

46
29j



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

Desarrollo de un Preamplificador de Alta Resolución y
Bajo Ruido para Petrodispersión de Iones

T E S I S
Que para obtener el título de:

F I S I C O

Presenta

JUAN MARTÍN SAUTANA COBTE

México, D.F.

1990

FALTA DE ORIGEN



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ÍNDICE

Capítulo 1. Radiación Ionizante

1.1 Desintegración alfa	1
1.2 Alcance	3
1.3 Poder de frenamiento	4
1.5 Detectores de Barrera Superficial	9

Capítulo 2. Desarrollo del Preamplificador

2.1 Preamplificadores	15
2.2 Ruido	15
2.3 Polarización del detector	16
2.4 Entrada de prueba	18
2.5 Preamplificador sensible a la carga	20
2.6 Análisis de circuitos	23

Capítulo 3. Retrodispersión de Iones

Introducción	38
3.1 Interpretación de espectros	40
3.2 Conceptos Básicos	43
3.3 Sección eficaz de dispersión	43
3.4 Sección eficaz de frenamiento	48

3.5	Dispersión en energía	49
3.6	Método de análisis	52
3.7	Factor de pérdida de energía	54
3.8	Aproximación superficial	55
3.9	Aproximación de energía media	57
3.10	Altura de un pulso	58
3.11	Número de cuentas de una señal	62
3.12	Influencia del sistema de detección	63
3.13	Resolución en profundidad	64

Capítulo 4. Resultados

4.1	Resolución	66
4.2	Equipo utilizado	67
4.3	Montaje de los dispositivos	67
4.4	Selección del detector	68
4.5	Comparaciones	69
4.6	Conclusiones	73

	Apéndice A	74
--	-------------------	-----------

Introducción

El desarrollo de la electrónica en México, y en especial de la electrónica nuclear, es un campo que debe ser trabajado y del cual se pueden obtener logros muy alentadores. Este tipo de electrónica generalmente utilizada en laboratorios donde se realizan estudios que de una u otra manera tienen que ver con algún tipo de radiación, ya sea por emisiones naturales, como es el caso del decaimiento alfa, o producidas, se distingue de la electrónica convencional debido a las características de estas emisiones. El tiempo de vida de este tipo de radiaciones es extremadamente corto, generalmente del orden de nanosegundos. Es por eso que el equipo utilizado en la detección de éstas se construye ajustándose a estos requerimientos.

Pero el problema no sólo es reducir los tiempos de respuesta de los componentes utilizados al construir el equipo, sino que además se presenta el problema del ruido, que en caso de ser lo suficientemente grande puede enmascarar la señal producida por algún tipo de detector al ser activado por la radiación incidente en él y de esta manera obtener resultados indebidos.

Por tanto, debe existir un compromiso en una de las etapas del análisis en que el tiempo de respuesta de los componentes electrónicos y el ruido generado o captado del exterior sean lo más pequeño posible.

En el presente trabajo esta etapa se conoce como preamplificador, éste sirve como un acoplamiento entre la primera etapa que detecta la radiación, en este caso por medio de un detector de barrera superficial, y la segunda, que es un amplificador que conduce la señal producida por la radiación a un analizador multicanal que cuantifica el número de eventos detectados a diferentes energías.

Si en esta etapa se cuenta con las mejores condiciones de operación posibles antes mencionadas, la caracterización de las radiaciones detectadas será más certera.

El propósito de esta tesis es el desarrollo y construcción de un preamplificador que iguale, y de ser posible, mejore las características de uno comercial.

El capítulo 1 comienza con un ligero análisis de la desintegración alfa y de algunos de los parámetros más importantes de los detectores de estado sólido convenientes para la detección de este tipo de radiación.

En el capítulo 2 se analiza con cierta profundidad la operación general de un preamplificador y de los parámetros que lo caracterizan mencionados en párrafos anteriores. En el mismo capítulo se hace un análisis a fondo de las distintas etapas que conforman el

preamplificador desarrollado. La terminología se simplificó lo más posible para aquellos no muy relacionados con este tipo de trabajos. Todos los resultados están basados en leyes muy generales como las de voltajes y corrientes en mayas debidas a Kirchoff, con ligeras profundizaciones para los resultados más importantes.

El capítulo 3 es una síntesis de la técnica de análisis de muestras conocida como RBS y en la cual se utilizó el preamplificador para mostrar sus características de operación.

Por último el capítulo 4 contiene los resultados obtenidos al comparar el preamplificador desarrollado con un modelo comercial, primero utilizando una fuente triple de alfas y en segundo lugar al bombardear una muestra de cobre y obtener su espectro en RBS.

Capítulo 1

**En tres cosas se apoya el mundo
en la justicia, en la verdad y en la paz.
(Mishna, Avot)**

1.1. Desintegración alfa

1

El proceso de desintegración alfa consiste en la emisión de una partícula alfa α (núcleo de helio ${}^4_2\text{He}$, compuesta de dos protones y dos neutrones. El núcleo residual tiene un número atómico dos unidades menor y un número másico cuatro unidades menor que el núcleo originario [1]. Podemos escribir el proceso de desintegración alfa de la siguiente manera:



donde X y Y son los núcleos original y residual respectivamente.

De manera natural este proceso se lleva a cabo en emisores con núcleos pesados, esto es elementos que se encuentran al final de la tabla periódica, (aquellos que tienen un $A > 200$), lo cual resulta lógico al estudiar la expresión de la energía de ligadura nuclear.

$$E_b = 931,48 [Z m_p + (A - Z) m_n - M_p] \text{MeV}. \quad (1.2)$$

donde M_p es la masa del núcleo originario.

De manera más precisa, el decaimiento espontáneo por las partículas alfa se lleva a cabo de acuerdo a ciertas condiciones, que se establecen a continuación.

Considérese como antes un núcleo ${}^A_Z X$ de masa M_p que decae en otro ${}^{A-4}_{Z-2} Y$ de masa M_d y una partícula alfa de masa m_α . Como el núcleo originario M_p queda en reposo la partícula alfa debe viajar en dirección contraria al núcleo residual M_d para conservar el momento. Sean E_i y E_f las energías totales del sistema antes y después del decaimiento. Debido a la conservación de la energía tenemos,

$$E_i = E_f \quad (1.3)$$

o de manera semejante considerando que K_d y K_α son las energías cinéticas del núcleo residual y de la partícula alfa, respectivamente tenemos,

$$M_p c^2 = M_d c^2 + K_d + m_\alpha c^2 + K_\alpha \quad (1.4)$$

de aquí pues que la energía de desintegración Q sea:

$$Q = K_d + K_\alpha = (M_p - M_d - m_\alpha)c^2 \quad (1.5)$$

de donde, para un decaimiento espontáneo Q debe ser positivo. Además de esta ecuación se concluye que un decaimiento alfa sólo tiene lugar si la masa en reposo del núcleo originario es mayor que la suma de las masas en reposo de los núcleos residuales más la partícula alfa, lo cual si vemos en una tabla de decaimientos ocurre solamente en la región de los números de masa grandes, i.e., $A > 200$

Lo trascendente para este caso es la energía cinética de la partícula alfa, la cual se puede establecer del principio de conservación del momento y la energía.

$$m_\alpha = M_d V_d \quad (1.6)$$

y por tanto

$$Q = K_d + K_\alpha = \frac{1}{2} M_d V_d^2 + \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \quad (1.7)$$

donde v_α y V_d son las velocidades de la partícula alfa y del núcleo residual, respectivamente. Sustituyendo V_d de la ecuación (1.6) en la ecuación (1.7), obtenemos

$$Q = \frac{1}{2} M_d (m_\alpha v_\alpha / M_d)^2 + \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2$$

$$Q = K_\alpha \left(\frac{m_\alpha}{M_d + 1} \right) \quad (1.8)$$

$$K_\alpha = \frac{Q}{1 + (m_\alpha / M_d)} \quad (1.9)$$

Si A y $A - 4$ son los números de masa del núcleo originario y del núcleo residual respectivamente, $m_\alpha/M_d = 4/(A - 4)$, y la ecuación (1.9) es

$$K_\alpha = \frac{A - 4}{A} |Q|$$

Por tanto $A \gg 4$ y $A - 4/A \approx 1$ implican que la energía de la partícula alfa lleva consigo la mayor parte de la energía de desintegración.

Una vez aclarados los principios básicos del decaimiento alfa, lo más importante de este estudio es el poder determinar con la mayor resolución posible la energía de las partículas. Para ello se han desarrollado muchos procedimientos, los cuales pueden clasificarse en tres categorías: (a) Deflexión magnética, (b) Relación alcance-energía, y (c) análisis de pulsos. De los cuales nos avocaremos al tercero.

El principio de este método se basa en el hecho de que la amplitud de un pulso eléctrico producido es proporcional a la energía de la partícula alfa, lo cual se puede llevar a cabo de tres maneras distintas: (i) usando métodos de ionización total, (ii) usando un detector de estado sólido, (iii) usando un detector de centelleo.

De estos tres métodos el que nos interesa es el que usa un detector de estado sólido y es por tanto el que se describirá a continuación, pero no sin antes revisar algunos conceptos que son importantes.

1.2. Alcance

El medir el alcance constituye un método simple y preciso para determinar la energía de una partícula cargada [2]. El principio es el siguiente. Una partícula cargada al atravesar un absorbedor pierde energía cinética por interacción electromagnética con los electrones de los átomos del material absorbedor. Si en la colisión el electrón gana suficiente energía abandona por completo al átomo. De otra manera el electrón queda en un estado excitado ligado. El promedio de energía requerida para la ionización (estados ligados y no ligados) se denomina potencial de ionización promedio, y se denota por \bar{I} .

El alcance de una partícula alfa se define como la distancia que viaja de la fuente que la emite al punto donde ha perdido toda su energía cinética, el cual depende por tanto de su energía cinética inicial y del tipo de material absorbedor [3].

Éste se puede definir de la siguiente manera

$$\bar{R} = \int_0^{\bar{R}} dx = \int_0^E \left(\frac{-dE}{dx} \right)^{-1} dE = \int_0^E \frac{dE}{S(E)} \quad (1.10)$$

en donde la cantidad $S(E) = -dE/dx$ es el poder de frenamiento, esto es la cantidad de energía perdida por la partícula por unidad de longitud.

De igual manera, si se conoce el alcance \bar{R} de la partícula, su energía se puede calcular como [3]

$$E = \int_0^{\bar{R}} wI dR = \int_0^{\bar{R}} \left(\frac{-dE}{dx} \right) dR \quad (1.11)$$

donde w es la energía requerida para producir un par electrón-ion e I es la ionización específica.

Una cantidad relacionada con lo anterior y que resultará útil en este trabajo es el poder de frenamiento relativo, por sus siglas en inglés se define como

$$RSP = \frac{S(E)}{S_0(E)} = \left(\frac{Z}{Z_0} \right) \frac{\ln(2mv^2) - \ln \bar{I}}{\ln(2m_0v^2) - \ln \bar{I}_0} \quad (1.12)$$

Para nuestro caso, resulta muy útil conocer el espesor de un material que absorba partículas alfa, lo cual puede expresarse en términos de el espesor equivalente en unidades de mg/cm^2 definido como

espesor equivalente en $mg/cm^2 = \text{alcance} \times \text{densidad} \times 1000$.

1.3. Poder de Frenamiento

Como se mencionó anteriormente una partícula cargada al pasar por un material absorbedor pierde mucha de su energía al ionizar los átomos de éste. El poder de frenamiento puede ser calculado teóricamente. Históricamente, la primera expresión para el poder de frenamiento basada en la mecánica clásica fué hecha por N. Bohr en 1915. Le siguieron H. Bethe en 1930 con una expresión derivada de un tratamiento con mecánica cuántica. Luego siguió F. Bloch en 1933 que incluye resultados de Bohr y Bethe [4].

Las siguientes suposiciones son necesarias para hacer la derivación más simple:

(i) Las partículas cargadas son pesadas y debido a sus altas velocidades, sus trayectorias son líneas rectas a través del material absorbedor. Pierden energía solamente al ionizar los átomos del absorbedor a lo largo de su trayectoria. También suponemos que la energía de las partículas es menor de 10 Mev, lo cual implica que no se harán correcciones relativistas.

(ii) El electrón está libre dentro del material absorbedor y está inicialmente en reposo durante la colisión. El movimiento de éste durante la colisión es tan pequeño que el campo eléctrico se calcula como si el electrón no se desplazara de su lugar. Esto es cierto solamente si la velocidad de la partícula es mucho mayor que las velocidades de los electrones en los átomos.

