División De Estudios De Posgrado
Facultad Ing.

Expansion De Capacidad De Sistemas Productivos.

U. N. A. M.

Elsa Patricia Omaña Pulido.
(Presenta)

1990.

CONTENIDO

INTRODUCCION

Uno de los principales intereses de los países en desarrollo se encuentra la planeación de la expansión de sus sistemas productivos, ya que de esto depende, en gran medida, su economía; por ejemplo para incrementar el desarrollo industrial es primordial contar con grandes redes eléctricas y de abastecimiento de agua, sin embargo realizar proyectos de expansión de esta índole requiere de grandes inversiones, por lo que resulta indispensable desarrollar modelos que minimicen los costos de inversión. El mismo desarrollo industrial requiere de este tipo de modelos y algunos otros en los que se maximicen los beneficios obtenidos por la expansión. La Investigación de Operaciones se ha utilizado para este propósito, pero por la complejidad de los problemas muchos de los algoritmos sólo proporcionan una aproximación a la solución.

Entre los primeros trabajos desarrollados para la expansión se encuentran los de Manne [24], Erlenkotter [3], Fong y Srinivasan [31], y otros. Los trabajos desarrollados hasta ahora están dispersos y no contemplan el problema por medio de un modelo general; por lo que dentro de los objetivos de este trabajo se encuentra el recopilar y analizar los escritos acerca del tema y así proponer un modelo general, para después clasificar el problema y ubicarlo en el contexto de la Investigación de Operaciones mostrando algunos algoritmos y las ventajas, desventajas y posibles extensiones que presentan. Para este propósito en el CAP. I se ubica el problema en el contexto sistémico, para presentar dos tipos de problemas: en uno de ellos el objetivo es minimizar los costos con restricciones de demanda, situaciones que generalmente se presentan en el sector público, el otro es maximizar beneficios con restricciones de capital que usualmente corresponden al sector privado. A continuación se hace un estudio de las caracteristicas analiticas de la función objetivo y de las restricciones para definir las variables de desición que caracterizan al problema,estas variables son: localización tamaño y tiempo de expansión. Esto permite proponer un modelo general, pero devido a la complejidad del espacio generado por las restricciones del problema resulta muy dificil proponer un método general de solución, sin embargo es factible hacer algunas simplificaciones que permiten clasificar el problema con el fin de desarrollae algoritmos de solución que obtengan la solución óptima o bien una aproximación a ésta. La clasificación se efectúa con base en la variable de localización, si ésta aparece se llama problema de localización y si no es nombrado de secuenciación. Los problemas de localización son subdivididos en localización simple y multilocalización. En estos problemas existen dos posibilidades, que la única variable sea la de localización, en cuyo caso hay dos situaciones localización en el plano o en redes. En el capitulo II se hace un breve estudio sobre localización en redes, usando como criterio de optimización el llamado *minisum* ya que minimiza se el parámetro asociado a los arcos de la red, y tomando en cuenta si el parámetro es conocido o es una variable aleatoria se manipulan redes deterministas o probabilistas. Cuando aparece alguna otra variable los modelos son tratados en el capítulo III, en la primera parte se analizan algunos modelos de localización simple comenzando con un modelo sencillo de economias de escala, después uno con costos cóncavos y restricciones de capacidad, finalmente se presenta un modelo con costos múltiples de ordenamiento y producción. En la segunda parte de este capítulo se muestran modelos de multilocalización que son básicamente de distribución y transporte, el primer modelo es una aproximación por medio de programación dinámica y el segundo y tercer modelo son sobre expansión con capacidad dinámica, los algoritmos propuestos determinan una solución inicial con un modelo de transporte, determinando después las variables duales con el fin de aplicar a esta solución inicial un método heurístico que permita aproximar la solución al óptimo. Por último, en el capítulo IV, se describen los modelos de secuenciación, donde no aparece la variable de localización, los cuales están relacionados con el sector público. En un principio se define el problema y el modelo más simple, el cual es resuelto en la siguiente sección por medio de programación dinámica y por último se analiza una extensión.

CAPITULO I

EL PROBLEMA DE EXPANSION DE CAPACIDAD

1.1 *Conceptualización del problema*

La interacción del desarrollo científico y tecnológico con el crecimiento poblacional y otra serie de factores han ocasionado que los objetos que componen la realidad se hagan cada vez más complejos debido a que están compuestos por una variedad de elementos con diversas características y son estudiados por diferentes disciplinas. Esto hace imperativo que dichos objetos se estudien bajo un enfoque totalitario e interdisciplinario.

Un enfoque que actualmente goza de gran popularidad en los ambientes científicos e ingenieriles, debido a la eficiencia mostrada es la Teoría General de Sistemas. Hoy en día la ciencia y la ingeniería abordan sus problemas mediante el enfoque de sistemas, el cual se conforma básicamente por dos paradigmas parciales y complementarios [13].

1. La visión integral de la cosa, que la identifica en la realidad por el papel o función, que desempeña integralmente dentro de un conjunto más grande, llamado suprasistema.

2. El enfoque por componentes de las cosas, que la visualiza en la realidad como conjuntos de elementos interrelacionados.

La primera afirma que un sistema está determinado por la función que realiza en un entorno mayor, como la producción o consumo de un bien, para (o proporcionado por) otros elementos del entorno. La segunda idea se basa en la estructura del sistema, es decir, lo identifica como un conjunto de elementos inter-relacionados. Sin embargo, para lograr una conceptualización adecuada del sistema es necesario definirlo mediante la interacción de estos dos paradigmas. Las acciones y las reacciones del sistema se conocen comúnmente como entradas y salidas, por ejemplo los bienes, servicios, auxilios, etc. usualmente se les llama *salidas*; entonces estas salidas son resultado de algún proceso efectuado a ciertas *entradas* que pueden ser rentas, presupuesto, ventas y algunos otros.

Dentro de la dinámica en que se encuentra un sistema existen dos situaciones que llevan a plantear el problema de expansión de capacidad. Por un lado, los sistemas que proporcionan bienes o servicios básicos a diferentes partes de su entorno, se ven en la necesidad de aumentar su capacidad de producción debido a diversos factores como el desarrollo tecnológico, al surgimiento de necesidades especificas, el mismo crecimiento del entorno, etc., que se traducen en un incremento en la demanda del bien o servicio. Esta situación se presenta en el sector público, donde las necesidades de la población hacen imperativo satisfacer la demanda y, por razones obvias se desea llevar a cabo la expansión a costo mínimo.

Un ejemplo típico es el incremento de las redes hidraúlicas para satisfacer la demanda de agua [15] en donde, para efectuar ésta expansión es necesario diseñar un conjunto de proyectos para construir nuevas fuentes de abastecimiento o canales de distribución. Específicamente, el problema consiste en seleccionar los proyectos y su orden de realización, de manera que los costos de expansión sean mínimos.

Por otro lado, los sistemas que producen bienes o servicios de consumo con características diferentes al caso anterior, esto es, cuyo objetivo es obtener un incremento en sus beneficios, tienen posibilidad de incrementar sus ingresos si expanden su nivel de producción. En este caso, que usualmente corresponde al sector privado, la política del sistema consiste en maximizar los beneficios esperados respecto a la inversión realizada.

Un ejemplo que ilustra ésta situación es el de una fábrica que produce artículos de plástico y la demanda de dicho artículo crece linealmente respecto al tiempo a una razón de δ productos por año. El proceso de decisiones consiste en incrementar la capacidad de producción en x unidades para obtener un beneficio máximo que justifique la inversión hecha, o bien se satisface la demanda por importaciones añadiendo costos, e incluso puede existir un factor de penalización cuando la demanda no es satisfecha. Las variables involucradas en la expansión son: el tamaño de la capacidad adicional y el tiempo en que debe realizarse (ver [16]).

Como resultado de lo propuesto anteriormente se puede entender el problema de expansión de la siguiente manera: Determinar las dimensiones de la capacidad adicional, los tiempos de expansión y localización o multilocalización de la misma, de modo que el valor presente de los costos asociados con el proceso de expansión sea mínimo, o bien, el valor presente de los beneficios netos sea máximo.

1.2 *Formulación General del Problema*

En la sección anterior se plantean dos casos en los que se presenta el problema de incrementar la estructura del sistema para satisfacer la demanda de las salidas, ésta expansión se realiza de dos formas:

EXPANSION TIPO I) Si se supone que la capacidad del sistema es una constante k y que la función de demanda $D(t)$ es no decreciente en un intervalo de tiempo $[0,T]$, y además, $D(t)>k$ para algún $t\in[0,T]$. Entonces el problema tipo I consiste en determinar el incremento Δk, el tiempo t_0 y el lugar deseable en que debe realizarse la expansión a costo mínimo, es decir,

$$\begin{array}{ll} \min & \textit{Costos de expansión} \\ \text{s. a} & \textit{Satisfacer la demanda en el periodo } [0,T) \end{array}$$

o bien

$$\min C(\Delta k)$$

$$\text{s. a.} \qquad k+\Delta k\geq D(t) \qquad \text{para toda } t\in[0,T]$$

Algunas consideraciones de generalidad sobre este problema son: la naturaleza del comportamiento de la función de demanda, que no se restringe al caso determinista, sino que se amplia al caso estocástico y el incremento Δk que puede efectuarse en etapas, es decir, $\Delta k = \Delta k_1+\Delta k_2+\ldots+\Delta k_n$ en tiempos sucesivos $t_1,\ldots,t_n$, de tal forma que la capacidad del sistema sea una función escalón con valores $k, k+\Delta k_1, k+\Delta k_1+\Delta k_2,\ldots, k+\sum\Delta k_i$ para intervalos $[0,t_1)$, $[t_1,t_2),\ldots, [t_n,T]$, respectivamente.

Entre los trabajos de aplicación ya realizados, pueden citarse a los siguientes: el problema de satisfacer la demanda de aluminio en la India, para un periodo de 30 años, se desea expander la capacidad de producción de aluminio, por lo que se deben determinar los centros de producción y los tiempos de la expansión de la capacidad, este trabajo fué realizado por Erlenkotter [3] y Manne [24]; otro problema consiste en transportar cemento a varios centros de demanda, cómo los costos de transporte son muy elevados, entonces se propone localizar puntos de distribución en las zonas de demanda asi como tamaño y tiempos en que se deben instalar. Algunos problemas en redes de comunicación consisten en determinar el tipo de cable a instalar en la red, en particular supóngase que se tienen dos tipos de transmisión y que un cable estándar puede ser usado para satisfacer un sólo tipo de transmisión, mientras que otro cable puede satisfacer ambos tipos de demanda; el problema consiste en determinar el tamaño y tipo de cables a ser instalados.

EXPANSION TIPO II) Si se supone que la capacidad del sistema es una constante k y que la función de demanda $D(t)$ es no decreciente en un intervalo de tiempo $[0,T]$, y además, $D(t)>k$ para algún $t\in[0,T]$. Entonces el problema tipo II consiste en determinar el incremento Δk, el tiempo t_0 y el lugar deseable en que debe realizarse la expansión, de forma tal que se maximizen los beneficios obtenidos por incrementar el sistema, entonces se tiene un problema de la forma

máx *Beneficios por la expansión*

s. a *No sobrepasar el capital disponible*

es decir,

$$\text{máx } B(\Delta k)$$

$$\text{s. a} \quad \$\Delta k\leq \$(t) \quad \text{para toda } t\in[0,T]$$

Como puede observarse no necesariamente se debe satisfacer la demanda, pues en este caso la expansión puede ser optativa. En el caso de ser necesaria la expansión se deben contemplar las restricciones de demanda del caso anterior y las consideraciones sobre el incremento en la capacidad.

Es claro, que de acuerdo con las restricciones anteriores el interés por desarrollar modelos que permitan planear la expansión de los sistemas, se debe al deseo de optimizar el uso de los recursos. Estos modelos sirven, como ya se ha indicado, para determinar el tamaño, el lugar y el tiempo en que se realizará la expansión.

Con base en la conceptualización anterior, se formula un modelo general del problema, para esto se considera una función objetivo la cual se considera de la forma:

$$F=F(f_1,\ f_2,\ldots,\ f_n,\alpha)$$

donde cada $f_i=f_i(x=\text{tamaño},\ w=\text{tipo},\ \tau=\text{tiempo},\ y=\text{lugar})$ representa una función de costo (operación, instalación, etc.) si se tiene un problema del tipo I, y es una función de beneficio (utilidades esperadas) si es del tipo II.

La forma analítica de F depende de las condiciones propias de cada problema; cuando se tienen economías de escala F es una función cóncava, pero también puede ser cóncava a trozos, convexa, o no presentar ninguna de estas características y, entonces, F es aproximada por funcionales lineales.

Las restricciones más usuales son de

Capital

Institucionales

Geográficas

Demanda

Físicas

y se comportan de la siguiente manera:

a) Restricciones de Capital

$$G_1(\lambda_{jt}, c_{jt}) \leq \$_t$$

c_{jt} = Capital disponible para el proyecto j en el periodo t

λ_{jt} = Determina si se asigna dinero al proyecto j en el periodo t

$\$_t$ = Capital total disponible en el periodo t.

Estas restricciones indican que el dinero invertido en cada proyecto seleccionado j (λ_{jt}= 0, 1) en el periodo t no sobrepase el capital disponible en ese periodo. Este tipo de restricciones aparecen en ambos tipos (I y II) de problemas.

b) Restricciones Institucionales

$$G_2(\lambda_{jt}) = (k, 1)^t$$

Como una observación, el número uno que aparece en la función no es un escalar, sino un vector columna cuya dimensión depende del horizonte de planeación.

Esta función incluye restricciones relacionadas con el número (k) de proyectos a realizar por año, con que el proyecto se realizen sólo una vez, también permite excluir las combinaciones de proyectos no factibles. Estas restricciones aparecen en ambos tipos de problemas.

c) Restricciones Geográficas

Estas restricciones no se refieren a la representación de la problemática, que básicamente son en el plano o en una gráfica.

d) Restricciones de Demanda

$$G_3(S_j,\ X_j,\ F_j) \geq D$$

S_j = Volumen almacenado en el centro j

X_j = Volumen circulando hacia (o desde) j

F_j = Volumen de producción asignado desde el centro j

D = Demanda total

Este conjunto de restricciones tienen como objetivo plantear ecuaciones que aseguren satisfacer las demandas de servicios o productos, aparece en ambos tipos de problemas.

d) Restricciones Físicas

$$G_4(S_j,\ X_j,\ F_j,\ a_k,\ \lambda_j,\ I_j,\ J,)$$

a_k = Factor de ganancia en la liga k (si existe la red para el problema)

λ_j = Determina si hay importaciones en el almacén j

I_j = Importaciones al almacén j

J = Total de importaciones

En este conjunto de restricciones aparecen cotas sobre la capacidad de almacenamiento, capacidad en ligas, balance de masa en cada almacén, Las últimas contienen información que refleja detalles de la operación del sistema y aparecen en los dos tipos de problemas.

Algunos factores que se deben considerar, por su importancia, son el horizonte de planeación y el tipo de economía bajo la cual se desarrolla el modelo, en particular, se supondrá de escala. En lo que respecta al horizonte, si éste es finito, existe una fuerte dependencia entre el horizonte y la política de expansión; entre las que se encuentran el impacto de la longitud del horizonte sobre el tamaño de la expansión más próxima, la posible descomposición del problema original en subproblemas independientes con pequeños horizontes de planeación, el tiempo en el cual la política se vuelve estacionaria y la equivalencia entre algunos problemas de horizonte infinito con algunos de horizonte finito. En lo que se refiere al tipo de economía se debe sin duda a que ésta afecta directamente la función de costos, la que generalmente se supone cóncava, por representar economías de escala, y en la que se involucra un factor de descuento α que refleja la inflación neta, sin embargo se debe tener cuidado en la estimación del parámetro α.

Por lo anterior los problemas tipo I y II pueden ser planteados de la siguiente manera:

PROBLEMA TIPO I

$$\text{Min } F(f_1, f_2, \ldots, f_n, \alpha)$$

s. a

$$G_1(\lambda_{jt}, c_{jt}) \leq \$_t$$

$$G_2(\lambda_{jt}) \leq (k, 1)^t$$

$$G_3(S_j, X_j, F_j) \geq D$$

$$G_4(S_j, X_j, F_j, a_k, \lambda_j, I_j, J,)$$

PROBLEMA TIPO II

$$\text{Máx } F(f_1, f_2, \ldots, f_n, \alpha)$$

s. a

$$G_1(\lambda_{jt}, c_{jt}) \leq \$_t$$

$$G_2(\lambda_{jt}) \leq (k,1)^t$$

$$G_3(S_j, X_j, F_j) \geq D$$

$$G_4(S_j, X_j, F_j, a_k, \lambda_j, I_j, J,)$$

La gran variedad de restricciones hace imposible encontrar un método general de solución, sin embargo existen algunos casos particulares del modelo en el que, bajo ciertas simplificaciones, se pueden obtener soluciones o aproximaciones. La clasificación más usual se presenta en la siguiente sección.

