

01171
1
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA

TÉCNICAS ESTADÍSTICAS APLICADAS EN
APROVECHAMIENTOS HIDRÁULICOS

TESIS QUE PRESENTA

IGNACIO RÍOS DE LA TORRE

PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN INGENIERÍA EN
(INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES)

JURADO:

PRESIDENTE: DR. FRANCISCO VENEGAS MARTÍNEZ
VOCAL: DR. SERGIO FUENTES MAYA
SECRETARIO: DR. SERGIO OCTAVIO ESPARZA NÚÑEZ
SUPLENTE: M EN I, MIGUEL ANGEL GUTIÉRREZ ANDRADE
SUPLENTE: M EN I, JAVIER SUÁREZ ROCHA

FEBRERO DE 1990.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

	PAG.
RESUMEN	1
INTRODUCCIÓN	2
1. ESTADÍSTICA PARAMÉTRICA	4
1.1 Conceptos Básicos	5
1.2 Valor Esperado y Momentos	8
1.3 Estimación de Parámetros	11
1.4 Estimadores de Máxima Verosimilitud (E.M.V.)	14
1.5 Ejemplos	17
2. ESTADÍSTICA NO-PARAMÉTRICA	27
2.1 Ventajas y Desventajas de la Estadística No-Paramétrica	29
2.2 Pruebas Estadísticas No-Paramétricas	31
2.3 La Prueba Kolmogorov-Smirnov	36
2.4 Ejemplos	40
3. ALGUNOS MÉTODOS CLÁSICOS PARA GENERACIÓN DE MUESTRAS SINTÉTICAS,	50
3.1 Conceptos Básicos	52
3.2 Modelo clásico	55
3.3 Modelo González Villarreal y Domínguez	61
3.4 Ejemplos	69

4. GENERACIÓN DE MUESTRAS SINTÉTICAS	
MÉTODOS NO-CLÁSICOS	76
4.1 Serie de Tiempo y Proceso Estocástico	77
4.2 Clasificación de series de tiempo	80
4.3 Parámetros Básicos de las series de tiempo	83
4.4 Técnicas de Box-Jenkins	85
4.5 Modelos Estacionales	103
4.6 Procesos autorregresivos multivariados de series de tiempo	103
4.7 Procesos de Desagregación	106
4.8 Ejemplos	115
5. PREDICCIÓN DE ESCURRIMIENTOS PARA LA PRESA FCO. I. MADERO	132
5.1 Presa Fco. I. Madero	132
5.2 Pronóstico de Escurrimiento	137
CONCLUSIONES	144
APÉNDICE A	145
APÉNDICE B	148
BIBLIOGRAFÍA	169

RESUMEN

Análisis y síntesis de las técnicas estadísticas - usadas en aprovechamientos hidráulicos con particular atención a su justificación y aplicación.

Al hablar del uso de algún modelo de generación de muestras sintéticas para generar esturrimientos, hablamos de una herramienta poderosa en el diseño y - análisis de sistemas de recursos o aprovechamientos hidráulicos. En general (planeación, construcción y desarrollo) representa un campo de aplicación para el enfoque y las técnicas de la ingeniería de - sistemas por el carácter multipropósito (suministro de agua industrial, municipal, agrícola, navegación, hidroelectricidad, control de inundaciones, etc.) y multiobjetivo (desarrollo económico regional, pro- - tección del ambiente, maximización del bienestar social, etc.) del sector hidráulico.

INTRODUCCION

El agua es elemento de vida para la humanidad, tanto para su desarrollo industrial, agrícola, médico, animal, etc., como su expansión demográfica va en incremento; que los ciclos hidrológicos han variado, se hace necesario cada vez hacer un mayor uso de la misma, ya sea mediante la recirculación, descontaminación, mejorando los sistemas de aplicación y sobre todo saber en el momento y época de la disponibilidad real que tenga una obra de almacenamiento para que con ello, se pueda hacer una distribución óptima y segura, que permita posteriormente (sí es el caso) aplicar cualquiera de los sistemas de recuperación del agua que he mencionado anteriormente.

Actualmente, se dispone de procedimientos matemáticos, tales como la estadística no-paramétrica y paramétrica aplicables a casos de diferente índole, permitiendonos con ello pronosticar la disponibilidad del elemento, para un mejor aprovechamiento futuro.

Estando en operación a partir del año de 1949 la presa denominada Fco. I. Madero dentro de la cuenca del río Conchos en el Estado de Chihuahua, se encontró que había fallas en la distribución del agua en los programas de riego, por no disponer de antecedentes que les permitiera saber las disponibilidades probables de agua en el futuro calendario de

siembra, para tratar de corregir ésta anomalía, y previo el estudio de modelos clásicos y no clásicos de generación de muestras sintéticas que permiten tener un antecedente de los volúmenes de escurrimientos en la obra que pudieran aprovecharse en el tiempo requerido en la agricultura, mediante la operación más segura y correcta de aportaciones y demandas, que en última instancia estas estarán regidas por el uso que se haga del elemento agua.

Los capítulos que consta este trabajo son como sigue: En el capítulo 1, presenta algunas definiciones básicas sobre estadística paramétrica. En el siguiente capítulo se desarrollan conceptos relacionados con la estadística no-paramétrica. A su vez los capítulos 3 y 4, se refieren a generación de muestras sintéticas clásicas y generación de muestras sintéticas no-clásicas, respectivamente y en nuestro último capítulo ofrecemos una aplicación a un problema de pronósticos de escurrimiento a la presa Fco. I. Madero, utilizando la técnica de Box y Jenkins.

Como punto final de dicho trabajo, se presenta la conclusión del mismo así como su respectivo apéndice y bibliografía.

CAPITULO 1

ESTADÍSTICA PARAMÉTRICA

1. INTRODUCCIÓN A LA ESTADÍSTICA PARAMÉTRICA.

El propósito del capítulo, es presentar algunos conceptos sobre estadística paramétrica, que son una herramienta útil en la planeación de aprovechamientos hidráulicos. Se habla de estadística paramétrica, ya que se conoce de antemano o se supone que las observaciones o datos (por ejemplo escurrimientos), se comportan de acuerdo a una distribución conocida.

En este capítulo se introducen conceptos tales como el de variables aleatorias y función de distribución de una sola variable. Se presentan los conceptos de valor esperado y momentos. El importante tema de estimación de parámetros. Se define también la idea de máxima verosimilitud y por último algunos ejemplos.

1.1 CONCEPTOS BÁSICOS

Definición 1.1.1. Una variable aleatoria (v.a.) es una función de valores reales definida en un espacio muestral.

Se utilizarán letras mayúsculas, como X , para denotar variables aleatorias, y minúsculas como x , para indicar valores particulares que puede tomar una variable aleatoria.

Frecuentemente las variables aleatorias encontradas en problemas de aprovechamientos hidráulicos se pueden clasificar como variables aleatorias discretas o contínuas.

Definición 1.1.2. Una variable aleatoria es discreta si solamente puede tomar un conjunto numerable (finita o infinita) de valores.

Definición 1.1.3. Una variable aleatoria continua es aquella que puede tomar cualquier valor entre todos los contenidos en un intervalo de la recta.

Definición 1.1.4. La función de distribución de probabilidad de una variable aleatoria X se define como la probabilidad de que ésta no rebase a x , es decir:

$$F(x) = F_X(x) = P_X(-\infty, x] = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

A $F(x)$ se le conoce también como función de distribución acumulada o acumulativa.

Propiedades de $F(x)$.

- a) $F(-\infty) = 0$ y $F(\infty) = 1$
- b) Sea no decreciente, si $x < y$ entonces $F(x) \leq F(y)$
- c) $F(x)$ es continua por la derecha, si $x_n \rightarrow x$ con $x_n > x$ entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F(x).$$

Definición 1.1.5. Si X es una variable aleatoria discreta se define a la función de probabilidad de masa como:

$$P_X(x) = \begin{cases} P(X = x_j) & \text{si } X = x_j \text{ para algún } j. \\ 0 & \text{si } X \neq x_j \text{ para toda } j. \end{cases}$$

La función $P_X(x)$ debe cumplir con las siguientes propiedades:

- a) $P_X(x) \geq 0$
- b) $\sum_j P_X(x_j) = 1$

Sea X una variable aleatoria discreta, entonces la función de distribución $F(x)$ tiene la siguiente forma:

$$F(x) = \sum_{x_j \leq x} P_X(x_j) .$$

Definición 1.1.6. Sea $F(x)$ la función de distribución de una variable aleatoria X . Entonces $f(x)$, dado por:

$$f(x) = f_X(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x) ,$$

siempre y cuando exista la derivada, se denomina la función de densidad de probabilidad de X .

Se deduce de la definición anterior que $F(x)$ se puede escribir de la forma siguiente:

$$F(x) = \int f(x)dx + c, \text{ o bien}$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^x f(u)du .$$

Propiedades de la función de densidad $f(x)$.

a) $f(x) \geq 0$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

La probabilidad de que X se localice en el intervalo cerrado $[a, b]$ está dado por:

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_b^a f(x)dx$$

en donde, $f(x)$ es la función de densidad de probabilidad para X .

Las definiciones desarrolladas anteriormente, se pueden generalizar, para el caso de n variables asociadas a un cierto experimento.

Previamente, se definió la función de distribución ya que juega un papel muy importante en la formulación de modelos estadísticos ya que hay una función de distribución asociada con cada variable aleatoria.

1.2. VALOR ESPERADO Y MOMENTOS.

En lugar de especificar la función de distribución (o la distribución de probabilidad, o la función de densidad) de una variable aleatoria, frecuentemente es necesario describir esta función por una "cantidad típica". Una cantidad que es bastante sugestiva en el valor esperado (o esperanza) de una variable aleatoria.

Definición 1.2.1. Sea X (v.a) y $g(X)$ una función de X . Defina $E[g(X)]$, el valor esperado de $g(X)$, como:

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum_j g(x_j)P(x_j), & \text{si } X \text{ es discreto.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx, & \text{si } X \text{ es continuo.} \end{cases}$$

La media y variancia son casos particulares de cantidades más generales conocidas como momentos (parámetros). Es decir:

$$E[X^k] = \begin{cases} \sum_j x_j^k P(x_j), & \text{si } X \text{ es discreto.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx, & \text{si } X \text{ es continuo.} \end{cases}$$

A esta cantidad se le llama el k-ésimo momento de la variable aleatoria.

Si $k=1$, entonces el primer momento es la media.

Ahora si hacemos $g(X) = (X-\mu)^k$, se tiene:

$$E[(X-\mu)^k] = \begin{cases} \sum_j (x_j - \mu)^k P(x_j), & \text{si } X \text{ es discreto.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x_j - \mu)^k f(x) dx, & \text{si } X \text{ es continuo.} \end{cases}$$

Esta cantidad se llama el K-ésimo momento central de la variable aleatoria X o de la distribución correspondiente.

Si $K = 2$, entonces el segundo momento central se conoce como la variancia.

$$\sigma^2 = \sigma_X^2 = \text{VAR}(X) = E[(X-\mu)^2] = \begin{cases} \sum_j (x_j - \mu)^2 P(x_j) = E[X^2] - \mu^2, \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = E[X^2] - \mu^2. \end{cases}$$

Definición 1.2.2. El sesgo o asimetría de X (o de la distribución correspondiente), como una medida de asimetría de las distribuciones, es decir;

$$\gamma = \frac{1}{\sigma^3} E[(X - \mu)^3]$$

conviene señalar que:

- a) Si $\gamma=0$, se tiene una distribución simétrica.
- b) Si $\gamma>0$, la distribución tiene una gran cola en el lado derecho.
- c) Si $\gamma<0$, la distribución tiene una gran cola en el lado izquierdo.

Otra cantidad que mide el grado de variabilidad en la variable aleatoria X es el coeficiente de variación:

$$CV = CV_X = \frac{\sigma}{\mu} (100\%)$$

El coeficiente de variación, se utiliza para comparar la variabilidad relativa entre dos conjuntos de datos.

1.3 ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS.

De una manera muy breve se estudiará uno de los principales problemas de la estadística matemática: La teoría de la estimación de parámetros. La necesidad del estudio de éste tema, se puede resumir someramente en el siguiente párrafo.

Una vez que se ha construido un modelo estadístico para nuestra población bajo estudio, se desea conocer los parámetros que dicho modelo envuelve. Por ejemplo, si dicho modelo estadístico es la distribución Log-Normal, entonces se desea conocer estimadores adecuados de los parámetros o de funciones de los parámetros μ_L y σ_L^2 de que depende esta distribución.

Considere una distribución F que depende de un parámetro desconocido θ y suponga que se tiene una fórmula para calcular un valor aproximado $\hat{\theta}$ del parámetro θ , a partir de una muestra dada. Esto es, si la muestra es x_1, \dots, x_n , $\hat{\theta}$ se puede escribir como:

$$\hat{\theta} = f(x_1, \dots, x_n).$$

Suponga que x_1, \dots, x_n son valores particulares de n variables aleatorias X_1, \dots, X_n independientes e idénticamente distribuidas, entonces $\hat{\theta}$ es un valor particular de la variable aleatoria

$$\hat{\theta} = f(X_1, \dots, X_n)$$

La variable aleatoria $\hat{\theta}$ se llama un estimador de θ y el número $\hat{\theta}$ se llama una estimación de θ . Por ejemplo, si $\theta = \mu$ es la media de F , entonces $\hat{\theta}$ podría tomarse como $\hat{\theta} = \bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$.

Los casos usuales son de estimaciones puntuales y estimaciones por intervalos. En el caso de una estimación puntual, se tiene un número $\hat{\theta}$ dado por $\hat{\theta} = f(x_1, \dots, x_n)$, que si bien es una aproximación al valor real de θ , no sabemos que tan buena sea tal aproximación. Por otro lado, una estimación por intervalos es un intervalo cuyos extremos se determinan usando la muestra y tal que con una cierta probabilidad dada (el "nivel de confianza") contenga al parámetro. Las estimaciones por intervalos también se conocen con intervalos de confianza.

Sea $\hat{\theta}$ un estimador de un parámetro θ . Decimos que $\hat{\theta}$ es un estimador insesgado de θ si:

$$E[\hat{\theta}] = \theta.$$

En caso contrario, decimos que $\hat{\theta}$ es un estimador sesgado.

La media muestral es un estimador insesgado de la media de la población, en cambio la variancia muestral es un estimador sesgado de la variancia de la población.

Conviene señalar:

- a) Aunque $E[S^2] = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \neq \sigma^2$, esto es, S^2 es un estimador sesgado, vemos $E[S^2] \rightarrow \sigma^2$. Por este motivo decimos que S^2 es un estimador asintóticamente insesgado de σ^2 .
- b) Si $\hat{\theta}$ es un estimador sesgado de θ , se define el sesgo de $\hat{\theta}$ como:

$$E[\hat{\theta}] - \theta.$$

Por ejemplo: el sesgo de S^2 es:

$$E[S^2] - \sigma^2 = \frac{n-1}{n} \sigma^2 - \sigma^2 = - \frac{\sigma^2}{n}.$$

Sean $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ dos estimadores insesgados de un parámetro θ .

Decimos que $\hat{\theta}_1$ es más eficiente que $\hat{\theta}_2$ si:

$$\text{VAR}[\hat{\theta}_1] \leq \text{VAR}[\hat{\theta}_2],$$

es decir:

$$E[(\hat{\theta}_1 - \theta)^2] \leq E[(\hat{\theta}_2 - \theta)^2].$$

Para estimadores sesgados, si se satisface lo anterior decimos que $\hat{\theta}_1$ es más eficiente que $\hat{\theta}_2$.

Un estimador $\hat{\theta}^*$ es absolutamente eficiente si es más eficiente que cualquier otro estimador, esto es:

a) Aunque $E[S^2] = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \neq \sigma^2$, esto es, S^2 es un estimador sesgado, vemos $E[S^2] \rightarrow \sigma^2$. Por este motivo decimos que S^2 es un estimador asintóticamente insesgado de σ^2 .

b) Si $\hat{\theta}$ es un estimador sesgado de θ , se define el sesgo de $\hat{\theta}$ como:

$$E[\hat{\theta}] - \theta.$$

Por ejemplo: el sesgo de S^2 es:

$$E[S^2] - \sigma^2 = \frac{n-1}{n} \sigma^2 - \sigma^2 = -\frac{\sigma^2}{n}.$$

Sean $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ dos estimadores insesgados de un parámetro θ .

Decimos que $\hat{\theta}_1$ es más eficiente que $\hat{\theta}_2$ si:

$$\text{VAR}[\hat{\theta}_1] \leq \text{VAR}[\hat{\theta}_2],$$

es decir:

$$E[\hat{\theta}_1 - \theta]^2 \leq E[\hat{\theta}_2 - \theta]^2.$$

Para estimadores sesgados, si se satisface lo anterior decimos que $\hat{\theta}_1$ es más eficiente que $\hat{\theta}_2$.

Un estimador $\hat{\theta}^*$ es absolutamente eficiente si es más eficiente que cualquier otro estimador, esto es:

$$E[\hat{\theta}^* - \theta]^2 \leq E[\hat{\theta} - \theta]^2,$$

para todo estimador $\hat{\theta}$.

Un estimador $\hat{\theta}$ es un estimador consistente de θ si:

$$E[\hat{\theta} - \theta]^2 \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Por ejemplo, \bar{X} es consistente si:

$$\text{VAR}(\bar{X}) = E[\bar{X} - \mu]^2 = \frac{\sigma^2}{n} \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

en donde, $\text{var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$, se le conoce como error estandar de \bar{X} .

1.4 ESTIMADORES DE MÁXIMA VEROSIMILITUD (E.M.V.)

El método de máxima verosimilitud fué propuesto por primera vez por el matemático alemán C.F. Gauss en 1821; sin embargo el crédito es generalmente dado al estadístico inglés R.A. Fisher quien redescubrió la idea en un artículo escrito en 1922 y fué el primero en investigar las propiedades del método.

Una de las técnicas más útiles para obtener estimadores puntuales es el método de máxima verosimilitud.

Sea $F(x)$ la distribución de una característica X de los elementos de una cierta población, y suponga que F depende de m parámetros $\theta_1, \dots, \theta_m$. Si X es continua, denotamos su función de densidad por

$f(x)$; si X es una variable aleatoria discreta, $f(x)$ denota su función probabilidad, $f(x) = P(X = x_k) = P_k$ si $X = x_k$.
 Sea x_1, \dots, x_n una muestra aleatoria de la población, se define la función de verosimilitud como:

$$L = f(x_1)f(x_2) \dots f(x_n).$$

Puesto que el muestreo es independiente, L es la "probabilidad" de obtener precisamente la muestra observada. (En el caso continuo, la probabilidad, será $f(x_1) \Delta x_1 \dots f(x_n) \Delta x_n$).

$$L = L(x_1, \dots, x_n ; \theta_1, \dots, \theta_m).$$

El método de máxima verosimilitud consiste en tomar como estimadores de los parámetros desconocidos, aquellos que maximizan la probabilidad $L = f(x_1)f(x_2) \dots f(x_n)$ de obtener la muestra observada.

Por lo tanto, la estimación de máxima verosimilitud de los parámetros $\theta_1, \dots, \theta_m$ se definen como las "soluciones del sistema de ecuaciones":

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, m.$$

Nota: Obsérvese que las soluciones de $\frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0$, en general, no dan un máximo de L , ni tampoco son únicas, por lo tanto, para determinar los estimadores se debe verificar que efectivamente las soluciones son máximas.

Sean $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_m$ las soluciones de $\frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0$,

$$\hat{\theta}_i = \hat{\theta}_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Si x_1, \dots, x_n son valores de n variables aleatorias X_1, \dots, X_n independientes e idénticamente distribuidas con distribución F , entonces:

$$\hat{\Theta}_i = \hat{\Theta}_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

se llaman estimadores de máxima verosimilitud.

Para "facilitar los cálculos" en lugar de los máximos de L , se calculan los máximos de $\log L$, es decir:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} (\log L) = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, n.$$

1.5 EJEMPLOS.

Ejemplo 1. (Distribución binomial).

En la planeación de sistemas de protección contra inundaciones originadas por los flujos de agua en un río o canal es usual aplicar el denominado criterio del "flujo de cien años" que equivale a la estimación estadística del flujo máximo que puede ocurrir en un río o canal en un periodo de cien años.

Dicho criterio es una estimación del 0.99 cuantil (o bien 99 percentil) de la distribución de los flujos de agua de un río o canal en un año dado (cualesquiera). Esta estimación es utilizada como parámetro de diseño y sirve de base para la evaluación de riesgos de sistemas de protección. En relación con esta estimación es usual suponer que los flujos que ocasionan las inundaciones en distintos años son estocásticamente independientes.

- a) Verifique la probabilidad de que ocurra al menos un flujo del tamaño del "flujo de cien años", en un periodo de cinco años, es 0.049.
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra al menos un "flujo de cien años" en un periodo de cien años?.
- c) Suponga que en un año ocurren inundaciones independientes en 1000 lugares distintos. Hallar la probabilidad de que

ocurra, al menos un flujo del tamaño del "flujo en cien años".

Solución.

- a) Denote por X al flujo de agua en un río o canal en un año dado (cualquiera). Sea x_0 el "flujo de cien años" y observe que x_0 es una estimación del 99-percentil (o bien 0.99 cuantil), esto es, $P(X \leq x_0) = 0.99$. Considerando el evento: ocurre un "flujo en cien años" como una variable aleatoria Bernoulli con probabilidad de éxito $p=0.01$, se procede a calcular el evento: Ocurren Z "flujos en cien años" en un periodo de n años, utilizando la distribución Binomial con parámetros (n,p) . Entonces:

$$\begin{aligned} &P(\text{Al menos un "flujo en 100 años" en cinco años}) \\ &= 1 - P(\text{Ningun "flujo en 100 años" en cinco años}) \\ &= 1 - \binom{5}{0} (0.01)^0 (0.99)^5 = 1 - 0.950099 = 0.049 = 4.9\%. \end{aligned}$$

b) $P(\text{Al menos un "flujo en 100 años" en 100 años}) =$

$$\begin{aligned} &= 1 - P(\text{ningun "flujo en 100 años" en 100 años}) \\ &= 1 - \binom{100}{0} (0.01)^0 (0.99)^{100} = 1 - 0.366 = 0.6339 = 63.39\%. \end{aligned}$$

c) $P(\text{Al menos un "flujo en 100 años" en alguno de los 1000 lugares en donde ocurren inundaciones}) =$

$$\begin{aligned} &= 1 - P(\text{ningun "flujo en 100 años" en alguno de los 1000 lugares en donde ocurren inundaciones}) \\ &= 1 - \binom{1000}{0} (0.01)^0 (0.99)^{1000} = 1 - 0.00043 = 1.0 = 100\%. \end{aligned}$$

Ejemplo 2. (Maximización del valor esperado).

El encargado de establecer el precio del agua en un cierto distrito de riego tiene la siguiente problemática. El precio unitario del agua puede ser 10 ó 5 unidades monetarias por millón de metros cúbicos. La demanda de agua depende (como es de esperar) del precio del agua y tiene un comportamiento probabilístico que está resumido en el siguiente cuadro:

Precio P	Volumen demandado dado p.				
	30	55	80	100	120
5	0.00	0.15	0.30	0.35	0.20
10	0.20	0.30	0.40	0.10	0.00

- a) Determinar el valor esperado y la variancia de los beneficios obtenidos de la venta de agua para cada uno de los precios 5 y 10.
- b) Determine el precio que maximiza beneficios esperados derivados de la venta de agua.
- c) Suponga que existe 0.6 de probabilidad de que el precio escogido sea 10 y 0.4 es la probabilidad de que el precio sea 5.

Determinar el valor esperado de los beneficios derivados del agua bajo esta situación. Compare el beneficio obtenido con el calculado en b) y determine cual es mayor.

La manera de resolver el problema es hacer:

a) $E[B|p=5] = 456.25$

Ahora para el precio de 10.

$$\begin{aligned} E[B|p=10] &= \\ &= 10[(30)(0.2) + (55)(.3) + (80)(0.4) + 100)(0.1) + (120)(0)] \\ &= 645. \end{aligned}$$

VARIANCIAS

$$\begin{aligned} \text{VAR}[B|p=5] &= \\ &= (30 \times 5)^2(0) + (55 \times 5)^2(.15) + (80 \times 5)^2(0.3) + (100 \times 5)^2(0.35) + \\ &\quad + (120 \times 5)^2(0.2) - (456.25)^2 = 10679.75 \end{aligned}$$

Similarmente

$$\text{VAR}[B|p=10] = 48700.00$$

b) El precio que maximiza beneficios esperados, es $p=10$, ya que tiene mayor variancia.

c) $E[B] = (0.4)(456.25) + (0.6)(645) = 569.5.$

Nos conviene tener el precio $p = 10$.

Ejemplo 3. (Función Beneficio).

Considere que un consumidor de agua puede retirar agua de un río, y la función de distribución de probabilidad $F_Q(q)$ del gasto disponible Q es conocido. Calcular objetivo del retiro T que maximizará el valor esperado de los beneficios netos del uso del agua dado por funciones de beneficio a corto-plazo, especificados a continuación:

- a) Los beneficios del gasto Q cuando el objetivo T ya sucedio son:

$$B(Q|T) = \begin{cases} B_0 + \beta T + \gamma(Q-T) & Q \geq T \\ B_0 + \beta T + \delta(Q-T) & Q < T \end{cases}$$

En donde $\delta > \beta > \gamma$. En este caso, el objetivo óptimo T^* puede ser expresado como una función p^* , la probabilidad que la variable aleatoria de gasto Q será menor o igual a T . Demostrar que p^* es igual a $(\beta-\gamma)/(\delta-\gamma)$.

- b) Los beneficios de gasto Q cuando el objetivo T sucedió es:

$$B(Q|T) = B_0 + \beta T - \delta(Q-T)^2$$

Empezaremos por observar que:

$$E[B(Q|T)] = \int_T^{\infty} [B_0 + \beta T + \gamma(q-T)] f_Q(q) dq +$$

$$+ \int_{-\infty}^T [B_0 + \beta T + \delta(q-T)] f_Q(q) dq$$

Agrupando

$$= \int_T^{\infty} (\beta - \gamma) f_Q(q) dq + \int_{-\infty}^T (\beta - \delta) f_Q(q) dq$$

Aplicando:

$$f'(T) = \int h_T(q, T) dq,$$

en donde

$$E[B(Q|T)] = f(T)$$

$$\beta - \gamma(1 - F_Q(T)) - \delta F_Q(T) = 0$$

$$\beta - \gamma + (\gamma - \delta)F_Q(T) = 0$$

$$F_Q(T) = \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \delta} = \frac{\beta - \delta}{\delta - \gamma}$$

$$\therefore P(Q \leq T) = F_Q(T) = \frac{\beta - \delta}{\delta - \gamma} \quad \blacksquare$$

b)

$$B(Q|T) = B_0 + \beta T - \delta(Q - T)^2$$

$$B(Q|T) = B_0 + \beta T - \delta Q^2 + 2\delta QT - \delta T^2$$

$$\frac{dB(Q|T)}{dT} = \beta + 2\delta E[Q] - 2\delta T = 0$$

$$T^* = \frac{\beta + 2\delta E[Q]}{2\delta} = \frac{\beta}{2\delta} + E[Q]$$

$$\therefore T^* = \frac{\beta}{2\delta} + E[Q] \quad \blacksquare$$

Ejemplo 4. (Distribución Exponencial Doble).

Los modelos de predicción de la calidad del agua se describen en algunas ocasiones por medio de la función de distribución exponencial doble, cuya función de densidad es:

$$f(x) = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|x-\beta|}, \quad -\infty < x < \infty$$

en donde, α y β son los parámetros a determinar. Proporcionar los estimadores de máxima verosimilitud. ¿Es siempre único el estimador $\hat{\beta}$?

HECHO:

$$\frac{d}{d\beta} |x-\beta| = \begin{cases} -1 & x > \beta \\ 1 & x < \beta \end{cases}$$

Demostración.

Sea:

$$f(x) = f(x; \alpha, \beta) = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|x-\beta|}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$L = L[\alpha, \beta; x] = \prod_{i=1}^n \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|x_i-\beta|} = \frac{\alpha^n}{2^n} e^{-\alpha \sum_{i=1}^n |x_i-\beta|}$$

$$\ln L = -\alpha \sum_{i=1}^n |x_i-\beta| + n \ln \alpha - n \ln 2$$

$$\frac{\partial (\ln L)}{\partial \alpha} = - \sum_{i=1}^n |x_i-\beta| + \frac{n}{\alpha} = 0$$

$$\therefore \hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n |x_i-\beta|}$$

Ahora:

$$\frac{\partial (\ln L)}{\partial \beta} = -\alpha \sum_{i=1}^n \frac{d}{d\beta} |x_i - \beta| = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{d\beta} |x_i - \beta| = 0$$

Sean k las observaciones tales que $x_i < \beta$, y $(n-k)$ las observaciones cuando $x_i > \beta$

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{d\beta} |x_i - \beta| = k - (n-k) = 2k - n = 0$$

$n = 2k$; $k = 0, 1, \dots, n$; $K = \frac{n}{2}$ es la mediana.

Sean x_1, \dots, x_n observaciones y x'_1, \dots, x'_n observaciones ordenadas (menor a mayor), es decir, $x'_1 \leq x'_2 \leq \dots \leq x'_n$. Suponiendo que no haya dos observaciones iguales:

a) Si n es impar, $\hat{\beta}$ es único, $\hat{\beta} = x'_{k+1}$ con $n = 2k+1$.

b) Si n es par, $n = 2k$, $\hat{\beta}$ no es única, $x'_k < \hat{\beta} < x'_{k+1}$ ■

Ejemplo 5. (Fórmula de Taylor).

Un problema usual en el manejo y manipulación de datos es aquel en donde se recopilan observaciones en parejas, digamos (X, Y) , en donde X puede ser el flujo en un río, mientras que Y representa la concentración de un contaminante. Suponga que se conocen los parámetros estadísticos: la media, variancia y coeficiente de correlación de X con Y . Suponga que se forma una

nueva variable aleatoria $g(X,Y)$, en donde $g(\cdot)$ es una función real cuyas derivadas parciales de primer y segundo orden existen.

Efectúe una expansión de series de Taylor de segundo orden alrededor del punto (μ_X, μ_Y) , en donde μ_X, μ_Y son las medias de las variables X, Y respectivamente. Especifique una expresión para el cálculo de la media de $g(X,Y)$ en función de sus derivadas parciales así como medias, varianzas y covariancias de X, Y .

Demostración.

