Z^*$ . De esta manera la secuencia de  $\lambda^k$  se determina por asignar  $\lambda^0 = 1$  y dividir  $\lambda^k$  a la mitad cuando  $Z_{NFP}(v)$  no se incrementa en algún número fijo de iteraciones. Durante este proceso, si la restricción  $\sum_{i \in N_g} f_i(x_i^k) + (v^k)^T Ex^k \geq z$  es efectiva para el problema (LP) se agrega al programa lineal para producir mejores cotas  $Z^*$ . Otros metodos de seleccionar  $\lambda^k$  y  $Z^*$  se encuentra en [MIN86].

Cuando se aplica la técnica de relajación lagrangeana, el tiempo de la solución de (DCP) es varias veces que un problema de flujo en redes. Pero el algoritmo de flujo en redes es más eficiente que el de optimización no lineal por un factor mucho mayor. Por tanto la descomposición mejora la velocidad de solución además de usar menos memoria. La desventaja del método de

subgradiente es que si la cota superior producida por la programación lineal está muy lejos del valor óptimo, el algoritmo converge muy lentamente. En este caso es conveniente usar otros métodos para estimar más precisamente el valor óptimo del problema de DC.

Existen otras alternativas para resolver el problema de flujo de carga DC como la especialización de los algoritmos de programación no lineal [DEM89]. Otros tipos de representación de la base también se puede aplicar como los de [KEN80] y [BRO84]. Posiblemente estos métodos puedan mejorar la eficiencia de solución aunque el análisis y la implantación es mucho más complicado.

ANEXO A2.1 ESTRUCTURA DE DATOS

En las últimas dos décadas los procedimientos de cálculo de operaciones relacionadas con árboles han sido significativamente mejorados dando como resultado el uso de las denominadas estructuras de datos. Una de ellas, extensamente usada en algoritmos de redes, es la llamada *técnica de tres etiquetas* que describiremos aquí.

En esta estructura de datos cada nodo tiene asociado tres enteros (apuntadores), y cada uno de ellos se refiere a un nodo o un arco del árbol. Las etiquetas para el nodo  $i$  se llaman el apuntador hacia atrás, que se denota  $PB(i)$ , el apuntador hacia adelante, que se denota  $FP(i)$ , y el apuntador hacia la derecha, denotada  $PR(i)$ . El apuntador hacia atrás es el único arco que termina en el nodo  $i$ . El apuntador hacia adelante es el nodo más a la izquierda del árbol que es nodo terminal de un arco originado en el nodo  $i$ . El apuntador hacia la derecha es el nodo del árbol que aparece directamente a la derecha del nodo  $i$ , esto es,  $PR(i)$  apunta al nodo "adyacente derecho" al nodo  $i$  y en el mismo nivel como el nodo  $i$ . La tabla A2.1.1 da una representación de apuntadores para el árbol mostrado en la figura A2.1.1.

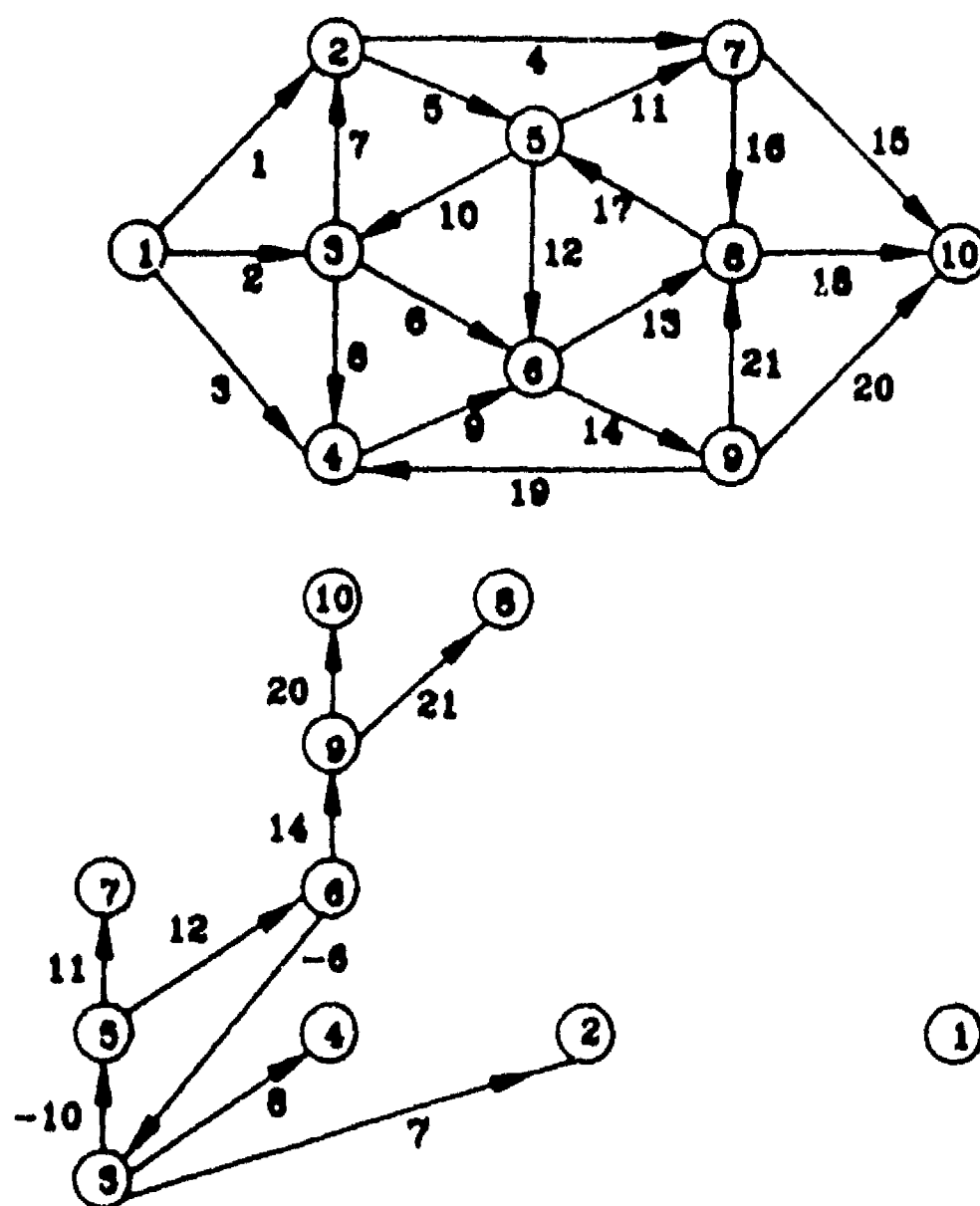


Figura A2.1.1 Representación gráfica de un árbol

Nodo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PB(arco)	0	7	-6	8	-10	12	11	21	14	20
PF(nodo)	0	0	5	0	7	9	0	0	10	0
PR(nodo)	0	0	0	2	4	0	6	0	3	8

Tabla A2.1.1 Ejemplo de representación de 3 etiquetas

Nótese que el árbol asociado a la base de una red con ganancias puede contener algún ciclo que juega el papel usual del nodo raíz; esto no es problema para la representación de tres apuntadores como observamos en este ejemplo, i.e. tal estructura de datos no se presta a ambigüedades.

Un procedimiento básico de un árbol es que cada nodo es nodo terminal de a lo mucho un arco. Sin embargo, en cada nodo se puede originar más de un arco. Por tanto, para un árbol dado, la asignación de apuntador hacia atrás es única, pero la asignación de los apuntadores hacia adelante y hacia derecha no es necesariamente única.

## ANEXO A2.2 DETALLES Y COMENTARIOS SOBRE EL ALGORITMO CASO PIEZOLINEAL

En la sección 2.2 sólo hemos presentado un esquema general de la subrutina para resolver la optimización de flujo cuando la pérdida es piezolínea. Sin embargo, eso no es suficiente cuando se desea resolver un problema real o codificarlo en una computadora. Es por ello que a continuación se presenta el detalle de cada paso del algoritmo 2.1.

Paso 1.

El método de arco artificial se utiliza cuando uno desea tener una solución básica inicial factible. Este método usa el arco  $(s,t)$  para satisfacer las restricciones de factibilidad en los nodos por asignar un costo muy grande a este arco. Cualquier procedimiento primal causará eventualmente que el flujo en  $(s,t)$  disminuya a cero si existe una solución factible. Esta manera es equivalente al método de gran M en la programación lineal.

Aplicando el algoritmo de Dijkstra para obtener un árbol de costos mínimos para llegar a todos los nodos (Tal árbol se llama arborescencia). De esta manera tenemos una base inicial y las variables duales correspondiendo a los costos mínimos.

Paso 2.

Considere los arcos que no están marcados (esta marcación se hace en el paso 3) y están fuera del árbol de la base, el arco que entra a la base  $ke$  tiene que satisfacer una de las siguientes condiciones

1.  $x_{ke} < \bar{c}_k$  y  $FPI(1) + f'_{ke}(x_{ke}) < A(ke)RPI(J)$
2.  $x_{ke} > \bar{c}_k$  y  $RPI(1) + f'_{ke}(x_{ke}) > AR(ke)FPI(J)$

donde  $f'$  es la derivada.

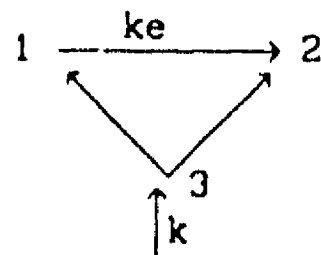
En el caso 1, conviene aumentar el flujo en el arco  $ke$ , mientras que en el caso 2, conviene disminuir el flujo.

En nuestro programa se usa la regla "primer nodo más negativo". Se considera cada vez un nodo y se revisa los arcos que se originan en él. Cuando un nodo es encontrado por primera vez con un costo reducido negativo, el arco con el menor costo reducido que origina en este nodo es seleccionado para entrar a la base. La siguiente vez que efectúa el paso 2, se empieza la revisión con otro nodo.

Paso 3.

Después de decidir el arco que entra a la base se debe encontrar los arcos en la base con que se forman un circuito.

Considere el siguiente caso:



Suponga que el costo reducido del arco  $ke$  es  $Cr = FPI(1) + f'(ke) - RPI(2) \cdot A(ke) < 0$ , por tanto  $ke$  puede entrar a la base por la verificación de la condición de holgura complementaria. Sin embargo, antes, se debe tomar en cuenta dos casos particulares:

Caso a) Si la ganancia del nodo 3 es negativa, i.e., el incremento de flujo en  $ke$  provocará un decremento de flujo en el arco que llega a 3, digamos  $k$ . Entonces no pudimos usar  $FPI$  en nodo 1 para calcular  $Cr$ .

Caso b) Similar al caso anterior, si la ganancia del nodo 3 es positiva, no es válido usar  $RPI$  en el nodo 2 para calcular  $Cr$ .

En ambos casos debemos buscar el valor correcto de la variable dual correspondiente a los nodos para el cálculo de  $Cr$ . Si el valor nuevo de  $Cr$  es positivo,  $ke$  no puede entrar a la base, se marca el arco para que no se tome en cuenta en el paso 2.

Denotando  $G(k)$  como el cambio de flujo en el arco  $k$  cuando incrementa una unidad de flujo en el arco  $ke$ , suponga que el incremento de flujo en  $ke$  es  $\Delta x$ , entonces el cambio de flujo en el arco  $k$  es  $G(k) \cdot \Delta x$ . El incremento del costo total cuando el costo es de forma  $C2(k)X(k)^2 + C1(k)X(k)$

$$\Delta F = \sum_{k \in C} [C2(k) \{ (X(k) + G(k)\Delta x)^2 - X(k)^2 \} + C1(k) \cdot G(k)\Delta x]$$

donde  $C$  es el circuito obtenido por introducir  $ke$ .  $G(k)$  puede ser positivo o negativo.

La variación de  $\Delta F$  con respecto a  $\Delta x$  es:

$$d\Delta F/d\Delta x = \sum_{k \in C} [2 \cdot C2(k)G(k)X(k) + C1(k) \cdot G(k)] = \sum_{k \in C} 2 \cdot C2(k)G(k)X(k) + C1(k)G(k)$$

Para que  $d\Delta F/d\Delta x = 0$ , se debe cumplir  $\Delta x = -C1(k)G(k) / \sum_{k \in C} 2 \cdot C2(k)G(k)X(k)$ . Es decir, si el

incremento del flujo en  $ke$  excede este valor el costo total va a crecer. Por tanto a parte de considerar los límites impuestos por la capacidad de los arcos, se debe considerar este factor para definir el máximo cambio de flujo.

Se define de nuevo las ganancias  $A(k)$ ,  $AR(k)$  del arco  $k$  una vez que su flujo ha sido modificado. Acompañando a las ganancias el intervalo de capacidad y la derivada del costo también se modifican.

Cuando el flujo cae en un punto de ruptura se calcula la ganancia hacia adelante  $A$  como sigue (ver la figura A2.2.1)

$$1 - r_k \frac{(c_k + 2\Delta c)^2 - (c_k + \Delta c)^2}{\Delta c} = 1 - r_k \cdot (2 \cdot (c_k + \Delta c) + \Delta c)$$

y la ganancia hacia atrás  $AR$ :

$$1 - r_k \frac{(c_k + \Delta c)^2 - c_k^2}{\Delta c} = 1 - r_k \cdot (2 \cdot c_k + \Delta c)$$

En el caso de que el flujo cae en el lado izquierdo (ver la figura A2.2.1), la ganancia  $A(k)$  toma valor de  $AR(k)$  y  $\bar{c}_k = c_k + \Delta c$ .

En el caso de que el flujo cae en el lado derecho, la ganancia  $AR(k)$  toma valor de  $A(k)$  y se mueve  $c_k$  a la derecha  $\Delta c$  unidades.

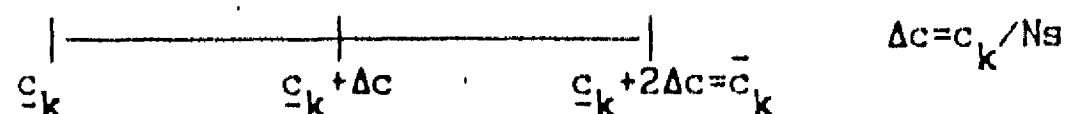
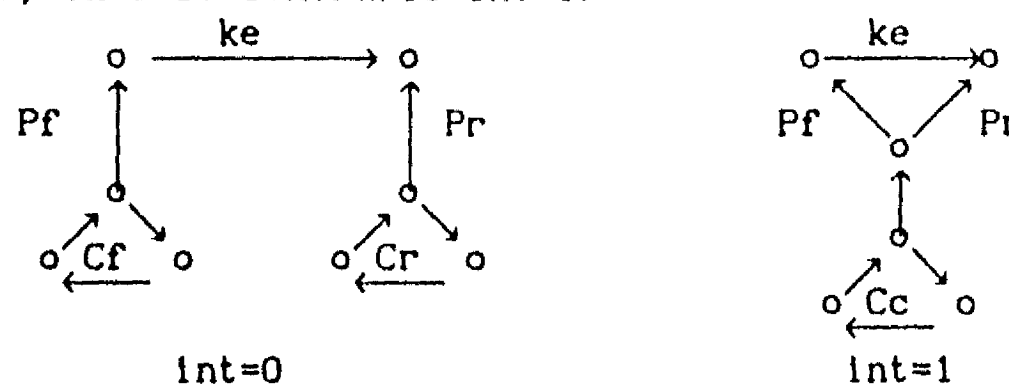


Figura A2.2.1 Cálculo de las ganancias hacia adelante y hacia atrás

Paso 4.

La actualización de las variables duales: este proceso para el caso de costos convexos diferenciables es mucho más complicado que el caso de costos lineales, porque para cada arco con flujo alterado, es necesario calcular de nuevo la variable dual de nodos que tienen raíz en el nodo final del arco. Durante una iteración, existen un arco  $k_e$  que entra al árbol de la base y uno  $k_l$  que sale. El proceso de actualización de las variables duales depende de la posición de  $k_e$  y  $k_l$  en el árbol. Sin embargo, existen cuando mucho dos componentes relacionadas de la base que requiere la actualización. Por tanto usamos  $l_1$  y  $l_2$  para indicar el nodo inicial desde el cual debemos calcular las variables duales.

En la siguiente figura,  $P_f$  es llamada la parte hacia adelante y  $P_r$ , la parte hacia atrás. Si  $P_f$  y  $P_r$  no tienen nodo en común entonces la variable  $int=0$ , en caso contrario  $int=1$ .



El procedimiento para calcular las variables duales es:

$l_1$ =nodo de unión de  $P_f$  si tal nodo existe, si no  $l_1=s$ .

$l_2$ =nodo de unión de  $P_r$  si tal nodo existe, si no  $l_2=s'$ .

Si  $k_e=k_l$  e  $int=1$  entonces  $l_2=0$ .

Si  $k_e \neq k_l$ , existen los siguientes casos:

(ver la figura izq. donde  $int=0$ )

$int=0$  y  $k_l \in P_f$  y  $k_l$  no está en el ciclo  $C_f$

entonces  $k_e = -k_e$ ;

$int=0$  y  $k_l \in P_f$  y  $k_l$  sí está en el ciclo  $C_f$

entonces  $k_e = -k_e$ ,  $l_1=0$ ;

$int=0$  y  $k_l \in P_r$  y  $k_l$  sí está en el ciclo  $C_r$

entonces  $l_2=0$ ;

$int=0$  y  $k_l \in P_r$  y  $k_l$  no está en el ciclo  $C_r$

no hay que hacer nada.

(ahora veamos la figura der. donde  $int=1$ )

$int=1$  y  $k_l \in P_f$  entonces  $k_e = -k_e$ ,  $l_2=0$ ;

$int=1$  y  $k_l \in P_r$  entonces  $l_2=0$ ;

$int=1$  y  $k_l$  está en el ciclo común  $C_c$

entonces  $l_1=0$ ,  $l_2=l_e$ ;

$int=i$  y  $k_l \in P_f, k_l \in P_r$  y  $k_l$  no está en  $C_c$   
entonces  $i_2=i_e$ ;

para todos estos caso  $k_e$  entra a la base y  $k_l$  sale.

Si  $i_1 \neq 0$  calcula la variable dual de nodos que tienen raíz en  $i_1$ .

Si  $i_2 \neq 0$  calcula la variable dual de nodos que tienen raíz en  $i_2$ .

En la actualización de las variables duales en un ciclo, sólo se usa una ganancia del ciclo  $\beta$ , la cual se obtiene usando la ganancia hacia adelante.

Si la ganancia hacia adelante hace que  $\beta=1$ , por construcción, existe un arco  $KR$  con  $A(KR) \neq AR(KR)$ , se usa la ganancia hacia atrás de  $KR$ .

En este momento, como se ha modificado las variables duales, por tanto la marca puesta para los arcos no factibles de ser arco entrante se debe borrar.



---

## CAPITULO 3.

---

### EL PROBLEMA DE EXPANSION Y SU SOLUCION

---

El problema de expansión de un sistema de generación y transmisión ha sido formulado en términos de programación no lineal con variables de decisión mixta. Aunque las técnicas típicas de ramificación y acotamiento combinadas con programación no lineal son aplicables, se presentan problemas de esfuerzo computacional serio cuando el problema crece. Por otra parte, la estructura especial que presentan los subproblemas asociados con la expansión de un sistema eléctrico debe ser considerada en la estrategia de solución de los mismos. Los métodos de descomposición tipo Benders han probado ser adecuado para este tipo de problemas.

El presente capítulo se desarrolla como sigue: en la primera sección se describe algunos de los aspectos estructurales de la técnica de descomposición de Benders generalizada mientras que en la segunda se aplica al problema de expansión. La tercera sección analiza la técnica de derivación de cortes de Benders y en la última se describe la solución del problema maestro asociado. Se anexa la comparación entre el modelo de expansión propuesto y los analizados y recomendados por EPRI.

### 3.1 DESCOMPOSICION DE BENDERS GENERALIZADA

En la teoría de optimización, los métodos de solución asociados a problemas con variables continuas son bastante populares debido a la aplicación de técnicas de cálculo diferencial y propiedades de convexidad de las funciones involucradas. No sucede lo mismo con problemas donde las variables de decisión adquieren valores discretos. En este caso, una alternativa sería resolver el problema como si fuese continuo y posteriormente "redondear" la solución. Tal técnica puede resultar inadecuada y existen diversos métodos para resolver directamente este tipo de problemas como son la técnica de ramificación y acotamiento [GUP85] o los métodos de descomposición. Específicamente, en 1962, Benders propuso un método de descomposición para resolver problemas de optimización donde se involucran diferentes tipos de variables continuas y discretas. Para la clase de problemas considerada, la idea es fijar los valores de variables discretas y reducir el problema dado a un problema de programación lineal simple, parametrizado por el valor de las variables discretas. En 1972, Geoffrion generalizó el algoritmo de Benders para el caso de programación no lineal basando en resultados de dualidad de la programación convexa. En este caso los cálculos de un problema no lineal complejo son descentralizados y analizados como subproblemas más sencillos lo cual hace posible aplicar algoritmos de propósito especial para estos subproblemas.

Las ideas básicas de la descomposición de Benders generalizada [GE072] son como sigue: suponga que tenemos un problema no lineal de la forma

$$(NP) \quad \underset{x, y}{\text{Minimizar}} f(x, y) \text{ sujeto a } G(x, y) \geq 0, \quad x \in X, y \in Y$$

donde  $f$  es una función real definida en  $X \times Y$ , mientras que  $G: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^m$ , con  $X, Y$  conjuntos arbitrarios. Usando el concepto de punto silla existente entre las funciones de un problema primal y su dual, podemos escribir al problema (NP) en forma equivalente como

$$\underset{y \in Y}{\text{Minimizar}} \left\{ \sup_{u \geq 0, u \in \mathbb{R}^m} \left[ \inf_{x \in X} f(x, y) - uG(x, y) \right] \right\}$$

$$\text{s. a. } \sup_{x \in X} \lambda^T G(x, y) \geq 0, \quad \lambda \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$$

o bien

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar } y_0 \\
 & y \in Y \\
 \text{(NP1)} \quad & \text{s.a. } y_0 \geq \inf_{x \in X} \{f(x,y) - u^T G(x,y)\}, \quad \forall u \geq 0 \\
 & \sup_{x \in X} \{\lambda^T G(x,y)\} \geq 0, \quad \forall \lambda \geq 0, \quad \sum_{l=1}^m \lambda_l = 1
 \end{aligned}$$

Este último problema de optimización puede llegar a ser un problema relajado debido a lo siguiente: aun cuando dicho problema tiene un número considerable de restricciones, lo usual es empezar a resolverlo con unos cuantos valores de  $u$  y  $\lambda$  de manera tal de obtener un valor inicial óptimo  $y_0$  que necesariamente es una cota inferior del problema (NP). Por otro lado se obtiene una solución factible de (NP) y su valor en la función objetivo funciona como una cota superior de (NP). Cuando la diferencia entre tales cotas es razonablemente pequeña, el método termina; si éste no es el caso se añaden más valores de  $u$  ó  $\lambda$  obtenidos de acuerdo a una regla o procedimiento bien definido.

Con el propósito de describir dicho algoritmo definiremos

$$L_*(y;u) \equiv \inf_{x \in X} \{f(x,y) - u^T G(x,y)\}, \quad y \in Y, \quad u \geq 0$$

$$L^*(y,\lambda) \equiv \sup_{x \in X} \{\lambda^T G(x,y)\}, \quad y \in Y, \quad \lambda \geq 0$$

que corresponden a operaciones parciales en la solución del problema relajado (NP1). Por otra parte, dado un valor  $y$  fijo se define el subproblema:

$$\text{(NP}(y)) \quad v(y) \equiv \inf_{x \in X} f(x,y) \text{ s.a. } G(x,y) \geq 0,$$

y la proyección sobre  $Y$  de los valores factibles dada por:

$$V \equiv \{y: G(x,y) \geq 0 \text{ para algún } x \in X\},$$

el vector multiplicador óptimo  $\hat{u} \geq 0$  es aquel que maximiza

$$\inf_{x \in X} \{f(x,y) - u^T G(x,y)\}.$$

Algoritmo 3.1: Descomposición de Benders generalizada

Propósito: Resolver el problema de optimización (NP).

DESCRIPCION

Paso 1. Encontrar un punto  $\bar{y}$  en  $Y \cap V \neq \emptyset$ . Resolver el subproblema (NP( $\bar{y}$ )).

Obtener un multiplicador óptimo  $\bar{u}$  y la función  $L_*(y;\bar{u})$ . Sea  $p=1$ ,  $q=0$ ,  $u^1 = \bar{u}$ .

UBD=v(y). Seleccionar el parámetro de tolerancia de convergencia  $\epsilon > 0$ .

Paso 2. Resolver el problema maestro actual relajado:

$$\begin{aligned} & \text{Min } y_0 \\ & \text{s.a. } y_0 \geq L_*(y; u^j) \quad j=1, \dots, p \\ & \quad L^*(y; \lambda^j) \geq 0 \quad j=1, \dots, q \\ & \quad y \in Y \end{aligned}$$

usando cualquier algoritmo aplicable [ZOU70]. Sea  $(\hat{y}, \hat{y}_0)$  la solución óptima;  $\hat{y}_0$  es una cota inferior del problema original (NP). Si  $UBD \leq \hat{y}_0 + \epsilon$  terminar; tenemos la solución deseada.

Paso 3. Resolver el subproblema (NP( $\hat{y}$ )). Existen dos casos:

Paso 3A.  $v(\hat{y})$  es finita. Si  $v(\hat{y}) \leq \hat{y}_0 + \epsilon$ , terminar, tenemos la solución deseada. En caso contrario, determinar el multiplicador óptimo  $\hat{u}$  (si no existe, un multiplicador quasi óptimo que satisface

$$\hat{y}_0 < \inf_{x \in X} \{f(x, \hat{y}) - \hat{u}^T G(x, \hat{y})\}, \quad \hat{u} \geq 0$$

Calcular  $L_*(y; \hat{u})$ . Incrementar p en 1 y  $u^p = \hat{u}$ . Si  $v(\hat{y}) < UBD$ , entonces  $UBD = v(\hat{y})$ . UBD es una cota superior de (NP). Regresar al paso 2.

Paso 3B. El subproblema (NP( $\hat{y}$ )) no es factible. Determinar  $\hat{\lambda}$  que satisface

$$\sup_{x \in X} \{\lambda^T G(x, \hat{y})\} < 0, \quad \lambda \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$$

Calcular  $L^*(y; \hat{\lambda})$ . Incrementar q en 1.  $\lambda^q = \hat{\lambda}$ . Regresar al paso 2.

Como puede observarse el algoritmo generalizado de Benders consiste en la solución repetida de un problema maestro relajado y un subproblema que le proporciona valores adicionales de los vectores u y  $\lambda$ , si el algoritmo no termina. Mejoramiento sobre el método original se encuentra en [MCD77], [MAG81]. La convergencia del algoritmo de descomposición de Benders generalizada está garantizada bajo condiciones generales de convexidad de las funciones involucradas. Las condiciones a priori sobre funciones y conjuntos usados se resumen en el siguiente resultado [GE072].