Los principales obstáculos para encontrar un método de solución general son la identificación del conjunto generado por las restricciones, y la caracterización de los puntos extremos de la región factible. En lo que repecta al conjunto generado por las restricciones resulta muy complejo caracterizarlo debido a la gran variedad de las mismas, y por ende la caracterización de los puntos extremos; además muchos de los problemas de expansión son de carácter combinatorio por lo que algunos métodos de solución resultan ineficientes. En cada uno de los siguientes capítulos se presentan algunos modelos y sus métodos de solución.

1.3 *Clasificación*

Existe una gran variedad de problemas a los cuales se puede aplicar ésta teoría, pero hay una clasificación [ ] que consiste en agrupar los problemas de la siguiente manera: Localización Simple, Multilocalización y Secuenciación de Proyectos.

1.3.1 *Localización Simple*

Los problemas de localización toman lugar en el contexto de sistemas de transporte, comunicación o de transmisión, y pueden ser representados para propósitos analíticos como redes o en el plano cartesiano. Se hace notar que hay problemas en los que la única variable es la localización y otros en los que están involucradas otras más.

En ésta gama de problemas se encuentran todos aquellos en los que aparece la variable de localización, y una primera simplificación se obtiene cuando es la única variable a determinar y se desarrolla en el capitulo II. La otra situación que se presenta es cuando aparece además alguna de las otras dos variables (tiempo y tamaño de la expansión)o ambas. Dentro de los problemas de localización se tiene una división según el número de puntos a localizar, esto es, si un punto se debe determinar unicamente el problema es de localización simple, y en caso contrario es llamado de localización.

Una de la formulaciones [2] del problema de localización es la siguiente:

$$\text{Min} \sum_j d_j x_j + F(y)$$

s. a.

$$\sum_j x_j = y$$

$$0 \le x_j \le D_j \qquad j=1,\ldots,n$$

$$y \ge 0$$

donde

x_j = Cantidad enviada desde la localización x a la demanda j.

y = Cantidad total que se envia desde la localidad x.

d_j = Costos de transporte al enviar la cantidad x_j desde el nodo x hasta el nodo j.

$F(.)$= Costos de construcción y operación de la localización x.

D_j = Demanda en el nodo j.

Este modelo puede ser extendido aún más, cuando se agregan restricciones en la capacidad, sin embargo esto es uno de los objetivos del capitulo III.

La generalización a varios puntos de localización [30] es:

$$\text{Mín} \sum_j \sum_i d_{ij}\, x_{ij} + \sum_i F_i(y_i)$$

s. a.

$$\sum_j x_{ij} = y_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_i x_{ij} = D_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$y_i \geq 0$$

donde

x_{ij} = Cantidad enviada desde la localización i a la demanda j.

y_i = Cantidad total que se envía desde la localidad j.

d_{ij} = Costos de transporte al enviar la cantidad x_{ij} desde el nodo i hasta el node j.

$F_i(.)$ = Costos de construcción y operación de la localización i.

D_j = Demanda en el nodo j.

n = Número de nodos de demanda .

m = Número de nodos de localización propuestos.

Se observa que este modelo representa la problemática de encontrar puntos de almacenamiento para satisfacer una demanda a costo mínimo, y en el cual la segunda restricción asegura que se satisface la demanda total del punto j, y donde las variables y_i no están acotadas superiormente lo que indica que no hay cotas en la capacidad de almacenamiento.

1.3.2. *Secuenciación de Proyectos*

Los modelos de secuenciación de proyectos aparecen en problemas de inversión, en el que dado un subconjunto finito de proyectos se desea dar una secuencia de éste de forma que se minimicen los costos de realización de los proyectos, o bien se maximice el valor presente del total de los beneficios netos. Las variables de decisión que frecuentemente aparecen en estos modelos son el tamaño y tiempo de la expansión.

Como ejemplo se tiene el siguiente modelo planteado en términos de Programación Entera y que es usado con mucha frecuencia en los problemas de expansión de sistemas hidraúlicos [15] y [18]. Supóngase que existen n proyectos para constriur un vaso y que pueden ser desarrollados en un horizonte de planeación dado, el problema consiste en determinar que proyectos seran efectuados y en que orden, es decir, ¿Cuándo debe ser elaborado cada proyecto?

El problema consiste en maximizar el valor presente del total de beneficios netos y puede formularse como:

$$\text{máx} \sum_{s} \sum_{y} NB_{sy}X_{sy}$$

de tal manera que el total de desembolsos no excedan los fondos disponibles para cualquier tiempo $y' \in Y$,

$$\sum_{y \in Y} \quad \sum_{s \in I} C_s \; X_{sy} \leq \sum_{y \leq y'} \$_y$$

y cada proyecto puede ser construido a lo más una vez

$$\sum_{y \in Y} X_{sy} \leq 1 \quad \text{para toda } s \in I$$

Las variables utilizadas son:

Y Conjunto de años en los cuales el proyecto debe ser llevado a cabo.

I Conjunto de posibles lugares de los proyectos $\{1, 2, ..., n\}$.

NB_{sy} Valor presente de los beneficios netos si el proyecto en el lugar $s \in I$ es construido en el año $y \in Y$.

C_s Costo de construir un proyecto en el lugar s.

S_y Fondos disponibles para invertir en el año y.

La variable de decisión es:

$$X_{sy} = \begin{cases} 1 \text{ si el proyecto en el lugar } s \text{ es construído en} \\ \quad \text{en el año } y \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

En este modelo se supone que la demanda a ser satisfecha es una función $D(\tau)$ continua y creciente respecto al tiempo τ, la demanda inicial $D(0)$ es en principio satisfecha por la existencia disponible.

1.4 *Algunos Enfoques de solución*

En general los métodos de solución no permiten obtener soluciones óptimas en el sentido estricto, pues el mundo real es mucho más complejo que lo que representan los modelos propuestos, sin embargo en algunos casos se obtienen soluciones óptimas. La ayuda más sustancial de los modelos es un mejor entendimiento de la sensibilidad de las soluciones a cambios en algunos parámetros, restricciones o criterios. Asimismo por medio de los modelos se desea seleccionar entre las mejores soluciones aquellas que satisfagan las necesidades y demandas de la región en cuestión.

En lo que respecta a los modelos de localización en redes existen entre otros métodos los siguientes: Enumeración, Aproximación por Teoría de Gráficas, Métodos Heurísticos y de Programación Matemática.

i) Enumeración. Se determinan las posibles soluciones y se comparan hasta obtener la óptima, sin embargo por las caracteristicas combinatorias del problema el número de posibles soluciones es $\binom{n}{m}$. Este método se debe al matemático Hakimi [18].

ii) Aproximación por gráficas. Los resultados más satisfactorios obtenidos hasta ahora son para árboles, pero en general para redes arbitrarias no hay algoritmos eficientes.

iii) Métodos Heurísticos. Existen varios métodos de este tipo entre los que se encuentran: la partición de conjuntos, el que fué desarrollado por Moranzana [26]; aproximación miope propuesto por Kuehn y Hamburger [22]; y por último el método de ramificación y acotamiento propuesto por Järvinen, Rajala y Sinervo [21].

iv) Métodos de Programación Matemática. Hay una variedad de modelos de ésta clase algunos de ellos primales y otros duales, así como de programación entera. El modelo primal más conocido se debe a Balinski y fué modificado más tarde por ReVelle y Swain; entre los modelos de programación entera se resuelven por medio de ramificación y acotamiento se encuentran los modelos propuestos por Efroymson y Ray [2] y por Fong y Srinivasan [9]; los modelos duales son discutidos por Geoffrion [14], Held, Wolfe y Crowder [19], Narula Ogbu y Samuelsson [27], entre otros.

Existen problemas en los que además de la localización se requiere conocer los tiempos y tamaño de la expansión por lo que se deben tomar restricciones de capacidad y por ende la existencia de inventarios. Entre los modelos más comunes están los de producción determinista con restricciones en los inventarios y en los que se permite la demanda no satisfecha, así como aquellos en los que los costos son cóncavos o convexos, etc.. Los investigadores que más han trabajado con estos modelos son Rao y Jagannathan [20], Wagner y Whitin [32], Florian y Klein [8], El-Shaieb [1].

Los modelos de secuenciación están basados en Programación Entera y Dinámica, y generalmente sirven para determinar los tiempos y tamaño de la capacidad de la expansión. Entre los autores que más han colaborado en el área se encuentran Erlenkotter [4], Erlenkotter y Rogers [6] y otros.

EJEMPLO

Expansión de Sistemas de Potencia Eléctricos

Un sistema de potencia eléctrico consiste de un conjunto de plantas de generación (térmicas, hidroeléctricas y posiblemante nucleoeléctricas) las que están conectadas a los usuarios por medio de una red de transmisión [29].

La demanda de este servicio en un horizonte finito de tiempo es un proceso estocástico no decreciente, ésta incluye pequeñas transmisiones que generalmente se asignan al cargador central del sistema. En cada periodo la demanda puede ser representada por medio de una curva de carga, la que proporciona la probabilidad de que la demanda sea mayor que cualquier nivel de capacidad dado. El problema consiste en determinar la expansión óptima de la capacidad de manera que los costos esperados sean minimizados.

La función objetivo contiene costos de instalación y operación, los cuales presentan las siguientes caracteristicas:

COSTOS

a) Las plantas hidroeléctricas tienen un costo de instalación muy alto pero su costo de operación por *kwh* tiende a ser insignificante.

b) El costo de instalación de las plantas térmicas es menor que el de las plantas hidroeléctricas, pero el costo de combustible es sustancialmente mayor, por unidad de *kwh*, que el de las plantas hidroeléctricas.

c) Las unidades nucleares tienen un costo inicial y de operación muy elevado, sin embargo a largo plazo el costo del combustible es mucho menor que el de una planta térmica común.

Las características mencionadas pueden ser utilizadas para minimizar el costo promedio del combustible usado en las plantas térmicas y nucleares.

En la determinación del plan de expansión óptima es de suma importancia el efecto de la economía de escala, ya que el capital promedio y los costos fijos de operación por *kw* de capacidad decrementa sustancialmente con el tamaño de la planta, aproximándose asintóticamente a una constante para instalaciones muy grandes.

Para plantear las restriccions es necesario considerar los siguientes rubros: Restricciones de capital, restricciones institucionales, restricciones de demanda (uso doméstico e industrial) y restricciones físicas.

a) Restricciones de capital. Es el capital disponible por año y tipo de planta.

b) Restricciones institucionales. Número de plantas que pueden ser construídas por periodo de tiempo t.

c)Restricciones de demanda. Para esto se debe conocer la operación de las plantas y la demanda de cada tipo de usuario.

OPERACION

a) Las plantas hidroeléctricas son ideales para suministrar los requerimentos de cargas pico, puesto que el flujo puede ser controlado por las reservas almacenadas en el sistema, con agua descargada cuando sea necesario. Con frecuencia su operación es interdependiente ya que pueden estar sobre un mismo río y con producción limitada de energía.

b) A diferencia de las plantas hidroeléctricas, las plantas térmicas pueden ser usadas continuamente en su máxima capacidad.

Con estas caracteristicas de operación y con la demanda se pueden construir las restricciones de demanda, que son del siguiente tipo:

Energía mínima aceptable para el sistema.

Funciones de generación de energía por planta.

Flujo de energía.

Demanda mínima para cada subsección del sistema.

Energía satisfecha para cada uso desde la planta j en el periodo t.

Restricciones físicas. Son las relacionadas con el flujo de energía y el balance de masa.

Finalmente cada tipo de planta tiene una vida económica significativamente diferente, una planta hidroeléctrica puede tener al menos 50 años, una nuclear del orden de 30 años, mientras que una térmica dura aproximadamente 20 años.

CAPITULO II

EL PROBLEMA DE LOCALIZACION SOBRE UNA RED.

Según los criterios de clasificación, vistos en el capitulo anterior, cuando la única variable de expansión es la localización los problemas caen en este grupo y además las restricciones consideradas son por ende también de tipo geográfico. Un ejemplo típico de estos problemas es el relacionado con los servicios de auxilio como ambulancias, bomberos, puestos de socorro, etc. De acuerdo con las características del espacio de soluciones el análisis de estos problemas se considera en dos categorías:

A. Localización en el plano

B. Localización sobre una red.

La primera está caracterizada por un espacio infinito de soluciones, esto es, los puntos pueden estar situados en cualquier lugar del plano.

La segunda es caracterizada por un espacio de soluciones que consiste de puntos sobre la red, pueden ser los nodos o puntos sobre los arcos.

En este trabajo sólo se considera el problema de localización sobre los nodos de una red.

2.1 *Generalidades del problema de localización en Redes.*

Supóngase que se tiene una red de transporte G cuyo conjunto de vértices V consiste de $\{v_1, v_2, \ldots, v_3\}$ y asociado con cada liga (i, j) del nodo v_i al nodo v_j, se tiene un peso o atributo $b(i, j)$. Este atributo denota el tiempo de transporte o viaje, distancia, costo, etc., este atributo puede ser determinista o probabilista si es una variable aleatoria.

En muchos problemas de localización, bajo el criterio de mínima suma, se supone que para cualquier nodo v_i se tiene asociada una razón de demanda $g(i)$ (que puede ser el número de llamadas de auxilio por día, o la probabilidad de que una llamada sea generada en una hora), y que por conveniencia se normaliza, es decir

$$g(1) + g(2) + \ldots + g(n) = 1.$$

El tiempo promedio de recorrido desde un punto $x \in G$ a lospuntos v_i sobre la red es $J^+(x)$, donde

$$J^+(x) = \sum g(i) t(x, i)$$

y $t(x, i)$ es el mínimo tiempo de recorrido desde $x \in G$ hasta $v_i \in G$.

Cuando el tiempo de viaje es probabilista el objetivo es minimizar la expresión $J^+(x) = \sum g(i) \bar{t}(x, i)$. donde $\bar{t}(x, i)$ es el mínimo tiempo esperado de $x \in G$ a $v_i \in G$.

Los puntos x^* que minimizan ésta expresión o la anterior se llaman intermedios.

En algunos problemas, varios de los atributos de viaje como la distancia y las unidades de energía "viajadas", son importantes en la toma de decisiones, en estos casos el objetivo es optimizar la utilidad de todos los viajes del sistema.

Puesto que el objetivo es, en general, minimizar distancias y tiempos de viaje cabe preguntarse si la red está orientada y/o la orientación de los recorridos entre localidades y nodos. Estas características hacen el problema más complejo.

Puntos de demanda y localización.

Para ambos tipos de puntos existen las siguientes propiedades:

a) Los centros de demanda y/o localización pueden estar en cualquier punto de la red o

b) En un conjunto finito de puntos.

Se observa que aquellos centros donde hay más demanda son los principales contribuyentes en la función de costos del problema minisum.

2.2 *Clasificación de los problemas de localización.*

Los problemas de localización pueden ser clasificados en varias formas: con base en un criterio de optimalidad, el que considera características propias de la función objetivo; según los tipos de redes y localización simple o multilocalización, estas dos últimas son variaciones en las restricciones del problema.

2.2.1 *Criterios Minisum y Minimax (Función objetivo).*

Dado que los tiempos de respuesta es una de las más importantes consideraciones en los sistemas de emergencia la filosofía o principio para caracterizar las soluciones puede ser minimizar los tiempos de viaje o la función de costo relacionada con los tiempos de viaje y distancia recorrida, y posiblemente otros atributos. este tipo de criterios son llamados de "mínima suma" (minisum), puesto que se desea localizar sitios que minimizen el total de los efectos negativos o maximizar las utilidades por prestar algún servicio. Los lugares donde se localizan estos sitios son llamados *intermedios*, otra clase de problemas emplean el criterio minimax y los puntos a localizar son llamados *centros* de la red. Los modelos que emplean este criterio usan unicamente gráficas y árboles para localizar, y consiste en determinar un conjunto de puntos que minimizen la máxima distancia (o tiempo) entre los lugares de incidentes y dichos puntos.

Los modelos desarrollados para ésta clase problemas son muy útiles en los sistemas de auxilio, servicios como paradas de autobuses, localización de buzones, librerías, bancos, etc.. ¿Cabe preguntarse cuál de los dos criterios es más apropiado, y porque hacer un análisis de los modelos basados en el criterio minisum y no en el minimax. Los modelos minimax sirven sólo en el caso de tener una problemática sobre una gráfica o un árbol, y según el número de puntos a localizar el problema se complica por ser de carácter combinatorio y los algoritmos desarrollados hasta ahora usan matrices que pueden ser de dimensiones muy grandes, dependiendo del problema y esto por supuesto resulta poco eficiente en términos del tiempo de máquina, sin embargo resultan muy apropiados en algunos casos pues toma en cuenta los puntos de demanda que están muy alejados, permitiendo así obtener una distribución más uniforme de las localidades. Por otro lado los algoritmos para los problemas minisum son más eficientes para problemas grandes, y a diferencia del caso anterior la distribución de las localidades no es muy uniforme.

