UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

REORDENAMIENTO DE SERIES
Y CONVERGENCIA

T E S I S

Que para obtener el Título de

M A T E M A T I C O

p r e s e n t a

DAVID HERNANDEZ PEREZ

México, D. F. 1990

Reordenamiento de series y convergencia

David Hernández Pérez

Diciembre de 1989

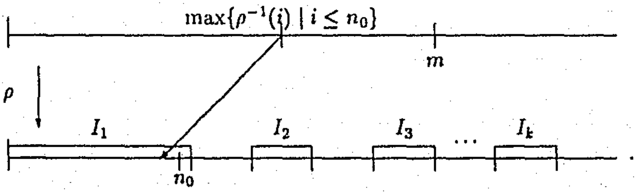
Prólogo

En este trabajo se estudia la convergencia de series reales sujetas a reordenamientos de sus términos; son resultados bien conocidos el que las series absolutamente convergentes no cambian su suma bajo ningún reordenamiento, y por el contrario las series condicionalmente convergentes se pueden arreglar de manera que su suma sea cualquier número establecido de antemano. Los conocimientos básicos para éstos resultados, y lo que sigue, son:

- Las dos definiciones de convergencia.
- Si una serie converge entonces la sucesión de sus términos converge a cero.
- En una serie condicionalmente convergente las subseries de los términos positivos y negativos son divergentes.

Podría pensarse que la únicas permutaciones que no alteran la suma de todas las series convergentes son las que actúan como la identidad, excepto en un número finito de términos; se verá que hay muchas más permutaciones con tal propiedad, aunque la condición han de cumplir es bastante restrictiva. El poder identificar tal conjunto motiva la definición 1: para cada conjunto de series considérese el conjunto de permutaciones que dejan fijos a todos sus elementos, y dualmente dado un conjunto de permutaciones qué series quedan fijas bajo cada una de estas. Las colecciones de conjuntos así obtenidas resultan tener como orden parcial a la contención donde, además, para cualesquiera dos elementos existe un máximo y un mínimo (lattices). En los teoremas 6, 7, 8 y 9 se dan propiedades de los conjuntos cerrados de la forma $(\sum a_i)^{\times}$, que son conjuntos "grandes" de permutaciones (generan al total P), y de conjuntos pequeños $(\sum a_i)^{\times +}$ y $\pi^{+\times}$. En el capítulo dos se demuestra que la cerradura del conjunto de las series alternantes, $\mathrm{Alt}^{\times +}$, coincide con el espacio vectorial generado por **Alt** ya que toda serie en este conjunto es la suma de dos series alternantes.

Las figuras usadas necesitan de una descripción: se pretende representar segmentos iniciales de $\mathbb{N}$ mediante las lineas horizontales, con el número 1 en el extremo izquierdo; las flechas indicaran dominio y contradominio de permutaciones (π, $\rho \ldots$) además de sugerir de manera esquemática la acción de estas, por ejemplo en la siguiente figura del Teorema 1 se muestran: el número n_0, la permutación ρ, el intervalo inicial $[1, \max\{\rho^{-1}(i) \mid i \leq n_0\}]$ y la imagen del intervalo $[1, m]$, que está formada por los intervalos I_1, I_2, $\ldots$, I_k.



Capítulo 1

Reordenamientos que preservan la suma

En este capítulo estudiaremos series de números reales y caracterizaremos a los reordenamientos de sus índices que preservan la suma. El teorema 1 establece tal caracterización y es la base del estudio desarrollado en este trabajo.

1.1 Un conjunto pequeño de permutaciones

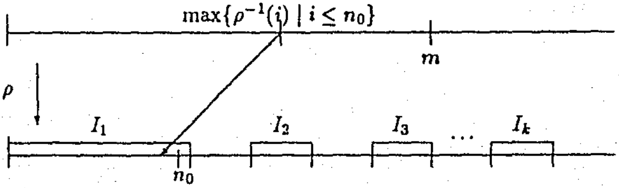
Dada una serie $\sum a_i$ de términos reales y una permutación ρ de $\mathbf{N}$ (función biyectiva de $\mathbf{N}$ en $\mathbf{N}$) llamaremos a $\sum a_{\rho(i)}$ un reordenamiento de $\sum a_i$. Si $i, j \in \mathbf{N}$ con $i \leq j$ el intervalo $[i, j]$ es $\{k \in \mathbf{N} \mid i \leq k \leq j\}$. Todo conjunto finito F de enteros es una unión ajena de intervalos no adyacentes, denotaremos por $\nu(F)$ al número de tales intervalos. Una permutación ρ preserva la suma de una serie convergente $\sum a_i$ si la serie $\sum a_{\rho(i)}$ converge a la misma suma que $\sum a_i$, lo que escribimos como $\sum a_{\rho(i)} = \sum a_i$.

Teorema 1 *Una permutación ρ preserva la suma de toda serie convergente si y solo si hay un número k tal que $\nu(\rho(I)) \leq k$, para todo intervalo I.*

Demostración: Sean $\sum a_i = A$ y $\nu(\rho(I)) \leq k$ para todo I. Dado $\varepsilon > 0$, hay un n_0 tal que para todo $n \geq n_0$

$$\left| \sum^{n} a_i - A \right| < \varepsilon.$$

Para cualquier $m \geq \max\{\rho^{-1}(i) | \, i \leq n_0\}$ el conjunto $\rho([1,m])$ es la unión de a lo más k intervalos $I_1, I_2, \ldots, I_k$, el primero de los cuales es un segmento inicial que contiene a $[1, n_0]$

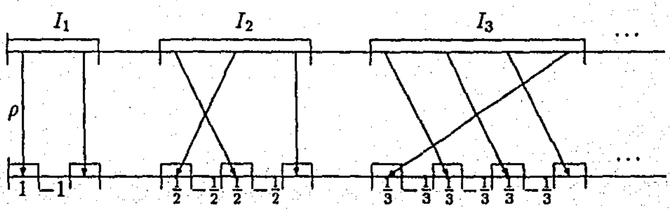


por tanto

$$\begin{aligned}
\left|\sum^{m} a_{\rho(i)} - A\right| &= \left|\sum_{i\in I_1} a_i + \sum_{i\in I_2} a_i + \cdots + \sum_{i\in I_k} a_i - A\right| \\
&\leq \left|\sum_{i\in I_1} a_i - A\right| + \left|\sum_{i\in I_2} a_i\right| + \cdots + \left|\sum_{i\in I_k} a_i\right| \\
&< \varepsilon + 2(k-1)\varepsilon = (2k-1)\varepsilon
\end{aligned}$$

esto es $\sum a_{\rho(i)} = \sum a_i$.

Si ahora suponemos que $\nu(\rho(I))$ no está acotado entonces para cada k podemos encontrar un intervalo I_k tal que $\rho(I_k)$ está formado por más de k intervalos separados; además se puede elegir I_k tal que todos los elementos de I_k y de $\rho(I_k)$ sean mayores que todos los elementos de $I_1, I_2, \ldots, I_{k-1}$ y de $\rho(I_1), \rho(I_2), \ldots, \rho(I_{k-1})$, porque de otra forma podría acotarse a $\nu(\rho(I))$. Ahora constrúyase una serie convergente $\sum a_i$ poniendo un término igual a $1/k$ en cada uno de los primeros k intervalos de $\rho(I_k)$ y un término igual a $-1/k$ en cada uno de los primeros k espacios entre los intervalos de $\rho(I_k)$, todos los demás términos son ceros.



La serie $\sum a_i$ converge porque sus términos distintos de cero se alternan en signo y sus valores absolutos convergen de forma monótona a 0. Pero

$$\sum_{i \in I_k} a_{\rho(i)} = 1$$

para toda k, por tanto $\sum a_{\rho(i)}$ no converge.

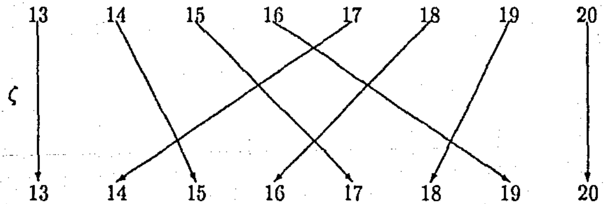
Denotamos por $\mathbf{P}$ al conjunto de todas las permutaciones de $\mathbb{N}$, y por $\mathbf{P}_0$ al conjunto de las permutaciones que preservan la suma de todas las series convergentes, caracterizado en el Teorema 1.

Corolario 1 $\mathbf{P}_0$ *no es grupo.*

Demostración: Sean $I_1 = [1,2]$, $I_2 = [3,6]$, $I_3 = [7,12]$, $\ldots$, $I_k = [n_{k-1}+1, n_k]$, $\ldots$ donde $n_k = k^2 + k$; I_k tiene $2k$ elementos. Defínase una permutación ζ como:

$$\zeta(i) = \begin{cases} 2i - k^2 + k & \text{si } (k-1)^2 < i \leq k^2 - k \\ \\ 2i - k^2 + k - 1 & \text{si } k^2 - k < i \leq k^2 \end{cases}$$

ζ "actúa por intervalos" esto es $\zeta(I_k) = I_k$, fija los extremos de I_k y en los restantes va alternando los de la primera mitad con los elementos de la segunda mitad; por ejemplo en $I_4 = [13,20]$:



el número k^2 está en el centro de I_k, por tanto $\zeta([1,k^2])$ está formado por k intervalos,lo que significa que $\zeta \notin \mathbf{P}_0$. Por el contrario, si $i \in I_k$ entonces $\zeta^{-1}([1,i])$ consta de cuando más dos intervalos uno de la forma $[1,r]$, donde r está en la primera mitad de I_k, y el otro es un intervalo contenido en la segunda mitad de I_k, por tanto $\zeta^{-1} \in \mathbf{P}_0$.