Entonces, alrededor del punto (μ_X, μ_Y) y haciendo $\bar{g} = g(\mu_X, \mu_Y)$ en la fórmula de Taylor resulta lo siguiente:

$$g(X,Y) \doteq \bar{g} + \bar{g}_X(X-\mu_X) + \bar{g}_Y(Y-\mu_Y) + \frac{1}{2}[\bar{g}_{XX}(X-\mu_X)^2 + 2\bar{g}_{XY}(X-\mu_X)(Y-\mu_Y) + \bar{g}_{YY}(Y-\mu_Y)^2].$$

Pero:

$$E[g(\mu_X, \mu_Y)] = g(\mu_X, \mu_Y) = \bar{g}$$

$$E[X-\mu_X] = 0 \quad \text{y} \quad E[Y-\mu_Y] = 0$$

$$E[(X-\mu_X)^2] = \text{VAR}(X) ; E[(Y-\mu_Y)^2] = \text{VAR}(Y)$$

$$E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = \text{COV}(X,Y).$$

Aplicando las propiedades anteriores y el operador esperanza a ambos miembros de la función $g(X,Y)$ se obtiene:

$$E[g(X,Y)] \doteq \bar{g} + \frac{1}{2}[\bar{g}_{XX}\text{VAR}(X) + 2\bar{g}_{XY}\text{COV}(X,Y) + \bar{g}_{YY}\text{VAR}(Y)]$$

Para la variancia se utiliza una aproximación de primer orden, es decir:

$$g(X,Y) \doteq \bar{g} + \bar{g}_X(X-\mu_X) + \bar{g}_Y(Y-\mu_Y)$$

Por medio de la linealidad del valor esperado aplicados a $g(X,Y)$ y a $[g(X,Y) - \bar{g}]^2$ obtenemos que:

$$E[g(X,Y)] \doteq \bar{g}.$$

$$\text{VAR}[g(X,Y)] = E[(g(X,Y) - E[g(X,Y)])^2]$$

$$\doteq E\{[\bar{g}_X]^2(X-\mu_X)^2 + [\bar{g}_Y]^2(Y-\mu_Y)^2 + 2\bar{g}_X\bar{g}_Y(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}$$

$$\doteq [\bar{g}_X]^2 \text{VAR}(X) + [\bar{g}_Y]^2 \text{VAR}(Y) + 2\bar{g}_X\bar{g}_Y \text{COV}(X,Y).$$

NOTA:

a) Si $\rho_{XY} = 0$, $\text{VAR}[g(X,Y)] = [\bar{g}_X]^2 \text{VAR}(X) + [\bar{g}_Y]^2 \text{VAR}(Y)$. ■

ESTADÍSTICA NO-PARAMÉTRICA

Las pruebas que se utilizan para la planeación de aprovechamientos o recursos hidráulicos bajo el caso de incertidumbre son: Las pruebas sin distribución, prueba de distribución libre o pruebas no-paramétricas*, las cuales permiten aceptar o rechazar una hipótesis nula, sin tener conocimiento de la distribución de la población, o de sus parámetros, simplemente asumen que los datos corresponden a una variable aleatoria no-paramétrica que más se aplican en el campo de la planeación de recursos hidráulicos son las llamadas la prueba del signo (1710) y la prueba de Wilcoxon (1945).

Este capítulo consta de los siguientes puntos: Primeramente ventajas y desventajas de la estadística no-paramétrica. Posteriormente, la prueba del signo, la cual depende de los signos de las diferencias entre observaciones aparejadas y no de magnitudes de las diferencias. La segunda prueba, es decir, la de Wilcoxon, sirve para comparar dos distribuciones poblacionales, ordenando las observaciones combinadas de las muestras obtenidas de cada población y sumando el orden asignado las observaciones de una de las poblaciones según la posición que ocupan.

* (Arbuthott 1710 en Londres).

Por otro lado, se tratará una de las pruebas de la bondad de ajuste de la distribución empírica, llamada la prueba de Kolmogorov-Smirnov, y en la última sección incluimos algunos ejemplos.

2.1 VENTAJAS Y DESVENTAJAS DE LA ESTADÍSTICA

NO - PARAMÉTRICA.

VENTAJAS.

1. Hay una gran abundancia de pruebas no paramétricas, y a menudo se puede elegir entre varias, dada una situación; sin embargo, muchas pruebas no-paramétricas tienen carácter especializado y se adaptan a un trabajo específico.
2. Las técnicas experimentales son rápidas y fáciles. Los cálculos suelen ser muy simples (cuando los hay) y, las condiciones peculiares ó características de los datos necesarios se obtienen sin grandes costos. Esta facilidad de uso las convierte en idóneos para el trabajo de campo, en donde resulta imposible utilizar calculadoras y computadoras. Son además muy prácticas para obtener resultados preliminares antes de aplicar las pruebas paramétricas.
3. Las suposiciones necesarias para utilizar técnicas no paramétricas contienen habitualmente menos restricciones que las pruebas paramétricas. A menudo, la única restricción consiste en una suposición de simetría en la distribución.
4. Los datos pueden ser atributos, ordenados u otra información difícil de cuantificar.

DESVENTAJAS.

1. La naturaleza de las hipótesis probadas tiene carácter mucho más general que en el caso de las hipótesis sometidas a las pruebas paramétricas correspondientes. A menudo, se probará una hipótesis, como "la distribución de las dos poblaciones es igual" en lugar de "las medias de las dos poblaciones son iguales".
2. En una prueba no-paramétrica se suelen requerir de un tamaño muestral más grande que la versión paramétrica correspondiente, cuando se establecen ambos tipos de pruebas en el conjunto de condiciones experimentales (el nivel de α , β)
3. Los métodos no-paramétricos suelen desperdiciar información. Muchas veces, lo único que importa es la jerarquización (el orden) de los datos, de manera que el tamaño solo tiene relevancia en un sentido de posición relativa, con esto, "el tamaño" de los datos se pierde un poco en la aplicación.

Comparando la prueba de Wilcoxon con la prueba del signo, ésta es menos sensible que la prueba Wilcoxon, puede utilizarse solo si no es posible suponer simetría.

2.2 PRUEBAS ESTADÍSTICAS NO-PARAMÉTRICAS BÁSICAS.

Se definirá a continuación el concepto de cuantil, éste proporciona información acerca de la localización y variación de datos, es decir, es una medida de variabilidad. Dicha definición, será utilizada para la prueba del signo.

Definición 2.2.1. El número x_{p_0} para un valor dado de p_0 en $0 < p_0 < 1$, es llamado el p_0 -ésimo cuantil de la variable aleatoria X , si $P(X < x_{p_0}) \leq p_0$ y $P(X > x_{p_0}) \leq 1-p_0$.

Es decir, X es menor que x_{p_0} con probabilidad p_0 ó menor, y X excede a x_{p_0} con probabilidad $1-p_0$ ó menor. La mediana es el cuantil 0.5, el tercer decil es el cuantil 0.3, el cuartil superior e inferior son los cuantiles 0.75 y 0.25 respectivamente, y el 63 percentil es el cuartil 0.63.

a. LA PRUEBA DEL SIGNO.

Posiblemente la más sencilla de todas las estadísticas de distribución libre no-paramétricas, son aquellas basadas en las contabilizaciones de si un evento en particular sucede en cada una de n pruebas independientes. Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias independientes, tal que X_i tiene una distribución continua con función de distribución acumulativa $F_i(x)$, $i=1, \dots, n$. Asuma que $F_i(\theta) = p_0$, $0 < p_0 < 1$, para $i=1, \dots, n$.

y alguna θ desconocida (es decir, cada X_i tiene la misma θ , pero con el p_0 -ésimo cuantil desconocido). Suponga que θ_0 es un número real conocido y defina las estadísticas:

$$\psi_i = \psi(X_i - \theta_0), \quad i = 1, \dots, n,$$

en donde,

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Teorema 2.2.1. Supongamos ψ_1, \dots, ψ_n están definidas como $\psi_i = \psi(X_i - \theta_0)$, y sea $S(\psi_1, \dots, \psi_n)$ es cualquier estadística basada en ψ_1, \dots, ψ_n son variables aleatorias de Bernoulli independientes e idénticamente distribuidas con parámetros $1-p_0$, y $S(\psi_1, \dots, \psi_n)$ es distribución libre sobre la clase no-paramétrica R_4 , consistiendo de todas las distribuciones conjuntas de variables aleatorias continuas independientes, cada una con p_0 -ésimo cuantil igual a θ_0 .

Para la demostración ver la referencia [27].

En relación al teorema 2.2.1., una función particular de las ψ_i -ésima, que es útil en la situación de prueba de una sola muestra es:

$$B = B(\psi_1, \dots, \psi_n) = \sum_{i=1}^n \psi_i.$$

absolutos de las diferencias, asignando el orden 1 a la más pequeña, y el 2 a la siguiente, etc. Si dos o más valores absolutos de las diferencias empatan para un mismo orden, entonces se asigna a cada miembro del conjunto empatado el promedio de los ordenes que habrían asignado a estas diferencias, denotando a R_i el orden con signo de las Z_i . Las R_i pueden pensarse como una representación estandarizada de los Z_1, \dots, Z_n , la cual preserva la relación de orden en cada lado de 0 y con respecto a 0. Por consiguiente, la suma de las R_i es un estadístico de prueba natural. Un equivalente y forma conveniente de éste estadístico es el estadístico de Wilcoxon de una muestra W definido por:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n R_i + \frac{n(n+1)}{4} = \sum_{i=1}^s T_i = T,$$

en donde, $T_1 < \dots < T_s$ son las R_i ordenadas positivas y s es el número observado de Z_i positivas.

Para calcular el valor crítico necesitado para la prueba α , la cual rechaza para valores grandes de W , necesitamos la distribución de (R_1, \dots, R_n) bajo H_0 . Aquí también, si H_0 es verdadera, la distribución de las ordenes con signo no depende de la distribución simétrica continua subyacente. Para obtener la distribución de orden con signo definimos las variables I_1, \dots, I_n como:

$$I_k = \begin{cases} 1 & \text{si } Z_k > 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Teorema 2.2.2. Suponga que F es continua y simétrica alrededor de 0. Entonces:

- (1) Los vectores $(|R_1|, \dots, |R_n|)$ y (I_1, \dots, I_n) son independientes.
- (2) $P\{|R_1| = |r_1|, \dots, |R_n| = |r_n|\} = \frac{1}{n!}$, para toda permutación $\{|r_1|, \dots, |r_n|\}$ de $\{1, \dots, n\}$.
- (3) I_1, \dots, I_n son variables independientes $B(1, \frac{1}{2})$.
- (4) $P[R_1 = r_1, \dots, R_n = r_n] = \frac{1}{2^n n!}$
- (5) $P[T_1 = t_1, \dots, T_s = t_s, S = s] = \frac{1}{2^n}$,

en donde $S = \sum_{j=1}^n I_j$ es el estadístico de la prueba del signo y $t_1 < \dots < t_s$ es algún conjunto de valores posibles de T_1, \dots, T_s

La demostración se incluye en la referencia [2].

El método desarrollado anteriormente, es aplicable al caso de muestras cuando se tiene $n \leq 16$. Pero, si se trabajan con muestras grandes ($n > 16$, entonces Wilcoxon se puede aproximar a la forma de una distribución normal.

No hay que olvidar que la prueba U de Mann-Whitney (1947) y la prueba de suma de orden de Wilcoxon son equivalentes, es decir, se llega a la misma conclusión.

Comentario. En la práctica los valores de α (ver apéndice tabla de Wilcoxon), son pruebas de dos colas y una cola (por la derecha e izquierda) respectivamente. La región de rechazo para esta prueba, siempre tiene la forma siguiente; rechazar H_0 si $T \leq T_0$, en donde, T_0 es el valor crítico de T.

El siguiente cuadro describe el uso apropiado de las pruebas estadísticas no-paramétricas desarrolladas anteriormente.

DESCRIPCION DE LA MUESTRA	¿IMPORTA LA MAGNITUD DE DATOS?	PRUEBA APROPIADA.
Una	-	Signo
Dos independientes	No	Signo
	Si	Wilcoxon
Dos aparejadas	No	Signo
	Si	Wilcoxon

En la sección 2.4, se refieren a ejemplos de las pruebas desarrolladas en ésta sección.

No hay que olvidar que existen otras pruebas no-paramétricas, las cuales reciben el nombre de prueba H de Kruskal-Wallis para un diseño completamente aleatorizado (1952), prueba de Friedman para diseños aleatorizados de bloques (1949), prueba de rachas: una prueba de aleatoriedad, la prueba de Quade (1972, 1979), coeficiente de correlación de rangos, la prueba Durbin (1951), etc. Las pruebas antes referidas, se encuentran en las referencias [8] y [27].

En la sección siguiente trataré sobre la prueba Kolmogorov-Smirnov de bondad de ajuste.

2.3 LA PRUEBA KOLMOGOROV-SMIRNOV.

Siempre que una curva ideal de frecuencias, sea normal o de algún tipo, se ajusta a una distribución real de frecuencias, lo que se hace es comparar la teoría y la observación. Una verificación de la concordancia existente entre los dos (esto es, de la bondad de ajuste) se puede efectuar a simple vista, pero tal prueba es evidentemente inadecuada. Se consigue precisión empleando la prueba de Kolmogorov-Smirnov (1933).

Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución con función de distribución acumulativa $F(x)$, y sea $F_n(x)$ la

función de distribución acumulativa empírica para la muestra,
es decir:

$$F_n(t) = \frac{1}{n} [\text{número de } x_i \leq t], \quad -\infty < t < \infty.$$

El siguiente teorema, se le conoce como Glivenko-Cantelli,
cuyo significado es que $F_n(x)$ converge uniforme a $F(x)$ con
probabilidad uno.

Teorema 2.3.1. Sea $F_n(x)$ una función de distribución acumula-
tiva empírica para una muestra aleatoria de tamaño n de una
distribución con función de distribución acumulativa $F(x)$.

Entonces:

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F(x)| = 0 \right\} = 1\right) = 1.$$

Ver la demostración en la referencia [27].

Corolario 2.3.2. Sea $F_n(x)$ una función de distribución acumu-
lativa empírica para una muestra aleatoria de tamaño n de una
distribución con función de distribución acumulativa $F(x)$.

Entonces la variable aleatoria $\sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F(x)|$ converge
($n \rightarrow \infty$) en probabilidad a cero.

La demostración se incluye en la referencia [27].

Daremos con cierto detalle el procedimiento para el caso de

una muestra por medio del problema de bondad de ajuste.

Sea $F_n(x)$ la función de distribución acumulativa empírica para una muestra aleatoria de una distribución continua con función de distribución acumulativa $F(x)$. Se interesa en probar $H_0: [F(x) = F_0(x) \text{ para todo } x]$, contra la hipótesis alternativa $H_1: [F(x) \neq F_0(x) \text{ para al menos una } x]$, en donde, $F_0(x)$ es una función de distribución acumulativa completamente especificada. (Por esta razón, el nombre del "problema de bondad de ajuste"). Se define el estadístico como:

$$D_n = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F_0(x)|.$$

Entonces se rechaza H_0 al nivel de significancia α , cuando $D_n > \omega_{1-\alpha}$, en donde, $\omega_{1-\alpha}$ es el cuantil, cuyos valores se encuentran en la tabla de cuantiles del estadístico de prueba de Kolmogorov-Smirnov (ver apéndice).

Como último teorema de esta sección es el siguiente.

Teorema 2.3.3. La distribución D_n bajo H_0 es la misma para todos los F_0 continuos.

Demostración ver referencia [2].

Existe un método que no será tratado aquí cuando, se considera que $F_0(x)$ es discreto (vea [8]).

También la prueba de bondad de ajuste, se puede establecer cuando se tienen dos muestras independientes, el método es parecido al tratado anteriormente (ver [8]).

Esta técnica se debe a Kolmogorv en el año de 1933, pero hubo otros científicos que se dedicaron a desarrollar pruebas de ajuste no-paramétricas como: la prueba de Lilliefors (1967), la prueba de Shapiro-Wilks (1960), prueba de Smirnov (1939), prueba de Cramer-Von Mises (1966), prueba de Birnbaum-Hall, la prueba Chi-cuadrado (1900), etc. Esta última prueba de bondad de ajuste, la cual es bastante conocida, se puede decir que no es tan buena como la prueba Kolmogorv-Smirnov, es aplicable a una clase mayor de problemas, o sea, es aplicable aun cuando $F_0(x)$ no se especifica completamente. Puede usarse para probar la hipótesis de que una variable aleatoria X tiene distribución normal, gamma, Poisson, etc., sin especificar el parámetro de estas distribuciones.

Asimismo en la sección siguiente, se considera un ejemplo, utilizando la prueba de Kolmogorv-Smirnov.

2,4 EJEMPLOS

Ejemplo 1. (Prueba de los Signos).

Considere un sistema de aprovechamientos hidráulicos de un vaso de almacenamiento de agua (millones de metros cúbicos) en una cierta región del país. Suponga que se efectúan técnicas de simulación al vaso de almacenamiento, para decidir cual de las dos políticas de operación producen mayor beneficio.

De acuerdo a los siguientes datos, establecer si la política 1 produce beneficios más altos que la política 2, por medio de las pruebas del Signo y Wilcoxon respectivamente.

SIMULACION	BENEFICIOS	
	POLITICA 1	POLITICA 2
1	6.27	4.20
2	3.95	2.58
3	4.49	3.87
5	5.31	4.02
6	7.15	6.75
7	6.90	4.21
8	6.03	4.13
9	6.35	3.68
10	6.95	7.45
11	7.96	6.85

PRUEBA DE LOS SIGNOS

Sean X_1 y X_2 los beneficios de las políticas 1 y 2 respectivamente.

HIPOTESIS.

$$H_0 : X_1 = X_2$$

$$H_1 : X_1 > X_2$$

NIVEL DE SIGNIFICANCIA

$$\alpha = 0.05 = 5\%$$

CRITERIO

Si x es el número de signos positivos, rechazar la hipótesis nula cuando la probabilidad de obtener x o más signos positivos es menor o igual que 0.05.

CALCULOS

Reemplazando cada par de valores por un signo más si el primer valor es mayor que el segundo ó por un signo menos si el primer valor es menor que el segundo, los 11 pares muestrales de beneficios proceden:

+++ - +++++ - +

Así, $x = 9$, de la tabla de la función de la distribución binomial $B(x; n, p) = \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ con $n=11$ y $p = q = 0.5$, la

probabilidad de que $x \geq 9$ es $1 - 0.9941 = 0.0059$.

DECISION

Dado que 0.0059 es menor que 0.05, la hipótesis nula debe rechazarse; aceptando la hipótesis alternativa, es decir, la política 1 produce beneficios más altos que la política 2.

Ejemplo 2. (Prueba de Wilcoxon).

Prueba de Wilcoxon de Orden con signo para muestras aparejadas.

Nuevamente considerando los datos anteriores sobre la simulación del vaso de almacenamiento de agua.

HIPOTESIS

$$H_0 : X_1 = X_2$$

$$H_1 : X_1 > X_2$$

ESTADISTICO DE LA PRUEBA.

a) Para una prueba de dos colas, utilizar:

$$T = \min(T^+, T^-),$$

en donde

T^+ = suma del orden de las diferencias positivas.

T^- = suma del orden de las diferencias negativas.

DECISION.

Como $T^- = 3$ y $T_0 = 14$, entonces $3 < 14$ se rechaza la hipótesis H_0 , aceptando la hipótesis alternativa, se obtiene la misma conclusión de la prueba del signo.

COMENTARIO.

Para decidir sobre la alternativa unilateral de que la distribución de las X_1 está defasada hacia la derecha de las X_2 , utilizar T^- , rechazando H_0 cuando $T^- \leq T_0$.

Análogamente si X_2 está hacia la derecha de X_1 , entonces se debe utilizar T^+ , rechazar H_0 si $T^+ \leq T_0$.

PRUEBA DE WILCOXON PARA MUESTRAS NO APAREJADAS

Escribir los datos del problema original en orden creciente con sus respectivas ordenes.

1	2	3	4	5	6	7
2.58,	3.62,	3.87,	3.95,	4.02,	4.13,	4.70.
2	2	2	1	2	2	2
8	9	10	11	12	13	14
4.21,	4.49,	5.10,	5.31,	5.20,	6.03,	6.27,
2	1	1	1	2	1	1
15	16	17	18	19	20	21
6.35,	6.75,	6.86,	6.90,	6.95,	7.15,	7.45
1	2	2	1	1	1	2
22						
7.96						
1						

<u>ORDEN</u>	<u>POLITICA 1</u>	<u>POLITICA 2</u>
1		2.58
2		3.68
3		3.87
4	3.95	
5		4.02
6		4.13
7		4.20
8		4.21
9	4.49	
10	5.10	
11	5.31	
12		5.70
13	6.03	
14	6.27	
15	6.35	
16		6.75
17		6.86
18	6.90	
19	6.95	
20	7.15	
21		7.45
22	7.96	
SUMA DE ORDEN W = 155		98

HIPOTESIS

$$H_0 : X_1 = X_2$$

$$H_1 : X_1 > X_2$$

Por otro lado

$$E(W) = \frac{n_1(n_1+1)}{2} + \frac{1}{2} n_1 n_2$$

$$VAR(W) = \frac{1}{2} n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)$$

$$Z = \frac{W - E(W)}{\sqrt{VAR(W)}} \quad (\text{Distribución normal})$$

en donde:

$$n_1 = 11, n_2 = 11 \quad \text{y} \quad W = 98 \quad (\text{Menor suma})$$

$$E(W) = \frac{11(11+1)}{2} + \frac{(11)(11)}{2} = 126.5$$

$$VAR(W) = \frac{1}{2} (11)(11)(11 + 11 + 1) = 231.92$$

$$Z = \frac{98 - 126.5}{\sqrt{231.92}} = -1.87$$

$$\therefore Z = -1.87$$

Con $\alpha = 0.05$, rechazar H_0 si $Z \leq -1.645$, entonces se tiene que $-1.87 \leq -1.645$, aceptar la alternativa H_1 . (Ver apéndice B).

Ejemplo 3. (Prueba de Kolmogorov-Smirnov)

Considere un registro de flujos máximos observados en una estación de aforo. Ajuste la función de distribución normal a los datos y utilice la prueba de Kolmogorov-Smirnov, para determinar la bondad de ajuste.

FECHA	FLUJO M ³ /S	FECHA	FLUJO M ³ /S
26-03-33	445	13-03-54	750
11-12-33	1410	27-02-55	603
17-11-34	475	08-04-56	880
13-03-35	978	03-01-57	485
18-12-36	461	15-12-58	812
15-12-37	362	23-12-59	1420
08-04-39	530	16-01-60	4090
04-02-40	350	26-01-61	376
21-02-41	1100	24-03-62	904
25-02-42	980	07-01-63	4120
20-12-43	575	21-12-63	1740
29-02-44	694	02-03-65	973
21-12-44	612	23-02-66	378
24-12-45	540	11-10-66	827
15-05-47	381	01-04-68	626
11-05-48	334	28-02-69	3170
11-05-49	670	13-01-20	2790
01-01-50	769	04-04-71	1130
30-12-50	1570	18-01-72	437
26-01-52	512	16-02-73	312
20-10-53	613		

Para poder aplicar el método de bondad de ajuste definimos las siguientes funciones y parámetros, esto es:

La función de distribución empírica $F_n(x)$ es:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_i \\ \frac{i}{n}, & x_i \leq x < x_{i+1} \\ 1, & x_n \leq x \end{cases}$$

Donde $F_0(x)$ es la función de distribución normal con parámetros $\mu = 1005\text{m}^3/\text{s}$ y $\sigma = 931\text{ m}^3/\text{s}$, entonces:

$$F_0(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

i	x_i	$F_n(x)$	$F_0(x)$	$D_n = F_n(x) - F_0(x) $
1	312	0.02	0.23	0.21
2	334	0.05	0.24	0.19
3	350	0.07	0.24	0.17
4	362	0.10	0.25	0.15
5	376	0.12	0.25	0.13
6	378	0.15	0.25	0.10
7	381	0.17	0.25	0.08
8	437	0.20	0.15	0.05
9	445	0.22	0.27	0.05
10	461	0.24	0.28	0.04
11	475	0.27	0.28	0.01
12	485	0.29	0.29	0.00
13	512	0.31	0.30	0.01
14	530	0.34	0.31	0.03
15	540	0.37	0.31	0.06
16	575	0.39	0.32	0.07
17	603	0.41	0.33	0.08
18	612	0.44	0.34	0.10
19	613	0.46	0.34	0.12
20	626	0.49	0.34	0.15
21	670	0.51	0.37	0.14
22	694	0.54	0.37	0.17
23	750	0.56	0.39	0.17
24	769	0.59	0.40	0.19
25	812	0.61	0.42	0.19
26	827	0.63	0.42	0.21
27	880	0.66	0.45	0.21
28	904	0.68	0.46	0.22
29	973	0.71	0.49	0.22
30	978	0.73	0.49	0.24
31	980	0.76	0.49	0.27
32	1100	0.78	0.54	0.24
33	1130	0.80	0.55	0.25
34	1410	0.83	0.67	0.16
35	1420	0.85	0.67	0.18
36	1570	0.88	0.73	0.15
37	1740	0.90	0.79	0.11
38	2790	0.93	0.97	0.04
39	3170	0.95	0.99	0.04
40	4090	0.98	0.99	0.02
41	4120	1.00	0.99	0.01

Cuando el flujo toma el valor de $x = 980$, $D_n = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F_0(x)| = 27$, considerando el nivel de significancia $\alpha = 0.05$, $w_{0.95} = 0.21$, entonces $0.27 > 0.21$, rechazando la hipótesis H_0 , es decir, los datos de flujo máximo no se ajustan a una curva normal σ de Gauss. (Consultar apéndice B).

CAPITULO 3

ALGUNOS METODOS CLASICOS PARA GENERACIÓN DE MUESTRAS SINTÉTICAS

En este capítulo se describen algunas técnicas clásicas para generación de muestras sintéticas o generación de registros hidrológicos sintéticos, la cuál en ocasiones es necesario estimar a priori la frecuencia con la que se presenta una condición de operación de una presa, la probabilidad de que no pueda entregarse en un momento dado el volúmen de agua de mandada, la magnitud y espaciamiento de fenómenos que pongan en peligro de inundación una zona o región, etc. En estos casos, sobre todo cuando el fenómeno natural es manejado a través de estructuras de control o sus consecuencias son simplemente prevenidas por medio de un sistema de predicción, es necesario simular el comportamiento de las diversas alternativas de políticas de operación o de sistemas de predicción. Por tal razón es conveniente generar una serie larga de registros, aún cuando con las mismas características que el histórico, que por su longitud pueden contener condiciones especiales que no han sido registradas en el pasado. A esta forma o tipo de series de datos simulados, se les llaman registros sintéticos o muestras sintéticas.

En dicho capítulo se hacen notar las siguientes secciones:

En la primera sección, se describen los conceptos básicos.

La segunda consta de algunos modelos clásicos para generación de muestras sintéticas, asimismo en la siguiente sección y en la última sección incluimos un ejemplo.

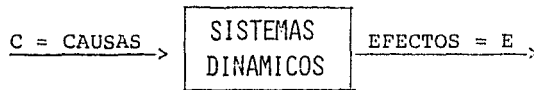
3.1 CONCEPTOS BÁSICOS.

Se le denomina registros sintéticos o muestras sintéticas, aquella que genera una serie larga de registros que, por su longitud pueden contener condiciones especiales que no han sido registradas en el pasado. Entonces, para tomar decisiones a futuro que sean objetivas, es importante una predicción eficiente. Por tal razón, se han desarrollado métodos de predicción los cuales por su enfoque pueden ser clasificados en: métodos de predicción basados en modelos estructurales y no estructurales (según Nelson (1973) y Trivedi (1975)).

Debido a que en México la recopilación sistemática y verídica de datos es un hábito poco extendido, lo cual hace difícil el empleo de modelos estructurales, en donde se requiere de varias variables, es conveniente utilizar el modelo no estructural. Esto es, por necesidad se tiene que recurrir al análisis de variables aisladas, para lo cual las técnicas de generación de muestras sintéticas tratadas aquí son las adecuadas a modelos no estructurales.

Los modelos estructurales tienen la característica de que explica la estructura del sistema, esto es, es un conjunto de funciones matemáticas que nos dan la relación causal de las variables que intervienen en el sistema.

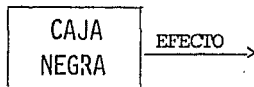
Esquemáticamente:



Es decir

$$E_t = C_E(x_1(t), \dots, x_n(t)), \text{ tal que } t = \text{tiempo.}$$

Por otro lado los modelos no estructurales no tratan de encontrar una explicación causal de la variable bajo estudio, solo tratan de ajustarse al comportamiento de la variable. Es decir, los valores de una variable se analizan de una manera aislada.



Esto es:

$$\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$$

Por otro lado, encontrar el modelo más adecuado para generar muestras sintéticas, depende del intervalo de tiempo de interés, es decir, en términos generales se pueden clasificar en anuales o estacionales, mensuales y diarias.

En este trabajo se hace la siguiente consideración de que la muestra histórica de la variable hidrológica o de la serie de

tiempo, es un registro del escurrimiento.

No hay que olvidar que cuando se elige un modelo de escurrimiento o flujos de agua superficial, deberá reproducir adecuadamente las características estadísticas más importantes del registro histórico o muestra histórica.

3.2 MODELOS CLÁSICOS.

Sea x_t una variable hidrológica o un valor de la serie de tiempo en el tiempo t , $f(t)$ una función determinística de t o componente determinista de t y ξ_t una variable aleatoria o componente probabilística en el tiempo t , en donde, las ξ_t son variables aleatorias normales distribuidas de manera idéntica e independiente con media $E(\xi_t) = 0$ y variancia $V(\xi_t) = \sigma_\xi^2$. El modelo básico para generar muestras sintéticas es el siguiente:

$$x_t = f(t) + \xi_t$$

La función $f(t)$ se puede estimar generalmente utilizando el método de análisis de regresión. Además:

$$\hat{\sigma}_\xi^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (x_j - \hat{x}_j)^2}{n - 2}$$

El modelo de Tomás y Fiering (1962) sirve para generar muestras sintéticas mensuales independientes.

Este método se aplica a datos de escurrimientos mensuales ya que se toma en cuenta la posible correlación entre datos o valores consecutivos. Por otro lado, los valores de escurrimientos mensuales que se disponen en México, tienen generalmente funciones de distribución asimétricas.

Considere la serie de tiempo $x_{i,j}$, en donde, j es el mes del año i , $f(i,j)$ es una componente determinística o función

determinística de i y j respectivamente y sea $g(i,j)$ la componente aleatoria o probabilística. Entonces la serie de tiempo, se puede escribir de la forma siguiente:

$$x_{i,j} = f(i,j) + g(i,j) \quad (1)$$

Haciendo uso de una ecuación recursiva, es decir, para simplificar la relación (1):

$$x_{i,j} = a_{0j} + a_{1j}x_{i,j-1} + a_{2j}x_{i,j-2} + \dots + a_{mj}x_{i,j-m} + \xi_{i,j} \quad (2)$$

en donde, las a_{nj} son los coeficientes, tal que, $n = 0, 1, 2, \dots, m$, dichos coeficientes se calculan por medio de regresión lineal. Además $\xi_{i,j}$ es el error que se comete en la estimación.

Cuando se trabaja con modelos de regresión lineal, es necesario utilizar el menor número de términos en (2), dando como resultado una descripción más adecuada a los valores de la serie de tiempo $x_{i,j}$. El dato de un mes depende únicamente del dato o valor del mes anterior, es decir, considerando $m=1$ de (2) resulta:

$$x_{i,j} = a_{0j} + a_{1j}x_{i,j-1} + \xi_{i,j} \quad (3)$$

La ecuación anterior, recibe el nombre de modelo Markoviano o de orden uno, debido al término $x_{i,j-1}$, los coeficientes de (3) son estimados en términos de los parámetros estadísticos,

correspondientes a cada uno de los meses. De acuerdo a los comentarios anteriores, el modelo (3), se transforma en el siguiente modelo de generación de muestras sintéticas.

$$x_{i,j} = \bar{x}_j + \frac{r_{j-1}s_j}{s_{j-1}} (x_{i,j-1} - \bar{x}_{j-1}) + \xi_{i,j} \quad (4)$$

en donde, x_{ij} es el valor o dato sintético correspondiente al año i en el mes j , \bar{x}_j es la media de los valores históricos del mes j , s_j es la desviación estándar de los valores históricos del mes j y r_{j-1} es el coeficiente de correlación cruzada de orden cero, entre los datos históricos correspondientes al mes $j-1$ con el mes j .

Suponga que los valores de la serie de tiempo $x_{i,j}$, tienen una distribución normal o de Gauss, entonces $\xi_{i,j}$ tiene una distribución normal con media cero y desviación estándar s'_j , definida por:

$$s'_j = s_j (1 - r_{j-1}^2)^{0.5} \quad (5)$$

Por medio del modelo de Thomás y Fiering, es posible reproducir las medias y las desviaciones estándar de cada mes, también el coeficiente de correlación cruzada de orden cero, entre cada mes y el que le precede o antecede.

Es conveniente conciderar registros de doce o más años para poder estimar los parámetros del modelo.