2.2.2 *Criterio respecto al tipo de red (Restricciones).*

Otro criterio de clasificación se basa en las cualidades de los pesos asociados a la red, esto es, la red puede ser determinista o probabilista. Si la red es determinista, los pesos asociados con nodos y aristas no cambian respecto al tiempo y se supone que están determinados. Si la red es probabilista los pesos asociados con nodos o arcos pueden cambiar respecto al tiempo, y el estado de la red en el futuro es aleatorio; sin embargo, existen casos en los que el estado de la red es estacionario respecto al tiempo. Estas redes son de particular interés pues se obtiene el comportamiento promedio del sistema.

El criterio usado aquí es respecto al tipo de red en forma conjunta con el número de centros de localización.

2.3 *El Problema tipo I y Localización Simple en Redes Deterministas.*

Definición 2.1. El problema de localización simple consiste en determinar la localización de un sitio que minimice la función $J^{+}(x)$.

Hakimi desarrolló, en 1964, el primer modelo y supuso tiempos de viaje deterministas en redes no dirigidas. Mirchandi, en 1975, demostró que si la red es dirigida existe al menos una solución óptima en un nodo sobre la red. Una de las ventajas de las redes dirigidas es permitir, entre otras cosas:

a) La existencia de calles con un solo sentido en los medios urbanos.

b) La diferencia en tiempos de viajes si las calles son de doble sentido.

c) La diferencia en tiempos de viaje para diferentes vehículos bajo diferentes condiciones.

Definición 2.2. Un punto x^* en una red no dirigida G, es un *intermedio absoluto* de G si para cualquier $x \in G$

$$J^+(x^*) \leq J^+(x)$$

Se observa que un intermedio absoluto minimiza el tiempo promedio o distancia promedio $J^+(x)$ desde un punto $x_i \in G$ a puntos aleatorios. Si la red es no dirigida se cumple la igualdad $t(x,i) = t(i,x)$, y entonces el problema consiste en minimizar el tiempo promedio desde los puntos aleatorios hacia el punto $x \in G$.

A continuación se presenta el teorema sobre existencia de intermedios absolutos en redes deterministas no dirigidas.

Teorema 2.1. **(Hakimi 1964).** Existe al menos un nodo en G el cual es un intermedio absoluto.

Demostración (ver [17]).

Si la red es orientada $t(x,i) \neq t(i,x)$, entonces se debe diferenciar el objetivo del problema, por un lado se desea encontrar un punto $x^* \in G$ que minimize el tiempo promedio $J^+(x^*)$. Por otro lado si se desea minimizar el tiempo promedio de viaje hacia el punto $y \in G$, el objetivo es encontrar y^* tal que $J^-(y^*) \leq J^-(y)$ para toda $y \in G$. En donde $J^-(y) = \sum g(i)t(i,y)$.

Se hace notar que no necesariamente se cumple la igualdad $J^{+}(x) = J^{-}(x)$. Entonces en redes orientadas para encontrar nuevos puntos óptimos en el problema se requieren las siguientes definiciones.

Definición 2.3. Un punto x^{*} en una red dirigida determinista es un *intermedio absoluto externo* de G si para toda $x \in G$

$$J^{+}(x^{*}) \le J^{+}(x)$$

Definición 2.4. Un punto y^{*} en una red orientada determinista G es un *intermedio absoluto interno* de G si para cualquier $y \in G$

$$J^{-}(y^{*}) \le J^{-}(y)$$

Definición 2.5. Cuando existe al menos una trayectoria desde un punto $x \in G$ a un punto $y \in G$, entonces x es directamente conectada a y, ó y es directamente conectada desde x.

Es posible que se desee minimizar ambos tiempos, es decir

$$J(x,y) = \sum g(i)[t(x,i) + t(i,y)]$$

se observa que no necesariamente x = y.

Si $y_0 \in G$ es fija se desea encontrar $x' \in G$ tal que

$$J(x', y_0) \le J(x, y_0) \text{ para toda } x \in G.$$

Si $x_0 \in G$ es fija, se desea encontrar $y' \in G$ tal que

$$J(x_0, y') \leq J(x_0, y) \text{ para toda } y \in G.$$

Si ninguno de los dos es fijo, x ó y, entonces $x = y = x^*$ es un intermedio absoluto, si la red es no orientada. Sin embargo, si este no es el caso se requiere una nueva definición.

Definición 2.6. Un par de puntos x^*, y^* en una red dirigida determinista G, son *intermedios absolutos in-ext* de G si para cualquier x, $y \in G$

$$J(x^*, y^*) \leq J(x, y).$$

El siguiente teorema establece la existencia de estos puntos.

Teorema 2.2. Un par de puntos intermedios absolutos in-ext en una red determinista dirigida G corresponden a un par de puntos intermedios interno y externo respectivamente.

Demostración. Es obvia a partir de la definición de $J(x, y)$.

Si los puntos x, $y \in G$ coinciden, entonces el sitio con mínimo tiempo de viaje, en general no corresponden ni a un interno absoluto ni a uno externo.

Definición 2.7. Un punto z^* en una red determinista G es un *intermedio absoluto* de G si para $z \in G$

$$J(z^*, z^*) \leq J(z, z).$$

2.4. *Problema tipo II y Localización Simple en Redes Deterministas*

Hasta ahora el objetivo ha sido minimizar la función $J(.)$, sin embargo en algunos casos se maximiza una función de utilidad, esto es, se desea localizar puntos que maximizen la utilidad esperada para los tiempos de viaje.

Definición 2.8. La utilidad esperada para tiempos o distancias, desde un lugar $x \in G$ a un punto aleatorio está dado por

$$J_u^+(x) = \sum g(i) u_i^+(t(x, i))$$

donde $u_i^+(t(x, i))$ es la utilidad asociada para tiempos de viaje, para pequeños recorridos desde $x \in G$ a $v_i \in G$, cuando se genera una demanda o solicitud de algún servicio en v_i.

Definición 2.9. Un punto x^* (y^*) en una red determinista G es un *intermedio óptimo externo (interno)* si para cualquier $x \in G$ $(y \in G)$

$$J_u^+(x^*) \geq J_u^+(x) \qquad (J_u^-(y^*) \geq J_u^-(y)).$$

Teorema 2.3. (Levy 1967) Cuando las funciones de utilidad para tiempos de viaje $(u_i^{+(-)}(t(x,i))$, son convexas existe al menos un nodo de G el cual es un intermedio óptimo externo (interno).

Demostración (Ver [17]).

Levy también demostró este teorema cuando los atributos son costos de transporte, caso en el que el objetivo es minimizar los costos de transporte y la función debe ser cóncava, esto permite que el teorema tenga ciertas flexibilidades. Una de ellas es que $J_u^+(x)$ y $J_u^-(y)$ permiten hacer uso de diferentes funciones de utilidad para diferentes puntos de demanda, esto significa que dos nodos v_i, v_j no necesariamente tienen la misma función de utilidad. Para reducir el número de funciones de utilidad la población se divide en grupos homogéneos, y a cada grupo se le asocia una función de utilidad. La otra es que $J_u^+(x)$ y $J_u^-(x)$ es la utilidad de sólo un atributo de viaje, lo que resulta apropiado en algunos casos como en los servicios de urgencias, donde el tiempo de viaje es el costo más importante y representativo. En algunas situaciones más de un atributo es de interés y además se consideran recorridos redondos, caso para el cual se tiene la siguiente definición.

Definición 2.10. Un punto z^* en una red determinista G es un *intermedio óptimo* generalizado de G si para cualquier $z \in G$

$$J_u(z^*) \geq J_u(z)$$

donde $J_u(z) = \sum g(i)u_i(w(z,i),\ w(i,z))$ y $w(z,i)$, $w(i,z)$ son los vectores de los atributos de viaje asociados con el recorrido en redondo entre $z \in G$ y $v_i \in G$.

Si se supone que el valor de cualquier atributo b en una fracción θ del arco (i,j) está dado por $\theta b(i,j)$ y si las funciones de utilidad son convexas, entonces al menos un nodo de la red es un punto óptimo, lo que puede ser expresado en el siguiente teorema.

Teorema 2.4. Cuando las funciones de utilidad para los atributos de viaje son convexas existe al menos un nodo de G el cual es intermedio óptimo generalizado.

Demostración (Ver. [17]).

Existe una definición análoga a los intermedios externos e internos para el caso de maximizar funciones de utilidad.

Definición 2.11. Un par de puntos x^*, y^* en una red determinista G son *intermedios óptimos generalizados interno-externo* de G si para cualquier x, $y \in G$

$$J'_u(x^*, y^*) \geq J'_u(x, y)$$

$$J'_u(x^*, y^*) = \sum g(i) u_i(w(x, i), w(i, y)).$$

donde $J'_u(x, y)$ representa la función de localización para dos puntos (ver la def. 2.6.).

En forma análoga al teorema 2.4, si se satisface la condición de homogeneidad para cada uno de los atributos, existe al menos un par de intermedios óptimos generalizados in-ext sobre los nodos de la red.

2.5. *Problema tipo I y Localización Simple sobre Redes Probabilistas.*

En este tipo de redes la demanda se supone probabilista, entonces la pregunta es: Dónde debe ser localizado un punto sobre la red de tal manera que el tiempo promedio de viaje hacia (o desde) un centro de demanda aleatorio, y desde (o hacia) este centro sea mínimo?. En este caso $\bar{t}(x,y)$ es una cantidad probabilista. En general en este caso la red es probabilista y en general los atributos son el valor esperado de $b(i,j)$, y se denotan por $\bar{b}(i,j)$.

Como los pesos $\bar{b}(i,j)$ no son deterministas el estado de la red no es determinista, por lo que un estado difiere de otro por una diferencia entre los tiempos de viaje, en al menos una liga. Sea $\bar{k}$ la variable aleatoria que denota el estado de la red y sea $F_{\bar{k}}(k)$ la función de distribución. Si $\bar{b}_k(i,j)$ es el peso del arco (i,j) cuando $k = \bar{k}$ entonces análogamente $\bar{t}_k(x,y)$ denota el tiempo más corto de viaje desde $x \in G$ a $y \in G$ y para $k = \bar{k}$, y $G_{\bar{k}}$ denota el conjunto de posibles estados de la red.

En los problemas de localización simple una condición para que el tiempo esperado de viaje desde (o hacia) un punto hacia (o desde) un centro de demanda aleatoria sea minimizado, deben existir nodos con demanda diferente de cero conectados estocásticamente desde (o hacia) al menos un punto sobre la red.

Definición 2.12. Un punto $x \in G$ es conectado estocásticamente a un punto $y \in G$ si el tiempo esperado de viaje desde x hacia y es finito, es decir, si

$$\int t_k(x,y)\ dF_k(k) < \infty$$

Suponiendo que existe un punto que está conectado estocásticamente hacia los nodos con demanda cero se puede definir una localidad óptima sobre una red probabilista.

Definición 2.13. Un punto $x^* \in G$, en una red no dirigida, es un *intermedio esperado* de G si para toda $x \in G$

$$J^+(x^*) \leq J^+(x)$$

donde $J^+(x) = \int \left[\sum g(i) t_k(x,i) \right] dF_k(k)$.

Para redes probabilistas existe el teorema análogo de existencia de al menos un intermedio esperado en algún nodo de la red y se puede probar que bajo las siguientes suposiciones se asegura la existencia de al menos un intermedio esperado en algún nodo de la red.

Suposición 2.1.a. El valor de cualquier atributo b en el viaje de una fracción θ de la liga (i,j) en el estado G_k, está dado por $\theta b_k(i,j)$ para los posibles estados $G_k \in G_{\overline{k}}$.

Suposición 2.1.b. El estado de la red es conocida en todo instante, aún más, el intervalo de tiempo entre los cambios en el estado de la red son mucho más largos que los tiempos de viaje sobre la red.

La suposición a. implica que la rapidez de viaje sobre cualquier arista es uniforme para cualquier estado de la red, ésta suposición también permite que la rapidez de viaje varíe entre ligas, y ésta rapidez sobre una liga dada cambia al variar el estado de la red.

La suposición b. implica que los "viajeros" en el sistema conocen todas las rutas viables, y que cada ruta seleccionada maximiza la utilidad de los solicitantes del servicio. Esta suposición idealiza el sistema cuando los estados de la red cambian suavemente.

Con base en estas propiedades se puede establecer el siguiente teorema sobre la existencia de intermedios esperados.

Teorema 2.5. Existe al menos un nodo de G el cual es un intermedio esperado.

Demostración (Ver [17]).

Para cualquier tipo de intermedios absolutos definidos sobre redes deterministas, se puede definir un intermedio esperado sobre redes probabilistas. En particular para una localidad simple sobre una red dirigida que minimiza el tiempo de viaje esperado desde (hacia) una localidad hacia (desde) los puntos v_i se puede definir un intermedio esperado. Para localizar un centro que minimice el tiempo esperado para un viaje redondo entre localidades y centros de demanda se puede definir el intermedio esperado.

En la obtención de los intermedios existe una gran dificultad, la determinación de la función de distribución $F_{\bar{K}}(k)$ y su manipulación. En general se supone que $F_{\bar{K}}(k)$ es discreta sobre un rango finito, pues esto permite desarrollar algoritmos apropiados para redes probabilistas y simplifica la demostración de los teoremas de la existencia de óptimos. Asimismo ésta suposición implica que la red puede tener un número finito de estados $G_1, G_2, \ldots, G_s$ con una probabilidad de ocurrencia $P_1, P_2, \ldots, P_s$ respectivamente y entonces la función objetivo está dada por

$$J^+(x) = \sum_k^s P_k \sum_i^n g(i) t_k(x, i).$$

Para el problema tipo II se hace análogamente, sólo que se define la función objetivo como

$$J^{+}(x) = \sum_{k}^{s} P_{k} \sum_{i}^{n} g(i)u_{i}^{+}(t_{k}(x, i)).$$

2.6. *Multilocalización en Redes Deterministas.*

Para demostrar la optimalidad de los nodos que son localidades se debe suponer que la selección individual de éstas maximiza las utilidades esperadas.

Si m sitios son localizados sobre un conjunto de m puntos $X_{m} = \{x_{1}, \ldots, x_{m}\}$ y si se desea minimizar el tiempo de viaje a cada localidad x_{i} desde v_{i}, se deben seleccionar las localidades más próximas. entonces el tiempo esperado para un sitio v_{i} en el sistema está dado por:

$$J^{+}(X_{m}) = \sum g(i)t(i, X_{m})$$

donde $t(i, X_{m}) = \min\{t(i, x_{1}), \ldots, t(i, x_{m})\}$.

Cuando el interés es minimizar el tiempo de viaje a un nodo v_{i} desde la localidad más próxima el tiempo de viaje esperado es:

$$J^{-}(X_{m}) = \sum g(i)t(X_{m}, i)$$

donde $t(X_{m}, i) = \min\{t(x_{1}, i), \ldots, t(x_{m}, i)\}$.

En redes no dirigidas $t(X_m, i) = t(i, X_m)$ y por tanto $J^+(X_m) = J^-(X_m)$.

Definición 2.14. Un conjunto de puntos X^*_m en una red determinista no orientada G es un conjunto de *m-intermedios absolutos* de G si para cualquier $X_m \subseteq G$

$$J^+(X^*_m) \leq J^+(X_m)$$

Teorema 2.6. Existe al menos un subconjunto de m-nodos de G el cual es un *m-intermedio absoluto.*

Demostración (Ver [17]).

Definición 2.15. Un conjunto de puntos X_m en una red determinista G es un conjunto de *m-intermedios óptimos generalizados* de G, si para toda $X_m \subseteq G$.

$$J_u(X^*_m) \geq J_u(X_m)$$

donde

$$J_u(X_m) = \sum g(i) u_i(w(X_m, i),\ w(i, X_m)),$$

y

$$u_i(w(X_m, i),\ w(i, X_m)) = \text{máx}\{u_i(w(X_j, i),\ w(i, X_k))\}.$$

Esta última ecuación implica que los nodos v_i son servidos por localidades que maximizan la utilidad de los atributos de viaje, y que el punto de partida (x_j) a v_i no necesariamente coincide con el punto destino (x_k).

Teorema 2.7. Cuando las funciones de utilidad son convexas, existe al menos un subconjunto de G de m-nodos el cual forma un conjunto de *m-intermedios óptimos generalizados.*

Demostración (Ver [17]).

Definición 2.16. Conjuntos de puntos X_m^{*+} y Y_m^{*-} en una red determinista G son intermedios óptimos m^-in-m^+ext de G si para cualquier Xm^+, $Ym^- \leq G$

$$J'_u(Xm^{*+},\ Ym^{*-}) \geq J'_u(Xm^+,\ Ym^-)$$

donde

$$J'_u(Xm^+,\ Ym^-) = \sum g(i)u_i(t(Xm^+,\ i),\ t(i,\ Ym^-))$$

Una ilustración de ésta definición se encuentra en los servicios médicos de urgencias. Por ejemplo, si se tiene una estación de ambulancias en el punto $x \in G$ y un hospital en el punto $y \in G$; se desea localizar algunas estaciones m^+ y hospitales m^- tal que la utilidad para tiempos de viaje sea máxima. Si una urgencia es respondida por la ambulancia más próxima, en términos del tiempo de viaje, y después el (o los) paciente(s) es (son) trasladado (s) al hospital más próximo, el m^- in - m^+ext identifica la localización óptima para la red G.