Lema 3.1 (convergencia del algoritmo): Suponga que

- 1) Y es un conjunto discreto finito,
- 2) X es un conjunto convexo no vacío,

- 3)  $f$  es convexa y  $G$  es cóncava en  $X$  para cada  $y \in Y$
- 4)  $Zy = \{z \in \mathbb{R}^m, G(x, y) \geq z\}$  para algún  $x \in X$  es cerrado para  $y \in Y$  fijo,
- 5) Para cada  $\bar{y} \in Y \cap V$  fijo, al menos uno de las siguientes condiciones se cumple:
- i)  $v(\bar{y})$  es finito y  $(NP(\bar{y}))$  posee un vector óptimo,
  - ii)  $v(\bar{y}) = +\infty$ .

Entonces el proceso de descomposición de Benders generalizada termina en un número finito de pasos para cualquier  $\epsilon \geq 0$  dado.

### 3.2 APLICACION AL PROBLEMA DE EXPANSION

El problema de expansión quedó formulado como

$$(PE) \quad \begin{array}{l} \text{Min } Q(x) + c^T y \\ x, y \\ \text{s.a. } Ax - R[x]^2 + By \geq C, \quad x \geq 0, \quad y \in Y \end{array}$$

donde los parámetros son especificados como en la sección 1.3 y en el formato del problema (NP),  $X = \{x: x \geq 0\}$  y  $G(x, y) = Ax - R[x]^2 + By - C$ . Observe que si hacemos  $y_i = 0$  ó  $1$   $i=1, \dots, Ny$ , el problema resultante es un problema de flujo de carga DC óptimo y las técnicas del capítulo anterior pueden ser aplicadas. Una manera intuitiva de resolver este problema es evaluar el problema DC óptimo para cada posible conjunto de valores de las variables  $y_i$ ,  $i=1, \dots, Ny$ , para posteriormente seleccionar el que es máximo. Dicho procedimiento resulta ineficiente cuando el número de variables 0-1 aumenta. Sin embargo, la estructura del problema (PE) puede ser explotada convenientemente si usamos la técnica de descomposición de Benders generalizada

Específicamente, en el problema de expansión (PE), se observa que para cada valor fijo de  $y$  se tiene el subproblema asociado:

$$(SP(y)) \quad \begin{array}{l} Z_{SP}(y) = \text{Min}\{Q(x)\} + c^T y \\ x \geq 0 \\ \text{s.a. } Ax - R[x]^2 \geq C - By \end{array}$$

que sería el similar del subproblema  $(NP(y))$  usado en el algoritmo de descomposición de Benders generalizada. De acuerdo a dicho algoritmo, la solución del subproblema  $SP(y)$  generaría (si no termina) un valor de  $u$  o de  $\lambda$  que es usado en el problema maestro.

En la implantación práctica de la técnica de descomposición de Benders es importante eliminar los valores de  $y$  no factibles. Una manera de lograr esto es como sigue: sea  $\bar{y}$  un valor fijo y conocido tal que el subproblema  $SP(\bar{y})$  no tiene solución factible. Entonces podemos introducir una variable artificial  $x_a$  al subproblema primal  $SP(\bar{y})$  quedando como sigue:

$$Z_{SP}(\bar{y}) = \min_{x \geq 0} \{Q(x) + Mx_a\} + c^T \bar{y}$$

$$\text{s.a. } Ax - R[x]^2 + e x_a \geq C - B\bar{y}, \quad x_a \geq 0$$

donde  $e$  es el vector columna de  $m$  componentes iguales a uno. Esto garantiza que  $SP(\bar{y})$  siempre tenga solución factible, y es equivalente a añadir la restricción:

$$\sum u_i \leq M \quad (M > 0)$$

$$\forall i$$

al problema dual asociado. Una consecuencia de este cambio es que se evita generar el rayo  $\lambda$  en el paso 3B del algoritmo de descomposición. Observe que si el problema primal  $SP(\bar{y})$  no tiene solución factible,  $Z_{SP}(\bar{y})$  adquiere un valor muy grande. El artificio anterior también evita la posibilidad de que  $\bar{y}$  sea la solución óptima del problema original (PE).

La consecuencia inmediata de la discusión anterior es que se elimina el paso 3B en el algoritmo de descomposición de Benders y en el problema de expansión, sólo requerimos resolver subproblemas de flujo óptimo. La implantación de la variable artificial  $x_a$  en el algoritmo de flujo se logra al agregar el arco artificial  $(s,t)$  con costo unitario muy grande, como se puede observar el paso 1 del algoritmo 2.2 en la sección 2.2. En resumen, el problema (PE) se aproxima por el *problema maestro de Benders* :

$$\text{(PM) Minimizar } y_0$$

$$y \in Y, \quad y_0$$

$$\text{s.a. } y_0 \geq \inf_{x \geq 0} \{Q(x) + c^T y - (u^k)^T (Ax - R[x]^2 + By - C)\}, \quad k=1, \dots, p$$

donde  $u^k$  es la variable dual asociada al  $k$ -ésimo subproblema y  $p$  es el número de subproblemas resueltos.

Para facilitar la exposición relacionada a la aplicación de la técnica de Benders, empezaremos por calcular

$$L_*(y, u) = \inf_{x \geq 0} \{Q(x) + c^T y - u^T (Ax - R[x]^2 + By - C)\}$$

en el caso de costos cuadráticos; pues esta forma se encuentra frecuentemente en la transmisión de energía eléctrica. En tal caso la expresión anterior se puede escribir [YOU88-1] como

$$L_*(y, u) = \min_{x \geq 0} \left\{ \sum_{l=1}^{Nx} a_l x_l^2 + b^T x \right\} + c^T y - u^T B y + u^T C$$

donde  $Nx$  es el número de variables continuas. Si  $a_l > 0$ , se implica que cuando  $b_l \geq 0$ , se toma  $x_l = 0$ ; si  $b_l < 0$ , el mínimo ocurre en  $x_l = -b_l / (2a_l)$ . En el caso de  $a_l = 0$ , si  $b_l \geq 0$ ,  $x_l$  debe tomar el valor 0; si  $b_l < 0$ ,  $L_*(y; u) = -\infty$ . Por lo tanto, si definimos  $I \equiv \{l: a_l > 0, b_l < 0\}$  se tiene que

$$L_*(y; u) = \sum_{l \in I} -b_l^2 / (4a_l) + c^T y - u^T B y + u^T C$$

asimismo  $L_*(y; u) = -\infty$ , si existe algún  $l$  tal que  $a_l = 0$  y  $b_l < 0$ .

El cálculo de  $L_*$  anterior es más difícil para costos convexos en general, además las matrices involucradas como  $A, B, C, c, R$  en el problema de expansión son muy huecas, una forma simplificada de cálculo se encuentra en la sección 3.3.

Algoritmo 3.2: Descomposición del problema de expansión.

Propósito: Encontrar la expansión óptima de la red en una etapa.

#### DESCRIPCION

Paso 1. Empezar con un valor inicial  $\bar{y}$  arbitrario. Resolver  $SP(\bar{y})$ . Calcular  $L_*(y; \bar{u})$ . Asignar  $p=1$ ,  $UBD = Z_{SP}(\bar{y})$ .  $u^1 = \bar{u}$ . Seleccionar  $\epsilon \geq 0$

Paso 2. Resolver el problema maestro:

$$(PM) \quad \begin{array}{l} \text{Min } y_0 \\ \text{s.a. } y_0 \geq L_*(y; u^j) \quad j=1, \dots, p \\ y \in Y \end{array}$$

Sea  $(\hat{y}, \hat{y}_0)$  la solución óptima;  $\hat{y}_0$  es una cota inferior del problema original (PE). Si  $UBD \leq \hat{y}_0 + \epsilon$ , terminar; tenemos la solución deseada.

Paso 3. Resolver  $SP(\hat{y})$ .

Si  $Z_{SP}(\hat{y}) \leq \hat{y}_0 + \epsilon$ , terminar, tenemos la solución deseada. En caso contrario, Calcular  $L_*(y; \hat{u})$ . Incrementar  $p$  en 1,  $u^p = \hat{u}$ . Si  $Z_{SP}(\hat{y}) < UBD$ , entonces  $UBD = Z_{SP}(\hat{y})$ .  $UBD$  es una cota superior de (PM). Regresar al paso 2.

La convergencia de este algoritmo está garantizada por el siguiente teorema.

Teorema 3.1: El algoritmo de descomposición del problema de expansión converge en un número finito de pasos.

Prueba: Es sencillo verificar que las condiciones 1-4 del lema 3.1 se

cumplen. En relación con la condición 5, debido al arco artificial (s,t) que se añade, el valor  $v(\bar{y})=Z_{SP}(\bar{y})$  es finito. Por el teorema de dualidad de programación convexa, existe el vector multiplicador óptimo. Basando en lo anterior, el algoritmo de descomposición termina en un número finito de pasos para cualquier  $\epsilon \geq 0$ . ■

### 3.3 DERIVACION DE LOS CORTES DE BENDERS

En el proceso de solución del subproblema (SP( $\bar{y}$ )) donde  $\bar{y}$  es un vector fijo conocido, se tiene que la variable dual  $\bar{u}$  consiste de dos componentes: la variable dual  $\pi_1$  asociada a cada nodo  $l$  de la red y el vector multiplicador  $v$  asociado a las restricciones de ángulo de voltaje. Observe que la variable  $\pi_1$  representa el costo de obtener una unidad de flujo en el nodo  $l$  desde el nodo fuente artificial  $s$  mientras que  $v$  es la solución del problema definido en (2.3.1), sección 2.3.

Teorema 3.2 Sea el corte de Benders asociado con un  $\bar{y}$  dado

$$\inf_{x \geq 0} \{Q(x) + c^T y - \bar{u}^T (Ax - R|x|^2 + By - C)\} = \alpha_0 + \sum_{l=1}^{Ny} \alpha_l y_l \leq y_0 \quad (3.3.1)$$

donde  $\bar{u}=(\pi, v)$  es la variable dual de la solución de SP( $\bar{y}$ ). Entonces los coeficientes en la expresión anterior se calculan como sigue:

Si  $y_1$  es una variable de decisión de una unidad de generación, entonces

$$\alpha_1 = \begin{cases} c_1 - \bar{x}_1 (\pi_1 - f'_1(x_1))^+ & \text{si } x_1 = \bar{x}_1 \bar{y}_1 \\ c_1 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (3.3.2)$$

donde  $f'(\cdot)$  es la derivada de  $f$  y  $[x]^+ = \max\{0, x\}$ .

Si  $y_1$  es una variable de decisión de una línea de transmisión  $J$ , y  $\bar{y}_1=0$ ,

$$\alpha_1 = c_1 - \bar{x}_J |\pi_e(J) - \pi_s(J)| \quad (3.3.3)$$

Si  $y_1$  es una variable de decisión de la línea de transmisión  $J$ , y  $\bar{y}_1=1$ ,

$$\alpha_1 = \begin{cases} c_1 - \bar{x}_J [\pi_e(J) - 2r_J x_J - \pi_s(J) - (v^T E)_J]^+ + |v_J| \sum_{L \in C_J} \bar{x}_L / B_L & \text{si } x_J = \bar{x}_J \\ c_1 - \bar{x}_J [2r_J x_J + \pi_s(J) - \pi_e(J) + (v^T E)_J]^+ + |v_J| \sum_{L \in C_J} \bar{x}_L / B_L & \text{si } x_J = \bar{x}_J \\ c_1 + |v_J| \sum_{L \in C_J} \bar{x}_L / B_L & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (3.3.4)$$

donde  $(v^T E)_J$  es la componente de  $v^T E$  que corresponde a  $x_J$  y  $v_J$  es el multiplicador lagrangeano correspondiente a la restricción de ángulo de voltaje asociada a la línea  $J$ . Finalmente



$$\alpha_0 = Z_{SP}(\bar{y}) - \sum_{i=1}^{Ny} \alpha_i \bar{y}_i \quad (3.3.5)$$

Prueba: Supongamos que  $y_1$  está asociada con una alternativa de adición de una unidad de generación (capacidad  $\bar{x}_1$ ) en el bus 1. La única restricción que involucra  $y_1$  es de la forma  $x_1 \leq \bar{x}_1 y_1$ , y el costo de  $x_1$  en la función objetivo es  $f_1(x_1)$ . Es obvio que en la solución óptima, si  $x_1 < \bar{x}_1 y_1$ , el multiplicador asociado denotado por  $\bar{u}_1$  tiene valor 0. De otra manera el multiplicador es  $\pi_1 - f'_1(x_1)$ , ya que este representa el ahorro por generar una unidad de flujo por la alternativa en consideración y tiene valor no negativo. Por tanto los términos de (3.3.1) que involucran  $y_1$  son:

$$c_1 y_1 - \bar{u}_1 (\bar{x}_1 y_1)$$

Esto se justifica la ecuación (3.3.2).

Si  $y_1$  es una variable asociada con la expansión de una línea de transmisión, las restricciones que involucran son  $x_j \leq \bar{x}_j y_1$ , y

$$(y_1 - 1) \sum_{L \in C_j} \bar{x}_L / B_L \leq \frac{x_j - x_j'}{B_j} + \sum_{L \in C_j^+} \frac{x_L - x_L'}{B_L} - \sum_{L \in C_j^-} \frac{x_L - x_L'}{B_L} \leq (1 - y_1) \sum_{L \in C_j} \bar{x}_L / B_L \quad (3.3.6)$$

Si  $y_1 = 0$ , la restricción (3.3.6) no está activa, entonces el multiplicador asociado es cero. Por otro lado, si  $x_j = 0$ , la pérdida unitaria =  $(r_j x_j^2)' = 2r_j x_j = 0$ , el ahorro por incrementar una unidad de capacidad es

$|\pi_{e(j)} - \pi_{s(j)}|$ , de manera semejante a (3.3.2) se justifica (3.3.3).

Por otra parte si escribimos (3.3.6) en forma matricial, en la definición del problema (DCP) de la sección 2.3, se tiene que:

$$\begin{aligned} (Ex)_1 &\geq (y_1 - 1) \sum_{L \in C_j} \bar{x}_L / B_L \\ &-(Ex)_1 \geq (y_1 - 1) \sum_{L \in C_j} \bar{x}_L / B_L \end{aligned}$$

donde  $(Ex)_1$  es el elemento del vector  $Ex$  que corresponde a la restricción (3.3.6). Denote los multiplicadores de estas dos restricciones por  $v_j^+$ ,  $v_j^-$  respectivamente ( $v_j^+ \geq 0$ ,  $v_j^- \geq 0$ ) y obsérvese que el multiplicador obtenido en la solución de  $(SP(\bar{y}))$   $v_j$  es igual a  $v_j^- - v_j^+$ . Entonces la función lagrangeana es

$$\text{Min}_x \sum_{i \in N_g} f_i(x_i) - \sum_{i \in I_L} v_j^+ ((Ex)_1 - (y_1 - 1) \sum_{L \in C_j} \bar{x}_L / B_L) - \sum_{i \in I_L} v_j^- (-(Ex)_1 - (y_1 - 1) \sum_{L \in C_j} \bar{x}_L / B_L)$$

$$= \text{Min}_x \sum_{i \in N_g} f_i(x_i) + vEx + \sum_{i \in I_L} [(v_j^+ + v_j^-)(y_1 - 1) \sum_{L \in C_j} \bar{x}_L / B_L]$$

donde  $I_L$  es el conjunto índice de las variables de decisión relacionada con

una línea de transmisión,  $j$  es función de  $i$ .

Por lo tanto el costo del arco  $j$  debido a RAV es  $(vE)_j$ . Como la ganancia en el arco es  $(r_j x_j^2)' = 2r_j x_j$ , los dos términos que están dentro de los corchetes de (3.3.4) son ahorro de costo por ampliar la capacidad; además  $v_j^+ + v_j^- = |v_j|$ , con lo cual se justifica la ecuación (3.3.4).

Finalmente

$$\begin{aligned} Z_{SP}(\bar{y}) &= \max_u \inf_{x \geq 0} \{Q(x) + c^T \bar{y} - u^T (Ax - R[x]^2 + B\bar{y} - C)\} \\ &= \inf_{x \geq 0} \{Q(x) + c^T \bar{y} - \bar{u}^T (Ax - R[x]^2 + B\bar{y} - C)\} = \alpha_0 + \sum_{l=1}^{Ny} \alpha_l \bar{y}_l \end{aligned}$$

y se deduce (3.3.5). ■

Para cada nivel de demanda fijo, el problema (PEE) tiene el mismo formato que (PE). Esto implica que para cada  $y$  fijo, el costo del subproblema generado en la descomposición de Benders es el costo promedio de operación para diferentes niveles de demanda. La derivación de los cortes de Benders se obtiene después de resolver los  $m$  problemas de flujo, como se muestra en el siguiente corolario.

Corolario 3.3. Sea  $\alpha_j(k)$  ( $j=0, \dots, Ny$ ) son los coeficientes de los cortes de Benders en (3.3.1) para el nivel de demanda  $k$  ( $k=1, \dots, m$ ). Entonces el corte de Benders para el problema de expansión estocástica (PEE) es

$$\bar{\alpha}_0 + \sum_{l=1}^{Ny} \bar{\alpha}_l y_l \leq y_0$$

donde  $\bar{\alpha}_j = E(\alpha_j) = \sum_{k=1}^m \alpha_j(k) P_k$ .

Prueba: Considere un nivel de demanda fijo  $C_k$ , el problema del flujo de carga DC es:

$$\begin{aligned} &\text{Min } Q(x) \\ &\quad x \\ &\text{s.a. } Ax - R[x]^2 \geq C_k - By, \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

Cuando se calcula su valor esperado, el problema correspondiente en (PEE) puede ser visto como la función objetivo multiplicado por un escalar  $P_k$ . Por tanto todas las variables duales serán penalizadas por este factor  $P_k$ . Observando las ecuaciones (3.3.2) a (3.3.5),  $\alpha_j$  es afectado linealmente por el mismo factor, mientras que los costos de expansión  $c_j$  son constantes. Por lo que para el problema (PEE)

$$\bar{\alpha}_j = \sum_{k=1}^m \alpha_j(k) P_k = E(\alpha_j) \quad \blacksquare$$

Cuando la red original (antes de alguna adición de línea) no está conectada, la derivación de corte es similar, excepto que para la línea de expansión que conecta dos componentes, se tiene que sumar los términos  $|v_j| \sum_{L \in C_j} \bar{x}_L / B_L$  donde  $j$  se toma para todos los circuitos que contengan a esta línea.

### 3.4 EL PROBLEMA MAESTRO Y SU SOLUCION

Conviene ahora analizar y proponer un método para resolver el problema maestro. Dicho problema consiste de una variable continua  $y_0$  y un vector de variables 0-1. La forma usual de resolver este tipo de problemas es usar la técnica de enumeración implícita cuya idea básica es como sigue: se supone un valor grande de  $y_0$  y se procede a determinar una solución factible para el vector de variables binarias  $y$ . Cuando se encuentra tal  $y$  factible, se reduce el valor de  $y_0$ , y se repite el proceso de encontrar otro valor de  $y$  que es factible para el nuevo valor de  $y_0$ . Este proceso se efectúa usando un árbol de enumeración. Finalmente si no existe manera de disminuir el valor de  $y_0$  se tiene la solución óptima.

Conviene señalar que el primer algoritmo de enumeración implícita fue desarrollado por E. Balas en 1965 [BAL65] y que diversos mejoramientos han surgido en las últimas dos décadas. Uno de ellos es el algoritmo de enumeración implícita generalizada desarrollado por Zionts [ZIO72], en 1972. En [NAR79], Narula y Kindorf hicieron una comparación de seis algoritmos de enumeración implícita y su estudio analizó problemas no estructurados con número de variables que varía entre 30 y 100 mientras que densidad de la matriz de restricciones es igual a 0.2, 0.4, 0.6, 0.8. Basado en este experimento, concluyeron que el algoritmo aditivo de Balas y el algoritmo aditivo generalizado de Zionts son mejores entre los seis involucrados en su estudio. Además, recomiendan el algoritmo de Balas para problemas de densidad  $\leq 0.6$  y  $n \geq 50$  y el método de Zionts con la densidad  $d=0.8$  y/o  $n \leq 30$ .

Por otra parte, Lasdon [LAS70] ha reportado que para los sistemas grandes, se eleva la eficiencia de la descomposición de Benders. Específicamente en pruebas realizadas para problemas que tienen de 0 a 20 alternativas, el número promedio de subproblemas resueltos es 5.4 y para problemas que tienen

de 2000 a 4000 alternativas, el número promedio de subproblemas resueltos es 11.7. En base a lo anterior se observa que si el número de variables binarias es más de 50, resolver el problema maestro en cada iteración puede consumir demasiado tiempo y una alternativa de solución es la técnica de enumeración implícita que se describe en el algoritmo 3.4.

Para describir el algoritmo de enumeración implícita conviene formular el problema (PM) en la siguiente forma:  $A_1 y \leq y_0 + b_1$  ( $i=1, \dots, p$ );  $A_1 y \leq b_1$  ( $i=p+1, \dots, m$ ) donde  $A_1$  es  $i$ -ésimo renglón del problema de programación entera y  $b_1$  es el término constante correspondiente. Sea las  $p$  primeras restricciones los cortes de Benders, y el resto representa la restricción  $y \in Y$ . De esta manera

$$L_i(y, u^1) = \sum_{j=1}^{N_y} a_{1j} y_j - b_1 \quad \text{para } i=1, \dots, p \quad (3.4.1)$$

Se define  $x^+ = \max\{0, x\}$  y  $x^- = \min\{0, x\}$ . Una solución es *parcial* si en ésta algunas variables han sido especificadas a tomar valor 0 ó 1. Tales variables se llaman *fijas* mientras que las restantes *libres* o *no especificadas*. La notación para identificar estas variables es:

- J++ la variable  $y_j$  se fija en 1 bajo cierta regla,
- J+  $y_j$  se fija en 1 por las restricciones del problema,
- J-  $y_j$  se fija en 0 por las restricciones del problema.

Por ejemplo la solución parcial (1++, 3-, 4+) en un problema con 5 variables significa:  $y_1$  tiene valor 1 por alguna regla de selección,  $y_3$  tiene valor 0 por restricciones del problema,  $y_4$  tiene valor 1 por restricciones del problema,  $y_2, y_5$  son libres. Cuando algunas variables están fijas, el lado derecho de la restricción  $i$  se actualiza por  $b'_i = b_1 + y_0 - \sum_{j \in F} a_{1j}$  donde  $F$  es el conjunto índice de variables fijas en 1. Denotamos los coeficientes más negativo y positivo entre las variables libres de la restricción  $i$  por  $a_{1s}$ ,  $a_{1p}$ , y el conjunto de variables libres por  $L$ .

Algoritmo 3.3: Enumeración implícita.

Propósito: Encontrar la solución del problema maestro de Benders.

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

## DESCRIPCION

Paso 1. Inicialmente todas las variables son libres, y la solución  $y_0 = +\infty$ . Si la solución parcial actual satisface las restricciones, completar la solución parcial  $\hat{y}$  asignando las variables libres a 0 e ir al paso 5.

Paso 2.  $i=1$ .

Paso 2a. Si  $b'_i < \sum_{j \in L} a_{ij}^-$  la solución parcial no es factible, ir a 4.

Si  $b'_i > \sum_{j \in L} a_{ij}^+$  la solución parcial es factible para la restricción  $i$ , ir al

paso 2c. En caso contrario alguna de las variables con  $a_{ij} > 0$  debe ser 0.

Paso 2b. Si  $b'_i - \sum_{j \in L} a_{ij}^- < -a_{is}$  or  $b'_i - \sum_{j \in L} a_{ij}^- < a_{ip}$  i.e.  $y_s = 0$  ó  $y_p = 1$  conduce la solución a la infactibilidad. Para todas las variables libres  $y_k$ , efectúa lo siguiente:

Si  $a_{ik} > 0$  y  $b'_i - \sum_{j \in L} a_{ij}^- < a_{ik}^+$  entonces agregar  $k^-$  a la solución parcial;

Si  $a_{ik} < 0$  y  $b'_i - \sum_{j \in L} a_{ij}^- < -a_{ik}^-$  entonces agregar  $k^+$  a la solución parcial.

Paso 2c. Incrementa  $i$  en 1, si  $i \leq m$ , ir al paso 2a.

si  $i = m$  y se agregó algún  $j^+$  o  $j^-$  al vector, ir al paso 2.

Paso 3. Determinar la variable libre que más reduce la infactibilidad total, i.e. seleccionar  $J_{p+1}$  tal que maximice

$$\sum_i (b'_i - a_{iJ_{p+1}})^-$$

y  $J_{p+1} = 1$ . Actualizar el vector de la solución parcial  $(J_1, \dots, J_p, J_{p+1}^{++})$ .

Ir al paso 1.

Paso 4. Encontrar el elemento más a la derecha de la solución parcial con forma  $J_k^{++}$ , reemplazarlo por  $J_k^-$  y borrar todos los elementos que están a su derecha, ir a 1. Si no existe tal elemento, la enumeración está completa.

Paso 5. En este caso la solución es factible, i.e.  $b'_i \geq 0$ ,  $i=1, \dots, m$ . Sea  $\delta = \min\{b'_i, i=1, \dots, p\} - \epsilon$  y restarle  $\delta$  a  $b'_i$  para  $i=1, \dots, p$ . Ir al paso 2.

En [LEM67], Lemke y Spielberg desarrollaron un método de enumeración implícita para la programación lineal mixta que ha resultado eficiente en problemas reales. De manera similar, se desarrolla el siguiente algoritmo de enumeración implícita para resolver el problema de expansión de capacidad. La idea consiste en empezar la enumeración implícita con las restricciones del problema maestro de Benders. Cada vez que se encuentre una solución factible del problema (PM), se resuelve el subproblema asociado (con esta solución factible) y se agrega el corte generado del subproblema a (PM). De esta manera se analizan los nodos del árbol de enumeración no vistos anteriormente. Específicamente, el algoritmo es como sigue:

Algoritmo 3.4: Enumeración implícita para el problema de expansión

Propósito: Resolver el problema de expansión de capacidad del sistema de generación y transmisión.

#### DESCRIPCION

Paso 0. Empezar con un  $y'$  arbitrario. Resolver  $SP(y')$ . Derivar el corte asociado  $L_*(y, u')$ . Formar el problema (PM).

Paso 1 - Paso 4: idénticos que el algoritmo anterior.

Paso 5. Se ha encontrado una solución factible del problema (PM) denotada por  $\hat{y}$ . Resolver  $SP(\hat{y})$ . Sea la variable dual de la solución óptima del subproblema  $\hat{u}$ , agregar la restricción al (PM):  $L_*(y; \hat{u}) \leq y_0$ . Si  $Z_{SP}(\hat{y}) < y_0$ , reemplazar  $y_0$  por  $\hat{y}$ , ir al paso 2.