La permutación ζ tiene la propiedad de que aplicada a cualquier serie convergente $\sum a_i$ la transforma en una serie divergente o bien preserva su suma ya que

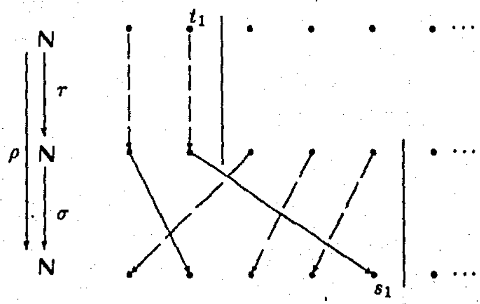
$$\sum^{n_k} a_i = \sum^{n_k} a_{\zeta(i)}$$

esto significa que la sucesión de sumas parciales de $\sum a_{\zeta(i)}$ contiene una subsucesión convergente a la suma de $\sum a_i$ (para $i = n_1, n_2, n_3, \ldots$), o sea que si $\sum a_{\zeta(i)}$ converge habrá de ser a la misma suma que $\sum a_i$; llamemos $\mathbf{P}_1$ al conjunto de todas las permutaciones con la propiedad anterior.

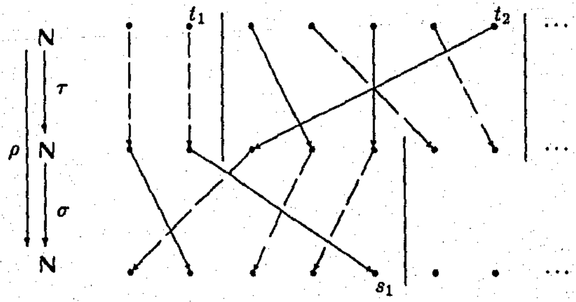
Teorema 2 *Toda permutación es el producto de dos permutaciones de* $\mathbf{P}_1$.

Demostración: Sea $\rho \in \mathbf{P}$. Se contruirán dos sucesiones crecientes $s_0 < s_1 < s_2 < \ldots$, $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$ y dos permutaciones σ y τ tales que: σ actúa sobre los intervalos $[s_{k-1}+1, s_k]$ y τ sobre los intervalos $[t_{k-1}+1, t_k]$, y $\rho = \sigma\tau$. Sean $s_0 = t_0 = 0$, t_1 puede ser cualquier entero y τ la identidad sobre $[1, t_1]$.

Tomemos $s_1 = \max\{\rho(i) \mid 1 \leq i \leq t_1\}$ y definimos σ en $[1, t_1]$ como $\sigma(i) = \rho\tau^{-1}(i)$; para los números restantes, los del intervalo $[t_1+1, s_1]$ (si los hay), asignamos a σ valores arbitrarios entre los $s_1 - t_1$ números del intervalo $[1, s_1]$ que no son de la forma $\rho(i)$ con $i \leq t_1$.



Ahora tómese $t_2 = \max\{\rho^{-1}(i) \mid 1 \leq i \leq s_1\}$ y defínase $\tau(i) = \sigma^{-1}\rho(i)$ para toda $i > t_1$ tal que $\rho(i) \leq s_1$; si $i \in [t_1+1, t_2]$ y $\rho(i) > s_1$, se asigna a $\tau(i)$ cualquier número en $[s_1+1, t_2]$.



Ahora $s_2 = \max\{\rho(i) \mid 1 \leq i \leq t_2\}$ y se define σ en $[s_1+1, s_2]$ de la misma forma que en $[1, s_1]$. Si alguna vez se igualan t_k y s_k entonces t_{k+1} puede ser cualquier número mayor que t_k. En las figuras las flechas contínuas son las asignaciones determinadas por ρ y las flechas interrumpidas son las asignaciones arbitrarias (ilustradas de manera monótona creciente). De ésta forma se pueden construir σ y τ tales que $\rho(i) = \sigma\tau(i)$.

1.2 Las lattices de conjuntos cerrados

Definición 1 *Llamaremos* $\mathbf{C}$ *al conjunto de todas las series reales convergentes. Si* $A \subseteq \mathbf{C}$

$$A^{\times} = \left\{\pi \in \mathbf{P} \mid \text{ para toda } \sum a_i \in A, \sum a_i = \sum a_{\pi(i)}\right\}$$

Si $P \subseteq \mathbf{P}$

$$P^{+} = \left\{\sum a_i \in \mathbf{C} \mid \text{ para toda } \pi \in P, \sum a_i = \sum a_{\pi(i)}\right\}.$$

Llamamos a $A^{\times}$ y P^{+} conjuntos cerrados de permutaciones y de series respectivamente; $A^{\times+}$ y $P^{+\times}$ son llamadas cerraduras de A y P. Podemos considerar a $\times$ y $+$ como funciones entre los subconjuntos de $\mathbf{C}$ y $\mathbf{P}$; es claro que para cualesquiera A y P se cumple que $A \subseteq A^{\times+}$ y $P \subseteq P^{+\times}$, $+$ y $\times$ invierten la inclusión, esto es: si $A \subseteq B$ y $P \subseteq Q$ entonces $A^{\times} \supseteq B^{\times}$ y $P^{+} \supseteq Q^{+}$.

Sea A un conjunto cerrado de series, esto es hay un $P_A \subseteq \mathbf{P}$ tal que $P_A^{+} = A$, entonces $A^{\times} = P_A^{+\times} \supseteq P_A$ y por tanto $A^{\times+} \subseteq P_A^{+} = A$; esto significa que A es cerrado si y solo si coincide con su cerradura. Se verifica la misma propiedad para conjuntos cerrados de permutaciones; podemos decir que $+$ y $\times$ son inversas una de otra cuando actúan sobre conjuntos cerrados.

La inclusión de conjuntos es un orden parcial en las colecciones de conjuntos cerrados de permutaciones y de series, además estas colecciones son lattices.

$$A \vee B = (A^{\times} \cap B^{\times})^{+},\ A \wedge B = (A^{\times} \cup B^{\times})^{+}$$

$$P \vee Q = (P^{+} \cap Q^{+})^{\times},\ P \wedge Q = (P^{+} \cup Q^{+})^{\times}$$

Se ve facilmente que $(A^{\times} \cap B^{\times})^{+}$ es el mínimo cerrado que contiene a A y B, y $(A^{\times} \cup B^{\times})^{+}$ es el máximo cerrado contenido en A y B.

Si A es un conjunto cerrado de series y $\sum a_i$, $\sum b_i \in A$ y r, s son números reales entonces $r\sum a_i + s\sum b_i \in A^{\times+} = A$, por tanto A es un espacio vectorial sobre el campo de los números reales. De las observaciones anteriores vemos que, para conjuntos cerrados A y B, $A \vee B \supseteq \langle A \cup B \rangle$ (donde $\langle A \cup B \rangle$ es el espacio vectorial generado por $A \cup B$), $A \wedge B = A \cap B$; para conjuntos cerrados de permutaciones P y Q: $P \vee Q \supseteq P \cup Q$ y $P \wedge Q = P \cap Q$. Por el contrario los conjuntos cerrados de permutaciones no tienen estructura algebraica ya que solamente $\mathbf{P}$ es grupo y $\mathbf{P}_0$ es semigrupo, como se verá más adelante.

Llamemos **AC** al conjunto de las series absolutamente convergentes. Sea $\sum a_i \in \mathbf{AC}$ y $\sum a_i = A$, si definimos a_i^+ y a_i^- como

$$a_i^+ = \frac{|a_i| + a_i}{2} \quad \text{y} \quad a_i^- = \frac{|a_i| - a_i}{2}$$

entonces $0 \leq a_i^-, a_i^+ \leq |a_i|$ por tanto $\sum a_i^+$ y $\sum a_i^-$ convergen, digamos que $\sum a_i^+ = A_1$ y $\sum a_i^- = A_2$ esto es $A = A_1 - A_2$ puesto que $\sum a_i^+ - \sum a_i^- = \sum a_i$. Ademas como éstas dos series son de términos no negativos quedan fijas bajo cualquier reordenamiento entonces $\sum a_i$ también. En efecto sea $\rho \in \mathbf{P}$, hay un $N \in \mathbf{N}$ tal que si $N \leq n$ entonces

$$\left|\sum^n a^+_{\rho(i)} - A_1\right| < \varepsilon/2 \quad \text{y} \quad \left|\sum^n a^-_{\rho(i)} - A_2\right| < \varepsilon/2$$

por tanto

$$\begin{aligned} \left|\sum^n a_{\rho(i)} - A\right| &= \left|\sum^n (a^+_{\rho(i)} - a^-_{\rho(i)}) - (A_1 - A_2)\right| \\ &\leq \left|\sum^n a^+_{\rho(i)} - A_1\right| + \left|\sum^n a^-_{\rho(i)} - A_2\right| < \varepsilon \end{aligned}$$

asi ρ preserva la suma de $\sum a_i$.