EJEMPLO 1.

Se supone que en una zona rural, que comprende varios municipios, se desea establecer un sistema de servicios médicos, siendo de particular interés el servicio de urgencias. De los censos se puede estimar la demanda de servicios de salud en cualquier punto de la región. Estudios de transporte permiten obtener el tiempo de transporte (viaje), distancias y algunos otros atributos de viaje entre pares de puntos de la región. El problema consiste en planear el servicio médico de urgencias vía ambulancias y sujeto a restricciones presupuestales.

Con el presupuesto disponible se desea construir las unidades médicas necesarias, obtener la asignación de las demandas a unidades, determinar el número y localización de las unidades y estaciones de urgencias. El criterio de optimización contempla los beneficios públicos y costos, sin embargo mostraremos una red en la que se representa la problemática y en la que sólo se consideran los tiempos de viaje.

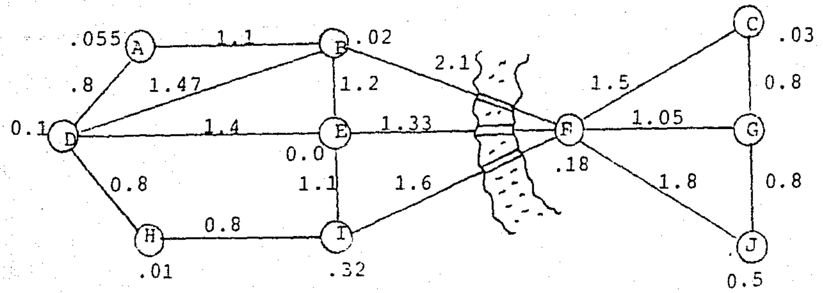

fig. 2.1

La solución es la siguiente:

El intermedio absoluto está en el nodo *I*, y el tiempo esperado es de 7.29 min..

Para el caso de dos intermedios los puntos son los nodos *I* y *F*, con un tiempo esperado de 4.57 min..

Si se supone ahora que en los puentes en las aristas (I,F) y (B,F) se congestionan en horas pico, y que hay horas en que el tráfico disminuye considerablemente, esto nos permite obtener tres posibles estados de la red: 1)*horas normales*, 2)*horas pico y* 3) *horas tranquilas* (figs. 2.2, 2.3 y 2.4). a ruta de viaje más corta de un punto de la red a otro cambia dependiendo del estado de la red, y cada estado ocurre durante ocho horas con una probabilidad de ocurrencia de 1/3. Se desea obtener a) un intermedio esperado y b) 2-intermesdios esperados. Las tablas de viajes entre dos nodos para cada estado aparecen a continuación seguidas por las figuras correspondientes.

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*
A	0.0	1.0	4.0	1.0	2.0	2.5	3.5	2.0	3.0	4.0
B	1.0	0.0	3.0	1.44	1.0	1.5	2.5	2.44	2.0	3.0
C	4.0	3.0	0.0	4.0	2.5	1.5	1.0	3.5	2.5	2.0
D	1.0	1.44	4.0	0.0	1.5	2.5	3.5	1.0	2.0	4.0
E	2.0	1.0	2.5	1.5	0.0	1.0	2.0	2.0	1.0	2.5
F	2.5	1.5	1.5	2.5	1.0	0.0	1.0	2.0	1.0	1.5
G	3.5	2.5	1.0	3.5	2.0	1.0	0.0	3.0	2.0	1.0
H	2.0	2.44	3.5	1.0	2.0	2.0	3.0	0.0	1.0	3.5
I	3.0	2.0	2.5	2.0	1.0	1.0	2.0	1.0	0.0	2.5
J	4.0	3.0	2.0	4.0	2.5	1.5	1.0	3.5	2.5	0.0

tabla 2.1

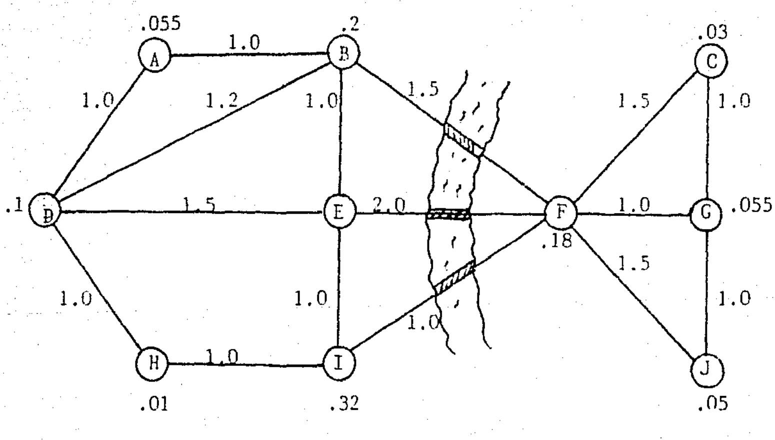

fig. 2.2

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*
A	0.0	2.0	6.7	1.0	2.0	4.7	6.45	2.0	3.0	7.45
B	2.0	0.0	6.0	2.0	2.0	4.0	5.75	3.0	4.0	6.75
C	6.7	6.0	0.0	5.7	4.0	2.0	1.0	6.5	5.5	2.0
D	1.0	2.0	5.7	0.0	1.7	3.7	5.45	1.0	2.0	6.45
E	2.7	2.0	4.0	1.7	0.0	2.0	3.75	2.7	2.0	4.75
F	4.7	4.0	2.0	3.7	2.0	0.0	1.75	4.5	3.5	2.75
G	6.45	5.75	1.0	5.45	3.75	1.75	0.0	6.25	5.25	1.0
H	2.0	3.0	6.5	1.0	2.7	4.5	6.25	0.0	1.0	7.25
I	3.0	4.0	5.5	2.0	2.0	3.5	5.25	1.0	0.0	6.25
J	7.45	6.75	2.0	6.45	4.75	2.75	1.0	7.25	6.25	0.0

tabla 2.2

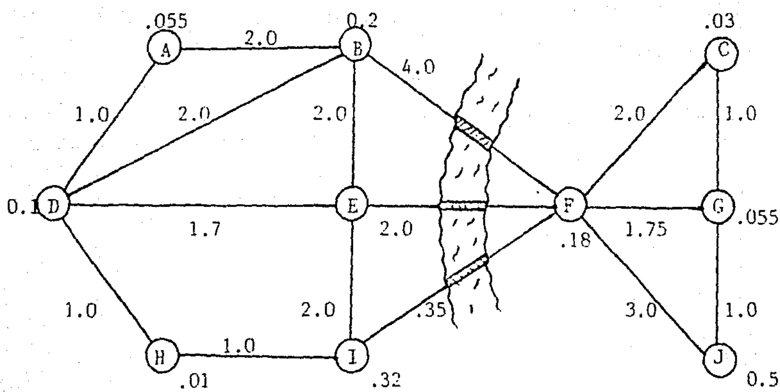

fig. 2.3

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*
A	0.0	0.3	1.9	0.4	0.9	1.1	1.5	0.8	1.2	1.9
B	0.3	0.0	1.6	0.7	0.6	0.8	1.2	1.1	0.9	1.6
C	1.9	1.6	0.0	1.9	1.4	0.8	0.4	1.5	1.1	0.8
D	0.4	0.7	1.9	0.0	1.0	1.1	1.5	0.4	0.8	1.9
E	0.9	0.6	1.4	1.0	0.0	0.6	1.0	0.7	0.3	1.4
F	1.1	0.8	0.8	1.1	0.6	0.0	0.4	0.7	0.3	0.8
G	1.5	1.2	0.4	1.5	1.0	0.4	0.0	1.1	0.7	0.4
H	0.8	1.1	1.5	0.4	0.7	0.7	1.1	0.0	0.4	1.5
I	1.2	0.9	1.1	0.8	0.3	0.3	0.7	0.4	0.0	1.1
J	1.9	1.4	0.8	1.9	1.4	0.8	0.4	1.5	1.1	0.0

tabla 2.3

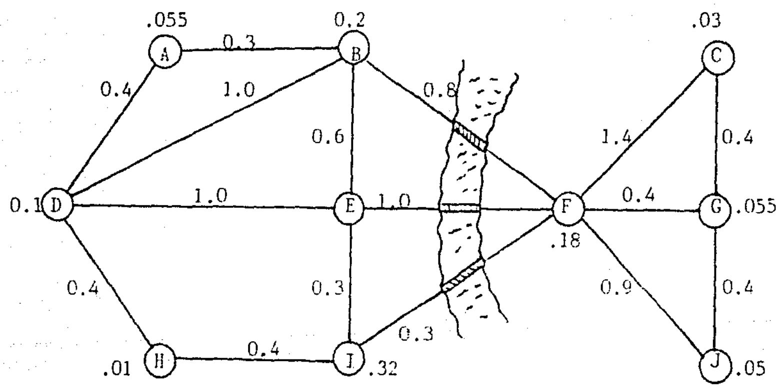

fig. 2.4

En este ejemplo la ruta más corta de un punto a otro depende del estado de la red, usando la matriz de tiempos de viaje esperados se puede observar el nodo *E* es un intermedio esperado con un tiempo de aproximadamente 7.08 min.. Los dos intermedios esperados son los nodos *I* y *B* con un tiempo esperado de 4.47 min.

CAPITULO III

EL PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN GENERALIZADO

Existen muchos problemas en los que existe la variable localización y además el tamaño y tiempo de la expansión, en este capítulo se hace una revisión de los modelos de este tipo, cabe mencionar que los modelos serán clasificados con base en el número de puntos a localizar y generalmente el objetivo es minimizar una función de costos. Una de las formulaciones más simples de los modelos de localización es la que propone Marks, Revelle y Liebman [25], en la que las capacidades de las localizaciones son restringidas y se consideran como puntos intermedios entre fuentes y puntos de demanda. La formulación es la siguiente:

$$\text{Min } \sum F_i y_i + \sum_j \sum_i c_{ij} \; x_{ij} + \sum_j \sum_i c^{\bullet}_{ki} \; x^{\bullet}_{ki}$$

s. a.

$$\begin{aligned} &\sum x^{\bullet}_{ki} \leq S_k && k = 1, 2, \ldots, p \\ &\sum_i x_{ij} = \sum x^{\bullet}_{ki} && i = 1, 2, \ldots, m \\ &\sum x^{\bullet}_{ki} \leq Q_i y_i && \\ &D^u_j \geq \sum x_{ij} \geq D^l_j && j = 1,2,\ldots, n \\ &x_{ij},\; x^{\bullet}_{ki} \in \mathbb{Z}^+ \text{ y } \; y_i \in \{0,1\} && \end{aligned}$$

x_{ij} = Cantidad enviada desde la localización i a la demanda j.

y_i = Cantidad total que se envía desde la localidad j.

c_{ij} = Costos de transporte al enviar la cantidad x_{ij} desde el nodo i hasta el nodo j.

$F_i(.)$= Costos de construcción y operación de la localización i.

D_j = Demanda en el nodo j.

n = Número de nodos de demanda .

m = Número de nodos de localización propuestos.

c^{*}_{ki} = Costos unitarios de transporte de la fuente k a la localización j

x^{*}_{ki} = Flujo de la fuente k al punto intermedio i

D^{u}_{j} = Cota superior de la demanda en el nodo j.

D^{l}_{j} = Cota inferior de la demanda en el nodo j.

p = Número de puntos de oferta

Q_i = Capacidad de la i-ésima localización

S_k = Oferta en la fuente k

Un problema menos restringido es el propuesto por Efroymson y Ray [2], en el cual las capacidades no están acotadas y los costos pueden ser tratados como cargas fijas.

Estos modelos sirven para problemas del sector público cuando hay costos de inversión restringidos y costos de localización invariantes. Esto sugiere que están más relacionados con el problema tipo I, sin embargo pueden ser utilizados en el sector privado con ciertas modificacones en la función de costos.

En los párrafos anteriores se mencionó que los problemas de localización y expansión son aquellos en los que la variable correspondiente y las otras dos aparecen como variables de decisión, en las subsecuentes secciones se analisan los principales modelos existentes de esta gama de problemas.

3.1 *Modelos de Localización Simple*

Primero sa analizan los problemas de localización simple en los que es fácil determinar el punto para la expansión, en cuyo caso el análisis está basado en inventarios. A continuación se muestran algunos modelos de inventarios usados en los problemas de localización simple.

3.1.1 MODELO DE ECONOMIAS DE ESCALA

En los problemas de inventarios [32], cuando la cantidad demandada en cada periodo es conocida pero diferente y cuando los costos por inventario varían de un periodo a otro es posible hacer un inventario en el periodo t para satisfacer la demanda en el periodo $t+k$. Por ejemplo al considerar una industria que produce un producto con N posibles valores g_i en alguna de las características que posee (color, olor, sabor, etc.). Se supone que los costos de manufactura y precios de venta para los N estados son constantes sobre todos los periodos y que sólo los costos de inventario son relevantes.

Formulación

d_t = Demanda en el periodo t

i_t = Costo unitario del inventario del periodo t al $t+1$

s_t = Costos de orden

x_t = Cantidad ordenada o producida

Se supone que los costos y demanda son no negativos, el problema consiste en determinar los valores x_t ($t=1,2,\dots,N$) de tal manera que la demanda sea satisfecha a costo mínimo.

Un método de solución consiste en enumerar 2^{N-1} combinaciones de ordenar o no en cada periodo, pero desde luego es más eficiente resolver el problema por medio de Programación Dinámica. Sea I el inventario final e I_0 el inventario inicial, entonces

$$I = I_0 + \sum_t x_t - \sum_t d_t \geq 0$$

la ecuación se puede reescribir como:

$$f_t(I) = \min_{x_t > 0} \{ i_{t-1} I + \delta(x_t) s_t + f_{t+1}(I + x_t - d_t) \}$$

donde

$$\delta(x_t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_t > 0 \\ \\ 0 & \text{si } x_t = 0 \end{cases}$$

y en el N-ésimo periodo

$$f_N(I) = \min \{ i_{N-1} I + \delta(x_N) s_N \}$$

3.1.2 PRODUCCION DETERMINISTA CON COSTOS CONCAVOS Y RESTRICCIONES DE CAPACIDAD

Considérese la producción de un artículo durante un intervalo de tiempo, se desea satisfacer la demanda del producto en un horizonte finito, que consta de n periodos. El nivel de producción en el periodo i es a lo más c_i unidades (restricción de capacidad de producción). El problema consiste en determinar las unidades que se deben de incrementar en cada periodo a costo mínimo. Este problema [8] es tratado cuando es permitida la demanda no satisfecha y cuando no lo es. Se supone que las funciones de costo de producción y arrendamiento son cóncavas.

El plan óptimo, en este caso, de subplanes en los cuales a) el nivel del inventario es diferente de cero en cualquier periodo excepto el último y b) el nivel de producción, cuando es positivo, está en su capacidad excepto en al menos un punto en el cual es menor.

3.1.2.a MODELO SIN DEMANDA NO SATISFECHA

Formulación

$$\min F(x) = \sum_i p(x_i) + \sum_i h_i(I_i)$$

$$\sum_j x_j - \sum_j r_j = I_i \qquad i=1,\dots,n \qquad (3.1)$$

$$I_i \geq 0 \qquad i=1,\dots,n \qquad (3.2)$$

$$0 \leq x_i \leq c_i \qquad i=1,\dots,n \qquad (3.3)$$

$$\sum_j^i c_j \geq \sum_j^i r_j \qquad i=1,\dots,n \qquad (3.4)$$

r_i = Demanda en el periodo i

x_i = Producción en el periodo i

p_i = Costo de producción en el periodo i

h_i = Costo al arrendar la cantidad I_i

Se puede observar que las restricciones forman un cono convexo y como $F(x)$ es cóncava el óptimo se alcanza en un punto extremo. A continuación se presenta una formulación del modelo 3.1.2.a con Programación Dinámica.

$$f_0 = 0$$

$$f_u = \min_u \{d_{uv} + f_v\} \qquad u=0,\dots,n-1$$

$$I_u = I_v = 0$$

$$I_t > 0 \qquad t=u+1,\dots,v-1$$

f_t = Costo asociado con el plan de producción óptimo para los periodos $t+1,\dots,n$

d_{uv}= Costo asociado con el siguiente plan óptimo para los periodos $u+1,\dots,v-1$

3.1.2.b MODELO CON DEMANDA NO SATISFECHA

Formulación

$$\min F(x) = \sum_j p(x_i) + \sum_i h_i(I_j)$$

$$-\sum_j r_j \le I_i \qquad i=\alpha,\alpha+1,\dots,n \qquad (3.2')$$

$$0 \le x_i \le c_i \qquad i=1,\dots,n \qquad (3.3)$$

$$\sum_j^i c_j \ge \sum_j^i r_j \qquad i=\alpha+1,\dots,n \qquad (3.4')$$

donde α es el último periodo en el que no se satisface la demanda.