La ventaja de la técnica de enumeración implícita es que se resuelve un solo problema de programación entera mientras que en la descomposición de Benders generalizada (algoritmo 3.3), se resuelve un problema maestro en cada iteración, i.e. terminando de resolver un subproblema. En la descomposición de Benders se usa siempre la solución óptima del problema relajado y se espera que el número de subproblemas resueltos sean pequeño. Por tanto, cuando se desea seleccionar una de estas alternativas, se debe tomar en cuenta la complejidad de resolver los subproblemas. Cuando los subproblemas son difíciles de resolver, es más conveniente la Descomposición de Benders; en caso contrario, la técnica de enumeración implícita (algoritmo 3.4) puede llevar ventaja.

### A3.1 COMPARACION ENTRE EL MODELO DE EXPANSION DESARROLLADO Y LOS DE EPRI

En 1988, EPRI (Electric Power Research Institute) finalizó un proyecto sobre el estudio de diferentes modelos para la expansión de sistema de potencia en el cual se participaron ingenieros eléctricos y matemáticos reconocidos como Pereira, Dantzig, Avi-Itzhak, Avriel etc. Los resultados finales se describen en un reporte de cinco volúmenes EPRI EL-5299 "Mathematical Decomposition Techniques for Power System Expansion Planning". En esta sección, se resume sus resultados y se compara con el modelo desarrollado en la tesis.

En el reporte mencionado, el flujo de carga se analiza por diferentes modelos. En el caso de que las capacidades de la línea de transmisión se representa por variables continuas, se mostraron cómo aplicar el algoritmo de la descomposición de Benders generalizada para obtener la solución localmente óptima, la cual puede ser óptima global pero no está garantizada. Sin embargo, si se aplica el método cuidadosamente, este método puede ser muy útil para propósitos prácticos. El estado de arte de software para la programación no lineal MINOS fue utilizado por enfrentar no linealidades en el análisis de la expansión óptima del sistema de transmisión. Si el sistema tiene soluciones óptimas locales que no son óptimas globales, se ha observado en problemas con datos reales, que los algoritmos de MINOS y el de descomposición de Benders pueden converger a la óptima.

Cuando las inversiones en líneas de transmisión son restringidas a ser valores enteros, se puede usar una formulación basada en el teorema de compensación del modelo de potencia linealizada. La ventaja de esta formulación es que el problema original se reduce a un problema de programación lineal mixta que puede ser resuelto por la descomposición de Benders, y se garantiza la convergencia a la solución óptima global.

A continuación se presenta un breve resumen de los modelos estudiados por EPRI, antes de proceder a describir los aspectos comparativos con el modelo desarrollado en la tesis.

## MODELO BASICO

El sistema de potencia es representado por el modelo de flujo de potencia linealizada (el flujo de carga DC):

$$Sx-g=d \quad (1)$$

$$x-\gamma S^T \theta=0 \quad (2)$$

donde

S la matriz de incidencia de nodo-arco

x el vector de flujos

g el vector de generación

d el vector de demanda ( $d \leq 0$ )

$\gamma$  la matriz diagonal de susceptancias en la red.

$\theta$  el vector de ángulos de voltajes de nodos

$()^T$  la transpuesta de la matriz.

La ecuación (1) corresponde a la primera ley de Kirchoff: la suma algebraica de flujos que entra a (o sale de) cada nodo es igual a la inyección neta (generación menos demanda) en ese nodo. La ecuación (2) corresponde a la segunda ley de Kirchoff: el flujo en la línea i-j es igual a la susceptancia de la línea ( $\gamma_{ij}$ ) por la diferencia angular de nodos terminales ( $\theta_i - \theta_j$ ). i.e.  $x(i,j) = \gamma(i,j)(\theta_i - \theta_j)$ . Para concordar con el documento original, se usa  $\gamma(i,j)$  en lugar de  $B_{ij}$  convencional para denotar la susceptancia.

El modelo de DC puede ser representado en una forma más compacta sustituyendo (2) en (1):

$$B\theta - g = d \quad (3)$$

donde  $B = \gamma S^T$  es la matriz de susceptancia del sistema.

Existe dos tipos de restricciones en la operación del sistema

$$a) \text{ cotas en las generaciones } 0 \leq g \leq \bar{g} \quad (4)$$

$$b) \text{ cotas en los flujos } 0 \leq |x| \leq \bar{x} \quad (5)$$

El problema de expansión de capacidad corresponde a la minimización de costos de inversión satisfaciendo las restricciones de factibilidad:

$$\text{Min } \sum c_{ij} y_{ij}$$

$$\text{s. a. } Sx_1 + Sx_2$$

$$-g = d \quad (6)$$

$$g \leq \bar{g} \quad (7)$$



$$x_1 \quad -\gamma_1 S^T \theta = 0 \quad (8)$$

$$x_2 \quad -\gamma_2 S^T \theta = 0 \quad (9)$$

$$x_1 \leq \bar{x}_1 \quad (10)$$

$$x_2 \leq \bar{x}_2 \quad y \quad (11)$$

donde

$x_1$  el vector de flujos en la red *existente*

$x_2$  el vector de flujos en las líneas candidatas (incluye la duplicación de líneas existentes)

$y$  la matriz diagonal que representa las decisiones de inversión (misma estructura que la matriz  $\gamma$ ). Si las decisiones de inversión son restringidas a variables enteras,  $y_{ij}$  son variables binarias; en caso contrario, son variables continuas.

Nótese que en la formulación anterior,  $\gamma$  varía con respecto a  $y$ , entonces aparece una multiplicación de variables  $\gamma_2 S^T \theta$ , tal que la formulación no es de programación convexa.

En [EPR88], la formulación anterior se resuelve por la descomposición de Benders considerando las variables  $y$  continuas. El método se aplica a un ejemplo de seis buses (ver la figura A3.1.1) donde las características de las líneas son:

Línea	Costo	Susceptancia	Capacidad
1,2	40	2.50	100
1,3	38	2.63	100
1,4	60	1.67	100
1,5	20	5.00	80
1,6	68	1.47	100
2,3	20	5.00	70
2,4	40	2.50	100
2,5	31	3.22	100
2,6	30	3.33	100
3,4	59	1.69	82
3,5	20	5.00	100
3,6	48	2.08	100
4,5	63	1.59	75
4,6	30	3.33	100
5,6	61	1.64	78

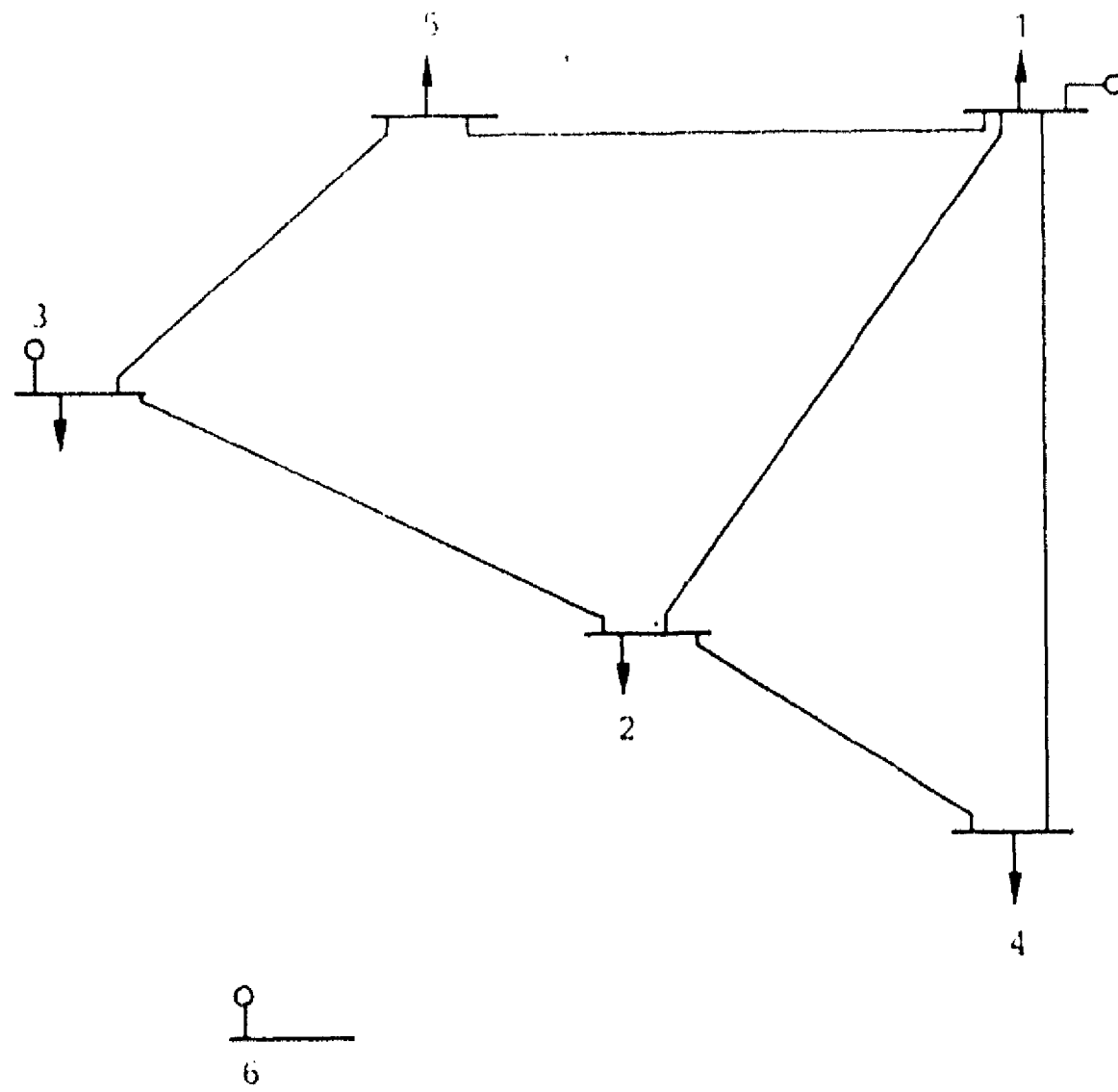


Fig.A3.1.1 Sistema de prueba de seis buses

Las capacidades de generación y las cargas se muestran como sigue:

Bus	Capacidad de generación	carga
1	150	80
2	0	240
3	360	40
4	0	160
5	0	240
6	600	0
	<hr/>	<hr/>
Totales	1,110	760

La aplicación de la descomposición da una solución con costo óptimo=414 después de 6 iteraciones. Como la formulación no es de programación convexa, se tuvo que usar aproximaciones lineales, e intentar con diferentes soluciones iniciales. Finalmente se encuentra que la solución es igual a 99, y parece ser la óptima global.

Los experimentos realizados en este ejemplo han mostrado:

No existe la garantía que la descomposición de Benders converge a la solución óptima del problema de expansión usando el modelo del flujo de carga DC. Si se aplica con cuidado, es una herramienta útil para propósitos prácticos. En la mayoría de los casos, una buena estrategia es modificar ligeramente las susceptancias iniciales tal que todo par de buses en las alternativas de expansión sea conectado por una línea. El sistema de MINOS y la descomposición de Benders en algunos casos convergieron a las óptimas locales. Por tanto, se debe interpretar los resultados con extremada precaución. Sin embargo, todavía no se ha encontrado otros métodos efectivos para enfrentar este problema más que modificar la red original.

#### MODELO DE TRANSPORTE

En el modelo de transporte, únicamente la primera ley de Kirchoff es

representada. Por lo que éste corresponde a una *relajación* de las restricciones (8) y (9) del problema (6)-(11).

El problema de expansión de capacidad entonces se convierte en:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Min } \sum c_{1j} y_{1j} & \\
 \text{s.a. } Sx_1 + Sx_2 & -g = d \\
 & g \leq \bar{g} \\
 & x_1 \leq \bar{x}_1 \\
 & x_2 \leq \bar{x}_2 \text{ y}
 \end{array} \tag{12}$$

El problema (12) tiene algunas características atractivas:

- . Es un problema de programación lineal mixta, entonces mucho más fácil de resolver computacionalmente. Si se relaja y en valores continuos (i.e. si se permite la adición de una fracción de la línea), se convierte en un problema de programación lineal.
- . Como (12) es una relajación de (6)-(11), su solución será óptima global.

Las desventajas son relacionadas a la precisión de esta aproximación, porque el modelo de transporte no representa la segunda ley de Kirchoff, puede enrutar el flujo como quiera. Como una consecuencia, el modelo es "optimista" y puede resultar una inversión sub-estimada. Se puede notar que el modelo de transporte puede indicar suministro adecuado de carga, mientras que en la realidad el sistema está sobrecargado. Lo anterior fue comprobado numéricamente con el sistema de seis buses. El costo óptimo es 42.53, sin embargo no existe solución factible para el sistema (6)-(11).

#### MODELO HIBRIDO I

Este modelo fue desarrollado por Villasana, Salon y Garver en 1985, y trata de atenuar la inexactitud del problema del modelo de transporte. En este modelo, se representa la segunda ley de Kirchoff en las líneas existentes y únicamente se relaja para las líneas candidatas. En otras palabras, únicamente las restricciones (9) son excluidas. El problema de optimización resultante es

$$\begin{array}{ll}
 \text{Min } \sum c_{1j} y_{1j} & \\
 \text{s.a. } Sx_1 + Sx_2 & -g = d
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
& & g \leq \bar{g} \\
x_1 & -\gamma_1 S^T \theta & = 0 \\
x_1 & & \leq \bar{x}_1 \\
& x_2 & \leq \bar{x}_2 \text{ y}
\end{array} \tag{13}$$

El modelo híbrido (13) retiene la mayoría de las ventajas del modelo de transporte (12):

- . Sigue siendo un problema lineal mixto.
- . Como (13) sigue siendo una relajación de (6)-(11), una solución óptima de (13) también es óptima global para el problema (6)-(11).
- . El modelo híbrido es también una aproximación exacta de (6)-(11) en la solución inicial (antes de agregar alguna línea), ya que las restricciones (9) (la segunda ley de Kirchoff) para las líneas candidatas no son activas en ese momento.

La desventaja es otra vez relacionada a la precisión de la solución final. Como (13) es una versión relajada de (6)-(11), la solución final puede ser "optimista", i.e., no factible para el flujo de carga DC.

En el sistema de seis buses, el costo óptimo obtenido por este método es el mismo del modelo básico (6)-(11) con valor óptimo global igual a 99.

#### MODELO HIBRIDO II

Este modelo fue desarrollado por Cabral y Praça en 1984, y corresponde a asignar  $\gamma_2=0$  en (9) y sumar (8) y (9). El problema resultante es:

$$\begin{array}{rcl}
\text{Min } \sum c_{1j} y_{1j} & & \\
\text{s.a. } Sx_1 + Sx_2 & -g = d & \\
& g \leq \bar{g} & \tag{14} \\
x_1 + x_2 - \gamma_1 S^T \theta & = 0 & \\
x_1 & \leq \bar{x}_1 & \\
& x_2 & \leq \bar{x}_2 \text{ y}
\end{array}$$

El problema (14) puede ser interpretado como una aproximación de la segunda ley de Kirchoff para las líneas existentes y líneas adicionales en paralelo. El problema también es convexo, pero no es una relajación del problema (6)-(11). Por tanto no se puede hacer aseveraciones sobre la optimalidad de

las soluciones.

Para el sistema de prueba de seis buses. La solución obtenida por este método tiene valor objetivo 99. Pero no existe solución factible para el modelo de flujo de carga DC (6)-(11).

### MODELO DE RESTRICCIONES DISJUNTAS

Como mencionado anteriormente, la principal dificultad computacional de expansión de capacidad está relacionada con las no linealidades en la representación de la segunda ley de Kirchoff (ecuación 9):

$$x_2(i,j) - \gamma_2(i,j)y_{1j}(\theta_1 - \theta_j) = 0 \quad (15)$$

donde

- $x_2(i,j)$  es el flujo en la línea
- $\gamma_2(i,j)$  es la susceptancia de la línea
- $y_{1j}$  es la decisión de inversión
- $\theta_1, \theta_j$  son ángulos de voltaje en los nodos terminales.

Sin embargo, la segunda ley de Kirchoff puede ser representada como restricción *disjunta lineal*:

$$-M(1-y_{1j}) \leq x_2(i,j) - \gamma_2(i,j)y_{1j}(\theta_1 - \theta_j) \leq M(1-y_{1j}) \quad (16)$$

donde M es una constante grande.

La equivalencia de la formulación (15) y (16) se verifica como sigue:

. Si  $y_{1j}=1$  (se construye la línea i-j), las cotas en la ecuación (16) convierten en 0. La ecuación es idéntica que (15).

. Si  $y_{1j}=0$  (no se construye la línea i-j), la ecuación (16) es relajada (las cotas son muy grandes). En este caso, no existen restricciones en el valor de  $x_2(i,j)$ . Sin embargo la ec. (11) ( $x_2(i,j) \leq \bar{x}_2(i,j) y_{1j}$ ) implica que  $x_2(i,j)=0$ . Viendo ahora la ec. (15),  $y_{1j}=0$  implica  $x_2(i,j)=0$ . Entonces concluimos que ambas formulaciones (15) y (16) son equivalentes.

Entonces el modelo de restricciones disjuntas es:

$$\begin{aligned} \text{Min } & \sum c_{1j} y_{1j} \\ \text{s.a. } & Sx_1 + Sx_2 \quad -g = d \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{array}{rcll}
& & g \leq \bar{g} & (18) \\
x_1 & -\gamma_1 S^T \theta & = 0 & (19) \\
-M(1-y) \leq & x_2 & -\gamma_2 S^T \theta & \leq M(1-y) & (20) \\
x_1 & & \leq \bar{x}_1 & (21) \\
& x_2 & \leq \bar{x}_2 y & (22)
\end{array}$$

Este modelo tiene aspectos muy atractivos:

- . Es un problema de programación lineal mixto
- . Su solución es la óptima global de (6)-(11)

Existe también algunas relaciones interesantes entre las restricciones disjuntas (17)-(22) y el modelo híbrido (13). Por el valor grande M en la restricción (20), la segunda ley de Kirchoff será cumplida únicamente para las decisiones de inversión  $y_{1j}$  que están muy cercanas a 1. En otras palabras, si la restricción de valor entero en la decisión de inversión es relajada, el modelo de restricciones disjuntas (17)-(22) es idéntico al modelo híbrido (13).

Basado en las soluciones anteriores con variables y continuas, se considera las siguientes líneas candidatas para la expansión en el modelo (17)-(22):

$$(2,3), \quad (2,6), \quad (3,5), \quad (4,6)$$

y el número máximo de adiciones de líneas:

$$n_{23}=1, \quad n_{26}=2, \quad n_{35}=2, \quad n_{46}=2$$

Se ha aplicado el modelo de restricciones disjuntas a este problema de expansión. Se utilizó 74 iteraciones en la descomposición de Benders. La solución óptima obtenida es  $y_{23}=0$ ,  $y_{26}=1$ ,  $y_{35}=1$ ,  $y_{46}=2$  con función objetivo 130. Note que debido a la restricción de que  $y$  sea entera, su valor objetivo óptimo es mayor que los casos continuos.

#### CONCLUSIONES SOBRE LOS MODELOS ANTERIORES

De todos los modelos anteriores, en [EPR88] se concluyó que desde el punto de vista conceptual el modelo de restricciones disjuntas es el más atractivo. La evidencia numérica para este ejemplo no es definitiva pero este pobre funcionamiento (74 cortes de Benders) es debido probablemente a la inestabilidad de los costos duales implicados en esta formulación. La mayor

desventaja es que si consideramos todas alternativas razonables, el número de variables binarias puede ser muy grande y el problema resultante es muy difícil de resolver, aún con el estado de arte de algoritmos de programación entera. Una manera promissora es probablemente resolver el problema considerando las variables de decisión continuas, luego de esta solución se deriva las alternativas para definir las variables binarias.

La desventaja radical de todos los modelos anteriores es que la pérdida de la potencia no está considerada. He supuesto algunos valores pequeños razonables de las resistencias (ver la experiencia computacional del modelo propuesto), el problema de flujo de carga considerando este factor no tiene solución factible. Sin embargo, el modelo básico (6)-(11) no fue capaz de detectar esta falla. Es evidente que para los modelos relajados anteriores, esto todavía es más difícil.

#### MODELO DEL FLUJO DE CARGA DC CON PERDIDA

En 1985, Sharifnia y Aashtiani desarrollaron un modelo del flujo de carga considerando la pérdida incurrida en una línea de transmisión. Para eso, se introduce dos variables que representa que un flujo de potencia puede ir en ambos sentidos de una línea (en los modelos anteriores, sólo se usa una variable que puede tener valores negativos). Específicamente, el modelo es

$$\begin{aligned} \text{Min } & \sum c_{1j} y_{1j} \\ \text{s. a. } & S(x_1 - x'_1) + S(x_2 - x'_2) + R[x]^2 - g = d & (23) \\ & g \leq \bar{g} & (24) \\ & x_1 - x'_1 - \gamma_1 S^T \theta = 0 & (25) \\ -M(1-y) \leq & x_2 - x'_2 - \gamma_2 S^T \theta \leq M(1-y) & (26) \\ & x_1 + x'_1 \leq \bar{x}_1 & (27) \\ & x_2 + x'_2 \leq \bar{x}_2 y & (28) \\ & x_1, x'_1, x_2, x'_2 \geq 0 & (29) \end{aligned}$$

donde

$x'$  denota el vector de flujos que van en sentido contrario de una línea dirigida

$[x]^2$  denota el vector  $\{ (x(1,j))^2 \}^T$



R es una matriz de resistencias de tal manera que  $R[x]^2$  denota las pérdidas de la forma  $r(1,j) x(1,j)^2$  en la línea (1,j).

Es evidente que por tomar en cuenta la pérdida en las líneas, este modelo es más preciso que el modelo básico (6)-(11). Dos problemas pueden surgir:

. La condición  $x(1,j) x'(1,j) = 0$  que obliga que el flujo vaya en un sentido no está probada formalmente. De tal manera que la segunda ley de kirchoff representada por (25), (26) puede ser violada.

. El problema no es de programación convexa a menos se introduzca segmentos lineales para aproximar la curva de pérdida.

#### COMPARACION COMPUTACIONAL CON EL MODELO PROPUESTO

El modelo propuesto supera principalmente las dos dificultades presentadas en el modelo del flujo de carga con pérdida, cuyas ventajas y desventajas se describen en el capítulo 1 de la tesis. La experiencia computacional asociada con el sistema de prueba de EPRI se encuentra en el capítulo 5 sección 4.

---

## CAPITULO 4

---

### EL PROBLEMA DE PLANEACION Y SU SOLUCION

---

Una de las fases de planeación más relevantes del sector eléctrico es sin duda la relacionada con la expansión de capacidad del sistema de generación y transmisión. Entre los aspectos más importantes de esta planeación están el monto de las inversiones, la dificultad para obtener créditos y el tiempo para realizar las expansiones, asimismo la forma y tamaño que se pretende tener del sistema a mediano y largo plazo. La forma usual de analizar el problema de planeación en un horizonte de  $T$  periodos o etapas es proceder a descomponerlo en etapas, esto es, resolverlo como expansión en un solo periodo, y determinar lo que se denomina trayectorias de expansión a costo mínimo.

El capítulo se desarrolla como sigue: en la primera sección, se describe la técnica original de descomposición de etapas. En la segunda, se efectúa una modificación de dicha técnica para resolver el problema de planeación de sistema de generación y transmisión. En la tercera sección se estudia la obtención de las soluciones vecinas a la óptima tanto para el problema de expansión en una etapa como para el de planeación.

#### 4.1 LA TECNICA DE DESCOMPOSICION

El problema de planeación de la expansión del sistema de generación y transmisión en un horizonte de T periodos o etapas consiste en determinar la trayectoria de expansión  $\{y^{(0)}, \dots, y^{(T)}\}$  tal que resuelva

$$(PPM) \quad Z_{PPM} = \underset{(y^{(0)}, \dots, y^{(T)}) \text{ factible}}{\text{Minimizar}} \quad \sum_{t=0}^T \frac{Z_{SP}^{(t)}(y^{(t)})}{(1+\beta)^t}$$

donde  $y^{(t)}$  es un vector de variables binarias 0-1 que resume las decisiones de expansión de las  $N_y$  posibles adiciones al sistema realizadas hasta la etapa  $t$ ,  $Z_{SP}^{(t)}(y^{(t)})$  refleja el costo anualizado de construcción y de operación del sistema dado que se tiene una decisión en la etapa  $t$ , resumida por  $y^{(t)}$ , y  $\beta$  denota la tasa de descuento.

Es conveniente señalar que dada la naturaleza del vector  $y^{(t)}$  se debe cumplir

$$y^{(0)} \leq y^{(1)} \leq \dots \leq y^{(T)}$$

que refleja el hecho de que en una trayectoria de expansión las decisiones de una etapa deben ser consideradas para las siguientes, esto es, una adición al sistema en la etapa  $t$  debe considerarse en todas las etapas  $t+1, \dots, T$ . También señalaremos que el valor  $Z_{SP}^{(t)}(y^{(t)})$  no es otra cosa que el valor de la solución de la función objetivo del subproblema (SP) analizado y resuelto en el capítulo 3.

El problema de planeación formulado en el problema (MMP) sería sencillo de resolver si los valores  $Z_{SP}^{(t)}(y^{(t)})$  son conocidos y el número de variables de decisión involucradas es pequeño. Es más, el problema descrito podría verse como la determinación de la trayectoria o ruta de costo mínimo en una red como se muestra en la figura 4.1.1 donde los nodos de cada etapa  $t$  están asociados a un valor del vector  $y^{(t)}$ , esto es, el resumen de las adiciones realizadas hasta la etapa  $t$ . Naturalmente, el paso de un nodo  $y^{(t-1)}$  a uno  $y^{(t)}$  debe cumplir que  $y^{(t-1)} \leq y^{(t)}$  y el costo asociado al arco que los une es el valor presente neto de  $Z_{SP}^{(t)}(y^{(t)})$ . Puede observarse que en la figura 4.1.1 se añadió un nodo terminal E y que el costo asociado a los arcos que van de la etapa T al nodo E es cero.