Si $\sum a_i \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{AC}$ entonces la series $\sum \max(a_i, 0)$ y $\sum \min(a_i, 0)$ son divergentes y se puede construir una permutación σ tal que $\sum a_{\sigma(i)}$ sea divergente, como se muestra en el Teorema 3. Con la notación de la definición 1 se tendrá $\mathbf{AC} = \mathbf{P}^+$. Es claro que $\mathbf{P}_0$ y **AC** son los elementos mínimos de las lattices definidas anteriormente.

Teorema 3 *Si $\sum a_i$ converge condicionalmente entonces hay una permutación σ tal que $\sigma \notin (\sum a_i)^\times$ y $\sigma^{-1} \in \mathbf{P}_0$.*

Demostración: Sean $n_0 = 0 < n_1 < n_2 < n_3, \ldots$ tales que

$$\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \max(a_i, 0) > 1$$

esto es posible ya que la serie de los términos positivos de $\sum a_i$ diverge; sea r_k el número de términos positivos de $\sum a_i$ que hay en el intervalo $[n_{k-1}+1, n_k]$, en cada uno de estos intervalos σ está definida como

$$\begin{array}{ll} \sigma(n_{k-1}+i) = j_i & \text{si } a_{j_i} \text{ es el } i\text{-ésimo término positivo de} \\ & [n_{k-1}+1, n_k] \\ \sigma(n_{k-1}+r_k+i) = j_i & \text{si } a_{j_i} \text{ es el } i\text{-ésimo término no-positivo de} \\ & [n_{k-1}+1, n_k] \end{array}$$

de ésta forma se tiene que

$$\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_{k-1}+r_k} a_{\sigma(i)} > 1$$

para toda k, por tanto $\sum a_{\sigma(i)}$ no converge. Por otra parte tenemos que $\sigma^{-1}([n_{k-1}+1, n])$ consta siempre de a lo más dos intervalos para cualquier $n \in [n_{k-1}+1, n_k]$.

Sea P un conjunto cerrado de permutaciones distinto de $\mathbf{P}$ entonces $\mathbf{AC} = \mathbf{P}^+ \subseteq P^+$, además $P^+ \neq \mathbf{AC}$ porque $P^{+\times} = P$, esto es: hay una serie condicionalmente convergente $\sum a_i$ tal que $P \subseteq (\sum a_i)^\times$. Por la proposición anterior hay una permutación σ tal que $\sigma \notin (\sum a_i)^\times$ y $\sigma^{-1} \in \mathbf{P}_0 \subseteq P$, por tanto P no es grupo.

Dada cualquier serie convergente $\sum a_i = A$ se tiene que $\mathbf{P}_0 \subsetneq (\sum a_i)^\times$; para ver esto elijamos n_1, n_2, n_3, ... tales que $n_{k+1} - n_k > 2k+1$ y si $i > n_k$ entonces $|a_i| < 2^{-2k}$. Definimos una permutación ρ como sigue: en el intervalo $[n_k+1, n_k+k]$

$$\rho(n_k+i) = n_k+2i,$$

y en $[n_k+k+1, n_k+2k]$

$$\rho(n_k+k+i) = n_k+2i-1,$$

en los restantes, hasta n_{k+1} inclusive, ρ es la identidad; de ésta forma se tiene que $\nu(\rho([n_k+1, n_k+k])) = k$ y por lo tanto $\rho \notin \mathbf{P}_0$.

Hay un $m_1 \in \mathbf{N}$ tal que si $n \geq m_1$ entonces

$$\left|\sum^{n} a_i - A\right| < \varepsilon/2$$

y hay un $m_2 \in \mathbf{N}$ tal que si $n_k \geq m_2$ entonces $\frac{2k}{2^{2k}} < \varepsilon/2$.

Tomemos cualquier $n \geq \max\{m_1, m_2\}$: si $\rho(n) = n$ entonces

$$\sum^{n} a_{\rho(i)} = \sum^{n} a_i$$

si $n \in [n_k + 1, n_k + 2k]$ entonces

$$\begin{aligned} \left|\sum^{n} a_{\rho(i)} - A\right| &= \left|\sum^{n_k} a_i + \sum_{n_k < i \leq n} a_{\rho(i)} - A\right| \\ &\leq \left|\sum^{n_k} a_i - A\right| + \sum_{n_k < i \leq n} |a_{\rho(i)}| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2k}{2^{2k}} < \varepsilon, \end{aligned}$$

por tanto $\rho \in (\sum a_i)^{\times}$ pero $\rho \notin \mathbf{P}_0$.

De manera dual, para cualquier permutación π se cumple que $\mathbf{AC} \subsetneq \pi^+$; sea $\sum a_i$ una serie condicionalmente convergente y $j_1 < j_2 < j_3 < \ldots$ una sucesión tal que $\pi(j_1) < \pi(j_2) < \pi(j_3) < \ldots$, la serie $\sum b_i$ donde

$$b_i = \begin{cases} a_k & \text{si } i = \pi(j_k) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

tambien es condicionalmente convergente. Debido a la elección de las j's los términos b_i distintos de cero aparecen en el mismo orden en las series $\sum b_i$ y $\sum b_{\pi(i)}$, por tanto $\sum b_i = \sum b_{\pi(i)}$.

Teorema 4 *Si* $\pi \in \mathbf{P}$ *y* $\rho \in \mathbf{P}_0$ *entonces* $\pi\rho \in \pi^{+\times}$.

Demostración: Sea $\sum a_i = A$, $\sum a_i \in \pi^+$ y k una cota para $\nu(\rho(I))$, para todo intervalo I.

Hay un $N \in \mathbf{N}$ tal que si $N \leq n < m$ entonces

$$\left|\sum^{n} a_{\pi(i)} - A\right| < \varepsilon/k$$

y

$$\left|\sum_{i=n}^{m} a_{\pi(i)}\right| < \varepsilon/k$$

por tanto para cualquier $m \geq \max\{\rho^{-1}(i) \mid i \leq N\}$ se tiene que $\rho([1,m])$ consta de cuando más k intervalos $I_1, I_2, \ldots, I_k$ y

$$\begin{aligned}
\left|\sum^{m} a_{\pi\rho(i)} - A\right| &= \left|\sum_{i\in I_1} a_{\pi(i)} + \sum_{i\in I_2} a_{\pi(i)} + \cdots + \sum_{i\in I_k} a_{\pi(i)} - A\right| \\
&\leq \left|\sum_{i\in I_1} a_{\pi(i)} - A\right| + \left|\sum_{i\in I_2} a_{\pi(i)}\right| + \cdots + \left|\sum_{i\in I_k} a_{\pi(i)}\right| \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

por tanto $\pi\rho \in \pi^{+\times}$.

En la conclusión del Teorema 4 no se puede obtener el producto en orden cambiado: consideremos la serie $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$ y su reordenamiento $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots$ donde se suman dos términos positivos y uno negativo sucesivamente; sabemos que estas dos series convergen a límites distintos.

Sean

$$\sum a_i = 1 + 0 - \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{3} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \cdots,$$

$\rho \in \mathbf{P}_0$ dada por

$$\rho(i) = \begin{cases} i+1 & \text{si } i \text{ es impar} \\ \\ i-1 & \text{si } i \text{ es par} \end{cases}$$

y π la permutación que deja fijos los números impares y en los pares actúa como la permutación del reordenamiento anterior:

$$\pi(i) = \begin{cases} i & \text{si } i \text{ es impar o } i = 2 \\ i+2k & \text{si } i = 4k \\ i-2k & \text{si } i = 8k \pm 2 \end{cases}$$

entonces se tendrá que $\sum a_i \in \pi^{+}$ pero

$$\sum a_{\rho\pi(i)} = 0 + 1 + 0 + \frac{1}{3} + 0 - \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} + 0 - \frac{1}{4} + \cdots$$

y asi $\rho\pi \notin \pi^{+\times}$.

Definición 2 *Sea $\sum a_i \in \mathbf{C}$ y $J \subseteq \mathbf{N}$, J infinito, decimos que $\sum a_i$ converge absolutamente sobre J si*

$$\sum_{j\in J} |a_j| < \infty.$$

Siempre existen tales conjuntos, por ejemplo: el k-ésimo elemento de J, j_k, puede ser el primer índice i, $i > j_m$ con $1 \leq m \leq k-1$, para el cual $0 \neq |a_i| < 2^{-k}$.

Teorema 5 *Si* $\sum a_i \in \mathrm{C} \setminus \mathrm{AC}$ *converge absolutamente sobre* J, $\pi \in \mathrm{P}$ *tal que* π^{-1} *es monótona sobre* $\mathbb{N} \setminus J$ *entonces* $\pi \in (\sum a_i)^{\times}$.

Demostración: Sea $M(n) = \max\{i \mid i \in \mathbb{N} \setminus J \text{ y } \pi^{-1}(i) \leq n\}$

$$\sum^{n} a_{\pi(i)} = \sum^{M(n)} a_i \quad + \quad \sum\{a_i \mid i > M(n), i \in J \text{ y } \pi^{-1}(i) \leq n\}$$
$$- \quad \sum\{a_i \mid i < M(n), i \in J \text{ y } \pi^{-1}(i) > n\}$$

todos los índices $\pi(i) > M(n)$ con $i \leq n$ deben estar en J debido a la elección de $M(n)$; los índices $i < M(n)$ con $i \notin \pi([1,n])$ también deben ser elementos de J porque de no ser asi π^{-1} no preservaría el orden de estos índices respecto a $M(n)$.