En este modelo la ecuación (3.2') asegura que las cantidades ordenadas deben ser satisfechas en un periodo α mayor que el especificado por el problema, y para asegurar que las soluciones sean factibles cuando se permiten demandas no satisfechas la ec. (3.4) debe ser reemplazada por la ec. (3.4'). La función objetivo no cambia pero se hace notar que ahora $h_i(I_i)$ contiene costos de inventario si $I_i>0$ y costos por la demanda no satisfecha cuando $I_i<0$, y además $h(I_i)$ es una función cóncava a trozos.

3.1.2.c EXTENSIONES

En esta parte se extienden los resultados de Florian y Klein [8] al caso de funciones de costo más generales [20], las cuales no son cóncavas ni convexas; también se efectúa una caracterización del conjunto de puntos extremos cuando la demanda no satisfecha y el nivel de inventarios están acotados superiormente.

Formulación

$$\min F(x) = \sum_i g_i(x_i) + \sum_i h_i^+(I_i^+) + \sum_i h_i^-(I_i^-)$$

$$x_{i1} + x_{i2} + I_{i-1}^+ - I_{i-1}^- - I_i^+ + I_i^- = r_i$$

$$-\beta_{i1} x_{i1} - \beta_{i2} x_{i2} + y_i = 0$$

$$0 \le x_{i1} \le c_{i1} \qquad i=1,\dots,n$$

$$0 \le x_{i2}$$

$$I_i^+ \le w_i^+$$

$$I_i^+,\ I_i^- \ge 0$$

$$I_i^+ \le \sum r_k = w_i^- \qquad i = \alpha+1,\dots,n-1$$

$$I_0^+ = I_0^- = I_n^+ = I_n^- = 0$$

donde

$x_i = x_{i1} + x_{i2}$ = cantidad producida en el periodo i

r_i = requerimientos en el periodo i

I_i^+ = Inventario del periodo i al pariodo $i+1$

I_i^- = total de demanda no satisfecha desde el periodo i al periodo $i+1$

w_i^+ = inventario máximo que puede ser cargado del periodo i al periodo $i+1$

w_i^- = máxima demanda no satisfecha del periodo i al periodo $i+1$

h_i^+ = Función de costos de inventario (no decreciente, no negativa y cóncava)

h_i^- = Función de costos por demanda no satisfecha

β_{i1}, β_{i2} = pendientes de la función linel a trozos f_i $(0 \le \beta_{i1} \le \beta_{i2})$

c_{i1} = Punto de rompimiento

α = Número de periodos en que la demanda no es satisfecha

$g_i(y_i)$ = Función de costos de producción

x_{i1} = cantidad producida en el intervalo $[0, c_{i1}]$

x_{i2} = cantidad producida en el intervalo $[c_{i1}, i]$

La función de costos de producción es de la forma:

$$g_i(y_i) = \begin{cases} K_i + y_i & \text{si} \quad y_i > 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

K_i = Costos fijos de producción

$y_i = f_i(.)$ = Función lineal a trozos, convexa, no negativa y continua en $[0, \infty)$ con $f_i(0) = 0$.

La función de costos del inventario $I_i = I_i^+ - I_i^-$ es cóncava a trozos en $(-\infty,\infty)$ lo que induce una función de inventario I_i^+ cóncava y otra por demanda I_i^- del mismo tipo.

3.1.3 INVENTARIOS CON COSTOS MULTIPLES DE PRODUCCION U ORDENAMIENTO

Considérese el problema de planear la producción de un sólo artículo sobre un horizonte de planeación finito de N periodos, para satisfacer una demanda r_i $(i=1,\ldots,N)$ en el periodo i. Sea x_i la cantidad producida (ordenada) en el periodo i, entonces $x = (x_1,\ldots,x_N)$ es el plan de producción [23] y asociado con este plan se tiene un inventario $y = (y_1,\ldots,y_N)$ y para cada periodo y_i se tiene que

$$y_i = \sum_{t=1}^{i} (x_i - r_i) = y_{i-1} + x_i - r_i$$

y el plan de producción es factible si

$$x \geq 0 \tag{3.5}$$

$$y \geq 0 \tag{3.6}$$

Se requiere que la demanda sea satisfecha en cada periodo y sin disponer de existencias. La función de costos $C_i(.)$ está formada por costos de orden y de inventario.

Se observa que $y_0=0$ $C_i(0)=0$, entonces la función de costos por orden en el periodo i está dada por

$$C_1(z) = C_1^*(z \bmod M_1) + M_1^{-1}(z-z \bmod M_1)\, C_1^*(M_1) \qquad (3.7)$$

$$z \geq 0$$

y tiene la propiedad de que

$$C_1(u + v) \leq C_1(u) + C_1(v) \qquad u, v \geq 0$$

y la función $C_1(.)$ no es cóncava en $[0,\infty)$, un ejemplo de una función de costos por ordenamiento está dada en la fig. 3.1. Donde $C_1^*(.)$ es la función de costos en el intervalo $[0,M_1]$, con $M_1>0$ y constante, con las caracteristicas de ser no negativa, no decrediente y cóncava en el intervalo.

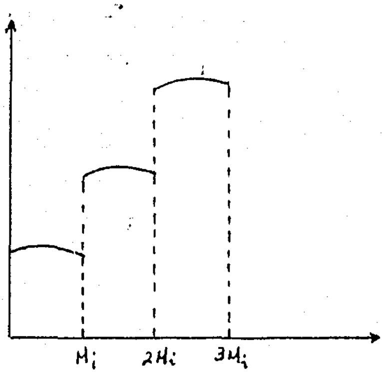

fig. 3.1

K_1 = la magnitud del salto en el origen, es decir $K_1=C_1^*(0^+)$.

Si la función de costos por ordenamiento está dada por

$$C_1^*(z) = K_1\delta(z) + C_1 z$$

donde $\delta(z)$ es:

$$\delta(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z>0 \\ 0 & \text{si } z=0 \end{cases}$$

En este ejemplo la función de costos está dada por la suma de una función escalón que tiene un salto de tamaño K_i cuando se tienen M_i unidades, y una función lineal con pendiente C_i.

Es posible proponer un caso particular en el que:

M_i = Capacidad del vehículo de transporte en el periodo i.

K_i = Costo de uso del vehículo en el periodo i.

$C_i(z)$ = Costo de ordenamiento de un lote de tamaño z en el periodo i.

En este modelo el costo de transporte es una función del número de vehículos requeridos para efectuar el ordenamiento, sin tomar en cuenta fracciones de los mismos.

Para procesos industriales con corridas de producción, con restricciones de capacidad, donde no es necesario utilizar completamente este modelo es apropiado junto con la ec. (3.7). Aquí $K_i = C_i^{\bullet}(0^+)$ representa el costo por ordenamiento para la corrida i y M_i es la capacidad de producción. En general la ec. (3.7) es apropiada en muchos contextos, en los que K_i son los costos de ordenamiento y $C_i(.)$ son costos múltiples de ordenamiento. El costo del plan de producción x para los N periodos está dado por:

$$\mathcal{C}(x) = \sum [C_i(x_i) + h_i(y_i)]$$

El objetivo es minimizar la función $\mathcal{E}(x)$ sujeta a las ecs. (3.5) y (3.6), junto con las restricciones de factibilidad.

3.1.4.a MODELO CON COSTOS MONOTONOS

Propiedades cualitativas de las políticas óptimas.

Hipótesis

$i)$ $\Delta_\varepsilon\, C_i^{\bullet}(u) \geq \Delta_\varepsilon C_{i+1}^{\bullet}(v) \quad 0 \leq u \leq u+\varepsilon \leq M_i \qquad i=1,\dots,N-1$

$ii)$ $K_i \geq K_{i+1} \qquad i=1,\dots,N-1$

$iii)$ $M_i \leq M_{i+1} \qquad i=1,\dots,N-1$

$\Delta_\varepsilon\, C_i^{\bullet}(u) = C_i^{\bullet}(u+\varepsilon) - C_i^{\bullet}(u)$

Si estas hipótesis se satisfacen entonces el modelo es llamado de *Costos Monótonos*.

En el caso de la función lineal y en medios estacionarios los costos marginales decrementan respecto al tiempo, debido a que $C_i \geq C_{i+1}$. Si además se satisfacen las hipótesis $i)$ y $ii)$ entonces

$$\Delta_\varepsilon\, C_i^{\bullet}(0) \geq \Delta_\varepsilon C_{i+1}^{\bullet}(0)$$

Se observa que como $h_i(.)$ y $C_i(.)$ son semicontinuas inferiormente y no decrecientes entonces $\mathcal{E}(.)$ es semicontinua sobre el conjunto de programas factibles X, y por ser no decreciente para cada una de las N componentes se puede suponer que $y_N=0$ en el compacto X.

Teorema 3.1. Si se satisface la hipótesis (*i*), entonces existe una poltica óptima x tal que

$$y_{i-1}(x_i \bmod M_i) = 0 \qquad i=1,2,\ldots,N$$

Demostración (ver [23])

Teorema 3.2. Si se cumplen todas las hipótesis, entonces existe un plan óptimo para el cual

$$y_{N-1}(x_i \bmod M_i) = 0 \quad i=1,\ldots,N$$
$$y_i < M_i \qquad i=1,\ldots,N$$

Lema 3.1. Si se satisface la hipótesis (*iii*) para los índices i,j dados y $1\le i\le j\le N$, entonces existen valores $x_i, x_{i+1}, \ldots x_j$, $y_{i-1}, y_i, \ldots y_j$ que satisfacen

$$y_{i-1} = y_j = 0 \qquad \ldots \qquad (a)$$
$$y_{t-1} + x_t - r_t = y_t \qquad \ldots \qquad (b)$$
$$x_t \ge 0 \qquad \ldots \qquad (c)$$
$$0 \le y_t \le M_t \qquad i \le t \le j$$

Demostración (ver [23])

Como consecuencia de la demostración existen de manera única números x_i, y_i y r_i que satisfacen las siguientes ecuaciones

$$x_i = r_i + y_i \tag{3.8}$$

$$x_t \bmod M_t = (r_t + y_t) \bmod M_t \tag{3.9}$$

$$y_{t-1} = r_t + y_t - x_t \tag{3.10}$$

y por los teoremas 3.1, 3.2 y el lema 3.1 se obtiene el siguiente método.

Método de solución

Tiene como objetivo determinar el conjunto de constantes $\{c_{ij}\}$ que minimicen los costos.

1. Para cada i $(1 \le i \le N)$ sea

$$\rho(i) = \{j;\ j \ge i \text{ que satisfacen las ecs. } a,\ b \text{ y } c\}$$

$$0 < y_t < M_t \qquad\qquad i \le t < j$$

$$\rho(i) \ne \emptyset$$

2. Para cada $j \in \rho(i)$ sea $c_{ij} = \min\limits_{i,\dots,j} \{c_{ij}\}$ cuando

$$y_{i-1} = y_j \text{ y } y_t > 0;$$

Por el teorema 3.1 existe una política tal que

$$y_{i-1}(x_i \bmod M_i) = 0$$

Por el teorema 3.2 existe una política tal que

$$y_i < M_i$$

Por el lema 3.1 existen c_{ij}'s tales que

$$c_{ij} = \sum_{t=i}^{j} c_t(x_t) + \sum_t h_t(y_t)$$

3. Sea f_i el costo mínimo alcanzado en los periodos $i, i+1, \ldots, N$ cuando $y_{i-1}=0$.

Como $y_N=0$, para cualquier periodo i $(1 \le i \le N)$ existe un primer periodo k $(i \le k \le N)$ tal que $y_k=0$ para algún plan óptimo. Por los teoremas 3.1 y 3.2

$$f_i = \min \{c_{ij} + f_{j+1}\} \qquad i=1,\ldots,N$$

Esta ecuación recursiva es la que sirve para determinar la trayectoria mínima en una red acíclica, cuyos pesos en los arcos son los costos c_{ij}, $j \in \rho(i)$ $(1 \le i \le N)$.

3.1.4.b MODELO CON COSTOS CONCAVOS

En este modelo la estructura de costos es aún más general en lo que respecta a los costos de producción u orden, sin embargo es más restringida en lo referente a los costos de arrendamiento o inventarios.

En su estructura es más general que el modelo anterior pues en cada periodo está involucrada más de una variable y donde:

r_i = requerimentos en el periodo i.

y_i = existencias al final al periodo i.

x_{ik}= Cantidad ordenada en el periodo i y transportada por el vehículo k $(k=1,2,\ldots,T_i)$.

M_{ik}= Capacidad del vehículo k en el periodo i.

El vector $Z = (x_{11},\ldots,x_{1T_1},x_{21},\ldots,x_{2T_2},x_{N1},x_{N2},\ldots,x_{NT_N})$ representa un plan de producción y se dice que es factible si

$$0\le x_{ik}\le M_{ik} \qquad (M_{ik}>0)$$

y

$$y_i = y_{i-1} + \sum_{k=1}^{T_i} x_{ik} - r_i \ge 0$$

$C^{*}_{ik}(v)$ = Costo por ordenar v unidades en el periodo i por el transporte k. Función cóncava, no decreciente en $[0,\infty)$ $(C^{*}_{ik}(0)=0)$.

$h_i(y_i)$ = Costos de inventario en el periodo i. Función cóncava no decreciente de $y_i\ge 0$.

Como $C^{*}_{ik}(.)$ y $h_i(.)$ son funciones no decrecientes se puede suponer que $y_N=0$.

Sea $\mathcal{Z}$ el conjunto de planes factibles, el cual es compacto. Si $\mathscr{C}(Z)$ es el costo de planear la política Z está dado por:

$$\mathscr{C}(Z) = \sum_{i=1}^{N} \{\sum_{k=1}^{T_i} C^{*}_{ik}(x_{ik}) + h_i(y_i)\}$$

la que es cóncava en el compacto $\mathcal{Z}$, por lo tanto $\mathscr{C}(Z)$ alcanza su valor mínimo en un punto extremo de $\mathcal{Z}$.

Definicón 3.1. Se dice que un vehiculo está parcialmente lleno si $0 < x_{ik} < M_k$.

Definición 3.2. Un periodo es llamado *punto de regeneración* si $y_t = 0$.

Definición 3.3. Un plan Z tiene un *punto de regeneración propiamente* si

a) En cada periodo hay a lo más un vehiculo parcialmente lleno.

b) Entre cada dos periodos, en los que hay vehiculos parcialmente llenos, existe un punto de regeneración.

Es decir, si $0 < x_{ik} < M_{ik}$ y $0 \leq x_{jt} < M_{jt}$ para alguna $i<j,k,t$ entonces $y_s = 0$ para alguna s, $i \leq s < j$.

Teorema 3.4. Un plan Z es un punto extremo de $\mathcal{Z}$, si y sólo si $Z \in \mathcal{Z}$ tiene puntos de regeneración.

Demostración ver [23].

El modelo puede ser especializado si se supone que

$$
\begin{array}{ll}
M_{ik} = M & 1 \leq k \leq T_i \\
C^{\bullet}_{ik}(.) = C^{\bullet}_{i}(.) & 1 \leq i \leq N \\
\multicolumn{2}{c}{T_i M \geq \sum r_t}
\end{array}
\tag{3.11}
$$

Para cada punto extremo $Z \in \mathcal{Z}$ se asocia una n-ada $x(Z)$ tal que

$x_i(Z) = \sum x_{ik}$ $(1 \leq k \leq N)$. Se dice que Z es equivalente Z' (Z~Z') si $x(Z) = x(Z')$, de la ec. (3.11) se deduce que $\mathscr{C}(Z) = \mathscr{C}(Z')$ si Z~Z'.

Como las hipótesis (*i*) y (*ii*) no se supone que se satisfagan, no se puede asegurar la existencia de un plan óptimo Z tal que $y_i < M$ $(1 \leq i \leq N)$, sin embargo se puede demostrar el siguiente teorema.

Teorema 3.5. Si Z es un punto extremo de $\mathcal{Z}$, $i \leq k$, $y_{i-1} = y_k = 0$, y $x_t(Z) \bmod M = 0$ $(t = i, \ldots, j-1, j+1, \ldots, k)$ para alguna j $(i \leq j \leq k)$ entonces se puede suponer que

$$x_t(Z) = x_t(Z) \bmod M$$

cuando

$$y_{t-1} - q_t \geq M \qquad i \leq t \leq k$$

donde

$$q_{t-1} = 0 \qquad i \leq t \leq j$$

$$q_{t-1} = (x_j(Z) \bmod M - \sum r_u) \qquad j \leq t \leq k$$

Si se interpreta q_{t-1} como el inventario al final del periodo $t-1$ el cual se debe a que el vehiculo parcialmente llenado en el periodo j, cuando las existencias del vehículo son usadas primero. Esto es, ningun vehiculo lleno es empleado en un periodo cuando el inventario es registrado.

Teorema 3.6. Si $C_i^*(.) = C^*(.)$, $1\le i\le N$, entonces existe una política óptima Z la cual es un punto extremo de Z y satisface $y_i<M$ para $1\le i\le N$.