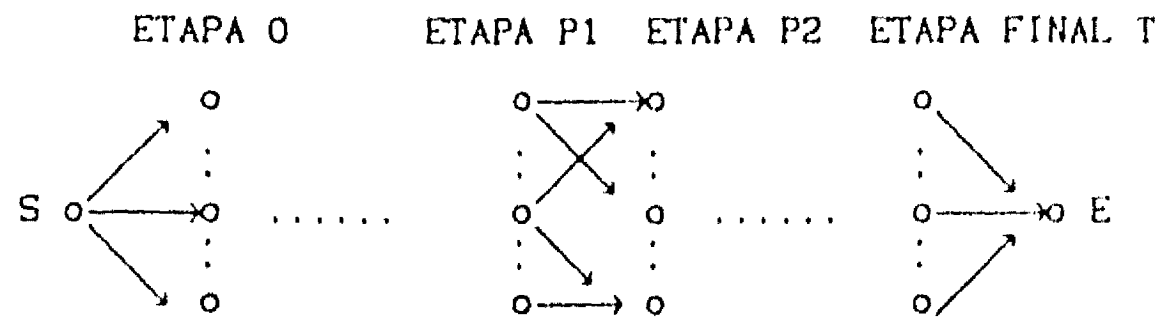


Figura 4.1.1 Representación del problema de planeación

Una forma de resolver el problema de planeación es determinar todas las trayectorias de expansión y seleccionar la de costo mínimo. Sin embargo, este método resulta demasiado complicado, en términos de esfuerzo. Otro enfoque es utilizado aquí y para ello empezaremos por observar que si  $(\bar{y}^{(0)}, \bar{y}^{(1)}, \dots, \bar{y}^{(T)})$  es una trayectoria factible, entonces su costo

$$CS = \sum_{t=0}^T \frac{Z_{SP}^{(t)}(\bar{y}^{(t)})}{(1+\beta)^t}$$

es una *cota superior* del valor  $Z_{PPM}$ . Se observa que si  $y^{(T)}$  es un vector factible en la etapa T, también es factible para cualquier etapa anterior. Por otra parte, una *cota inferior* del valor  $Z_{PPM}$  puede ser obtenido como sigue: sea  $\hat{y}^{(t)}$  la expansión en la etapa t asociada con costo mínimo, esto es,

$$Z_{SP}^{(t)}(y^{(t)}) \geq Z_{SP}^{(t)}(\hat{y}^{(t)})$$

para toda expansión posible  $y^{(t)}$ . La sucesión de vectores  $(\hat{y}^{(0)}, \hat{y}^{(1)}, \dots, \hat{y}^{(T)})$  (que no necesariamente satisface  $y^{(t-1)} \leq y^{(t)}$ ) es tal que

$$CI = \sum_{t=0}^T \frac{Z_{SP}^{(t)}(\hat{y}^{(t)})}{(1+\beta)^t}$$

es una *cota inferior* de  $Z_{PPM}$ .

Afuso [AFU84] propuso un algoritmo de descomposición de etapas para reducir la complejidad de la planeación del sistema de distribución. La idea principal consiste en encontrar una trayectoria factible (una *cota superior* CS) y generar en cada periodo cierto número de mejores soluciones (llamadas "vecinas a la óptima"), que tienen valor presente neto menor que la cota

$$CS - CI + (Z_{SP}^{(t)}(\hat{y}^{(t)})) / (1+\beta)^t \quad (4.1.1)$$

para luego resolver el problema maestro que encuentre la mejor trayectoria

usando estas soluciones vecinas. En la solución del problema maestro se puede aplicar la técnica de programación dinámica ó los algoritmos de ruta más corta. Se ha demostrado que la solución de programación dinámica usando tales soluciones vecinas es la solución óptima del problema de planeación. Específicamente, tenemos el siguiente algoritmo de descomposición.

Algoritmo 4.1: Técnica de descomposición.

Propósito: Descomponer y resolver el problema de planeación.

#### DESCRIPCION

Paso 1. Encontrar la solución óptima de cada etapa y un número predeterminado de soluciones vecinas. Si en alguna etapa no existe solución, terminar; el problema no es factible.

Paso 2. Calcular la cota inferior CI. Si la trayectoria es factible, terminar; se tiene la solución óptima.

Paso 3. Con las soluciones parciales a cada etapa, encontrar una solución factible al problema de planeación, cuyo costo será U1. Si no existe esta solución,  $U1=+\infty$ . Calcular

$$U2 = \sum_{t=0}^T \frac{Z_{SP}^{(t)}(\hat{y})}{(1+\beta)^t}$$

donde  $\hat{y}$  es la expansión óptima a la etapa T. Entonces  $CS = \text{Min}\{U1, U2\}$ .

Paso 4. Calcular  $D = CS - CI$ . Si  $D = 0$ , la solución encontrada en los pasos 2 ó 3 es óptima y el algoritmo termina. En caso contrario, ir al paso 5.

Paso 5. Formar el problema maestro con el conjunto de soluciones de cada etapa, e incluir las restricciones sobre las etapas. Si en alguna etapa  $i$  no se cumple que  $d_i \geq D$  ( $i=0, \dots, T$ ) donde  $d_i$  es la diferencia entre la peor solución vecina generada y la óptima, volver a resolver el problema de esa etapa e incorporar nuevas soluciones. Si al formar el problema maestro subsiste el problema de dimensionalidad, ir al paso 6. En caso contrario, resolver el problema maestro y terminar con la solución óptima.

Paso 6. Encontrar la solución del problema maestro. Esta solución

representará un nuevo valor de la cota superior CS.  $D=CS-CI$ . Si  $d_1 \geq D$  para  $l=0, \dots, T$ . Terminar, tenemos la solución óptima. Si no, ir al paso 5.

La justificación del algoritmo es como sigue: si una configuración  $\tilde{y}^{(t)}$  en la etapa  $t$  tiene valor presente neto mayor que la cota dada en (4.1.1), entonces el plan  $(\hat{y}^{(0)}, \dots, \tilde{y}^{(t)}, \hat{y}^{(t+1)}, \dots, \hat{y}^{(T)})$  (puede ser no factible) tiene costo

$$Z_{SP}(\tilde{y}^{(t)})/(1+\beta)^t + \sum_{l \neq t} \frac{Z_{SP}^{(1)}(\hat{y}^{(l)})}{(1+\beta)^l}$$

$$> CS - CI + Z_{SP}^{(t)}(\hat{y}^{(t)})/(1+\beta)^t + \sum_{l \neq t} \frac{Z_{SP}^{(1)}(\hat{y}^{(l)})}{(1+\beta)^l} = CS$$

por tanto es imposible que sea la solución óptima. El algoritmo termina en un número finito de pasos ya que el número de valores de  $y$  que cumple con la restricción es finito.

#### 4.2 MODIFICACION PARA EL CASO DE GENERACION Y TRANSMISION

En la planeación del sistema de generación y transmisión, el número de alternativas con función objetivo ligeramente mayor que un valor específico puede ser muy grande. La razón es que el costo de la línea de transmisión es mucho menor en comparación con el costo de una unidad de generación. Por ejemplo, a los precios de Noviembre de 1987, el costo anualizado de construcción para una línea de 600 Km es aproximadamente 47 millones de pesos, mientras que el costo anualizado de una unidad de generación de vapor es 3,626 millones de pesos. Por tanto para cada configuración de generación posible, casi todas las combinaciones de adiciones de líneas deben ser consideradas. Para superar esta dificultad, utilizamos los cortes de Benders para calcular el costo estimado de cada configuración. Con estos costos resolvemos el problema de la trayectoria con costo mínimo. Luego, iterativamente se aproxima a la solución óptima del problema de planeación.

Algoritmo 4.2: Técnica de descomposición modificada.

Propósito: Descomposición y solución del problema de planeación del sistema

de generación y transmisión usando cortes de Benders.

#### DESCRIPCION

Paso 1. Encontrar las soluciones factibles del problema  $(PM^{(t)})$  tales que  $Z_{MP}^{(t)}(y) - Z_{SP}^{(t)}(\hat{y}^{(t)}) < (CS - CI)(1 + \beta)^t$ . Denotar este conjunto por  $y^{(t)}$ . Para lograr esto, fijar en el problema  $(PM)^{(t)}$  el valor

$$y_0 = Z_{SP}^{(t)}(\hat{y}^{(t)}) + (CS - CI)(1 + \beta)^t \quad (4.2.1)$$

e invocar el algoritmo 3.3 de enumeración implícita descrito en la sección 3.4 reemplazando el paso 5 por lo siguiente:

Se ha encontrado una configuración que tiene costo estimado menor que  $y_0$ . Sea  $\delta = \min\{b'_l, l=1, \dots, p\}$ . El costo estimado es  $y_0 - \delta$ . Ir al paso 2.

Paso 2. Encontrar la trayectoria con costo mínimo por programación dinámica usando  $y^{(t)} \in y^{(t)}$ ,  $t=0, \dots, T$ . La solución se denota por  $(y^{(0)*}, \dots, y^{(T)*})$ .

Paso 3. Si todas las configuraciones en la trayectoria de costo mínimo han sido calculadas con el algoritmo del flujo de carga óptimo, terminar la solución es óptima. En caso contrario, para configuraciones no analizadas, determinar la solución de  $(SP^{(t)}(y^{(t)*}))$ , agregar el corte de Benders asociado con  $y^{(t)*}$  a  $(PM^{(t)})$ , actualizar CS, regresar al paso 1.

**Teorema 4.1** El algoritmo de descomposición modificada termina en un número finito de pasos y encuentra la solución óptima del problema (PPM).

**Prueba:** Para cada  $y \in Y$ , la función objetivo del problema maestro de Benders (PM) es:

$$Z_{PM}(y) = \text{Máximo}_{k=1, \dots, p} \{ L_*(y, u^k) \}$$

donde  $u^k \geq 0$   $k=1, \dots, p$  son las variables duales en la solución de los subproblemas. Primero demostramos que el paso 1 encuentra  $y$ 's tales que

$$Z_{PM}(y) \leq Z_{SP}^{(t)}(\hat{y}^{(t)}) + (CS-CI)(1+\beta)^t = y_0$$

Por definición  $y_0 - \delta = y_0 - \min\{b'_1, \dots, b'_p\}$ . Pero  $b'_1 = b_1 + y_0 - \sum_{j \in F} a_{1j}$  donde  $F$  es el conjunto de variables fijas en 1. Entonces

$$\begin{aligned} y_0 - \delta &= y_0 - \min\{b_1 + y_0 - \sum_{j \in F} a_{1j}, \dots, b_p + y_0 - \sum_{j \in F} a_{pj}\} \\ &= \max\{\sum_{j \in F} a_{1j} - b_1, \dots, \sum_{j \in F} a_{pj} - b_p\} \\ &= \max_{k=1, \dots, p} \{L_*(y, u^k)\} = Z_{PM}(y) \quad \text{por (3.4.1)} \end{aligned}$$

Cuando se encuentra una solución factible,  $b'_1 \geq 0 \forall i$ . Por definición de  $\delta$ ,  $\delta \geq 0$ , y se concluye que  $Z_{PM}(y) \leq y_0$ .

Ahora bien para cada configuración  $y$ ,

$$Z_{SP}(y) = \max_{u \geq 0} \{L_*(y, u)\} \geq \max_{k=1, \dots, p} \{L_*(y, u^k)\} = Z_{PM}(y)$$

Es decir, La función  $Z_{PM}(y)$  definida es una cota inferior de la función objetivo del problema de DC asociado con  $y$ . Ningún  $y^{(t)}$  que tiene costo estimado mayor que  $y_0$  puede estar en la trayectoria óptima. Entonces la solución  $(y^{(0)*}, \dots, y^{(T)*})$  en el paso 2 es una cota inferior del problema de planeación. Si una configuración  $y'$  ha sido resuelto con el flujo de carga óptimo y su variable dual es  $u^j$ , entonces

$$L_*(y', u^j) = Z_{SP}(y') \geq Z_{PM}(y') = \max_{k \neq j} \{L_*(y', u^k), L_*(y', u^j)\} \geq L_*(y', u^j)$$

lo cual implica  $Z_{SP}(y') = Z_{PM}(y')$

Por lo tanto, si la configuración está resuelta, el costo estimado es exactamente el costo de la configuración analizada por flujo de carga DC óptimo. De esta manera, en el paso 3, si todas las configuraciones han sido resueltas, se tiene una cota superior del problema de planeación. Como tal cota superior es igual a la inferior en el paso 2. La solución es óptima.

La terminación finita es fácil de establecer ya que el número de soluciones estimadas generadas en el paso 1 es finito. En cada iteración del algoritmo, al menos un subproblema es resuelto en el paso 3 y  $Z_{MP}^{(t)}(y)$  es creciente. ■

Observe que si aplicamos directamente la descomposición de Benders generalizada al problema de planeación (PPM') formulado en la sección 1.3. El problema maestro generado (denotado por (PM')) es un problema de programación entera con  $(T+1) \cdot N_y$  variables 0-1. Como la complejidad computacional para la programación entera incrementa exponencialmente con el número de variables 0-1, en muchos casos este método es prohibitivo.



El algoritmo presentado en esta sección puede ser visto como un procedimiento para encontrar la solución del problema maestro (PM') pero generando EXPLICITAMENTE las soluciones de cada etapa. La trayectoria de costo estimado mínimo es precisamente la solución del problema maestro (PM'). La solución de las configuraciones no analizadas en el paso 3 es precisamente la solución de un subproblema asociado con (PPM'). Obviamente la ventaja está en que evitamos resolver un problema con  $(T+1) \cdot N_y$  variables binarias 0-1. Entonces el algoritmo aquí presentado puede ser llamado *Descomposición de Benders Explícita*. Tal vez podemos empezar esta descomposición explícita antes de la obtención de la solución óptima de cada etapa, sin embargo en ese instante, como sólo existían pocos cortes de Benders, la estimación del costo puede ser mucho menor que el real. Por tanto puede generar demasiados estados en programación dinámica, además, el valor de  $y_0$  en la ecuación (4.2.1) para cada etapa es más difícil de obtener.

Si el número de configuraciones generadas en el paso 1 es demasiado grande, se puede usar el mismo esquema iterativo que en la sección 4.1, esto es, el intervalo de cotas CS-CI es sustituido por un valor menor y se incrementa progresivamente hasta su valor correcto.

#### 4.3 DETERMINACION DE LAS K MEJORES SOLUCIONES

Desde punto de vista práctico, no es suficiente determinar una sola solución del problema de planeación, sino varios planes vecinos al óptimo. Esto permite la selección entre estas soluciones considerando otros aspectos cualitativos. Uno de los aspectos es confiabilidad y otros pueden ser la planeación de la potencia reactiva, el análisis de sensibilidad y la creación de escenarios futuros. La evaluación de estos aspectos finalmente se puede conjuntar en una función de utilidad y usar la teoría de decisión multiobjetivo [KEE76].

Recordando que  $Z_{PM}(y)$  es menor o igual que  $Z_{SP}(y)$ , el procedimiento para encontrar el conjunto de mejores soluciones consiste en lo siguiente:

Algoritmo 4.3 Técnica de K soluciones en una etapa.

Propósito: Encontrar K mejores soluciones en la expansión de una etapa.

#### DESCRIPCION

Paso 1.  $k=2$ .

Paso 2. Si  $K \geq$  el número de subproblemas que tengan su función objetivo menor que  $Z_{PM}(y^k)$ , terminar. En caso contrario, ir al paso 3.

Paso 3. Encontrar k-ésima mejor solución  $(y^k, y_0^k)$  de (PM).

Paso 4. Resolver  $SP(y^k)$ , agregar  $u^k$  nuevo a (PM),  $k=k+1$ , ir al paso 2.

Por el siguiente corolario del teorema 4.1 se justifica el algoritmo.

Corolario 4.1. El algoritmo 4.3 encuentra las K mejores soluciones de expansión.

Prueba: Supongamos que al terminar el algoritmo en el paso 2, el índice de k es  $k'$ . Tenemos K soluciones con  $Z_{SP}(\cdot)$  menor que  $Z_{PM}(y^{k'})$ . Supongamos que existe un  $y^{k''}$  que es una de las K mejores soluciones. Entonces  $Z_{SP}(y^{k''}) < Z_{PM}(y^{k'})$ . Por construcción del algoritmo,  $Z_{PM}(y^{k'}) \leq Z_{PM}(y^{k''}) \leq Z_{SP}(y^{k''})$  lo cual es una contradicción. ■

Si se desea encontrar las soluciones con función objetivo menor que un valor específico  $F^*$  en la expansión de una etapa, se puede encontrar las soluciones en el problema (PM) con valor objetivo menor que  $F^*$  y luego resolver los subproblemas asociados.

Algoritmo 4.4 Técnica de K soluciones en T etapas.

Propósito: Encontrar las K mejores soluciones en la planeación multietapa (K mejores planes).

#### DESCRIPCION

Primero formamos una red (la figura 4.1.1) de la siguiente manera: generar para cada la etapa t todos los y's tales que su costo de configuración  $Z_{SP}(y)$  sea menor que  $Z_{MP}^{(t)}(\hat{y}^{(t)}) + (CS-CI)(1+\beta)^t$ . El costo del arco (o enlace) entre los estados  $(y_1^{(t)}, y_j^{(t+1)})$  es el valor presente neto del costo estimado de  $Z_{SP}(y_j^{(t+1)})$ , generado en el algoritmo de enumeración implícita.

Para el algoritmo de encontrar  $K$  mejores soluciones, es necesario asignarle a cada nodo  $l$  (estado) tres números por cada solución:

$PI(l,k)$  el valor de la  $k$ -ésima mejor solución para ir desde  $S$  hasta  $l$ .

$PB(l,k)$  el nodo de donde llega a la  $k$ -ésima mejor solución al nodo  $l$ .

$PK(l,k)$  se interpreta como sigue: la  $k$ -ésima mejor solución del nodo  $l$  viene desde la  $PK(l,k)$ -ésima mejor solución del nodo  $PB(l,k)$ . Es obvio que  $PK(l,k) \leq k$ .

En realidad  $PB$  y  $PK$  puede ser compactado en un solo número para ahorrar el espacio de memoria si sustituimos estas dos variables por  $PB'(l,k) = PK(l,k) * ME + PB(l,k)$  donde  $ME$  es el número máximo de estados en una etapa.

Paso 1. Para llegar al nodo  $S$  (la condición inicial), existe un solo camino con costo 0. Es decir  $PI(S,1)=0$  y  $PI(S,k)=\infty$  para  $k=2, \dots, K$ .

Empezar con el nodo artificial  $S$  (estado inicial en programación dinámica) como el único nodo de la etapa 0.

Paso 2. Generar las soluciones de la etapa siguiente. Inicializar  $PI(l,k)=BIG$ ,  $PB(l,k)=PK(l,k)=0$  para todos los nodos de  $P2$  y  $k=1, \dots, K$ , lo cual implica que todavía no hay rutas que llegan a ellos.

Ir al paso 3 para resolver el problema de una sola etapa (Entre la etapa actual  $P1$  y la etapa recién generada  $P2$  en la figura 4.1.1)

Paso 3. Para cada nodo  $l$  en la etapa  $P1$  efectuar lo siguiente: Para cada arco que se origina en  $l$ , suponer su nodo final es  $j$ . Calcular el costo de enlazar con tal arco, compararlo con el costo de las trayectorias que llegan al nodo  $j$ . Insertar esta solución entre las mejores trayectorias que llegan a  $j$ , si esta solución es mejor que alguna de ellas; si no, ignorar esta solución.

Paso 4. Después de resolver el problema de una sola etapa. Todos los enlaces pueden ser borrados con el fin de ahorrar memoria, pues en este instante, los estados de la etapa  $P2$  ya tienen el valor de la trayectoria mínima y el estado de donde viene tal trayectoria.

Si  $P2$  consiste del estado final  $E$ , ir al paso 5. En caso contrario, incrementar  $P1$  y  $P2$  en 1. Regresar al paso 2.

Paso 5. Si todas las configuraciones en las  $K$  mejores trayectorias han sido

calculadas con el algoritmo del flujo de cargo óptimo, terminar.

En caso contrario resolver los subproblemas no analizados en las K trayectorias. Agregar los cortes de Benders generados a su respectiva etapa. Regresar al paso 1.

Corolario 4.2. Suponga que la longitud de la K-ésima trayectoria es  $L_K$  y las soluciones generadas para la etapa t son tales que

$$Z_{MP}^{(t)}(y) - Z_{SP}^{(t)}(\hat{y}^{(t)}) \leq (L_K - CI)(1+\beta)^t.$$

Entonces el algoritmo 4.4 encuentra las K mejores soluciones, si existen.

Prueba: Si una configuración  $\tilde{y}^{(t)}$  en la etapa t tiene valor presente neto mayor que la cota dada, entonces el plan  $(\hat{y}^{(0)}, \hat{y}^{(1)}, \dots, \tilde{y}^{(t)}, \hat{y}^{(t+1)}, \dots, \hat{y}^{(T)})$  (puede ser no factible) tiene costo

$$Z_{SP}(\tilde{y}^{(t)}) / (1+\beta)^t + \sum_{l \neq t} \frac{Z_{SP}^{(l)}(\hat{y}^{(l)})}{(1+\beta)^l} > L_K - CI + Z_{SP}^{(t)}(\hat{y}^{(t)}) / (1+\beta)^t + \sum_{l \neq t} \frac{Z_{SP}^{(l)}(\hat{y}^{(l)})}{(1+\beta)^l} = L_K$$

por tanto es imposible que esté dentro de las K mejores soluciones. ■

Cuando se desea encontrar las soluciones con función objetivo menor que un valor específico  $F^*$  en la planeación multietapa, se puede empezar con un valor de K pequeño y aplicar el algoritmo presentado en anteriormente para encontrar K mejores trayectorias. La función objetivo del problema maestro en la etapa t debe ser menor o igual que:

$$Z_{MP}^{(t)}(\hat{y}^{(t)}) + (F^* - CI)(1+\beta)^t$$

Si k'-ésima ( $k' \leq K$ ) mejor solución tiene costo mayor que  $F^*$ , (En caso de no existe tal k', asigna  $k' = K+1$ ), se resuelve los subproblemas no analizados en las trayectorias de 1 hasta k'-1. Luego se identifica las trayectorias con costo menor que  $F^*$ . En el caso  $k' \leq K$ , terminar. Si  $k' > K$ , aumentar el valor de K, y repetir el proceso.

---

## CAPITULO 5.

---

### EL SISTEMA DE PLANEACION SIPGT

---

Una aspecto importante en el desarrollo de técnicas de modelación y optimización es su correspondiente implantación y validación en problemas reales. Es bien conocido el hecho que la experiencia computacional de un sistema difiere mucho cuando pasamos de problemas "pequeños o de prueba" a problemas reales cuyo tamaño y manejo de información es considerable. En el presente trabajo las técnicas de programación matemática para la planeación de un sistema de generación y transmisión están implantadas en el sistema denominado SIPGT (Sistema Integrado para la Planeación de Generación y Transmisión) cuya implantación y aplicación son propósito del presente capítulo. Conviene señalar que la estructura modular del sistema permite su rápida adaptación y aplicación a sistemas reales de generación y transmisión.

Este capítulo se desarrolla como sigue: en la primera sección se describe la estructura y características técnicas del sistema de planeación SIPGT. En la segunda sección se describe el Sistema Peninsular Sureste de la C.F.E. y una problemática de expansión. La estrategia de solución y resultados obtenidos con el sistema SIPGT se presenta en la tercera sección, mientras que la experiencia computacional obtenida se reporta en la última sección.

## 5.1 ESTRUCTURA Y ESQUEMA DE IMPLANTACION DEL SISTEMA SIPGT

En este trabajo diversas técnicas de modelación y optimización han sido desarrolladas para resolver el problema de planeación del sistema de generación y transmisión. Dichas técnicas quedan implantadas en el sistema SIPGT (Sistema Integrado para la Planeación de Generación y Transmisión). A grandes rasgos, el sistema transforma la información de la red eléctrica en parámetros de una red de flujo normal. Después se resuelve, etapa por etapa, la expansión óptima mediante la descomposición de Benders. Finalmente se conjunta la información obtenida en la solución de expansión de las etapas, y se procede a encontrar la planeación óptima dando al usuario las mejores soluciones. El costo de cada configuración analizada es la suma del costo de construcción anualizado más el costo de operación usando el flujo de carga DC.

Los programas están escritos en MS FORTRAN 77 Versión 3.2. Aunque actualmente se dispone Versión 4.0, no se ha incluido sus aspectos avanzados. Esto con el fin de facilitar el traslado del programa de una computadora a otra, pues las instrucciones avanzadas de Versión 4.0 no necesariamente funcionan para todos los compiladores. En vista de lo anterior, los programas han sido probados por FORTRAN 77 FULL LANGUAGE STANDARD; para lograrlo se usa el metacomando `$/STRICT` en la compilación de Versión 4.0.

El sistema consiste de seis módulos cuya jerarquía se muestra en la figura 5.1.1

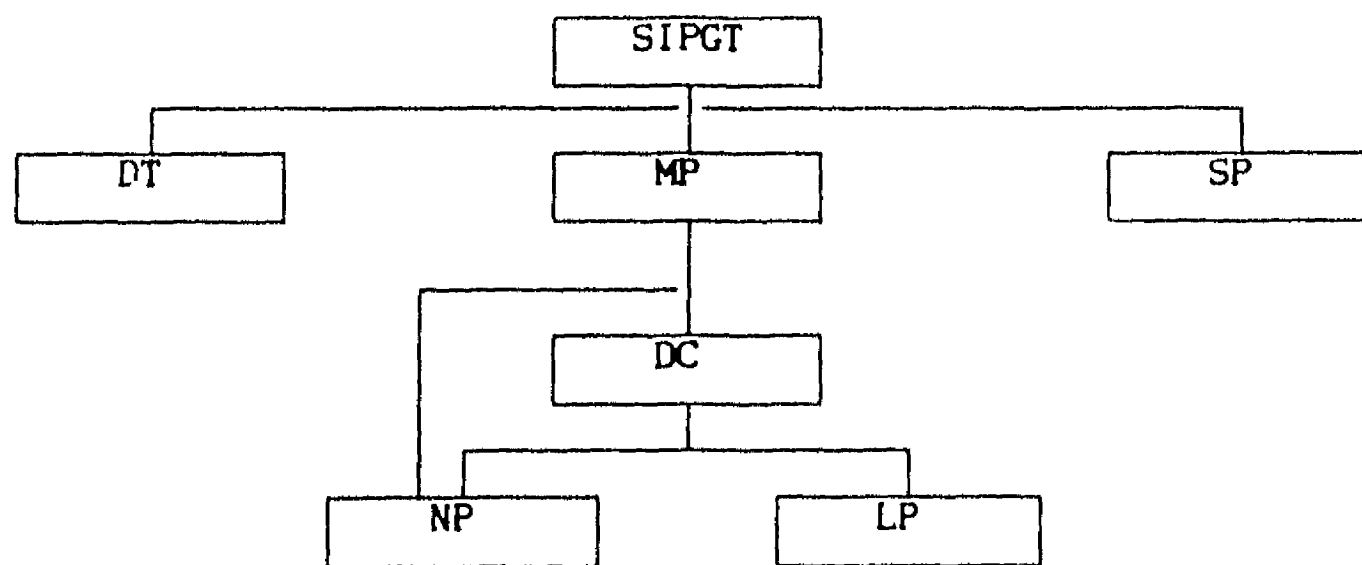
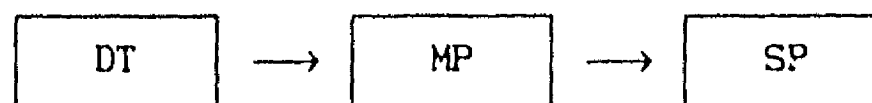


Figura 5.1.1 Jerarquía de los módulos del sistema SIPGT

Específicamente, los módulos que integran el sistema SIPGT son:

1. DT (Data transformation)
2. MP (Master program)
3. DC (DC load flow)
4. NP (Network program)
5. LP (Linear program)
6. SP (Shortest paths)

Los seis módulos están grabados separadamente. Sin embargo, los módulos 2,3,4,5 están ligados para ser un solo programa ejecutable (MP.EXE). De esta manera tenemos el diagrama de flujo de los programas ejecutables:



es decir, los datos originales de cada etapa ( distancias, calibres, costos, etc) son transformados por DT.EXE a parámetros manejables por MP.EXE. Luego, MP.EXE procede a encontrar la solución óptima de cada etapa dejando como resultados de salida también los cortes de Benders generados. Finalmente, el programa SP.EXE busca un plan óptimo para la planeación multietapa. Para llegar a la solución óptima de planeación, se corre iterativamente MP.EXE y SP.EXE por el método de descomposición desarrollado en el capítulo 4. El programa MP.EXE es el de mayor complejidad, pues constituye casi 90% del sistema.