Sean $\varepsilon > 0$ y $j_0 \in J$ tal que para cualesquiera $j_1, j_2 \in J$ con $j_0 < j_1 < j_2$ se tiene que

$$\sum_{j \in J, j_1 \leq j \leq j_2} |a_j| < \varepsilon/2$$

Ahora hay un N tal que si $n > N$ entonces todos los números de $\mathbb{N} \setminus \pi([1,n])$ son mayores que j_0 y por lo tanto

$$\left| \sum^{n} a_{\pi(i)} - \sum^{M(n)} a_i \right| < \varepsilon$$

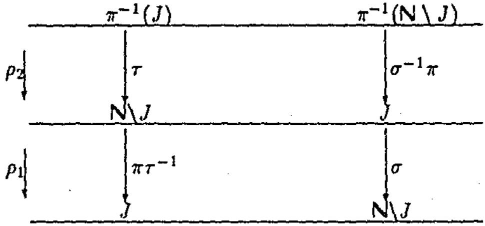
y como $M(n) \to \infty$ cuando $n \to \infty$ se tendrá que $\sum a_{\pi(i)} = \sum a_i$.

Teorema 6 *Sea* $\sum a_i$ *condicionalmente convergente, entonces*

(a) $\mathrm{P} = (\sum a_i)^{\times}(\sum a_i)^{\times}$.

(b) $\mathrm{P}_0 = \{\pi \in \mathrm{P} \mid (\sum a_i)^{\times} \pi \subseteq (\sum a_i)^{\times}\}$.

Demostración: (a) Sea $\pi \in \mathrm{P}$ y $J \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\sum a_i$ converge absolutamente sobre J. Se definen dos permutaciones ρ_1 y ρ_2 en $(\sum a_i)^{\times}$ tales que $\pi = \rho_1 \rho_2$.



Sobre $\pi^{-1}(J)$ $\rho_2 = \tau$ la biyección monótona entre $\pi^{-1}(J)$ y $\mathbb{N}\setminus J$, en $\mathbb{N}\setminus J$ se define a ρ_1 como $\pi\tau^{-1}$; sobre $\mathbb{N}\setminus J$ $\rho_1 = \sigma$ la biyección monótona entre J y $\mathbb{N}\setminus J$, en $\pi^{-1}(\mathbb{N}\setminus J)$ se define a ρ_2 como $\sigma^{-1}\pi$. De ésta manera ρ_1^{-1} y ρ_2^{-1} son monótonas sobre $\mathbb{N}\setminus J$ y por el teorema anterior $\rho_1, \rho_2 \in (\sum a_i)^\times$.

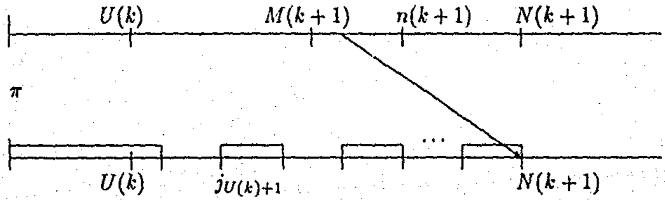
(b) Sea $\pi \in \mathbf{P}\setminus\mathbf{P}_0$, se construirá una permutación $\rho \in \mathbf{P}_0$ (por tanto $\rho \in (\sum a_i)^\times$) tal que $\rho\pi \notin (\sum a_i)^\times$, esto se hará construyendo una sucesión creciente $U(1)$, $U(2)$, $U(3)$, ... de manera que $\rho([1, U(i)]) = [1, U(i)]$ para toda i, y se hará ver que para toda n, $\rho([1, n])$ es la unión de a lo más dos intervalos.

Sea $U(1) = 0$; habiendo definido $U(k)$ y $\rho(i)$ para $i \leq U(k)$ elíjase $M(k+1) > U(k)$ tal que

$$\sum_{i=U(k)+1}^{M(k+1)} \max(a_i, 0) \geq k+1,$$

sea $n(k+1)$ tal que el conjunto $\pi([1, n(k+1)])$ es una unión de al menos $M(k+1) - U(k) + 1$ intervalos el primero de los cuales contiene a $[1, U(k)]$; sean $j_{U(k)+1}$, $j_{U(k)+2}$, ..., $j_{M(k+1)}$ los primeros elementos de los intervalos anteriores, desde el segundo hasta el número $M(k+1) - U(k) + 1$, respectivamente; sea $N(k+1) = \max\{\pi(i) \mid i \leq n(k+1)\}$, nótese que

$$M(k+1) \leq n(k+1) < N(k+1)$$



ahora elegimos simultáneamente $L(k+1)$ y $U(k+1)$ tales que

$$L(k+1) > M(k+1),$$

$$U(k+1) = L(k+1) + N(k+1) - M(k+1) - 1$$

y

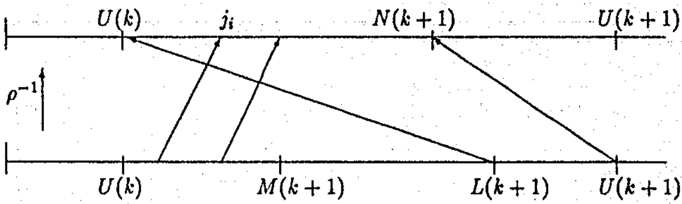
$$\sum_{i=L(k+1)}^{U(k+1)} |a_i| < \frac{1}{k+1}$$

esto último se puede ya que la sucesión $\{a_i\}$ converge a 0 y la suma es sobre una cantidad fija de términos, igual a $N(k+1) - M(k+1)$.

Definimos ρ^{-1} en el intervalo $[U(k)+1, M(k+1)]$ como

$$\rho^{-1}(i) = \begin{cases} j_i & \text{si } a_i > 0 \\ j_i - 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

en el intervalo $[L(k+1), U(k+1)]$ ρ^{-1} es la biyección monótona sobre el conjunto $[U(k)+1, N(k+1)] \setminus \rho^{-1}([U(k)+1, M(k+1)])$ (el intervalo $[U(k)+1, N(k+1)]$ excepto algunos puntos j_i o bien $j_i - 1$)

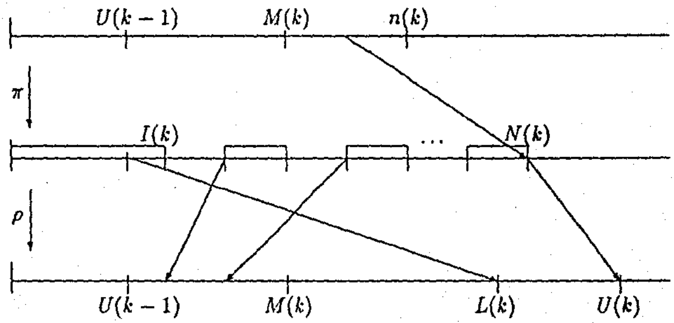


para los índices restantes $M(k+1) < i < L(k+1)$ definimos

$$\rho^{-1}(i) = N(k+1) + i - M(k+1)$$

(biyección monótona sobre el intervalo $[N(k+1)+1, U(k+1)]$); continuando de ésta forma ρ^{-1} quedará definida en todo $\mathbb{N}$. Es claro que si $U(k) < n \leq U(k+1)$ entonces $\rho([1,n])$ consta de cuando más dos intervalos.

Considérese ahora $\sum^{n(k)} a_{\rho\pi(i)}$; $\pi([1, n(k)])$ está formado por al menos $M(k) - U(k-1) + 1$ intervalos, sea $[1, I(k)]$ el primero de ellos.



$$\begin{aligned}\sum^{n(k)} a_{\rho\pi(i)} = \sum^{I(k)} a_{\rho(i)} \quad &+ \quad \sum\{a_i | U(k-1) < i \leq M(k) \text{ y } a_i > 0\} \\ &+ \quad \sum\{a_i | L(k) \leq i \leq U(k) \text{ y } \rho^{-1}(i) \in \pi([1, n(k)])\}\end{aligned}$$

en ésta suma el primer término $\sum^{I(k)} a_{\rho(i)}$ converge a $\sum a_i$ porque $\rho \in \mathbf{P}_0$; el tercer sumando converge a cero puesto que

$$\sum\{a_i \mid L(k) \leq i \leq U(k) \text{ y } \rho^{-1}(i) \in \pi([1, n(k)])\} \leq \sum_{i=L(k)}^{U(k)} |a_i| < \frac{1}{k},$$

pero $\sum\{a_i \mid U(k-1) < i \leq M(k) \text{ y } a_i > 0\} \geq k$, por tanto $\sum a_{\rho\pi(i)}$ diverge.

Corolario 2 *Los únicos semigrupos, cerrados, de permutaciones son* $\mathbf{P}$ *y* $\mathbf{P}_0$.

Demostración: Sea P un conjunto cerrado de permutaciones distinto de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{P}_0$ y $\pi \in P \setminus \mathbf{P}_0$; sabemos que hay una serie condicionalmente convergente $\sum a_i$ en P^+, por el Teorema 6(b) hay una permutación ρ tal que $\rho \in \mathbf{P}_0 \subsetneq P$ tal que $\rho\pi \notin (\sum a_i)^\times \supseteq P$. Por tanto P no es cerrado bajo composición.