Debido a la geometría del problema la componente en x del impulso dado al electrón es cero. Por tanto

$$\int_{-\infty}^0 F_x dt = \int_0^{\infty} F_x dt \quad (1.13)$$

donde F_x es la componente en x de $F = ze^2/r^2$. La componente y del impulso dado al electrón es

$$p_y = \int_{-\infty}^{\infty} F_y dt = \int_{-\infty}^{\infty} (ze^2/r^2) \sin\theta dt \quad (1.14)$$

lo cual al hacer un sencillo cambio de variable se obtiene

$$p_y = 2ze^2/bv \quad (1.15)$$

Por tanto la energía impartida a un electrón a una distancia b es,

$$E_e = \frac{p_y^2}{2m} = \frac{2z^2e^4}{mb^2v^2} \quad (1.16)$$

Si N_A es el número de Avogadro, hay $(Z\rho N_A)/A$ electrones por unidad de volumen en el material absorbedor. Dada la simetría cilíndrica del problema, el número de electrones en una cubierta de radios b y $b + db$ y longitud dx es

$$dN = 2\Pi b db dx (Z\rho N_A/A) \quad (1.17)$$

Combinando las dos últimas ecuaciones se tiene que la energía perdida en la cubierta es

$$-dE(b) = 2\Pi b db dx \frac{Z\rho N_A}{A} \cdot \frac{2z^2 e^4}{mb^2 v^2} \quad (1.18)$$

Por tanto, la pérdida total de energía de la partícula por unidad de longitud debida a los electrones en todas las capas limitadas por el máximo y mínimo parámetros de impacto, b_{min} y b_{max} respectivamente es [6]

$$\frac{-dE}{dx} = \frac{4\pi z^2 e^4 N_A \rho Z}{mv^2 A} \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{db}{b} = \frac{4\pi z^2 e^4 N Z}{mv^2} \ln \frac{b_{max}}{b_{min}} \quad (1.19)$$

donde $\frac{\rho N_A}{A}$ es N . Por tanto si podemos calcular los valores de b_{min} y b_{max} tendremos una expresión para el poder de frenamiento S .

(i) El valor mínimo del parámetro de impacto puede ser calculado dado que la máxima velocidad que se puede impartir a un electrón en una colisión de frente es $2v$. Por tanto su energía, está dada por

$$E_e \leq \frac{1}{2} m (2v)^2 = 2mv^2 \quad (1.20)$$

Por tanto

$$b_{min} = ze^2 / mv^2 \quad (1.21)$$

(ii) El máximo valor del parámetro de impacto puede ser calculado eliminando la suposición de que el electrón está libre durante la colisión. Los electrones están esencialmente ligados, y hay por tanto una energía mínima de excitación \bar{I} . Por tanto b_{max} no es infinito y está dado por

$$\bar{I} = 2z^2 e^4 / mb_{max}^2 v^2$$

o bien

$$b_{\max} = ze^2/v(2/m\bar{I})^{1/2} \quad (1.22)$$

Una expresión tomando en cuenta la mecánica cuántica y haciendo las correcciones necesarias puede ser obtenida del siguiente modo.

Si tenemos en cuenta que $b_{\min} \simeq \hbar\sqrt{1-\beta}/m_0v$ y $b_{\max} = v/\bar{v}\sqrt{1-\beta^2}$ entonces el poder de frenamiento resulta

$$S = -\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi z^2 e^4}{m_0 v^2} NZ \left[\ln\left(\frac{2m_0 v^2}{\bar{I}}\right) - \ln\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{v^2}{c^2} \right] \quad (1.23)$$

donde m_0 es la masa en reposo del electrón. Nótese que la masa de la partícula no interviene en estas ecuaciones.

Todos los resultados anteriores son válidos para partículas como alfas, deuterones, protones, mesones, etc.

Desde el punto de vista de detección es muy importante conocer el poder de frenamiento de diversos materiales para estimar las dimensiones de detectores adecuados para una energía dada de las partículas alfa.

1.4. Detectores de barrera superficial

Introducción

Los detectores de estado sólido han jugado un papel muy importante en la detección de radiación ionizante a lo largo de mucho tiempo. El caso que ocupa nuestra atención es el de los detectores de barrera superficial que operan bajo un principio muy sencillo que se describirá a continuación [7].

La construcción y operación básica de los detectores de estado sólido se basa en una red cristalina en donde el número de electrones y vacantes positivas son iguales, esto es a lo que se le llama un material intrínseco. La radiación ionizante al penetrar en esta red produce una alteración en el estado original creando una serie de entidades llamadas pares, esto es electrones y vacantes en mismo número. En realidad las partículas ionizantes rompen las uniones del cristal debido a su interacción con los electrones de valencia que una vez libres para moverse a través de la red son colectados por un campo eléctrico, resultando una cantidad de carga que puede ser medida. Esta cantidad de carga debe ser proporcional en gran medida a la energía de la partícula incidente.

El movimiento de los electrones con campos eléctricos débiles depende de su movilidad, esto es, la velocidad del portador de carga es igual a la constante llamada movilidad multiplicada por el campo eléctrico. Este producto es diferente para los electrones y para las vacancias y el tiempo en el que existen estas dos entidades antes de ser atrapadas por la red se denomina tiempo de vida. El promedio del tiempo de vida es de entre unos cuantos nanosegundos y cientos de microsegundos y depende muy fuertemente del estado del material y de su pureza.

Dadas estas condiciones el material requerido para un detector de estado sólido debe ser uno con productos movilidad-tiempo de vida adecuados para electrones y vacancias para que puedan ser colectados en su mayoría por el campo eléctrico aplicado. También debe ser un material aislante dado que en caso de no serlo, los electrones de la red enmascararían a los electrones creados por la partícula ionizante a su paso por la red.

Los únicos materiales con estas características son el Silicio y el Germanio [8]. Pero aún estos no son los materiales ideales ya que no tienen una resistividad alta.

El silicio tiene una banda prohibida de alrededor de 1.2 volts, lo cual resulta inconveniente dado que a temperaturas ambiente el número de electrones generados térmicamente es muy alto para emplear al material como detector. Si el material aumentara su banda a por lo menos 1.4 volts, el número de electrones libres decaería drásticamente y el material podría usarse directamente. Esta condición resulta un

poco difícil de salvar. Afortunadamente existe otra manera de lograr las condiciones necesarias para reducir los electrones libres. El método consiste en lo siguiente.

Dentro de la red se introducen átomos de fósforo los cuales tienen 5 electrones en su capa más externa y el silicio sólo 4. Por tanto existe un electrón que estará muy debilmente ligado a la estructura cristalina y cualquier radiación ionizante está en condiciones de excitarlo, o sacarlo de la banda de valencia hacia la de conducción. A este material se le llama material tipo *n* y similarmente se pueden construir materiales tipo *p*, esto es dejando vacancias.

Lo importante de este proceso está en crear una unión tipo *p-n* en una red de silicio, en donde en un lado habrá exceso de electrones y en el otro exceso de vacancias y al aplicar un campo eléctrico de tal modo que los electrones y vacancias se muevan de manera tal que entre ellos exista una zona libre de portadores de carga. Esta zona se llama zona de depleción(*), la cual cumple con el hecho de conducir muy poca corriente dejando un material que es en sí un aislante.

El proceso de crecimiento de una unión *p-n* comienza en un cristal tipo *p* [9], por ejemplo, el cual se contamina uniformemente con impurezas aceptoras, lo cual se logra exponiendo un lado del cristal a vapores de este tipo de impurezas. Los perfiles de concentración denominados N_A y N_D para las impurezas aceptoras y donadoras respectivamente se muestran en la figura (1.2) y son función de la distancia y decaen a medida que se penetra en el cristal. Cerca de la superficie las impurezas donadoras exceden a las aceptoras, convirtiendo a la región de la izquierda del cristal en una región tipo *n*.

El término "depleción" se utiliza y es aceptado en la literatura ya que en nuestro lenguaje no existe una palabra que describa exactamente su significado, aunque en muchos libros se traduce ésta como "agotamiento".

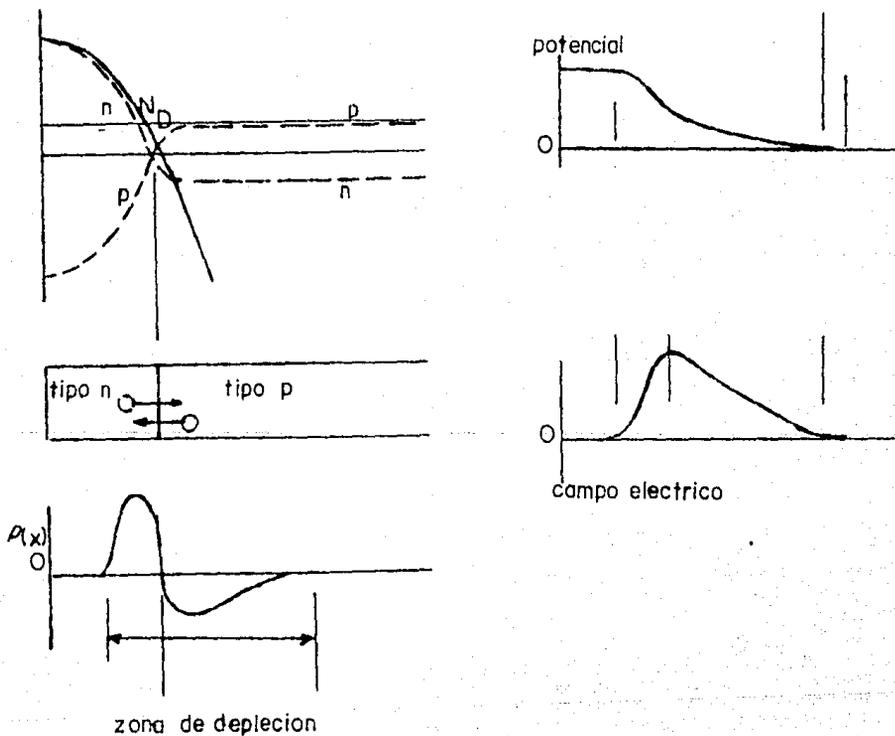


figura (1.2) Al contaminar un cristal tipo p con impurezas tipo n se obtiene una unión p-n que en si es la base de los detectores de barrera superficial. En la figura aparecen los perfiles de concentración de las impurezas en función de la distancia , así como las gráficas del potencial y el campo eléctrico generado en esta unión.

Donde existe una distribución de carga también se crea un potencial eléctrico el cual disminuye como función de la distancia debido al equilibrio que se establece en la zona en que ya no hay difusión de las cargas. El valor del potencial φ en cualquier punto puede ser encontrado utilizando la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon \quad (1.24)$$

la cual en una dimensión tiene la forma

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon} \quad (1.25)$$

Debido a que existe un potencial, también existe un campo eléctrico cuya magnitud se puede encontrar tomando el gradiente del potencial

$$\xi = -grad \ \varphi \quad (1.26)$$

que en una dimensión es simplemente

$$\xi(x) = -\frac{d\varphi}{dx} \quad (1.27)$$

Dentro de esta zona una partícula ionizante dejará en su camino un rastro de pares creados, sin tener que sufrir las consecuencias de corrientes grandes debidas a los portadores libres que antes se mencionaban.

Por conveniencia, los detectores se construyen de manera tal que la región n sea muy delgada, del orden de $0.1\mu m$, lo cual hace que la zona de depleción este muy cerca de la superficie y cualquier partícula incidente no tenga que atravesar una zona muy grande donde pudiera perder parte de su energía.

El espesor de la zona de depleción se puede calcular de la siguiente forma: A partir del perfil de concentración de cargas podemos escribir [10]

$$\rho(x) = \begin{cases} eN_D & (-a \leq x \leq 0) \\ -eN_A & (0 \leq x \leq b) \end{cases} \quad (1.28)$$

donde la región $-a < x \leq 0$ está en la parte n de la unión y $0 < x \leq b$ en la parte p .

llevando a cabo una integración y aplicando las condiciones de frontera se tiene 13

$$\frac{d\varphi}{dx} = \begin{cases} -eN \frac{\rho}{\epsilon(x+a)} & (-a \leq x \leq 0) \\ +eN \frac{\rho}{\epsilon(x-b)} & (0 \leq x \leq b) \end{cases} \quad (1.29)$$

lo cual al llevar a cabo otra integración toma la forma

$$\varphi(x) = \begin{cases} -eN \frac{\rho}{\epsilon(x+a)^2 + V} & (-a \leq x \leq 0) \\ +eN \frac{\rho}{\epsilon(x-b)^2} & (0 \leq x \leq b) \end{cases} \quad (1.30)$$

como ambas soluciones deben igualarse en $x = 0$ y dado que $N_D a = N_A b$ entonces podemos escribir

$$(a + b)b = \frac{2\epsilon V}{eN_A} \quad (1.31)$$

en donde ahora denotamos $d = a + b$ a la zona de depleción total.

Podemos simplificar un poco las cosas y escribir entonces

$$d \cong [2\epsilon V \mu \rho_d]^{1/2} \quad (1.32)$$

donde ρ_d es la resistividad del material.

El máximo voltaje en la zona de depleción puede ser calculado por

$$\xi_{max} \cong \frac{2V}{d} = \left[\frac{2VN_e}{\epsilon} \right]^{1/2} \quad (1.33)$$

y la capacitancia del detector por unidad de área es [11]

$$C = \frac{\epsilon}{d} = \left[\frac{\rho \epsilon N}{2V} \right]^{1/2} \quad (1.34)$$

lo cual determina el tipo de preamplificador a utilizar para una operación estable.

Otro parámetro importante resulta ser el tiempo de interacción, esto es, el tiempo necesario para detener una partícula en un cristal, el cual puede ser deducido de su alcance y velocidad.

$$T \cong 1.2 \times 10^{-7} R \left(\frac{m_A}{E} \right)^{1/2} \quad (1.35)$$

donde T está en segundos, R en metros, m_A en una, y E en MeV.