Thomás y Fiering desarrollaron modelos para el caso en que se tenían diferentes tipos de distribuciones de probabilidad, es decir, normal, lognormal y gamma. Esto se debe a que los datos de escurrimientos analizados generalmente son funciones de distribución asimétricas, como las antes mencionadas.

MODELO THOMAS Y FIERING CON DISTRIBUCIÓN NORMAL

Considerando las ecuaciones (4) y (5) para el caso que se tiene una distribución normal, se requiere utilizar números aleatorios normales $t_{i,j}$, con media cero y desviación estándar uno, definiendo el modelo como:

$$x_{ij} = \bar{x}_j + \frac{r_{j-1} s_j}{s_{j-1}} (x_{i,j-1} - \bar{x}_{j-1}) + t_{i,j} s_j (1-r_{j-1}^2)^{0.5}$$

Las variables del modelo, se interpretan de la misma manera como se expusieron anteriormente.

MODELO THOMAS Y FIERING CON DISTRIBUCIÓN LOGNORMAL

En este modelo se efectúan transformaciones necesarias que permiten manejar a las variables logarítmicas normales como normales y posteriormente emplear el modelo descrito anteriormente es decir:

$$q_{i,j} = \mu_{L_j} + \frac{r_{L_{j-1}} \sigma_{L_{j-1}}}{\sigma_{L_{j-1}}} (q_{i,j-1} - \mu_{L_{j-1}}) + t_{i,j} \sigma_{L_j} (1-r_{L_{j-1}}^2)^{0.5}$$

Para este problema, los valores de la muestra sintética, se pueden hallar por medio de la ecuación siguiente:

$$x_{i,j} = \exp(q_{i,j}) + a_{L_j}$$

en donde, $x_{i,j}$ representa el valor sintético correspondiente al año i en el mes j , $q_{i,j}$ es el logaritmo del valor o dato sintético de $(x_{i,j} - a_{L_j})$, μ_{L_j} , σ_{L_j} , a_{L_j} muestra los parámetros de la distribución lognormal, $t_{i,j}$ representa un número aleatorio con distribución normal con media cero y desviación estándar uno y $r_{L_{j-1}}$ es el coeficiente de correlación cruzada de orden cero de los logaritmos de los valores históricos, correspondientes al mes $j-1$ con los del mes j .

MODELO THOMAS Y FIERING CON DISTRIBUCIÓN GAMMA.

El tipo de modelo que se utiliza cuando los datos históricos tienen una distribución gamma es:

$$x_{i,j} = \bar{x}_j + \frac{r_{j-1} s_j}{s_{j-1}} (x_{i,j-1} - \bar{x}_{j-1}) + f_{i,j} s_j (1 - r_{j-1}^2)^{0.5}$$

Nuevamente, se repiten los mismos conceptos para las variables que se dieron para el modelo de muestras sintéticas con distribución normal, la variable $f_{i,j}$ representa un número aleatorio con distribución aproximadamente gamma con media cero, desviación estándar uno y el coeficiente de asimetría de los

datos o valores históricos correspondientes al mes j , puede estimarse mediante la ecuación siguiente:

$$f_{i,j} = \frac{2}{p_j} \left(1 + \frac{p_j t_{i,j}}{6} - \frac{p_j^2}{36} \right)^3 - \frac{2}{p_j}$$

tal que:

$$p_j = \frac{g_j - r_{j-2}^3 g_{j-1}}{(1 - r_{j-1}^2)^{1.5}}$$

En donde, $t_{i,j}$ es un número aleatorio con distribución normal de media cero y desviación estándar uno, g_j denota el coeficiente de asimetría de los valores históricos correspondientes al mes j y finalmente p_j es una variable auxiliar.

3.3 MODELO GONZÁLEZ VILLARREAL Y DOMÍNGUEZ.

Se desarrollará otro modelo propuesto por González Villarreal y Domínguez en el año de 1971, en donde, ellos trabajaron para el caso de muestras sintéticas mensuales independientes, considerando los casos siguientes: gamma, normal y lognormal. En este capítulo solo se estudiará el caso de la distribución gamma.

Dicho modelo considera que los escurrimientos sintéticos se representan por medio de una suma de variables aleatorias con funciones de distribución o probabilidad de la misma clase, en donde, los valores de los parámetros sean distintos. Como anteriormente, se ha mencionado, los parámetros de los valores históricos, es decir, la media, desviación estándar, correlaciones mensuales y la función de distribución deben ser reproducidas, esto es el significado esencial del modelo propuesto.

Se define el modelo general como:

$$Q_{i,j}^1 = x_{i,j} + x_{i,j+1} + z_{i,j}$$

en donde, $Q_{i,j}^1$ es el dato sintético del año i en el mes j , $x_{i,j}$, $x_{i,j+1}$ y $z_{i,j}$ son variables aleatorias, cuyas familias de

funciones de distribución son las mismas que $Q'_{i,j}$.

El modelo de generación de muestra sintética, cuando se tiene una distribución gamma es:

$$Q'_{i,j} = x_{i,j} + x_{i,j+1} + z_{i,j}$$

en donde, $Q'_{i,j}$ representa el valor sintético en el mes j del año i , teniendo una función de distribución gamma cuyos parámetros $(\alpha_j, 1, 0)$; $x_{i,j}$ y $x_{i,j+1}$ son variables aleatorias con distribución gamma y cuyos parámetros son $(c_j, 1, 0)$ y $(C_{j+1}, 1, 0)$, respectivamente, en donde, C_j y C_{j+1} se seleccionan de tal forma que se conserve, en los valores o datos sintéticos, el coeficiente de correlación cruzada de orden cero entre el mes j y el mes $j+1$; y, $z_{i,j}$ denota una variable aleatoria con distribución gamma y con parámetros $(f_j, 1, 0)$.

Si los datos sintéticos $Q_{i,j}$, representan una distribución gamma con parámetros $(\alpha_j, \beta_j, \delta_j)$, entonces la variable aleatoria es:

$$Q'_{i,j} = \frac{Q_{i,j} - \delta_j}{\beta_j}$$

teniendo distribución gamma con parámetros $(\alpha_j, 1, 0)$.

El modelo de generación de muestras sintéticas queda como:

$$\frac{Q_{i,j} - \delta_j}{\beta_j} = x_{i,j} + x_{i,j+1} z_{i,j}; \quad j = 1, \dots, 11$$

$$\frac{Q_{i,12} - \delta_{12}}{\beta_{12}} = x_{i,12} + x_{i+1,1} + z_{i,12}$$

ya que $i = 1, 2, \dots$, representa el número de años por generar.

De acuerdo a las propiedades de la función de distribución gamma, se tiene que:

$$c_j + c_{j+1} + f_j = \alpha_j; \quad j=1, \dots, 11$$

$$c_{12} + c_1 + f_{12} = \alpha_{12} \quad (6)$$

$$c_j \geq 0; \quad f_j \geq 0; \quad j=1, \dots, 12$$

De acuerdo a las ecuaciones anteriores es posible estimar c_j de acuerdo a:

$$c_j = r_{j-1} (\alpha_{j-1} \alpha_j)^{0.5}; \quad j=1, \dots, 12$$

en donde, r_{j-1} denota el coeficiente de correlación cruzada de orden cero entre los datos del mes $j-1$ y los del mes j , si se conocen los valores c_j , es posible determinar los f_j directamente del sistema de ecuaciones anterior. Si todos los f_j son no-negativos, se dá por concluido el cálculo de los parámetros.

Ahora, si los f_j son negativos, se tiene que considerar otro

método para ajustar los parámetros, es decir, el de modificar los valores de α_j de manera que f_j tome un valor igual a cero. En tal caso se reemplazan las variancias α_j por la relación siguiente:

$$\alpha_j' = \alpha_j + e_j$$

en donde, e_j representa una variable de error que se tratará de minimizar de manera que garantice que $c_j \geq 0$ y $f_j \geq 0$ para todo j . La función que realizará tal proceso está dado por:

$$T = \sum_{j=1}^{12} \left[1 - \frac{c_j}{r_{j-1} [(\alpha_{j-1} + e_{j-1})(\alpha_j + e_j)]^{0.5}} \right]^2 + K \sum_{j=1}^{12} \left[\frac{e_j}{\alpha_j} \right]^2$$

ya que K es una constante arbitraria que se utiliza para dar distintos pesos a las distorsiones. De acuerdo al uso de los errores calculados por el procedimiento anterior, es posible modificar los parámetros originales β_j y δ_j de la función de distribución gamma, de manera que se respeten la media y la variancia de los registros históricos. Por tal razón, los parámetros modificados se pueden escribir como:

$$\beta_j' = \beta_j \left(1 + \frac{e_j}{\alpha_j} \right)^{-0.5}$$

$$\delta_j' = \delta_j + \left(\alpha_j \beta_j - \alpha_j' \beta_j' \right)$$

y $(\alpha'_j, \beta'_j, \delta'_j)$ constituyen los nuevos parámetros de la distribución gamma que genera las muestras sintéticas. Con esto, el procedimiento original (cuando todas las $f_j \geq 0$) se repite con la seguridad de que al calcular las constantes c_j y las correspondientes f_j éstas serán no-negativas. No hay que olvidar que en el año 1883, Rippl estudió el análisis de curva de masa para examinar el almacenamiento requerido y para satisfacer cierta demanda, basándose en los registros históricos de los escurrimientos. Asimismo, Fiering en 1967 y Fiering y Jackson en 1971 hacen uso de los registros históricos.

Hazen en 1914 utilizó un método de análisis para obtener una estimación de la probabilidad de fallas asociadas con cualquier diseño o criterio operacional, pero no fue hasta que la computadora digital fue perfeccionada que su aplicación se hizo a gran escala y en forma práctica. Mas tarde Fiering en 1961; Hufschmidt y Fiering (1966); Fiering (1967); y Jackson en 1971 describieron las aplicaciones de este método al diseño de un sistema de recursos hidráulicos e indicaron su simplicidad en términos de interpretación y análisis de los resultados.

Otros modelos de generación de escurrimientos se deben a Mandelbrot y Wallis en 1969; Askew, Yeh y Hall en 1969 y uno modelo para el caso de multisitios desarrollado por Matalas en 1967. No hay que olvidar a Sulder en 1927.

Considerando ciertos comentarios acerca de los modelos expuestos

en la sección 3.2 y 3.3 de éste capítulo respectivamente, ambos métodos generan muestras sintéticas mensuales, pero cuando se tienen valores estacionales es semejante el método.

Cuando se dispone de datos diarios y anuales, se tiene un método de generación que reproduce las características importantes de este tipo de registros. La manera de lograr muestras sintéticas anuales, es sumar los valores mensuales generados.

El concepto de asimetría es muy importante cuando se escoge el modelo, de acuerdo a la función de distribución de los registros históricos, si éstos indican asimetría pequeña, es posible trabajar con una función de distribución normal, realizando posteriormente cualquier transformación lineal, sin alterar la función de distribución original.

El modelo de Tomás y Fiering es aplicable generalmente para determinados problemas en México, pero como todo tiene sus limitaciones e inconvenientes, por ejemplo, cuando la correlación entre los valores de meses consecutivos es importante, también se tiene el caso de la distribución lognormal, debe considerarse en cuenta que dicho modelo reproduce media, variancia, coeficiente de correlación y de asimetría de los logaritmos de los datos. Estos dos últimos parámetros, se pueden o no conservar al generar las muestras sintéticas.

Para el caso en que se trabaja con una distribución gamma, se

tiene inconsistencia en la transformación que debe realizarse al modificar las variables aleatorias normales a variables aleatorias con asimetría. Hay varios métodos que se han llevado a cabo al respecto, como el de Kirby que modificó la transformación de Wilson y Hilferty empleado por Thomas y Fiering, y encontró que la transformación utilizada por éstos últimos autores, es satisfactoria para valores del coeficiente de asimetría cercanos a 3.

Se ha notado que el método de mínimos cuadrados produce mejores resultados que el de ajuste de momentos, para estimar los parámetros de las diferentes distribuciones del modelo de Tomás y Fiering.

Al generar una secuencia de valores hidrológicos, utilizando dicho modelo, es necesario iniciar la secuencia con algún valor, cifra que afectará significativamente a los primeros valores de la muestra sintética. Por tal razón, es importante que estos primeros valores no se tomen en consideración en la evaluación del diseño. Un valor conveniente podría ser la media \bar{x} , en el caso de la distribución normal o de la gamma o μ_L para la distribución lognormal.

Si en la generación se obtiene algún valor o dato sintético negativo de $x_{i,j}$, se utilizará esta cifra, para obtener el dato sintético $x_{i,j+1}$, apartando el valor $x_{i,j}$, como dato para la simulación.

Ahora, el modelo de González Villarreal y Domínguez con distribución gamma, considera una transformación particular por medio de la cual es posible pasar de una función gamma a otra función gamma.

El método es aplicable en lugares, en donde, la función de distribución de los datos es muy asimétrica. Un inconveniente, en el supuesto caso de que fuera necesario distorsionar los parámetros de la distribución, es que se pueden introducir errores grandes para satisfacer las ecuaciones (6), ocasionando que no se respete el coeficiente de correlación.

Existen programas de computo para los modelos que se han desarrollado anteriormente, posteriormente se considera un ejemplo.

3.4 EJEMPLO.

Ejemplo 1. (Generación de muestras sintéticas utilizando el modelo de Thomás y Fiering).

La cuenca del río Fuerte es la más importante de la región hidrológica N^o.10, tanto por su extensión como por los volúmenes de escurrimiento que se generan en ella. Dicho río comienza en el estado de Durango, se interna rápidamente en Chihuahua, en donde recibe diversos afluentes, entre los que se encuentra el río Urique que transita por la Barranca del Cobre y que se une a él poco antes de entrar a Sinaloa por donde transita hasta desembocar en la bahía de Caracol en el Golfo de California.

La planeación del uso y del manejo de los recursos hidráulicos, la construcción de nuevos aprovechamientos, el control de avenidas y la predicción de sequías, son problemas que requieren tener tipificados perfectamente las características de los escurrimientos de la zona. Una cuestión importante es que en la mayoría de los casos es necesario contar con registros hidrológicos que cubran un periodo mayor que el de los datos históricos disponibles en la actualidad. Una manera de solucionar este problema es generando "muestras sintéticas", que conserven las principales características de los datos de los escurrimientos históricos.

Los datos se tomaron de la estación San Francisco, ésta estación se ubica sobre el colector principal del río Fuerte. Te niéndose datos correspondientes al período 1950 - 1973 y se necesita generar muestras sintéticas mensuales que simulen los escurrimientos para un periodo de 50 años.

Comentario: Los datos y resultados fueron obtenidos de la referencia [26].

01
 PARAMETROS ESTADISTICOS DE LOS VOLUMENES ESCURRIMOS
 ESTACION SAN FRANCISCO 1950-1973

	1	1	24	12														
1950	751.1	229.7	53.1	26.3	19.5	124.11153.4	478.6	357.2	137.7	33.9	27.9							
1951	43.2	29.3	24.1	17.5	11.5	18.7	327.7	528.3	173.2	33.5	28.3	168.1						
1952	45.7	21.7	113.5	21.2	12.2	121.21045.5	758.3	132.0	37.9	68.7	130.5							
1953	66.2	22.8	31.0	13.5	8.7	19.8	642.8	811.7	345.7	42.1	32.6	25.9						
1954	152.4	33.0	19.3	13.8	10.3	71.2	562.21239.5	517.6	372.1	42.6	29.1							
1955	923.9	52.4	34.0	17.6	11.6	13.8	368.31594.2	558.5	361.9	41.6	39.2							
1956	64.5	34.8	18.5	11.7	15.8	144.5	531.3	670.5	317.6	45.7	22.4	25.5						
1957	53.8	43.6	66.5	18.1	9.4	13.1	299.0	500.1	357.6	139.8	33.2	99.8						
1958	68.9	80.1	305.8	34.2	38.4	194.0	422.71028.81298.5	533.0	127.3	78.3								
1959	39.2	201.9	36.3	20.2	9.2	34.3	571.71520.6	317.5	419.2	61.3	327.3							
1960	897.0	148.5	54.3	25.0	12.5	13.0	595.81000.9	570.1	89.4	49.2	159.4							
1961	794.6	104.1	41.8	24.3	12.2	102.5	758.9	787.6	933.9	380.7	390.9	82.6						
1962	190.5	84.6	43.6	21.6	16.5	18.1	553.0	299.9	816.3	536.1	46.5	52.8						
1963	53.0	54.3	23.5	12.6	10.4	23.3	566.91455.1	772.8	176.7	55.3	106.0							
1964	87.5	46.5	45.5	26.7	29.0	73.7	475.71255.01011.0	121.3	40.5	113.6								
1965	52.0	132.8	58.8	17.9	9.4	17.8	395.6	544.3	961.7	96.3	38.4	501.3						
1966	159.1	289.3	72.2	27.9	17.7	142.9	960.03132.0	922.9	174.4	55.5	36.1							
1967	34.5	27.5	23.2	17.9	12.3	130.31101.81287.7	863.0	127.0	66.2	677.4								
1968	333.5	765.6	670.6	156.2	62.6	83.11564.61727.0	905.8	154.7	192.5	129.4								
1969	95.8	248.6	59.6	25.6	18.8	17.51072.7	421.8	303.7	103.1	45.1	187.0							
1970	108.9	47.9	105.4	31.8	17.7	11.2	423.01225.3	889.7	203.2	53.7	44.6							
1971	26.5	19.2	18.3	10.9	8.5	150.7	767.51376.2	328.81180.4	297.5	140.3								
1972	284.6	43.9	32.3	19.9	23.5	243.7	711.71024.71364.3	604.4	739.2	201.1								
1973	576.61116.4	203.6	54.7	37.4	76.2	381.51607.7	953.7	85.1	22.4	15.4								

EJEMPLO DE DATOS DE ENTRADA AL PROGRAMA 'DATOS'

• EJEMPLO DE RESULTADOS DEL PROGRAMA 'MODIFIER'

GENERACION DE MUESTRA SINTETICA
 MODELO DE THOMAS-FIERING

ESTACION SAN FRANCISCO

PARAMETROS ESTADISTICOS UTILIZADOS POR EL MODELO
 MEDIA DESVIACION ESTANDAR COEF. DE CORRELACION ASIM.

151.55	213.45	-.28440	1.35
123.84	240.10	.27680	2.77
79.34	126.71	.62280	3.31
26.93	218.48	.94780	2.89
17.80	139.23	.87910	2.18
78.67	103.51	.24240	.81
673.74	335.47	.29110	1.07
1166.92	859.68	.18540	1.46
663.28	364.37	.29460	.37
225.34	236.24	.20340	2.61
75.86	95.39	.54990	2.89
145.06	199.73	.05360	2.17

NUMEROS ALEATORIOS CON DISTRIBUCION NORMAL

2.02	-1.27	-1.86	-1.13	-1.35	1.69	-.81	-1.19	-1.07	-.32	.15	.95
1.70	1.28	.69	.79	.16	1.06	-.35	2.21	1.90	.51	-1.60	.19
.03	.56	.24	-2.52	-2.26	-1.88	-.47	-2.89	-.31	2.19	-.86	1.12
.21	-.28	.51	-1.18	-.57	-.35	-.72	.13	1.42	.88	-1.03	1.10
-.24	-.51	-.60	.72	.53	-.77	-.47	.37	.75	1.29	.11	-1.10
-1.03	.37	-.45	.26	.84	.00	-1.67	.39	.37	-.51	.45	.64
-1.09	.58	-1.51	-.54	-.51	2.14	.28	-.26	-.31	-.92	.90	-.18
1.26	1.20	-.37	-.27	1.74	-1.11	-.27	1.04	.07	-1.48	.37	2.35
-1.27	-.82	-.63	-1.52	.49	2.26	-.25	-1.33	.55	-.20	.32	.87
.54	-.72	.67	-.20	-.05	.97	.16	.91	-.59	-.41	.05	-.32
-.87	.02	-.97	.30	1.04	-.33	-1.17	.13	-1.46	.15	1.95	-.33
-1.35	.38	.23	.02	1.87	1.83	-.65	-.71	-1.28	.70	.57	1.16
-.59	-.69	.59	.49	-.76	-.52	-.08	.17	1.06	1.10	-.09	-.22
-.02	.37	1.51	.05	1.30	.07	-.62	-1.09	-1.18	-.34	2.30	.59
-.37	.52	-1.62	.23	.95	.00	1.94	.65	-.93	1.85	-1.57	.33
.17	1.03	.68	.66	-.97	.72	.34	-.56	-1.59	.33	.04	.52
-2.07	-2.06	.64	1.25	-.50	-2.17	-1.07	1.75	-.63	-.60	-.25	.50
-.24	1.00	.52	-.55	-1.26	.68	.29	2.67	.91	.33	.53	-.20
.26	.34	.39	1.38	1.81	.28	1.50	-.83	-.27	-1.03	-1.10	1.11
-.46	-.56	2.43	-.73	-1.46	-.14	-.08	-1.43	-.17	-.23	.37	.15
-.38	.17	-.70	1.31	.17	-.34	2.27	1.03	-.07	-.16	-1.33	1.25
-.98	1.27	-.83	-1.30	1.30	.50	1.07	-.19	-.10	-1.08	-.49	-.15
-.08	.64	.52	1.94	-.30	1.23	-.42	.67	1.49	2.19	.87	-.57
-1.81	-.32	.80	.32	.84	-.59	.50	.91	-2.17	-1.33	.02	1.43
1.02	-.19	-.56	.55	-1.02	-.42	.69	.14	-.47	-.07	-.65	.69
.17	-.26	1.37	1.25	-1.40	-.52	-.41	-.72	.49	.66	-.70	-.64
.88	-.56	.54	-1.92	1.86	1.04	-1.55	-.88	-1.69	.40	-1.66	-.13
.84	-.88	-2.67	.00	.29	-1.99	.75	-.65	-.26	1.22	-1.75	-.02
-1.11	-1.99	-1.58	.58	1.99	1.10	.22	.71	1.23	-.67	.35	1.17
-1.01	-.67	.47	.74	-.13	-.32	-.03	1.51	-1.77	-2.24	.19	-.02

-1.75	-1.81	-1.10	-1.74	-1.46	-1.80	.07	-.88	.58	-.19	1.27	1.13
-.84	.89	1.46	-1.16	-1.22	1.26	-.45	2.74	.07	.93	-.17	-.26
.02	-1.75	.64	-.54	-1.21	-.77	-1.35	-.32	-.84	-.65	.22	-2.36
1.04	-.72	-1.00	1.26	-1.64	-.61	-.04	-.33	-1.52	-.06	-.56	-1.15
1.50	.39	-2.71	-1.15	-.53	-.38	.98	-1.18	-.31	-.24	.21	-.13
.56	2.50	1.27	-.35	.32	-.97	1.57	.47	.73	1.72	.70	-.55
-.41	.90	1.25	.37	-.62	2.18	.19	-1.18	-1.19	-2.33	-.33	1.17
-1.74	-1.20	.07	.89	.50	1.62	.94	1.26	-.00	-1.04	-.12	1.38
-.22	.92	-.19	-1.34	-.73	-1.04	-1.30	1.66	.48	1.37	-.96	.91
-.17	1.25	.61	-1.49	-1.00	.00	-.23	-1.60	.08	-1.59	-1.77	-.06
-.71	1.11	1.67	-1.60	-.04	-.09	.15	2.19	-.42	-.43	-.73	-1.16
-1.28	-.27	.48	-.12	.41	-2.65	1.57	-.29	-.64	-2.36	-.22	-.46
.08	-.33	-.72	.37	1.59	-.39	-1.67	-2.28	-.85	-1.60	-1.17	-1.09
-.46	-1.19	-.42	-1.90	-.23	.49	.09	2.04	1.31	.54	-1.57	-1.08
-.72	-.23	-1.47	-.25	-.14	-.93	-1.17	.21	.87	.38	2.16	-.19
.54	.46	-1.30	-.85	.36	-1.24	.12	-.18	-.79	.36	-.26	1.14
-.15	-.22	-.48	.12	1.12	-1.99	.55	-.03	.10	.13	-1.10	-1.06
-1.90	-.17	-1.98	.76	-.46	-.76	.49	.82	1.55	-.57	1.04	.01
1.46	.21	-1.71	.50	-.32	.22	.22	-.37	-.16	-.01	.92	-2.96
-.93	-1.32	-1.12	.73	.91	-1.31	-.85	-.44	-.53	-.52	-.17	-.34

PARAMETROS DE LA FUNCION DE DISTRIBUCION LOGNORMAL

PRIMERO	SEGUNDO	TERCERO	COEF. CORR. LOG
6.1374	.4070	-351.2802	-.3514
5.5084	.6828	-187.6880	.3546
4.7022	.7559	-67.2824	.6919
5.0681	.8214	-195.6712	.9706
5.2118	.5855	-199.9216	.9105
5.9393	.2594	-313.6024	.2508
6.8293	.3337	-303.7670	.3071
7.1846	.4340	-292.2340	.1942
7.9886	.1223	-2305.9320	.3164
5.7818	.5533	-152.6576	.2388
4.5416	.7002	-44.0504	.6015
5.5774	.5637	-158.4298	.0686

MODELO DE GENERACION DE MUESTRAS SINTETICAS (THOMAS-FIERING) PARA DISTRIBUCION LOGNOR.

DATOS SINTETICOS GENERADOS

	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC	ANUAL
1	151.55	-83.09	-46.15	-172.22	-159.54	-66.66	356.56	421.74	198.88	64.89	48.00	238.62	952.58
2	587.98	182.00	142.30	216.82	163.09	245.85	633.38	3024.08	1584.56	479.59	-5.28	16.65	7271.02
3	109.66	165.45	83.37	-150.48	-144.03	-121.75	334.55	62.25	331.03	721.54	26.44	216.95	1634.98
4	161.63	6.59	76.66	-99.09	-79.89	-5.89	381.27	954.08	1176.34	501.77	13.73	177.09	3264.29
5	72.79	.14	-2.31	-31.77	2.02	49.35	479.47	1158.39	935.88	579.13	85.30	127.64	3456.04
6	-45.28	212.37	29.80	-27.42	14.80	90.71	247.23	976.75	788.74	110.85	75.41	233.11	2687.07
7	-49.13	272.51	-18.75	-133.54	-110.79	43.16	687.64	937.36	521.03	36.03	102.95	135.95	2424.41
8	426.42	203.34	34.36	-68.42	1.18	35.67	516.59	1650.41	729.50	2.68	52.32	632.82	4216.87
9	-62.04	5.48	-3.13	-152.71	-120.39	31.46	523.21	447.57	742.65	153.75	70.32	270.43	1906.50
10	238.38	-52.50	72.23	-27.50	-10.44	112.84	706.04	1703.20	501.86	91.77	45.12	53.12	3434.11
11	-28.47	121.47	-6.69	-74.50	-23.92	46.56	314.54	702.95	152.02	118.36	291.27	260.32	2073.90

12	-78.03	240.22	83.79	17.97	94.13	244.53	545.98	669.46	176.18	214.34	99.03	391.54	2709.34
13	24.69	-6.68	89.50	87.81	34.92	82.89	808.91	1427.87	1051.37	543.86	71.34	96.35	3785.82
14	107.41	126.13	265.50	178.97	212.25	216.22	539.47	508.21	184.87	69.67	349.99	547.83	3355.59
15	64.31	178.17	-26.29	-109.34	-62.39	23.82	1363.14	1903.50	405.60	666.29	-2.35	36.73	4381.31
16	140.39	376.92	157.31	298.74	105.58	199.82	827.63	851.60	111.67	137.40	49.11	167.27	3217.03
17	-149.68	-79.63	57.98	171.87	105.74	55.27	345.50	274.68	797.86	46.11	24.32	116.53	1268.86
18	70.49	307.09	142.18	-7.30	-28.31	83.70	726.19	3089.76	1173.99	349.35	103.64	138.87	6943.79
19	166.87	98.96	86.34	284.17	275.58	289.87	1421.54	729.20	533.70	26.84	-6.87	107.62	4188.91
20	32.72	4.57	486.01	152.57	54.95	114.37	431.73	451.07	492.51	113.89	69.97	143.98	2754.27
21	48.02	111.98	4.97	56.12	58.45	166.14	1684.55	2455.43	737.37	163.17	-6.53	130.54	5547.24
22	-38.32	509.97	25.20	-131.18	-81.87	21.51	952.66	1057.33	612.88	27.12	12.27	22.85	3032.33
23	90.36	193.23	121.39	556.89	315.48	343.41	859.47	1483.32	1274.77	1260.61	217.06	112.88	6568.13
24	-128.54	122.22	144.67	119.03	131.44	138.28	844.75	1814.55	23.36	-37.56	25.43	275.34	3472.97
25	364.66	-19.20	-3.64	-49.70	-66.21	5.49	787.84	1267.84	497.79	130.49	14.26	119.72	3800.86
26	146.91	12.93	175.87	451.47	198.14	176.68	575.60	679.54	766.48	334.99	21.75	-4.62	3559.76
27	297.40	-46.69	62.17	-139.20	-81.96	41.11	244.90	463.27	27.77	131.06	-14.77	-29.91	958.15
28	282.99	-54.77	-54.19	-163.56	-136.71	-114.36	653.34	740.68	511.05	424.28	-10.03	-10.77	2068.13
29	-62.88	-96.28	-42.93	-123.67	-59.60	69.64	692.97	1540.22	1169.88	136.46	71.10	336.68	3631.58
30	-35.30	14.21	74.24	101.04	77.73	119.42	682.65	2211.32	161.84	-75.03	25.32	56.59	3394.00
31	-125.23	-69.55	9.59	-117.36	-94.51	-35.16	551.70	498.44	785.81	161.05	175.82	517.83	2369.63
32	-8.86	331.92	345.75	19.42	-9.37	127.22	534.99	3653.03	849.67	430.45	55.61	73.18	6403.03
33	112.86	-107.43	43.95	-79.65	-75.64	-15.75	248.35	859.79	369.61	41.26	49.41	-80.55	1105.44
34	322.59	-62.97	-25.84	-34.59	-52.96	11.11	563.74	841.97	128.02	86.53	14.58	-46.10	1746.86
35	473.41	37.78	-51.67	-177.23	-161.54	-119.98	718.80	560.55	465.69	109.62	57.59	90.97	2004.00
36	228.74	883.50	415.19	195.79	158.09	134.11	1314.86	1722.81	594.72	885.96	171.21	141.93	7238.91
37	43.46	395.19	289.13	273.21	155.66	312.01	852.85	1056.20	279.75	-73.33	4.94	160.81	3642.70
38	-120.60	-14.79	33.39	54.01	69.08	213.05	1086.71	2332.51	475.14	20.45	27.51	-270.89	4447.25
39	80.48	275.44	55.98	-117.70	-98.73	-46.76	239.85	1937.77	896.94	598.33	18.67	151.65	3791.11
40	84.30	379.84	168.52	-79.20	-71.38	14.90	514.40	365.41	557.50	-17.03	-22.48	-45.14	1849.61
41	-15.20	417.12	440.90	-1.36	9.79	82.76	881.68	3055.53	643.12	106.42	9.22	-52.54	5377.45
42	-85.34	101.01	96.82	3.40	-27.37	-2.21	1144.55	1115.81	431.78	-68.03	7.47	-6.78	2767.25
43	116.94	10.87	-6.27	-69.12	-4.13	59.37	230.00	130.62	192.23	-42.00	-13.45	-77.77	527.78
44	16.09	-55.65	-3.38	-161.44	-139.55	-56.70	534.37	2667.45	1299.59	423.82	-5.55	-5.37	4513.89
45	-12.66	67.62	-27.85	-132.39	-104.82	-50.31	258.79	899.42	947.38	302.70	407.95	364.80	2920.63
46	242.47	98.58	-20.76	-145.50	-113.02	-68.03	531.47	895.92	358.41	187.20	35.74	246.08	2240.56
47	91.69	319.70	7.61	-68.36	-15.75	-6.77	727.17	1078.01	681.34	201.66	1.62	-56.11	2672.20
48	-145.38	169.17	-35.82	-98.53	-77.63	-16.75	697.92	1624.66	1317.52	171.27	145.67	210.21	3962.30
49	500.00	9.43	-37.17	-114.91	-90.14	2.15	631.30	853.66	560.34	156.59	128.86	-78.07	2522.04