Una descripción de las funciones y características técnicas de cada módulo es:

#### 1. MODULO DT

Este programa transforma los datos originales de la red eléctrica en los parámetros requeridos para la optimización de flujo. Es muy probable que los datos originales de una cierta aplicación están proporcionados de diferente manera a como se especifica aquí, lo cual implica que el programa DT requiere ciertas modificaciones. Lo importante es que el archivo de salida debe tener un formato fijo para que se puede leer en el programa MP. El fundamento para los cálculos se encuentra en [ENR86]. Para el caso de estudio, la entrada de datos es similar al formato que maneja en C.F.E. A decir la entrada consiste en:

a. Líneas de transmisión y transformadores:

Bus origen, Bus destino, Calibre y la distancia de la línea de transmisión, número de líneas y costo de expansión por km. anualizado si la línea está en consideración para expandir. De los transformadores: Porcentaje de Impedancia por unidad y la capacidad.

b. Unidades de generación

Bus de generación, Tipo de la unidad ( Vapor o Gas), Capacidad de generación en MW de cada unidad, Número de unidades idénticas en el mismo bus, Costo unitario por MW generada, Costo anualizado de construcción por MW.

c. Demandas:

Demanda en MW en cada bus y cada año.

Conviene señalar que si  $N$  es el número de nodos y  $M$  el número de arcos, el espacio usado para datos es  $32N+30M$  bytes. Si la memoria disponible es 512K, esto implica que este módulo puede manejar más de 15000 arcos.

## 2. MODULO MP

Este programa busca la solución del problema de expansión por medio de la técnica de descomposición de Benders generalizada. A grandes rasgos, el procedimiento usado en el programa es como sigue: MP lee los datos y llama a algunas subrutinas del módulo NP para formar las restricciones de ángulo de voltaje. Luego, pasa estas restricciones y los datos de la red al módulo DC. Las subrutinas en DC llaman las subrutinas en NP para resolver los problemas de optimización de redes y determinan el multiplicador de Lagrange de las restricciones. Las llamadas desde el módulo DC al módulo LP es para obtener una cota superior del problema DC ó nuevos valores del multiplicador de Lagrange propocionados. Una vez que está resuelto el problema de DC óptimo, MP resuelve un problema de programación entera usando el algoritmo de enumeración implícita para generar una configuración nueva y volver a resolver DC.

## 3. MODULO DC

Este módulo coordina las subrutinas para obtener la solución óptima del problema de flujo de carga DC. El sistema SIPGT tiene dos versiones de este



módulo, una (Versión 1.0) usa el Método de Subgradientes y la otra (Versión 1.1) usa el método de búsqueda direccional de ascenso máximo.

#### Versión 1.0

En este caso, primero se resuelve el problema de redes sin restricciones de ángulos de voltaje, i.e. el multiplicador lagrangeano es 0. Luego, se llama a las subrutinas de programación lineal para encontrar una cota superior del problema DC. Se usa el método de subgradientes para estimar un nuevo valor del multiplicador de Lagrange con el cual se penaliza el costo de los arcos, y se vuelve a resolver el problema de redes. La terminación se da cuando los valores de las funciones objetivo de la solución actual y la cota superior están suficientemente cercanas.

#### VERSION 1.1

Esta versión usa la dirección de máximo ascenso o la dirección conjugada para la búsqueda de los multiplicadores óptimos. Aquí, primero, se resuelve el problema de redes sin restricciones de ángulos de voltaje y luego se llama a las subrutinas de programación lineal para encontrar una cota superior del problema DC. Se busca un valor del multiplicador de Lagrange sobre la dirección de ascenso máximo o la dirección conjugada con el cual se penaliza el costo de los arcos y se vuelve a resolver el problema de redes. El proceso termina cuando la dirección de máximo ascenso es suficientemente pequeña o la solución tiene valor de la función objetivo cercano a la cota superior.

#### 4. MODULO NP.FOR

Este módulo consiste de subrutinas para el manejo y optimización de redes. En este módulo se resuelve el problema de optimización de flujo en una red con pérdida cuadrática así como la búsqueda de circuitos independientes para formar las restricciones de ángulo de voltaje. Este módulo es la implantación del algoritmo presentado en el capítulo 2 de este trabajo, esto es, se aproxima implícitamente la curva de pérdida usando segmentos lineales, y se resuelve el problema de flujo. Sucesivamente se aumenta el número de segmentos de aproximación. Diferentes combinaciones del número inicial de segmentos e incremento de estos han sido probados experimentalmente, dejando la siguiente experiencia: una precisión suficientemente buena para aproximar cada curva requiere 16 segmentos. Inicialmente las curvas de pérdida se aproximan con cuatro segmentos y cuando no sea posible mejorar la solución,

el número de segmentos se aumenta en cuatro.

#### 5. MODULO LP.FOR

Es un código de programación lineal, una adaptación del código desarrollado por Land y Powell [LAN72]. Con las subrutinas que están en este módulo, se resuelve el problema de programación lineal generado en DC. La solución de LP se utiliza para obtener una cota superior del problema de flujo de carga DC óptimo, o bien se usa como un nuevo multiplicador de Lagrange en el problema DC. Estas subrutinas están adaptadas de la siguiente manera: en cada iteración del problema DC óptimo, se añade una restricción al problema de programación lineal y se aplica el algoritmo Dual Simplex para satisfacer la nueva restricción. Obviamente se puede usar algún código menos sofisticado tal que ocupa menos espacio de memoria.

El espacio ocupado por el programa ejecutable que consiste los módulos MP, DC, NP, LP es  $4(M-N)N+168N+262M+28Nc+4NyNc+4Nb^2+38Nb$  donde N es el número de buses, M el número de líneas de transmisión, Nc Número de cortes de Benders, Ny número de variables de decisión, Nr número de cotas obtenidas por programación lineal y Nb es la dimensión de la base =  $\text{Min}\{Nr, M-N\}$ . Para el caso de aplicación descrito posteriormente:  $N=25, M=35, Ny=15, Nc=60, Nr=25, Nb=10$ , el espacio utilizado para datos es:

$$4(35-25)25+168 \times 25+262 \times 35+28 \times 60+4 \times 15 \times 60+4 \times 10^2+38 \times 10 \text{ bytes} = 20.43 \text{ Kbytes}$$

Si  $N=200, M=300, Ny=20, Nc=100, Nr=100, Nb=100$  que corresponde a un sistema mediano, se ocupa:

$$4(300-200)100+168 \times 200+262 \times 300+28 \times 100+4 \times 20 \times 100+4 \times 100^2+38 \times 100 = 206.8 \text{ Kbytes}$$

El programa ejecutable en sí ocupa menos de 200Kb de memoria. Esto significa que el problema del tamaño mediano mencionado puede ser resuelto adecuadamente en una microcomputadora de 512 Kb de memoria principal. Si el problema en consideración es todavía mayor, se puede dividir MP.EXE en varios programas ejecutables según los módulos.

#### 6. MODULO SP

Este programa encuentra las K mejores soluciones de la planeación usando programación dinámica. La estructura de datos y el funcionamiento son explicados en la sección 4.1-3 del capítulo 4. El procedimiento se divide en

tres pasos:

- a. Estimar el costo mediante el método de enumeración implícita.
- b. Resolver el problema de K rutas más cortas.
- c. Impresión del resultado proporcionado por el sistema.

Con objeto de ahorrar la memoria principal, para cada nodo únicamente se almacena la representación compacta de la configuración asociada, esto es, un entero que indica de cual nodo viene la trayectoria de solución de programación dinámica, y PI los menores costos de solución. En esta subrutina se recupera la solución desde atrás hacia adelante usando los datos mencionados.

El consumo principal del espacio para datos es

$$4N+6M+4NyNc+4nNy+6XK+28Nc \text{ bytes}$$

donde  $N$  es el número de estados en el problema de programación dinámica;  $M$  número de enlaces por cada etapa;  $Ny$  número de variables de decisión;  $Nc$  número de cortes de Benders en cada etapa;  $n$  número de estados por etapa;  $X$  número de mejores soluciones requeridas.

Si tenemos un problema de programación dinámica de 2000 estados, entre cada etapa el número de enlaces puede llegar a 15000, el número de variables de decisión es 15, el número de corte de Benders puede llegar a 60, el número de estados por etapa es de 600, y se requiere 3 soluciones, entonces el espacio ocupado por los datos es aproximadamente:

$$4 \times 2000 + 6 \times 15000 + 4 \times 15 \times 60 + 4 \times 600 \times 15 + 6 \times 2000 \times 3 + 28 \times 60 \text{ bytes} = 175.28 \text{ Kbytes}$$

El tiempo de ejecución del sistema principalmente depende del número de variables de decisión. Si el número de estas variables es mayor que cincuenta, el método de descomposición de Benders es inadecuado. Además el número de estados y enlaces en el programa SP (problema de rutas más cortas) se incrementa bastante y únicamente es posible generar parcialmente enlaces y estados. Si el número de variables binarias es menor que 20, el tiempo de ejecución depende principalmente de la eficiencia de la solución de flujo de carga DC.

## 5.2 CARACTERISTICAS DEL SISTEMA EN ESTUDIO

El sistema eléctrico mexicano es manejado por una empresa paraestatal denominada C.F.E. (Comisión Federal de Electricidad). La generación bruta en

1986 fue de 90,000 GWh y si se calcula a 50 pesos por kilowatt hora, esto significa un monto de 4,500 billones de pesos. Actualmente C.F.E. está generando más de 100,000 GWh suministrando la energía a aproximadamente 14 millones de usuarios y su tasa anual de crecimiento es casi 5%. El sistema eléctrico manejado por C.F.E. se divide en cuatro partes: el sistema interconectado, el sistema peninsular sureste, el sistema de baja california y generaciones aisladas que cubren 91.6%, 5.55%, 2.15% y 0.7% de la demanda respectivamente. En esta sección se analiza en detalle la problemática de expansión del sistema peninsular sureste. La localización geográfica de dicho sistema se muestra en la figura 5.2.1 y una red que representa adecuadamente al sistema se muestra en la figura 5.2.2. Esta región experimenta un rápido crecimiento de la demanda en los próximos años debido básicamente por el impulso turístico. La razón anual de crecimiento es casi 10%. La red de transmisión consiste de 22 buses y 32 líneas de transmisión existentes y se considera que para propósitos de modelación, este número es adecuado. Dicho sistema no tiene ninguna unidad de generación hidroeléctrica lo que es adecuado para aplicar el sistema SIPGT. En la figura 5.2.2 se muestra las instalaciones existentes hasta 1987, denotadas por líneas sólidas mientras que las líneas y unidades de generación candidato a existir se denotan por líneas discontinuas. En la tabla 5.2.1, se listan los posibles buses a ser expandido y las unidades de generación en consideración.

En este estudio se desea determinar tres mejores planes de expansión a costo mínimo en un horizonte de 10 años (de 1987 a 1996).

La problemática descrita anteriormente puede ser resuelta satisfactoriamente usando el sistema SIPGT. La estrategia de solución es como sigue:

- a. Recopilar los datos utilizados para analizar el flujo de carga en esta zona por C.F.E. que consiste de datos de generación y transmisión, así como las demandas en el horizonte de planeación 1987 - 1996.
- b. Ejecutar el problema DT para generar datos de redes de flujo para cada año entre 1987 - 1996.
- c. Resolver el problema de expansión de cada año usando el programa MP.
- d. Con los resultados obtenidos por analizar las configuraciones, resolver el problema de trayectorias a costo mínimo usando el problema SP.
- e. Si las configuraciones en las trayectorias ya fueron analizadas, terminar, se tiene la solución del problema. En caso contrario, analizar la configuración mediante el programa MP y regresar a d.



República  
Mexicana.

Figura 5.2.1 Localización del sistema en estudio

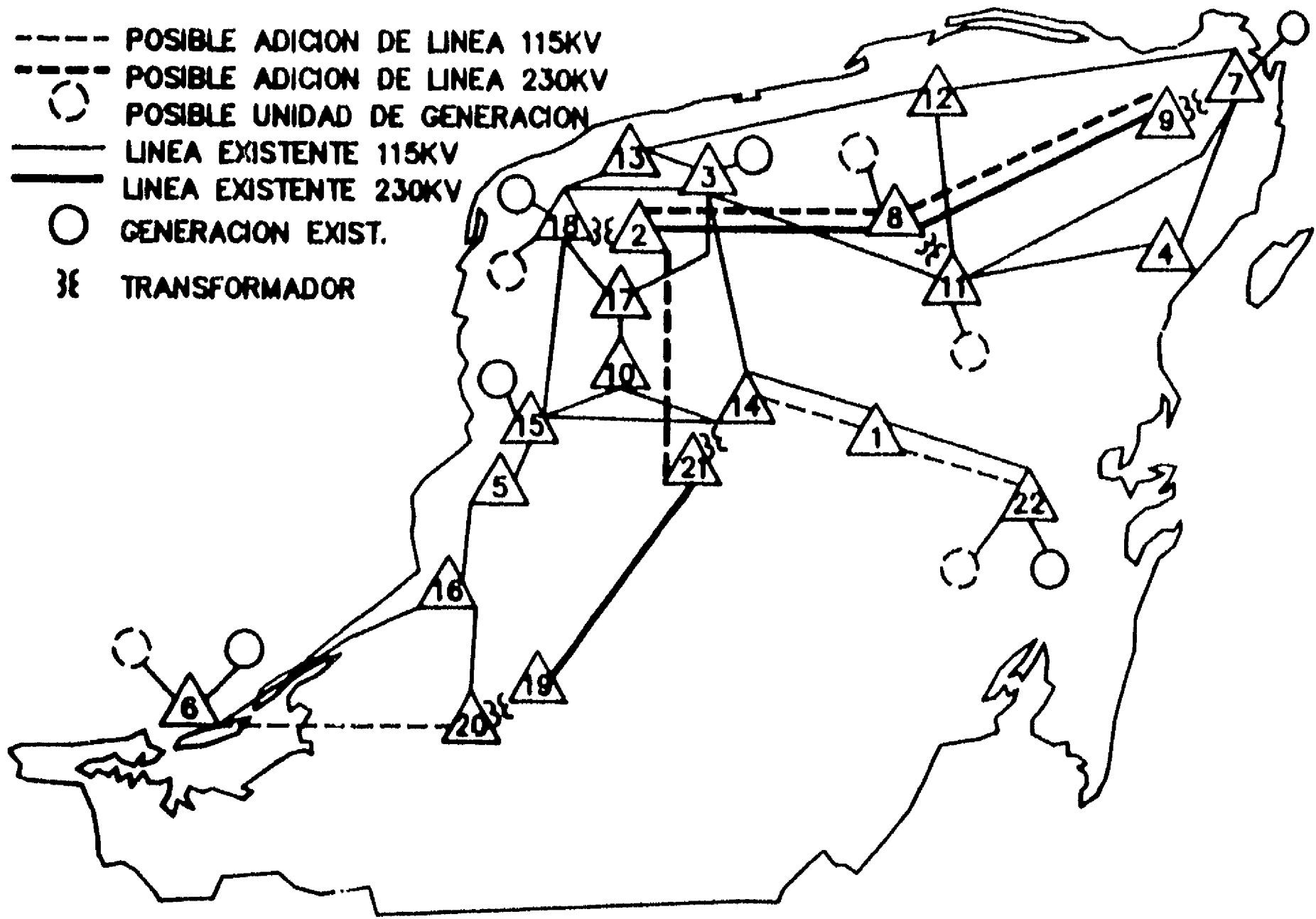


Figura 5.2.2 Sistema peninsular sureste

Tabla 5.2.1 Posibles adiciones de generación

Bus	Capacidad de unidad de generación (MW)
6	Gas 14, Gas 30
8	Gas 2x37.5
11	Ciclo combinado 220
18	Vapor 2x84
22	Gas 14, Gas 30

Para resolver este problema usando el sistema SIPGT, se define primero la correspondencia entre las variables binarias 0-1 y la decisión de expansión como sigue:

- $y_1$  línea de calibre 477 entre bus 1 y 14
- $y_2$  línea de calibre 477 entre bus 1 y 22
- $y_3$  línea de calibre 900 entre bus 2 y 8
- $y_4$  línea de calibre 477 entre bus 2 y 21
- $y_5$  línea de calibre 477 entre bus 6 y 20
- $y_6$  línea de calibre 900 entre bus 8 y 9
- $y_7$  unidad de generación gas 14 MW en bus 6
- $y_8$  unidad de generación gas 30 MW en bus 6
- $y_9$  unidad de generación gas 2x37.5 MW en bus 8
- $y_{10}$  unidad de generación ciclo combinado 220MW en bus 11
- $y_{11}$  unidad de generación vapor 2x84 MW en bus 18
- $y_{12}$  unidad de generación gas 14 MW en bus 22
- $y_{13}$  unidad de generación gas 30 MW en bus 22

El archivo de entrada que se utiliza para el Sistema Peninsular Sureste se especifica como sigue:

El orden de los registros que forman el archivo de entrada es:

- Registros de líneas de transmisión y transformadores
- Un registro en blanco
- Registros de unidades de generación
- Dos registros en blanco
- Registros de demanda

Registros de líneas de transmisión y transformadores:

Campo	Formato	Comentario
1-4	I4	Bus origen
5-8	I4	Bus destino
9-12	I4	Calibre en caso de líneas de transmisión, o

		Capacidad en caso de transformadores.
		Cuando CAL≠477, CAL≠900, Se trata de un transf.
13-18	F6.1	Distancia en km. de la línea, o Porcentaje de Impedancia en PU si es un transf.
19-20	I2	IST=0 implica bajo consideración de expansión, IST=1 línea existente, IST=2 Doble línea existente.
21-27	F7.1	Costo de expansión por km. anualizado.

Registros de unidades de generación:

Campo	Formato	Comentario
1-4	I4	Bus de generación
5-8	I4	ITYPE=1 Unidades de Vapor, ITYPE=2 Unidades de Gas.
9-14	F6.1	Capacidad de generación en MW de cada unidad
15-16	I2	Número de unidades idénticas
17-22	F6.2	Costo unitario por MW generada
23-28	F6.2	Costo anualizado de construcción por MW.

Registros de demanda

Cada registro contiene la demanda de todos los buses en un año.

Campo	Formato	Comentario
1-3	I3	Demanda en MW del bus 1
4-6	I3	Demanda en MW del bus 2
:	:	:
:	:	:

El archivo de entrada para el sistema peninsular sureste consiste en:

```

1 14 477 92.0 1
1 14 477 92.0 0 267.8
1 22 477 197.0 1
1 22 477 197.0 0 267.8
2 8 900 173.0 1
2 8 900 173.0 0 426.5
2 18 225 4.2 1
2 21 900 70.0 0 610.7
3 11 477 154.0 1
3 13 477 15.0 2
3 14 477 115.0 1

```



3	17	477	14.0	2	
3	18	477	19.0	1	
4	7	477	75.0	1	
4	11	477	115.0	1	
5	15	477	0.1	1	
5	16	477	57.0	1	
6	16	477	152.0	1	
6	20	477	170.0	0	383.8
7	9	225	4.2	1	
7	11	477	154.0	1	
7	12	477	148.0	1	
8	9	900	154.0	1	
8	9	900	154.0	0	426.5
8	11	225	4.2	1	
10	14	477	50.0	1	
10	15	477	129.0	1	
10	17	477	54.0	1	
11	12	477	57.0	1	
12	13	477	162.0	1	
13	18	477	16.0	2	
14	15	477	145.0	1	
14	21	100	5.1	1	
15	18	477	174.0	1	
16	20	477	82.0	1	
17	18	477	11.0	2	
19	20	100	5.1	1	
19	21	900	236.0	1	

3	1	24.5	2	58.73	
3	2	30.0	1	64.36	
6	2	14.0	1	67.04	
6	2	14.0	1	67.04	61.43
6	2	30.0	1	64.36	49.14
7	2	14.0	2	67.04	
7	2	30.0	1	64.36	
8	1	37.5	2	56.72	27.01
11	1	220.0	1	43.40	19.67
15	1	37.5	4	56.72	

18	1	84.0	2	52.90	
18	2	30.0	1	64.36	
18	1	84.0	2	52.90	22.72
22	2	14.0	1	67.04	
22	2	14.0	1	67.04	61.43
22	2	30.0	1	64.36	49.14

6	0	51	13	33	22	57	0	0	4	7	8	37	11	0	5	22	59	0	6	0	26
7	0	53	15	37	25	59	0	0	4	8	8	40	13	0	6	24	65	0	10	0	29
7	0	54	17	39	30	66	0	0	5	9	9	43	15	0	7	25	71	0	13	0	33
8	0	54	21	42	34	74	0	0	5	10	11	43	16	0	7	31	79	0	15	0	38
9	0	58	24	46	40	82	0	0	6	12	12	45	18	0	8	32	83	0	18	0	43
10	0	63	29	50	43	93	0	0	7	13	13	49	20	0	9	35	87	0	19	0	49
11	0	67	32	54	47	105	0	0	8	14	15	51	22	0	11	38	96	0	22	0	55
12	0	70	35	59	52	119	0	0	9	16	17	55	25	0	12	41	105	0	24	0	62
13	0	75	39	64	57	132	0	0	10	18	19	58	27	0	14	44	115	0	28	0	71
15	0	79	41	70	63	149	0	0	11	20	22	63	30	0	16	46	125	0	31	0	80

### 5.3 ANALISIS DEL RESULTADOS

Los resultados obtenidos con el sistema SIPGT se resumen a continuación.

En la tabla 5.3.1 se muestra la mejor configuración para cada año obtenida por resolver el problema de expansión. Por ejemplo, la mejor expansión para el año 1995 es  $y=(1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1)$ .

Observe que estas soluciones óptimas a cada etapa no forman una trayectoria factible, i.e. no cumple con  $y_1^{(t)} \leq y_1^{(t+1)} \forall t$ . Por tanto es necesario aplicar el algoritmo 4.2 sucesivamente usando el program SP. La salida

Tabla 5.3.1 Solución óptima de cada año (los costos están en mil pesos/hr de Nov. de 1987)

	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>3</sub>	y <sub>4</sub>	y <sub>5</sub>	y <sub>6</sub>	y <sub>7</sub>	y <sub>8</sub>	y <sub>9</sub>	y <sub>10</sub>	y <sub>11</sub>	y <sub>12</sub>	y <sub>13</sub>	costo anualizado
1987	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20920
1988	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	21104
1989	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	21909
1990	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	21917
1991	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	21909
1992	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	21947
1993	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	23034
1994	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	23353
1995	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	24284
1996	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	25082

final del programa SP se muestra como sigue

SOLUCION 1														COSTOS		
ETAPA	CONFIGURACION													OPERACION	CONSTRUC.	TOTAL
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20920.69	.00	20920.69
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	21104.18	.00	21104.18
2	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	18402.83	3506.36	21909.19
3	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	18729.49	3187.60	21917.09
4	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	19010.88	2897.82	21908.70
5	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	19313.00	2634.38	21947.38
6	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	18749.58	4522.73	23272.31
7	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	19241.04	4111.57	23352.61
8	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	19484.50	5085.74	24570.23
9	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	19653.52	5439.56	25093.08
-----																
SUMA = 225995.50																

SOLUCION 2														COSTOS		
ETAPA	CONFIGURACION													OPERACION	CONSTRUC.	TOTAL
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20920.69	.00	20920.69

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	21104.18	.00	21104.18
2	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	18402.83	3506.36	21909.19
3	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	18729.49	3187.60	21917.09
4	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	19010.88	2897.82	21908.70
5	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	19275.57	2679.08	21954.65
6	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	18749.58	4522.73	23272.31
7	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	19241.04	4111.57	23352.61
8	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	19484.50	5085.74	24570.23
9	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	19653.52	5439.56	25093.08
-----																
SUMA = 226002.70																

SOLUCION 3

ETAPA	CONFIGURACION													COSTOS		
														OPERACION	CONSTRUC.	TOTAL
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20920.69	.00	20920.69
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	21104.18	.00	21104.18
2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	18483.64	3436.26	21919.90
3	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	18729.48	3187.60	21917.09
4	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	19010.88	2897.82	21908.70
5	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	19313.00	2634.38	21947.38
6	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	18749.58	4522.73	23272.31
7	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	19241.04	4111.57	23352.61
8	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	19484.50	5085.74	24570.23
9	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	19653.52	5439.56	25093.08
-----																
SUMA = 226006.20																

COTA INFERIOR= 225457.5000000

PORCENTAGE PARA CADA PERIODO:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.026	.026	.025	.025	.025	.025	.024	.023	.023	.022

Basado en esta la salida del programa, se obtiene los tres mejores planes producido por el sistema SIPGT :

Solución óptima con valor presente neto (a precios de Nov. 1987) de costo

=225.995 millones de pesos/hr

1989 agregar líneas (1,14), (1,22), (2,21) y unidad de 220MW en bus 11

1993 agregar líneas (6,20), (8,9) y unidades 2x84MW en bus 18

1995 agregar unidades 30MW en bus 6 y 30MW en bus 22

1996 agregar 2x37.5MW en bus 8

2a. mejor solución con costo=226.002 millones de pesos/hr

1989 agregar líneas (1,14), (1,22), (2,21) y unidad de 220MW en bus 11

1992 agregar línea (8,9)

1993 agregar línea (6,20), y unidades 2x84MW en bus 18

1995 agregar unidades 30MW en bus 6 y 30MW en bus 22

1996 agregar 2x37.5 en bus 8

3a. mejor solución con costo=226.006 millones de pesos/hr

1989 agregar línea (2,21) y unidad de 220MW en bus 11

1990 agregar líneas (1,14), (1,22)

1993 agregar líneas (6,20), (8,9) y unidades 2x84MW en bus 18

1995 agregar unidades 30MW en bus 6 y 30MW en bus 22

1996 agregar 2x37.5MW en bus 8

Para el sistema peninsular sureste, hemos aplicado nuestro algoritmo al caso de la demanda estocástica considerando tres niveles de demanda: alto, bajo y medio. En [PAL90], podemos saber que la tasa de crecimiento de la demanda alta es aproximadamente 1.09 de la de demanda baja durante el periodo 90-95. La demanda media en este estudio se toma como promedio de la demanda alta y la demanda baja. Las probabilidades de ocurrencia para los tres niveles no están disponibles en la CFE, ya que la CFE sólo usa estas estimaciones de crecimiento para crear diferentes escenarios. Por otro lado, la estimación de la probabilidad es difícil, dado que el uso de la electricidad está fuertemente relacionado con el crecimiento de PIB (Producto Interno Bruto). Como los cambios mundiales pueden afectar a la economía nacional de cierto modo, existe gran incertidumbre sobre el PIB. En los estudios de la CFE, se toma más en cuenta la demanda alta, porque el costo penalizado por no suministrar la energía es bastante mayor que tener la capacidad ociosa. De este modo, las probabilidades de ocurrencia de demanda alta, media y baja utilizadas en este estudio son : 0.4, 0.3 y 0.3.