El conocer todas estas cantidades resulta necesario, como el conocer el poder de frenamiento de la sección anterior, para poder determinar el tipo de detector a utilizar para la medición de partículas alfa con determinada energía además de establecer las condiciones óptimas para la alimentación del detector.

El tiempo de interacción y la capacitancia del detector son parámetros muy importantes para el diseño y selección de los componentes de un preamplificador.

Capitulo 2

**No derrame el hombre el agua de su cisterna,
cuando otros la necesitan.
(Talmud, levamot:11)**

Operación general.

Como se mencionó anteriormente, la salida de un detector de barrera superficial es una producción de carga Q que es liberada por la radiación incidente. El primer elemento en el procesamiento de la señal es comúnmente un preamplificador que actúa como una interfase entre el detector y el procesamiento y análisis del pulso.

El preamplificador por lo común se coloca lo más cerca del detector [12]. Desde el punto de vista señal-ruido, es preferible minimizar la capacitancia en el detector, y evitar cables de interconexión largos entre el detector y el preamplificador. Una de las funciones del preamplificador es lograr una amplificación independiente de la capacitancia de entrada y maximizar la cantidad señal-ruido.

Sirve también como un acoplamiento de impedancias, presentando una impedancia de entrada muy alta para el detector y minimizar la carga, mientras que en la salida se tiene una impedancia baja para alimentar etapas posteriores.

Los preamplificadores pueden operar en dos modos: sensibles a la carga y sensibles al voltaje. Para los sensibles a la carga, la salida es proporcional a la integral de la carga producida siempre que la duración del pulso de entrada sea menor que la constante RC del circuito. Los cambios en la capacitancia de entrada no tendrán un efecto apreciable en la salida.

2.2. Ruido

Una de las especificaciones del preamplificador es su figura de ruido. La manera de cuantizarlo es por medio del $FWHM$ debido al ruido del preamplificador solamente. La figura de ruido depende fuertemente de la capacitancia con la que se carga la etapa de entrada del preamplificador. Esta es una combinación de la capacitancia de los cables que unen el detector y el preamplificador y la capacitancia inherente del detector, lo cual altera el tiempo de formación del pulso, incrementándolo notablemente con la consecuente alteración y pérdida de información. Por ejemplo, un preamplificador tendrá un ruido de 2 keV con una capacitancia zero en la entrada, pero éste se incrementa al doble si la capacitancia cambia a 100 pf.

2.3. Polarización del detector

16

Otra de las funciones del preamplificador es proveer un medio de alimentación del detector asociado a éste; aunque se pueden hacer arreglos para polarizar el detector independientemente del preamplificador. En la figura (2.1) se muestran estas dos situaciones.

La más práctica de las dos es obviamente la que alimenta al detector a través del preamplificador ya que con esto se elimina la necesidad de una fuente independiente que resulte en mayor volumen, y por tanto afectando a las ventajas que se pueden lograr en cuanto a facilidad de manejo de un preamplificador que alimente al detector.

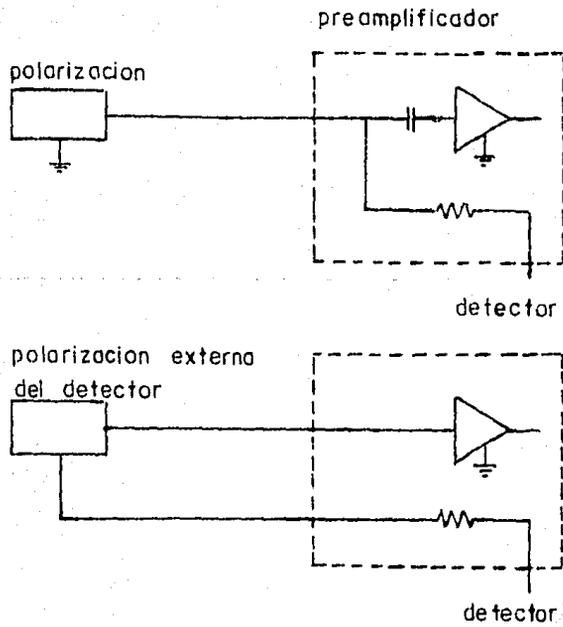


figura (2.1) La polarización del detector se puede hacer externamente o por medio del preamplificador, que es la manera más común de hacerlo.

La resistencia de carga R_L y la capacitancia de entrada determinan la constante de tiempo de colección de la carga. Para evitar ruido R_L debe ser lo mayor posible, desde el punto de vista práctico alrededor de los megaohms para evitar que cualquier señal de d.c. o corriente de fuga del detector pueda pasar a través de esta resistencia.

En los detectores de estado sólido las corrientes de fuga son un problema que debe tomarse en cuenta, y en el caso de R_L grande esto puede producir un voltaje considerable a través de esta resistencia. En este caso, el voltaje aplicado al detector es en realidad menor que el voltaje de polarización lo cual debe compensarse aumentando la polarización.

La mejor manera de evitar el ruido es el uso de transistores de efecto de campo en la etapa de entrada.

2.4. Entrada de prueba

Muchos preamplificadores tienen una entrada marcada como "test-pulse" la cual tiene como función recibir los pulsos de un generador para probar el sistema. La figura (2.2) muestra el arreglo de prueba para la configuración sensible a la carga.

Si el generador es lo suficientemente estable la salida debe ser resuelta en un solo canal de un analizador de pulsos conectado a la salida. Cualquier dispersión más allá de un canal se debe al ruido inherente a la electrónica del sistema. La entrada de prueba constituye un medio de determinar el ruido asociado a la electrónica así como una manera simple de determinar el funcionamiento del procesamiento del pulso.

En sistemas más complejos la entrada de prueba funciona durante las mediciones en un experimento para propósitos de determinación del tiempo muerto.

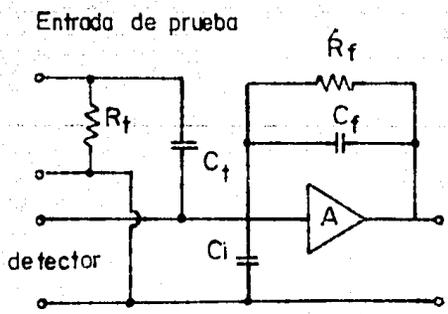


figura (2.2) La entrada de prueba se incluye en la mayoría de los preamplificadores para poder determinar su funcionamiento antes de utilizarlo en cualquier experimento y de esta manera poder evitar daños a etapas posteriores.

2.5. Preamplificador sensible a la carga

20

En espectrometría nuclear se requiere que haya una relación estable y conocida entre la energía de la radiación y la amplitud de la señal de salida.

Por ello se requiere un preamplificador que entregue una señal de salida con amplitud constante para una carga de entrada dada e independiente de la capacitancia del detector. Esto se puede realizar con buena aproximación utilizando un amplificador con retroalimentación capacitiva, con las características ya mencionadas de impedancia de entrada alta, impedancia de salida baja y ganancia de voltaje.

El arreglo del amplificador junto con las capacitancias tanto de entrada como la de retroalimentación se muestra en la figura (2.3).

De la figura se tiene que:

$$V_{sat} = -AV_{ent} \quad (2.1)$$

Pero por la asociación en paralelo de las capacitancias tenemos que la capacitancia efectiva C_e

$$C_e = C_d + (1 + A)C_f \quad (2.2)$$

además

$$V_{ent} = \frac{Q}{C_d + (1 + A)C_f} \quad (2.3)$$

así que sustituyendo en la primera ecuación

$$V_{sat} = -A \frac{Q}{C_d + (1 + A)C_f} \quad (2.4)$$

Las características necesarias para el preamplificador requieren que éste sea independiente de C_d como se mencionó, por tanto $C_f \gg C_d$ y entonces

$$V_{sal} = -A \frac{Q}{C_f A} = \frac{-Q}{C_f} \quad (2.5)$$

Este tipo de condiciones para la operación del preamplificador aseguran que las capacitancias parásitas debidas en parte a los cables de conexión entre el detector y el preamplificador no sean relevantes.

Es posible eliminar los cables de conexión entre el detector y el preamplificador si se cuenta con los conectores adecuados entre la salida del detector y la entrada del preamplificador, esto además de eliminar capacitancias evita una fuente de ruido, esto es, cualquiera de los cables usados para conexiones puede captar ruido del exterior, afectando con esto la operación del preamplificador.

Retroalimentación capacitiva

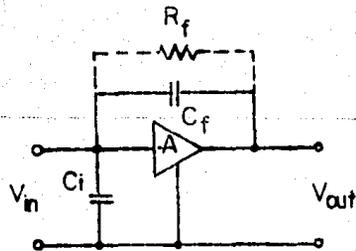


figura (2.3) La retroalimentación capacitiva en un preamplificador se utiliza para eliminar los efectos de capacitancias parásitas que aparecen debido a las conexiones entre el preamplificador y el detector.

En la etapa de entrada se encuentra un capacitor de 100 pf el cual tiene la función de evitar que el voltaje de polarización aplicado al detector pudiera transmitirse a etapas posteriores, esto es eliminar la componente de c.c. debido a la polarización y sólo permitir el paso de la señal producida por el detector.

La reactancia capacitiva del condensador actúa como circuito abierto para la componente de c.c. y como circuito cerrado para la señal de a.c.

Inmediatamente después del capacitor se encuentra un transistor de efecto de campo (FET). Las características de impedancia de entrada alta, así como el bajo nivel de ruido que se presenta en este tipo de transistores, lo hacen ideal para la recepción de la señal, debido a sus características de frecuencia y magnitud.

El transistor utilizado es un 2N3823 con una figura de ruido (para la configuración de fuente común) de 2.5 dB para una frecuencia de 100 MHz y voltajes $V_{DS} = 15V$, $V_{GS} = 0$

Para la caracterización de este circuito es conveniente establecer ciertos parámetros como son: voltajes de operación en la región lineal, transconductancia, impedancias de entrada y de salida, ganancia de voltaje.

Voltaje de corte. El voltaje de corte de compuerta a fuente V_{GS} o V_p es el voltaje por encima del cual la corriente de drenaje se mantiene prácticamente constante en un intervalo entre el corte y la ruptura [13]. Este voltaje también es llamado voltaje de estrangulación, debido a que al aumentar su valor, el canal por el cual circula la corriente a través de la fuente y el drenaje, se hace más estrecho, limitando con esto la corriente.

La corriente de drenaje a fuente con la compuerta en cortocircuito ($V_{GS} = 0$) o I_{DSS} el cual se especifica en la hoja de datos del transistor, es el valor característico de esta corriente en la región activa del transistor, esto es, entre la estrangulación y la ruptura (V_p, V_{DS}) respectivamente.

Transconductancia. La transconductancia se define como

$$g_m = \frac{\Delta I_D}{\Delta V_{GS}} \quad (2.6)$$

para $V_{DS} = \text{constante}$.

24

Este parámetro corresponde a la variación de la corriente de drenaje dividida por la correspondiente variación del voltaje de la compuerta [14].

El valor de la transconductancia se puede calcular de acuerdo a la relación

$$g_m = |Y_{FS}| \left[\frac{1 - V_{GS}}{V_{GS(off)}} \right] \quad (2.7)$$

para distintos valores de V_{GS} y donde $|Y_{FS}| = g_{m0}$ que es el valor de la transconductancia cuando $V_{GS} = 0$.

Con este parámetro podemos calcular los límites en los cuales se encuentra el voltaje de estrangulación de acuerdo a la relación

$$V_{GS(off)} = \frac{2I_{DSS}}{g_{m0}} \quad (2.8)$$

La resolución que se logra obtener con detectores de estado sólido puede ser severamente limitada por la contribución del ruido del preamplificador asociado, como ya se había mencionado, por lo que éste debe ser diseñado con componentes de muy bajo ruido en la etapa de entrada. En el presente diseño la etapa de entrada consta de una configuración de fuente común con una bobina de 0.5 Henry como carga. El FET de esta etapa fué seleccionado por su baja capacitancia ($\approx 2.5pf$) entre compuerta y fuente y su alta transconductancia $g_m \approx 5ma/v$

La región lineal estará situada entre

25

$$V_{GS1} = 2.28V \text{ y } V_{GS2} = 6.15V$$

se indican aquí valores mínimo y máximo debido a que estos corresponden a la variación que puede haber de transistor a transistor sin ir más allá de estos valores (fig 2.1).