Demostración (ver [23]).

Como consecuencia de los teoremas 3.4, 3.5 y 3.6 se puede obtener el siguiente método de solución.

Método de solución

1. Para cada par $1\le i\le k\le N$

$$\rho(i,k) = \{j: \sum_{t=j}^{k} r_t \ge (\sum_{t=j}^{k} r_t) \bmod M \ (i\le j\le k)\ \} \ne \emptyset \quad i\in\rho(i,k)$$

2. Para cada $j\in\rho(i,k)$ $\quad C_{ik}^j = \min\{c_{ik}^j\} \quad (i,i+1,\dots,k)$

cuando $y_{i-1}= y_k=0$ y $x_t \bmod M=0$ $t=1,\dots,j-1,j+1,\dots,k$

3. Por el teo. 3. $C_{ik} = \min_{j\in\rho(i,k)} \{c_{ik}^j\}$

4. Sea $f_n= \min\{C_{nk} +f_{k+1}\}$ $n=1,\dots,N$; cuando $y_{n-1}=y_N=0$

5. Fijar $1\le i\le k\le N$ y $j\in\rho(i,k)$, reemplazar $r_j=r_j- (\sum r_t) \bmod M$.

Encontrar $C_{ik}^j - C_j^* \le i\le k\le N(\sum r_t) \bmod M$ para la nueva definición de r_j, con $x_t \bmod M = 0$ para $i\le t\le j$ y $t=j$.

6. Sea $I_{i-1}=I_k= \{0\}$

$I_t=\{y\colon\ y\ge 0\ y= -(\sum r_t) \bmod M + \sum r_m + \delta_m$ para alguna $t\le s\le k$ y $\delta=0,1\}$

Si $Z\in\mathcal{Z}$ es punto el cual satisface el teo. 3.4, entonces $y_t \in I_t$. Como Z satisface las hipótesis del teo. 3.4 (y $q_m < M_i$ $i \le m \le k$) para alguna s $t \le s \le k$, $0 \le y_s = y_t - \sum r_m < 2M$ y $y_s = nM - \sum r_m$ $n\in\mathbb{Z}^+$.

Si $y_s < M$, entonces $y_s = y_s \bmod M = -(\sum r_m) \bmod M$ y

$$y_t = -(\sum r_m) \bmod M + \sum r_m.$$

Sea $y_s \ge M$ entonces $y_s = y_s \bmod M + M$ y

$y_t = -(\sum r_m) \bmod M + \sum r_m + M$ y en cualquier caso $y_t \in I_t$.

Si $g_n(y) = \min \{\bar{M}^1 (x-y)\ C_n^{\bullet}(M) + h_n(x-r_n) + g_{n+1}(x-r_n)\}$ donde $g_{k+1}(0)=0$ y desde luego $C_{ik}^{j} = g_i(0) + C_j^{\bullet}((\sum r_t) \bmod M)$ cuando r_j está en su valor original.

3.2 *Modelos Clásicos para Multilocalización*

Otra clase muy importante de modelos de localización son aquellos donde existen varios puntos a localizar y existen pocos modelos para estos problemas, pues su carácter combinatorio los hace difíciles de resolver, en general los modelos existentes son heurísticos.

3.2.1 PLANEACION PARA GRANDES SISTEMAS DE MULTILOCALIZACION: APROXIMACION CON PROGRAMACION DINAMICA

En la década de los sesenta se hicieron muchos trabajos de localización de bodegas con modelos estáticos, sin embargo esta formulación es inadecuada en situaciones donde ocurren cambios constantemente respecto al tiempo. Una aproximación a las soluciones es por medio de Programación Dinámica, que permite obtener una solución cercana al óptimo cuando el problema es pequeño. Sin embargo, Erlenkotter [5] propone un modelo basado en una medida de costos anuales, en el que las principales suposiciones son las siguientes:

i) La demanda se incrementa respecto al tiempo en cada centro de consumo y debe ser satisfecha por la producción usual.

ii) Existen restricciones en la capacidad y ésta es suficiente para satisfacer la demanda inicial.

iii) Los costos variables de operación y distribución son proporcionales a la cantidad abastecida, y los costos unitarios no cambian a través del tiempo.

iv) Los costos de inversión para la expansión exhiben economías de escala y son "aditivamente separables" respecto a las localizaciones.

v) La capacidad creada tiene vida infinita. Los costos de inversión incluyen costos de operación, mantenimiento y reemplazo.

vi) La razón de descuentos es constante.

vii) El total de costos de operación, distribución y expansión deben ser minimizados, en un horizonte infinito, con restricciones sobre la demanda.

Formulación del Problema

$$P(z,t) = \min_{s_{ij}} \{\sum_{ij} p_{ij} \ s_{ij}(t)\}$$

s. a.

$$\sum_{j} s_{ij}(t) \le z_i \qquad i=1,\dots,m$$

$$\sum_{i} s_{ij}(t) = D_j(t) \qquad j=1,\dots,n$$

$$s_{ij}(t) \ge 0 \qquad \text{paratoda } i,j$$

donde

z_i Capacidad total en el centro de producción i ($i=1,\dots,m$)

$D_j(t)$ Razón de demanda en el punto j al tiempo t.

$s_{ij}(t)$ Razón de producción y distribución desde el centro i a la localización j, y al tiempo t.

p_{ij} Costos unitarios de producción y distribución para abastecer al punto de demanda j desde i.

Como se puede observar que éste es un modelo de transporte que permite obtener la politica óptima de distribución y producción, pero no considera la expansión, por lo que se deben añadir las restricciones necesarias:

$$g(z,w) = f(w) + \int_0^{(z,w)} P'(z+w,t)\ \exp(-rt)\ dt$$

$$\alpha(z,w) = \exp(-r\ \tau(z,w))$$

w = Vector m-dimensional de expansiones de capacidad cuya componenete $w_i \neq 0$ y el resto de las componente son cero, w_i corresponde al tamaño y localización de la expansión bajo consideración.

$f(w)$ = Costos de inversión para la expansión w.

$\tau(z,w)$ = Intervalo de tiempo hasta que la próxima expansión es requerida después de que w a la capacidad base z.

p_j^* = Costos minimos unitarios de producción y distribución para abastecer j, suponiendo que hay disponibilidad en todas las fuentes.

$P(\infty,t)$ = Razón de costos de distribución y operación variables, al tiempo t y costosunitarios p_j^* para el centro de demanda j, $\sum p_j^* D_j(t)$.

$P(z,t)$ = Razón de costos de distribución y operación variables al tiempo t y para la capacidad dada z.

$P'(z,t)$ = Razón de costos óptimos de distribución y operación ajustados $P(z,t)-P(\infty,t)$.

$g(z,w)$ = Función que proporciona un ajuste de los costos de operación e inversión para la expansión w y capacidad base z, desde que la expansión es hecha hasta que la próxima expansión es requerida.

$\alpha(z,w)$ = Factor de descuento para el intervalo de tiempo entre cada expansión.

El término $P'(z+w,t)$ en $g(z,w)$ es optimizado paramétricamente cuando el índice de tiempo es incrementado, con base en los Método Dual y de Balas e Ivanescu para transporte.

La aproximación de costo anual mínimo (MAC) consiste en seleccionar con menor índice de costos anuales $\rho(z,w)$

$$\rho(z,w) = r\ g(z,w)/[1-\alpha(z,w)]$$

para una capacidad base dada z.

Al usar esta regla se genera una secuencia de expansiones, con base en la capacidad anterior. Para demanda con crecimiento lineal y costos de operación cero este procedimiento proporciona una secuencia óptima.

3.2.2 EXPANSION DE CAPACIDAD DINAMICA EN UNA MULTIREGION

Este es un modelo propuesto por Fong y Srinivasan [10] y en él se considera una región con m centros de producción y n centros de distribución para sarisfacer la demanda de un artículo. Se desea satisfacer la demanda a costo mínimo en un intervalo de tiempo T. Las hipótesis en las que se basa este modelo son las siguientes:

a) El artículo puede ser elaborado en varias regiones, y cada una tiene una capacidad inicial, la cual puede ser incrementada al principio de cada periodo.

b) Se supone que una unidad de capacidad adicional en cualquier periodo tiene una unidad de producción extra, al menos al final del horizonte.

c) La demanda en cada mercado puede ser satisfecha por cualquier centro de producción o por importaciones, esto último ocasiona un costo de penalización.

d) La distribución desde los centros de producción se realiza después de la expansión y la capacidad adicional puede ser usada en el mismo periodo.

El modelo permite determinar el plan de producción y distribución para satisfacer las demanda a costo mínimo.

Formulación del Modelo

$$\text{Min} \sum_{t}\sum_{i}\sum_{j} c_{ij}^{t} x_{ij}^{t} + \sum\sum k_{i}^{t} z_{i}^{t}$$

s. a.

$$\sum_{j} x_{ij}^{t} = q_{i}^{0} + \sum_{\tau=1}^{t} z_{i}^{\tau} \qquad i \in I',\ t \in K$$

$$\sum x_{ij}^{t} = R_{j}^{t} \qquad j \in J',\ t \in K$$

$$x_{ij}^{t},\ z_{i}^{t} \geq 0$$

I Conjunto de m regiones

I' Conjunto con m regiones más que pertenecen a I y una fuente ficticia $m+1$

J Conjunto de n mercados

J' Conjunto con n mercados más que pertenecen a J y una mercado ficticio $n+1$.

K Conjunto de periodos de tiempo, la longitud de cada uno no necesariamente es la misma.

x_{ij}^{t} Cantidad enviada desde la región i al mercado j en el periodo t

c_{ij}^{t} Costos de distribución para abastecer al punto de demanda j desde la región i. Se incluyen costos de transporte y costos variables de producción.

z_{i}^{t} Expansión de capacidad en la región i en el periodo t

q_{i}^{t} Capacidad acumulada en la región i tiempo t.

k_{i}^{t} Costos unitarios por añadir capacidad en la región i, estos consisten de costos de construcción más costos de mantenimiento.

La función objetivo contiene costos de transporte y penalización por importaciones, costos de expansión y mantenimiento, y de capacidad ociosa.

Las primeras restricciones establecen que la producción enviada fuera de la región i, en el periodo t, no puede ser mayor que la producida por la capacidad disponible en la región. Las siguientes restricciones establecen que la cantidad enviada al mercado j, en el instante t, debe ser igual a la demanda (se incluyen importaciones).

En el modelo se suponen que los costos son lineales, lo que es cierto cuando se renta o subcontrata la capacidad extra necesaria, o bien cuando los costos de expansion son expresados como cargas fijas más una componente proporcional al tamaño de la expansión; en las pruebas computacionales realizadas ha mostrado ser eficiente, y proporciona una buena aproximación a la solución óptima. El metodo de solución es propuesto por Fong y Srinivasan [10], es de caracter heurístico y consiste de tres etapas.

Primera Etapa.

Solución inicial. Se resuelve el problema para cada intervalo de tiempo t, es decir, se resuelve un problema de transporte para el periodo t y se obtiene una capacidad z_i^t que se añade al siguiente periodo, entonces se resuelve el problema para el periodo $t+1$, este proceso se continúa hasta el último periodo.

Segunda Etapa.

Cálculo de variables duales. Para cada par de regiones r y s se calculan las variables duales u y v, denotando las no degeneradas como $\hat{u}$ y $\hat{v}$. Estas variables son usadas en la tercera etapa.

Tercera Etapa.

Método Heurístico. En las etapas anteriores se obtuvieron una solución factible Y y las variables duales no degeneradas $\hat{u}$, $\hat{v}$ para cada par de regiones, a partir de estas se obtiene una nueva solución factible Y' y valor en la función objetivo Z' y tal que Δ_{rs}=Z-Z' es máxima. Con base en esto se formula el siguiente problema cuya función objetivo es:

$$\text{Máx } \Delta_{rs} = \sum d^t \delta^t$$

donde d^t es el valor de la razón de decremento en Z debido al intercambio de capacidades entre r y s en δ^t.

Las restricciones de factibilidad son:

$$\delta^{t-1}-\delta^t \le z_r^t \qquad \text{para } t\in K$$

$$-\delta^{t-1}+\delta^t \le z_s^t \qquad \text{para } t\in K$$

$$0\le \delta^t \le \mu_{rs}^t \qquad \text{para } t\in K$$

A este último problema se le llama $P_{rs}(Y)$ [10].

Al final se resuelve el problema dual $D_{rs}(Y)$

$$\text{Min} \quad \Delta_{rs} = \sum_t p_r^t z_r^t + \sum_t p_s^t z_s^t + \sum_t \phi^t \mu_{rs}^t$$

s. a.

$$-p_r^t + p_s^t + p_r^{t+1} - p_s^{t+1} + \phi^t - \eta^t = d^t$$

$$p_r^T + p_s^T + \phi^T - \eta^T = d^T$$

$$p_r^t,\ p_s^t,\ \phi^t,\ \eta^t \ge 0$$

donde

ϕ^t, p_r^t y p_s^t = variables duales

η^t = variable de holgura

Este problema puede ser resuelto en una red como un problema de flujo a costo mínimo.

3.2.3 MODELO CON CARGAS FIJAS

Este modelo también es propuesto por Fong y Srinivasan [11] y contiene las mismas hipótesis del modelo anterior más las siguientes:

e) Los costos de expansión se supone que están como cargas fijas más un costo proporcional al tamaño de la expansión.

f) Los costos de transporte se suponen proporcionales a la cantidad involucrada.

El objetivo es determinar el programa óptimo de producción y distribución.

Formulación del Modelo

$$\text{Min} \sum_{t}\sum_{i}\sum_{j} c_{ij}^{t} x_{ij}^{t} + \sum_{t}\sum_{i} k_{i}^{t} z_{i}^{t} + \sum_{t i} \omega_{i}^{t} \zeta_{i}^{t}$$

s. a.

$$\sum_{j} x_{ij}^{t} = q_{i}^{0} + \sum_{\tau=1}^{t} z_{i}^{\tau} \qquad i \in I', \; t \in K$$

$$\sum_{i} x_{ij}^{t} = R_{j}^{t} \qquad j \in J', \; t \in K$$

$$z_{i}^{t} \leq M_{i}^{t} \zeta_{i}^{t}$$

$$\zeta_i^t = \begin{cases} 1 & \text{si hay expansión de capacidad en la región } i \text{ en el periodo } t \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$x_{ij}^t,\ z_i^t,\ \zeta_i^t \geq 0$$

ω_i^t Carga fija incurrida en la región i durante el periodo t

M_i^t Cota superior sobre la expansión de capacidad en la región i y en el periodo t

Este es un problema de Programación Entera Mixta, que puede ser resuelto por las metodologías existentes, sin embargo si el número de variables es grande, lo que sucede generalmente, ocasiona que los métodos funcionen en forma deficiente. La metodología propuesta [11] es la siguiente:

Primera Etapa.

Solución inicial. Se usa la metodología expuesta en el modelo anterior, ignorando las cargas fijas para incluirlas al final en el valor de la función objetivo.

Segunda Etapa.

Intercambiar las capacidades entre dos regiones por medio de un método heurístico. El modo de operar es análogo al modelo anterior y el problema equivalente al $P_{rs}(Y)$ es el siguiente:

$$\text{Máx} = \sum_t d^t\delta^t - \sum_{k=r,s,t} W_k^t\ \delta_k + \sum_{k=r,s,t} W_k^t(1-\delta_k^t)$$

s. a.

$$\delta^{t-1}-\delta^t \le z_r^t \qquad \text{para } t\in K$$

$$-\delta^{t-1}+\delta^t \le z_s^t \qquad \text{para } t\in K$$

$$0 \le \delta^t \le \mu_{rs}^t \qquad \text{para } t\in K$$

$$z_r^t-\delta^{t-1}+\delta^t \le u_r^t g_r \qquad \text{para } t\in K$$

$$z_s^t+\delta^{t-1}-\delta^t \le u_s^t g_s \qquad \text{para } t\in K$$

$$g_k^t = \begin{cases} 1 & \text{si se realiza alguna expansión en la región } k \\ & k=r,s \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El problema, como puede observarse contiene $2T$ variables binarias y T variables continuas. Por la estructura del problema Fong y Srinivasan proponen un modelo de Ramificación y Acotamiento basado en el propuesto por Efroymson y Ray [2].

CAPITULO IV

MODELOS DE SECUENCIACION

Uno de los objetivos primordiales de los problemas de expansión es la realización de proyectos para obtener recursos que generalmente no se encuentran disponibles; asimismo el funcionamiento de algunos sistemas se obtiene por medio de una sucesión de incrementos en su capacidad, lo que implica grandes inversiones de capital en diferentes etapas. Esto significa que la expansión se realiza en etapas, entonces se debe adicionar la variable tiempo a los problemas. Un ejemplo típico es el de la construcción de una presa, para esto se tienen m proyectos de los cuales se eleccinan un subconjunto de n proyectos para construir la presa.