MEDIA = 96.08 116.74 80.61 1.42 .27 65.07 653.08 1275.35 613.65 226.06 65.25 141.02 3333.79
 EST. EST. = 172.72 183.99 129.61 162.49 115.71 108.45 316.79 875.33 380.09 262.77 70.50 161.87 1616.75
 SINESTRIA = 92E100 17E101 16E101 14E101 85E100 58E100 12E101 12E101 51E100 15E101 21E101 97E100 78E100
 COEF CORR = -.05 .53 .55 .94 .90 .33 .34 .49 .55 .19 .53 -.02

DATA GENERADOS ORDENADOS DE MAYOR A MENOR

	EHE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC	ANUAL	
1	980	587.98	883.50	488.01	555.89	315.60	343.44	1684.55	3869.76	1584.54	1200.61	607.75	632.82	7271.02
2	961	500.00	509.97	440.90	451.47	295.58	312.01	1421.54	3653.03	1317.52	885.96	349.38	547.83	7236.91
3	941	473.41	417.12	415.19	273.21	212.25	269.87	1363.14	3055.53	1299.59	721.54	291.27	517.83	6943.77
4	922	426.42	379.84	345.75	266.17	198.14	245.85	1314.86	3024.08	1274.77	606.27	217.06	371.54	6568.13
5	902	364.66	331.92	285.50	216.82	163.09	244.53	1144.55	2667.45	1193.90	570.33	175.82	364.80	6193.03
6	882	322.59	307.09	280.13	208.76	158.09	216.22	1086.71	2455.48	1176.34	571.12	171.21	336.68	5547.24
7	863	297.40	295.19	199.87	196.99	155.66	213.05	952.66	2332.51	1169.88	543.86	145.67	275.34	5377.45

8	.813	282.89	275.41	168.52	195.79	131.44	199.82	852.65	2211.32	1051.37	501.77	120.86	270.88	4513.68
7	.824	242.47	272.51	159.41	171.89	185.74	176.69	644.75	1593.50	784.72	479.59	108.64	270.43	4437.25
1	.804	238.33	270.92	144.69	152.57	165.58	138.28	825.03	1937.77	947.30	430.45	102.95	260.32	4101.31
11	.794	223.74	240.72	142.30	119.03	94.13	134.11	789.84	1814.55	935.88	424.28	79.03	246.08	4214.87
12	.765	166.87	212.37	143.18	101.04	77.73	127.22	727.17	1722.81	876.84	423.02	85.30	238.82	4108.91
	.745	161.63	203.34	121.37	69.61	69.08	119.42	728.40	1703.20	849.49	340.36	75.41	233.11	3982.30
	.725	151.55	193.23	96.82	56.12	58.40	114.37	718.60	1859.41	785.81	334.77	71.34	216.75	3701.11
15	.704	146.71	182.09	93.99	54.61	54.95	112.84	706.04	1824.66	769.74	307.70	71.70	210.21	3585.52
	.684	140.35	178.19	65.34	19.42	34.92	106.14	697.82	1540.22	766.48	214.34	70.32	177.09	3432.70
	.667	116.84	157.17	83.37	17.97	27.37	90.71	672.99	1493.32	742.85	201.64	67.97	167.27	3411.58
18	.647	112.88	165.45	80.50	3.40	14.89	83.78	687.44	1299.84	737.39	187.20	57.57	161.65	3359.76
19	.627	107.68	126.13	76.66	-1.36	9.79	82.83	681.68	1158.39	729.50	171.27	55.61	160.61	3472.87
	.608	107.41	122.22	74.24	-9.30	2.02	82.76	657.49	1127.89	681.54	161.05	52.32	143.98	3156.24
	.588	91.69	121.47	72.23	-27.42	1.18	89.64	653.34	1115.01	643.12	160.17	47.44	141.93	3434.11
22	.569	90.36	111.98	62.17	-27.50	-4.13	59.87	652.65	1097.03	612.88	156.59	49.11	138.87	3384.00
	.547	64.30	101.01	57.96	-31.77	-9.39	55.57	633.38	1076.01	560.34	151.75	48.00	135.95	3355.58
	.529	80.48	98.86	55.98	-34.59	-10.44	49.35	631.73	1058.20	557.50	138.49	45.12	130.54	3284.29
25	.510	72.79	98.58	43.95	-49.90	-15.75	46.56	631.30	976.75	533.70	137.48	35.74	127.64	3217.03
24	.490	70.49	67.62	34.36	-68.36	-23.92	43.16	608.81	954.08	521.03	136.46	30.43	118.72	3032.33
	.471	64.31	37.78	33.30	-68.42	-20.31	41.11	575.60	937.36	511.05	131.06	27.51	116.53	3000.66
	.451	48.02	31.90	29.80	-69.12	-34.95	35.67	563.74	920.20	501.86	119.36	26.44	112.88	2920.63
29	.431	43.46	14.21	25.20	-74.50	-52.96	31.46	551.90	902.95	497.70	113.80	25.43	109.82	2767.25
	.412	32.72	12.93	9.58	-79.20	-59.60	23.92	545.98	899.42	492.51	110.85	25.32	96.35	2754.27
	.392	24.68	10.87	7.61	-79.05	-62.39	21.51	539.49	895.92	475.14	109.62	24.32	90.97	2709.36
32	.373	16.09	9.43	4.99	-82.47	-66.21	14.90	534.99	853.66	465.69	106.42	21.75	73.18	2687.07
31	.353	-8.86	6.59	-2.31	-98.53	-71.38	11.11	534.37	851.60	431.78	91.77	18.67	56.59	2672.20
2	.333	-12.66	5.48	-3.13	-97.07	-75.64	5.49	531.47	841.97	413.27	86.53	14.59	53.12	2622.04
33	.314	-15.20	4.57	-3.38	-109.34	-77.63	2.15	523.21	740.88	405.60	67.07	14.26	36.73	2424.41
34	.294	-28.47	1.14	-3.64	-114.91	-79.89	2.15	516.59	679.81	358.41	64.89	13.73	32.76	2369.83
3	.275	-35.30	-6.48	-6.27	-117.36	-81.89	-2.21	514.40	679.54	331.03	60.69	12.27	22.85	2248.66
3	.255	-39.32	-14.79	-6.67	-117.70	-81.96	-5.89	479.47	669.46	309.01	46.11	9.67	16.65	2073.90
39	.235	-45.28	-19.20	-18.75	-123.69	-90.14	-6.79	381.27	659.79	299.86	41.26	9.22	-4.62	2068.13
40	.216	-47.61	-44.69	-20.76	-131.18	-94.51	-15.75	357.44	608.44	279.75	36.03	4.94	-5.37	2004.00
4	.196	-49.13	-51.89	-25.84	-132.39	-98.73	-16.75	356.56	560.55	193.88	29.12	1.62	-6.78	1906.58
42	.176	-62.04	-52.50	-26.29	-133.54	-104.62	-35.16	345.50	528.21	152.23	26.84	-2.35	-10.77	1847.64
43	.157	-62.88	-54.77	-27.68	-139.20	-110.77	-46.76	334.55	463.27	184.89	20.45	-5.28	-29.91	1746.66
4	.137	-78.03	-55.65	-27.85	-145.50	-113.02	-50.31	314.54	453.07	176.18	2.49	-5.55	-45.11	1634.98
4	.118	-85.34	-62.97	-35.82	-150.48	-120.39	-56.70	298.79	447.57	161.84	-17.03	-6.53	-46.10	1269.86
46	.098	-120.60	-69.55	-37.17	-152.71	-136.71	-65.66	248.35	421.74	152.02	-37.56	-8.87	-52.54	1105.44
4	.078	-125.23	-79.63	-42.93	-161.44	-139.55	-68.03	242.23	365.41	128.02	-42.00	-10.03	-56.11	950.15
4	.057	-128.54	-83.09	-46.15	-163.56	-144.03	-114.36	244.90	274.68	111.67	-69.03	-13.45	-77.77	852.58
49	.039	-145.38	-96.28	-51.67	-172.22	-159.54	-119.98	238.85	130.82	27.79	-73.33	-14.77	-78.07	527.70
50	.020	-149.68	-107.43	-54.19	-177.23	-161.54	-121.75	230.00	62.25	23.36	-75.03	-22.48	-80.55	0.00

CAPITULO 4

GENERACIÓN DE MUESTRAS SINTÉTICAS

MÉTODOS NO-CLÁSICOS

Al hablar del uso de algún modelo de generación de muestras sintéticas para generar escurrimientos, hablamos de una herramienta poderosa en el diseño y análisis de sistemas de recursos ó aprovechamientos hidráulicos. En general (planeación, construcción y desarrollo) representa un campo de aplicación para el enfoque y las técnicas de la ingeniería de sistemas por el carácter multipropósito (suministro de agua industrial, municipal, agrícola, navegación, hidroelectricidad, control de inundaciones, etc.) y multiobjetivo (desarrollo económico regional, protección del ambiente, maximización del bienestar social, etc.) del sector hidráulico.

Considerando incertidumbre en la secuencia exacta del escurrimiento fluvial para años futuros, se debe trazar algún modelo de generación de muestras sintéticas que muestren las probables variaciones de escurrimientos y que conserven los principales parámetros estadísticos generados, se llaman operacionales ó sintéticos para distinguirlos de los escurrimientos históricos. El área ha sido llamada hidrología operacional, y ultimamente se le conoce también como hidrología estocástica.

Algún modelo de generación de muestras sintéticas no pretende desplazar la experiencia de hidrólogos, sino de completar y apoyar los resultados y herramientas ya clásicos de esta materia.

En ciertos casos de hidrología, es necesario enfocar el problema de predicción desde un punto de vista no estructural, este no trata de encontrar una explicación causal de la variable bajo estudio, se puede decir que solo tratan de ajustarse al comportamiento de la variable. Esto es, los valores de una variable se analizan de una manera aislada. La mayoría de los modelos para generar muestras sintéticas pertenecen al enfoque no-estructural que serán analizados en este capítulo.

4.1 SERIE DE TIEMPO Y PROCESO ESTOCÁSTICO.

En hidrología se tiene un conjunto finito de observaciones en el tiempo, de la variable bajo estudio, se trata de una serie de tiempo. Una serie de tiempo o serie cronológica es un conjunto finito de observaciones hechas a intervalos iguales de tiempo de una cierta variable bajo estudio. Suponga que se tiene una serie de tiempo como parte de una realización de un proceso estocástico. Dicho proceso se define como una sucesión de variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio de probabilidad.

El objetivo teniendo como base a la serie de tiempo es un modelo estocástico de entre una clase de modelos, que sea lo más

simple posible pero sin perder la representatividad de la serie.

La base en el estudio de series de tiempo es suponer, que el conjunto de observaciones, es una realización de variables aleatorias distribuidas conjuntamente.

Esto es, la secuencia de observaciones z_1, \dots, z_n formada a espacios iguales en tiempo (discreta), se supone extraída de la distribución de probabilidad, es decir:

$$P_1, \dots, N (z_1, \dots, z_N).$$

El objetivo, es usar esta distribución conjunta para inferir observaciones futuras, por ejemplo:

$$P_{T+1|1, \dots, T} (z_{T+1} | z_1, \dots, z_T)$$

Conocida esta relación permitirá usar z_1, \dots, z_T para hacer proposiciones sobre el posible resultado de z_{T+1} .

En la vida práctica este camino es muy complicado y en su lugar se trata de establecer el mecanismo que genera las observaciones, y a partir de éste, calcular la distribución condicional de observaciones futuras.

La suposición fundamental para poder pronosticar en base a la historia, es que ésta se comparta como lo ha hecho en el pasado, aunque no necesariamente igual, sino con ciertos valores promedio o esperados que sean iguales.

Sin esta suposición este enfoque no tendría sentido. En otras palabras, lo que se necesita es que la estructura de probabilidad de la serie sea invariante con respecto al tiempo t , esto es:

$$P(z_{t_1}, \dots, z_{t_k}) = P(z_{t_1+m}, \dots, z_{t_k+m}) \quad -(1)$$

en donde t_1, \dots, t_k , siendo m y K enteros. A esta condición se le conoce como estacionaridad estricta.

Algo más débil que puede pedirse, es que la media de las observaciones sea independiente de t y que la covariancia entre z_t y z_{t+j} depende solo de j es decir:

$$E[z_t] = \mu \quad -(2)$$

$$E[(z_t - \mu)(z_{t+j} - \mu)] = \gamma_j$$

A estas condiciones se les conoce como estacionaridad débil de orden 2, (es decir, hasta el segundo momento es independiente de t).

La estacionaridad estricta implica débil, esto es, (1) implica (2) ya que si $K=1$ en (1) se obtiene:

$$P(z_t) = P(z_{t+m})$$

en donde, la densidad de z_t no depende de t , es decir:

$$P(z_t) = p(z)$$

Por tanto

$$E[z_t] = \int z p(z) dz = \mu \quad \text{para toda } t.$$

Para el caso de las covarancias, de (1) con $t_1=t$, $t_2=t-j$ y $m=k$ resulta:

$$P(z_t, z_{t-j}) = P(z_{t+k}, z_{t-j+k})$$

Por lo tanto la densidad conjunta solo depende de la diferencia de sus índices, en este caso j , esto implica que:

$$\text{COV}(z_t, z_{t-j}) = \text{COV}(z_{t+k}, z_{t-j+k}) = \gamma_j$$

con $\text{VAR}(z_t) = \gamma_0$.

Por otro lado, para el caso en que se supone que $p(z_{t_1}, \dots, z_{t_k})$ es la distribución normal multivariada, la estacionariedad débil implicará la fuerte, en otros casos no necesariamente es cierto.

4.2 CLASIFICACIÓN DE SERIES DE TIEMPO.

En la rama de la hidrología las series de tiempo se pueden clasificar de la siguiente manera: series de tiempo univariadas en algún sitio específico, es decir, son series que contienen escurrimientos anuales o mensuales, registrados en una estación de aforo. Otro tipo de series son las llamadas

multivariadas en diversos sitios ó en un solo sitio pero de diversas cualidades, por ejemplo los escurrimientos anuales medidos en varios puntos de aforo o todos ellos juntos o algunos otros en una sola estación de aforo.

Además es necesario saber el intervalo de tiempo con el cuál se va a trabajar la serie de tiempo. Desde un punto de vista práctico, las series pueden ser:

- 1) Series de tiempo hidrológicas continuas, en donde, hay un registro constante de datos perteneciente a la serie y el intervalo de tiempo puede pensarse como cero.
- 2) Series de tiempo hidrológicas con intervalo de tiempo que se refiere a una fracción del día. Estas tienen intervalos horarios sin exceder a las 24 horas, representan los ciclos anuales y diarios en sus parámetros estadísticos básicos, considerando las variaciones aleatorias.
- 3) Series de tiempo hidrológicas con intervalo de tiempo aludiendo a una fracción del año. Es decir, tienen intervalos de tiempo diario, semanal, mensual, estacional, etc. Ellas contienen los ciclos anuales, además tomando en cuenta las variaciones aleatorias.
- 4) Series de tiempo hidrológicas anuales, se refiere a un intervalo de tiempo que es anual y las cuales por la integración sobre el año, no existen ciclos.

Cuando se trabajan series de tiempo de la forma univariada, por lo general se explican por medio de la estimación de sus parámetros estadísticos, es decir, la media, variancia, coeficiente de asimetría, función de distribución de probabilidad y la estructura de dependencia en el tiempo.

Por otro lado, las series de tiempo se representan por componentes cuyas tendencias de año en año y cambio determinísticos, cambios cíclicos o periódicos diarios y anuales, los cambios cuasi periódicos producidos por efectos de la marea en las series de tiempo y los componentes que representan las variaciones estocásticas o aleatorias.

Teniendo en cuenta la inconsistencia (errores sistemáticos) y además la falta de homogeneidad (cambios en la naturaleza provocados por el hombre o por causas naturales de la forma eruptiva, evolutiva o repentina), son las principales razones de las tendencias de año a año y de los cambios determinísticos anteriormente mencionados. Para resolver adecuadamente las características de las series de tiempo, la inconsistencia y la falta de homogeneidad debe ser removidos.

No hay que olvidar que los ciclos astronómicos causan las periodicidades y cuasi periodicidades en los parámetros estadísticos cambian periódicamente durante el año.

Cuando se habla del concepto de aleatoriedad en las series de

tiempo hidrológicas, se presenta por la unión de diversas con secuencias como son: turbulencia, conversión de calor, procesos termodinámicos aleatorios y otros muchos procesos ambientales del globo terrestre.

4.3 PARÁMETROS ESTADÍSTICOS BÁSICOS DE LAS SERIES DE TIEMPO.

Considerando que en problemas de la vida práctica sólo se tiene una muestra de la sucesión $\{z_t\}$ de una serie de tiempo, los parámetros estadísticos básicos son representados de la manera siguiente:

Media de la muestra:

$$\bar{z} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N z_t$$

Variancia de la muestra

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (z_t - \bar{z})^2$$

Coefficiente de asimetría

$$g = \frac{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (z_t - \bar{z})^3}{s^3}$$

Función de autocovariancia

$$C_j = \frac{1}{N-j} \sum_{t=1}^{N-j} (z_t - \bar{z})(z_{t+j} - \bar{z}); \quad j=0,1,\dots$$

Función de autocorrelación (FAC)

$$r_j = \frac{C_j}{C_0} = \frac{\sum_{t=1}^{N-j} (z_t - \bar{z})(z_{t+j} - \bar{z})}{\sum_{t=1}^N (z_t - \bar{z})^2}$$

en donde, N representa el número de años de registro y el índice j es el tiempo de retraso. Ahora los parámetros estadísticos de una serie de tiempo de la forma $z_{v,t}$ tal que $v=1, \dots, N$ y $T = 1, \dots, w$ son:

Media periódica

$$\bar{z}_T = \frac{1}{N} \sum_{v=1}^N z_{v,T}$$

Variancia periódica

$$s_T^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{v=1}^N (z_{v,T} - \bar{z}_T)^2$$

Coefficiente de asimetría periódico

$$g_T = \frac{\frac{1}{N} \sum_{v=1}^N (z_{v,T} - \bar{z}_T)^3}{s_T^3}$$

Función de autocovariancia periódica

$$C_{j,T} = \frac{1}{N} \sum_{v=1}^N (z_{v,T} - \bar{z}_T)(z_{v,T-j} - \bar{z}_T)$$

Función de autocorrelación periódica

$$u_j = \frac{\frac{1}{N} \sum_{v=1}^N (z_{v,T} - \bar{z}_T)(z_{v,T-j} - z_T)}{s_T^2}$$

en donde, N es el número de años, w es el número de intervalos de tiempo en el año, las dos últimas expresiones si $T-j < 1$, N se cambia por N-1; $z_{v,T-j}$ se cambia por $z_{v-1, w+T-j}$ y z_T-j se cambia por z_{T+w-j} .

4.4 TÉCNICA DE BOX-JENKINS.

La técnica de Box-Jenkins (1970) sirve para analizar series de tiempo hidrológicas y seleccionar modelos estocásticos que son la generación de muestras sintéticas y el pronóstico en sucesos hidrológicos.

Los principales objetivos de la técnica de Box-Jenkins son:

- 1) Elegir un modelo estocástico de una clase general de modelos, que sea lo más simple con el menor número de parámetros posible (parsimonia) y que represente adecuadamente la serie bajo estudio.
- 2) Realizar pronósticos puntuales y por intervalos con el modelo seleccionado.

La clase general de modelos considerados, se le conoce como Autoregresivos Integrados de Media Móvil (ARIMA).

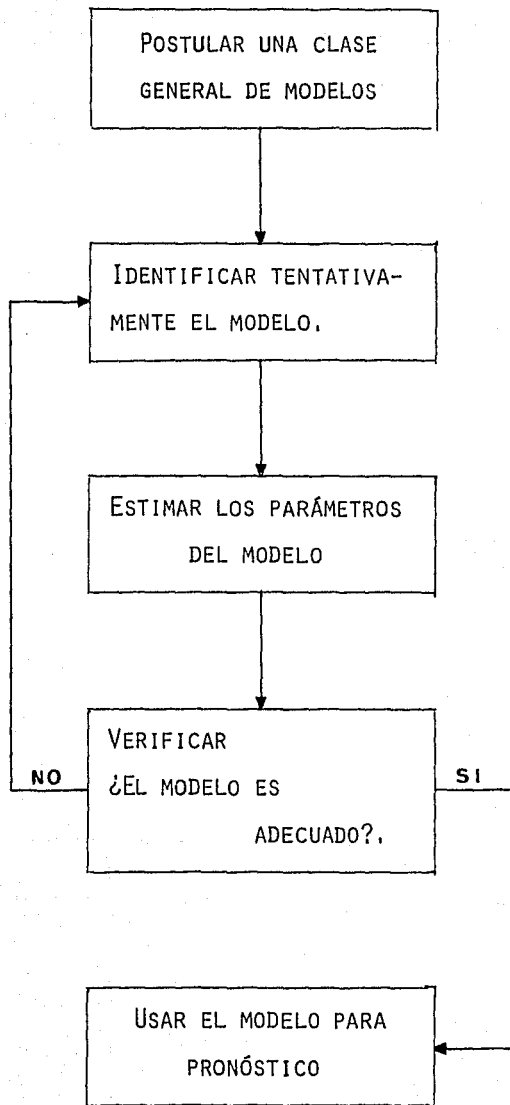
Esta clase general, contiene modelos estacionarios y no estacionarios hallados en series de tiempo hidrológicos.

El desarrollo de selección para análisis de series de tiempo es iterativo, esto es, es un proceso de adaptación o de prueba y error.

Los pasos a seguir en dicho proceso son:

- a) Postular una clase general de modelos útil para los fines a obtener.
- b) Identificar una subclase de modelos a considerar tentativamente en base a los datos de la serie.
- c) Estimar los parámetros del modelo tentativo.
- d) Verificar si el modelo es adecuado, o bien la forma de modificarlo. Es decir, si el modelo no es apropiado, se repite el ciclo de identificación, estimación y verificación.

A continuación, se representa esquemáticamente los pasos expuestos anteriormente.



La identificación tentativa se realiza utilizando la estimación de las funciones de autocorrelación (FAC) y autocorrelación parcial (FAP) de la serie de tiempo. Al mismo tiempo, a partir de éstos se obtienen estimados preliminares de los parámetros del modelo para la etapa de estimación, en conclusión las funciones FAC y FAP son de gran importancia, en la identificación de modelos. La estimación definitiva de los parámetros se lleva a cabo en base al método de máxima verosimilitud.

La verificación, se lleva a cabo analizando los residuales y se ve la posibilidad de corregir deficiencias del modelo. Además, en este paso se pueden comparar varios modelos para la misma serie de tiempo hidrológico.

Habiendo encontrado el modelo adecuado, entonces se pueden efectuar pronósticos puntuales y por intervalo.

El tipo de procesos a modelar por Box-Jenkins mas apropiados son los siguientes.

- A) Proceso de media movil ó promedio móvil "MA"
- B) Proceso autorregresivo "AR"
- C) Proceso autorregresivo-media móvil "ARMA"
- D) Proceso autorregresivo integrado de media móvil "ARIMA"

A. Proceso de Media Movil MA(q).

Se llama un proceso de media móvil de orden q, definido como:

$$z_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

en donde, los valores z_t de la serie de tiempo hidrológica es estacionaria y son generados por una suma ponderada de las q anteriores perturbaciones (o ruido blanco) distribuidas, idénticamente e independientemente con $E(a_t) = 0$ y $VAR(a_t) = \sigma_a^2$ más la media y la perturbación actual.

Casos particulares:

PROCESO DE MEDIA MOVIL DE ORDEN UNO. MA(1)

$$z_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

La media

$$E[z_t] = \mu$$

La variancia

$$\gamma_0 = \sigma_a^2(1 - \theta_1^2)$$

$$\gamma_1 = -\theta_1 \sigma_a^2$$

$$\gamma_j = 0 \quad \text{si } j > 1$$

FAC

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = -\frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2}$$

$$\rho_j = 0 \quad \text{si } j > 1$$

PROCESO MA(2)

$$z_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}$$

en donde

$$\gamma_0 = \sigma_a^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)$$

$$\gamma_1 = -\sigma_a^2 \theta_1(1 - \theta_2)$$

$$\gamma_2 = -\sigma_a^2 \theta_2$$

$$\gamma_j = 0 \quad \text{si } j > 2$$

FAC

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_1 = -\frac{\theta_1(1 - \theta_2)}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

$$\rho_2 = -\frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

$$\rho_j = 0 \quad \text{si } j > 2$$

Finalmente para un proceso MA(q)

$$\gamma_0 = \sigma_a^2 \sum_{i=0}^q \theta_i^2 \quad \text{tal que } \theta_0 = 1$$

Autocovariancia

$$\gamma_j = \sigma_a^2(-\theta_j + \theta_1 \theta_{j+1} + \dots + \theta_{q-j} \theta_q); \quad j=1, \dots, q$$

$$\gamma_j = 0 \quad j > q$$

FAC

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_j = \frac{-\theta_j + \theta_1 \theta_{j+1} + \dots + \theta_{q-j} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2}; \quad j=1, \dots, q$$

$$\rho_j = 0 \quad i > q.$$

El correlograma de un proceso MA(q) consiste de picos en los rezagos $1, \dots, q$.

B. Proceso Autorregresivo AR(p)

Sea z_t una serie de tiempo estacionaria, la cual se expresa en terminos del disturbio y de las observaciones pasadas, definiendo el proceso autorregresivo de orden p (autorregresivo porque estan haciendo una regresión de una variable de si misma), esto es:

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \dots + \phi_p z_{t-p} + a_t + \delta,$$

en donde δ es una constante.

Este proceso es muy útil en problemas de series de tiempo hidrológico.

Proceso AR(1)

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \delta + a_t$$

La Media

$$E(z_t) = \frac{\delta}{1-\phi_1}$$

Covariancia

$$\gamma_j = \phi_1^j \frac{\sigma_a^2}{1-\phi_1^2}$$

Variancia

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_a^2}{1-\phi_1^2}$$

FAC

$$\rho_j = \frac{\gamma_j}{\gamma_0} = \phi_1^j ; j = 0, 1, \dots$$

El FAC decae exponencialmente en razón al exponente de ϕ_1 .

Si se quiere construir un AR(1) con un proceso MA, se tendría que incluir muchos parámetros. Al concepto de evitar trabajar con muchos parámetros se le llama principio de frugalidad.

Proceso AR(2)

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + a_t + \delta$$

Sea un operador de rezago B definido como

$$B^j z_t = z_{t-j} \quad j=0, 1, \dots$$

Similarmente, se puede escribir AR(2):

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) z_t = a_t + \delta,$$

y se puede demostrar que el proceso escrito en términos del operador es estacionario, si las raíces de la ecuación característica del proceso

$$1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 = 0$$

están fuera del círculo unitario (en el plano complejo).

Equivalentemente

$$\phi_1 + \phi_2 < 1$$

$$\phi_2 - \phi_1 < 1$$

$$|\phi_2| < 1$$

ya que el proceso es estacionario, la media es:

$$E(z_t) = \frac{\delta}{1 - \phi_1 - \phi_2}$$

$$Y_0 = \phi_1 Y_1 + \phi_2 Y_2 + \sigma_a^2$$

Autocovariancias

$$Y_1 = \phi_1 Y_1 + \phi_2 Y_2$$

$$Y_2 = \phi_1 Y_1 + \phi_2 Y_0$$

$$Y_j = \phi_1 Y_{j-1} + \phi_2 Y_{j-2} \quad j > 2$$

FAC

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1$$

$$\rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2$$

El FAC representado por las ecuaciones anteriores se le conocen como ecuaciones de Yule-Walker, éstas sirven para hallar las estimaciones preliminares de ϕ_1 y ϕ_2 .

La fórmula de recurrencia para ρ_j es:

$$\rho_j = \phi_1 \rho_{j-1} + \phi_2 \rho_{j-2}, \quad j > 2$$

Proceso AR(ρ)

Por medio del operador B se puede escribir:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) z_t = a_t + \delta$$

Para que AR sea estacionario se necesita que las raíces de la ecuación

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) = 0$$

queden fuera del círculo unitario.

Ya que el proceso es estacionario, entonces:

La media es:

$$\mu = E(z_t) = \frac{\delta}{1 - \phi_1 - \dots - \phi_p}$$

Covariancia

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \dots + \phi_p \gamma_p + \sigma_a^2$$

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 + \dots + \phi_p \gamma_{p-1}$$

⋮

$$\gamma_p = \phi_1 \gamma_{p-1} + \dots + \phi_p \gamma_0$$

Para rezagos mayores a p

$$\gamma_j = \phi_1 \gamma_{j-1} + \dots + \phi_p \gamma_{j-p} \quad j > p$$

De las ecuaciones de covariancia, se obtienen las ecuaciones:

$$\rho_1 = \phi_1 + \dots + \phi_p \rho_{p-1}$$

⋮

$$\rho_p = \phi_1 + \rho_{p-1} + \dots + \phi_p$$

De la ecuación para rezagos mayores a p, resulta que:

$$\rho_j = \phi_1 \rho_{j-1} + \dots + \phi_p \rho_{j-p} \quad j > p$$

En general

$$\sigma_a^2 = \frac{N \sigma^2}{(N-p)} \left(1 - \sum_{j=1}^p \phi_j r_j \right)$$

Los procesos antes mencionados se pueden utilizar en problemas cuando se trabajan series de tiempo hidrológicas anuales, pero

también se puede dar el caso cuando se llevan a cabo series de tiempo hidrológicas con intervalos de tiempo menor que el anual [9].

C. Procesos Mezclados Autoregresivos de Media Móvil ARMA(p,q).

Este proceso es una mezcla de los modelos AR y MA vistos anteriormente, es decir:

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \dots + \phi_p z_{t-p} + \delta + a_t - \phi_1 a_{t-1} - \dots - \phi_q a_{t-q}$$

A esta clase de modelos se les llama ARMA de orden (p,q). Para problemas de series de tiempo en hidrología, la inclusión de términos AR y MA resulta un modelo con un número de parámetros pequeño en comparación con los que tendría un modelo satisfactorio, puramente AR o MA. Así se afirma el principio de frugalidad.

Sus condiciones de estacionaridad e invertibilidad del ARMA(p,q) son que las raíces de las ecuaciones características

$$1 - \phi_1 B - \dots - B^p = 0$$

y

$$1 - \phi_1 B - \dots - B^q = 0$$

queden fuera del círculo unitario.

La forma general del proceso ARMA(p,q) es:

$$\phi_p(B) z_t = \theta_0 + \theta_q(B) a_t$$

tal que $\theta_0 = (1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)\mu$.

Proceso ARMA(1,1)

Uno de los procesos con mayor aplicación en el terreno de la hidrología es el ARMA(1,1), debido a su simplicidad, es decir:

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \delta + a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

La media

$$\mu = E(z_t) = \frac{\delta}{1 - \phi_1}$$

Ademas:

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \sigma_a^2 - \theta_1 (\phi_1 - \theta_1) \sigma_a^2$$

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma_a^2$$

$$\gamma_j = \phi_1 \gamma_{j-1} \quad j > 1$$

Utilizando γ_0 y γ_1 de las relaciones anteriores en terminos de ϕ_1 y θ_1

$$\gamma_0 = \frac{(1 + \theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1)}{1 - \phi_1^2} \sigma_a^2$$

$$\gamma_1 = \frac{(1 - \phi_1\theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{1 - \phi_1^2} \sigma_a^2$$

FAC

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_1 = \frac{(1 - \phi_1\theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{(1 + \theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1)}$$

$$\rho_j = \phi_1 \rho_{j-1} \quad j > 1$$

El FAC decae exponencialmente desde el valor inicial ρ_1 .

En forma parecida se puede modelar para el caso de ARMA(p,q) periodicos.