Teorema 7 *Si* $\pi \in \mathbf{P} \setminus \mathbf{P}_0$ *entonces hay permutaciones* ρ_1 *y* ρ_2 *tales que*

$$\mathbf{P}_0 \subsetneq \rho_2^{+\times} \subsetneq \pi^{+\times} \subsetneq \rho_1^{+\times} \subsetneq \mathbf{P}.$$

Demostración: Para construir ρ_1 se eligen números $j_1 < j_2 < j_3 < \ldots$ tales que $\max\{j_i, \pi(j_i)\} + 1 < \min\{j_{i+1}, \pi(j_{i+1})\}$. Sea $\sum a_i$ una serie condicionalmente convergente y defínase $\sum b_i$ como

$$b_i = \begin{cases} a_k & \text{si } i = \pi(j_k) \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sean $n_0 = 0, n_1, n_2, n_3, \ldots$ tales que

$$\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \max(b_i, 0) > 1$$

y además para ninguna pareja i, k sucede que $j_i \leq n_k \leq \pi(j_i)$.

Ahora construimos una permutación τ de manera análoga a la construcción hecha en el Teorema 3 esto es: que en cada intervalo $[n_{k-1}+1, n_k]$ τ enumere primero a los términos $j_i, \pi(j_i)$ tales que $b_{j_i} > 0$ y en el orden en que aparecen en $\sum b_i$; después τ es la biyección monótona sobre el conjunto de números que no han sido enlistados este conjunto es $[n_{k-1}+1, n_k] \setminus \{j_i, \pi(j_i) \mid b_{j_i} > 0\}$.

Es claro que siempre hay una m_{k-1} con $n_{k-1} < m_{k-1} < n_k$ tal que

$$\sum_{i=n_{k-1}+1}^{m_{k-1}} b_{\pi\tau(i)} > 1$$

por tanto $\sum b_{\pi\tau(i)}$ no converge. Se ha construido τ de forma que $\tau^{-1} \in \mathbf{P}_0$; sea $\rho_1 = \pi\tau$, como $\pi = \rho_1\tau^{-1}$ y $\tau^{-1} \in \mathbf{P}_0$ se tiene que $\rho_1^+ \subseteq \pi^+$ pero la serie anterior muestra que $\rho_1^+ \subsetneq \pi^+$, por tanto $\pi^{+\times} \subsetneq \rho_1^{+\times}$.

La permutación ρ_2 se construirá encontrando una $\sigma \in \mathbf{P}_0$ tal que $\pi\sigma \notin \mathbf{P}_0$ y $\pi^+ \subsetneq (\pi\sigma)^+$. Se definirá una colección de intervalos consecutivos N_1, N_2, $N_3, \ldots$ tales que $\sigma(N_n) = N_n$; cuando n es impar σ será la identidad sobre N_n y si n es par e $i \in N_n$ entonces $\sigma([1,i])$ será la unión de a lo más dos intervalos, asi $\sigma \in \mathbf{P}_0$. Denotaremos por $m(n) = \max\{i \mid i \in N_n\}$ y $m^\pi(n) = \max\{\pi(i) \mid i \in N_n\}$.

Sean $N_1 = \{1\}$ y $\sigma(1) = 1$, supongamos definido N_{n-1}: como $\pi \notin \mathbf{P}_0$ hay un $K(n) > m(n-1)$ tal que $\pi([1, K(n)]) \supsetneq [1, m^\pi(n-1)]$ y $\pi([1, K(n)])$ está formado de al menos $n+1$ intervalos. Si n es impar hacemos $N_n = [m(n-1)+1, K(n)]$ y σ la identidad en N_n. Cuando n es par elegiremos n números $j(n,k)$ con $1 \leq k \leq n$ tales que

$$m^\pi(n-1) < j(n,1) < j(n,2) < \ldots < j(n,n) < K(n)$$

y además $\pi(j(n,k)) + 1 \notin \pi([1, K(n)])$ (los números $\pi(j(n,k))$ son los extremos derechos de los intervalos que forman a $\pi([1, K(n)])$, son al menos

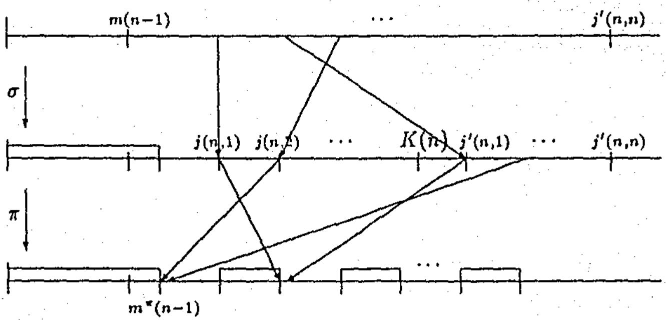
$n+1$ intervalos y el primero de éstos contiene a $[1, m^{\pi}(n-1)]$). Sea $j'(n,k)$, $1 \leq k \leq n$, la enumeración del conjunto

$$\{\pi^{-1}(\pi(j(n,1))+1), \ldots, \pi^{-1}(\pi(j(n,n))+1)\}$$

esto es

$$K(n) < j'(n,1) < j'(n,2) < \ldots < j'(n,n).$$

Sea $N_n = [m(n-1)+1, j'(n,n)]$.



Sobre N_n definimos σ de manera que $\sigma(m(n-1)+1)$, $\sigma(m(n-1)+2), \ldots$, $\sigma(j'(n,n))$ sean los números

$$\begin{gathered} m(n-1)+1, m(n-1)+2, \ldots, j(n,1), j(n,n)+1, j(n,n)+2, \ldots, \\ j'(n,1), j(n,1)+1, j(n,1)+2, \ldots, j(n,2), j'(n,1)+1, j'(n,1)+2, \\ \ldots, j'(n,2), j(n,2)+1, \ldots, j(n,3), j'(n,2)+1, \ldots, j'(n,n). \end{gathered}$$

de ésta forma la permutación σ "cubre" de manera creciente al intervalo $[m(n-1)+1, j(n,1)]$ enseguida al intervalo $[j(n,n)+1, j'(n,1)]$ y continúa sucesivamente con los intervalos $[j(n,1)+1, j(n,2)]$, $[j'(n,1)+1, j'(n,2)]$, $[j(n,2)+1, j(n,3)]$, $\ldots$, $[j'(n,n-1)+1, j'(n,n)]$; como consecuencia de esto los números $j(n,k)$, $j'(n,k)$ son enlistados por σ en el siguiente orden $j(n,1)$, $j'(n,1)$, $j(n,2)$, $j'(n,2)$, $\ldots$, $j(n,n)$, $j'(n,n)$. Es claro que $\sigma \in \mathbf{P}_0$.

Cuando n es impar se tiene que

$$\pi\sigma([1, m(n)]) = \pi([1, m(n)])$$

que está formado de al menos $n+1$ intervalos, por tanto $\pi\sigma \notin \mathbf{P}_0$. Proponemos a $\pi\sigma$ como ρ_2, es claro que $\pi^+ \subseteq \rho_2^+$. Defínase una serie $\sum a_i$ mediante

$$a_i = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } i = \pi(j(n,k)) \text{ para algún } 1 \le k \le n \\ -\frac{1}{n} & \text{si } i = \pi(j'(n,k)) \text{ para algún } 1 \le k \le n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se han elegido los números j y j' de manera que $\sum a_i$ resulte convergente, además $\sum a_i = 0$. También resulta que $\sum a_i \notin \pi^+$ porque cuando n es par

$$\sum_{i=m(n-1)+1}^{K(n)} a_{\pi(i)} = 1.$$

Por el contrario $\sum a_i \in \rho_2^+$ ya que para cualquier $l \in \mathbb{N}$, si definimos a n como $n = \max\{j \mid m(j) \le l\}$, se tiene que

$$\sum^{l} a_{\rho_2(i)} = 0$$

cuando n es par, y cuando n es impar

$$\begin{aligned} \sum^{l} a_{\rho_2(i)} &= \sum^{m(n)} a_{\rho_2(i)} + \sum_{i=m(n)+1}^{l} a_{\rho_2(i)} \\ &= \sum^{m(n)} a_{\pi(i)} + \sum_{i=m(n)+1}^{l} a_{\pi\sigma(i)} \\ &= 0 + \frac{\Delta_l}{n+1} \end{aligned}$$

donde Δ_l es 0 o 1 dependiendo de que

$$\begin{aligned} &\mathit{cardinal}\big(\{j(n+1,1),\ldots,j(n+1,n+1)\} \cap \sigma([m(n)+1,l])\big) \\ -&\mathit{cardinal}\big(\{j'(n+1,1),\ldots,j'(n+1,n+1)\} \cap \sigma([m(n)+1,l])\big) \end{aligned}$$

sea 0 o 1, respectivamente; esto es, si hasta el número l, σ ha enlistado igual cantidad de $j(n+1,k)$'s que de $j'(n+1,k)$'s, o bien una $j(n+1,k)$ más que $j'(n+1,k)$'s. Asi $\sum a_{\rho_2(i)} = 0 = \sum a_i$ y por tanto $\pi^+ \subsetneq \rho_2^+$ con lo que se tendrá $\rho_2^{+\times} \subsetneq \pi^{+\times}$; como $\rho_2 \notin \mathbf{P}_0$ se cumple que $\mathbf{P}_0 \subsetneq \rho_2^{+\times}$.

Las construciones anteriores pueden hacerse repetidamente para obtener cadenas infinitas de conjuntos cerrados de permutaciones, tanto ascendentes como descendentes; en su lugar se puede dar un argumento de carácter combinatorio para ver que hay cadenas de longitud infinita no-numerable, lo que da información sobre la lattice de conjuntos cerrados que estan debajo de cada conjunto de la forma $\pi^{+\times}$.