Tabla 5.3.2 Solución óptima de cada año con demanda estocástica  
(los costos están en miles de pesos/h de Nov. de 1987)

	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>3</sub>	y <sub>4</sub>	y <sub>5</sub>	y <sub>6</sub>	y <sub>7</sub>	y <sub>8</sub>	y <sub>9</sub>	y <sub>10</sub>	y <sub>11</sub>	y <sub>12</sub>	y <sub>13</sub>	costo anualizado
1987	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20847
1988	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20947
1989	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	21703
1990	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	21667
1991	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	21548
1992	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	21506
1993	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	22528
1994	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	22800
1995	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	23644
1996	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	24363

En la tabla 5.3.2 se muestra la mejor configuración para cada año después de resolver el problema de expansión con la demanda estocástica.

Los costos en la tabla 5.3.1 son ligeramente mayores que los de la tabla anterior, esto es de esperarse ya que en el primer caso, se considera únicamente la demanda alta. Comparando las tablas 5.3.1 y 5.3.2, podemos observar que en los años 1990 y 1993, las expansiones óptimas son diferentes. Sin embargo, el costo de la configuración ( 1 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 ) para la demanda estocástica en el año 1990 es 21668, que es similar a 21667 en la tabla 5.3.2; el costo de la configuración ( 1 1 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 0 ) para la demanda estocástica en el año 1993 es 22543, que es también similar a 22528 de la tabla anterior. Estas diferencias entre las expansiones óptimas con demanda alta y con demanda estocástica se debe a los errores de precisión seleccionada en el algoritmo.

Como los pronósticos de la demanda futura son bastante precisos, la tasa alta del crecimiento es 1.09 de la baja, se nota poca diferencia entre los costos en las tablas 5.3.1 y 5.3.2. Las adiciones óptimas del problema de planeación para demanda estocástica son las mismas de la demanda alta. La convergencia se obtuvo en el momento en que el valor presente neto del costo total es 222333, mientras que la cota inferior del problema de planeación es 222189. Es decir, solo 0.065% de tolerancia.

#### 5.4 EXPERIENCIA COMPUTACIONAL

Conviene señalar algunos aspectos operativos asociados con las corridas del problema descrito en la secuencia anterior. Empezamos por señalar que los recursos consumidos por diferentes programas son aproximadamente:

	tiempo	espacio para datos	espacio para programa
a. DT	5 minutos	2 K	49 K
b. MP	3 horas†	21 K	155 K
c. SP	1 hora	175 K	108 K

†DC óptimo resuelto por método de subgradientes. Si se resuelve el problema DC óptimo con método de ascenso máximo el tiempo total consumido por MP sería aproximadamente 9 horas.

En la tabla 5.4.1, la tercera columna muestra el número de cortes de Benders para cada año. Este es el mismo número de problemas de flujo de carga óptimo DC resueltos. La cuarta columna muestra el número de configuraciones que tienen un costo estimado menor que  $(UB-LB)(1+\beta)^t + Z_{SP}^{(t)}(\hat{y}^{(t)})$  cuando los cortes de Benders son utilizados para esta estimación en la planeación multietapa. Entre esas 2067 configuraciones, únicamente 6 (5a. columna de la tabla 5.4.1) son necesarias para determinar la solución del problema de flujo de carga óptimo. (Lo cual es un resultado sorprendente)

Como hemos mencionado en el capítulo 2, la solución del problema de flujo con pérdida cuadrática puede ser una aproximación muy buena del flujo de carga DC. Después de que esta solución sea obtenida, hemos efectuado la búsqueda en la dirección de ascenso máximo para tratar cumplir con las restricciones de ángulo de voltaje. En la tabla 5.4.2, la segunda columna muestra el número de iteraciones utilizadas en la solución del problema de flujo (NFP); la tercera columna muestra el porcentaje de la desviación de la función objetivo de (NFP) desde  $Z_{SP}$  finalmente encontrada. Similarmente, la experiencia computacional con las dos primeras búsquedas direccionales son mostradas. En las últimas 2 columnas, tenemos un registro del número de iteraciones para resolver el flujo de carga DC cuando el criterio de terminación se satisface, y el porcentaje de  $Z_{SP}$  desde la cota superior dada por programación lineal (LP).

El tiempo tardado para resolver 14 problema de flujo de carga DC óptimo por

la técnica de ascenso máximo en una PC (4.7MHz) con coprocesador matemático para el año 1987 es 16 minutos, casi 1 minuto para cada problema DC. El tiempo consumido por otros años se puede inferir del número de iteraciones relativo a 1987. Como podemos notar, existe una diferencia en la eficiencia de 1987, 1988 con respecto a otros años. Pensamos que debido a que la adición de la unidad de generación de 220MW y el crecimiento de demanda, existe más diferencia entre costos de generación en el sistema. Por tanto las restricciones sobre ángulos de voltaje son más difíciles de satisfacer cuando el algoritmo de flujo con pérdida cuadrática termina. Sin embargo, este fenómeno no se presentó en el método de subgradientes.

Tabla 5.4.1 Experiencia computacional con la descomposición Benders y el desempeño de la técnica de descomposición modificada en la planeación multietapa

año	demanda (MW)	número de cortes Benders generados (No. problemas DC)	Número de soluciones con $Z_{PM}(y) \leq Z_{SP}(\hat{y}) + (UB-LB)(1+\beta)^t$	No. problemas DC adicionales resueltos en plan. multietapa
1987	367	14	0†	0
1988	403	21	0†	0
1989	443	36	226	0
1990	488	32	151	0
1991	536	34	184	0
1992	589	32	196	0
1993	648	26	523	3
1994	713	23	247	0
1995	784	18	348	3
1996	861	20	190	0
Promedio por etapa		25.6	206.7	0.6

† Como la mejor configuración para 1987, 1988 es  $y_1=0$  VI, no es necesario generar soluciones en la planeación multietapa.

Tabla 5.4.2 Comparación de eficiencia de problema de flujo, primera búsqueda direccional, segunda búsqueda direccional para el problema DC

año	Probl. flujo		1a. búsqueda direcc.		2a. búsqueda direcc.		Solución final	
	Iter.	$1-Z/Z_{SP}$ %	Iter.	$1-Z/Z_{SP}$ %	Iter.	$1-Z/Z_{SP}$ %	Iter.	$1-Z_{SP}/Z_{LP}$ %
1987	169	.04	298	.01	109	.00	802	.44
1988	164	.06	254	.02	201	.01	923	.44
1989	165	.25	706	.10	246	.06	1759	1.18
1990	179	.19	588	.07	244	.02	1598	1.70
1991	190	.16	674	.05	177	.02	1546	1.29
1992	189	.14	453	.02	74	.01	1122	2.20
1993	196	.23	754	.09	388	.04	2100	1.88
1994	192	.16	739	.05	296	.02	1784	2.13
1995	191	.16	686	.05	264	.02	1624	2.32
1996	199	.30	835	.05	208	.03	1889	3.98
Promedio por etapa	183	.17	598	.05	220	.02	1514	1.76



El método de subgradientes descrito en el capítulo 2 ha sido aplicado para resolver subproblemas en la expansión de tal sistema en el año 89. En total 23 diferentes configuraciones generadas durante el análisis de expansión (por descomposición de Benders) son resueltas por el método de optimización de subgradientes y el método de ascenso máximo. En la tabla 5.4.3, la primera columna es el número de pivoteo en la red (Número de cambio de bases) sin las restricciones sobre el ángulo de voltaje. Las columnas 2 y 3 muestran el número de iteraciones y el valor objetivo obtenido por método de subgradientes y las últimas dos columnas muestra el número de iteraciones y el valor objetivo por la técnica de ascenso máximo.

Tabla 5.4.3 Comparación de eficiencia entre el método de subgradiente y el método de ascenso máximo

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
	163	484	25811.07	1058	25813.01
	179	738	22240.30	2894	22187.74
	165	490	22480.91	1456	22445.72
	168	713	22321.84	829	22321.90
	177	828	22221.83	1603	22223.91
	151	650	22285.36	1300	22246.84
	178	709	22290.91	1030	22241.36
	151	625	22237.98	2208	22236.16
	185	654	22304.55	4013	22214.87
	156	571	22198.25	5258	22227.79
	159	853	22174.59	1754	22136.47
	174	493	22383.83	7057	22516.33
	164	504	22376.58	1370	22325.96
	162	661	22339.73	1156	22339.70
	159	691	22330.18	1158	22333.98
	163	698	22291.67	1593	22286.86
	159	671	22320.37	1337	22324.01
	161	617	22275.27	1358	22267.42
	155	631	22337.55	1456	22351.23
	154	685	22365.79	784	22365.21
	170	750	22293.23	1429	22340.94
	176	532	22321.86	2126	22265.44
	166	443	22485.35	703	22455.90
Promedio	165	638	22464.74	1953	22455.16

Como usamos estos métodos para la maximización del problema dual Lagrangeano, las mejores soluciones corresponden a los valores objetivo más altos. En la tabla podemos ver que cuando estos dos métodos obtienen casi igual calidad de valor objetivo (Columnas 3 y 5), el método de subgradiente usa 33% de iteraciones del método de ascenso máximo. En una microcomputadora IBM PC (4.7MHz) con coprocesador, el tiempo promedio consumido para cada problema es .75 minutos por método de subgradiente y 2.1 por método de ascenso máximo. Se ha mostrado que el método de subgradientes es mejor para la optimización del problema DC.

#### CASO ESTOCASTICO

En la tabla 5.4.4, la tercera columna muestra el número de cortes de Benders para cada año. La cuarta columna muestra el número de configuraciones que tienen un costo estimado menor que  $(UB-LB)(1+\beta)^t + Z_{SP}^{(t)}(\hat{y}^{(t)})$  cuando los cortes de Benders son utilizados para esta estimación en la planeación multietapa.

Entre esas 2009 configuraciones, únicamente 6 (5a. columna de la tabla 5.4.4) son necesarias para determinar la solución del problema de flujo de carga óptimo.

Tabla 5.4.4 Experiencia computacional con la descomposición Benders y el desempeño de la técnica de descomposición modificado en la planeación multietapa en caso de demanda estocástica

año	demanda alta (MW)	número de cortes Benders generados (No. problemas DC)	Número de soluciones con $Z_{PM}(y) \leq Z_{SP}(\hat{y}) + (UB-LB)(1+\beta)^t$	No. problemas DC adicionales resueltos en plan. multietapa
1987	367	11	3	0
1988	403	20	3	1
1989	443	41	284	0
1990	488	43	154	0
1991	536	48	165	0
1992	589	45	192	0
1993	648	43	470	3
1994	713	31	224	0
1995	784	27	336	2
1996	861	31	178	0
Promedio por etapa		33.8	200.9	0.6

El tiempo consumido para la expansión óptima de la primera etapa es 19.28 minutos en resolver 11 subproblemas en una computadora IBM PS 60 sin coprocesador. Entonces para resolver los diez problemas de expansión se necesita aproximadamente 10 horas. El tiempo total para resolver el problema de planeación es 10.5 horas, lo cual es mayor que lo estimado (debe ser aproximadamente tres veces que el tiempo consumido para la demanda alta). Esto se debe principalmente a que en el caso de demanda estocástica, se generaron más cortes de Benders que en el caso de demanda alta. Otra observación es que en la descomposición del flujo en la red, el flujo óptimo de la demanda alta no sirve de mucho para encontrar el flujo óptimo de la demanda media o baja. En cambio si se aproxima la solución de DC óptimo con la solución del flujo con pérdida cuadrática, el flujo óptimo para la demanda alta es factible para los problemas con demanda media y baja. En este caso, se puede aprovechar la solución de demanda alta y el tiempo estimado se reduce sustancialmente. Específicamente, 8 segundos para la demanda alta, 1 segundo para la demanda media y 1 segundo para la demanda baja.

#### EXPERIENCIA COMPUTACIONAL CON LOS SISTEMAS DE PRUEBA

El sistema de prueba de seis buses utilizado por EPRI [EPR88] se muestra en la figura 5.4.1. Las opciones de expansión son: una línea entre buses 2 y 3, dos líneas entre 3 y 5, dos líneas entre 2 y 6, dos líneas entre 4 y 6. En la figura, las líneas continuas son existentes y las discontinuas son las decisiones óptimas aplicando la descomposición de Benders al modelo de EPRI. El patrón de flujo se muestra también en la misma figura, esto es:

$$\begin{aligned} x_{12} &= 29.06, & x_{14} &= 10.25, & x_{15} &= 30.68, & x_{32} &= 97.22, \\ x_{42} &= 13.72, & x_{62} &= 100, & x_{35} &= 209.3, & x_{64} &= 163.5 \end{aligned}$$

Como las resistencias no están dadas en la referencia, suponemos los siguientes valores:  $r_{12} = .0002$ ,  $r_{15} = .0001$ ,  $r_{14} = .0002$ ,  $r_{23} = .0001$ ,  $r_{24} = .0002$ ,  $r_{26} = .00015$ ,  $r_{35} = .000033$ ,  $r_{46} = .000075$ . Para algunos valores mayores de las resistencias, el problema de flujo de carga DC no tiene solución factible. En el volumen 2 de [EPR88], se reporta 74 subproblemas resueltos para obtener la expansión óptima. Hemos aplicado el algoritmo desarrollado en nuestro trabajo a este problema, el número de subproblemas resueltos es 33. El tiempo total consumido en una PC (4.7 MH con coprocesador) es 8.8 minutos. El tiempo

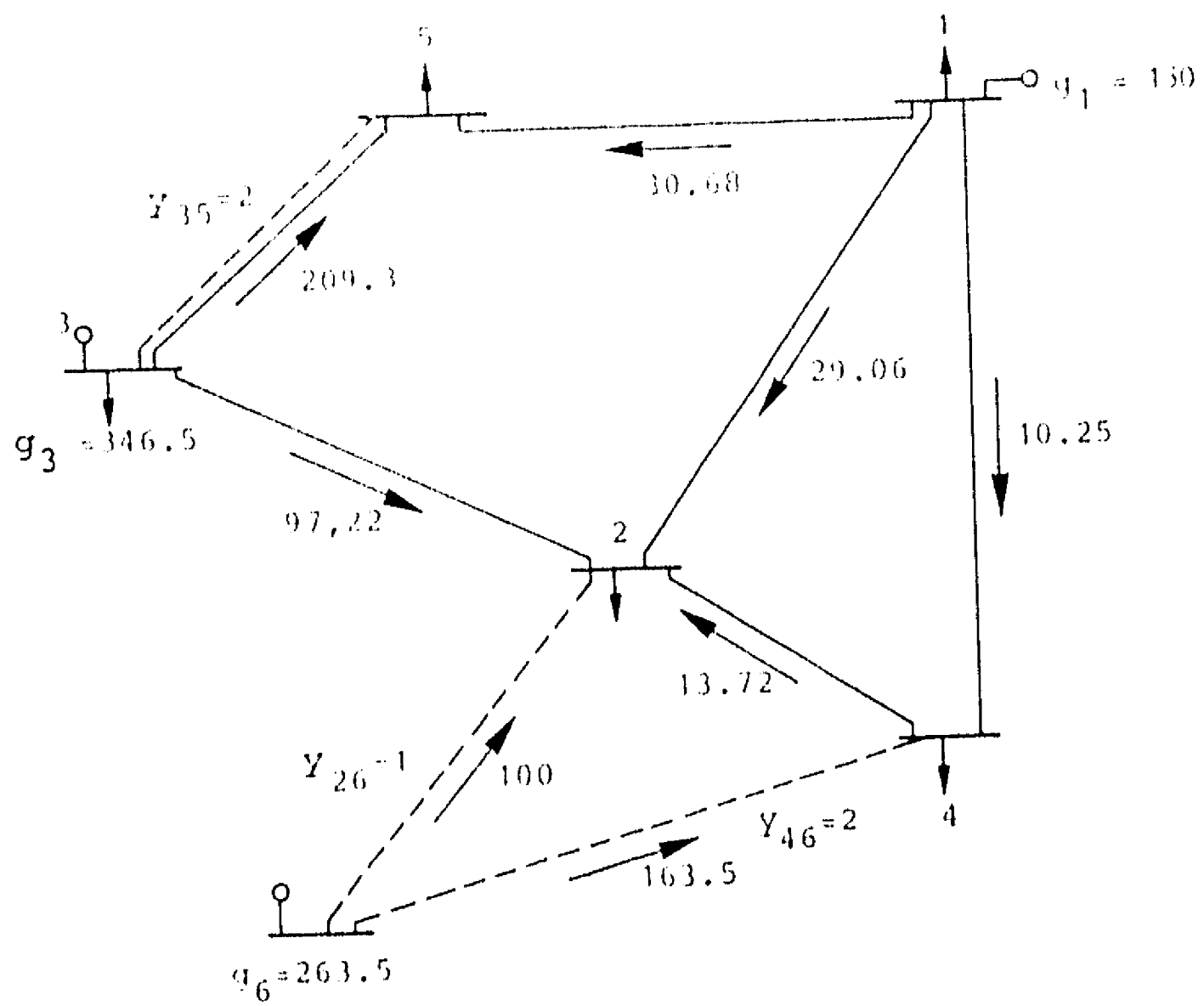


Figura 6.4.1 SOLUCION POR EL MODELO DE RESTRICCIONES DISYUNTIVAS.

promedio consumido por cada subproblema es 16 segundos, mientras que GINO (General Interactive Nonlinear Optimization) utiliza 120 segundos. La expansión óptima es la misma como obtenida en la referencia. Para esta configuración óptima, resolvimos el problema de flujo de carga DC formulado en el capítulo 1 minimizando la generación total. El patrón de flujo es

$$\begin{aligned} x_{12} &= 29.5, & x_{14} &= 10.84, & x_{15} &= 29.65, & x_{32} &= 100, \\ x_{42} &= 13.27, & x_{62} &= 99.23, & x_{35} &= 211.92, & x_{64} &= 164.5 \end{aligned}$$

con valor objetivo 646.34.

Los flujos sobrantes en los buses son cero. Los multiplicadores lagrangeanos de las restricciones de ángulo de voltaje de sus tres circuitos fundamentales son:

$$\begin{aligned} \text{circuito } 3 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 &: .0215, \\ \text{circuito } 6 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 &: .003, \\ \text{circuito } 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1 &: -.007. \end{aligned}$$

Si no se considera las restricciones de ángulo de voltaje, el patrón de flujo es:

$$\begin{aligned} x_{12} &= 34.44, & x_{14} &= 13.91, & x_{15} &= 21.64, & x_{32} &= 100, \\ x_{42} &= 12.24, & x_{62} &= 95.97, & x_{35} &= 220, & x_{64} &= 160.31 \end{aligned}$$

con valor objetivo 646.28.

Con este patrón de flujo, los valores de  $\sum_{j \in C} (x_j - x_j) / B_j$  asociado con los tres circuitos son 4.11, -0.15 y 0.55, los cuales pueden considerar pequeños. Notamos que en este problema, las soluciones con y sin las restricciones de ángulo de voltaje son similares. Sin embargo, en este sistema de prueba existen algunas configuraciones en que el problema de flujo tiene solución, pero el problema de flujo de carga DC no la tiene.

Un sistema de 500 buses fue generado aleatoriamente para probar la eficiencia de la descomposición para resolver el flujo DC óptimo. El sistema consiste en 100 buses de generación, 280 buses de carga (demanda) y 120 buses intermediarios. Las generaciones son distribuidas uniformemente entre (15,200) MW, mientras que las cargas en (3,40). Las susceptancias son seleccionadas aleatoriamente en el intervalo (80,120) y las resistencias son dadas por 0.0005/susceptancia. El sistema es disperso (hueco), contiene únicamente 40 circuitos fundamentales. La capacidad de generación total es 11902 y la demanda total es 5696. La función objetivo consiste en minimizar

la generación total. La optimización de flujo con pérdida cuadrática tomó 14 minutos en 1665 iteraciones de pivoteo en la red. El valor objetivo es 5829.5. Después de la optimización del flujo en la red, el valor promedio de  $\sum_{j \in C} (x_j - x_{j'})/B_j$  es 79. Como en el problema de seis buses, los multiplicadores lagrangeanos de las restricciones de ángulo de voltaje son menores que 0.05. Para este sistema de 500 buses usamos el intervalo de búsqueda (-0.05, 0.05) para los multiplicadores. El algoritmo de descomposición consumió 52 minutos en 3733 iteraciones de pivoteo y terminó con el valor objetivo igual a 5866.

---

## CAPITULO 6.

---

### EXTENSIONES DEL TRABAJO

---

Las contribuciones relacionadas con investigación de operaciones desarrolladas en este trabajo pueden extenderse a la solución de muchos otros problemas. Uno de los problemas es la planeación del sistema de distribución cuya formulación se encuentra en [AFU84]. En este capítulo vemos otros tres problemas más en la Ingeniería eléctrica que se puede aprovechar la estructura de la técnica para su solución. Sin embargo, se puede establecer ciertas equivalencias entre una red eléctrica, un sistema hidráulico, un sistema mecánico, y posiblemente otros. El estudio de estas equivalencias está descrito en el libro recién publicado de Strang [STR86]. Las aplicaciones presentada aquí no han sido validadas con la implantación en computadora, de manera que puede ser futuras investigaciones. En fin, se espera resolver mucho más problemas con las herramientas desarrolladas anteriormente.

El capítulo se desarrolla como sigue: en la sección 1, se formula el problema de la planeación de potencia compleja usando el modelo de flujo de carga llamado *desacoplado rápido* con pérdidas real y reactiva. En la sección 2, se estudia la aplicación de las técnicas de descomposición en la solución del problema de asignación de unidades, tomando en cuenta flujos en la red y restricciones sobre las unidades. Finalmente, en la sección 6.3 se describe la aplicación de nuestro método como un sub-módulo del problema de coordinación hidrotérmica.

## 6.1 PLANEACION DE LA POTENCIA COMPLEJA

En la sección 1.1, se describe las ecuaciones para la transmisión compleja. De la ecuación (1.1.1), podemos escribir la ecuación para la potencia reactiva transmitida:

$$Q_{1J} = -(|E_1|^2 - |E_1||E_J|\cos(\theta_1 - \theta_J))B_{1J} - |E_1||E_J|\sin(\theta_1 - \theta_J)G_{1J} - |E_1|^2 B_{CAP1J} \quad (6.1.1)$$

Haciendo las suposiciones similares para el model DC,

1.  $G_{1J} = 0$
2.  $(\theta_1 - \theta_J)$  es muy pequeño  
 $\cos(\theta_1 - \theta_J) \approx 1$        $\sin(\theta_1 - \theta_J) \approx \theta_1 - \theta_J$

Tenemos que

$$Q_{1J} = -(|E_1|^2 - |E_1||E_J|)B_{1J} - |E_1|^2 B_{CAP1J}$$

Estas ecuaciones junto con las de potencia real  $P_{1J} = -B_{1J}(\theta_1 - \theta_J)$  se llaman *desacoplado rápido de flujo de carga*, ya que en estas ecuaciones, la potencia real sólo se relaciona con los ángulos de voltaje, la potencia reactiva con las magnitudes de voltaje. En la práctica, este fenómeno también es correcto: la variación de la potencia real transmitida depende principalmente de los ángulos de voltaje; la variación de la potencia reactiva depende principalmente de las magnitudes de voltaje. Existen algoritmos que se aplican recursivamente estas ecuaciones para llegar a la solución de las ecuaciones (1.1.1), es decir, la solución exacta del flujo de carga.

Sin tanta simplificación como el desarrollo de desacoplado rápido, consideramos de nuevo la ecuación (6.1.1) cuando  $G_{1J} = 0$ ,  $|E_1| \approx 1$ , tenemos que

$$\begin{aligned} Q_{1J} &= -(|E_1| - |E_J|\cos(\theta_1 - \theta_J))B_{1J} - B_{CAP1J} \\ &= -(|E_1| - |E_J|[1 - 0.5\sin^2(\theta_1 - \theta_J)])B_{1J} - B_{CAP1J} \\ &\approx -(|E_1| - |E_J|[1 - 0.5(\theta_1 - \theta_J)^2])B_{1J} - B_{CAP1J} \\ &\approx -(|E_1| - |E_J|[1 - 0.5(P_{1J}/B_{1J})^2])B_{1J} - B_{CAP1J} \\ &\approx -(|E_1| - |E_J|)B_{1J} - 0.5P_{1J}^2/B_{1J} - B_{CAP1J} \end{aligned}$$

Similarmente

$$Q_{J1} \approx -(|E_J| - |E_1|)B_{1J} - 0.5P_{1J}^2/B_{1J} - B_{CAP1J} \quad (6.1.2)$$

La pérdida reactiva se obtiene sumando  $Q_{1J} + Q_{J1}$ , entonces tenemos que la pérdida total en la línea es



$$Lq = -P_{1J}^2 / B_{1J} - 2B_{CAP1J}$$

En la ecuación anterior, la primera susceptancia corresponde a un inductor como podemos observar en la figura 1.1.3 del capítulo 1, por tanto  $B_{1J} < 0$ . La segunda inductancia corresponde a un capacitor, entonces  $B_{CAP1J} > 0$ . En nuestro modelaje de la pérdida reactiva, se refleja la realidad [WEE79] (p.177): Cuando la línea está cargada ( $P_{1J}$  es grande), la línea absorbe la potencia reactiva. Los cables son generadores de la potencia reactiva (mientras que la línea sea más larga, mayor es  $B_{CAP1J}$ ).

Observe que esta pérdida es independiente de la potencia reactiva, por tanto, haciendo un cambio de variable

$$q_{1J} = -(|E_1| - |E_J|)B_{1J} = Q_{1J} - Lq/2 \quad (6.1.3)$$

podemos considerar  $q_{1J}$  como un flujo mostrado (en este trabajo llamamos este término *potencia reactiva neta*) en la figura 6.1.1.