Comentario

Cuando se desea generar muestras sintéticas utilizando el modelo ARMA(p,q) es por medio recursivo, es decir:

$$z_t = \sum_{j=1}^p \phi_j z_{t-j} + a_t - \sum_{j=1}^q \theta_j a_{t-j}$$

en donde:

$$\delta = 0$$

$$\hat{a}_t = \hat{\sigma}_a^2 \xi_t$$

$$\xi_t = \text{número normal estandar}$$

Por medio de las ecuaciones de Box-Muller

$$\xi_1 = \left(2n \frac{1}{\mu_1}\right)^{\frac{1}{2}} \text{COS } 2\pi\mu_2$$

$$\xi_2 = \left(2n \frac{1}{\mu_1}\right)^{\frac{1}{2}} \text{SEN } 2\pi\mu_2$$

tal que μ_1 y μ_2 son números aleatorios con distribución uniforme en (0,1).

Función de Autocorrelación Parcial FAP

De acuerdo a que el FAC de AR(p) es infinita en extensión, no es posible por medio de ésta identificar su orden p, de aquí que se recurre a la función de autocorrelación parcial FAP de finida como:

$$\phi_{kk} = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccccc} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & \rho_1 & \rho_k & \end{array} \right| \\ \hline \left| \begin{array}{cccccc} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-1} & \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-2} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & 1 & & \end{array} \right| \end{array}$$

Un proceso MA(q) equivale a un AR de orden infinito y su correspondiente FAP es infinito en extensión. Esto constituye el dual del hecho de que a un proceso AR(p) le corresponde un FAC infinito en extensión. A continuación se expresará un resumen del FAP de los modelos vistos anteriormente.

FAP de un AR(1)

$$\phi_{11} = \frac{\rho_1}{1} = \rho_1 = \phi_1$$

$$\phi_{kk} = 0 \quad k > 1$$

FAP de un AR(2)

$$\phi_{11} = \rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}$$

$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \phi_2$$

$$\phi_{kk} = 0 \quad k > 2$$

En general, se cumplirá que $\phi_{pp} = \phi_p$ si el proceso es AR(p).

FAP de un MA(1)

$$\phi_{kk} = -\theta^k(1 - \theta^2) / 1 - \theta^{2(k+1)}$$

y por lo tanto

$$\left| \phi_{kk} \right| \leq \left| \theta^k \right|$$

esto es, estará dominada por el decaimiento exponencial de $|\theta|$.

FAP de un MA(2)

Es bastante complicado hallar la ecuación del FAP para MA(2). Solo se puede decir que está dominada por la suma de dos exponenciales (y por tanto un decaimiento más lento que para la FAP de un MA(1)) si las raíces de la ecuación $1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 = 0$ son reales, y dominada por seno amortiguados si las raíces de $1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 = 0$ son complejas.

FAP para un ARMA(1,1).

La FAP para un ARMA se conduce como la FAP de un MA(1), pero después de su valor inicial $\phi_{11} = \rho_1 = \phi_1$.

Finalmente, se verá que algunas series de tiempo hidrológicas se comportan como modelos no-estacionarios. Para considerar éste tipo de series, habrá necesidad de modificar los modelos ARMA. La modificación de dichos modelos reciben el nombre de proceso autorregresivo integrado de media móvil, denotado por ARIMA.

D. Proceso Autorregresivo Integrado por Media Móvil ARIMA.

Para construir este tipo de modelos, se toman las diferencias sucesivas de la serie original, esto es:

$$w_t = \nabla z_t = z_t - z_{t-1}$$

Normalmente en este caso el corrimiento vertical, de la serie diferenciada w_t resulta ser estacionaria. En general, se toma

la d-ésima diferencia $\nabla^d z_t = w_t$, se puede expresar por un ARMA de orden (p,q)

$$w_t = \phi_1 w_{t-1} + \dots + \phi_p w_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

Al proceso definido anteriormente recibe el nombre de proceso autorregresivo integrado de media móvil de orden (p,d,q).

Existen otros métodos para conseguir estacionaridad, es decir, no es suficiente diferenciar y se recurre a otra forma de transformar la serie, por ejemplo, el logaritmo de la serie original [4].

El proceso ARIMA, definido por:

$$\phi(B)(1-B)^d z_t = \theta_0 + \theta(B)a_t$$

es muy general, ya que contiene tanto autorregresivos, de media móvil e integrados.

El objetivo es resolver que proceso de éste conjunto puede representar a la serie bajo estudio.

La conexión de un proceso ARIMA con la serie, se logra por el método iterativo, es decir, identificación, estimación y verificación.

Recuerde que los modelos ARIMA, contienen un conjunto de modelos estacionarios y no estacionarios que representan muchas series de tiempo hidrológicas.

4.5 MODELOS ESTACIONALES.

Esta sección versará sobre las principales propiedades y empleo de una clase especial de los modelos ARIMA, encargados en modelar series de tiempo hidrológicas que presentan periodicidades.

Nuevamente Box-Jenkins considera una clase particular de procesos estocásticos, que representan la conducta estacional de las series de tiempo hidrológicas, el cual se representa por el modelo siguiente:

$$\phi_p(B)\phi_p(B^S)(1-B)^d(1-B^S)^D z_t = \theta_q(B)\theta_q(B^S)a_t.$$

Este modelo recibe el nombre de modelo ARIMA multiplicativo estacional, $(p,d,q) \times (P,D,Q)_S$, son analogos a los desarrollados anteriormente para los procesos ARIMA(p,d,q), además se siguen los mismos procedimientos, es decir, identificación, estimación y verificación.

4.6 PROCESOS AUTORREGRESIVOS MULTIVARIADOS DE SERIES DE TIEMPO.

En el momento que se hacen estudios sobre el campo de la hidrología son comunmente multivariados en la naturaleza. Por ejemplo, la planeación de cuencas de ríos involucra el desarrollo de sitios múltiples, los cuales están naturalmente relacionados. La operación de un almacenamiento no puede ser independiente de otros, ubicados sobre el mismo río, por lo que es necesario el empleo de procesos multivariados.

Proceso AR(1)

$$Z_t = A Z_{t-1} + B a_t$$

$$Z_t^{(i)}, i = 1, \dots, n.$$

Proceso AR(2)

$$Z_t = A_1 Z_{t-1} + A_2 Z_{t-2} + B a_t$$

en donde: $Z_t^{(i)}, i = 1, \dots, n.$

A, A_1, A_2 Y B representan matrices de parámetros de orden $n \times n$.

a_t es un vector $n \times 1$ variables independientes normalmente distribuidas

Media

$$E(Z_t^{(i)}) = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

Variancia

$$\text{Var}(Z_t^{(i)}) = 1 \quad i = 1, \dots, n$$

Matriz de correlación

$$M_k = E (z_t z_{t-k}) = \begin{bmatrix} \rho_k^{11} & \rho_k^{12} & \dots & \rho_k^{1n} \\ \rho_k^{21} & \rho_k^{22} & \dots & \rho_k^{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_k^{n1} & \rho_k^{n2} & \dots & \rho_k^{nn} \end{bmatrix}$$

tal que ρ_k^{ij} y ρ_k^{ji} son los coeficientes de correlación cruzada entre las estaciones $(z_t^{(i)}, z_{t-k}^{(j)})$.

Proceso AR(1)

$$M_k = A_1 M_{k-1} \quad \text{si } k > 0$$

$$M_k = A_1^k M_0 \quad \text{si } k \geq 0$$

Proceso AR(2)

$$M_k = A_1 M_{k-1} + A_2 M_{k-2} \quad \text{si } k > 0$$

Para hallar la estimación de los parámetros de los procesos AR(1) y AR(2), por medio del método de momentos.

Proceso AR(1)

$$\hat{A}_1 = \hat{M}_1 \hat{M}_0^{-1}$$

$$\hat{B}\hat{B}^T = \hat{M}_0 - \hat{A}_1 \hat{M}_1^T$$

Proceso AR(2)

$$\hat{A}_1 = (\hat{M}_1 - \hat{M}_2 \hat{M}_0^{-1} \hat{M}_1^T) (\hat{M}_0 - \hat{M}_1 \hat{M}_0^{-1} \hat{M}_0^{-1} \hat{M}_1^T)^{-1}$$

$$\hat{A}_2 = (\hat{M}_2 - \hat{M}_1 \hat{M}_0^{-1} \hat{M}_1) (\hat{M}_0 - \hat{M}_1^T \hat{M}_0 \hat{M}_1)^{-1}$$

$$\hat{B}\hat{B}^T = \hat{M}_0 - (\hat{A}_1 \hat{M}_1^T + \hat{A}_2 \hat{M}_2^T)$$

tal que B es una matriz triangular inferior.

Para la generación de muestras se puede dar por la siguiente relación

$$\hat{X}_t^{(i)} = \hat{g}^{-1}(i) [\hat{Y}_t^{(i)}]$$

$$\hat{Y}_t^{(i)} = \hat{\mu}^{(i)} + \hat{\sigma}^{(i)} z_t^{(i)}$$

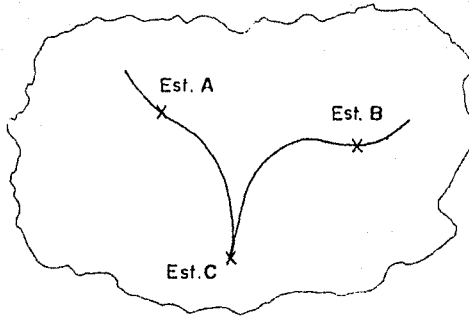
4.7 PROCESOS DE DESAGREGACIÓN.

Los procesos o modelos de desagregación se dividen en dos principales grupos:

- A.- Desagregación espacial
- B.- Desagregación temporal

A. DESAGREGACION ESPACIAL.

Desagregación de serie a la salida de la cuenca estación C, a series dentro de la cuenca estación A y estación B.



B. DESAGREGACION TEMPORAL

Si en una estación cuentan con series de tiempo anuales, se pueden desagregar o separar en series de tiempo semestrales, quincenales, semanales, etc. La serie de tiempo a la cual se le efectúa la separación se le conoce "serie de tiempo clave".

PROCESO GENERAL DE DESAGREGACION

$$Y = AX + Ba$$

en donde:

Y = Subserie

X = Serie de tiempo clave ó serie clave

a = Serie de tiempo aleatoria

A y B = Son matrices de parámetros (relacionado con la estructura causal).

X e Y Son normales con media cero y matriz de variancia-covariancia " Σ ".

Para el caso en que se considere la media diferente de cero el modelo o proceso anterior, se puede escribir como:

$$Y = AX + Ba + C$$

Como un ejemplo de lo anterior, suponga que se van a separar datos anuales de dos estaciones dentro de los datos mensuales es decir:

$$Y_{24 \times 1} = A_{24 \times 2} X_{2 \times 1} + B_{24 \times 24} a_{24+1}$$

B. PROCESO DE DESAGREGACION TEMPORAL UNIVARIADO.

Primeramente se analizará el modelo básico.

$$Y = AX + Ba$$

en donde:

Y = Componente estacional

X = Componente anual

Ventajas:

1. Garantiza las covariancias entre valores anuales y estacionales.
2. Garantiza las covariancias y las variancias entre los estacionales.
3. Garantiza $\omega^2 + \omega$.

Desventajas.

1. Los momentos generados son inconsistentes.
2. Y_1 no está relacionado con Y_0 .
3. El número de parámetros es grande.

PROCESO EXTENDIDO.

$$Y = AX + Ba + CZ$$

en donde, Z toma valores estacionales del año anterior.

PROCESO CONDENSADO.

$$Y_T = A_T X + B_T a + C_T Y_{T-1}$$

Ventajas

1. Conserva covariancias entre valores anuales y estacionales.
2. Conserva variancia y covariancias de retraso unitario.
3. Reducción importante de parámetros.

Desventajas

1. No es simple
2. Dado que los datos estacionales no se generan simultáneamente, éstos al sumarlos no dan los datos anuales.

MODELO DE DESAGREGACION TEMPORAL MULTIVARIADO.

$$Y = AX + Ba + CZ$$

dicho modelo es similar al proceso extendido, pero difiere en las dimensiones.

Ventajas

1. Preserva las correlaciones cruzadas entre datos en varios lugares.

Desventajas

1. Muchos parámetros .

PROCESO DE DESAGREGACION ESPACIAL

$$Y = AX + Ba + CZ$$

Ventajas

1. Conserva los momentos con desfaseamiento cero entre subestaciones.
2. Garantiza los momentos con desfaseamiento unitario entre subestaciones.
3. Preserva los momentos con desfaseamientos cero entre las estaciones clave y las subestaciones.

ESTIMACION DE PARAMETROS

Modelo general

$$Y = AX + Ba$$

$$\hat{A} = S_{YX} S_{XX}^{-1}$$

$$\hat{BB}^T = S_{YY} - S_{YX} S_{XX}^{-1} S_{XY}$$

en donde:

S_{YY} = Matriz de covariancias entre las series estacionales.

S_{XY} = Matriz de covariancias entre las series anuales y las estacionales.

S_{XX} = Matriz de covariancias entre las series anuales.

S_{YX} = Matriz de covariancias entre las series estacionales y anuales.

ésto también es válido para el proceso básico temporal.

PROCESO EXTENDIDO TEMPORAL

$$Y = AX + Ba + CZ$$

Cuya estimación de parámetros son:

$$\hat{A} = (S_{YX} - S_{YZ} S_{ZZ}^{-1} S_{ZX}) (S_{XX} - S_{XZ} - S_{XZ} S_{ZZ}^{-1} S_{ZX})^{-1}$$

$$\hat{C} = (S_{YZ} - \hat{A} S_{XZ}) S_{ZZ}^{-1}$$

$$\hat{BB}^T = S_{YY} - \hat{A} S_{XY} - \hat{C} S_{ZY}$$

PROCESO CONDENSADO TEMPORAL.

$$Y_T = A_T X + B_T a + C_T Y_{T-1}$$

en donde las estimaciones son:

$$\hat{A}_T = (S_{YX}(T, T) - S_{YY}(T, T-1) S_{YY}^{-1}(T-1, T-1) S_{YX}(T-1, T))$$

$$(S_{XX}(T, T) - S_{XY}(T, T-1) S_{YY}^{-1}(T-1, T-1) S_{YX}(T-1, T))$$

$$\hat{C}_t = (S_{YY}(T, T-1) - \hat{A}_t S_{XY}(T, T-1)) S_{YY}^{-1}(T-1, T-1)$$

$$\hat{B}_T \hat{B}_T' = S_{YY}(T, T) - \hat{A}_T S_{XY}(T, T) - \hat{C}_T S_{YY}(T-1, T).$$

PRUEBAS DE BONDAD DE AJUSTE

Por su característica exclusiva los modelos ó procesos de desagregación o separación, afirman que la subserie generada es de alguna forma razonable. El proceso entero es fundamentalmente guiado por la serie clave. En la ocasión de una desagregación anual a estacional, si la serie anual está bien generada, los datos estacionales automáticamente serán muy lógicos simplemente porque los datos estacionales deben sumarse para dar la serie anual generada.

Las correlaciones desfasadas para los datos estacionales son por lo menos indirectamente garantizadas por la preservación directa de las correlaciones anual a estacional, las medias, variancias y correlaciones seriadas de retraso unitario son por lo menos directamente garantizadas para los datos estacionales.

Posiblemente, la distribución se conserva adecuadamente por transformaciones de los datos. Una ventaja de los procesos de datos estacionales es que cualquiera de los errores o de los parámetros no adecuadas del modelo se distribuyen entre los parámetros estadísticos estacionales más que concentrarse en los parámetros estadísticos de las series de tiempo anuales.

RECOMENDACIONES.

1. Dibujar los datos históricos transformados en papel de probabilidad normal.
2. Dibujar los datos históricos sin transformar en papel de probabilidad normal.
3. Dibujar la distribución de los datos generados en papel de probabilidad normal.

La linealidad de las correlaciones deben ser comprobadas. Por tal razón, se sugiere que las series transformadas dependiente e independientemente sean graficadas una con otra. Se recomienda las correlaciones preservadas indirectamente que se consideren importantes.

Posteriormente se analizarán algunos ejemplos relacionados con la teoría, explicado anteriormente en este capítulo.

4.8 EJEMPLOS,

Ejemplo 1. (Variancia de un Modelo ARMA(1,1)).

Deducir la variancia de un proceso ARMA(1,1) en términos de

ϕ_1 , θ_1 y σ_a^2 .

Demostración.

Sea el modelo ARMA(1,1)

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \delta + a_t - \theta_1 a_{t-1} \quad (1)$$

Para obtener la variancia del modelo o proceso, note que:

$\tilde{z}_t = z_t - \frac{\delta}{1-\phi_1}$, la desviación del proceso con respecto a su media (en donde $\delta = 0$), generado por:

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1} \quad (2)$$

la variancia $\gamma_0 = V(z_t)$ de (2) es:

$$\begin{aligned} \tilde{z}_t^2 &= \phi_1 \tilde{z}_t \tilde{z}_{t-1} + \tilde{z}_t a_t - \theta_1 \tilde{z}_t a_{t-1} \\ \gamma_0 &= E\left[\tilde{z}_t^2\right] = \phi_1 E\left[\tilde{z}_t \tilde{z}_{t-1}\right] + E\left[\tilde{z}_t a_t\right] - \theta_1 E\left[\tilde{z}_t a_{t-1}\right] \\ &= \phi_1 \gamma_1 + \sigma_a^2 - \theta_1 E\left[\tilde{z}_t a_{t-1}\right] \quad (3) \end{aligned}$$

De (3) el término $E\left[\tilde{z}_t a_{t-1}\right]$ es la covariancia entre \tilde{z}_t y la perturbación previa.

De (3), el último término $E\left[\tilde{z}_t a_{t-1}\right]$, se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
E(\tilde{z}_t a_{t-1}) &= \phi_1 E(\tilde{z}_{t-1} a_{t-1}) + E(a_t a_{t-1}) - \theta_1 E(a_{t-1}^2) \\
&= \phi_1 E(\tilde{z}_{t-1} a_{t-1}) - \theta_1 E(a_{t-1}^2) \\
&= \phi_1 \sigma_a^2 - \theta_1 \sigma_a^2 \quad - (4)
\end{aligned}$$

Ahora, se probará que $E(\tilde{z}_t a_t) = E(\tilde{z}_{t-1} a_{t-1}) = \sigma_a^2$, por la estacionalidad.

De (2)

$$\tilde{z}_{t-1} = \phi_1 \tilde{z}_{t-2} + a_{t-1} - \phi_1 a_{t-2}$$

$$\tilde{z}_{t-1} a_{t-1} = \phi_1 \tilde{z}_{t-2} a_{t-1} + a_{t-1}^2 - \phi_1 a_{t-2} a_{t-1}$$

$$\begin{aligned}
E(\tilde{z}_{t-1} a_{t-1}) &= \phi_1 E(\tilde{z}_{t-2} a_{t-1}) + E(a_{t-1}^2) - \theta_1 E(a_{t-2} a_{t-1}) \\
&= \phi_1 (0) + E(a_{t-1}^2) - \theta_1 (0) = E(a_{t-1}^2) = \sigma_a^2
\end{aligned}$$

$$\therefore E(\tilde{z}_t a_t) = E(\tilde{z}_{t-1} a_{t-1}) = \sigma_a^2$$

Sustituyendo (4) en (3):

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \sigma_a^2 - \theta_1 \phi_1 \sigma_a^2 + \theta_1^2 \sigma_a^2$$

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \sigma_a^2 - \theta_1 (\phi_1 - \theta_1) \sigma_a^2 \quad - (5)$$

Pero $\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma_a^2$, se puede probar, utilizando (2).

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= E(\tilde{z}_t z_{t-1}) = \phi_1 E(\tilde{z}_t^2) + E(\tilde{z}_{t-1} a_t) - \theta_1 E(\tilde{z}_{t-1} a_{t-1}) \\
&= \phi_1 E(\tilde{z}_{t-1}^2) - \theta_1 E(\tilde{z}_{t-1} a_{t-1}) \\
\gamma_1 &= \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma_a^2 \quad - (6)
\end{aligned}$$

Concluyendo, es decir, sustituyendo (6) en (5):

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \phi_1(\phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma_a^2) + \sigma_a^2 - \theta_1 \phi_1 \sigma_a^2 + \theta_1^2 \sigma_a^2 \\
&= \phi_1^2 \gamma_0 - \phi_1 \theta_1 \sigma_a^2 + \sigma_a^2 - \theta_1 \phi_1 \sigma_a^2 + \theta_1^2 \sigma_a^2 \\
\gamma_0 (1 - \phi_1^2) &= \sigma_a^2 - 2\phi_1 \theta_1 \sigma_a^2 + \theta_1^2 \sigma_a^2 \\
&= \sigma_a^2 (1 - 2\phi_1 \theta_1 + \theta_1^2) \\
\gamma_0 &= \frac{(1 + \theta_1^2 - 2\phi_1 \theta_1) \sigma_a^2}{1 - \theta_1^2}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2. (Proceso Autorregresivo Multivariado).

La parte municipal de la ciudad de Nueva York se abastece de agua de tres depósitos en paralelo localizados en los más alto de la cuenca del río Delawer. La matriz covariancia y la matriz covariancia con retraso 1, cuyas estimaciones fueron basados en registros de flujos de 50 años dados en (m³/s):

$$S_0 = \begin{bmatrix} 20.002 & 21.436 & 6.618 \\ 21.436 & 25.141 & 6.978 \\ 6.618 & 6.978 & 2.505 \end{bmatrix} = [\text{Cov}(Q_Y^i, Q_Y^j)]$$

y etc. para M_{23} y M_{33} . Note que $b_{ij} = 0$ para $i < j$, y M debe ser simétrica, ya que BB^T es necesariamente simétrica.

Sea $A = S_1 S_0^{-1}$, en donde, el determinante de la matriz S_0 es:

$$|S_0| = 13.414$$

La matriz inversa de S_0 es:

$$S_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1.065 & -0.560 & -1.253 \\ -0.560 & 0.470 & 0.171 \\ -1.253 & 0.171 & 3.233 \end{bmatrix}$$

$$A = S_1 S_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1.038 & -0.148 & -1.667 \\ 1.443 & -0.306 & -2.226 \\ 0.345 & -0.019 & -0.586 \end{bmatrix}$$

Ahora:

$$BB^T = S_0 - AS_0 A^T = S_0 - S_1 S_0^{-1} S_1^T$$

$$\therefore BB^T = S_0 - AS_0 A^T$$

$$BB^T = \begin{bmatrix} 20.002 & 21.436 & 6.618 \\ 21.436 & 25.141 & 6.978 \\ 6.618 & 6.978 & 2.505 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3.017 & 3.654 & 1.158 \\ 3.655 & 4.477 & 1.389 \\ 1.157 & 1.387 & 0.448 \end{bmatrix}$$

$$M = BB^T = \begin{bmatrix} 16.985 & 17.782 & 5.460 \\ 17.782 & 20.664 & 5.590 \\ 5.460 & 5.590 & 2.057 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3. (Modelo ARMA(p,q))

De la siguiente tabla, se presenta un registro de flujo que comprende 60 - años para flujos normalizados del río Göta cerca de Sjötop-Vännersburg.

1898	1.158	1918	0.948	1938	0.892
1899	1.267	1919	0.907	1939	1.020
1900	1.013	1920	0.991	1940	0.869
1901	0.935	1921	0.994	1941	0.772
1902	0.662	1922	0.701	1942	0.606
1903	0.950	1923	0.692	1943	0.739
1904	1.121	1924	1.086	1944	0.813
1905	0.880	1925	1.306	1945	1.173
1906	0.802	1926	0.895	1946	0.916
1907	0.856	1927	1.149	1947	0.880
1908	1.080	1928	1.297	1948	0.601
1909	0.959	1929	1.168	1949	0.720
1910	1.345	1930	1.218	1950	0.955
1911	1.153	1931	1.209	1951	1.186
1912	0.929	1932	0.974	1952	1.140
1913	1.158	1933	0.834	1953	0.992
1914	0.957	1934	0.638	1954	1.048
1915	0.705	1935	0.991	1955	1.123
1916	0.905	1936	1.198	1956	0.774
1917	1.000	1937	1.091	1957	0.769

Ajustar un modelo Markoviano autorregresivo para registro de flujo anual.

Se efectuará la gráfica de la serie de tiempo, respecto a los flujos anuales correspondientes a los 60 años. De la figura, se podrá apreciar que se trata de una serie estacionaria en relación a su media.

$$\therefore B = \begin{bmatrix} 4.121 & 0 & 0 \\ 4.315 & 1.430 & 0 \\ 1.325 & 3.910 & 0 \end{bmatrix}$$

Se han calculado los coeficientes A y B del modelo

$$z_{y+1} = AZ_y + Ba_y.$$

Ejemplo 3. (Modelo ARMA(p,q))

De la siguiente tabla, se presenta un registro de flujo que comprende 60 - años para flujos normalizados del río Göta cerca de Sjötop-Vännersburg.

1898	1.158	1918	0.948	1938	0.892
1899	1.267	1919	0.907	1939	1.020
1900	1.013	1920	0.991	1940	0.869
1901	0.935	1921	0.994	1941	0.772
1902	0.662	1922	0.701	1942	0.606
1903	0.950	1923	0.692	1943	0.739
1904	1.121	1924	1.086	1944	0.813
1905	0.880	1925	1.306	1945	1.173
1906	0.802	1926	0.895	1946	0.916
1907	0.856	1927	1.149	1947	0.880
1908	1.080	1928	1.297	1948	0.601
1909	0.959	1929	1.168	1949	0.720
1910	1.345	1930	1.218	1950	0.955
1911	1.153	1931	1.209	1951	1.186
1912	0.929	1932	0.974	1952	1.140
1913	1.158	1933	0.834	1953	0.992
1914	0.957	1934	0.638	1954	1.048
1915	0.705	1935	0.991	1955	1.123
1916	0.905	1936	1.198	1956	0.774
1917	1.000	1937	1.091	1957	0.769

Ajustar un modelo Markoviano autorregresivo para registro de flujo anual.

Se efectuará la gráfica de la serie de tiempo, respecto a los flujos anuales correspondientes a los 60 años. De la figura, se podrá apreciar que se trata de una serie estacionaria en relación a su media.



Se encontrarán los siguientes parámetros:

Media Muestral.

$$\bar{z} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N z_t = \frac{1}{60} \sum_{t=1}^{60} z_t = 0.97$$

$$\therefore \bar{z} = 0.97$$

Variancia Muestral.

$$S^2 = \text{Var} (z_t) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (z_t - \bar{z})^2$$

$$\therefore S^2 = 0.04$$

Autocovariancia o Covariancia Muestral.

$$C_j = \frac{1}{N-j} \sum_{t=1}^{N-j} [(z_t - \bar{z})(z_{t+j} - \bar{z})] \quad \text{tal que } j = 0, 1, \dots$$

$$C_0 = \frac{1}{60} \sum_{t=1}^{60} [(z_t - 0.97)(z_t - 0.97)] = \frac{2,101}{60} = 0.035$$

$$\therefore C_0 = 0.035$$

$$C_1 = \frac{1}{59} \sum_{t=1}^{59} [(z_t - 0.97)(z_{t+1} - 0.97)] = \frac{0.8403}{59} = 0.014$$

$$\therefore C_1 = 0.014$$

$$C_2 = \frac{1}{58} \sum_{t=1}^{58} [(z_t - 0.97)(z_{t+2} - 0.97)] = - \frac{0.0986}{58} = - 0.002$$

$$\therefore C_2 = -0.002$$

$$C_3 = \frac{1}{57} \sum_{t=1}^{57} [(z_t - 0.97)(z_{t+3} - 0.97)] = -\frac{0.196}{57} = -0.003$$

$$\therefore C_3 = -0.003$$

$$C_4 = \frac{1}{56} \sum_{t=1}^{56} [(z_t - 0.97)(z_{t+4} - 0.97)] = -\frac{0.161}{56} = -0.0028$$

$$\therefore C_4 = -0.0028$$

$$C_5 = \frac{1}{55} \sum_{t=1}^{55} [(z_t - 0.97)(z_{t+5} - 0.97)] = -\frac{0.338}{55} = -0.006$$

$$\therefore C_5 = -0.006$$

Función de Autocorrelación Muestral FAC.

$$r_j = C_j / C_0 \quad ; \quad j = 0, 1, \dots, 5.$$

$$r_0 = \frac{0.035}{0.035} = 1$$

$$r_1 = \frac{0.014}{0.035} = 0.40$$

$$r_2 = -\frac{0.002}{0.035} = -0.06$$

$$r_3 = -\frac{0.003}{0.035} = -0.09$$

$$r_4 = -\frac{0.0028}{0.035} = -0.08$$

$$r_5 = -\frac{0.006}{0.035} = -0.20$$

Como en problemas prácticos no se cuenta con el verdadero FAC formado por los ρ_j -ésimos, se hará el análisis en base a la estimación de la FAC formada por los r_j ésimos, es decir:

j	1	2	3	4	5
r_j	0.40	-0.06	-0.09	-0.08	-0.20

$$\text{Sea: } \text{Var}(r_k) \approx \frac{1}{N} \left\{ 1 + 2 \sum_{j=1}^q \rho_j^2 \right\}, \quad k > q. \quad (1)$$

En la práctica $\hat{\sigma}(r_k)$, la desviación estándar de r_k , se obtiene sustituyendo r_k por ρ_j y calculando la raíz cuadrada de (1). Además $\hat{\sigma}(r_k)$ se utiliza como criterio para probar la hipótesis:

$$H_0: \rho_k = 0 \quad \text{para } k > q,$$

bajo el supuesto que r_k tiene distribución normal, la probabilidad de aceptar que r_k sea distinto de cero, dado que sea cero, sea aproximadamente 0.05 está dado por la región crítica:

$$|r_k| > 2\hat{\sigma}(r_k).$$

Este hecho es de utilidad en la identificación de modelos.

Si $q = 0$, es decir, que no hay correlación, entonces $\text{Var}(r_k) = \frac{1}{N}$, en donde $N = 60$; $\text{Var}(r_k) = 0.17$ y el error estándar $\hat{\sigma}(r_k) = 0.13$.