Dado cualquier subconjunto de números pares S defínase la permutación σ^S por

$$\sigma^S(i) = \begin{cases} \sigma(i) & \text{si } i \in N_n \text{ y } n \in S \\ \\ i & \text{en otro caso} \end{cases}$$

aqui los intervalos N_n son los usados en la construcción de la permutación ρ_2 del teorema 7; las σ^S son "partes" de σ ya que coinciden con ésta en todos los intervalos N_s, con $s \in S$, y son la identidad en los demás números. Para cualesquiera conjuntos de números pares S y T se cumple:

1. $\sigma^S \in \mathbf{P}_0$: ya que $\sigma([1,i])$ es $[1,i]$ o bien está formado por dos intervalos.

2. $(\pi\sigma^S)^{+\times} \supsetneq (\pi\sigma^T)^{+\times}$ si $S \subsetneq T$: $\sigma^T = \sigma^S\sigma^{T\setminus S}$ y como $\sigma^{T\setminus S} \in \mathbf{P}_0$ se tendrá que $(\pi\sigma^S)^+ \subsetneq (\pi\sigma^T)^+$, aplicando la función $\times$ se concluye la contención mostrada.

3. $\pi\sigma^S \notin \mathbf{P}_0$: porque para los N_n, con n impar, $\pi\sigma^S(N_n)$ está formado por al menos $n+1$ intervalos.

4. $(\pi\sigma^S)^{+\times} = (\pi\sigma^T)^{+\times}$ si y solo si $(S \cup T) \setminus (S \cap T)$ es finito: ya que dos permutaciones que difieren en un número finito de términos dejan fijo al mismo conjunto de series.

5. $(\pi\sigma^S)^{+\times}$ y $(\pi\sigma^T)^{+\times}$ son incomparables si $(S\setminus T)$ y $(T\setminus S)$ son infinitos: la serie definida en el Teorema 7, restringida ahora a los $n \in (S \setminus T)$, está en $(\pi\sigma^S)^+$ pero no en $(\pi\sigma^T)^+$; igualmente hay una serie en $(\pi\sigma^T)^+$ que no está en $(\pi\sigma^S)^+$, lo que muestra que $(\pi\sigma^S)^{+\times} \not\subset (\pi\sigma^T)^{+\times}$ y $(\pi\sigma^T)^{+\times} \not\subset (\pi\sigma^S)^{+\times}$.

En el conjunto $\wp(2\mathbb{N})$ podemos encontrar cadenas y anticadenas (según la relación de inclusión) de longitud no numerable como sigue: a cada número real positivo x le asociamos el conjunto de números racionales menores o iguales que x, para cualesquiera dos de éstos conjuntos uno de ellos está contenido en el otro y la diferencia entre ambos es numerable, como el conjunto de los números racionales y el de los números pares son biyectables tendremos una cadena similar a la anterior en $\wp(2\mathbb{N})$; para formar una anticadena (donde cualesquiera dos conjuntos A y B, $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$) asociamos a cada número real x, con $0 < x < 1$, el siguiente conjunto N_x

$$x \longmapsto \{\, 2^n(2[nx]+1) \mid n \in \mathbb{N} \,\}$$

si N_x y N_y, con $x \neq y$, tienen algún elemento en común entonces para ciertos $p, q \in \mathbb{N}$

$$2^p(2[px]+1) = 2^q(2[qy]+1)$$

por tanto $p = q$ y $[px] = [qy]$, así $[px] = [py]$ con lo que tendremos que $|px - py| < 1$ y necesariamente

$$p < \frac{1}{|x-y|}$$

esto significa que N_x y N_y tienen cuando más $\left[\frac{1}{|x-y|}\right]$ elementos en común.

Corolario 3 *Si $\pi \in \mathbf{P} \setminus \mathbf{P}_0$ entonces en la lattice de conjuntos cerrados de permutaciones que estan entre $\pi^{+\times}$ y $\mathbf{P}_0$ hay cadenas y anticadenas no numerables.*

Demostración: Con la construcción del Teorema 7 y las propiedades enumeradas anteriormente vemos que basta con tener una cadena de conjuntos de números pares S_r, con $0 \leq r \leq 1$, tales que $S_1 = 2\mathbb{N}$ y si $r < s$ entonces $S_r \subsetneq S_s$ y $S_s \setminus S_r$ es infinito, tomemos a $(\pi\sigma^{S_r})^{+\times}$ como el r-ésimo conjunto.

Para una anticadena tomemos una colección de conjuntos de números pares T_r, con $0 \leq r \leq 1$, tales que si $r \neq s$ entonces $T_r \setminus T_s$ y $T_s \setminus T_r$ son infinitos, los conjuntos $(\pi\sigma^{T_r})^{+\times}$ son una anticadena según la propiedad 5.

Teorema 8 *Hay permutaciones π_1, π_2, ρ_1, $\rho_2 \in \mathbf{P} \setminus \mathbf{P}_0$ tales que*

(a) $\pi_1^{+\times}$ y $\rho_1^{+\times}$ son incomparables y $\pi_1^{+\times} \wedge \rho_1^{+\times} \supsetneq \mathbf{P}_0$

(b) $\pi_2^{+\times}$ y $\rho_2^{+\times}$ son incomparables y $\pi_2^{+\times} \wedge \rho_2^{+\times} = \mathbf{P}_0$

Demostración: (a) Como se ha observado anteriormente bastará con elegir dos subconjuntos S y T de números pares tales que $S \setminus T$ y $T \setminus S$ sean infinitos; sean $\pi_1 = \pi\sigma^S$ y $\rho_1 = \pi\sigma^T$, es claro que $\pi_1^{+\times}$ y $\rho_1^{+\times}$ son incomparables puesto que $\pi_1 \in \pi_1^{+\times}$ y $\pi_1 \notin \rho_1^{+\times}$ y recíprocamente; como $\pi\sigma^{S\cup T} \in \pi_1^{+\times} \wedge \rho_1^{+\times}$ y $\pi\sigma^{S\cup T} \notin \mathbf{P}_0$ se ve que $\pi_1^{+\times} \wedge \rho_1^{+\times} \supsetneq \mathbf{P}_0$.

(b) Sean $B_1 = [1,4]$, $B_2 = [5,10]$, $B_3 = [11,18]$, $B_4 = [19,28]$, … ; π_2 es la identidad en B_{2n}, en B_{2n-1} enlista primero los términos impares seguidos de los términos pares: $\pi_2(1) = 1$, $\pi_2(2) = 3$, $\pi_2(3) = 2$, $\pi_2(4) = 4$; ρ_2 es la identidad en B_{2n-1} y enlista primero los términos impares de B_{2n} segidos de los términos pares: $\rho_2(5) = 5$, $\rho_2(6) = 7$, $\rho_2(7) = 9$, $\rho_2(8) = 6$, $\rho_2(9) = 8$, $\rho_2(10) = 10$, desde luego $\pi_2, \rho_2 \notin \mathbf{P}_0$.

Como $\pi_2^{+\times} \wedge \rho_2^{+\times} = (\pi_2^{+} \cup \rho_2^{+})^{\times}$ y una permutación que preserva la suma de un conjunto de series preserva la suma de cualquier combinación lineal de series de éste conjunto bastará ver que $C = \langle \pi_2^+ \cup \rho_2^+ \rangle$. Sea $\sum a_i \in C$ y

$$b_j = \frac{\sum_{i \in B_j} a_i}{|B_j|}$$

donde $|B_j|$ es el número de elementos de B_j, las series $\sum c_i$ y $\sum d_i$ definidas por

$$c_i = \begin{cases} 2a_i - b_j & \text{si } i \in B_j \text{ y } j \text{ es par} \\ b_j & \text{si } i \in B_j \text{ y } j \text{ es impar} \end{cases}$$

$$d_i = \begin{cases} b_j & \text{si } i \in B_j \text{ y } j \text{ es par} \\ 2a_i - b_j & \text{si } i \in B_j \text{ y } j \text{ es impar} \end{cases}$$

convergen a la misma suma que $\sum a_i$: primero notemos que para cualquier j

$$\sum_{i \in B_j} c_i = \sum_{i \in B_j} d_i = \sum_{i \in B_j} a_i,$$

sea $n \in B_j$ y $m(n) = \max B_{j-1}$ entonces

$$\sum^{n} c_i = \sum^{m(n)} c_i + \sum_{i=m(n)+1}^{n} c_i = \sum^{m(n)} a_i + \sum_{i=m(n)+1}^{n} c_i,$$

cuando n es impar se tendrá

$$\left| \sum_{i=m(n)+1}^{n} c_i \right| \leq |(n - m(n)) b_j| \leq \left| \sum_{i \in B_j} a_i \right|,$$

cuando n es par

$$\left| \sum_{i=m(n)+1}^{n} c_i \right| = \left| \sum_{i=m(n)+1}^{n} (2a_i - b_j) \right| \leq 2 \left| \sum_{i=m(n)+1}^{n} a_i \right| + |(n - m(n)) b_j|$$

en ambos casos se observa que $\sum_{i=m(n)+1}^{n} c_i$ tiende a cero cuando n crece, así $\sum a_i = \sum c_i$. Por la forma en que esta definido c_i se tiene que $c_i = c_{\pi_2(i)}$ por tanto $\sum c_i = \sum c_{\pi_2(i)}$, esto es $\sum c_i \in \pi_2^+$, igualmente se verifica que $\sum d_i \in \rho_2^+$. Como $2\sum a_i = \sum c_i + \sum d_i$ vemos que $\sum a_i \in \langle \pi_2^+ \cup \rho_2^+ \rangle$.