El problema consiste entonces en seleccionar los tiempos en que cada uno de los proyectos debe ser realizado sujeto a que la demanda de agua debe ser satisfecha en cualquier instante. Se puede observar que si n=20 existen 20! formas de secuencias de proyectos, como se puede observar este es un problema combinatorio, y el cada proyecto depende de los proyectos establecidos previamente, cada proyecto depende de los proyectos establecidos previamente, por ejemplo el embalse de un dique puede ser utilizado completamente hasta que ciertos canales han sido construidos. Asimismo los costos de operación pueden depender del conjunto de proyectos establecidos, tal es el caso cuando los proyectos son realizados en diferentes puntos, los costos de transporte dependen del conjunto de la localización de los proyectos establecidos. A continuación se analizan algunos modelos de secuenciación de proyectos.

4.1. *El Problema Básico de Secuenciación de Proyectos*

Para planear la expansión de capacidad en los crecientes mercados y servicios existen varias metodologías entre las que se encuentran secuencias de expansión generativa recurrente, cálculo diferencial y programación dinámica. Una suposición común en estos modelos, es que las oportunidades para las posibles expansiones son independientes, en cualquier instante, de las expansiones previas.

En este modelo [4] se examina la secuenciación de un número finito de proyectos para satisfacer una demanda a costo mínimo. La sucesión óptima puede ser obtenida por medio de programación dinámica y por medio de la formulación básica que incluye interdependencia de costos entre proyectos que permiten seleccionar la escala del desarrollo para los proyectos. La formulación que se presenta permite modelar una escala continua de tiempo, permitiendo obtener los tiempos de la próxima expansión directamente de la información sobre la demanda y capacidad.

4.1.2. *El problema Simple*

Sea *B* un conjunto finito de *n* proyectos de expansión, cada proyecto *i* está definido por el par (z_i, c_i) donde $z_i>0$ es la capacidad del proyecto *i*, y c_i es el correspondiente costo de inversión. Las siguientes suposiciones sobre el establecimiento y operación de los proyectos son necesarias para proponer el modelo simple:

i) Los costos de inversión c_i son relizados al tiempo en que los proyectos están terminados y no varían respecto al tiempo.

ii) La capacidad z_i está disponible instantáneamente cuando el proyecto *i* está completado.

iii) Los costos de operación y distribución son prporcionales a la cantidad de capacidad acumulada actualmente e idénticos para todos los proyectos.

iv) La demanda debe ser abastecida de la producción común.

La capacidad $z(t)$ al tiempo t ($t \geq 0$) está compuesta por la capacidad inicial más la suma de las capacidaddes de los proyectos individuales en el instante t.

Se conoce la proyección de la demanda $D(t)$ y que las restricciones de capacidad son suficientes para satisfacer la demanda en todo instante, es decir, $z(t) \geq D(t)$ para $t \geq 0$.

La capacidad inicial $z(0)$ se supone igual a la demanda inicial $D(0)$, como consecuencia de ésta restricción y de la suposición *iv*) los costos variables de operación no son afectados por la sucesión de las expansiones y pueden ser excluidos del modelo. Los costos de inversión son descontados al tiempo inicial cero a una razón $r>0$, obteniendose así un factor de descuento $exp(-rt)$.

El objetivo es determinar una secuencia de proyectos y los tiempos de realización de cada uno para satisfacer la demanda a costo total mínimo.

Una primera simplificación es suponer que no todos los tiempos óptimos de expansión pueden ser determinados de la proyección de demanda y de las principales variables de expansión. Obviamente con una tasa de descuento positiva una expansión deberá ser aplazada al instante justo antes de que la demanda exceda la capacidad.

Sea $\tau(z)$ el tiempo óptimo para la expansión desde el nivel $z \geq D(0)$, entonces

$$\tau(z) = \sup \{D(t) \leq z\}$$

Se observa que $\tau(z)$ es no decreciente respecto a z. Si $D(t)$ es continua y estrictamente creciente, como en la siguiene figura, entones $\tau(z)$ puede ser expresada como la función inversa de la demanda $\tau(z) = D^{-1}(z)$.

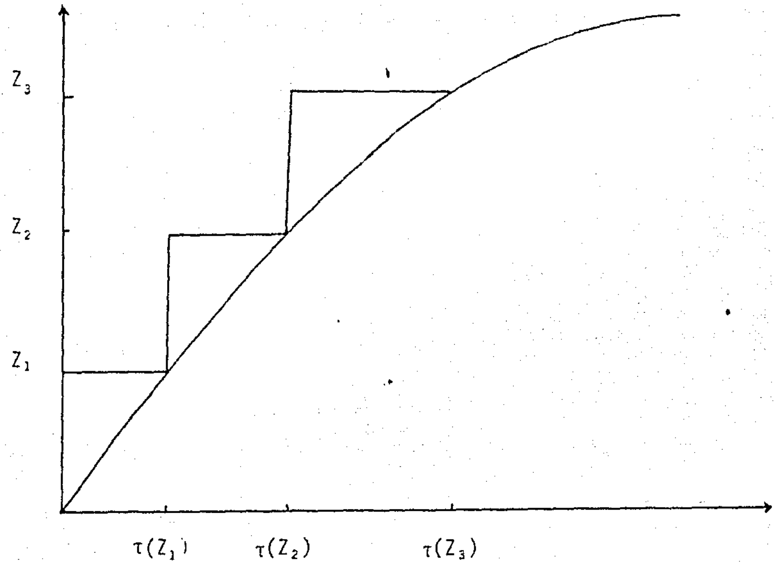

fig. 4.1

Existe una propiedad muy importante en los problemas de secuenciación, llamada de *Tiempos Dominantes*, que consiste en lo siguiente: Si dos proyectos i,j son tales que $z_i \geq z_j$ y $c_i \leq c_j$ entonces existe una sucesión óptima en la cual el proyecto j no es "comprometido" antes que el proyecto i. Por medio de ésta propiedad se puede determinar un orden parcial suave para la secuencia de proyectos, la construcción directa de un orden completo en las sucesiones sobre todos los proyectos bajo condiciones generales no es posible.

Las posibles extensiones de este modelo incluyen diferentes niveles de capacidad para cada proyecto, dependencia entre capacidades y costos de operaciones que dependen de la sucesión.

4.2. *Secuenciación por medio de Programación Dinámica*

Sea X el conjunto que contiene el índice de los proyectos e indica que todos los proyectos han sido propuestos. El estado $\emptyset$ indica que aún no se ha realizado proyecto alguno.

La nueva función de tiempos de expansión es:

$$\tau(z) = \tau\ [z(X) + D(0)]$$

donde $z(X)= \sum z_i$.

La función de costos es:

$$C(X) = \min\ \{c_i e^{-rt} + C(X \cup i)\} \qquad \text{para toda } X \subset X^*$$

y con la condición terminal o de frontera

$$C(X^*) = 0$$

donde X^* representa el conjunto de todos los proyectos que han sido seleccionados.

La interpretación de la ecuación recursiva es que existe algún proyecto $i \notin X$ que en la próxima etapa debe ser añadido, y el resto deben ser ordenados óptimamente. La sucesión óptima está definida por el mínimo, sobre todos los proyectos $i \notin X$, de los costos de construcción más los costos para sucesiones óptimas de las expansiones faltantes.

Las ventajas computacionales del algoritmo de programación dinámica respecto a la enumeración completa de las posibles sucesiones es que para n proyectos hay $n!$ sucesiones posibles y para cada una de ellas se requieren n cálculos, y por medio de la programación dinámica se requieren $n2^{n-1}$ para la solución completa.

4.2.1. *Extensiones*

En forma inicial se supone que los costos variables de operación son despreciables o están relacionados con el nivel actual de la demanda satisfecha independientemente del proyecto, ya que es frecuente que los costos de operación sean afectados por la selección de los proyectos. Para poder expresar la interacción de los costos de operación con la selección de los proyectos es necesario que los costos totales $C(X)$ pueden ser expresados como una función $P(X,t)$, en el intervalo de tiempo $\tau(X)$ a $\tau(X \cup i)$.

Asi la formulación del modelo con estas suposiciones es:

$$C(X) = \min \{c_i \exp(-r\tau(X)) + \int_{\tau(X)}^{\tau(X\cup i)} P(X\cup i, t) \exp(-rt)dt + C(X\cup i)\}$$

Si se supone que las capacidades y costos dependen de los proyectos, esto se puede incluir al sustituir c_i por la función costos de inversión $C_i(X)>0$, la cual depende del conjunto de proyectos seleccionados anteriormente. La interdependencia no modifica $Z(X)$ pues si ésta función no es decreciente se añaden nuevos proyectos, es decir, $Z(X\cup i)\geq Z(X)$ para $i\notin X$ y $X\subseteq X^{*}$.

Una nueva extensión se puede obtener al considerar secuenciación y escalas de proyectos simultáneamente, esto incluye niveles en el vector binario; tal modificación se puede extender aún más, es posible extender un proyecto de un nivel i a otro j $(i<j)$. Esto implica una extensión a proyectos de niveles múltiples lo que incrementa la "dimensión" combinatoria del conjunto de estados del proyecto; este aumento no causa muchas dificultades ya que al combinar proyectos ordenados, según la propiedad de tiempos dominantes, se puede construir una declaración simple de los estados correspondientes a los proyectos con un nivel adicional.

Todos los resultados hasta aquí desarrollados dependen de la siguiente suposición: los tiempos de la próxima expansión puede ser determinada de la proyección de demanda y del nivel común de capacidad, independientemente de las características de la expansión de los proyectos considerados anteriormente. Esta suposición puede ser adecuada en algunos casos, pero en otro es deseable seleccionar los tiempos, de la próxima expansión, sobre las bases de un análisis económico que tome en cuenta las características de ésta.

En los modelos que presentan demanda lineal es posible encontrar la política óptima con Programación Dinámica sin problema alguno, pero frecuentemente la demanda no es lineal, y la razón de costos de cualquier proyecto depende del tiempo de realización de manera que no es posible determinar la política óptima por medio de los modelos lineales.

El modelo de Programación Dinámica es útil para resolver problemas simples de secuenciación con un número pequeño de proyectos, sin embargo el número de posibles estados crece exponencialmente cuando el número de proyectos crece esto resulta una tarea "difícil" para la computadora. Una alternativa para resolver estos problemas es el uso de algoritmos de Ramificación y Acotamiento, que permiten eliminar muchas sucesiones factibles.

4.3. *Plan de Inversión Optima con Análisis de Sensibilidad de Precios y Demanda Dinámica*

Los planes de inversión para la expansión de capacidad involucra el tamaño y tiempo de la expansión, así como la coordinación de la toma de decisiones sobre la operación respecto a la estrategia considerada. Se desarrolla un modelo [7] que toma en cuenta la planeación y la política de precios simultáneamente a través del tiempo. Las inversiones para nuevas capacidades están características de ésta.

En los modelos que presentan demanda lineal es posible encontrar la política óptima con Programación Dinámica sin problema alguno, pero frecuentemente la demanda no es lineal, y la razón de costos de cualquier proyecto depende del tiempo de realización de manera que no es posible determinar la política óptima por medio de los modelos lineales.

El modelo de Programación Dinámica es útil para resolver problemas simples de secuenciación con un número pequeño de proyectos, sin embargo el número de posibles estados crece exponencialmente cuando el número de proyectos crece esto resulta una tarea "difícil" para la computadora. Una alternativa para resolver estos problemas es el uso de algoritmos de Ramificación y Acotamiento, que permiten eliminar muchas sucesiones factibles.

4.3. *Plan de Inversión Optima con Análisis de Sensibilidad de Precios y Demanda Dinámica*

Los planes de inversión para la expansión de capacidad involucra el tamaño y tiempo de la expansión, así como la coordinación de la toma de decisiones sobre la operación respecto a la estrategia considerada. Se desarrolla un modelo [7] que toma en cuenta la planeación y la política de precios simultáneamente a través del tiempo. Las inversiones para nuevas capacidades están restringidas a un conjunto finito de proyectos y cada uno de ellos tiene costos y caracteristicas de operación diferentes. El orden de los proyectos y tiempos de realización junto con las salidas y decisiones sobre precios, son seleccionados de manera que se maximice el valor presente de los beneficios netos.

Algunas consideraciones de este modelo son:

i) Los costos y caracteristicas de operación son especificados individualmente para cada proyecto.

ii) Los tiempos de expansión son determinados por medio de criterios analiticos.

iii) Las decisiones de producción, precio y expansión abarcan tiempos y secuencias, las cuales son coordinadas simultáneamente y seleccionadas en forma óptima dentro de una escala continua de tiempo.

Hipótesis del modelo.

a) El conjunto de proyectos considerado es finito y cada proyecto i ($i=1,\ldots,m$) está definido por sus costos de inversión $c_i>0$ y la función de costos $C_i(q_i)$ que expresa los costos variables de operación para una razón de producción de q_i unidades del proyecto i. La función $C_i(q_i)$ es dos veces diferenciable, convexa, estrictamente creciente y $C_i(0)=0$.

Los costos de inversión incluyen una renta para el valor presente de los costos de reemplazo, mantenimiento y otros costos fijos de operación.

b) El total de ingresos para producir Q unidades al instante t está dado por la función $R(Q,t)$, la cual es dos veces diferenciable y estrictamente cóncava en $Q=\sum q_i$ y además $R(0.t)=0$, y se supone que

b.1) $R(Q,t)$ y $\partial R(Q,t)/\partial Q$ sean funciones diferenciables y no decrecientes en t para $Q\geq 0$.

b.2) Si $Q''\geq Q'$ y $R(Q'',t)\geq R(Q',t)$ entonces $\partial R(Q'',t)>\partial R(Q',t)$.

c) Los costos e ingresos son descontados a una razón constante $r>0$, acarreando asi un factor de descuento $\exp(-rt)$ desde el tiempo inicial $t=0$ hasta el instante t.

d) Las decisiones de secuencición de los proyectos y los tiempos de instalación, asi como las decisiones de producción y precios deben ser seleccionados de manera que se naximicen los beneficios netos.

Sea I un conjunto arbitrario de índices, la razón de contribución para el beneficio óptimo operando al tiempo t de los proyectos en I es

$$\pi(I,t) = \max_{q_i}\{ R(Q,t)-\sum_i c_i(q_i) \}$$

s. a. (4.1)

$$Q = \sum q_i$$

$$q_i \geq 0 \qquad \text{para toda } i \in I$$

$$q_i = 0 \qquad \text{para toda } i \notin I$$

los valores óptimos q_i^* están caracterizados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} q_i^* > 0 \quad &\Rightarrow \quad \partial R(Q^*,t)/\partial q_i = dc_i(q_i^*)/dq_i \\ q_i^* = 0 \quad &\Rightarrow \quad \partial R(Q^*,t)/\partial q_i < dc_i(q_i^*)/dq_i \end{aligned} \tag{4.2}$$

Esto significa que cuando la producción es positiva en un programa óptimo los ingresos marginales y la razón de costos marginales de operación para los proyectos con producción diferente de cero son iguales. El precio óptimo está dado por:

$$\rho(Q^*,t) = R(Q^*,t)/Q^*$$

Si ahora $i[k]$ denota que el proyecto i está en el k-ésimo lugar en la sucesión de proyectos $\{i[k]\}$, donde $k = 1, 2, \ldots, m$, entonces se pueden definir las variables:

I^* = Conjunto de índices de los m proyectos

SI^* = Conjunto de permutaciones de m índices de los proyectos

I_k = Conjunto de índices de los k primeros proyectos para una sucesión particular.

$I_0 = \emptyset$

$I_{k+1} = I_k \cup i[k+1]$ $\qquad\qquad k = 0, 1, \ldots, m$

$I_m = I^*$

τ_k = Tiempo para instalar el proyecto k en la sucesión

$\tau_0 = 0$

$\tau_k \le \tau_{k+1}$

Para determinar los tiempos óptimos para el problema es necesario resolver:

$$V(I^*, \infty) = \max_{i[k]} \max_{\{\tau_k\}} \{ \sum_k \int_{\tau}^{\tau_{k+1}} \pi(I_k, t)\, e^{-rt}\, dt - \sum_k c_{i[k]} e^{-r\tau} \}$$

s. a. $\qquad\qquad$ (4.3)

$$\tau_0 \le \tau_1 \le \ldots \le \tau_{k+1}$$

La solución del problema anterior se puede obtener a partir del problema relajado, al eliminar la restricción $\tau_k \le \tau_{k+1}$ y exigiendo a la función de contribución $\pi(I, t)$ las siguientes propiedades:

Para cualquier I, $i' \notin I$, $i'' \notin I \cup i'$ y $t \ge 0$

$$\pi(I \cup i' \cup i'', t) - \pi(I \cup i'', t) \le \pi(I \cup i', t) - \pi(I, t)$$

o bien

$$\pi(I \cup i' \cup i'', t) - \pi(I, t) \le [\pi(I \cup i', t) - \pi(I, t)] + [\pi(I \cup i'', t) - \pi(I, t)]$$

Los tiempos óptimos en el problema relajado se obtienen diferenciando la formulación (4.3) y tomando en cuenta la siguiente restricción

$$\pi(I,\ \tau^{*}(I,i)) - \pi(I-i,\ \tau^{*}(I,i)) = rc_{i}$$

Se observa que la adición de nuevos proyectos con tiempos óptimos conduce a incremèntar las salidas totales y las salidas de cada proyecto particular, mientras que para los proyectos ya establecidos las salidas se decrementan.