Por tanto  $q$  es un flujo que se conserva en todos los nodos de la red, pero sujeto a la siguiente restricción:

$$q_{1J} = -(|E_1| - |E_J|)B_{1J}$$

La demanda (la carga) de la potencia consiste de dos partes: la potencia real y la potencia reactiva. Normalmente, la potencia reactiva es una proporción de la real. La mayoría de las cargas son inductivas. Porque para el uso industrial, muchos dispositivos son motores de inducción, y para el uso doméstico, las luces también son inductivas. La demanda de la potencia reactiva es aproximadamente 30% de la real (lo cual se refleja en el factor de potencia que tiene valor de  $\sqrt{1-0.3^2} \approx 0.95$ ). Pero las líneas de transmisión muy largas generan la potencia reactiva como podemos ver en la ecuación (6.1.2) y la figura 1.1.3. En una red que no tiene muchas líneas largas de transmisión, la red tiende a ser inductiva. Esto significa que podemos definir el problema usando la restricción "al menos satisfacer la potencia reactiva". En los sistemas modernos, el costo variable de generación de potencia reactiva es depreciable como se indica en [WEE79] (p.505), por

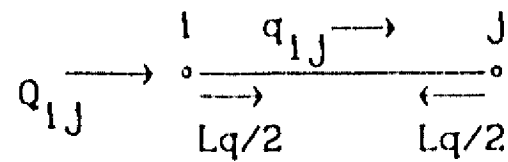


Figura 6.1.1 Representación de potencia reactiva

tanto, tenemos la siguiente formulación del problema de *Potencia Compleja*:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar } \sum_{l \in N_g} f_l(p_l) \\
 & p, q \\
 & \text{s. a.} \\
 \text{(PC)} \quad & \sum_{\substack{j \in J \\ s(j)=1}} (p_j, -r_j p_j^2, -p_j) - \sum_{\substack{j \in J \\ e(j)=1}} (p_j - r_j p_j^2, -p_j) \geq \begin{cases} d_l & l \in N_d \\ d_l - p_l & l \in N_g \end{cases} \quad (6.1.4)
 \end{aligned}$$

$$\sum_{\substack{j \in J \\ s(j)=1}} (-q_j + \frac{p_j^2}{2B_j} + B_{cap_j}) + \sum_{\substack{j \in J \\ e(j)=1}} (q_j + \frac{p_j^2}{2B_j} + B_{cap_j}) \geq h_l - q_l \quad l \in N_g \cup N_d \quad (6.1.5)$$

$$\frac{p_j - p_{j'}}{B_j} + \sum_{L \in C_j^+} \frac{p_L - p_{L'}}{B_L} - \sum_{L \in C_j^-} \frac{p_L - p_{L'}}{B_L} = 0 \quad j \in J \setminus T \quad (6.1.6)$$

$$\frac{q_j}{B_j} + \sum_{L \in C_j^+} \frac{q_L}{B_L} - \sum_{L \in C_j^-} \frac{q_L}{B_L} = 0 \quad j \in J \setminus T \quad (6.1.7)$$

$$0 \leq p \leq \bar{p} \quad (6.1.8)$$

$$-\bar{q} \leq q \leq \bar{q} \quad (6.1.9)$$

donde  $d_l$  denota la demanda de potencia real del nodo  $l$ ,  $h_l$  la demanda reactiva del nodo  $l$ . El flujo de potencia real en el sentido (contrario) de la línea de transmisión  $j$  es  $p_j$  ( $p_{j'}$ ), el flujo de potencia reactiva neta en el sentido de  $j$  es  $q_j$ . Nótese que usamos una sola variable para representar esta cantidad en una línea ya que puede circular en ambos sentidos sin pérdida relacionada consiga misma.  $p_l$  ( $l \in N_g$ ) denota la potencia generada en el bus  $l$ .  $q_l$  es la potencia reactiva controlable en el bus  $l$ . Los dispositivos de control se describen más adelante. Los demás términos están definidos en la sección 1.2.

La demanda de cada nodo se satisface por (6.1.4), (6.1.5) donde (6.1.5) es derivada de la satisfacción de la demanda reactiva:

$$\sum_{s(j)=1} Q_j + \sum_{e(j)=1} Q_j \geq h_l - q_l$$

La obtención de las restricciones de (6.1.7) es similar a la manipulación de potencia real en la sección 1.2. Las ecuaciones (6.1.6), (6.1.7) son las restricciones sobre el ángulo y la magnitud de voltaje, similar a la segunda ley de Kirchhoff. La restricción de que la caída de voltaje debe estar dentro

de un rango es equivalente que  $q_j \leq q_j \leq \bar{q}_j$ .

Supongamos que optimizamos la potencia real ignorando la reactiva (tal modelo es DC tratado en los capítulos anteriores). Si esta potencia real óptima es tal que exista alguna solución factible para la parte reactiva, i.e. El sistema (6.1.5), (6.1.7), (6.1.9) tiene solución factible, entonces, la potencia real calculada es óptima. Si tal sistema de ecuaciones no tiene solución factible, se deriva un corte que restringe la potencia real. Se puede agregar este corte al problema DC, y seguir optimizando la potencia real. De este modo, sucesivamente se agrega al problema DC los siguiente cortes:

$$A_1 p \geq b_1 \quad l=1, \dots, S$$

donde S es el número de cortes, sea  $N_p$  la dimensión del vector p, y  $A_1$  es de dimensión  $N_p \times 1$ ,  $b_1 \in \mathbb{R}$ . Tal técnica de descomposición se refleja en el siguiente algoritmo.

Algoritmo 6.1: Optimización de potencia compleja

Propósito: Optimizar el flujo de potencia compleja en una red inductiva usando método de descomposición. El modelo utilizado es desacoplado rápido con pérdidas real y reactiva.

DESCRIPCION

Paso 1.  $S=0$

Paso 2. Minimizar  $\sum_{l \in Ng} f_l(p_l)$  s.a. (6.1.4), (6.1.6), (6.1.8),  $A_1 p \leq b_1 \quad l=1, \dots, S$   
Sea la solución  $p'$ .

Paso 3. Sustituir  $p'$  en (6.1.5). Encontrar una solución factible del sistema definido por (6.1.5), (6.1.7), (6.1.9).

Si existe un  $q'$  factible, terminar la solución  $(p', q')$  es óptima del problema (PC).

Si no existe tal  $q'$ , ir al paso 4.

Paso 4. Escribiendo las restricciones (6.1.5), (6.1.7), (6.1.9) de la siguiente forma:

$$G(p', q) \geq 0$$

Si tal sistema no tiene solución, existe un  $\lambda \geq 0$  tal que

$\sup_q \bar{\lambda}G(p', q) = \bar{\lambda}G(p', q'') < 0$

Incrementar S en 1. Sea  $A_{S,p-b_S} = \bar{\lambda}G(p, q'')$ . Entonces  $A_{S,p \geq b_S}$  excluye la solución p' para ser factible. Ir al paso 2.

Supongamos que en el problema (PC) se desea considerar la expansión de capacidad (nuevas instalaciones de las fuentes de compensación reactiva) de la red. Existen 4 tipos de adición de equipos:

- 1) CAPACITOR EN DERIVACION (Figura 6.1.2a). Para generar una potencia reactiva en un bus.
- 2) CAPACITOR EN SERIE (Figura 6.1.2b). Para reducir la inductancia de la línea.
- 3) TRANSFORMADOR CON DERIVACIONES (Figura 6.1.2c). Para reducir por un factor de  $t^2$  a la impedancia de la línea, donde t es la relación del transformador.
- 4) COMPENSADOR SINCRONO (Figura 6.1.2d). Es un motor trabajando para generar o absorber la potencia reactiva.

Como se puede observar en la figura 6.1.2, los tipos de compensación 1) y 4) corresponden la inyección de una potencia reactiva en el bus. Mientras que los tipo 2) y 3) corresponden la modificación de la susceptancia de la línea. Por tanto para su formulación, sólo necesitamos considerar dos casos: A) Dispositivos de inyección en el bus; B) Dispositivos de modificación de susceptancia en la línea.

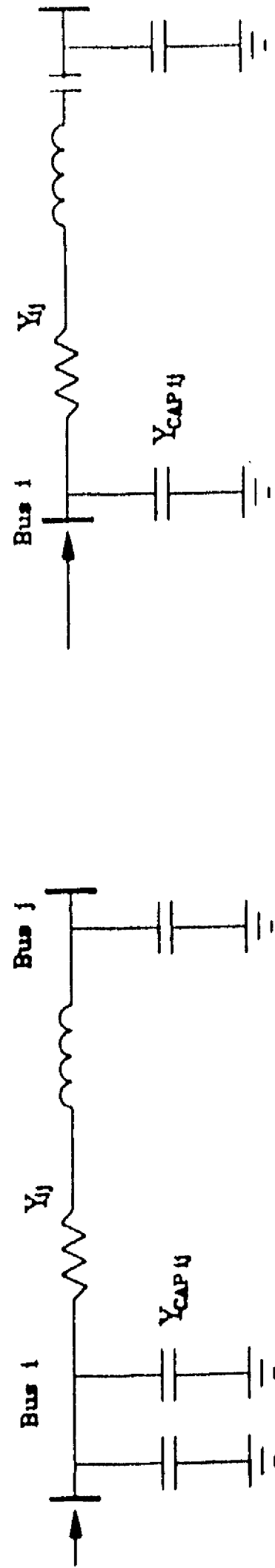
#### Caso A.

Considere la posibilidad de agregar un dispositivo con capacidad  $\bar{q}_k$  en el bus l. Denotamos por  $y_{lk}$  la variable de decisión de tipo 0-1. Específicamente:

$y_{lk} = 1$  si se decide construir la alternativa k (con capacidad  $\bar{q}_k$ ) en el bus l,  $y_{lk} = 0$  si se rechaza esta alternativa de construcción.

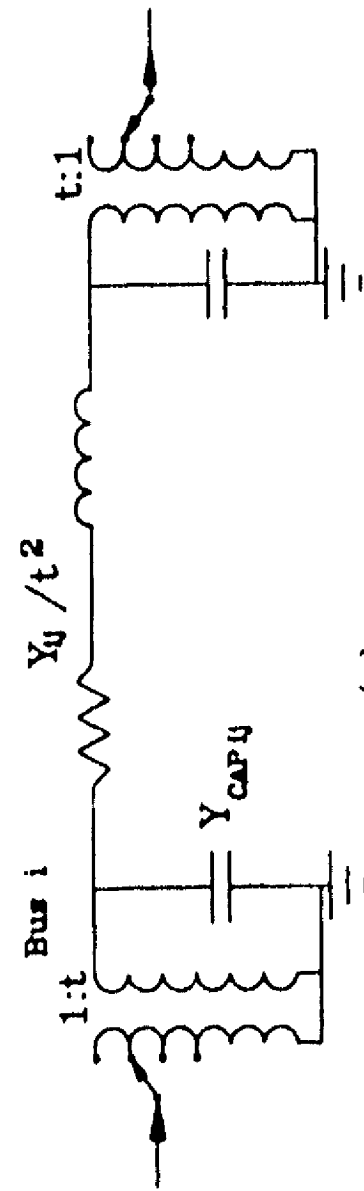
Sea N el conjunto de alternativas factibles de expansión y  $q_{lk}$  la potencia reactiva producida por esta nueva instalación con capacidad  $\bar{q}_k$ . En este caso la restricción asociada a la satisfacción de la demanda (6.1.5) se reemplaza por

$$\sum_{\substack{j \in J \\ s(j)=1}} (-q_j + \frac{p_j^2}{2B_j} + B_{cap_j}) + \sum_{\substack{j \in J \\ e(j)=1}} (q_j + \frac{p_j^2}{2B_j} + B_{cap_j}) \geq h_l - q_l - \sum_{k \in N} q_{lk} \quad l \in N_g \cup N_d \quad (6.1.10)$$

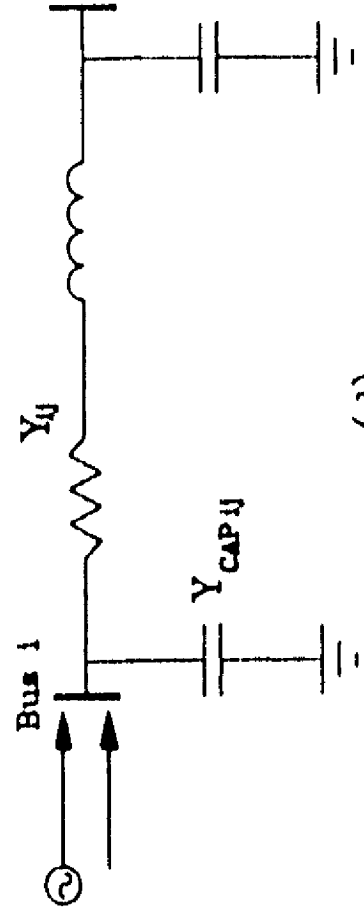


(a)

(b)



(c)



(d)

Figura 6.1.2 Compensación reactiva

donde  $0 \leq q_{ik} \leq \bar{q}_k y_{ik}$  si la alternativa corresponde a un capacitor en derivación,  
 $-\bar{q}_k y_{ik} \leq q_{ik} \leq \bar{q}_k y_{ik}$  si la alternativa corresponde a un compensador síncrono.  
 También debemos agregar un costo de construcción anualizado  $\sum_{k \in N} c_{ik} y_{ik}$  en la  
 función objetivo.

Caso B.

Considere la posibilidad de agregar un dispositivo de compensación en línea de transmisión  $J$  entre los buses  $s(J)$ ,  $e(J)$ . Para el caso de transformador, existen varias formas de swicheo, igual para la capacitancia en serie. Estos dispositivos cambian discretamente la susceptancia de la línea. Sea  $y_{jk}$  la variable de decisión de tipo 0-1 de la alternativa  $k$  en la línea  $J$ . Denotamos  $B_{jk0}$ ,  $B_{jk1}$ , ...,  $B_{jkw}$  los posibles valores de susceptancia y sus variables de decisión  $Y_{jk0}$ ,  $Y_{jk1}$ , ...,  $Y_{jkw}$ . Cabe señalar que  $B_{jk0}$  es la susceptancia original de la línea,  $Y_{jk0}=1$  implica que no se modifica esta impedancia. Para incorporar esta posibilidad al problema original (PC), debemos agregar las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned}
 (y_{jk0}-1)M &\leq q_j + (|E_{s(J)}| - |E_{e(J)}|) B_{jk0} \leq (1-y_{jk0})M \\
 (y_{jk1}-1)M &\leq q_j + (|E_{s(J)}| - |E_{e(J)}|) B_{jk1} \leq (1-y_{jk1})M \\
 &\dots\dots\dots \\
 (y_{jkw}-1)M &\leq q_j + (|E_{s(J)}| - |E_{e(J)}|) B_{jkw} \leq (1-y_{jkw})M
 \end{aligned}
 \tag{6.1.11}$$

$$\sum_{i=0}^w y_{jki} = 1, \quad \sum_{i=1}^w y_{jki} \leq y_{jk}$$

donde  $M$  es un número grande.

Denotando  $L$  el conjunto de alternativas de expansión, se tiene que aumentar la función objetivo por un costo de construcción anualizado  $\sum_{k \in L} c_{jk} y_{jk}$ .

Observe que con la formulación anterior, si  $y_{jki}=1$  se agregar la restricción

$$q_j = -(|E_{s(J)}| - |E_{e(J)}|) B_{jki}$$

Si  $y_{jki}=0$ ,  $q_j$  no está restringido.

Como resultado de la discusión anterior podemos resumir el proceso de formulación para el *Problema de Expansión de Potencia Compleja* como

$$\begin{aligned}
 \text{Min } & Q(x) + c^T y \\
 \text{s.a. } & Ax - R[x]^2 + By \geq C, \quad x \geq 0, \quad y \in Y
 \end{aligned}$$

(PEPC)

donde  $Q(x)$  es la función de costo total de generación de la potencia real,  $c^T y$  el costo de construcción anualizado y  $R$  denota la matriz de resistencias

o reactancias en la posición correspondiente a las líneas de transmisión. Las matrices A, B, y el vector C describen las restricciones (6.1.4) - (6.1.11). mientras Y representa que y es un vector de variables 0-1 con dimensión  $N_y$  (número de variables 0-1); algunas restricciones de las variables y pueden ser: la capacidad total de generación es mayor que la demanda total por un factor, restricciones financieras, etc.

Observe que el formato de esta formulación es idéntico que el problema de expansión (PE) en la sección 1.3. El problema puede ser resuelto por descomposición de Benders generalizada. La derivación de cortes de Benders entonces es similar a la que presentamos en el capítulo 3.

Cuando la red no es inductiva, entonces la restricción relacionada con la satisfacción de la demanda reactiva (6.1.5) debe tomar igualdad. Esto hace que el problema (PC) no sea de programación convexa. Por tanto sólo podemos efectuar la optimización en dos etapas: primero optimizar la potencia real (como en los capítulos 2-4), después la reactiva. Después de la primera etapa, la potencia real  $p$  está determinada, entonces la planeación reactiva es un problema de expansión con restricciones lineal lo cual puede ser resuelto por descomposición de Benders generalizada.

## 6.2 ASIGNACION DE UNIDADES

Un factor importante que no se toma en consideración en el momento de planeación a largo plazo es la capacidad inferior de una unidad de generación, por que es un factor depreciable en este tipo de problemas. Sin embargo, a la hora de optimizar la operación, este factor es muy importante. De tal manera, en el problema de despacho económico y el de asignación de unidades, debemos tomar en cuenta esta cota. Obviamente nuestro modelo establecido en los capítulos 2 y 3 puede extender al problema de despacho económico sin dificultad alguna, ya que únicamente necesitamos agregar una cota inferior al flujo producido por una unidad de generación. En el problema de asignación, la situación se complica porque si una unidad está comisionada, tiene que trabajar dentro de su intervalo de capacidad. Además, tiene restricciones asociadas sobre el tiempo de arranque y apagado etc. Incluso que no se ha podido formular como un problema de programación mixta para restricciones un poco más complicadas. En esta sección especializamos

nuestro algoritmo de descomposición de tres niveles a este problema.

Las *restricciones adicionales* más importantes al considerar el problema de asignación son:

1. Reserva en línea: cuando falla cualquier unidad de generación, la capacidad del resto de las unidades debe poder suministrar la carga sin comisionar más unidades. Porque de otra manera, requiere mucho tiempo para que la unidad comisionada empiece a generar la potencia adecuadamente.

2. Restricciones de la unidad térmica: Diversas restricciones asociadas con las unidades térmicas son:

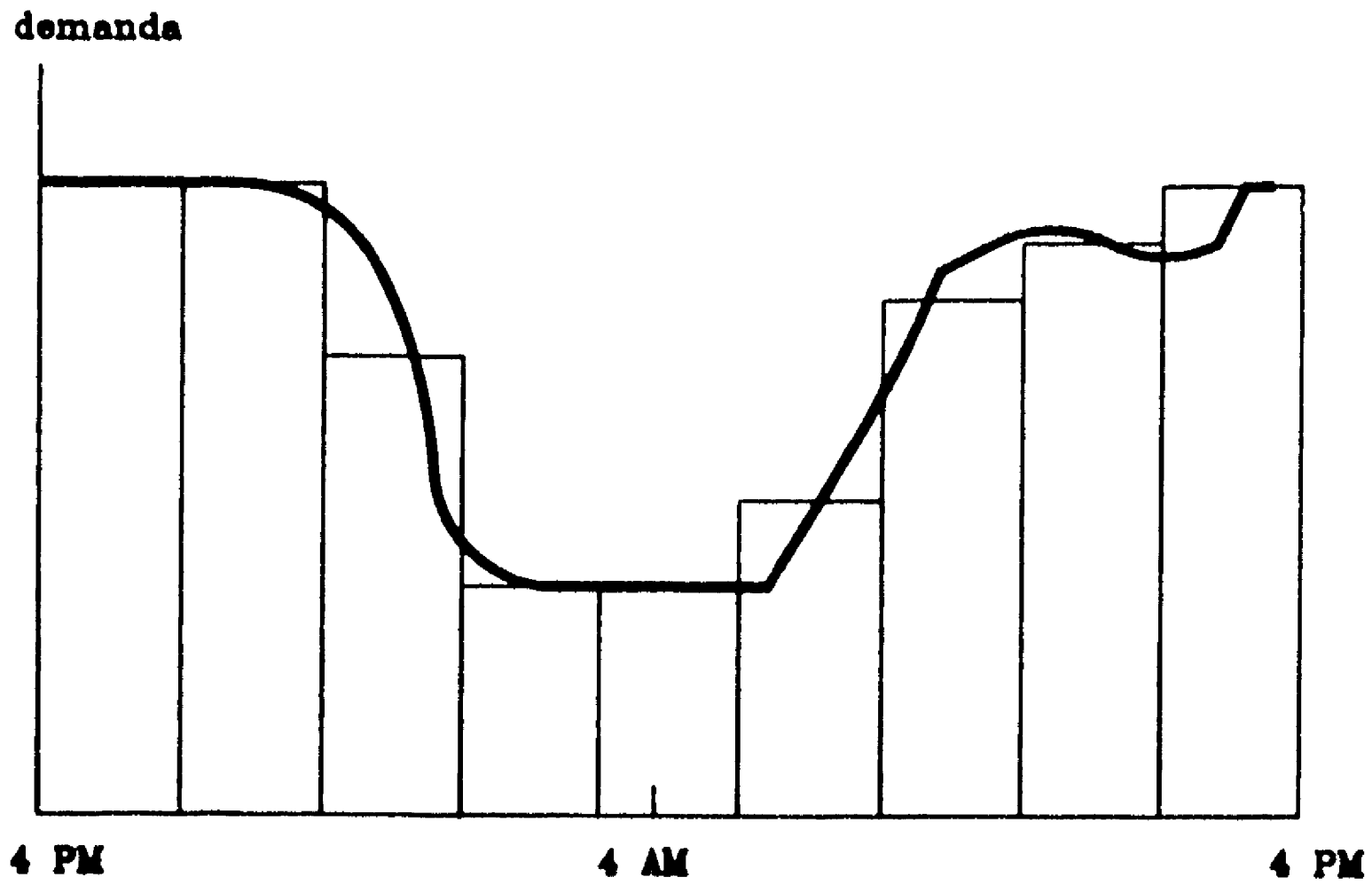
- . Mínimo tiempo de arranque: Cuando una unidad no está trabajando, existe un tiempo mínimo para comisionarla de nuevo.
- . Mínimo tiempo de apagado: Una vez que está corriendo, no se puede apagar inmediatamente.
- . Restricción del grupo: Si una planta consiste de dos o más unidades, no se puede arrancarlas al mismo tiempo.

3. Otras restricciones de mayor importancia son: capacidad de la línea, soporte de voltaje, relación con hidroeléctrica y combustible limitado.

Para seguir la curva de demanda en un día, usualmente se aproxima la curva de demanda por escalones como se muestra en la figura 6.2.1. Y para cada escalón debemos resolver el siguiente *Problema de Asignación* en un periodo:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar } \sum_{i \in N_g} f_i(x_i) + c^T y \\
 & \text{s. a.} \\
 \text{(PA)} \quad & \sum_{\substack{j \in J \\ s(j)=1}} (x_j - r_j x_j^2 - x_j) + \sum_{\substack{j \in J \\ e(j)=1}} (x_j - r_j x_j^2 - x_j) \geq \begin{cases} d_i & i \in N_d \\ d_i - x_i & i \in N_g \end{cases} & (6.2.1) \\
 & \frac{x_j - x_{j'}}{B_j} + \sum_{L \in C_j^+} \frac{x_L - x_{L'}}{B_L} - \sum_{L \in C_j^-} \frac{x_L - x_{L'}}{B_L} = 0 \quad j \in J \setminus T & (6.2.2) \\
 & y_i x_i \leq x_i \leq y_i \bar{x}_i \quad i \in N_g & (6.2.3) \\
 & 0 \leq x_j \leq \bar{x}_j, \quad 0 \leq x_{j'} \leq \bar{x}_j \quad j \in J & (6.2.4) \\
 & \sum_{\substack{l \neq k \\ l \in N_g}} \bar{x}_l \geq \sum_{l \in N_d} d_l \quad k \in N_g & (6.2.5)
 \end{aligned}$$





**Figura 6.2.1 CURVA DE CARGA DURANTE UN DIA**

donde  $y_1$  es la variable de decisión de la unidad  $i$  ( $i \in Ng$ ). Si  $y_1 = 0$ , la unidad  $i$  está apagada, en caso contrario, la unidad está prendida.  $c_1$  es el costo fijo de la unidad  $i$  cuando está operando.  $(\underline{x}_1, \bar{x}_1)$  es el intervalo de capacidad de la unidad  $i$ .

En esta sección usamos la notación  $(.)^{(t)}$  para denotar el valor de  $(.)$  en el escalón (el periodo)  $t$ .

Definimos una *trayectoria factible* como un vector  $(\bar{y}^{(0)}, \bar{y}^{(1)}, \dots, \bar{y}^{(T)})$  tal que satisfaga la restricción adicional 2, además  $\bar{y}^{(0)} = \bar{y}^{(T)}$ . I.e. La operación tiene un ciclo.

Entonces el *Problema de Asignación de Unidades Multiperíodico* se puede escribir como

$$(PAUM) \quad \text{Minimizar} \quad \sum_{t=0}^{T-1} [Z_{PA}^{(t)}(y^{(t)}) + C_t(y^{(t)}, y^{(t+1)})]$$

( $y^{(0)}, \dots, y^{(T)}$ ) factible

donde  $Z_{PA}^{(t)}(y^{(t)})$  es el costo óptimo de subproblema de asignación de unidades (PA) para el escalón de demanda  $t$  (incluyendo el costo de operación y costo fijo) con la configuración  $y^{(t)}$ , mientras que  $C_t(y^{(t)}, y^{(t+1)})$  es el costo de transición de estado  $y^{(t)}$  a  $y^{(t+1)}$ .

Como la estructura del problema (PAUM) es idéntica que el problema de planeación (PPM) del capítulo 4, se puede aplicar la misma técnica desarrollada en los capítulos 2, 3 y 4.

Observe que de esta manera, la reserva en línea (restricción adicional 1) y la restricción sobre la capacidad de transmisión en la restricción adicional 3 se cumplen con la formulación de (PA), las restricciones térmicas se cumplen con la formulación de (PAUM) lo cual será resuelta por programación dinámica. El soporte de voltaje que está en la restricción adicional 3 se puede tratar por consideraciones de la sección 6.1. Los dos faltantes (relación con la generación hidroeléctrica, recurso limitado) se considera similar al desarrollo de la siguiente sección.

### 6.3 COORDINACION HIDROTERMICA

En esta sección consideramos el problema de coordinación hidrotérmica de manera determinista. El caso estocástico puede ser resuelto por obtener la esperanza matemática, o la función de utilidad basado en cierto número de casos determinísticos.

El problema típico de coordinación hidrotérmica (CH) es minimizar el costo para satisfacer la demanda en los periodos  $(0, \dots, T)$  usando las unidades de generación hidroeléctrica y las térmicas. La restricción esencial es la cantidad de agua disponible, i.e.

$$\sum_{t=0}^T q^{(t)} \leq q_{tot} \quad (6.3.1)$$

donde  $q_t$  es la cantidad del agua utilizada en el periodo  $t$ ,  $q_{tot}$  es la cantidad del agua total disponible para el lapso de tiempo en estudio.