Aunque debajo de todo conjunto de la forma $\pi^{+\times}$ hay cadenas y anticadenas no-numerables, estos conjuntos resultan ser "pequeños", esto es: no estan situados muy arriba en la lattice de conjuntos cerrados de permutaciones, ya que, al tomar el máximo de una colección numerable $\pi_1^{+\times}$, $\pi_2^{+\times}$, $\pi_3^{+\times}$, ... éste nunca es $\mathbf{P}$.

Teorema 9 *Si* $\{\pi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *y* $\{\sum a_i^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *son colecciones numerables de permutaciones y de series entonces* $\bigvee_n \pi_n^{+\times} \subsetneq \mathbf{P}$ *y* $\bigvee_n (\sum a_i^n)^{+\times} \subsetneq \mathbf{C}$.

Demostración: Sea $j(1,1) < j(1,2) < j(1,3) < \ldots$ una sucesión tal que $\pi_1^{-1}(j(1,1)) < \pi_1^{-1}(j(1,2)) < \pi_1^{-1}(j(1,3)) < \ldots$, supongamos definida la sucesión $j(n-1,i)$, con $i \in \mathbb{N}$, elegiremos la siguiente sucesión $j(n,i)$ de manera que $\{j(n,i) \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \{j(n-1,i) \mid i \in \mathbb{N}\}$, $j(n,1) < j(n,2) < j(n,3) < \ldots$ y además $\pi_n^{-1}(j(n,1)) < \pi_n^{-1}(j(n,2)) < \pi_n^{-1}(j(n,3)) < \ldots$. Consideremos los términos de la "diagonal" $k(i) = j(i,i)$, para estos números se cumple que $k(1) < k(2) < k(3) < \ldots$ y para $i \geq n$ $\pi_n^{-1}(k(i)) < \pi_n^{-1}(k(i+1))$ (π_n altera el orden de una cantidad finita de términos $k(i)$). La siguiente serie $\sum b_i$ es condicionalmente convergente

$$b_i = \begin{cases} \frac{(-1)^j}{j} & \text{si } i = k(j) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

además $\sum b_i \in (\bigcap \pi_n^{+})$, por tanto el máximo de los conjuntos $\pi_n^{+\times}$, $(\bigcap \pi_n^{+})^{\times}$, no es $\mathbf{P}$.

Sea $S_1 \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\sum a_i^1$ converge absolutamente sobre S_1, definido S_{n-1} el siguiente conjunto S_n se elige tal que $S_n \subseteq S_{n-1}$ y $\sum a_i^n$ converge absolutamente sobre S_n, ahora sea S el conjunto cuyos elementos son el primero de S_1, el segundo de S_2, etc. Así $\sum a_i^n$ converge absolutamente sobre S y una permutación π que reordene los elementos de S entre si y sea la identidad en $\mathbb{N}\setminus S$ ha de estar en $\bigcap(\sum a_i^n)^{\times}$, por tanto cualquier serie condicionalmente convergente $\sum b_i$, donde $b_i = 0$ para toda $i \in \mathbb{N}\setminus S$, no puede estar en $[\bigcap(\sum a_i^n)^{\times}]^{+}$.

Capítulo 2

Series alternantes

Una serie $\sum a_i$ es alternante si la sucesión de los valores absolutos de sus términos $\{|a_i|\}$ converge monótonamente a cero y $a_i a_{i+1} \leq 0$ para toda i. Denotaremos por **Alt** al conjunto de todas las series alternantes.

Definición 3 *Sea $S \subseteq \mathbb{N}$ y ρ la enumeración creciente de S : $\rho(1)$ es el primer elemento de S, $\rho(2)$ el primer elemento de $S \setminus \{\rho(1)\}$, etc. S es alternante si $\rho(i)$ toma valores pares e impares alternadamente.*

El balance de S es:

$$\max\left\{\left|\sum_{l=1}^{i}(-1)^{\rho(l)}\right| : i \leq cardinal(S)\right\}$$

Todo conjunto no vacío tiene balance distinto de cero, y si S es un conjunto alternante tiene balance 1. El conjunto $\{1, 2, 4, 5\}$ tiene balance 1 pero no es alternante.

Teorema 10 *Sea $S \subseteq \mathbb{N}$ y $s_1 < s_2 < s_3 < \ldots$ los elementos de S entonces*

(a) Si S tiene balance 1 entonces S es la unión de dos conjuntos alternantes, uno de los cuales puede ser vacío.

(b) Si S tiene balance k entonces S es la unión de k conjuntos de balance 1.

(c) Si S tiene balance k y $S' \subsetneq S$ tiene balance 1 entonces $S \setminus S'$ tiene balance k-1, k o k+1.

Demostración: (a) Como S tiene balance 1 en cualquier lugar de la sucesión $s_1 < s_2 < s_3 < \ldots$ hay a lo más dos términos consecutivos pares (impares), además la siguiente pareja de términos consecutivos de igual paridad debe ser de números impares (pares). De cada una de éstas parejas extraemos uno de sus términos y los conjuntos resultantes serán alternantes.

Ejemplo

$$\begin{aligned} S &= 1,2,4,7,8,11,13,\ldots \\ \sum(-1)^{\rho(l)} &= -1,0,1,0,1,0,-1,\ldots \\ S_1 &= 1,2,7,8,11,\ldots \\ S_2 &= 4,13,\ldots \end{aligned}$$

(b) Sea s_m el primer término donde la suma $\sum(-1)^{\rho(l)}$ alcanza el valor k (ó $-k$) y s_n el primero después de s_m en que se alcanza el valor $-(k-1)$ (ó $-k+1$ — en el ejemplo $s_m = 6$ y $s_n = 17$), al extraer los términos s_m y s_n de S el balance en los términos $s_{m+1}, s_{m+2}, \ldots, s_{n-1}$ disminuye en uno (aumenta en uno) y en los posteriores a s_n no tiene cambio. Procedemos de igual manera en el conjunto $s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots$ obteniendo así un conjunto de balance $k-1$ y otro de balance 1.

Ejemplo: $k = 3$

$$\begin{aligned} S &= 2,4,6,7,11,13,15,17,19,\ldots \\ \sum(-1)^{\rho(l)} &= 1,2,3,2,1,0,-1,-2,-3,\ldots \\ S_1 &= 2,4,\ ,7,11,13,15,\ ,19,\ldots \\ \sum(-1)^{\rho(l)} &= 1,2,\ ,1,0,-1,-2,\ ,-3,\ldots \\ S_2 &= 6,17,\ldots \end{aligned}$$

De los incisos (a) y (b) concluimos que un conjunto de balance k se puede descomponer en $2k$ conjuntos alternantes.

(c) Sean $s'_1 < s'_2 < s'_3, \ldots$ los elementos de S'; si s'_1 es par (impar) al extraerlo de S el balance disminuye (aumenta) en uno en los términos posteriores a s'_1, como s'_2 es impar (par) al eliminarlo de S el balance después de s'_2 queda igual al balance original en S. Como S' tiene balance 1 hay cadenas de a lo más dos términos consecutivos pares (impares) de S' y con el argumento anterior vemos que al eliminar todos los términos de S' el balance de $S \setminus S'$ será $k+1$, k o $k-1$.

Definimos el balance de una permutación π como el número

$$\max_n\{\text{ balance de } \pi([1,n])\}.$$

Se calcula el balance de $\pi([1,n])$ para cada n, el máximo de tales balances es el balance de π; si no hay un máximo el balance de π es infinito. Puede haber permutaciones que tomen valores pares e impares alternadamente y tengan balance infinito, por ejemplo si $\pi(1)$, $\pi(2)$, $\pi(3)$, ... son los números: 1, 8, 3, 6, 5, 4, 7, 2, 9, 64, 11, 62, 13, 60, ...

Teorema 11 $\mathrm{Alt}^{\times} = \{\pi \in \mathrm{P} \mid \pi \textit{ tiene balance finito}\}$

Demostración: Sea π una permutación de balance finito I y $\sum a_i$ una serie en Alt. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos a $\pi^-(n)$ como 0 o bien como el máximo i tal que $\pi([1,n])$ contiene a $[1,i]$. De ésta manera

$$\sum^{n} a_{\pi(i)} = \sum^{\pi^-(n)} a_i + \sum_{j\in S(n)} a_j$$

donde $S(n) = \pi([1,n]) \setminus [1, \pi^-(n)]$.

Como π tiene balance I, $S(n)$ tiene balance a lo más $I+1$; Sean S_1, S_2, $\ldots$, S_{2I+2} conjuntos alternantes ajenos cuya unión es $S(n)$, en cada uno de éstos conjuntos alternantes S_j se tendrá:

$$\left|\sum_{i\in S_j} a_i\right| \leq |a_{k(j)}|$$

donde $k(j) = \min S_j$; como $k(j) \geq \pi^-(n)$ se tiene que $|a_{k(j)}| \leq |a_{\pi^-(n)}|$ por tanto

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j\in S(n)} a_i\right| &\leq \sum_{j=1}^{2I+2}\left|\sum_{i\in S_j} a_i\right| \\ &\leq (2I+2)|a_{\pi^-(n)}|\end{aligned}$$

tomando n suficientemente grande ésta suma puede hacerse menor que cualquier número positivo puesto que los $|a_i|$ convergen a cero. Sustituyendo ésta expresión en $\sum^n a_{\pi(i)}$

$$\left|\sum^{n} a_{\pi(i)} - \sum^{\pi^-(n)} a_i\right| \leq (2I+2)|a_{\pi^-(n)}|$$

concluimos que $\sum a_{\pi(i)} = \sum a_i$.