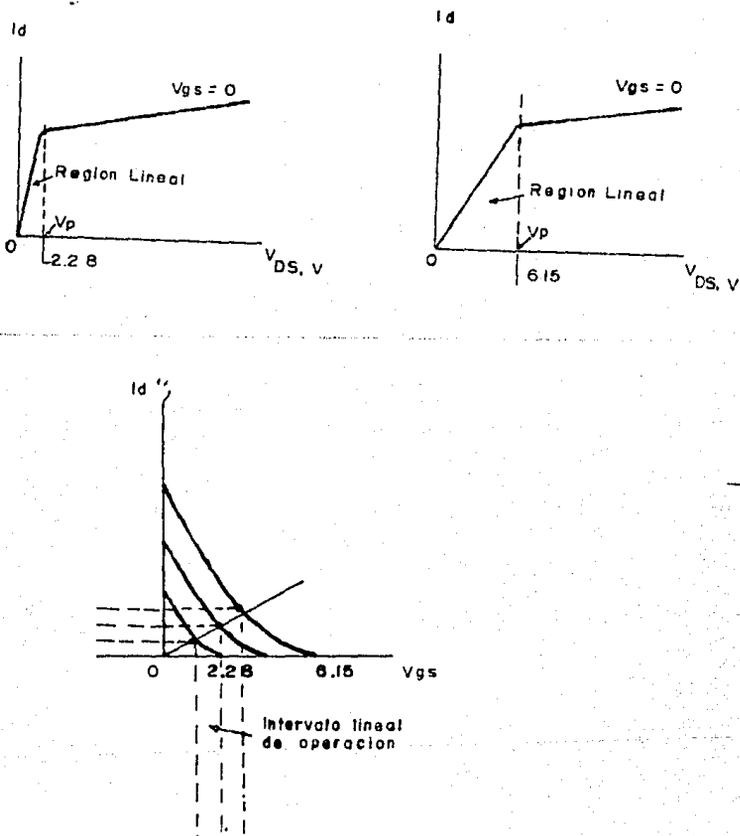


fig (2.4).(a) Voltajes de operación del FET en la región lineal. (b) Intervalo de operación lineal.

Configuración. La configuración utilizada para esta etapa se muestra en la figura así mismo como su circuito equivalente [15].

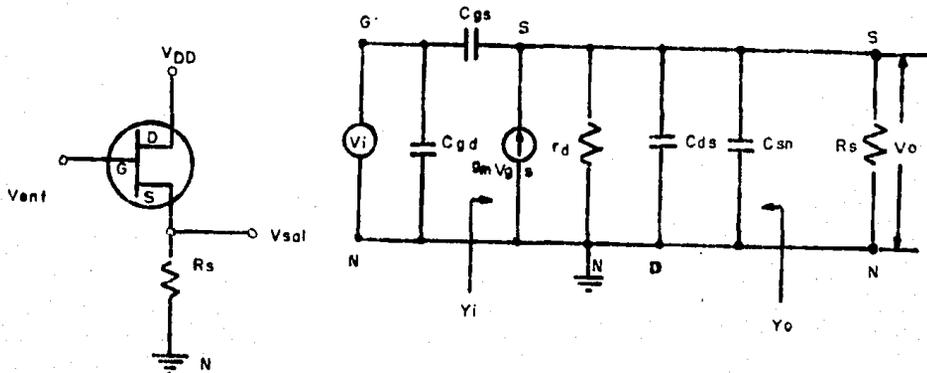


fig (2.5). Configuración para la etapa de entrada del preamplificador así como su circuito equivalente.

Aplicando KVL [16] podemos encontrar los parámetros faltantes.

Ganancia de voltaje. El voltaje de salida V_o es el producto de la corriente en corto circuito y la impedancia entre S y N. Por tanto la ganancia es

$$A_V = \frac{(g_m + j\omega C_{gs})R_s}{1 + (g_m + g_d + j\omega C_T)R_s} \quad (2.9)$$

donde $g_d = 1/r_d$ o conductancia correspondiente a r_d y $C_T = C_{gs} + C_{ds} + C_{sn}$ con C_{sn} capacitancia de la fuente a tierra, C_{gs} capacitancia de compuerta a tierra, C_{ds} capacitancia de drenaje a tierra y ω frecuencia de la señal.

Impedancia de entrada. La impedancia de entrada Y_i es

$$Y_i = j\omega C_{gd} = j\omega C_{gs}(1 - A_V) \approx j\omega C_{gd} \quad (2.10)$$

dado que $A_V \approx 1$

Impedancia de salida. Si consideramos R_S fuera del circuito, tenemos que 27

$$Y_o = g_m + g_d + j\omega C_T \quad (2.11)$$

lo cual en bajas frecuencias se reduce a

$$R_o = \frac{1}{g_m + g_d} \approx \frac{1}{g_m} \quad (2.12)$$

en vista de que $g_m \gg g_d$ [17].

La configuración de la etapa anterior trabaja para el propósito de este circuito como una resistencia variable controlada por el voltaje V_{GS} [18], el cual se obtiene a partir de los pulsos generados por el detector, aumentando o disminuyendo el canal por el cual circula la corriente proporcionalmente a la amplitud de los pulsos recibidos.

Esto se refleja de manera inmediata en la corriente que circula por la resistencia R_1 (fig 2.6) y esto a su vez en el voltaje aplicado. Al variar este voltaje, (punto M) aplicado al siguiente transistor a través de la compuerta tenemos una configuración que actúa como divisor de voltaje. El voltaje de 10V debido al regulador zener, conjuntamente con el voltaje en la resistencia R_1 hacen esta configuración.

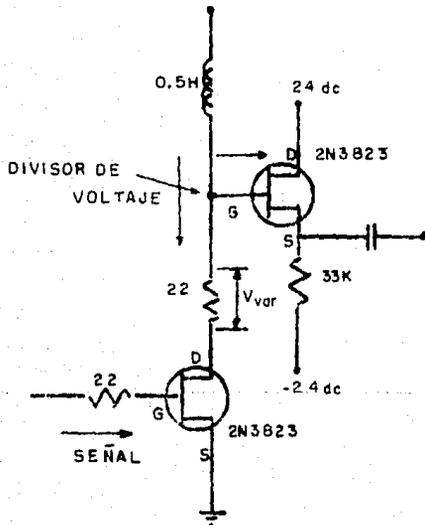


fig (2.6) Circuito de entrada que actúa como divisor de voltaje al recibir la señal del detector. Se muestra aquí el flujo de las corrientes.

Amplificador Base-Común. Esta configuración se utiliza para unir una fuente con una impedancia baja a una carga con un alta impedancia, o como un amplificador de voltaje no inversor.

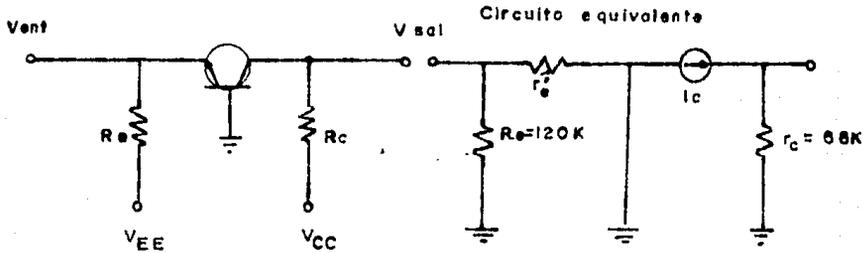


fig (2.7) Configuración de Base-Común y circuito equivalente.

De la figura tenemos que la fuente V_{EE} polariza en sentido directo al diodo del emisor y la fuente V_{CC} en forma inversa al diodo del colector. De esta figura vemos que

$$i_E = \frac{V_{EE} - V_{BE}}{R_E} \quad (2.13)$$

El voltaje colector-tierra es igual al voltaje V_{CC} menos la caída en el resistor del colector.

$$V_C = V_{CC} - I_C R_C \quad (2.14)$$

del circuito equivalente tenemos que

$$V_{sal} = i_C r_c \quad (2.15)$$

y el voltaje de entrada

$$V_{ent} = i_e r_{e'} \quad (2.16)$$

en donde $r_{e'}$ es la resistencia interna del emisor.

Ganacia de voltaje. La ganacia de voltaje [19] es

$$A_V = \frac{V_{sal}}{V_{ent}} = \frac{i_c r_c}{i_e r_{e'}} \quad (2.17)$$

Impedancia de entrada. Debido a la configuración en paralelo [20] tenemos

$$Z_{ent} = r_{e'} || R_E \quad (2.18)$$

$$Z_{ent} = \frac{h_{ie}}{1 + h_{fe}} \quad (2.19)$$

Ganancia de corriente. La ganancia de corriente en esta configuración

$$A_i = -h_{fb} = \frac{h_{fe}}{1 + h_{fe}} \quad (2.20)$$

en donde h_{fe} es el parámetro mejor conocido como β en cualquier transistor y que corresponde a la cantidad i_C/i_B que es la corriente del colector entre la corriente de la base.

En los sistemas en los cuales la alimentación está limitada, la salida se hace a través de la configuración Push-Pull. Para ello los circuitos clase B o en oposición de fase son los convenientes y sus características se describen a continuación.

En los circuitos clase B, el transistor permanece en la región activa sólo durante la mitad del ciclo; por lo que en la otra mitad está en corte, lo cual significa que la corriente del colector fluye sólo 180° por el transistor.

En la figura (2.8) se muestra la recta de carga de c.a. de un circuito amplificador en oposición de fase (un solo transistor). El punto Q se encuentra en el corte, para la aproximación ideal, con $I_{CQ} = 0, V_{CEQ} = V_{CE(corte)}$

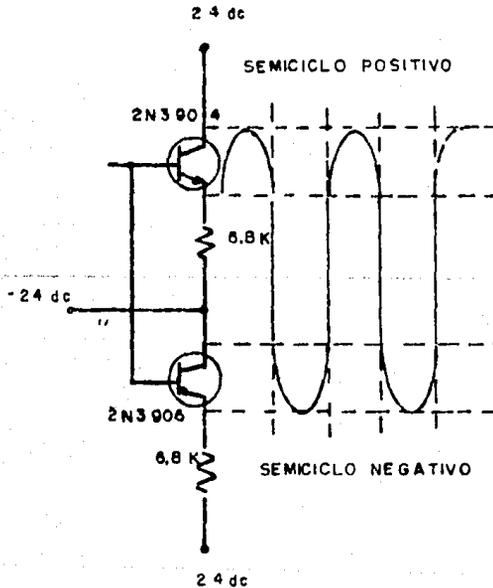


fig (2.8) En la etapa de salida se requiere de la configuración Push-Pull, cada uno de los transistores se encarga de transmitir los semiciclos positivo y negativo de la señal.

Cuando la señal de c.a. entra al amplificador, el punto de operación se desplaza hasta la saturación lo cual produce semiciclos de corriente y voltaje. Si contamos con 2 transistores de modo que uno trabaje con semiciclos positivos y otro con semiciclos negativos [20] se obtiene una salida al final que es una onda seno completa.

La corriente de saturación para este tipo tiene la expresión.

$$I_{C(sat)} = I_{CQ} + \frac{V_{CEQ}}{r_c + r_E} \tag{2.21}$$

la cual se utilizará en calculos de disipación de potencia [21], potencia entregada a la carga y consumo de corriente sin señal.

Otras configuraciones en lugar del seguidor de emisor se pueden utilizar para obtener amplificadores en oposición de fase como son 2 amplificadores EC o 2 transformadores en lugar de 2 transistores complementarios [22]. Es importante la complementariedad de los transistores [23], esto es, los voltajes y corrientes que maneja cada uno de ellos deben ser iguales y opuestos a los del otro, en este caso el 2N3904 y 2N3906 son los ideales.

característica V-I amplificador Push-pull

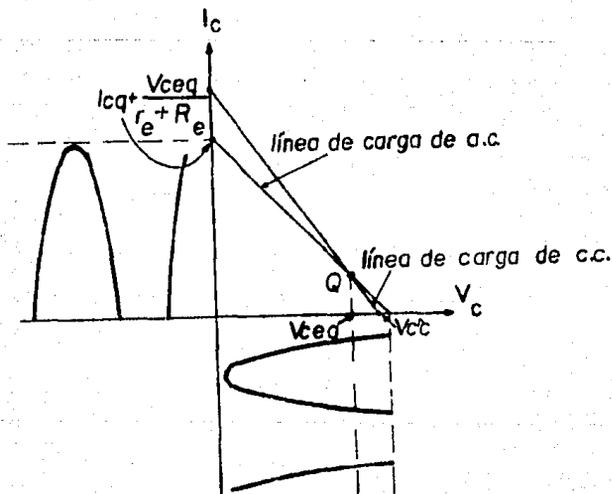


fig (2.9) Cada transistor de la configuración Push-Pull se encarga de transmitir un semiciclo de la señal.