El modelo presentado aquí puede ser extendido al caso de mercados múltiples y distintos espacialmente, siempre y cuande se tomen en cuenta los costos de transporte entre fuentes y mercados, otra posibilidad es incluir una selección de una escala óptima de proyectos.

Las limitaciones del modelo es que no toma en cuenta los cambios tecnológicos, existe la ausencia de decisiones de reemplazo y además supone un mundo determinista. La intervención de cambios tecnológicos introduce una fuerte interdependencia entre los proyectos y las decisiones de tiempo lo que ocasiona que la selección de la solución óptima sea difícil de obtener. En el modelo propuesto en ésta sección se supone que las decisiones de reemplazo se realizan por fuera y se incorporan a través de ajustes en los costos de inversión, pero al incluir estas decisiones explicitamente implica que existen proyectos que toman en cuenta oportunidades de reemplazo, todo esto complica el problema.

EJEMPLO

Se desea construir una red hidraúlica para satisfacer una demanda de agua durante un periodo de 30 años, el plan contempla cuatro proyectos, cada uno de ellos con una capacidad de z_i unidades y un costo de c_i unidades y con una tasa de descuento de $\alpha = 5\%$. Se supone que la demanda $D(t)$ es no decreciente y continua en el intervalo $[0,30]$, en la siguiente tabla se muestran los datos y la fig. (4.2) representa la función de demanda. El objetivo es encontrar la secuencia óptima de realización de los proyectos para construir la red hidraúlica

	PROYECTO			
	A	*B*	*C*	*D*
Cap. de suministro z_i unidades	2	4	4	7
Costos c_i (\$)	30	50	65	75

tabla 4.1

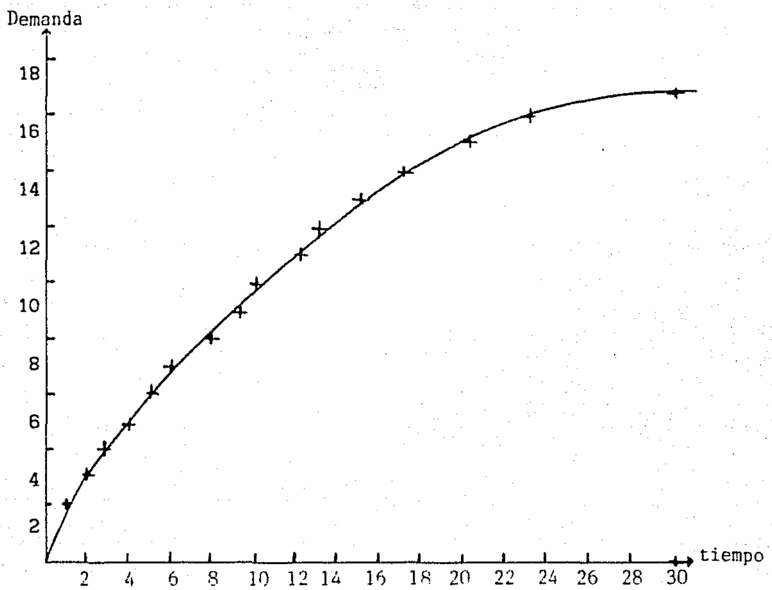

fig. 4.2

Se puede observar que si se construyen los cuatro proyectos la máxima demanda que puede ser satisfecha es:

$$\sum z_i = 17 \text{ unidades}$$

La función de costos es:

$$c_i(q_i) = \begin{cases} c_i & \text{si } q_i \leq z_i \\ 0 & \text{si } q_i = 0 \\ \infty & \text{si } q_i > z_i \end{cases} \qquad i=1,\ldots,4$$

Entonces los posibles valores de $c_i(q)$ se pueden deducir de la tabla 4.1, y su representación gráfica aparece en las figuras 4.3.a, 4.3.b, 4.3.c y 4.3.d.

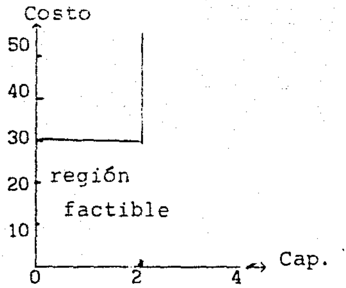

fig. 4.3.a

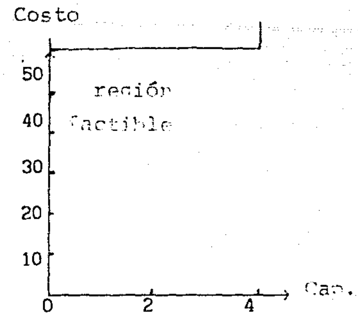

fig 4.3.b

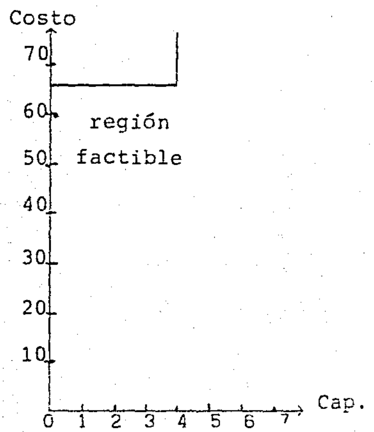

fig 4.3.c

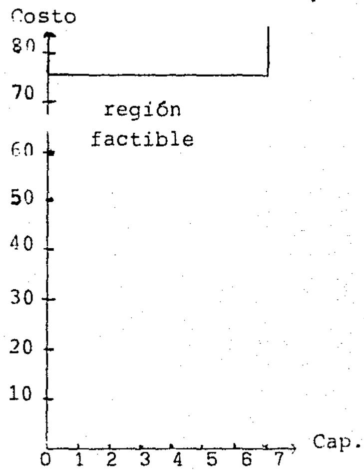

fig 4.3.d

Para encontrar la sucesión óptima la ec. recursiva es:

$$f_n^k\ (q) = \{c_i(q_n)(1+r)^{-\psi(q-q_n)} + f_{n-1}(q-q_n)\}$$

donde n es el número de proyectos y k_n es la longitud de la secuencia.

En la tabla 4.3 aparecen los resultados obtenidos para las secuencias factibles cuando $k_n = 1,\ldots,4$. Se hace notar que para $k_n=4$ la secuencia óptima es $\{D, B, C, A\}$.

	n=1		n=2		n=3		n=4	
q_1	k_1	f_1	k_2	f_2	k_3	f_3	k_4	f_4
0		0		0		0		0
1	A	30	$\{A,0\}$	30.00	$\{A,0,0\}$	30.00	$\{A,0,0,0\}$	30.00
2	A	30	$\{A,0\}$	30.00	$\{A,0,0\}$	30.00	$\{A,0,0,0\}$	30.00
3	B	50	$\{B,0\}$	50.00	$\{B,0,0\}$	50.00	$\{B,0,0,0\}$	50.00
4	B	50	$\{B,0\}$	50.00	$\{B,0,0\}$	50.00	$\{B,0,0,0\}$	50.00
5	D	75	$\{D,0\}$	75.00	$\{D,0,0\}$	75.00	$\{D,0,0,0\}$	75.00
6	D	75	$\{D,0\}$	75.00	$\{D,0,0\}$	75.00	$\{D,0,0,0\}$	75.00
7	D	75	$\{D,0\}$	75.00	$\{D,0,0\}$	75.00	$\{D,0,0,0\}$	75.00
8	n.f	∞	$\{D,A\}$	97.39	$\{D,A,0\}$	97.39	$\{D,A,0,0\}$	97.39
9	n.f	∞	$\{D,A\}$	97.39	$\{D,A,0\}$	97.39	$\{D,A,0,0\}$	97.39
10	n.f	∞	$\{D,B\}$	112.31	$\{D,B,0\}$	112.31	$\{D,B,0,0\}$	112.31
11	n.f	∞	$\{D,B\}$	112.31	$\{D,B,0\}$	112.31	$\{D,B,0,0\}$	112.31
12	n.f	∞		∞	$\{D,B,A\}$	129.01	$\{D,B,A,0\}$	129.01
13	n.f	∞		∞	$\{D,B,A\}$	129.01	$\{D,B,A,0\}$	129.01
14	n.f	∞		∞	$\{D,B,C\}$	148.50	$\{D,B,C,0\}$	148.50
15	n.f	∞		∞	$\{D,B,C\}$	148.50	$\{D,B,C,0\}$	148.50
16	n.f	∞		∞			$\{D,B,C,A\}$	159.81
17	n.f	∞		∞			$\{D,B,C,A\}$	159.81

tabla 4.3

Por último la gráfica del suministro y demanda de agua bajo la secuencia óptima es:

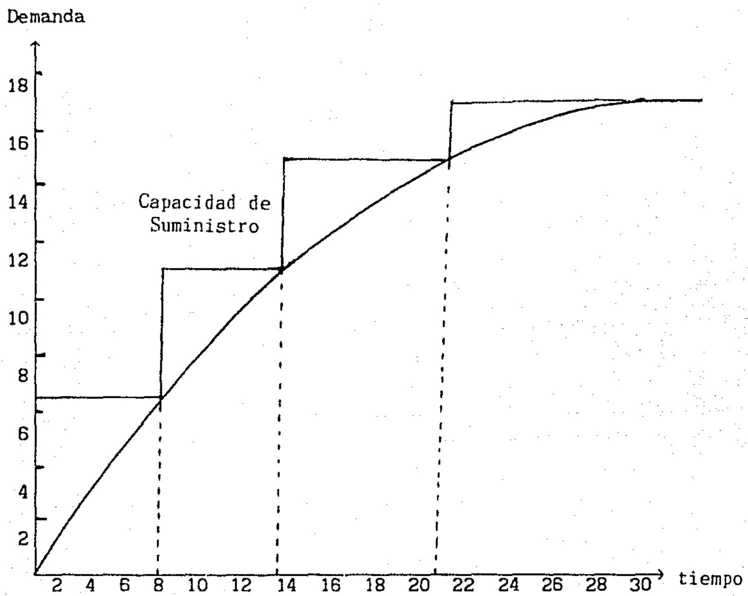

fig. 4.4

CONCLUSIONES

En forma inicial se describe el problema de expansión de capacidad mostrando además una formulación general de problema, así como su clasificación. Los modelos para los cuales exise una gran número de algoritmos son los de localización simple en el caso generalizado, y en muchos de los casos se obtiene la solución óptima, sin embargo algunos de estos modelos no son muy útiles cuando la dimensión del problema es grande. Los algoritmos desarrollados para el caso de multilocalización son casi siempre heurísticos y generalmente no proporcionan una solución óptima tan sólo se aproximan a ella, tal aproximación resulta muchas veces bastante cercana, hasta ahora son pocos los algoritmos desarrollados para este caso.

En el caso de localización en redes existen varios algoritmos para redes deterministas y algunos de ellos funcionan eficientemente aún en redes que contienen un número elevado de nodos, el criterio de optimalidad usado en este trabajo no es recomendable de usar en algunos casos de localización debuzones, paradas de autobuses, librerias. Para el caso de redes probabilistas son pocos los algoritmos existentes pues hay una gran dificultad por resolver todavia y es la determinación de la función de densidad asociada a los posibles estados de la red, que cambia respecto al tiempo. Por último los algoritmos para resolver el problema de secuenciación están desarrollandose todavia y los existentes no son fáciles de mejorar pues el problema por sus caracteristicas combinatorias es bastante complejo, resultando así un gran reto para continuar con su estudio y posibles extensiones.

B I B L I O G R A F I A

1.- EL-SHAIEB A., "A New Algorithm for Locating Sources Among Destinations", *Management Science*, Vol. 20, p. 221-231 (1973).

2.- EFROYMSON M. and RAY T., "A Breanch and Bound Algorithm for Plant Location", *Operations Research*, Vol. 14, p. 361-368 (1966).

3.- ERLENKOTTER D., "Investments for Capacity Expansion: Size, Location and Time-Phasing", A. S. Manne A. (ed.), *MIT Press, Cambridge, Mass.*, p. 157-177 (1967).

4.- ERLENKOTTER D., "Sequencing Expansion Projects", *Operations Research*, Vol. 21, p. 542-553 (1973).

5.- ERLENKOTTER D., "Capacity Planning for Large Multilocation Systems: Approximate and Incomplete Dynamic Programming Approaches", *Management Science*, Vol. 22, p. 274-285 (1975).

6.- ERLENKOTTER D. and ROGGERS S., "Sequencing Competitive Expansion Projects", *Operations Research*, Vol. 25, p. 937-951 (1977).

7.- ERLENKOTTER D. and TRIPPI., "Optimal Investment Sheduling with Price Sensitive Dynamic Demand", *Management Science*, Vol. 23, p. 1-11 (1976).

8.- FLORIAN M. and KLEIN M., "Deterministic Production Planning with Concave Costs and Capacity Constraints", *Management Science*, Vol. 18, p. 12-20 (1971).

9.- FONG C, and RAO M., "Capacity Expansion with Producing Regions and Concave Costs", *Management Science*, Vol. 22, p. 331-339 (1975).

10.- FONG C. and SRINIVASAN V., "The multiregion Dynamic Capacity Expansion Problem, Part I", *Operations Research*, Vol. 20, p. 787-799 (1981).

11.- FONG C. and SRINIVASAN V., "The multiregion Dynamic Capacity Expansion Problem, Part II", *Operations Research*, Vol. 20, p. 800-816 (1981).

12.- FREINDENFELDS J. and McLAUGHLIN C., "A Heuristic Branch and Bound Algorithm for Telephone Feeder Capacity Expansion", *Operations Research*, Vol. 27, p. (1979).

13.- GARCIA I. y Gelman O., "Formación y Axiomatización del Concepto de Sistema", *Boletin IMPOS*, oct.-dic.,Méx. D. F. (1988).

14.- GEOFFRION A., "Lagrangian Relaxation for Integer programming", *Mathematical Programming Study*, Vol. 2, p. 82-114 (1974).

15.- GOODMAN A., "Principles of Watter Resources Planning", *Prentice Hall*, (1984).

16.- HANAN L., "Operations Research and Capacity Expansion Problems: A Survey", *Operations Research*, Vol. 30, p. 907-947 (1982).

17.- HANDLER G. and MIRCHANDI P., "Locations on Networks Theory and Algorithms", *MIT Press Cambridge Massachusetts and London England*, (1979).

18.- HAKIMI S., "Optimum Location of Switching Centers and the Absolute Centers and Medians ah a Graph", *Operations Research*, Vol. 17, p. 450-459 (1964).

19.- HELD H., WOLFE P. and CROWDER H., "Validation of Subgradient Optimization", *Mathematical Programming*, Vol. 6, p. 62-88 (1974).

20.- JAGANNATHAN R. and RAO R., "A class of Deterministic Production Planning Problems", *Management Science*, Vol. 19, p. 1295-1300 (1973).

21.- JÄRVINEN P., RAJALA I. and SINERVO H., "A Branch and Bound Algorithm for Seeking the p-Median", *Operations Research*, Vol. 20, p. 173-178 (1973).

22.- KUHEN A. and HAMBURGER M., "A Heuristic Program for Locating Warehouses", *Management Science*, Vol. 9, p. 643-666 (1963).

23.- LIPPMAN S., "Optimal Inventory Policy with Multiple Set-up Costs", *Management Science*, Vol. 16, p. 118-138 (1969).

24.- MANNE A., "Capacity Expansion and Probabilistic Growth", *Econometrica*, Vol. 29, p. 632-649 (1961).

25.- MARKS D., "Facility Location and Routing Model in Solid Waste Collection Systems", *Ph. D. Thesis, The Johns Hophins University*, Nov., (1969).

26.- MORANZANA F., "On the Location of Supply Points to MInimize Trnsport Costs", *Operations Research Quarterly*, Vol. 15, p. 261-270 (1964).

27.- NARULA S., OGBU U. and SAMUELSSON H.,"An algorithm for the p-Median Problem", *Operations Research*, Vol. 25, p. 709-712 (1977).

28.- O'LAOGHAIRE D. and HIMMELBLAU D., "Optimal Expansion of a Watter Resources Systems", *Academic Press*, 1974.

29.- PETERSEN E., "A Dynamic Programming Model for the Expansion of Electric Power Systems", *Management Science*, Vol. 20, p. 656-664 (1973).

30.- REVELLE CH., MARKS D. and LIEBMAN J., "An Analysis of Private and Public Sector Location Models", *Management Science*, Vol. 16, p. 692-707 (1970).

31.- SRINIVASAN T., "Geometric Rate of Growth of Demand. In Investments for Capacity Expansion: Size, Location and Time-Phasing", A. S. MANNE A. (ed.), *MIT Press, Cambridge, Mass.*, p. 152-156 (1967).

32.- WAGNER H. and WHITIN T., "Dynamic version of the Economic Lot Size Model", *Management Science*, Vol. 5, p. 89-96 (1958).