Para un nivel del agua fijo, la cantidad del agua requerida para la generación de una potencia sigue a una curva convexa. Por ejemplo, en la

figura 6.3.1 se muestra cuatro unidades típicas que están trabajando en Sudáfrica [W0084]. En esta figura, el eje horizontal es la potencia de salida, mientras que el eje vertical es la derivada de  $q$  con respecto a  $p$ :  $q'(p)$ . Como  $q'(p)$  es creciente,  $q(p)$  es convexa. Esta curva es el factor muy importante que se debe tomar en cuenta en la CH (vea la sección 6.4 de [W0084]). Supongamos que la variable dual de la restricción (6.3.1) en la solución óptima tiene valor  $\zeta^*$ , es decir, el precio sombra del agua es  $\zeta^*$ . Entonces, el costo de generación asociado a la unidad hidro es una función convexa dado que  $\zeta$  asociado a la restricción (6.3.1) siempre es no negativo. El problema de coordinación hidrotérmica parametrizado por el precio dual del agua  $\zeta$  es:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar} \quad \sum_{t=0, \dots, T} \sum_{l \in N_g} f_l(x_l^{(t)}) + \sum_{l \in N_h} \zeta_l q_l(x_l^{(t)}) \\
 & x^{(t)}, t=0, \dots, T \\
 & \text{s.a.} \\
 & \text{(PCH}(\zeta)\text{)} \quad \sum_{j \in J} (x_{j'}^{(t)} - r_j(x_{j'}^{(t)})^2 - x_j^{(t)}) + \sum_{j \in J} (x_j^{(t)} - r_j(x_j^{(t)})^2 - x_{j'}^{(t)}) \geq 0 \\
 & \quad \quad \quad s(j)=1 \quad \quad \quad e(j)=1 \\
 & \quad \quad \quad \begin{cases} d_l^{(t)} & l \in N_d \\ d_l^{(t)} - x_l^{(t)} & l \in N_g \cup N_h \end{cases} \quad t=0, \dots, T \quad (6.3.2)
 \end{aligned}$$

$$\frac{x_j^{(t)} - x_{j'}^{(t)}}{B_j} + \sum_{L \in C_j^+} \frac{x_L^{(t)} - x_{L'}^{(t)}}{B_L} - \sum_{L \in C_j^-} \frac{x_L^{(t)} - x_{L'}^{(t)}}{B_L} = 0 \quad j \in J \setminus T \quad (6.3.3)$$

$$0 \leq x^{(t)} \leq \bar{x} \quad t=0, \dots, T \quad (6.3.4)$$

donde  $N_h$  es el conjunto de unidades hidroeléctricas,  $(\cdot)^{(t)}$  es el valor de  $(\cdot)$  en el periodo  $t$ .  $q_l^{(t)}(x_l)$  es la descarga del agua para generar la potencia  $x_l$  de la unidad  $l$  en el periodo  $t$ .

El problema PCH( $\zeta$ ) es separable para los periodos. Por tanto se puede resolver fácilmente por los algoritmos del capítulo 4.

Supongamos que tenemos un sólo vaso para almacenar el agua, o podemos establecer alguna equivalencia para trabajar con un solo vaso, entonces el vector  $\zeta$  es un número real no negativo. Tenemos el siguiente esquema iterativo para calcular el precio sombra  $\zeta^*$ .

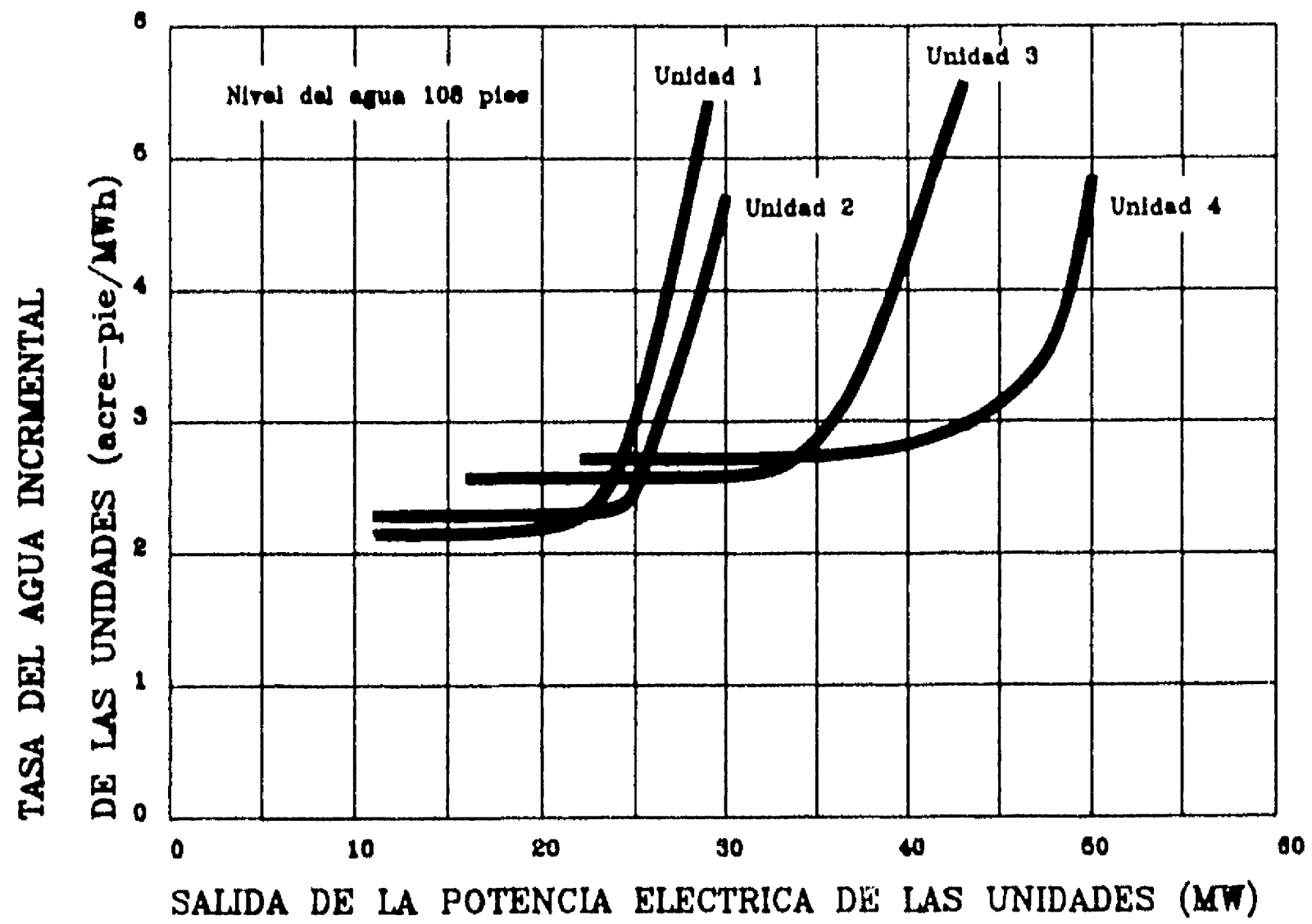


Figura 6.3.1 Cuatro unidades hidroeléctricas típicas

Algoritmo 6.2: Calcular el precio sombra del agua.

Propósito: Encontrar el precio sombra del agua mediante un esquema iterativo. El caso considerado consiste de un solo vaso. Después de resolver este problema, se tiene también la solución del problema de coordinación hidrotérmica  $PCH(\zeta^*)$ .

#### DESCRIPCION

Paso 1. Suponer un valor de  $\zeta$ .

Paso 2. Resolver el problema  $(PCH(\zeta))$ .

Paso 3. Calcular  $E = \sum_{t=0}^T q(t) - q_{tot}$

Paso 4. Si es la primera iteración, ir al paso 1.

Paso 5. Si  $|E|$  es menor que la tolerancia, terminar con  $\zeta^*$ . La solución de  $(PCH(\zeta^*))$  es la solución del problema (CH).

Paso 6. Proyectar un nuevo valor de  $\zeta$ , ir al paso 2.

La proyección del nuevo valor de  $\zeta$  puede ser la interpolación lineal como se muestra en la figura 6.3.2.

Cuando  $\zeta$  es un vector multidimensional, se puede aplicar el método de subgradient o de ascenso máximo como se describe en el capítulo 2.

Cuando se considera el efecto del nivel del agua en el vaso, se debe discretizar el nivel. Cada valor discretizado es un estado de programación dinámica que resuelve el problema de CH. En la figura 6.3.3, se ilustra los estados de programación dinámica para un vaso, donde  $h$  es el nivel del agua en el periodo  $t$  que tiene los valores  $h_i$   $i=1, \dots, K$  tales que  $h_1 < h_2 < \dots < h_K$ ;  $x$  es la potencia generada en el periodo  $t$  con los valores  $x_i$  tales que  $x_1 < x_2 < \dots < x_K$ .

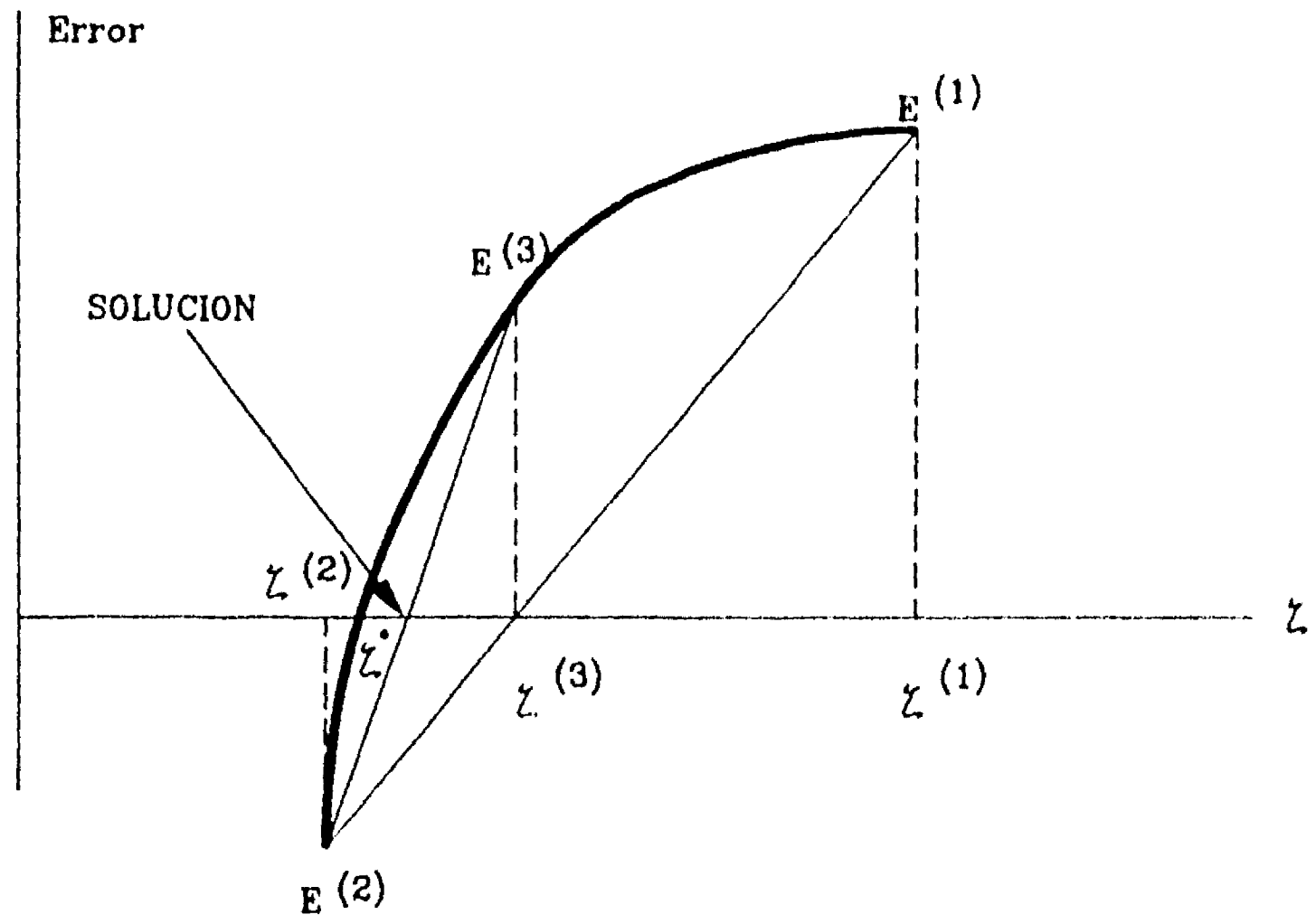


Figura 6.3.2 Técnica de interpolación

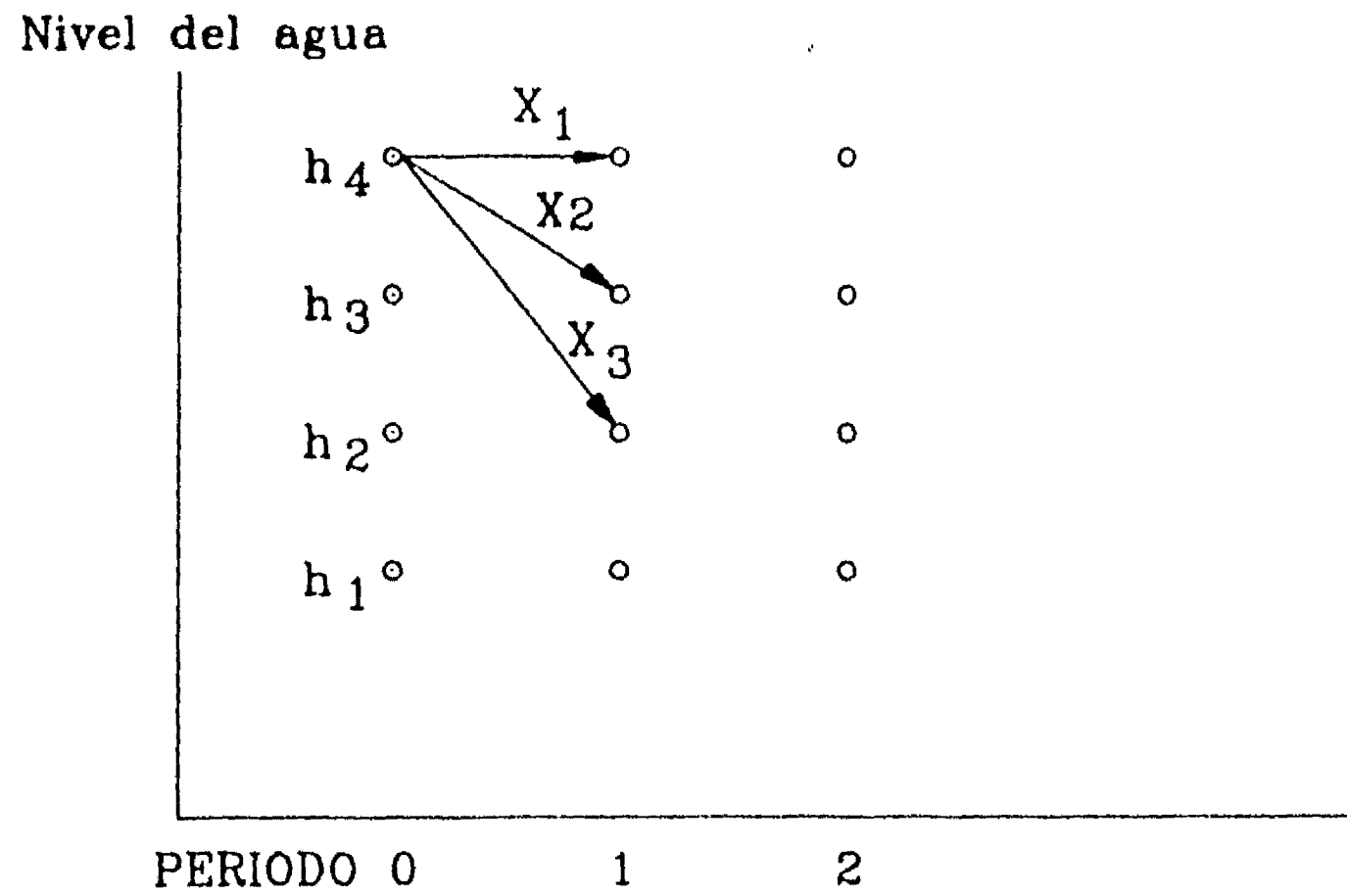


Figura 6.3.3 Programación Dinámica para Coordinación hidrotérmica.

## CONCLUSION

Dada la gran importancia de la ingeniería de potencia en las últimas décadas, se ha hecho grandes esfuerzos a lo ancho del mundo para modelar y solucionar los problemas que se presentan de manera precisa, usando diversas técnicas de computación, modelación e investigación de operaciones. De estos estudios surgen problemas matemáticos complicados de optimización que están siendo abordados desde diferentes enfoques. El estudio realizado en este documento intenta resolver los problemas de planeación de algunos problemas típicos de esta industria, de manera más exacta y eficientemente. Los resultados experimentales obtenidos respaldos por el desarrollo teórico, han mostrado la técnica de descomposición de tres niveles tiene buen desempeño para lograr este objetivo.

Otro aspecto importante del método de solución propuesto para analizar el sistema de generación y transmisión es que es fácilmente adaptado para otras aplicaciones. Por ejemplo, el problema de expansión de un sistema de distribución se puede formular como uno de programación cuadrática mixta, y puede ser resuelto por un algoritmo de generación y transmisión. Los problemas de asignación de unidades también son problemas de programación cuadrática mixta, y se puede provechar el mismo método mencionado. Esto abre un campo de aplicación a técnicas de optimización que se suponían sofisticadas y de poco valor práctico.

## BIBLIOGRAFIA

### A. Sistemas eléctricos y su planeación

- [ADA73] Adams, R.N., Laughton, M.A., "A dynamic programming network flow procedure for distribution system planning", IEEE power industry computer applications conference, 1973.
- [ADA74] Adams, R.N., Laughton, M.A., "Optimal planning of power networks using mixed-integer programming Part I: static and time-phased network synthesis", Proc. IEE, Vol. 121(2), 1974, pp. 139-147.
- [AFU84] Afuso, A., Hacia una metodología para la planeación integral de los sistemas de distribución de energía, tesis doctoral, DEPEFI, UNAM, 1984.
- [ALB75] Albouy, Y., Joly, G., Launay, M., Martin, P., Criterna, R., Salinas, E., Sosapavon, F., Urdalbay, C., "An integrated planning method for power systems", PICA Conference Proceedings 75, CHO 962-1-PWR, 1975, pp. 184-206.
- [BAR87] Barra, J., Alec, S., Pasche, C., Chamorel, P.A., Germond, A.J., de Werra, D., "Network simplex method applied to AC load-flow calculation", IEEE Trans. on Power systems Vol. PWR-2, No. 1, 1987, pp. 197-203.
- [BOA69] Boardman, J.T., Hogg, B.W., "Synthesis of electricity supply networks using dynamic programming", IEE Conference publication No. 51, 1969, pp. 249-2254.
- [CRA75] Crawford, D., Holt, S.B., "A mathematical optimization technique for locating and sizing distribution substations and deriving their optimal service areas", IEEE Trans. on PAS Vol. 94, Sep., 1975, pp. 230-235.
- [ELG77] Elgerd, O.I., Basic electric power engineering, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1977.
- [ENR86] Enríquez, H., Técnicas computacionales en sistemas eléctricos de potencia, Limusa, 1986.
- [EPR88] EPRI Mathematical Decomposition Techniques for Power System Expansion Planning, EPRI Project 2473-6, Final Report, vol. 1 and 2, 1988.
- [GAR78] Garlet, M., Persoz, H., "Production transmission system planning at the E.D.F.", IEEE Transaction on PAS, Vol. 97, NO. 4, 1978, pp. 1285-1292.
- [GON81] Gonen, T., Foote, B.L., "Distribution system planning using mixed-integer programming", Proc. IEE, Vol. 128 part C, NO. 2, 1981.
- [HIN77] Hindi, K.S., Brameller, A., "Design of low-voltage distribution networks: a mathematical programming method", Proc. IEE, Vol. 124, 1, Jan. 1977, pp. 54-58.
- [KAP81] Kaplan, M., Braustein, A., "contribution to the determination of the



- optimum size for substations", IEEE Trans. on PAS, Vol.100, May 1981, pp.2263-2270.
- [MAS74] Masud, E. "An interactive procedure for sizing and timing distribution substations using optimization techniques", IEEE Trans. on PAS Vol.93, Sep., 1974, pp.1281-1286.
- [GAR78] Garlet, M., Persoz, H., "Production transmission system planning at the E.D.F.", IEEE Trans. on PAS, Vol.97, 4, 1978, pp.1285-1292.
- [MOS84] Moslehi, K., Wu, F.F. "A method for bulk power system reliability evaluation based on local coherency", Electric Power Systems Research, Vol.7, 1984, pp.307-319.
- [PAD88] Padiyar, K.R., Shanbhag, R.S., "Comparison of methods for transmission system expansion using network flow and DC load flow models", Electrical power & Energy systems, Vol.10, NO.1, 1988, pp.17-24.
- [PAL90] Palacios, J. Análisis del costo marginal en el sector eléctrico, Tesis de Maestría, DEPEI, UNAM, 1990.
- [PER85] Perreira, M., Pinto, L., Cunha, S., Oliveira, G., "A decomposition approach to automated generation/transmission expansion planning", IEEE Trans. on PAS Vol.104, 11, Nov., 1985.
- [PON87] Ponnaivalkko, M., Praksa Rao, K.S., Venkata, S.S. "Distribution system planning through a quadratic mixed integer programming approach", IEEE on Power Delivery 2, NO.4, 1987, pp.1157-1163.
- [RAM78] Ramachandran, K., Sharma, J.D., "A method for generation and transmission planning", Comput. And Elect. Engng. Vol.5, 1978, pp.171-178.
- [SAW77] Sawey, R.M., Zinn C.D., "An analytical model for long range expansion planning of generation and transmission in electric utility systems", IEEE Transactions on PAS, Vol.96, No.2 1977, pp.657-666.
- [SHA85] Sharifnia, A., Aashtiani, H.Z. "Transmission network planning: a method for synthesis of minimum cost secure networks", IEEE Transactions on PAS, Vol.104 No.8, August, 1985, pp.2026-2034.
- [SUL77] Sullivan, R.L., Power system planning, McGraw-Hill, N.Y., 1977.
- [SUN82] Sun, D.I., Farris, D.R., Cote, P.J., Shoults, R.R., Chen, M.S., "Optimal distribution substation and primary feeder planning via the fixed charge network formulation", IEEE Trans. on PAS, Vol.101, March 1982, pp.602-609.
- [THO81] Thompson, G.L., Wall, D.L., "A branch and bound model for choosing optimal substation locations", IEEE Trans. on PAS Vol.100, May 1981, pp.2683-2688.
- [UNA83] U.N.A.M., CONACyT, Modelos matemáticos para la planeación energética,

Memoria de Simposio, 1983

[WAL80] Wall, D.L., Thompson, G.L., Northcote-Green, J.E.D., " An optimization model for planning radial distribution networks", IEEE Trans. on PAS, Vol.99, Jan/Feb, 1980, pp.1061-1068.

[WEE79] Weedy, B.M., Electric Power systems, John Wiley & sons, Chichester, England, 1979.

[WOO84] Wood, A.J., Wollenberg, B.F., Power generation, operation, and control, John Wiley & Sons, N.Y., 1984.

[YOU88-1] You, J., Fuentes S., Afuso, A. "Descomposición de programación cuadrática", XV Academia Nacional de Ingeniería, 1988.

[YOU88-2] You, J., Afuso, A., Fuentes, S., "Expansión de las redes eléctricas con costos convexos", Primera reunión de Verano del capítulo de potencia de IEEE, Acapulco, México, 1988.

[YOU89] You, J., Afuso, A., Fuentes, S., "Decomposition techniques in the generation/transmission planning", IIE, 1989, artículo sometido en revisión.

## B. Técnicas de optimización

- [BAL65] Balas, E., "An additive algorithm for solving linear programs with zero-one variables", *Op.Res.* 13, 1965, pp.517-546.
- [BAZ79] Bazarra, M., & Shetty, C., "Nonlinear programming", John Wiley & Sons, N.Y., 1979.
- [BRO84] Brown, G., McBride, R., "Solving Generalized Networks", *Management Science* 30, No.12, 1984.
- [CON88] C.O.N.D.O.R., "Operations research: the next decade", *Operations Research*, Vol.36, No.4, 1988, pp.619-637.
- [DEM89] Dembo, R.S., Mulvey, J.M. Zenios, S.A., "Large-Scaled Nonlinear Network Models and their Application", *Operations Research* 37, 1989.
- [FIS81] Fisher M., "The lagrangian relaxation method for solving integer programming problems", *Manag. Science* Vol.27, No.1, 1981, pp.1-18.
- [GEO72] Geoffrion, A.M., "Generalized Benders Decomposition", *J. of optimization theory and applications*, 10, No.4, 1972, pp.237-260.
- [GUP85] Gupta, O.K., Ravindran, A., "Branch and bound experiments in convex nonlinear integer programming", *Manag. Science* Vol.31, No.12, 1985, pp.1533-1546.
- [HEL74] Held, M., Wolfe, Ph., Crowder, H.P., "Validation of subgradient optimization", *Math. Progr.* 6, 1974, pp.62-68.
- [JEN80] Jensen, P.A., Barnes, J.W., *Network flow programming*, John Wiley & Sons, N.Y., 1980.
- [KEE76] Keeney, R.L., Raiffa H., "Decision with multiple objectives: preferences and value tradeoffs", John Wiley & Sons, N.Y., 1976.
- [KEN80] Kennington, J.L., Helgason, R.V. *Algorithms for network programming*, John Wiley & Sons, N.Y., 1980.
- [LAN73] Land, A.H., Powell, S., *Fortran codes for mathematical programming: linear, quadratic and discrete*, John Wiley & Sons, London, 1973.
- [LAS70] Lasdon, L.S., *Optimization theory for large systems*, N.Y. McMillan, 1970.
- [LEM67] Lemke, C., and Spielberg, K., "Direct search algorithms for zero-one and mixed integer programming", *Op. Res.* 15, 1967, pp.892-914.
- [MAC81] Magnanti, T.L., Wong, R.T. "Accelerating Benders decomposition: Algorithmic enhancement and model selection criteria", *Opns. Res.* 29, NO.3, 1981, pp.464-483.
- [MCD77] McDaniel, D., Devine, M., "A modified Benders' partitioning algorithm for mixed integer programming", *Manag. Science* 24, NO.3 1977, pp.312-319.

- [MIN86] Minoux M., Mathematical programming: theory and algorithms, Chichester, John Wiley & Sons, 1986.
- [NAR79] Narula, S.C., Kindorf, J.R., "Linear 0-1 programming: a comparison of implicit enumeration algorithms, Comput. Oper. Res. 6, 1979, pp.45-51.
- [ROC84] Rockafellar, R.T., Network flows and monotropic optimization, John Wiley & Sons, N.Y., 1984.
- [STR86] Strang, G., Introduction to applied mathematics, Wellesley-Cambridge Press, 1986.
- [ZI072] Zions S. "Generalized implicit enumeration using bounds on variables for solving linear programs with zero-one variables", N.R.L.Q. Vol.19 No.1, 1972.
- [ZOU70] Zoutendijk, G., "Enumeration algorithms for the pure and mixed integer programming problem", Proceedings of the Princeton symposium on mathematical programming, (H.W.Kuhn, Ed.), Princeton University press, 1970.