Por lo tanto la región crítica es:

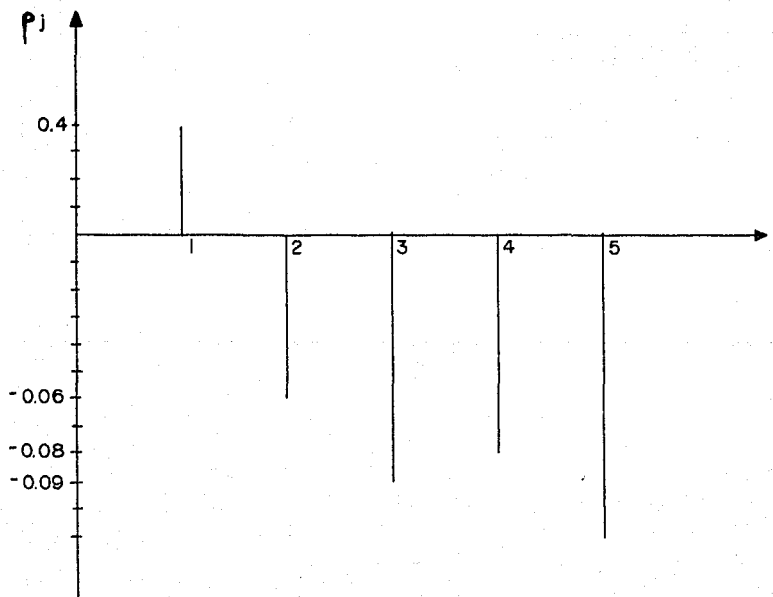
$$|r_k| > 2(0.13) = 0.26$$

El único punto que rebasa a 0.26 es $r_1 = 0.40$. Análogamente, para calcular los límites de confianza para un correlograma son:

$$r_k(95\%) = \frac{-1 \pm 1.96\sqrt{N-K-1}}{N-K}$$

$$r_k(99\%) = \frac{-1 \pm 2.326\sqrt{N-K-1}}{N-K}$$

La siguiente gráfica expresa la función de autocorrelación FAC, llamado correlograma:



La función de autocorrelación parcial FAP.

$$\phi_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & & \rho_1 & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & & 1 \end{vmatrix}}$$

Entonces:

$$\phi_{00} = \rho_0 = 1$$

$$\phi_{11} = \frac{\rho_0}{1} = 0.4$$

$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{-0.06 - (0.4)^2}{1 - (0.4)^2} = -0.26$$

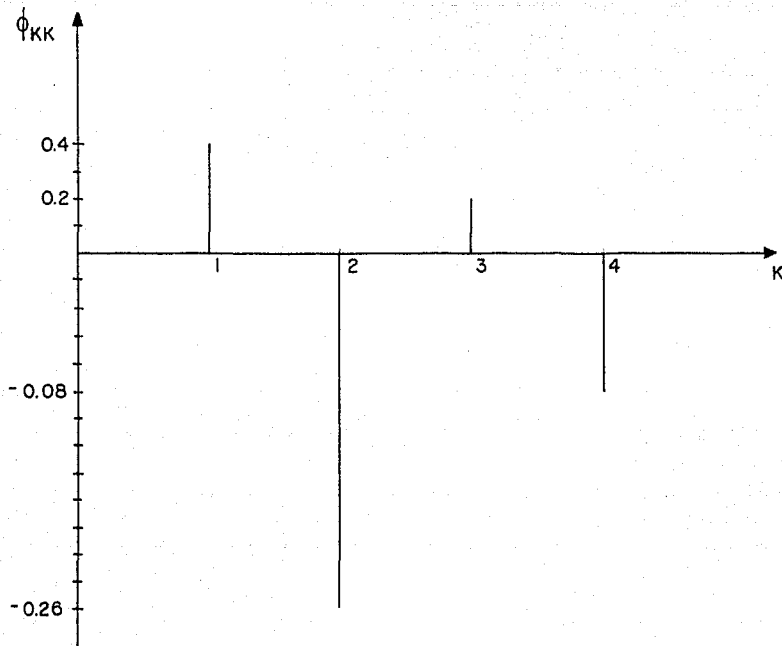
$$\phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = 0.20$$

$$\phi_{44} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \rho_3 \\ \rho_3 & \rho_2 & \rho_1 & \rho_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_3 & \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = -0.08$$

Los FAP son:

$$\phi_{00} = 1; \phi_{11} = 0.4; \phi_{22} = -0.26; \phi_{33} = 0.20; \phi_{44} = -0.08 .$$

La gráfica del FAP



Error estandar o desviación estandar para FAP

$$\rho_{kk} = 0 \text{ para } k > q$$

si

$$|r_{kk}| \leq \frac{2}{(N-a+1)^{\frac{1}{2}}} \text{ para } k > q$$

en donde, $N = 60$; $a = 0$ (número de diferencias)

$$\frac{2}{\sqrt{61}} = 0.26$$

$$|r_{kk}| \leq 0.26 \quad \text{para } k > 1$$

Concluyendo que:

$$\rho_{kk} = 0 \quad \text{para } k > 1$$

Aquí con $\phi_{11} = 0.40$ sobrepasa el valor de 0.26. Por otro lado, habiendo analizado los FAC y FAP respectivamente, se trata de un modelo ARMA(p,q) con ARMA(1,0) ó ARMA(0,1).

Se considerará un modelo ARMA(1,0), es decir:

$$z_t = \phi z_{t-1} + \delta + a_t$$

en donde

$$\delta = \text{constante} \quad \text{y} \quad a_t = \text{ruido blanco.}$$

El siguiente paso es encontrar ϕ y δ respectivamente.

El valor estimado para ϕ es:

$$\hat{\phi} = r_1$$

$$\therefore \hat{\phi} = 0.40$$

como $|0.40| < 1$ satisface la condición de estacionaridad

$$\hat{\delta} = \bar{z}(1 - \hat{\phi})$$

$$\hat{\delta} = 0.97(1-0.4)$$

$$\therefore \hat{\delta} = 0.582$$

Sustituyendo en el modelo ARMA(1,0):

$$\hat{z}_t = 0.4 z_{t-1} + 0.582 + a_t$$

Se hará la verificación del modelo, por medio de los residuales ($a_t = z_t - \hat{z}_t$ con $t = 2, 3, \dots$) y con la función de autocorrelación muestral de los residuales $\hat{r}_k(a)$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\hat{r}_k(a)$	0.03	-0.06	-0.07	-0.13	-0.06	-0.09	-0.03	-0.10	-0.13	-0.11	-0.08

Por medio de la prueba de Box-Pierce (1970)

$$Q = (N-d) \sum_{k=1}^k \hat{r}_k^2(a)$$

En donde, d, es el número de diferencias, en nuestro caso

d = 0 y N = 60.

$$Q = (60)(0.0843) = 5.058$$

De la tabla de valores de Ji-Cuadrada con $K-p-q = 11-1=10$ grados de libertad. Los puntos de 10% y 5% para χ^2 con 10 grados de libertad, son 15.99 y 18.31 respectivamente. Es decir:

$$\chi_{0.1}^2(10) = 15.99 > Q = 5.058$$

$$\chi_{0.05}^2(10) = 18.31 > Q = 5.058$$

Entonces, se puede concluir que el modelo es aceptado para un 90% y 95% de confianza. (Consultar apéndice B).

NOTA: Todos los ejemplos desarrollados en los capítulos 1, 2 y 4 son del Texto: Daniel. P. Lucks, Jerry R. Stedinger y Douglas A. Haith. Water Resource Systems Planning and Analysis. USA, Prentice Hall.

CAPITULO 5

PREDICCIÓN DE ESCURRIMIENTOS PARA LA PRESA FCO. I. MADERO

Para el desarrollo de este capítulo, se considera lo visto en los capítulos anteriores de esta tesis, en lo referente a la aplicación de un problema real sobre aprovechamiento hidráulico, consecuentemente se principiará por dar la localización de la obra estudiada y las características hidrológicas de la cuenca que lo abastece, características constructivas, características de capacidad y uso que se pretende dar a la obra.

Partiendo del registro de los escurrimientos de los años de 1949 a 1982, se desarrollaron diferentes modelos que nos permiten llegar al pronóstico más óptimo y real de esta presa, encontrandose que el más aplicable, es el de Box y Jenkins para un modelo ARIMA multiplicativo estacional, descrito en la sección 5.2.

5.1 PRESA FCO. I. MADERO.

La presa Francisco I. Madero, construída por la Secretaría de Recursos Hidráulicos durante los años de 1941 a 1949 sobre el río San Pedro, forma parte del vasto sistema de obra hidráulicas de regulación y distribución que integran el Distrito de Riego de Delicias en el Estado de Chihuahua.

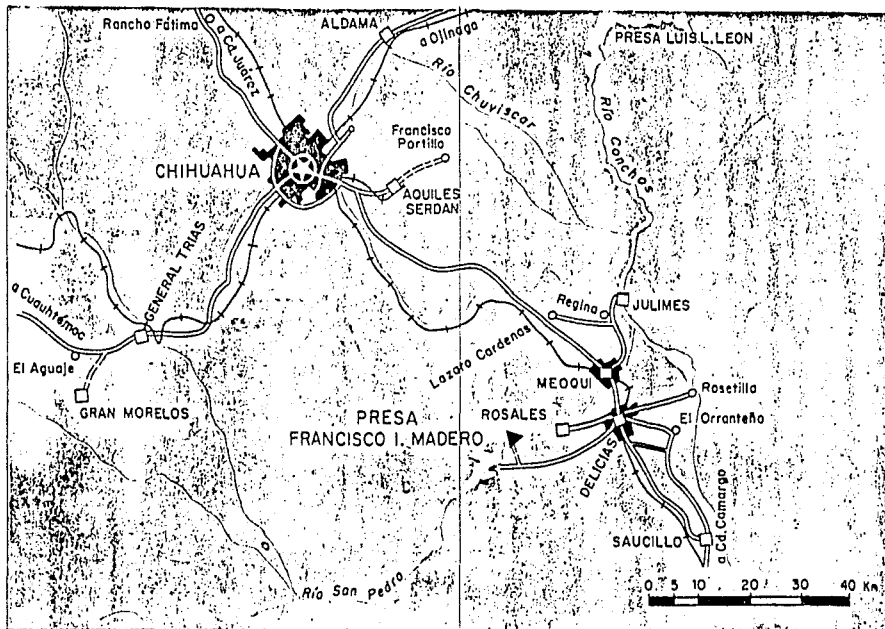
El sistema de riego se inicia en el río Conchos con aguas regularizadas en la presa La Boquilla, después de un recorrido de 105 km., el canal principal descarga en la presa derivada del río San Pedro que recibe también las aguas de este río regularizados en la presa Francisco I. Madero, y continua su recorrido al norte de esta corriente con una longitud total de 142 km.

El distrito de riego está ubicado en una región de clima muy seco, con humedad deficiente en todas las estaciones, semicálido con invierno benigno, con una precipitación media anual de 300 mm. que ocurre en unos 35 días al año en los meses de junio a octubre, por lo que el riego es indispensable para el desarrollo agrícola, ya que en esta zona se siembra, trigo, algodón, alfalfa, cacahuete, sorgo, maíz, soya, frijo, cebolla, vid, nogal y varios. La presa Francisco I. Madero permitió incrementar en 30000 ha. el área de 39700 ha. que se riega con la presa de la Boquilla.

La presa Francisco I. Madero, mejor conocida en la región como "Las Vírgenes", se encuentra ubicada en el estado de Chihuahua, al sureste de la capital del estado. Se aprecia en los siguientes mapas.

S. R. H.

134



LOCALIZACION

LOCATION

Francisco I. Madero

1949



CARACTERÍSTICAS GENERALES DE LA PRESA "LAS VÍRGENES".

CUENCA

Superficie	10,600 km ²
Precipitación media anual	450 mm
Escurrimiento medio anual	324X10 ⁶ m ³
Avenida mínima registrada	4000 m ³ /s

VASO

Capacidad total	621X10 ⁶ m ³
Capacidad para azolves	85X10 ⁶ m ³
Capacidad útil	340X10 ⁶ m ³
Capacidad para superalmacenamiento	196X10 ⁶ m ³
Area máxima inundada	• 3800 ha

PRESA

Altura máxima	57 m
Longitud de corona	236 m
Bordo libre, presa	1.24 m
Bordo libre, dique	2.84 m
Volumen total, diques	0.25X10 ⁶ m ³
Volumen de concreto	138X10 ³ m ³

MATERIALES

Tamaño máximo de grava	152 mm
Cemento de bajo calor	
Contenido de cemento	220 kg/m ³
Resistencia a los 28 días	350 kg/cm ²

ESFUERZOS

Compresión aguas abajo	20 kg/cm ²
Compresión aguas arriba	5 kg/cm ²
Compresión contraventeo	80 kg/cm ²
Esfuerzo cortante aguas abajo	10 kg/cm ²
Esfuerzo cortante aguas arriba	4.7 kg/cm ²

VERTEDOR DE EXCEDENCIAS

Avenida de diseño	7700 m ³ /s
Caudal máximo de descarga	6000 m ³ /s
Caudal máximo de vertedor pesa	2540 m ³ /s
Caudal máximo vertedor margen derecho	3460 m ³ /s
Carga	5.06 m
Caudal máximo descargado	2017 m ³ /s

OBRA DE TOMA

Caudal de diseño	35 m ³ /s
------------------	----------------------

SUPERFICIE REGABLE

Superficie regable	30,000 ha
--------------------	-----------

5.2 PRONOSTICO DE ESCURRIMIENTOS.

Partiendo de los registros de escurrimientos (millones de m³) comprendidos de 1949 a 1982 para la presa Francisco I. Madero, se consideraron los siguientes métodos de pronóstico para el caso de escurrimiento, es decir, regresión lineal, exponencial

y Box y Jenkins para un modelo ARIMA multiplicativo estacional, de la forma $(1,0,0)X(0,1,1)_{12}$, encontrándose y dada la experiencia en los años en operación de la multicitada presa, que el modelo más aceptable para éste problema, es el de Box y Jenkins, es decir, $(1,0,0)X(0,1,1)_{12}$. Por tal razón es el método que se aplicó para un futuro de 60 años. Se pueden apreciar a continuación los registros históricos de escurrimiento de dicha presa, los pronósticos de escurrimientos, y finalmente su respectiva serie de tiempo.



REGISTROS HISTÓRICOS DE ESCURRIMIENTOS DE
 DEPARTAMENTO DE PRODUCTOS HIDROLÓGICOS

REGISTROS HISTÓRICOS DE ESCURRIMIENTOS DE
 DEPARTAMENTO DE PRODUCTOS HIDROLÓGICOS

REGISTROS HISTÓRICOS DE ESCURRIMIENTOS DE
 DEPARTAMENTO DE PRODUCTOS HIDROLÓGICOS

ANO	JAN	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC	
49	435.6	5.3	4.4	2.3	1.3	2.6	3.3	24.2	67.2	222.0	24.6	7.1	3.1
50	223.1	4.6	3.9	4.1	4.6	1.1	12.7	37.1	39.6	36.9	21.1	5.2	5.4
51	73.6	13.2	4.9	4.2	3.6	7.6	3.2	14.6	17.3	11.3	4.0	2.0	7.6
52	131.1	4.6	2.6	2.7	6.6	4.6	37.3	235.3	17.7	16.9	3.7	2.3	3.7
53	201.6	4.1	3.3	3.3	2.6	3.4	4.7	29.3	54.6	31.0	3.4	3.3	3.3
54	172.6	4.3	3.3	3.1	3.4	2.1	15.1	11.7	175.7	51.3	65.3	7.1	4.4
55	471.1	4.7	3.9	4.7	1.3	3.1	4.1	6.1	151.3	76.6	122.7	7.1	4.7
56	110.6	5.2	3.1	3.2	3.6	3.1	14.2	3.2	19.0	37.3	3.2	3.8	4.2
57	147.1	1.7	3.4	3.1	2.2	3.1	2.0	28.3	52.4	22.1	9.9	3.2	4.4
58	343.7	5.6	4.3	3.7	2.1	1.7	4.1	23.6	76.2	643.3	267.4	17.3	19.6
59	366.7	1.6	2.2	2.1	13.3	6.2	19.1	22.2	227.2	37.6	3.1	3.1	7.1
60	317.1	12.6	3.6	4.1	3.6	3.7	2.1	159.3	254.4	39.6	2.3	3.3	6.0
61	256.7	7.7	7.1	1.6	13.2	13.3	13.3	13.2	62.1	54.9	7.1	4.7	4.4
62	219.7	5.3	3.3	4.3	3.7	2.6	2.6	12.3	17.2	79.3	37.7	3.0	4.7
63	116.7	4.7	4.7	4.7	4.7	3.7	15.6	13.1	76.1	111.1	35.7	9.3	7.9
64	170.2	5.4	4.7	7.6	11.7	14.3	12.2	18.7	41.3	43.3	9.1	3.1	5.6
65	235.2	3.2	4.0	3.7	3.0	2.4	13.7	13.4	71.3	31.3	7.2	4.6	6.1
66	223.6	5.0	4.3	3.1	7.2	6.1	121.6	62.9	352.7	216.2	17.1	14.3	12.3
67	116.0	10.4	7.1	12.3	12.3	12.2	21.7	23.1	52.2	124.1	21.1	2.2	3.0
68	1743.7	19.3	7.3	11.3	17.3	2.6	3.6	124.6	121.1	432.2	11.1	15.1	12.3
69	226.7	12.3	13.2	13.7	20.3	13.7	7.2	36.1	17.1	17.3	2.1	4.7	3.7
70	311.7	4.7	3.3	4.3	5.4	4.2	12.3	66.6	71.1	106.3	33.2	13.4	11.2
71	316.7	3.3	6.3	11.7	13.3	4.3	4.6	14.1	249.7	44.4	143.1	12.6	7.6
72	350.6	2.3	7.6	3.6	2.3	3.6	34.7	19.3	216.2	174.1	16.3	11.4	7.7
73	224.1	3.2	2.3	3.2	11.3	3.3	1.3	15.6	141.7	32.6	3.3	3.9	3.2
74	311.1	4.7	4.2	5.6	4.2	2.1	7.7	37.3	31.4	391.6	39.3	14.1	9.2
75	131.1	7.3	3.6	3.1	2.6	2.3	3.7	112.3	73.6	67.4	11.7	6.3	7.9
76	374.6	3.7	3.9	3.1	2.6	3.1	3.2	12.0	41.2	213.0	12.3	9.3	6.3
77	166.7	5.1	5.3	4.6	3.3	2.1	17.1	35.7	1.2	7.6	47.1	3.7	4.7

Bol. Hidrológico 29
 de la Subdirección de Hidrología
 de la SARH



DIRECCION GENERAL DE
SUBIRRIGACION DEL

REGISTROS HISTORICOS DE DESCUARGAS DE
PRESA F.C.U. I. TADE R. C. O. J. I. I.

D. P. H.

ANO	JUN	JUL	AUG	SEP	OCT	NOV	DIC	JAN	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AUG	SEP	OCT	NOV	DIC
75	732.2	5.4	3.3	1.7	.7	1.2	21.3	10.6	162.3	459.0	33.4	4.0	3.0						
76	332.3	1.3	7.5	2.3	3.3	1.1	34.2	53.5	121.7	11.0	12.4	3.9	3.5						
77	517.1	3.0	5.0	2.1	3.2	3.1	5.7	2.4	73.1	251.2	17.2	2.3	1.7						
78	345.7	3.1	12.4	9.4	3.7	1.1	14.3	13.1	227.1	207.1	31.3	2.7	2.0						
79	33.3	5.3	10.2	5.5	5.7	2.7	1.0	5.5	13.9	5.7	3.2	4.2	9.9						
	JUN	JUL	AUG	SEP	OCT	NOV	DIC	JAN	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AUG	SEP	OCT	NOV	DIC
PRM	332.5	5.3	5.3	3.7	7.2	5.2	15.3	51.5	144.0	132.7	32.3	5.0	6.2						
MIN	33.3	1.3	2.3	1.7	.7	1.2	2.3	1.2	5.2	1.0	1.2	2.1	2.7						
MAX	1443.7	15.3	13.2	12.3	20.3	13.1	132.1	244.1	152.7	351.3	343.4	17.3	12.3						

PRONOSTICO DE ESCURRIMIENTOS (MILLONES DE M³)

1983	6.2116	2013	59.8040
1984	5.7733	2014	109.5236
1985	5.3145	2015	164.0807
1986	6.4389	2016	31.0651
1987	5.3759	2017	7.4826
1988	15.7590	2018	6.7490
1989	59.8040	2019	6.2116
1990	109.5236	2020	5.7733
1991	164.0807	2021	5.3143
1992	31.0651	2022	6.4389
1993	7.4826	2023	5.3759
1994	6.7490	2024	15.7590
1995	6.2116	2025	59.8040
1996	5.7733	2026	109.5236
1997	5.3143	2027	164.0807
1998	6.4389	2028	31.0651
1999	5.3759	2029	7.4826
2000	15.7590	2030	6.7490
2001	59.8040	2031	6.2116
2002	109.5236	2032	5.7733
2003	164.0807	2033	5.3143
2004	31.0651	2034	6.4389
2005	7.4826	2035	5.3759
2006	6.7490	2036	15.7590
2007	6.2116	2037	59.8040
2008	5.7733	2038	109.5236
2009	5.3143	2039	164.0807
2010	6.4389	2040	31.0651
2011	5.3759	2041	7.4826
2012	15.7590	2042	6.7490

Ahora bien, con los volúmenes pronosticados en la tabla anterior, los operadores del sistema hidráulico, podrán hacer los pronósticos del aprovechamiento del agua tomando en cuenta, ya sea la agricultura, usos públicos urbanos, generación de energía eléctrica y otros usos. Estos aprovechamientos serán definidos de acuerdo a la evolución demográfica y socioeconómica de la región, así como tomando en cuenta la infraestructura hidráulica establecida o que se puede establecer para atender la demanda y el uso que más convenga a los intereses regionales, ya que el elemento agua es primordial para el desarrollo de cualquier índole que contengan los conglomerados humanos.

CONCLUSIONES

Dado el valor intrínseco que tiene el agua en la región del río Conchos, se hizo necesario aplicar un método estadístico que nos permitiera generar muestras sintéticas o generación de registros hidrológicos sintéticos que nos acercaran lo más posible a la realidad del medio. En vista de que teníamos registros históricos de los escurrimientos en un periodo de 33 años, que nos permitió encontrar una serie de tiempo del tipo estacional; tomando en cuenta ésta, se aplicó el modelo de regresión lineal, exponencial y Box y Jenkins (ARIMA multiplicativo estacional), encontrándose éste último el más adecuado para éste problema de predicción o pronóstico de escurrimientos mediante la obra hidráulica que se analizó.

Las muestras sintéticas obtenidas por el método anterior, son para un periodo de 60 años, ésta disponibilidad de volúmenes a futuro, no necesariamente es aplicable a la agricultura, aunque la obra fué hecha específicamente para riego de terrenos agrícolas, pues dada las evoluciones que tienen las zonas en general, ésta agua puede ser usada o aplicada para otros fines que no sea especialmente para la agricultura, es decir, domésticos, públicos urbanos, generación de energía eléctrica, industrial, además de soportar importantes ecosistemas.

A P E N D I C E A
ALGUNAS DISTRIBUCIONES

DISTRIBUCIÓN	FUNCIÓN DENSIDAD	MEDIA	VARIANCIA	COEFICIENTE DE ASIMETRÍA
GAMMA (Tres parámetros)	$\begin{cases} \frac{(x-\delta)^{\alpha-1} e^{-[x-\delta]/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}, & x > \delta, x, \beta > 0 \\ 0, & x \leq \delta \end{cases}$	$\alpha\beta + \delta$	$\alpha\beta^2$	$\sqrt{\frac{2}{\alpha}}$
GAMMA	$\begin{cases} \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$	$\sqrt{\frac{2}{\alpha}}$
	$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$			
NORMAL	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$	μ	σ^2	

DISTRIBUCIÓN

FUNCIÓN DENSIDAD

MEDIA

VARIANCIA

COEFICIENTE DE ASIMETRÍA

LOGNORMAL	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sigma_L \sqrt{2\pi} (x-a_L)} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_L^2} \{ \ln(x-a_L) - \mu_L \}^2 \right], \exp[\mu_L + \sigma_L^2/2] + a_L \quad \frac{\sigma^2}{[e^{\mu_L} - 1]} [e^{(2\mu_L + \sigma_L^2)}] \\ \text{con } x > 0, x \geq a_L, \sigma_L > 0 \\ 0, x \leq a_L \end{array} \right.$	$3V + 3V^3$	$V = \frac{\sigma}{(\mu - a_L)}$
-----------	--	-------------	----------------------------------

DISTRIBUCIÓN

FUNCIÓN DE PROBABILIDAD
DE MASA

MEDIA

VARIANCIA

COEFICIENTE DE
ASIMETRÍA

BINOMIAL

$$\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

con $x = 0, 1, \dots, n$.

np

npq

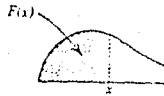
$\frac{q-p}{\sqrt{npq}}$

APENDICE B

Distribución Ji-cuadrada

Valores de x para valores dados de la función de distribución

Las más extensas: Fisher (1958), Hald (1962), Pearson y Hartley (1954) (ver el apéndice 3).

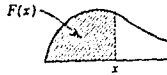


Ejemplo. Para 3 grados de libertad, $F = 0.99$ cuando $x = 11.34$.

$F(x)$	Número de grados de libertad									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.001	0.60	0.60	0.02	0.09	0.21	0.38	0.60	0.86	1.15	1.48
0.005	0.60	0.01	0.07	0.21	0.41	0.65	0.99	1.34	1.73	2.16
0.01	0.00	0.02	0.11	0.30	0.55	0.87	1.24	1.65	2.09	2.56
0.025	0.00	0.05	0.22	0.48	0.83	1.24	1.69	2.18	2.70	3.25
0.05	0.00	0.10	0.35	0.71	1.15	1.64	2.17	2.73	3.33	3.94
0.1	0.02	0.21	0.58	1.06	1.61	2.20	2.83	3.49	4.17	4.87
0.25	0.10	0.38	1.21	1.92	2.67	3.45	4.25	5.07	5.90	6.74
0.5	0.45	1.39	2.37	3.36	4.35	5.35	6.35	7.34	8.34	9.34
0.75	1.32	2.77	4.11	5.39	6.63	7.84	9.04	10.22	11.39	12.55
0.9	2.71	4.61	6.25	7.78	9.24	10.64	12.02	13.36	14.68	15.99
0.95	3.84	5.99	7.81	9.49	11.07	12.59	14.07	15.51	16.92	18.31
0.975	5.02	7.38	9.35	11.14	12.83	14.45	16.01	17.53	19.02	20.48
0.99	6.63	9.21	11.34	13.28	15.09	16.81	18.48	20.09	21.67	23.21
0.995	7.88	10.60	12.84	14.86	16.75	18.55	20.28	21.96	23.59	25.19
0.999	10.53	13.82	16.27	18.47	20.52	22.46	24.32	26.13	27.88	29.59

$F(x)$	Número de grados de libertad									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0.001	1.83	2.21	2.62	3.04	3.48	3.94	4.42	4.90	5.41	5.92
0.005	2.60	3.07	3.57	4.07	4.60	5.14	5.70	6.26	6.84	7.43
0.01	3.05	3.57	4.11	4.66	5.23	5.81	6.41	7.01	7.63	8.26
0.025	3.82	4.40	5.01	5.63	6.26	6.91	7.56	8.23	8.91	9.59
0.05	4.57	5.23	5.89	6.57	7.26	7.96	8.67	9.39	10.12	10.85
0.1	5.58	6.30	7.04	7.79	8.55	9.31	10.09	10.86	11.65	12.44
0.25	7.58	8.44	9.30	10.17	11.04	11.91	12.79	13.68	14.56	15.45
0.5	10.34	11.34	12.34	13.34	14.34	15.34	16.34	17.34	18.34	19.34
0.75	13.70	14.85	15.98	17.12	18.25	19.37	20.49	21.60	22.72	23.83
0.9	17.28	18.55	19.81	21.06	22.31	23.54	24.77	25.99	27.20	28.41
0.95	19.68	21.03	22.36	23.68	25.00	26.30	27.59	28.87	30.14	31.41
0.975	21.92	23.34	24.74	26.12	27.49	28.85	30.19	31.53	32.85	34.17
0.99	24.73	26.22	27.69	29.14	30.58	32.00	33.41	34.81	36.19	37.57
0.995	26.76	28.30	29.82	31.32	32.80	34.27	35.72	37.16	38.58	40.00
0.999	31.26	32.91	34.53	36.12	37.70	39.25	40.79	42.31	43.82	45.32

Valores de x para valores dados de la función de distribución
(continuación)



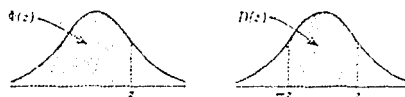
$F(x)$	Número de grados de libertad									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0.001	6.4	7.0	7.5	8.1	8.7	9.2	9.8	10.4	11.0	11.6
0.005	8.0	8.6	9.3	9.9	10.5	11.2	11.8	12.5	13.1	13.8
0.01	8.9	9.5	10.2	10.9	11.5	12.2	12.9	13.6	14.3	15.0
0.025	10.3	11.0	11.7	12.4	13.1	13.8	14.6	15.3	16.0	16.8
0.05	11.6	12.3	13.1	13.8	14.6	15.4	16.2	16.9	17.7	18.5
0.1	13.2	14.0	14.8	15.7	16.5	17.3	18.1	18.9	19.8	20.6
0.25	16.3	17.2	18.1	19.0	19.9	20.8	21.7	22.7	23.6	24.5
0.5	20.3	21.3	22.3	23.3	24.3	25.3	26.3	27.3	28.3	29.3
0.75	24.9	26.0	27.1	28.2	29.3	30.4	31.5	32.6	33.7	34.8
0.9	29.6	30.8	32.0	33.2	34.4	35.6	36.7	37.9	39.1	40.3
0.95	32.7	33.9	35.2	36.4	37.7	38.9	40.1	41.3	42.6	43.8
0.975	35.5	36.8	38.1	39.4	40.6	41.9	43.2	44.5	45.7	47.0
0.99	38.9	40.3	41.6	43.0	44.3	45.6	47.0	48.3	49.6	50.9
0.995	41.4	42.8	44.2	45.6	46.9	48.3	49.6	51.0	52.3	53.7
0.999	46.8	48.3	49.7	51.2	52.6	54.1	55.5	56.9	58.3	59.7

$F(x)$	Número de grados de libertad							
	40	50	60	70	80	90	100	> 100 (Aproximación)
0.001	17.9	24.7	31.7	39.0	46.5	54.2	61.9	$\frac{1}{2}(h - 3.09)^2$
0.005	20.7	28.0	35.5	43.3	51.2	59.2	67.3	$\frac{1}{2}(h - 2.58)^2$
0.01	22.2	29.7	37.5	45.4	53.5	61.8	70.1	$\frac{1}{2}(h - 2.33)^2$
0.025	24.4	32.4	40.5	48.8	57.2	65.6	74.2	$\frac{1}{2}(h - 1.96)^2$
0.05	26.5	34.8	43.2	51.7	60.4	69.1	77.9	$\frac{1}{2}(h - 1.64)^2$
0.1	29.1	37.7	46.5	55.3	64.3	73.3	82.4	$\frac{1}{2}(h - 1.28)^2$
0.25	33.7	42.9	52.3	61.7	71.1	80.6	90.1	$\frac{1}{2}(h - 0.67)^2$
0.5	39.3	49.3	59.3	69.3	79.3	89.3	99.3	$\frac{1}{2}h^2$
0.75	45.6	56.3	67.0	77.6	88.1	98.6	109.1	$\frac{1}{2}(h + 0.67)^2$
0.9	51.8	63.2	74.4	85.5	96.6	107.6	118.5	$\frac{1}{2}(h + 1.28)^2$
0.95	55.8	67.5	79.1	90.5	101.9	113.1	124.3	$\frac{1}{2}(h + 1.64)^2$
0.975	59.3	71.4	83.3	95.0	106.6	118.1	129.6	$\frac{1}{2}(h + 1.96)^2$
0.99	63.7	76.2	88.4	100.4	112.3	124.1	135.8	$\frac{1}{2}(h + 2.33)^2$
0.995	66.8	79.5	92.0	104.2	116.3	128.3	140.2	$\frac{1}{2}(h + 2.58)^2$
0.999	73.4	86.7	99.6	112.3	124.8	137.2	149.4	$\frac{1}{2}(h + 3.09)^2$

En la última columna, $h = \sqrt{2m} - 1$, donde m es el número de grados de libertad.

Distribución normal

Función de distribución



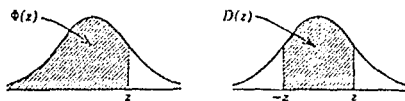
$$\Phi(z) = \Phi(z) - \Phi(-z)$$

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z), \quad \Phi(0) = 0.5$$

Tablas más extensas: National Bureau of Standards (1953), Hald (1962). Índice para otras tablas: Greenwood and Hartley (1961) (ver el apéndice 3).