Supongamos ahora que π tiene balance infinito. Se pueden definir dos sucesiones $n(i)$ y $m(i)$ con las siguientes propiedades: $n(1) = 0$, $m(1) = 2$ y

i) $n(k)$ y $m(k)$ son pares

ii) $n(k+1) > n(k)$ y $m(k+1) > m(k)$

iii) $\pi([1, m(k+1)]) \supsetneq [1, n(k)]$

iv) $\left|\sum\{(-1)^i : i \in \pi([1, m(k+1)]) \text{ y } n(k) < i \leq n(k+1)\}\right| \geq m(k)^2$

la propiedad iv) se puede cumplir porque los conjuntos $\pi([1,n])$ pueden tener balance arbitrariamente grande.

Defínase una serie alternante $\sum a_i$ de la siguiente manera

$$a_i = \frac{(-1)^i}{m(k-1)} \quad \text{donde} \quad k = \min\{j \mid i \leq n(j)\}$$

k es el índice de la 'n' más cercana a i mayor o igual que i. Como $n(k)$ es par se tendrá que $a_i = -a_{i+1}$ cuando i es impar y por tanto $\sum^{n(k)} a_i = 0$. Para $k > 1$ tendremos:

$$\begin{aligned} \sum^{m(k)} a_{\pi(i)} &= \sum^{n(k-1)} a_i + \sum\{a_{\pi(i)} \mid i \leq m(k) \text{ y } \pi(i) > n(k-1)\} \\ &= 0 + \sum_{i \in S} \frac{(-1)^i}{m(k-1)} + \sum\{a_{\pi(i)} \mid i \leq m(k) \text{ y } \pi(i) > n(k)\} \end{aligned}$$

donde $S = \{i \mid i \in \pi([1, m(k)]) \text{ y } n(k-1) < i \leq n(k)\}$. Por la propiedad iv) la suma sobre S tiene valor absoluto mayor o igual que $m(k-1)$. El último sumando tiene menos de $m(k)$ términos, todos ellos de valor absoluto menor o igual que $\frac{1}{m(k)}$, por tanto su valor absoluto no es mayor que 1; esto indica que $\sum^{m(k)} a_{\pi(i)}$ tiende a infinito cuando k crece.

Enseguida se caracteriza al conjunto $\mathrm{Alt}^{\times +}$.

Teorema 12 *Si $\sum a_i$ es tal que $\lim a_i = 0$ y $\sum |a_i + a_{i+1}| < \infty$ entonces hay dos series alternantes $\sum b_i$ y $\sum c_i$ tales que $a_i = b_i + c_i$ para toda i.*

Demostración: Defínase Δ_i por

$$\Delta_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es impar y } a_i \geq 0 \\ 1 & \text{si } i \text{ es par y } a_i < 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y las series $\sum b_i$ y $\sum c_i$ por

$$b_i = (-1)^{i+1} \left[|a_i| \Delta_i + \sum_{j=i}^{\infty} |a_j + a_{j+1}| \right]$$

$$c_i = (-1)^i \left[|a_i|(1 - \Delta_i) + \sum_{j=i}^{\infty} |a_j + a_{j+1}| \right].$$

Sumando

$$b_i + c_i = (-1)^{i+1}|a_i|(2\Delta_i - 1) = a_i.$$

Las series $\sum b_i$ y $\sum c_i$ tienen signos alternados y además $\lim b_i = 0 = \lim c_i$, falta por ver que $|b_i| \geq |b_{i+1}|$ y $|c_i| \geq |c_{i+1}|$. Para b_i

$$|b_i| - |b_{i+1}| = |a_i + a_{i+1}| + \Delta_i|a_i| - \Delta_{i+1}|a_{i+1}|$$

si $\Delta_i = 0$ y $\Delta_{i+1} = 1$ entonces a_i y a_{i+1} deben tener el mismo signo y por tanto $|a_i + a_{i+1}| = |a_i| + |a_{i+1}|$ con lo que $|b_i| - |b_{i+1}| = |a_i| \geq 0$; cuando $\Delta_i = \Delta_{i+1} = 0$ es inmediato, en los demás casos se tendrá

$$\Delta_{i+1}|a_{i+1}| \leq |a_i + a_{i+1}| + |a_i|$$

y por tanto

$$|b_i| - |b_{i+1}| \geq 0.$$

Para c_i se tiene que

$$|c_i| - |c_{i+1}| = |a_i + a_{i+1}| + |a_i|(1 - \Delta_i) - |a_{i+1}|(1 - \Delta_{i+1})$$

si $\Delta_i = 1$ y $\Delta_{i+1} = 0$ nuevamente a_i y a_{i+1} deben tener el mismo signo por lo que $|c_i| - |c_{i+1}| = |a_i| \geq 0$, cuando $\Delta_i = \Delta_{i+1} = 1$ es inmediato, y para los casos restantes

$$|a_{i+1}|(1 - \Delta_{i+1}) = |a_i + a_{i+1}| + |a_i|$$

y por tanto $|c_i| - |c_{i+1}| \geq 0$.

Teorema 13 $\sum a_i \in \mathbf{Alt}^{\times +}$ *si y solo si* $\lim a_i = 0$ *y* $\sum |a_i + a_{i+1}| < \infty$.

Demostración: Si $\lim a_i = 0$ y $\sum |a_i + a_{i+1}| < \infty$ entonces $\sum a_i$ es la suma de dos series alternantes y como $\mathbf{Alt}^{\times +}$ es un espacio vectorial que contiene a $\mathbf{Alt}$ se tiene que $\sum a_i \in \mathbf{Alt}^{\times +}$.

Supóngase ahora que $\sum a_i$ es una serie convergente y $\sum |a_i + a_{i+1}| = \infty$, entonces alguna de las series $\sum |a_{2i-1} + a_{2i}|$ ó $\sum |a_{2i} + a_{2i+1}|$ debe ser divergente; digamos que $\sum |a_{2i-1} + a_{2i}| = \infty$ y hacemos $b_i = a_{2i-1} + a_{2i}$ entonces $\sum b_i$ converge porque

$$\sum^{n} b_i = \sum^{2n} a_i$$

pero no converge absolutamente, por tanto hay una permutación ρ tal que $\sum b_{\rho(i)}$ no converge.

Sea π la permutación dada por

$$\pi(2i - 1) = 2\rho(i) - 1 \quad \text{y} \quad \pi(2i) = 2\rho(i)$$

π mapea la i-ésima pareja de enteros consecutivos a la $\rho(i)$-ésima pareja de enteros consecutivos; como consecuencia de ésto tenemos que el balance de π es cuando más 2 ya que $\pi([1,n])$ siempre está formado por intervalos cuyo extremo izquierdo es un número impar y cuyo extremo derecho es un número par y ademas hay cuando más un intervalo formado por un solo número impar; por tanto $\pi \in \mathrm{Alt}^{\times}$. Pero

$$\sum_{i=1}^{2n} a_{\pi(i)} = \sum_{i=1}^{n} b_{\rho(i)}$$

por tanto $\sum a_i \notin \mathrm{Alt}^{\times +}$.

Notación

$\mathbb{N}$	el conjunto de los números naturales.
$\sum a_i$	abreviación de $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$
$\sum^n a_i$	abreviación de $\sum_{i=1}^{n} a_i$
$A \setminus B$	diferencia de conjuntos
$\pi\sigma$	composición de permutaciones: $\pi\sigma(i) = \pi(\sigma(i))$
$\mathbf{C}$	el conjunto de las series reales convergentes
$\mathbf{AC}$	el conjunto de las series absolutamente convergentes
$\langle A \rangle$	el espacio vectorial generado por A
$\mathbf{P}$	el conjunto de las permutaciones de $\mathbb{N}$
$\mathbf{P}_0$	el conjunto de las permutaciones que preservan la suma de toda serie convergente
$[i, j]$	el intervalo de los números naturales entre i y j
$\wp(A)$	el conjunto de los subconjuntos de A
$[x]$	máximo entero menor o igual que x
$\nu(F)$	número de intervalos disjuntos no adyacentes que componen al conjunto F

Referencias

1. Q. F. Stout, *On Levy's duality between permutations and convergent series*, J. London Math. Soc. (2) 34 (1986) 67–80.

2. F. W. Levy, *Rearrangement of convergent series*, Duke Math. J. 13 (1946) 579–585.

3. P. A. B. Pleasants, *Rearrangements that preserve convergence*, J. London Math. Soc. (2) 15 (1977) 134–142.

4. P. Schaefer, *Sum-preserving rearrangements of infinite series*, Amer. Math. Monthly 88 (1981) 33–40.

5. W. Rudin, *Principios de análisis matemático*, Ed. McGraw Hill, 3a edición, México 1986.

6. J. Dieudonné, *Foundations of modern analysis*, Academic Press, 2a ed. N. Y. 1980.

7. S. C. Saxena, S. M. Shah, *Introduction to real variable theory*, Intext Ed. Pub., Penn, 1972.

8. W. Sierpiński, *Cardinal and ordinal numbers*, Pańستwowe W. N. 1958.