Potencia de salida. Este parámetro se deduce de la figura (2.8). La corriente más grande y el mayor voltaje que puede alcanzar la señal son V_{CEQ} e $I_{c(sat)}$ respectivamente. Por tanto la máxima potencia de salida de c.a. es

$$P_{o(max)} = V_{RMS} I_{RMS} = \frac{V_{CEQ}}{\sqrt{2}} \frac{I_{sat}}{\sqrt{2}} \quad (2.22)$$

$$P_{o(max)} = \frac{V_{CEQ} I_{c(sat)}}{2} \quad (2.23)$$

Disipación de potencia. En ausencia de señal, los transistores del circuito disipan una potencia despreciable ya que casi no circula corriente a través de ellos [24]. En cambio, cuando existe señal circulan fuertes corrientes que provocan disipación. La disipación en el caso extremo es

$$P_{D(max)} = \frac{V_{CEQ} I_{c(sat)}}{10} \quad (2.24)$$

$$P_{D(max)} = \frac{P_{o(max)}}{5} \quad (2.25)$$

Ventajas de la configuración. La configuración en oposición de fase requiere para su funcionamiento óptimo una simetría, en cuanto a la señal se refiere, en espejo o de media onda [25] [26], además de la simetría con respecto al cero. Matemáticamente se puede expresar en función de las corrientes como

$$i(\omega t) = -i(\omega t + \Pi) \quad (2.26)$$

esto es, consideremos una señal de entrada (corriente de base) de la forma $i_{b1} = I_{bm} \cos \omega t$ aplicada a uno de los transistores del arreglo. La corriente de salida de este transistor será

$$i_1 = I_C + B_0 + B_1 \cos \omega t + B_2 \cos 2\omega t + B_3 \cos 3\omega t + \dots \quad (2.27)$$

y la correspondiente señal de entrada al otro transistor es

$$i_{b2} = -i_{b1} = I_{bm} \cos(\omega t + \Pi) \quad (2.28)$$

Por tanto la salida en éste es de la forma

$$i_2(\omega t) = i_1(\omega t + \Pi) \quad (2.29)$$

que corresponde a la condición mencionada.

Otra ventaja que se deriva de los cálculos anteriores es el hecho de que la configuración Push-Pull elimina gran parte de la distorsión que pudiera presentarse en la señal [28].

Es decir, en referencia al párrafo anterior

$$i_2 = I_C + B_0 + B_1 \cos(\omega t + \Pi) + B_2 \cos 2(\omega t + \Pi) + \dots \quad (2.30)$$

que es

$$i_2 = I_C + B_0 - B_1 \cos \omega t + B_2 \cos 2\omega t - B_3 \cos 3\omega t + \dots \quad (2.31)$$

Luego la corriente total en la salida de ambos transistores es la diferencia de estas

$$i = k(i_1 - i_2) = 2k(B_1 \cos \omega t + B_3 \cos 3\omega t + \dots) \quad (2.33)$$

lo cual muestra que el circuito elimina los armónicos pares en la salida y el 3er armónico es la principal fuente de distorsión.

Otro hecho de importancia es el que este circuito balancea los voltajes de rizo que pudieran estar presentes en la polarización de los transistores debido a un filtrado deficiente o variaciones de la polarización. Esta cancelación resulta del hecho de que las corrientes producidas por los voltajes de rizo están en direcciones opuestas y por tanto no aparecerán.

A manera de resumen se muestra el seguimiento de la señal en esta configuración por medio de las gráficas siguientes.

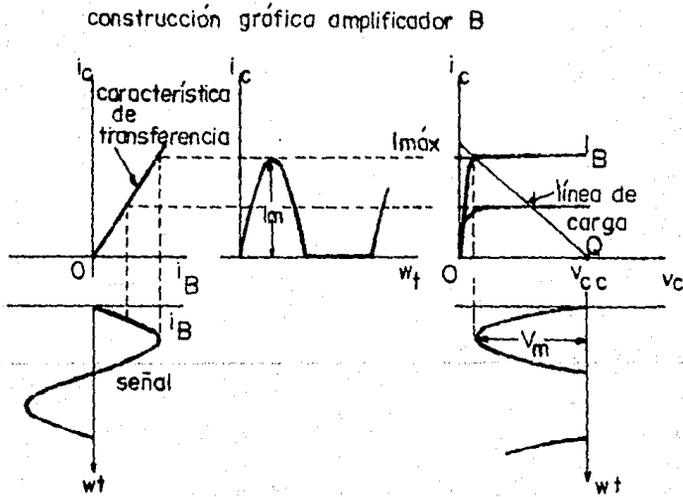


fig (2.10) Seguimiento de la señal desde la entrada de un amplificador tipo B hasta la salida de éste.

Regulador por diodo zener. Utilizando la propiedad de los diodos zener conocida como "ruptura zener", tenemos el circuito regulador de voltaje.

La fuente de voltaje V y la resistencia R se eligen de tal manera que el diodo opere en la región de ruptura [29]. El voltaje en el diodo, que también es el voltaje en la resistencia de carga R_L , es V_Z y la corriente a través del diodo es I_Z . El diodo regula el voltaje de carga contra variaciones en la corriente de carga y contra variaciones en el voltaje V , dado que en la región de ruptura, cambios grandes en la corriente de diodo producen sólo cambios pequeños en el voltaje de éste.

Más aún cuando la corriente de carga o el voltaje de la fuente varía, la corriente en el diodo se adecua a estos cambios para mantener un voltaje de carga constante. Esta acción reguladora se mantiene hasta que el circuito hace que la corriente en el diodo caiga hasta su valor I_{ZK} , en la cercanía del codo en la curva $V - I$.

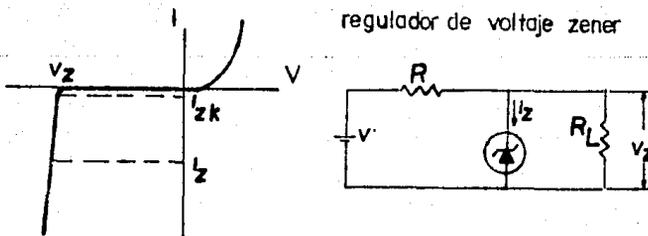


fig (2.11) Circuito regulador de voltaje por medio de un diodo zener. En la figura se muestra también las corriente y voltajes involucrados en su operación.

Con el fin de evitar que la alimentación del detector se vea afectada por los posibles transitorios que la fuente de voltaje pudiera transmitir a éste se construyen una serie de filtros pasabajas que atenúan en gran medida estas alteraciones.

Estos transitorios alteran significativamente la operación del detector modificando la zona de depleción y por tanto variando la colección de la carga, de manera que esta zona presenta alteraciones en su ancho de acuerdo a la ecuación (2.28)

$$w = \sqrt{\frac{k(V_o + V)}{2\pi e N_A}} \quad (2.34)$$

donde N_A es la concentración de contaminantes aceptores, V_o y V son los voltajes sin polarización y de polarización del detector y k es la constante dieléctrica que en el caso del silicio es 12.

La configuración RC hace que en la primera etapa se tenga una atenuación de 20 dB por década y como se tienen dos de estas configuraciones en el circuito se tiene que la atenuación total es de 400 dB por decada. Esto se muestra en el diagrama de Bode de la figura (2.12).

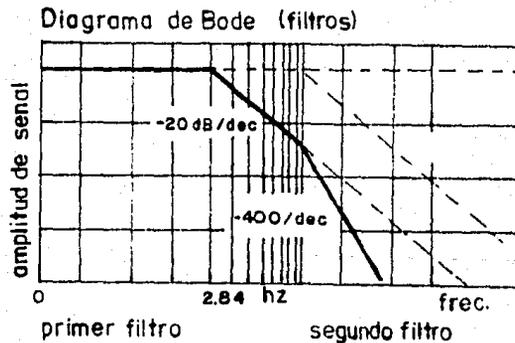


fig (2.12) Diagrama de Bode que muestra la atenuación que sufren los transitorios que suministra una fuente de voltaje.

Capitulo 3

**Nadie es pobre.
salvo el carente de conocimientos.
(Talmud, Nedarim:51)**

A finales del siglo pasado Ernest Rutherford comenzó sus investigaciones acerca del modelo del átomo ideando una serie de experimentos que le permitieran descubrir la estructura de éste. Estos experimentos los basó en el hecho de que la mejor manera de conocer un sistema es interactuando con él, así que provocando colisiones de partículas alfa en películas de oro, logró acumular una serie de evidencias que le brindaban pistas en su búsqueda, al analizar los rastros que éstas dejaban en pantallas sensibles que colocaba detrás de las películas [30].

Este experimento que ahora nos parece tan sencillo es la base de una poderosa técnica de análisis de muestras que en su nombre se conoce por sus siglas en inglés como RBS (Rutherford Backscattering) y en español, Retrodispersión de Iones. Las aplicaciones de esta técnica son bastas, desde el estudio de materiales semiconductores hasta metales, por ejemplo.[31]

Las ventajas de RBS como técnica de análisis residen en su rapidez, la posibilidad de distinguir distribuciones de los átomos bajo la superficie de la muestra, y la naturaleza cuantitativa de los resultados [32]. Más aún, con cristales sencillos como blancos, el efecto de canalización permite la descripción de estructura cristalina.

La rapidez de colección de los datos provenientes de la muestra es debida en parte a los bajos requerimientos en cuanto a vacío se refiere por parte de esta técnica, debido a que en ella se mide el volumen total de la muestra, esto es, su espesor y no sólo su superficie. Dado que resoluciones de 100 a 200 Å son características en el estudio de las primeras capas de una muestra, vacíos de 10^{-9} o 10^{-10} Torr, requeridos para estudios de estos espesores, son innecesarios para RBS.

La gran sensibilidad para elementos pesados es una de las ventajas para la detección de estos elementos, pero una severa limitación para la detección de elementos ligeros. Elementos que están presentes en la mayor parte de la superficie de las muestras como el carbón, nitrógeno y oxígeno son ejemplo de esta limitación. Esta desventaja es a veces allanada al estudiar películas delgadas, depositando la película en un sustrato de masa atómica baja como el carbón. Esta aproximación permite la identificación de señales provenientes de contaminantes como el oxígeno. Después de un evento de dispersión, todas las partículas retrodispersadas son iguales, excepto por su energía. Dos elementos de masas iguales no pueden ser distinguidos cuando aparecen juntos. Este problema se puede resolver utilizando otras técnicas, como la espectroscopía de electrones Auger. Para poder aplicar correctamente la técnica de RBS es necesario conocer los estrictos requerimientos, en cuanto a la uniformidad lateral que debe presentar la

muestra. El diámetro típico de un haz de iones para retrodispersión de Rutherford es de alrededor de 1mm^2 . Si la profundidad analizada es de 2000Å , el ancho del haz es 5×10^3 veces el espesor de la muestra. Hendiduras, cavidades, partículas de polvo y cualquier tipo de deformaciones en la superficie de la muestra puede modificar seriamente los espectros obtenidos. Por tanto la uniformidad lateral de la muestra debe ser asegurada en la superficie tanto como dentro de ella.

El método más conveniente para asegurar esta uniformidad es la técnica conocida como SEM (por sus siglas en inglés), esto es, Scanning Electron Microscopy, que tiene una excelente resolución lateral y por tanto constituye la técnica complementaria de RBS. Desafortunadamente SEM sólo proporciona información de la superficie, sin mirar hacia adentro.

Otra limitación de RBS es el hecho de no distinguir información de moléculas. La difracción de rayos-X, provee la determinación de parámetros cristalográficos. Usualmente, la combinación de RBS y la difracción de rayos-X dan resultados complementarios del la naturaleza del compuesto.

La espectroscopía de electrones Auger (AES) y la espectroscopía de masas de iones secundarios (SIMS) son dos técnicas que complementan RBS. Sin embargo, su principal desventaja esta en el hecho de causar erosión iónica, lo cual altera la muestra bajo estudio y puede llevar a conclusiones erróneas. Las consecuencias pueden ser particularmente severas en AES, donde la señal emana de las capas superiores del área erosionada. AES, sin embargo, puede ser cuantificada comparando con ejemplos de referencia. En SIMS, la cuantificación puede ser un poco más difícil, dado que la fracción de los átomos ionizados provenientes de la erosión de la muestra depende de la composición química de los alrededores de esos átomos en la muestra. En cuanto a sensibilidad, SIMS sobrepasa cualquier otra técnica.

Una de las ventajas de RBS es el obtener de ella distribuciones en profundidad sin destruir la muestra al remover las capas como en los casos de AES y SIMS. De cualquier manera, RBS puede producir un pequeño daño. RBS puede considerarse o no como un método destructivo dependiendo del objeto analizado y de lo que trate de obtenerse. Por ejemplo, una unión pn puede destruirse rápidamente con pequeñas dosis de radiación si uno mira hacia la corriente inversa, pero permanece esencialmente inalterada si se considera la contaminación del perfil. Las estructuras de los metales son insensibles a las dosis de radiación utilizadas en RBS.

Sólo de la combinación de diversas técnicas pueden obtenerse muchas conclusiones. Sin embargo, RBS ocupa un lugar especial dentro de estas herramientas. Por su rapidez, es ideal para procedimientos de rutina.

3.1. Interpretación de espectros.

Una de las ventajas de la espectrometría RBS es la facilidad de interpretación de los espectros obtenidos con ella [33]. Consideremos una película delgada compuesta de una mezcla uniforme de dos elementos. Para reducir el problema a su forma mínima no consideraremos el sustrato. En espectrometría RBS, como se verá después, las masas de los dos elementos y su número atómico son muy importantes. Caracterizaremos los dos elementos por sus masas M y m , en vez de sus símbolos químicos. Supongamos que los dos elementos están presentes en la muestra en la misma proporción, esto es, las concentraciones atómicas de ambos son las mismas. Esta situación se presenta en la figura (3.1).

Los perfiles de concentración contra profundidad tienen su correspondiente en el espectro RBS de la figura (3.1)(c).