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
	0.	0.	0.		0.	0.	0.		0.	0.	0.
0.01	4960	5040	0080	0.51	3050	6950	3899	1.01	1562	8438	6875
0.02	4920	5080	0160	0.52	3015	6985	3969	1.02	1539	8461	6923
0.03	4880	5120	0239	0.53	2981	7019	4039	1.03	1515	8485	6970
0.04	4840	5160	0319	0.54	2946	7054	4108	1.04	1492	8508	7017
0.05	4801	5199	0399	0.55	2912	7088	4177	1.05	1469	8531	7063
0.06	4761	5239	0478	0.56	2877	7123	4245	1.06	1446	8554	7109
0.07	4721	5279	0558	0.57	2843	7157	4313	1.07	1423	8577	7154
0.08	4681	5319	0638	0.58	2810	7190	4381	1.08	1401	8599	7199
0.09	4641	5359	0717	0.59	2776	7224	4448	1.09	1379	8621	7243
0.10	4602	5398	0797	0.60	2743	7257	4515	1.10	1357	8643	7287
0.11	4562	5438	0876	0.61	2709	7291	4581	1.11	1335	8665	7330
0.12	4522	5478	0955	0.62	2676	7324	4647	1.12	1314	8686	7373
0.13	4483	5517	1034	0.63	2643	7357	4713	1.13	1292	8708	7415
0.14	4443	5557	1113	0.64	2611	7389	4778	1.14	1271	8729	7457
0.15	4404	5596	1192	0.65	2578	7422	4843	1.15	1251	8749	7499
0.16	4364	5636	1271	0.66	2546	7454	4907	1.16	1230	8770	7540
0.17	4325	5675	1350	0.67	2514	7486	4971	1.17	1210	8790	7580
0.18	4286	5714	1428	0.68	2483	7517	5035	1.18	1190	8810	7620
0.19	4247	5753	1507	0.69	2451	7549	5098	1.19	1170	8830	7660
0.20	4207	5793	1585	0.70	2420	7580	5161	1.20	1151	8849	7699
0.21	4168	5832	1663	0.71	2389	7611	5223	1.21	1131	8869	7737
0.22	4129	5871	1741	0.72	2358	7642	5285	1.22	1112	8888	7775
0.23	4090	5910	1819	0.73	2327	7673	5346	1.23	1093	8907	7813
0.24	4052	5948	1897	0.74	2296	7704	5407	1.24	1074	8925	7850
0.25	4013	5987	1974	0.75	2266	7735	5467	1.25	1055	8944	7887
0.26	3974	6026	2051	0.76	2236	7766	5527	1.26	1036	8962	7923
0.27	3935	6064	2128	0.77	2206	7797	5587	1.27	1017	8980	7959
0.28	3897	6103	2205	0.78	2177	7827	5646	1.28	1000	8997	7995
0.29	3859	6141	2282	0.79	2148	7858	5705	1.29	983	9015	8029
0.30	3821	6179	2358	0.80	2119	7888	5763	1.30	966	9032	8064
0.31	3783	6217	2434	0.81	2090	7918	5821	1.31	949	9049	8098
0.32	3745	6255	2510	0.82	2061	7948	5878	1.32	933	9066	8132
0.33	3707	6293	2586	0.83	2033	7977	5935	1.33	917	9082	8165
0.34	3669	6331	2661	0.84	2005	8007	5991	1.34	901	9099	8198
0.35	3632	6368	2737	0.85	1977	8037	6047	1.35	885	9115	8230
0.36	3594	6406	2812	0.86	1949	8067	6102	1.36	869	9131	8262
0.37	3557	6443	2886	0.87	1922	8097	6157	1.37	853	9147	8293
0.38	3520	6480	2960	0.88	1894	8126	6211	1.38	838	9162	8324
0.39	3483	6517	3035	0.89	1867	8155	6265	1.39	823	9177	8355
0.40	3446	6554	3108	0.90	1841	8184	6319	1.40	808	9192	8385
0.41	3409	6591	3182	0.91	1814	8213	6372	1.41	793	9207	8415
0.42	3372	6628	3255	0.92	1788	8242	6425	1.42	778	9222	8444
0.43	3336	6664	3328	0.93	1762	8271	6478	1.43	763	9236	8473
0.44	3300	6700	3401	0.94	1736	8300	6530	1.44	749	9251	8501
0.45	3264	6736	3473	0.95	1711	8329	6582	1.45	735	9265	8529
0.46	3228	6772	3545	0.96	1685	8358	6634	1.46	721	9279	8557
0.47	3192	6808	3616	0.97	1660	8387	6685	1.47	707	9292	8584
0.48	3156	6844	3688	0.98	1635	8416	6736	1.48	694	9306	8611
0.49	3121	6879	3759	0.99	1611	8445	6787	1.49	681	9319	8638
0.50	3085	6915	3829	1.00	1587	8474	6837	1.50	0668	9332	8664

Función de distribución



z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
	0.	0.	0.		0.	0.	0.		0.	0.	0.
1.51	0655	9345	8690	2.01	0222	9778	9556	2.51	0060	9940	9879
1.52	0643	9357	8715	2.02	0217	9783	9566	2.52	0059	9941	9883
1.53	0630	9370	8740	2.03	0212	9788	9576	2.53	0057	9943	9886
1.54	0618	9382	8764	2.04	0207	9793	9586	2.54	0055	9945	9889
1.55	0606	9394	8789	2.05	0202	9798	9596	2.55	0054	9946	9892
1.56	0594	9406	8812	2.06	0197	9803	9606	2.56	0052	9948	9895
1.57	0582	9418	8836	2.07	0192	9808	9615	2.57	0051	9949	9898
1.58	0571	9429	8859	2.08	0188	9812	9625	2.58	0049	9951	9901
1.59	0559	9441	8882	2.09	0183	9817	9634	2.59	0048	9952	9904
1.60	0548	9452	8904	2.10	0179	9821	9643	2.60	0047	9953	9907
1.61	0537	9463	8926	2.11	0174	9826	9651	2.61	0045	9955	9909
1.62	0526	9474	8948	2.12	0170	9830	9660	2.62	0044	9956	9912
1.63	0516	9484	8969	2.13	0166	9834	9668	2.63	0043	9957	9915
1.64	0505	9495	8990	2.14	0162	9838	9676	2.64	0041	9959	9917
1.65	0495	9505	9011	2.15	0158	9842	9684	2.65	0040	9960	9920
1.66	0485	9515	9031	2.16	0154	9846	9692	2.66	0039	9961	9922
1.67	0475	9525	9051	2.17	0150	9850	9700	2.67	0038	9962	9924
1.68	0465	9535	9070	2.18	0146	9854	9707	2.68	0037	9963	9926
1.69	0455	9545	9090	2.19	0143	9857	9715	2.69	0036	9964	9929
1.70	0446	9554	9109	2.20	0139	9861	9722	2.70	0035	9965	9931
1.71	0436	9564	9127	2.21	0136	9864	9729	2.71	0034	9966	9933
1.72	0427	9573	9146	2.22	0132	9868	9736	2.72	0033	9967	9935
1.73	0418	9582	9164	2.23	0129	9871	9743	2.73	0032	9968	9937
1.74	0409	9591	9181	2.24	0125	9875	9749	2.74	0031	9969	9939
1.75	0401	9599	9199	2.25	0122	9878	9756	2.75	0030	9970	9940
1.76	0392	9608	9216	2.26	0119	9881	9762	2.76	0029	9971	9942
1.77	0384	9616	9233	2.27	0116	9884	9768	2.77	0028	9972	9944
1.78	0375	9625	9249	2.28	0113	9887	9774	2.78	0027	9973	9946
1.79	0367	9633	9265	2.29	0110	9890	9780	2.79	0026	9974	9947
1.80	0359	9641	9281	2.30	0107	9893	9786	2.80	0026	9974	9949
1.81	0351	9649	9297	2.31	0104	9896	9791	2.81	0025	9975	9950
1.82	0344	9656	9312	2.32	0102	9898	9797	2.82	0024	9976	9952
1.83	0336	9664	9328	2.33	0099	9901	9802	2.83	0023	9977	9953
1.84	0329	9671	9342	2.34	0096	9904	9807	2.84	0023	9977	9955
1.85	0322	9678	9357	2.35	0094	9906	9812	2.85	0022	9978	9956
1.86	0314	9686	9371	2.36	0091	9909	9817	2.86	0021	9979	9958
1.87	0307	9693	9385	2.37	0089	9911	9822	2.87	0021	9979	9959
1.88	0301	9699	9399	2.38	0087	9913	9827	2.88	0020	9980	9960
1.89	0294	9706	9412	2.39	0084	9916	9832	2.89	0019	9981	9961
1.90	0287	9713	9426	2.40	0082	9918	9836	2.90	0019	9981	9963
1.91	0281	9719	9439	2.41	0080	9920	9840	2.91	0018	9982	9964
1.92	0274	9726	9451	2.42	0078	9922	9845	2.92	0018	9982	9965
1.93	0268	9732	9464	2.43	0075	9925	9849	2.93	0017	9983	9966
1.94	0262	9738	9476	2.44	0073	9927	9853	2.94	0016	9984	9967
1.95	0256	9744	9488	2.45	0071	9929	9857	2.95	0016	9984	9968
1.96	0250	9750	9500	2.46	0069	9931	9861	2.96	0015	9985	9969
1.97	0244	9756	9512	2.47	0068	9932	9865	2.97	0015	9985	9970
1.98	0239	9761	9523	2.48	0066	9934	9869	2.98	0014	9986	9971
1.99	0233	9767	9534	2.49	0064	9936	9872	2.99	0014	9986	9972
2.00	0228	9772	9545	2.50	0062	9938	9876	3.00	0013	9987	9973

Prueba de Kolmogorov-Smirnov

n = Tamaño de la muestra

n	$\alpha = 20\%$	$\alpha = 10\%$	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 2\%$	$\alpha = 1\%$
	0.	0.	0.	0.	0.
1	900	950	975	990	995
2	684	776	842	900	929
3	565	636	708	785	829
4	493	565	624	689	734
5	447	509	563	627	669
6	410	468	519	577	617
7	381	436	483	538	576
8	359	410	454	507	542
9	339	387	430	480	513
10	323	369	409	457	486
11	308	352	391	437	468
12	296	338	375	419	449
13	285	325	361	404	432
14	275	314	349	390	418
15	266	304	338	377	404
16	258	295	327	366	392
17	250	286	318	355	381
18	244	279	309	346	371
19	237	271	301	337	361
20	232	265	294	329	352
21	226	259	287	321	344
22	221	253	281	314	337
23	216	247	275	307	330
24	212	242	269	301	323
25	208	238	264	295	317
26	204	233	259	290	311
27	200	229	254	284	305
28	197	225	250	279	300
29	193	221	246	275	295
30	190	218	242	270	290
35	177	202	224	251	269
40	165	189	210	235	252
45	156	179	198	222	238
50	148	170	188	211	226
55	142	162	180	201	216
60	136	155	172	193	207
65	131	149	166	185	199
70	126	144	160	179	192
75	122	139	154	173	185
80	118	135	150	167	179
85	114	131	145	162	174
90	111	127	141	158	169
95	108	124	137	154	165
100	106	121	134	150	161
Aproximación para n grande	$1.07/\sqrt{n}$	$1.22/\sqrt{n}$	$1.36/\sqrt{n}$	$1.52/\sqrt{n}$	$1.63/\sqrt{n}$

- NORMAL DISTRIBUTION^a

Selected values: $w_{0.0001} = -3.7190$ $w_{0.0005} = -3.2905$ $w_{0.025} = -1.9600$ $w_{0.05} = -1.6449$
 $w_{0.9999} = 3.7190$ $w_{0.9995} = 3.2905$ $w_{0.975} = 1.9600$ $w_{0.95} = 1.6449$

p	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
.00		-3.0902	-2.8782	-2.7478	-2.6521	-2.5758	-2.5121	-2.4573	-2.4089	-2.3656
.01	-2.3263	-2.2904	-2.2571	-2.2262	-2.1973	-2.1701	-2.1444	-2.1201	-2.0969	-2.0749
.02	-2.0537	-2.0335	-2.0141	-1.9954	-1.9774	-1.9600	-1.9431	-1.9268	-1.9110	-1.8957
.03	-1.8808	-1.8663	-1.8522	-1.8384	-1.8250	-1.8119	-1.7991	-1.7866	-1.7744	-1.7624
.04	-1.7507	-1.7392	-1.7279	-1.7169	-1.7060	-1.6954	-1.6849	-1.6747	-1.6646	-1.6546
.05	-1.6449	-1.6352	-1.6258	-1.6164	-1.6072	-1.5982	-1.5893	-1.5805	-1.5718	-1.5632
.06	-1.5548	-1.5464	-1.5382	-1.5301	-1.5220	-1.5141	-1.5063	-1.4985	-1.4909	-1.4833
.07	-1.4758	-1.4684	-1.4611	-1.4538	-1.4466	-1.4395	-1.4325	-1.4255	-1.4187	-1.4118
.08	-1.4051	-1.3984	-1.3917	-1.3852	-1.3787	-1.3722	-1.3658	-1.3595	-1.3532	-1.3469
.09	-1.3408	-1.3346	-1.3285	-1.3225	-1.3165	-1.3106	-1.3047	-1.2988	-1.2930	-1.2873
.10	-1.2816	-1.2759	-1.2702	-1.2646	-1.2591	-1.2536	-1.2481	-1.2426	-1.2372	-1.2319
.11	-1.2265	-1.2212	-1.2160	-1.2107	-1.2055	-1.2004	-1.1952	-1.1901	-1.1850	-1.1800
.12	-1.1750	-1.1700	-1.1650	-1.1601	-1.1552	-1.1503	-1.1455	-1.1407	-1.1359	-1.1311
.13	-1.1264	-1.1217	-1.1170	-1.1123	-1.1077	-1.1031	-1.0985	-1.0939	-1.0893	-1.0848
.14	-1.0803	-1.0758	-1.0714	-1.0669	-1.0625	-1.0581	-1.0537	-1.0494	-1.0450	-1.0407
.15	-1.0364	-1.0322	-1.0279	-1.0237	-1.0194	-1.0152	-1.0110	-1.0069	-1.0027	-0.9986
.16	-0.9945	-0.9904	-0.9863	-0.9822	-0.9782	-0.9741	-0.9701	-0.9661	-0.9621	-0.9581
.17	-0.9542	-0.9502	-0.9463	-0.9424	-0.9385	-0.9346	-0.9307	-0.9269	-0.9230	-0.9192
.18	-0.9154	-0.9116	-0.9078	-0.9040	-0.9002	-0.8965	-0.8927	-0.8890	-0.8853	-0.8816
.19	-0.8779	-0.8742	-0.8705	-0.8669	-0.8633	-0.8596	-0.8560	-0.8524	-0.8488	-0.8452
.20	-0.8416	-0.8381	-0.8345	-0.8310	-0.8274	-0.8239	-0.8204	-0.8169	-0.8134	-0.8099
.21	-0.8064	-0.8030	-0.7995	-0.7961	-0.7926	-0.7892	-0.7858	-0.7824	-0.7790	-0.7756
.22	-0.7722	-0.7688	-0.7655	-0.7621	-0.7588	-0.7554	-0.7521	-0.7488	-0.7454	-0.7421
.23	-0.7388	-0.7356	-0.7323	-0.7290	-0.7257	-0.7225	-0.7192	-0.7160	-0.7128	-0.7095
.24	-0.7063	-0.7031	-0.6999	-0.6967	-0.6935	-0.6903	-0.6871	-0.6840	-0.6808	-0.6776

<i>p</i>	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
.25	-0.6745	-0.6713	-0.6682	-0.6651	-0.6620	-0.6588	-0.6557	-0.6526	-0.6495	0.6464
.26	-0.6433	-0.6403	-0.6372	-0.6341	-0.6311	-0.6280	-0.6250	-0.6219	-0.6189	-0.6158
.27	-0.6128	-0.6098	-0.6068	-0.6038	-0.6008	-0.5978	-0.5948	-0.5918	-0.5888	-0.5858
.28	-0.5828	-0.5799	-0.5769	-0.5740	-0.5710	-0.5681	-0.5651	0.5622	-0.5592	-0.5563
.29	-0.5534	-0.5505	-0.5476	-0.5446	-0.5417	-0.5388	-0.5359	-0.5330	-0.5302	-0.5273
.30	-0.5244	-0.5215	-0.5187	-0.5158	-0.5129	-0.5101	-0.5072	-0.5044	-0.5015	-0.4987
.31	-0.4959	-0.4930	-0.4902	-0.4874	-0.4845	-0.4817	-0.4789	-0.4761	-0.4733	-0.4705
.32	-0.4677	-0.4649	-0.4621	-0.4593	-0.4565	-0.4538	-0.4510	-0.4482	-0.4454	-0.4427
.33	-0.4399	-0.4372	-0.4344	-0.4316	-0.4289	-0.4261	-0.4234	-0.4207	-0.4179	-0.4152
.34	-0.4125	-0.4097	-0.4070	-0.4043	-0.4016	-0.3989	-0.3961	-0.3934	-0.3907	-0.3880
.35	-0.3853	-0.3826	-0.3799	-0.3772	-0.3745	-0.3719	-0.3692	-0.3665	-0.3638	-0.3611
.36	-0.3585	-0.3558	-0.3531	-0.3505	-0.3478	-0.3451	-0.3425	-0.3398	-0.3372	-0.3345
.37	-0.3319	-0.3292	-0.3266	-0.3239	-0.3213	-0.3186	-0.3160	-0.3134	-0.3107	-0.3081
.38	-0.3055	-0.3029	-0.3002	-0.2976	-0.2950	-0.2924	-0.2898	-0.2871	-0.2845	-0.2819
.39	-0.2793	-0.2767	-0.2741	-0.2715	-0.2689	-0.2663	-0.2637	-0.2611	-0.2585	-0.2559
.40	-0.2533	-0.2508	-0.2482	-0.2456	-0.2430	-0.2404	-0.2378	-0.2353	-0.2327	-0.2301
.41	-0.2275	-0.2250	-0.2224	-0.2198	-0.2173	-0.2147	-0.2121	-0.2096	-0.2070	-0.2045
.42	-0.2019	-0.1993	-0.1968	-0.1942	-0.1917	-0.1891	-0.1866	-0.1840	-0.1814	-0.1789
.43	-0.1764	-0.1738	-0.1713	-0.1687	-0.1662	-0.1637	-0.1611	-0.1586	-0.1560	-0.1535
.44	-0.1510	-0.1484	-0.1459	-0.1434	-0.1408	-0.1383	-0.1358	-0.1332	-0.1307	-0.1282
.45	-0.1257	-0.1231	-0.1206	-0.1181	-0.1156	-0.1130	-0.1105	-0.1080	-0.1055	-0.1030
.46	-0.1004	-0.0979	-0.0954	-0.0929	-0.0904	-0.0878	-0.0853	-0.0828	-0.0803	-0.0778
.47	-0.0753	-0.0728	-0.0702	-0.0677	-0.0652	-0.0627	-0.0602	-0.0577	-0.0552	-0.0527
.48	-0.0502	-0.0476	-0.0451	-0.0426	-0.0401	-0.0376	-0.0351	-0.0326	-0.0301	-0.0276
.49	-0.0251	-0.0226	-0.0201	-0.0175	-0.0150	-0.0125	-0.0100	-0.0075	-0.0050	-0.0025
.50	0.0000	0.0025	0.0050	0.0075	0.0100	0.0125	0.0150	0.0175	0.0201	0.0226
.51	0.0251	0.0276	0.0301	0.0326	0.0351	0.0376	0.0401	0.0426	0.0451	0.0476
.52	0.0502	0.0527	0.0552	0.0577	0.0602	0.0627	0.0652	0.0677	0.0702	0.0728
.53	0.0753	0.0778	0.0803	0.0828	0.0853	0.0878	0.0904	0.0929	0.0954	0.0979
.54	0.1004	0.1030	0.1055	0.1080	0.1105	0.1130	0.1156	0.1181	0.1206	0.1231

p	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
.55	0.1257	0.1282	0.1307	0.1332	0.1358	0.1383	0.1408	0.1434	0.1459	0.1484
.56	0.1510	0.1535	0.1560	0.1586	0.1611	0.1637	0.1662	0.1687	0.1713	0.1738
.57	0.1764	0.1789	0.1815	0.1840	0.1866	0.1891	0.1917	0.1942	0.1968	0.1993
.58	0.2019	0.2045	0.2070	0.2096	0.2121	0.2147	0.2173	0.2198	0.2224	0.2250
.59	0.2275	0.2301	0.2327	0.2353	0.2378	0.2404	0.2430	0.2456	0.2482	0.2508
.60	0.2533	0.2559	0.2585	0.2611	0.2637	0.2663	0.2689	0.2715	0.2741	0.2767
.61	0.2793	0.2819	0.2845	0.2871	0.2898	0.2924	0.2950	0.2976	0.3002	0.3029
.62	0.3055	0.3081	0.3107	0.3134	0.3160	0.3186	0.3213	0.3239	0.3266	0.3292
.63	0.3319	0.3345	0.3372	0.3398	0.3425	0.3451	0.3478	0.3505	0.3531	0.3558
.64	0.3585	0.3611	0.3638	0.3665	0.3692	0.3719	0.3745	0.3772	0.3799	0.3826
.65	0.3853	0.3880	0.3907	0.3934	0.3961	0.3989	0.4016	0.4043	0.4070	0.4097
.66	0.4125	0.4152	0.4179	0.4207	0.4234	0.4261	0.4289	0.4316	0.4344	0.4372
.67	0.4399	0.4427	0.4454	0.4482	0.4510	0.4538	0.4565	0.4593	0.4621	0.4649
.68	0.4677	0.4705	0.4733	0.4761	0.4789	0.4817	0.4845	0.4874	0.4902	0.4930
.69	0.4959	0.4987	0.5015	0.5044	0.5072	0.5101	0.5129	0.5158	0.5187	0.5215
.70	0.5244	0.5273	0.5302	0.5330	0.5359	0.5388	0.5417	0.5446	0.5476	0.5505
.71	0.5534	0.5563	0.5592	0.5622	0.5651	0.5681	0.5710	0.5740	0.5769	0.5799
.72	0.5828	0.5858	0.5888	0.5918	0.5948	0.5978	0.6008	0.6038	0.6068	0.6098
.73	0.6128	0.6158	0.6189	0.6219	0.6250	0.6280	0.6311	0.6341	0.6372	0.6403
.74	0.6433	0.6464	0.6495	0.6526	0.6557	0.6588	0.6620	0.6651	0.6682	0.6713
.75	0.6745	0.6776	0.6808	0.6840	0.6871	0.6903	0.6935	0.6967	0.6999	0.7031
.76	0.7063	0.7095	0.7128	0.7160	0.7192	0.7225	0.7257	0.7290	0.7323	0.7356
.77	0.7388	0.7421	0.7454	0.7488	0.7521	0.7554	0.7588	0.7621	0.7655	0.7688
.78	0.7722	0.7756	0.7790	0.7824	0.7858	0.7892	0.7926	0.7961	0.7995	0.8030
.79	0.8064	0.8099	0.8134	0.8169	0.8204	0.8239	0.8274	0.8310	0.8345	0.8381
.80	0.8416	0.8452	0.8488	0.8524	0.8560	0.8596	0.8633	0.8669	0.8705	0.8742
.81	0.8779	0.8816	0.8853	0.8890	0.8927	0.8965	0.9002	0.9040	0.9078	0.9116
.82	0.9154	0.9192	0.9230	0.9269	0.9307	0.9346	0.9385	0.9424	0.9463	0.9502

p	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
.83	0.9542	0.9581	0.9621	0.9661	0.9701	0.9741	0.9782	0.9822	0.9863	0.9904
.84	0.9945	0.9986	1.0027	1.0069	1.0110	1.0152	1.0194	1.0237	1.0279	1.0322
.85	1.0364	1.0407	1.0450	1.0494	1.0537	1.0581	1.0625	1.0669	1.0714	1.0758
.86	1.0803	1.0848	1.0893	1.0939	1.0985	1.1031	1.1077	1.1123	1.1170	1.1217
.87	1.1264	1.1311	1.1359	1.1407	1.1455	1.1503	1.1552	1.1601	1.1650	1.1700
.88	1.1750	1.1800	1.1850	1.1901	1.1952	1.2004	1.2055	1.2107	1.2160	1.2212
.89	1.2265	1.2319	1.2372	1.2426	1.2481	1.2536	1.2591	1.2646	1.2702	1.2759
.90	1.2816	1.2873	1.2930	1.2988	1.3047	1.3106	1.3165	1.3225	1.3285	1.3346
.91	1.3408	1.3469	1.3532	1.3595	1.3658	1.3722	1.3787	1.3852	1.3917	1.3984
.92	1.4051	1.4118	1.4187	1.4255	1.4325	1.4395	1.4466	1.4538	1.4611	1.4684
.93	1.4758	1.4833	1.4909	1.4985	1.5063	1.5141	1.5220	1.5301	1.5382	1.5464
.94	1.5548	1.5632	1.5718	1.5805	1.5893	1.5982	1.6072	1.6164	1.6258	1.6352
.95	1.6449	1.6546	1.6646	1.6747	1.6849	1.6954	1.7060	1.7169	1.7279	1.7392
.96	1.7507	1.7624	1.7744	1.7866	1.7991	1.8119	1.8250	1.8384	1.8522	1.8663
.97	1.8808	1.8957	1.9110	1.9268	1.9431	1.9600	1.9774	1.9954	2.0141	2.0335
.98	2.0537	2.0749	2.0969	2.1201	2.1444	2.1701	2.1973	2.2262	2.2571	2.2904
.99	2.3263	2.3656	2.4089	2.4573	2.5121	2.5758	2.6521	2.7478	2.8782	3.0902

SOURCE: Adapted from Tables 3 and 4, Pearson and Hartley (1970), with permission from the Biometrika Trustees.

* The entries in this table are quantiles w_p of the standard normal random variable W , selected so $P(W \leq w_p) = p$ and $P(W > w_p) = 1 - p$. Note that the value of p to two decimal places determines which row to use; the third decimal place of p determines which column to use to find w_p .

BINOMIAL DISTRIBUTION^a

n	y	p =								
		.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45
1	0	.9500	.9000	.8500	.8000	.7500	.7000	.6500	.6000	.5500
	1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	0	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4225	.3600	.3025
	1	.9975	.9900	.9775	.9600	.9375	.9100	.8775	.8400	.7975
3	0	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2746	.2160	.1664
	1	.9928	.9720	.9392	.8960	.8438	.7840	.7182	.6480	.5748
4	0	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1785	.1296	.0915
	1	.9860	.9477	.8905	.8192	.7383	.6517	.5630	.4752	.3910
5	0	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1160	.0778	.0503
	1	.9774	.9185	.8352	.7373	.6328	.5282	.4284	.3370	.2562
6	0	.7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0754	.0467	.0277
	1	.9672	.8857	.7765	.6554	.5339	.4202	.3191	.2333	.1636
7	0	.6983	.4783	.3206	.2097	.1335	.0824	.0490	.0280	.0152
	1	.9556	.8503	.7166	.5767	.4449	.3294	.2338	.1586	.1024
8	0	.6662	.4343	.2962	.1850	.1135	.0671	.0382	.0210	.0116
	1	.9338	.8157	.6838	.5550	.4365	.3329	.2418	.1610	.0984
9	0	.6389	.4049	.2799	.1700	.1035	.0599	.0330	.0180	.0090
	1	.9111	.7851	.6651	.5500	.4465	.3536	.2718	.1910	.1124
10	0	.6158	.3808	.2608	.1530	.0915	.0500	.0260	.0130	.0060
	1	.8842	.7592	.6392	.5300	.4335	.3466	.2688	.1910	.1144
11	0	.5974	.3614	.2454	.1400	.0835	.0450	.0230	.0110	.0050
	1	.8626	.7376	.6176	.5100	.4165	.3336	.2558	.1780	.1024
12	0	.5829	.3469	.2349	.1300	.0775	.0400	.0200	.0090	.0040
	1	.8471	.7221	.6021	.5000	.4065	.3236	.2458	.1680	.0924
13	0	.5704	.3344	.2254	.1200	.0705	.0350	.0170	.0070	.0030
	1	.8326	.7076	.5876	.4900	.3965	.3136	.2358	.1580	.0824
14	0	.5594	.3234	.2174	.1100	.0635	.0300	.0140	.0050	.0020
	1	.8176	.6926	.5726	.4700	.3765	.2936	.2158	.1380	.0624
15	0	.5499	.3139	.2119	.1000	.0575	.0270	.0120	.0040	.0010
	1	.8051	.6801	.5601	.4600	.3665	.2836	.2058	.1280	.0524
16	0	.5414	.3054	.2074	.0900	.0505	.0230	.0100	.0030	.0000
	1	.7926	.6676	.5476	.4500	.3565	.2736	.1958	.1180	.0424
17	0	.5339	.2979	.2039	.0800	.0435	.0190	.0070	.0020	.0000
	1	.7811	.6561	.5361	.4400	.3465	.2636	.1858	.1080	.0324
18	0	.5274	.2914	.1994	.0700	.0375	.0160	.0050	.0010	.0000
	1	.7706	.6456	.5256	.4300	.3365	.2536	.1758	.0980	.0224
19	0	.5219	.2854	.1954	.0500	.0305	.0120	.0030	.0000	.0000
	1	.7601	.6351	.5151	.4200	.3265	.2436	.1658	.0880	.0124
20	0	.5174	.2794	.1914	.0300	.0235	.0080	.0010	.0000	.0000
	1	.7506	.6256	.5056	.4100	.3165	.2336	.1558	.0780	.0024

^a Y has the binomial distribution with parameters n and p. The entries are the values of $P(Y \leq y) = \sum_{i=0}^y \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$, for p ranging from .05 to .95.