1. El perfil rectangular del elemento pesado (M) reaparece en el espectro RBS como una señal rectangular localizada en el eje de energía a energías altas; mientras que el perfil del elemento ligero (m) tiene su lugar en el espectro RBS a bajas energías.
2. El eje vertical registra concentraciones de los elementos. Si el número atómico del elemento es alto, entonces, se tiene un perfil alto, mayor número de cuentas; si el número atómico es bajo se tiene un perfil bajo, menos cuentas.

La ventaja de un espectro RBS reside en el hecho de que las características descritas pueden formularse en forma cuantitativa. Para el eje x la relación es el factor cinemático K , que establece, exactamente la señal de un elemento de cualquier masa en su margen de alta energía. Los márgenes de alta energía se indican por la longitud de las flechas etiquetadas $K_m E_0$. En forma similar, la sección eficaz de dispersión σ , da el factor de escalamiento para diferentes elementos.

El espectro RBS de varios elementos es una superposición lineal de ellos. Cuando el perfil de concentración varía con la profundidad, la altura de la señal varía proporcionalmente. Esto es, un espectro RBS constituye realmente una imagen de la distribución en profundidad de los elementos en la muestra.

En el ejemplo de la siguiente figura se tiene una muestra gruesa, las señales de las masas M y m se extenderán hasta la energía cero y por tanto tendrá la apariencia mostrada en la figura (3.2) (c).

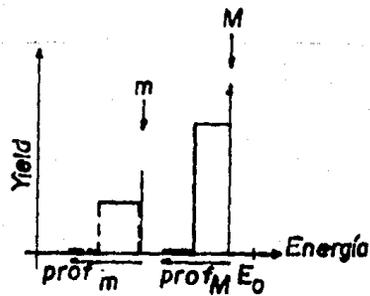
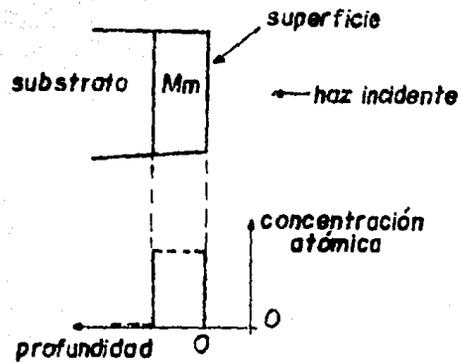


fig (3.1) (a). Interpretación de perfiles de concentración en un espectro RBS. (b). La concentración de los elementos es la misma. (c). En el espectro RBS, los dos perfiles aparecen como dos señales separadas.

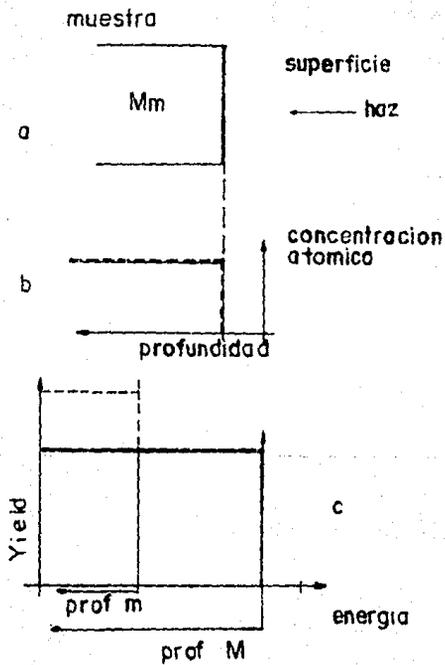


fig (3.2) (a). Las señales de una película delgada se extienden hasta la energía cero. (b). Un espectro real no decae en línea recta debido al ruido. (c). Construcción del espectro de una muestra gruesa.

En espectrometría RBS los conceptos que la describen son los siguientes:

1. La transferencia de energía del proyectil al blanco en una colisión elástica de dos cuerpos. Esto conduce al concepto del *Factor cinemático* y por tanto a la capacidad de distinguir masas.
2. Probabilidad de ocurrencia de una colisión. Esto conduce al concepto de *sección eficaz de ionización* y a la capacidad de análisis cuantitativo de la composición atómica.
3. Energía perdida promedio de un átomo moviéndose en el medio. Este proceso conduce al concepto de *sección eficaz de frenamiento* y a la capacidad de percepción en profundidad.
4. Variaciones estadísticas en la pérdida de energía de un átomo al moverse en el medio. Este proceso conduce al concepto de *dispersión en energía* y a la limitación de distinción en masa y profundidad.

3.3. Sección eficaz de dispersión.

En el capítulo 1 se estableció la conexión entre la energía de la partícula incidente y la energía que esta posee a un ángulo θ después de la colisión. Qué tan frecuentemente ocurren estas colisiones en un evento de dispersión en este ángulo aún no está claro [34].

La sección diferencial de dispersión $d\sigma/d\Omega$ es el concepto que resuelve esta incógnita. Su definición se deriva de un simple experimento conceptual. Un delgado haz de partículas incide sobre un blanco uniforme más ancho que el haz. A un ángulo θ de la dirección de incidencia, se encuentra un detector ideal que cuenta las partículas dispersadas en un ángulo sólido $d\Omega$ (fig 3.3). Si Q es el número total de partículas que alcanzan el blanco y dQ es el número de partículas registradas por el detector, entonces la *sección eficaz diferencial de dispersión* $d\sigma/d\Omega$ se define como

$$d\sigma/d\Omega = (1/Nt)((dQ/d\Omega)/Q). \quad (3.1)$$

donde N es la densidad volumétrica de átomos en el blanco y t es el espesor. Así, Nt es el número de átomos alcanzados por el haz por unidad de área. Esta definición implica que el ángulo sólido $d\Omega$ es tan pequeño que el ángulo de dispersión θ está bien definido [35]. También se supone que el espesor es mínimo y por tanto la pérdida de energía de las partículas en el blanco es tan pequeña que la energía de las partículas es casi la misma a cualquier profundidad en el blanco. Finalmente, el número total de partículas incidentes Q debe ser grande para que el cociente dQ/Q esté bien definido.

La sección diferencial de dispersión tiene unidades de área y su significado está basado en una interpretación geométrica de la probabilidad que la dispersión resulte registrada en el detector. Uno se imagina que cada núcleo de un átomo presenta un área $d\sigma/d\Omega$ al haz de partículas incidentes. También se supone que esta área es tan pequeña que los átomos dentro del blanco están distribuidos en forma aleatoria de tal manera que sus secciones diferenciales no se traslapan. El multiplicar por $(d\Omega)^{-1}$ es debido a que el duplicar el ángulo sólido $d\Omega$ obviamente duplica el número de cuentas dQ . Al dividir por $d\Omega$ esta contribución geométrica al número de cuentas se elimina. De esta manera, la sección eficaz definida así es un valor por unidad de ángulo sólido. De aquí el nombre de sección eficaz diferencial.

Cuando nos preguntamos acerca del número de eventos dispersados en un ángulo sólido Ω en lugar de $d\Omega$, la probabilidad de estos está descrita por la *sección integral de dispersión* Σ

$$\Sigma = \int_{\Omega} (d\sigma/d\Omega) d\Omega \quad (3.2)$$

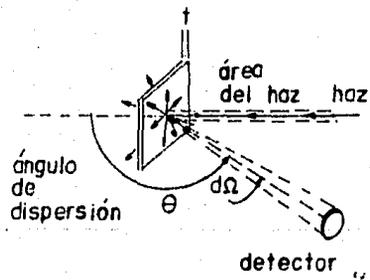


fig (3.3) Esquema simplificado de un experimento de dispersión para aclarar el concepto de sección diferencial de dispersión. Sólo las partículas dispersadas dentro del ángulo sólido $d\Omega$ son contadas por el detector.

En un detector de barrera superficial, como el utilizado para este trabajo y a la distancia del experimento que posteriormente se explica, el ángulo sólido Ω es de alrededor de 10^{-2} sr [36] y por tanto el ángulo de dispersión está bien definido. Es conveniente introducir una *sección eficaz diferencial de dispersión promedio*, esto es,

$$\sigma \equiv (1/\Omega) \int_{\Omega} (d\sigma/d\Omega) d\Omega \quad (3.3)$$

que para ángulos muy pequeños del detector $\Omega, \sigma \rightarrow d\sigma/d\Omega$.

Para el dispositivo experimental de la figura (3.4), en el cual un haz uniforme colide a incidencia normal con un blanco uniforme que es mayor que el área del haz, el número total de partículas detectadas A se puede escribir de la forma:

$$A = \sigma \Omega \cdot Q \cdot Nt \quad (3.4)$$

Esta ecuación muestra que cuando se conocen σ y Ω y el número de partículas detectadas es conocido, el número de átomos por unidad de área en el blanco, Nt , puede conocerse. [37]

Para calcular la sección eficaz diferencial para una colisión elástica, los principios de conservación de la energía y el momento se deben aplicar a un modelo en el cual la fuerza que actúa durante la colisión está bien aproximada por la repulsión Coulombiana de los dos núcleos [38], es decir, del incidente y del blanco. Suponiendo que la distancia entre los núcleos es mucho menor que la distancia de mayor acercamiento, esto es, el ya mencionado parámetro de impacto, se tiene

$$(d\sigma/d\Omega)_c = \left[\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E_c \sin^2(\theta_c/2)} \right]^2 \quad (3.5)$$

donde el subíndice c indica que los valores están dados de acuerdo al sistema en el centro de masas. Z_1 es el número atómico del proyectil con masa M_1 , e es la carga del electrón y E es la energía del proyectil inmediatamente antes de la dispersión. Esta ecuación es válida sólo cuando $M_1 \ll M_2$. Para el caso general, la transformación de esta ecuación del centro de masas al marco de referencia del laboratorio da

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta} \frac{\{1 - ((M_1/M_2) \sin \theta)^2\}^{1/2} + \cos \theta\}^2}{\{1 - ((M_1/M_2) \sin \theta)^2\}^{1/2}} \quad (3.6)$$

lo cual en detalle puede consultarse en el apéndice A.

47

De esta ecuación puede observarse claramente que la sección eficaz de Rutherford depende del cociente M_1/M_2 si no tomamos en cuenta $(Z_1 Z_2 e^2 / 4E)^2$ y del ángulo de dispersión θ . La ecuación muestra que cerca de 180° , la sección de dispersión no cambia mucho. Este hecho nos permite usar el ángulo que el detector presenta y aún obtener una buena aproximación.

De los hechos anteriores podemos concluir lo siguiente:

1. $d\sigma/d\Omega$ es proporcional a Z_1^2 .
2. $d\sigma/d\Omega$ es proporcional a Z_2^2 . Para cualquier proyectil, átomos pesados son mejores para la dispersión que los ligeros. Por tanto, la espectrometría RBS es más sensible a elementos pesados que para ligeros.
3. $d\sigma/d\Omega$ es inversamente proporcional al cuadrado de la energía del proyectil. El número de partículas dispersadas aumenta rápidamente al disminuir la energía del haz incidente.
4. $d\sigma/d\Omega$ es aproximadamente inversamente proporcional a $\sin^4(\theta/2)$ cuando $M_1 \ll M_2$. Esta dependencia da aumentos rápidos de partículas dispersadas cuando se reduce al ángulo θ .

Para energías suficientemente altas, la distancia de mayor acercamiento entre el proyectil y el blanco llega a tener dimensiones comparables con las distancias nucleares. Las fuerzas de corto alcance empiezan a tener influencia en la dispersión y llegan a ocurrir desviaciones de la sección de dispersión de Rutherford.

El poder de frenamiento dE/dx es una expresión de la pérdida de energía de una partícula al pasar por la nube de electrones de los átomos que encuentra en su camino [39]. Este parámetro puede interpretarse como un promedio de todos los posibles procesos disipativos que sufre el proyectil al pasar por el blanco. Podemos interpretar dE/dx como el resultado de contribuciones independientes de cada átomo expuesto al haz incidente. Este número es $SN\Delta x$ si Δx es el espesor del blanco, S el área cubierta por el haz, y N la densidad atómica en el blanco. La proyección de todos estos átomos en el área S produce una densidad superficial $SN\Delta x/S = N\Delta x$. Esta cantidad aumenta linealmente con Δx , así como la pérdida de energía $\Delta E = (dE/dx)\Delta x$. Escribiendo ΔE proporcional a $N\Delta x$ definimos el factor de proporcionalidad como

$$\varepsilon \equiv (1/N)(dE/dx) \quad (3.7)$$

las unidades para esta cantidad son electrón volts · por centímetro cuadrado por átomo, abreviado $eV cm^2$.

La diferencia entre dE/dx y ε es más evidente cuando uno considera dos blancos con el mismo número de átomos por unidad de área, pero uno más grueso que el otro para que la densidad se conserve igual en ambos. La energía ΔE transferida a uno de los blancos es la misma en ambos casos. Un valor más grande de dE/dx se asignará al blanco más denso, ya que la energía ΔE se pierde en la distancia más corta Δx . Pero $\Delta E/N\Delta x$ tiene el mismo valor en ambos casos, esto es, $N\Delta x = const$.