n	y	$p = .50$	$.55$	$.60$	$.65$	$.70$	$.75$	$.80$	$.85$	$.90$	$.95$
8	0	.0039	.0017	.0007	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0352	.0181	.0085	.0036	.0013	.0004	.0001	.0000	.0000	.0000
	2	.1445	.0885	.0498	.0253	.0113	.0042	.0012	.0002	.0000	.0000
	3	.3633	.2604	.1737	.1061	.0580	.0273	.0104	.0029	.0004	.0000
	4	.6367	.5230	.4059	.2936	.1941	.1138	.0563	.0214	.0050	.0004
	5	.8555	.7799	.6846	.5722	.4482	.3215	.2031	.1052	.0381	.0058
	6	.9648	.9368	.8936	.8309	.7447	.6329	.4967	.3428	.1869	.0572
	7	.9961	.9916	.9832	.9681	.9424	.8999	.8322	.7275	.5695	.3366
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
9	0	.0020	.0008	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0195	.0091	.0038	.0014	.0004	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0898	.0498	.0250	.0112	.0043	.0013	.0003	.0000	.0000	.0000
	3	.2539	.1658	.0994	.0536	.0253	.0100	.0031	.0006	.0001	.0000
	4	.5000	.3786	.2666	.1717	.0988	.0489	.0196	.0056	.0009	.0000
	5	.7461	.6386	.5174	.3911	.2703	.1657	.0856	.0339	.0083	.0006
	6	.9102	.8505	.7682	.6627	.5372	.3993	.2618	.1409	.0530	.0084
	7	.9805	.9615	.9295	.8789	.8040	.6997	.5638	.4005	.2252	.0712
	8	.9980	.9954	.9899	.9793	.9596	.9249	.8658	.7684	.6126	.3698
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10	0	.0010	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0107	.0045	.0017	.0005	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0547	.0274	.0123	.0048	.0016	.0004	.0001	.0000	.0000	.0000
	3	.1719	.1020	.0548	.0260	.0106	.0035	.0009	.0001	.0000	.0000
	4	.3770	.2616	.1662	.0949	.0473	.0197	.0064	.0014	.0001	.0000
	5	.6230	.4956	.3669	.2485	.1503	.0781	.0328	.0099	.0016	.0001
	6	.8281	.7340	.6177	.4862	.3504	.2241	.1209	.0500	.0128	.0010
	7	.9453	.9004	.8327	.7384	.6172	.4744	.3222	.1798	.0702	.0115
	8	.9893	.9767	.9536	.9140	.8507	.7560	.6242	.4557	.2639	.0861
	9	.9990	.9975	.9940	.9865	.9718	.9437	.8926	.8031	.6513	.4013
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
11	0	.0005	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0059	.0022	.0007	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0327	.0148	.0059	.0020	.0006	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.1133	.0610	.0293	.0122	.0043	.0012	.0002	.0000	.0000	.0000
	4	.2744	.1738	.0994	.0501	.0216	.0076	.0020	.0003	.0000	.0000
	5	.5000	.3669	.2465	.1487	.0782	.0343	.0117	.0027	.0003	.0000
	6	.7256	.6029	.4672	.3317	.2103	.1146	.0504	.0159	.0028	.0001
	7	.8867	.8089	.7037	.5744	.4304	.2867	.1611	.0694	.0185	.0016
	8	.9673	.9348	.8811	.7999	.6873	.5448	.3826	.2212	.0896	.0152
	9	.9941	.9861	.9698	.9394	.8870	.8029	.6779	.5078	.3026	.1019
	10	.9995	.9986	.9964	.9912	.9802	.9578	.9141	.8327	.6862	.4312
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

n	y	p =								
		.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45
12	0	.5404	.2824	.1422	.0687	.0317	.0138	.0057	.0022	.0008
	1	.8816	.6590	.4435	.2749	.1584	.0850	.0424	.0196	.0083
	2	.9804	.8891	.7358	.5583	.3907	.2528	.1513	.0834	.0421
	3	.9978	.9744	.9078	.7946	.6488	.4925	.3467	.2253	.1345
	4	.9998	.9957	.9761	.9274	.8424	.7237	.5833	.4382	.3044
	5	1.0000	.9995	.9954	.9806	.9456	.8822	.7873	.6652	.5269
	6	1.0000	.9999	.9993	.9961	.9857	.9614	.9154	.8418	.7393
	7	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9972	.9905	.9745	.9427	.8883
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9983	.9944	.9847	.9644
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9992	.9972	.9921
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9989
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
13	0	.5133	.2542	.1209	.0550	.0238	.0097	.0037	.0013	.0004
	1	.8646	.6213	.3983	.2336	.1267	.0637	.0296	.0126	.0049
	2	.9755	.8661	.6920	.5017	.3326	.2025	.1132	.0579	.0269
	3	.9969	.9658	.8820	.7473	.5843	.4206	.2783	.1686	.0929
	4	.9997	.9935	.9658	.9009	.7940	.6543	.5005	.3530	.2279
	5	1.0000	.9991	.9925	.9700	.9198	.8346	.7159	.5744	.4268
	6	1.0000	.9999	.9987	.9930	.9757	.9376	.8705	.7712	.6437
	7	1.0000	1.0000	.9998	.9988	.9944	.9818	.9538	.9023	.8212
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9990	.9960	.9874	.9679	.9302
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9993	.9975	.9922	.9797
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9987	.9959
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9995
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
14	0	.4877	.2288	.1028	.0440	.0178	.0068	.0024	.0008	.0002
	1	.8470	.5846	.3567	.1979	.1010	.0475	.0205	.0081	.0029
	2	.9699	.8416	.6479	.4481	.2811	.1608	.0839	.0398	.0170
	3	.9958	.9559	.8535	.6982	.5213	.3552	.2205	.1243	.0632
	4	.9996	.9908	.9533	.8702	.7415	.5842	.4227	.2793	.1672
	5	1.0000	.9985	.9885	.9561	.8883	.7805	.6405	.4859	.3373
	6	1.0000	.9998	.9978	.9884	.9617	.9067	.8164	.6925	.5461
	7	1.0000	1.0000	.9997	.9976	.9897	.9685	.9247	.8499	.7414
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9996	.9978	.9917	.9757	.9417	.8811
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9983	.9940	.9825	.9574
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9989	.9961	.9886
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9978
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	

n	y	p =									
		.50	.55	.60	.65	.70	.75	.80	.85	.90	.95
12	0	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0032	.0011	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0193	.0079	.0028	.0008	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0730	.0356	.0153	.0056	.0017	.0004	.0001	.0000	.0000	.0000
	4	.1938	.1117	.0573	.0255	.0095	.0028	.0006	.0001	.0000	.0000
	5	.3872	.2607	.1582	.0846	.0386	.0143	.0039	.0007	.0001	.0000
	6	.6128	.4731	.3348	.2127	.1178	.0544	.0194	.0046	.0005	.0000
	7	.8062	.6956	.5618	.4167	.2763	.1576	.0726	.0239	.0043	.0002
	8	.9270	.8655	.7747	.6533	.5075	.3512	.2054	.0922	.0256	.0022
	9	.9807	.9579	.9166	.8487	.7472	.6093	.4417	.2642	.1109	.0196
	10	.9968	.9917	.9804	.9576	.9150	.8416	.7251	.5565	.3410	.1184
	11	.9998	.9992	.9978	.9943	.9862	.9683	.9313	.8578	.7176	.4596
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
13	0	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0017	.0005	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0112	.0041	.0013	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0461	.0203	.0078	.0025	.0007	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	.1334	.0698	.0321	.0126	.0040	.0010	.0002	.0000	.0000	.0000
	5	.2905	.1788	.0977	.0462	.0182	.0056	.0012	.0002	.0000	.0000
	6	.5000	.3563	.2288	.1295	.0624	.0243	.0070	.0013	.0001	.0000
	7	.7095	.5732	.4256	.2841	.1654	.0802	.0300	.0075	.0009	.0000
	8	.8666	.7721	.6470	.4995	.3457	.2060	.0991	.0342	.0065	.0003
	9	.9539	.9071	.8314	.7217	.5794	.4157	.2527	.1180	.0342	.0031
	10	.9888	.9731	.9421	.8868	.7975	.6674	.4983	.3080	.1339	.0245
	11	.9983	.9951	.9874	.9704	.9363	.8733	.7664	.6017	.3787	.1354
	12	.9999	.9996	.9987	.9963	.9903	.9762	.9450	.8791	.7458	.4867
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
14	0	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0009	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0065	.0022	.0006	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0287	.0114	.0039	.0011	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	.0898	.0426	.0175	.0060	.0017	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	.2120	.1189	.0583	.0243	.0083	.0022	.0004	.0000	.0000	.0000
	6	.3953	.2586	.1501	.0753	.0315	.0103	.0024	.0003	.0000	.0000
	7	.6047	.4539	.3075	.1836	.0933	.0383	.0116	.0022	.0002	.0000
	8	.7880	.6627	.5141	.3595	.2195	.1117	.0439	.0115	.0015	.0000
	9	.9102	.8328	.7207	.5773	.4158	.2585	.1298	.0467	.0092	.0004
	10	.9713	.9368	.8757	.7795	.6448	.4787	.3018	.1465	.0441	.0042
	11	.9935	.9830	.9602	.9161	.8392	.7189	.5519	.3521	.1584	.0301
	12	.9991	.9971	.9919	.9795	.9525	.8990	.8021	.6433	.4154	.1530
	13	.9999	.9998	.9992	.9976	.9932	.9822	.9560	.8972	.7712	.5123
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

n	y	p =								
		.05	.10	.15	.25	.30	.35	.40	.45	
15	0	.4633	.2059	.0874	.0134	.0047	.0016	.0005	.0001	
	1	.8290	.5490	.3186	.1082	.0353	.0142	.0052	.0017	
	2	.9638	.8159	.6042	.4261	.2668	.1727	.0905	.0424	
	3	.9945	.9444	.8227	.6865	.5155	.3519	.2173	.1204	
	4	.9994	.9873	.9383	.8516	.7216	.5643	.4032	.2608	
	5	.9999	.9978	.9832	.9434	.8689	.7548	.6098	.4522	
	6	1.0000	.9997	.9964	.9827	.9500	.8868	.7869	.6535	
	7	1.0000	1.0000	.9994	.9958	.9848	.9578	.9050	.8182	
	8	1.0000	1.0000	.9999	.9992	.9963	.9876	.9662	.9231	
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9993	.9972	.9907	
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9995	.9981	
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
16	0	.4401	.1853	.0743	.0237	.0100	.0033	.0003	.0001	
	1	.8108	.5147	.2839	.1397	.0635	.0261	.0098	.0033	
	2	.9571	.7892	.614	.453	.3171	.0994	.0451	.0183	
	3	.9930	.9316	.8299	.7077	.5405	.3459	.2139	.0651	
	4	.9991	.9830	.9209	.8242	.6302	.4499	.2892	.1666	
	5	.9999	.9967	.9765	.9141	.8103	.6518	.4900	.3238	
	6	1.0000	.9995	.9944	.9733	.9204	.8247	.6881	.5272	
	7	1.0000	.9999	.9989	.9940	.9729	.9256	.8406	.7161	
	8	1.0000	1.0000	.9998	.9985	.9925	.9743	.9329	.8577	
	9	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9984	.9929	.9771	.9417	
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9984	.9938	.9809	
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9987	.9951	
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9991	
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000		

n	y	p =									
		.50	.55	.60	.65	.70	.75	.80	.85	.90	.95
15	0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0037	.0011	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0176	.0063	.0019	.0005	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	.0592	.0255	.0093	.0028	.0007	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	.1509	.0769	.0338	.0124	.0037	.0008	.0001	.0000	.0000	.0000
	6	.3036	.1818	.0950	.0422	.0152	.0042	.0008	.0001	.0000	.0000
	7	.5000	.3465	.2131	.1132	.0500	.0173	.0042	.0006	.0000	.0000
	8	.6964	.5478	.3902	.2452	.1311	.0566	.0181	.0036	.0003	.0000
	9	.8491	.7392	.5968	.4357	.2784	.1484	.0611	.0168	.0022	.0001
	10	.9408	.8796	.7827	.6481	.4845	.3135	.1642	.0617	.0127	.0006
	11	.9824	.9576	.9095	.8273	.7031	.5387	.3518	.1773	.0556	.0055
	12	.9963	.9893	.9729	.9383	.8732	.7639	.6020	.3958	.1841	.0362
	13	.9995	.9983	.9948	.9858	.9647	.9198	.8329	.6814	.4510	.1710
	14	1.0000	.9999	.9995	.9984	.9953	.9866	.9648	.9126	.7941	.5367
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
16	0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	
	1	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	
	2	.0021	.0006	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	
	3	.0106	.0035	.0009	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	
	4	.0384	.0149	.0049	.0013	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	
	5	.1051	.0486	.0191	.0062	.0016	.0003	.0000	.0000	.0000	
	6	.2272	.1241	.0583	.0229	.0071	.0016	.0002	.0000	.0000	
	7	.4018	.2559	.1423	.0671	.0257	.0075	.0015	.0002	.0000	
	8	.5982	.4371	.2839	.1594	.0744	.0271	.0070	.0011	.0001	
	9	.7728	.6340	.4728	.3119	.1753	.0796	.0267	.0056	.0005	
	10	.8949	.8024	.6712	.5100	.3402	.1897	.0817	.0235	.0033	
	11	.9616	.9147	.8334	.7108	.5501	.3698	.2018	.0791	.0170	
	12	.9894	.9719	.9349	.8661	.7541	.5950	.4019	.2101	.0684	
	13	.9979	.9934	.9817	.9549	.9006	.8029	.6482	.4386	.2108	
	14	.9997	.9990	.9967	.9902	.9739	.9365	.8593	.7161	.4853	
15	1.0000	.9999	.9997	.9990	.9967	.9900	.9719	.9257	.8147		
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000		

<i>n</i>	<i>y</i>	<i>p</i> = .05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45
17	0	.4181	.1668	.0631	.0225	.0075	.0023	.0007	.0002	.0000
	1	.7922	.4818	.2525	.1182	.0501	.0193	.0067	.0021	.0006
	2	.9497	.7618	.5198	.3096	.1637	.0774	.0327	.0123	.0041
	3	.9912	.9174	.7556	.5489	.3530	.2019	.1028	.0464	.0184
	4	.9988	.9779	.9013	.7582	.5739	.3887	.2348	.1260	.0596
	5	.9999	.9953	.9681	.8943	.7653	.5968	.4197	.2639	.1471
	6	1.0000	.9992	.9917	.9623	.8929	.7752	.6188	.4478	.2902
	7	1.0000	.9999	.9983	.9891	.9598	.8954	.7872	.6405	.4743
	8	1.0000	1.0000	.9997	.9974	.9876	.9597	.9006	.8011	.6626
	9	1.0000	1.0000	1.0000	.9995	.9969	.9873	.9617	.9081	.8166
	10	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9968	.9880	.9652	.9174
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9993	.9970	.9894	.9699
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9975	.9914
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9995	.9981
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
18	0	.3972	.1501	.0536	.0180	.0056	.0016	.0004	.0001	.0000
	1	.7735	.4503	.2241	.0991	.0395	.0142	.0046	.0013	.0003
	2	.9419	.7338	.4797	.2713	.1353	.0600	.0236	.0082	.0025
	3	.9891	.9018	.7202	.5010	.3057	.1646	.0783	.0328	.0120
	4	.9985	.9718	.8794	.7164	.5187	.3327	.1886	.0942	.0411
	5	.9998	.9936	.9581	.8671	.7175	.5344	.3550	.2088	.1077
	6	1.0000	.9988	.9882	.9487	.8610	.7217	.5491	.3743	.2258
	7	1.0000	.9998	.9973	.9817	.9431	.8593	.7283	.5614	.3915
	8	1.0000	1.0000	.9995	.9957	.9807	.9404	.8609	.7368	.5778
	9	1.0000	1.0000	.9999	.9991	.9946	.9790	.9403	.8653	.7473
	10	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9988	.9939	.9788	.9424	.8720
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9986	.9938	.9797	.9463
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9986	.9942	.9817
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9987	.9951
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9990
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

<i>n</i>	<i>y</i>	<i>p</i> = 5 <i>t</i>	.55	.60	.65	.70	.75	.80	.85	.90	<i>y</i> ²
17	0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0012	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0064	.0019	.0005	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	.0245	.0086	.0025	.0006	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	.0717	.0301	.0106	.0030	.0007	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	6	.1662	.0826	.0348	.0120	.0032	.0006	.0001	.0000	.0000	.0000
	7	.3145	.1834	.0919	.0383	.0127	.0031	.0005	.0000	.0000	.0000
	8	.5000	.3374	.1989	.0994	.0403	.0124	.0026	.0003	.0000	.0000
	9	.6855	.5257	.3595	.2128	.1046	.0402	.0109	.0017	.0001	.0000
	10	.8338	.7098	.5522	.3812	.2248	.1071	.0377	.0083	.0008	.0000
	11	.9283	.8529	.7361	.5803	.4032	.2347	.1057	.0319	.0047	.0001
	12	.9755	.9404	.8740	.7652	.6113	.4261	.2418	.0987	.0221	.0012
	13	.9936	.9816	.9536	.8972	.7981	.6470	.4511	.2444	.0826	.0088
	14	.9988	.9959	.9877	.9673	.9226	.8363	.6904	.4802	.2382	.0503
	15	.9999	.9994	.9979	.9933	.9807	.9499	.8818	.7475	.5182	.2078
	16	1.0000	1.0000	.9998	.9993	.9977	.9925	.9775	.9369	.8332	.5819
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
18	0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0007	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0038	.0010	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	.0154	.0049	.0013	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	.0481	.0183	.0058	.0014	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	6	.1189	.0537	.0203	.0062	.0014	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000
	7	.2403	.1280	.0576	.0212	.0061	.0012	.0002	.0000	.0000	.0000
	8	.4073	.2527	.1347	.0597	.0210	.0054	.0009	.0001	.0000	.0000
	9	.5927	.4222	.2632	.1391	.0596	.0193	.0043	.0005	.0000	.0000
	10	.7597	.6085	.4366	.2717	.1407	.0569	.0163	.0027	.0002	.0000
	11	.8811	.7742	.6257	.4509	.2783	.1390	.0513	.0118	.0012	.0000
	12	.9519	.8923	.7912	.6450	.4656	.2825	.1329	.0419	.0064	.0002
	13	.9846	.9589	.9058	.8114	.6673	.4813	.2836	.1206	.0282	.0015
	14	.9962	.9880	.9672	.9217	.8354	.6943	.4990	.2798	.0982	.0109
	15	.9993	.9975	.9918	.9764	.9400	.8647	.7287	.5203	.2662	.0581
	16	.9999	.9997	.9987	.9954	.9858	.9605	.9009	.7759	.5497	.2265
	17	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9984	.9944	.9820	.9464	.8499	.6028
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

n	y	p =								
		.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45
19	0	.3774	.1351	.0456	.0144	.0042	.0011	.0003	.0001	.0000
	1	.7547	.4203	.1985	.0829	.0310	.0104	.0031	.0008	.0002
	2	.9335	.7051	.4413	.2369	.1113	.0462	.0170	.0055	.0015
	3	.9869	.8850	.6841	.4551	.2631	.1332	.0591	.0230	.0077
	4	.9980	.9648	.8556	.6733	.4654	.2822	.1500	.0696	.0280
	5	.9998	.9914	.9463	.8369	.6678	.4739	.2968	.1629	.0777
	6	1.0000	.9983	.9837	.9324	.8251	.6655	.4812	.3081	.1727
	7	1.0000	.9997	.9959	.9767	.9225	.8180	.6656	.4878	.3169
	8	1.0000	1.0000	.9992	.9933	.9713	.9161	.8145	.6675	.4940
	9	1.0000	1.0000	.9999	.9984	.9911	.9674	.9125	.8139	.6710
	10	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9977	.9895	.9653	.9115	.8159
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9995	.9972	.9886	.9648	.9129
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9969	.9884	.9658
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9993	.9969	.9891
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9972
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9995
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
20	0	.3585	.1216	.0388	.0115	.0032	.0008	.0002	.0000	.0000
	1	.7158	.3917	.1756	.0692	.0243	.0076	.0021	.0005	.0001
	2	.9245	.6769	.4049	.2061	.0913	.0355	.0121	.0036	.0009
	3	.9841	.8670	.6477	.4114	.2252	.1071	.0444	.0160	.0049
	4	.9974	.9568	.8298	.6296	.4148	.2375	.1182	.0510	.0189
	5	.9997	.9887	.9327	.8042	.6172	.4164	.2454	.1256	.0553
	6	1.0000	.9976	.9781	.9133	.7858	.6080	.4166	.2500	.1299
	7	1.0000	.9996	.9941	.9679	.8982	.7723	.6010	.4159	.2520
	8	1.0000	.9999	.9987	.9900	.9591	.8867	.7624	.5956	.4143
	9	1.0000	1.0000	.9998	.9974	.9861	.9520	.8782	.7553	.5914
	10	1.0000	1.0000	1.0000	.9994	.9961	.9829	.9468	.8725	.7507
	11	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9991	.9949	.9804	.9435	.8692
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9987	.9940	.9790	.9420
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9985	.9935	.9786
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9984	.9936
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9985
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	

n	y	p =									
		.50	.55	.60	.65	.70	.75	.80	.85	.90	.95
19	0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0004	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0022	.0005	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	.0096	.0028	.0006	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	.0318	.0109	.0031	.0007	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	6	.0835	.0342	.0116	.0031	.0006	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	7	.1796	.0871	.0352	.0114	.0028	.0005	.0000	.0000	.0000	.0000
	8	.3238	.1841	.0885	.0347	.0105	.0023	.0003	.0000	.0000	.0000
	9	.5000	.3290	.1861	.0875	.0326	.0089	.0016	.0001	.0000	.0000
	10	.6762	.5060	.3325	.1855	.0829	.0287	.0067	.0008	.0000	.0000
	11	.8204	.6831	.5122	.3344	.1820	.0775	.0233	.0041	.0003	.0000
	12	.9165	.8273	.6919	.5188	.3345	.1749	.0676	.0163	.0017	.0000
	13	.9682	.9223	.8371	.7032	.5261	.3322	.1631	.0537	.0086	.0002
	14	.9904	.9720	.9304	.8500	.7178	.5346	.3267	.1444	.0352	.0020
	15	.9978	.9923	.9770	.9409	.8668	.7369	.5449	.3159	.1150	.0132
	16	.9996	.9985	.9945	.9830	.9538	.8887	.7631	.5587	.2946	.0665
	17	1.0000	.9998	.9992	.9969	.9896	.9690	.9171	.8015	.5797	.2453
	18	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9989	.9958	.9856	.9544	.8649	.6226
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
20	0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	
	1	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	
	2	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	
	3	.0013	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	
	4	.0059	.0015	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	
	5	.0207	.0064	.0016	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	
	6	.0577	.0214	.0065	.0015	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	
	7	.1316	.0580	.0210	.0060	.0013	.0002	.0000	.0000	.0000	
	8	.2517	.1308	.0565	.0196	.0051	.0009	.0001	.0000	.0000	
	9	.4119	.2493	.1275	.0532	.0171	.0039	.0006	.0000	.0000	
	10	.5881	.4086	.2447	.1218	.0480	.0139	.0026	.0002	.0000	
	11	.7483	.5857	.4044	.2376	.1133	.0409	.0100	.0013	.0001	
	12	.8684	.7480	.5841	.3990	.2277	.1018	.0321	.0059	.0004	
	13	.9423	.8701	.7500	.5834	.3920	.2142	.0867	.0219	.0024	
	14	.9793	.9447	.8744	.7546	.5836	.3828	.1958	.0673	.0113	
	15	.9941	.9811	.9490	.8818	.7625	.5852	.3704	.1702	.0432	
	16	.9987	.9951	.9840	.9556	.8929	.7748	.5856	.3523	.1330	
	17	.9998	.9991	.9964	.9879	.9645	.9087	.7939	.5951	.3231	
	18	1.0000	.9999	.9995	.9979	.9924	.9757	.9308	.8244	.6083	
19	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9992	.9968	.9885	.9612	.8784		
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000		

For n larger than 20, the r th quantile y_r of a binomial random variable may be approximated using $y_r = np + w_r \sqrt{np(1-p)}$, where w_r is the r th quantile of a standard normal random variable, obtained from Table A1.

QUANTILES OF THE KOLMOGOROV TEST STATISTIC*

One-Sided Test						Two-Sided Test						
$p = .90$						$p = .80$						
$p = .95$						$p = .90$						
$p = .975$						$p = .95$						
$p = .99$						$p = .98$						
$p = .995$						$p = .99$						
$n = 1$.900	.950	.975	.990	.995	$n = 21$.220	.259	.287	.321	.344	
2	.684	.776	.842	.900	.929	22	.221	.253	.281	.314	.337	
3	.565	.636	.708	.785	.829	23	.216	.247	.275	.307	.330	
4	.493	.565	.624	.689	.734	24	.212	.242	.269	.301	.323	
5	.447	.509	.563	.627	.669	25	.208	.238	.264	.295	.317	
6	.410	.468	.519	.577	.617	26	.204	.233	.259	.290	.311	
7	.381	.436	.483	.538	.576	27	.200	.229	.254	.284	.305	
8	.358	.410	.454	.507	.542	28	.197	.225	.250	.279	.300	
9	.339	.387	.430	.480	.513	29	.193	.221	.246	.275	.295	
10	.323	.369	.409	.457	.489	30	.190	.218	.242	.270	.290	
11	.308	.352	.391	.437	.468	31	.187	.214	.238	.266	.285	
12	.296	.338	.375	.419	.449	32	.184	.211	.234	.262	.281	
13	.285	.325	.361	.404	.432	33	.182	.208	.231	.258	.277	
14	.275	.314	.349	.390	.418	34	.179	.205	.227	.254	.273	
15	.266	.304	.338	.377	.404	35	.177	.202	.224	.251	.269	
16	.258	.295	.327	.366	.392	36	.174	.199	.221	.247	.265	
17	.250	.286	.318	.355	.381	37	.172	.196	.218	.244	.262	
18	.244	.279	.309	.346	.371	38	.170	.194	.215	.241	.258	
19	.237	.271	.301	.337	.361	39	.168	.191	.213	.238	.255	
20	.232	.265	.294	.329	.352	40	.165	.189	.210	.235	.252	
							Approximation	1.07	1.22	1.36	1.52	1.63
							for $n > 40$	$\frac{1.07}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.52}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{n}}$

SOURCE: Adapted from Table of Miller (1956).

*The entries in this table are selected quantiles w_α of the Kolmogorov test statistics T , T^+ , and T^- as defined by Equation 6.1.1 for two-sided tests and by Equations 6.1.2 and 6.1.3 for one-sided tests. Reject H_0 at the level α if T exceeds the $1 - \alpha$ quantile given in this table. These quantiles are exact for $n \leq 40$ in the two-tailed test. The other quantiles are approximations that are equal to the exact quantiles in most cases. A better approximation for $n > 40$ results if $(n + \sqrt{n/10})^{1/2}$ is used instead of \sqrt{n} in the denominator.

Valores críticos de T en la prueba de Wilcoxon

Valores críticos de T en la prueba de Wilcoxon de rangos con signo para experimentos pareados

$n = 5(1)50$

Unilateral	Bilateral	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$	$n = 10$
$\alpha = .05$	$\alpha = .10$	1	2	4	6	8	11
$\alpha = .025$	$\alpha = .05$		1	2	4	6	8
$\alpha = .01$	$\alpha = .02$			0	2	3	5
$\alpha = .005$	$\alpha = .01$				0	2	3
Unilateral	Bilateral	$n = 11$	$n = 12$	$n = 13$	$n = 14$	$n = 15$	$n = 16$
$\alpha = .05$	$\alpha = .10$	14	17	21	26	30	36
$\alpha = .025$	$\alpha = .05$	11	14	17	21	25	30
$\alpha = .01$	$\alpha = .02$	7	10	13	16	20	24
$\alpha = .005$	$\alpha = .01$	5	7	10	13	16	19
Unilateral	Bilateral	$n = 17$	$n = 18$	$n = 19$	$n = 20$	$n = 21$	$n = 22$
$\alpha = .05$	$\alpha = .10$	41	47	54	60	68	75
$\alpha = .025$	$\alpha = .05$	35	40	46	52	59	66
$\alpha = .01$	$\alpha = .02$	28	33	38	43	49	56
$\alpha = .005$	$\alpha = .01$	21	28	32	37	43	49
Unilateral	Bilateral	$n = 23$	$n = 24$	$n = 25$	$n = 26$	$n = 27$	$n = 28$
$\alpha = .05$	$\alpha = .10$	83	92	101	110	120	130
$\alpha = .025$	$\alpha = .05$	73	81	90	98	107	117
$\alpha = .01$	$\alpha = .02$	62	69	77	85	93	102
$\alpha = .005$	$\alpha = .01$	55	68	68	76	84	92
Unilateral	Bilateral	$n = 29$	$n = 30$	$n = 31$	$n = 32$	$n = 33$	$n = 34$
$\alpha = .05$	$\alpha = .10$	141	152	163	175	188	201
$\alpha = .025$	$\alpha = .05$	127	137	148	159	171	183
$\alpha = .01$	$\alpha = .02$	111	120	130	141	151	162
$\alpha = .005$	$\alpha = .01$	100	109	118	128	138	149
Unilateral	Bilateral	$n = 35$	$n = 36$	$n = 37$	$n = 38$	$n = 39$	
$\alpha = .05$	$\alpha = .10$	214	228	242	256	271	
$\alpha = .025$	$\alpha = .05$	195	208	222	235	250	
$\alpha = .01$	$\alpha = .02$	174	186	198	211	224	
$\alpha = .005$	$\alpha = .01$	160	171	183	195	208	
Unilateral	Bilateral	$n = 40$	$n = 41$	$n = 42$	$n = 43$	$n = 44$	$n = 45$
$\alpha = .05$	$\alpha = .10$	287	303	319	336	353	371
$\alpha = .025$	$\alpha = .05$	264	279	295	311	327	344
$\alpha = .01$	$\alpha = .02$	238	252	267	281	297	313
$\alpha = .005$	$\alpha = .01$	221	234	248	262	277	292
Unilateral	Bilateral	$n = 46$	$n = 47$	$n = 48$	$n = 49$	$n = 50$	
$\alpha = .05$	$\alpha = .10$	389	408	427	446	466	
$\alpha = .025$	$\alpha = .05$	361	379	397	415	434	
$\alpha = .01$	$\alpha = .02$	329	345	362	380	398	
$\alpha = .005$	$\alpha = .01$	307	323	339	356	373	

Tomado de "Some Rapid Approximate Statistical Procedures" (1964), 28, F. Wilcoxon y R. A. Wilcox. Reproducido con la gentil autorización de R. A. Wilcox y los Laboratorios Lederle.

BIBLIOGRAFIA

1. Aguirre Torres, Victor Manuel Armando y José María Soltero de la Riva. Formulación de la fecha óptima de venta de ganado bovino. Empleando la técnica de análisis y predicción de G.E.P. Box y G.M. Jenkins para serie de tiempo. México, 1977. Tesis (Licenciatura en Físico Matemático). Instituto Politécnico Nacional.
2. Bickel, Piter J. y Kjell A. Doksum. Mathematical Statistics: basic ideas and selected topics. USA, Holden-Day, Inc., 1977.
3. Breña Puyol, Agustín Felipe. Probabilidad y estadística aplicada a la hidrología. México, U.A.M.- Ixtapalapa, [s.a.].
4. Box, George E.P. y Gwilym M. Jenkins. Time series analysis; forecasting and control. USA, Holden-Day, Inc, 1976.
5. Bowerman, Bruce L. y Richard T.O. Connell. Forecasting y time series. USA, Duxbury Press, 1979.
6. Brunk, H.O. Introducción a la estadística matemática. México, Trillas, 1979.

7. Cárdenas, Miguel A. Aplicaciones del análisis de sistemas: métodos modelos y resultados. México, CECSA, 1976.
8. Conover, W. J. Practical nonparametric statistics. USA, John Wiley & Sons, 1980.
9. Escalante Sandoval, Carlos Agustín. Aprovechamientos hidráulicos. Generación de muestras sintéticas. México, UNAM, 1988.
10. Esparza Nuñez, Sergio. Elementos de probabilidad. México, IPN, 1987.
11. Hernández Lerma, Onésimo. Procesos estocásticos: introducción a la teoría de colas. México, CINVESTAV, IPN 1981.
12. Hoel, Paul, Sidney C. Port. et.al. Introduction to statistical theory. USA, Houghton Mifflin Company, 1971.
13. Loucks Daniel, Jerry R. Stedinger et.al. Water resource systems planning and analysis. USA, Prentice Hall, 1977
14. Macedo Gómez, Alejandro. Análisis y evaluación de algunas técnicas de pronóstico y su aplicación a un sistema de producción-distribución. México, 1979. Tesis (maestría en Ing. de Sistemas). Instituto Politécnico Nacional.

15. Manual de diseño de obras civiles hidrotécnica. A.1.1. Consideraciones generales. México, Comisión Federal de Electricidad, 1982.
16. Ibidem. A.1.2. Precipitación. México, Comisión Federal de Electricidad, 1982.
17. Ibidem. A.1.5. Relación entre precipitación y escurrimiento. México, Comisión Federal de Electricidad, 1982.
18. Ibidem. A.1.6. Análisis estadístico. México, Comisión Federal de Electricidad, 1982.
19. Ibidem, A.1.9. Simulación del funcionamiento de un vaso. México, Comisión Federal de Electricidad, 1982.
20. Ibidem. A.2.8. Planeación de sistemas y aprovechamiento hidroeléctrico. México, Comisión Federal de Electricidad, 1982.
21. Ibidem. A.2.16. Métodos numéricos. México, Comisión Federal de Electricidad, 1982.
22. Montgomery, Douglas C. y Lynwood A. Johnson. Forecasting and time series analysis. USA, Mc Graw-Hill, 1976.

23. Nelson, Charles R. Applied time series analysis for managerial forecasting. USA, Holden-Day, Inc, 1973.
24. Pérez, Luis Antonio. Estadística matemática. México, CINVESTAV, IPN, 1981.
25. Pindyck, Roberto S. y Daniel L. Rubinfeld. Econometric models and economic forecasts. USA, Mc Graw-Hill, 1981.
26. Políticas de operación e hidrología estocástica., México, [s.e.], 1987.
27. Randles, Ronald H. y Douglas A. Wolfe. Introduction to the theory of nonparametric statistics. USA., John Wiley, 1979.
28. Raynal, José A. Y Carlos Gutiérrez O., Paquete hidrología de superficie. (programa hidros). México, IMTA-CONACYT-UNAM, 1987.
29. Torres Herrera, F. Obras hidráulicas, México, Limusa 1983.