Otra definición que se utiliza en la literatura es

$$\varepsilon^* \equiv (1/\rho)(dE/dx) \quad (3.8)$$

donde ρ es la densidad de masa (gramos por centímetro cúbico) del blanco y ε^* está dado usualmente en unidades de kiloelectrón volts · centímetro cuadrado por gramo. Las dos cantidades ε y ε^* pueden ser convertidas una en la otra por medio de la relación

$$\rho = N(M/N_o), \quad (3.9)$$

de donde $\varepsilon^* = \varepsilon N_o/M$. Aquí M es el peso atómico (gramos por mol) del elemento y $N_o = 6.025 \times 10^{23}$ átomos/mol (número de Avogadro).

Como ya se había visto, una partícula al cruzar un medio pierde energía por medio de choques con los átomos del medio. Este proceso está sujeto a fluctuaciones estadísticas [40].

Podemos calcular las contribuciones a esta dispersión de la energía con la ayuda del mismo modelo utilizado en el capítulo 1 para describir el proceso de pérdida de energía. Según este modelo, el número de encuentros que generan pérdida de energía es $Z_2 \Delta x \cdot 2\pi b db$ y el número de encuentros fluctuará estadísticamente alrededor de este intervalo. Si suponemos que el número de encuentros tiene una distribución de Poisson, la desviación normal de este valor será $[d\Delta n(E_\perp)]^{1/2}$ donde E_\perp es la componente perpendicular de la energía del proyectil. Por tanto, desviaciones de estos números alrededor de su valor promedio causarán cambios en la cantidad ΔE . Llamemos a las desviaciones de la energía $d\delta\Delta E$ y de aquí que se tenga la relación

$$d < (\delta\Delta E)^2 > = E_\perp^2 N Z_2 \Delta x 2\pi b db \quad (3.10)$$

Otros encuentros con diferentes parámetros de impacto producirán fluctuaciones similares. Dado que estas son independientes unas de otras, se suman y la variación total será

$$< (\delta\Delta E)^2 > = N Z_2 \Delta x 2\pi \int_{b_{max}}^{b_{min}} E_\perp^2 db \quad (3.11)$$

Para un parámetro de impacto b , la energía perdida tiene el valor $E_\perp = (2/m_e)(Z_1 e^2/bv_1)^2$ y por tanto la integral

$$< (\delta\Delta E)^2 > = N Z_2 \Delta x 2\pi \frac{(Z_1 e^2)^2}{m_e v_1^2} (E_{max} - E_{min}) \quad (3.12)$$

donde E_{max} y E_{min} son las pérdidas de energía correspondientes a los valores máximo y mínimo del parámetro de impacto. La máxima transferencia de energía en una colisión entre un ion de masa M_1 y un electrón de masa $m_e \ll M_1$ es $2m_e v_1^2$, así que si $E_{min} \ll E_{max}$, entonces

$$\langle (\delta \Delta E)^2 \rangle = N Z_2 4\pi (Z_1 e^2)^2 \Delta x \tag{3.13}$$

a esta cantidad, derivada por Bohr en 1915, le llamamos *valor Ω_B^2 Bohr de straggling*. Para una muestra de espesor t , este valor tiene una varianza

$$\Omega_B^2 = 4\pi (Z_1 e^2)^2 N Z_2 t \tag{3.14}$$

en donde si escribimos

$$s^2 = 4\pi (Z_1 e^2)^2 N Z_2$$

entonces tenemos

$$\Omega_B^2 = s^2 t \tag{3.16}$$

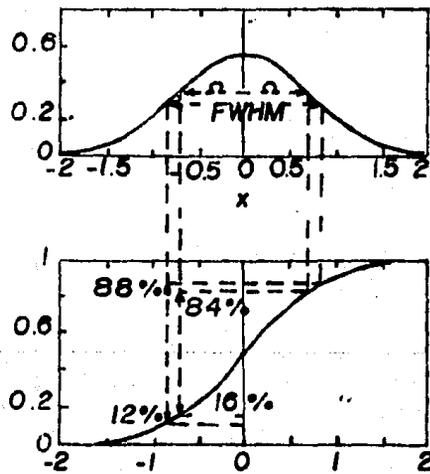
La teoría de Bohr predice el hecho de que el *straggling* no depende de la energía del proyectil [41], así como el hecho de que la distribución es una gaussiana. Esto es una consecuencia de que el número de colisiones es grande y sigue el comportamiento de una distribución de Poisson.

Para los propósitos de espectrometría RBS, la distribución gaussiana describe el *straggling* satisfactoriamente. El espectro RBS frecuentemente muestra la integral de la distribución de Gauss, la función de error

$$erf(x) = (2\pi \Omega^2)^{-1/2} \int_{-\infty}^x exp[-(x^2/2\Omega^2)] dx \tag{3.17}$$

en lugar de la distribución gaussiana $(2\pi \Omega^2)^{-1/2} exp[-(x^2/2\Omega^2)]$

Esta relación se muestra claramente en la figura (3.5).



(fig 3.5) Gráfica de la distribución Gaussiana con $\Omega = 1/\sqrt{2}$ y la correspondiente función de error.

Como puede observarse, el ancho a la mitad del máximo (FWHM) de una distribución gaussiana corresponde al intervalo entre el 12 y el 88 por ciento de la función de error [42], y los puntos de la desviación normal corresponden al 16 y 84 por ciento. El ancho a la mitad del máximo es más ancho que la desviación normal por un factor de $2(2\ln 2)^{1/2} = 2.355$.

3.6. Método de análisis

El método RBS relaciona la energía E_1 de la partícula a una profundidad x a la cual ocurre la dispersión en una muestra monoisotópica. En la figura (3.6) la energía incidente de las partículas es E_o , e inmediatamente antes de la dispersión es E , después abandona la muestra con una energía E_1 . Para esto suponemos que la partícula incidente, la partícula resultante y la normal de la superficie de la muestra están contenidas en el mismo plano, así que el ángulo de dispersión en el sistema de referencia del laboratorio está dado por $\theta = 180^\circ - \theta_1 - \theta_2$ donde θ_1 y θ_2 son los ángulos entre la normal a la muestra y la dirección del haz incidente y dispersado respectivamente. Ambos ángulos están definidos como positivos aunque estén dispuestos a ambos lados de la normal. Podemos relacionar la energía E con la longitud $x/\cos\theta_1$ de la partícula incidente por medio de

$$x/\cos\theta_1 = - \int_{E_o}^E dE/(dE/dx) \quad (3.18)$$

y el signo negativo es debido a que $E < E_o$ y dE/dx se toma positivo. De igual manera, la trayectoria de salida de la partícula dispersada

$$x/\cos\theta_2 = - \int_{KE}^{E_1} dE/(dE/dx) \quad (3.19)$$

Una interpretación gráfica de estas dos ecuaciones se da en la figura (3.7) La primera parte muestra dE/dx como función de la energía en la línea delgada. La línea gruesa da los valores de dE/dx para la trayectoria de E_o a E de entrada, y para la de salida KE a E_1 . La diferencia $E_o - E$ es la pérdida de energía a través de la trayectoria de entrada ΔE_{in} , de igual manera, $KE - E_1$ es la pérdida de energía a través de la trayectoria de salida ΔE_{out} . De acuerdo a las ecuaciones anteriores debemos integrar el recíproco del poder de frenamiento, lo cual se muestra en la segunda gráfica de la figura y las cuales dan la longitud de las trayectorias de entrada y salida por medio de la parte sombreada.

trayectorias de incidencia y
dispersion

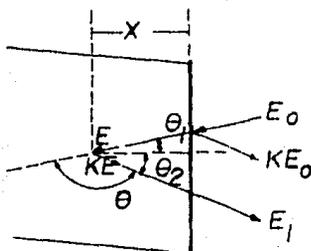


figura (3.6) Símbolos utilizados en la descripción de un espectro RBS consistente en una muestra monoisotópica. Los ángulos θ_1 y θ_2 son positivos [43].

Por medio de estas ecuaciones podemos encontrar el valor x en términos de E_o y E_1 , ya que la cantidad E que corresponde a esta profundidad es totalmente inaccesible experimentalmente. Un método para conocer esta cantidad es el integrar numéricamente las ecuaciones anteriores usando valores tabulados de dE/dx y otra el suponer un valor funcional para dE/dx ; pero en este caso supondremos que dE/dx tiene un valor constante a través de cada trayectoria, lo cual se desarrolla a continuación.

3.7. Factor de pérdida de energía de retrodispersión y

Factor de sección de frenamiento

Una vez hecha la suposición de que dE/dx es constante a través de las trayectorias de entrada y salida, las integrales de las ecuaciones usadas anteriormente se reducen a

$$E = E_o - \frac{x}{\cos\theta_1} \frac{dE}{dx} \Big|_{in} \tag{3.20}$$

y

$$E_1 = KE - \frac{x}{\cos\theta_2} \frac{dE}{dx} \Big|_{out} \tag{3.21}$$

eliminando E de estas dos ecuaciones, tenemos

$$KE_o - E_1 = \left[\frac{K}{\cos\theta_1} \frac{dE}{dx} \Big|_{in} + \frac{1}{\cos\theta_2} \frac{dE}{dx} \Big|_{out} \right] x \tag{3.22}$$

donde KE_o es el margen del espectro RBS que corresponde a la energía de las partículas dispersadas en la superficie de la muestra. La energía E_1 es el valor de la partícula dispersada por un átomo a la profundidad x . Reescribiendo se tiene

$$\Delta E = KE_o - E_1 \tag{3.23}$$

por tanto, se puede escribir

$$\Delta E = [S]x \quad (3.24)$$

donde

$$[S] = \left[\frac{K}{\cos\theta_1} \frac{dE}{dx} \Big|_{in} + \frac{1}{\cos\theta_2} \frac{dE}{dx} \Big|_{out} \right] \quad (3.25)$$

al cual se denomina *factor de pérdida de energía* o *factor S*. Una secuencia equivalente de ecuaciones puede obtenerse en términos de la sección de frenamiento en lugar de dE/dx

$$\Delta E = [\varepsilon]Nx \quad (3.26)$$

donde

$$[\varepsilon] = \left[\frac{K}{\cos\theta_1} \varepsilon_{in} + \frac{1}{\cos\theta_2} \varepsilon_{out} \right] \quad (3.27)$$

y que se denomina *factor de sección de frenamiento* o *factor ε* .

Las condiciones antes establecidas para estos factores, es decir, el que dE/dx sea constante o ε también lo sea, llevan a la aproximación ideal de un espectro RBS, con lo cual sólo se obtienen resultados aproximados en la práctica. Una manera de mejorar los resultados es utilizando cierto tipo de aproximaciones de energía cerca de la superficie, que se describen a continuación.

3.8. Aproximación superficial

Para regiones cerca de la superficie, el espesor x es pequeño y el cambio relativo de energía a través de la superficie también lo es. Por tanto, $(dE/dx)_{out}$ se toma en KE_0 , que son las líneas punteadas de las figuras. En esta aproximación de la energía en la superficie

$$[S_0] = \left[\frac{K}{\cos\theta_1} \frac{dE}{dx} \Big|_{E_0} + \frac{1}{\cos\theta_2} \frac{dE}{dx} \Big|_{KE_0} \right] \quad (3.28)$$

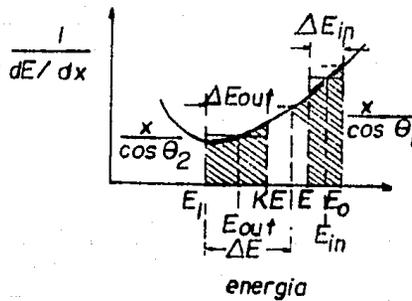
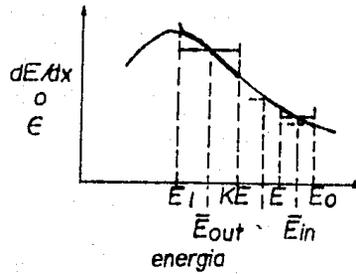


figura (3.7) Gráficas que muestran los valores de dE/dx en E_0 y KE_0 , así como los valores reales durante las trayectorias de entrada y salida. Se muestran también los valores de diferencias de energía para la misma situación.

$$[\varepsilon] = \left[\frac{K}{\cos\theta_1} \varepsilon(E_o) + \frac{1}{\cos\theta_2} \varepsilon(KE_o) \right] \quad (3.29)$$

en donde las secciones de frenamiento $\varepsilon(E_o)$ y $\varepsilon(KE_o)$ se evalúan en las energías E_o y KE_o , respectivamente. Esta aproximación es frecuentemente indicada por medio de los símbolos $[S_o]$ y $[\varepsilon_o]$.

3.9. Aproximación de energía media

Cuando la trayectoria recorrida se vuelve apreciable, la expresión anterior ya no puede utilizarse. Una mejor aproximación puede usarse, esto es, escoger un valor constante de dE/dx o ε a una energía \bar{E} intermedia a aquella que tiene la partícula en los puntos finales de cada trayectoria.

Se definen estas cantidades como

$$[\bar{S}] \equiv \left[\frac{K}{\cos\theta_1} \frac{dE}{dx} \Big|_{E_{in}} + \frac{1}{\cos\theta_2} \frac{dE}{dx} \Big|_{E_{out}} \right] \quad (3.30)$$

$$[\bar{\varepsilon}] \equiv \left[\frac{K}{\cos\theta_1} \varepsilon(\bar{E}_{in}) + \frac{1}{\cos\theta_2} \varepsilon(\bar{E}_{out}) \right] \quad (3.31)$$

En la aproximación de energía media, se supone que

$$\bar{E}_{in} = \frac{1}{2}(E + E_o) \quad (3.32)$$

y

$$\bar{E}_{out} = \frac{1}{2}(E_1 + KE) \quad (3.33)$$

de lo anteriormente dicho E es un valor desconocido, pero puede calcularse de varias maneras.

Para aproximaciones rápidas se puede suponer que la diferencia de energía

$\Delta E = KE_o - E_1$ es conocida y que esta se subdivide simétricamente entre la trayectoria incidente y la de salida, así que aproximadamente se tiene que $E = E_o - \frac{1}{2}\Delta E$. Los valores de \bar{E}_{in} y \bar{E}_{out} están dados por

$$\bar{E} \simeq E_o - \frac{1}{4}\Delta E \quad (3.34)$$

y

$$\bar{E} \simeq E_1 + \frac{1}{4}\Delta E \quad (3.35)$$

las cuales tienen la ventaja de su sencillez y son muy buenas aproximaciones cuando $K \simeq 1$ y $\theta_1 = \theta_2$.

3.10. Altura de un pulso

De acuerdo a las secciones anteriores, el eje de la energía de un espectro RBS y la profundidad están relacionados por una cierta función $\Delta E = [S]x$. Cada ancho de energía ξ de un canal i en el analizador multicanal es una gráfica de lo ocurrido en una capa de la muestra de ancho τ_i en cuanto al número de eventos de dispersión registrados en el canal i . El número de cuentas H_i en el canal i está determinado por dos factores: el espesor τ_i de la capa de la muestra y el número de centros de dispersión (átomos) en la capa. El problema es relacionar el número de cuentas H_i con el número de centros de dispersión por unidad de área $N\tau_i$ en la capa de espesor τ_i a la profundidad x_i que corresponde al ancho de energía ξ y la posición $E_{1,i}$ del canal i en el espectro de energía, como lo muestra la figura (3.8).

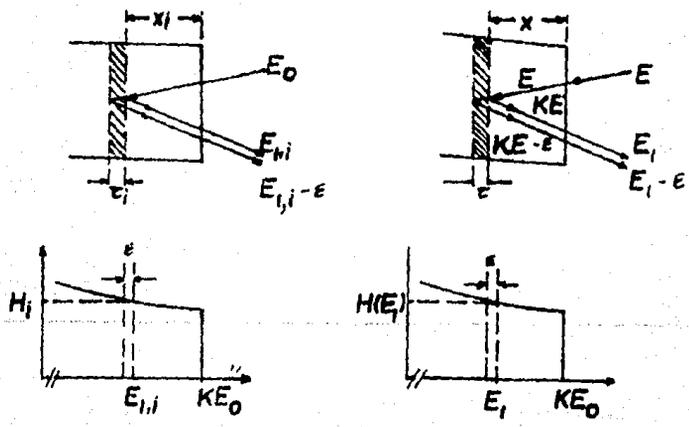


fig (3.8). Esquema que muestra la relación entre las capas de una muestra y su análisis en un multicanal.

A partir de la ecuación $A = \sigma \cdot \Omega \cdot Nt$ para incidencia normal el número de partículas detectadas en el canal i es $H_i = \sigma(E_i)\Omega Q N \tau_i$; donde $\sigma(E_i)$ es la sección diferencial evaluada a la energía E_i y promediada sobre el ángulo sólido Ω visto por el detector. Q es el número de partículas incidentes en la muestra, y N es la densidad atómica del elemento de la muestra. Para otros ángulos de incidencia $\theta_1 > 0$ la trayectoria del haz a través de la capa i tiene una longitud $\tau_i / \cos\theta_1$. El número de átomos por unidad de área visto por el haz cambia a $1/\cos\theta_1$, así que para el caso general tenemos

$$H_i = \sigma(E_i)\Omega Q N \tau_i / \cos\theta_1 \quad (3.36)$$

A partir de esta ecuación podemos hacer algunas aproximaciones a ciertas condiciones.

Para el caso en que la dispersión tenga lugar en la superficie de la muestra el análisis se simplifica dado que la energía antes de la dispersión puede tomarse como E_0 y es entonces conocida. La notación para este caso es H_0 y τ_0 en lugar de H_i y τ_i . Para este caso tenemos

$$H = \sigma(E_0)\Omega Q N \tau_0 / \cos\theta_1 \equiv H_0 \quad (3.37)$$

El espesor τ_0 está definido por el ancho de energía ξ del canal [44]. Las partículas dispersadas por los átomos dentro de τ_0 tendrán energías entre KE_0 y $KE_0 - \xi$. De las ecuaciones de aproximación para $[\varepsilon]$ y $\Delta E = [\varepsilon]Nx$ tenemos

$$E = [\varepsilon_0]N\tau_0 \quad (3.38)$$

la correspondiente ecuación en términos del factor de pérdida de energía es $\xi = [S_0]\tau_0$. Substituyendo la ecuación anterior para eliminar $N\tau_0$ tenemos

$$H_0 = \sigma(E_0)\Omega Q \xi / [\varepsilon_0] \cos\theta_1 \quad (3.39)$$

esta ecuación establece que la altura del espectro de energía en un espectro RBS es directamente proporcional a

1. Q , el número total de partículas incidentes en la muestra.
2. $\sigma(E_0)$, la sección diferencial promedio entre el proyectil y la muestra a la energía E_0
3. Ω , el ángulo sólido visto por el detector.

4. ξ , el ancho del canal, que está determinado por la electrónica del sistema de detección.

Otra aproximación útil es el calcular el espesor en términos de la energía inmediatamente después de la dispersión. Definimos para ello

$$\xi = [\varepsilon(E)]Ni(3.40)$$

el factor de sección de frenamiento $[\varepsilon(E)]$ que aparece aquí está definido por

$$[\varepsilon(E)] = \frac{k}{\cos\theta_1} \varepsilon(E) + \frac{1}{\cos\theta_2} \varepsilon(KE) \quad (3.41)$$

y también existe el correspondiente factor de pérdida de energía

$$[S(E)] \equiv \left. \frac{k}{\cos\theta_1} \frac{dE}{dx} \right|_e + \left. \frac{1}{\cos\theta_2} \frac{dE}{dx} \right|_{KE} \quad (3.42)$$

Con estas cantidades definidas, expresando τ en términos de ξ' , la altura $H(E_1)$ del espectro se tiene

$$H(E_1) = \sigma(E)\Omega Q(\xi'/[\varepsilon(E)]\cos\theta_1) \quad (3.43)$$

la relación entre ξ y ξ' está dada por

$$\frac{\xi'}{\xi} = 1 + \frac{nx}{\cos\theta_2} \varepsilon l(\bar{E}_{out}) \quad (3.44)$$

y de esta manera se tiene que

$$H(E_1) = \sigma(E)\Omega Q \frac{\xi}{[\varepsilon(E_i)]\cos\theta_1} \frac{\varepsilon(KE)}{\varepsilon(E_1)} \quad (3.45)$$

3.11. Número de cuentas en una señal.

62

Una cantidad que se obtiene de un espectro RBS de una película delgada es el número total de cuentas

$$A \equiv \sum_i H_i \quad (3.46)$$

sumado sobre todos los canales i de la señal. Si H_i se expresa en términos de $E_{1,i}$ esta suma se vuelve difícil de manejar. Así que al usar la ecuación $H_i = \sigma(E_i)\Omega Q N \tau_i / \cos\theta_1$ que utiliza la sección de dispersión a la energía E_i y el número de átomos por unidad de área en la i -ésima capa, el número de cuentas es entonces

$$A = \sum_i \sigma(E_i)\Omega Q N \tau_i / \cos\theta_1 \quad (3.47)$$

usando valores continuos para las cantidades representadas en ella se tiene

$$A = (\Omega Q N / \cos\theta_1) \int_0^t \sigma(E) dx \quad (3.48)$$

de la cual si se utiliza la aproximación en la superficie de la muestra se tiene

$$A_0 = \sigma(E_0)\Omega Q N t / \cos\theta_1 \quad (3.49)$$

o

$$N t = [A_0 / \sigma(E_0)\Omega Q] \cos\theta_1 \quad (3.50)$$

lo cual es válido por tanto al suponer $E \approx E_0$.

En un caso más general y recordando algunas de las cantidades se tiene que:

$$A = \sigma(E_0)\Omega Q N (t / \cos\theta_1) \{1 - [N t \epsilon(\bar{E}_{in}) / E_0]\}^{-1} \quad (3.51)$$

3.12. Influencia del sistema de detección en el espectro de una película delgada

Resulta conveniente representar formalmente todas las fluctuaciones provenientes de una fuente que está sujeta a un proceso estadístico y cuya distribución en energía está representada por una Gaussiana y cuya desviación estandar se define por $\bar{\Omega}_r$. De hecho, $\bar{\Omega}_r$ puede ser el resultado de causas independientes. Cómo se combinan debe ser investigado en cada caso. El sistema de detección influye de una manera especial en la fluctuación total. Por ejemplo, supóngase que se tiene un haz incidente que tiene un perfil de energías y una desviación normal $\bar{\Omega}_{det}$. Si la dispersión en energía (straggling) a través de la trayectoria de incidencia tiene una varianza $\bar{\Omega}_{in}^2$ a una cierta profundidad x , la varianza total en la energía de la partícula a esa profundidad es $\bar{\Omega}_{haz}^2 + \bar{\Omega}_{in}^2$. Después de la dispersión, la varianza se reduce a $K(\bar{\Omega}_{haz}^2 + \bar{\Omega}_{in}^2)$. A través de la trayectoria de salida, la dispersión de energía se suma la contribución $\bar{\Omega}_{out}^2$ a la varianza, y después de la detección aumenta por $\bar{\Omega}_{det}^2$. La varianza total es

$$\bar{\Omega}_{s+r}^2 = K^2(\bar{\Omega}_{haz}^2 + \bar{\Omega}_{in}^2) + \bar{\Omega}_{out}^2 + \bar{\Omega}_{det}^2 \quad (3.52)$$

o bien

$$\bar{\Omega}_{s+r}^2 = (K^2\bar{\Omega}_{in}^2 + \bar{\Omega}_{out}^2) + (K^2\bar{\Omega}_{haz}^2 + \bar{\Omega}_{det}^2) \quad (3.53)$$

El primer término es la contribución del straggling. Este término aumenta al aumentar la profundidad a la cual ocurre la dispersión [45]. El segundo término es independiente de esta cantidad y representa la resolución del sistema.

$$\bar{\Omega}_r^2 = K^2\bar{\Omega}_{haz}^2 + \bar{\Omega}_{det}^2 \quad (3.54)$$

$$\bar{\Omega}_{s+r}^2 = \bar{\Omega}_s^2 + \bar{\Omega}_r^2 \quad (3.55)$$

de lo cual se puede ver que aún en la ausencia de straggling, el sistema de detección causa una desviación. Esto es más fácil de observar en el margen de alta energía de un espectro RBS. Las partículas dispersadas por la superficie de un blanco no producen straggling, dado que no penetran en la muestra, así que toda la desviación que pueda producirse será debido al sistema de detección y el cual se puede medir utilizando las mismas relaciones para determinar la influencia debida al straggling, es decir, utilizando el (FWHM) de una distribución gaussiana.

La resolución en profundidad es un factor importante en la aplicación de espectrometría RBS para el análisis de materiales. Esta se refiere a la sensibilidad a detectar cambios de composición a medida que cambia la profundidad. Así como la escala en energía de las partículas detectadas, se traduce en escala de profundidad a través de $[\varepsilon]$ o $[S]$, la resolución en el ancho de energía más baja δE puede traducirse en el más pequeño intervalo de profundidad δt . Siguiendo la convención adoptada anteriormente, se define la resolución en profundidad δx por el ancho de energía δE_1 entre el 12 y el 88 por ciento del total de cuentas de una señal que corresponde a un cambio brusco en el espectro.

De la relación

$$\delta x = \delta E_1 [\bar{S}], \quad (3.56)$$

la resolución en energía δE_1 se determina normalmente por dos contribuciones, una proveniente de la resolución del sistema y a la cual se encamina este trabajo δE_r y la otra de la dispersión o straggling δE_s . En una aproximación Gaussiana, se tiene una suma cuadrática:

$$(\delta E_1)^2 = (\delta E_r)^2 + (\delta E_s)^2 \quad (3.57)$$

La influencia de la resolución del sistema, como ya se había mencionado, puede observarse en el margen de alta energía de un espectro RBS, en tanto que en el margen de baja energía, además de este efecto, se tiene el de la dispersión, como lo indica la figura (3.9).

De ésta vemos que las derivadas de los márgenes de la señal provenientes de la muestra que está dibujada en la parte superior de la figura corresponden al ancho total a la mitad del máximo, 12 y 88 por ciento de la señal. La energía δE_1 del margen de alta energía da la resolución en profundidad δx en la superficie. El ancho δE_1 del margen de baja energía proporciona información a la profundidad x en la muestra. Utilizando valores de $[\bar{S}]$ podemos determinar la resolución en la superficie para diversas muestras.

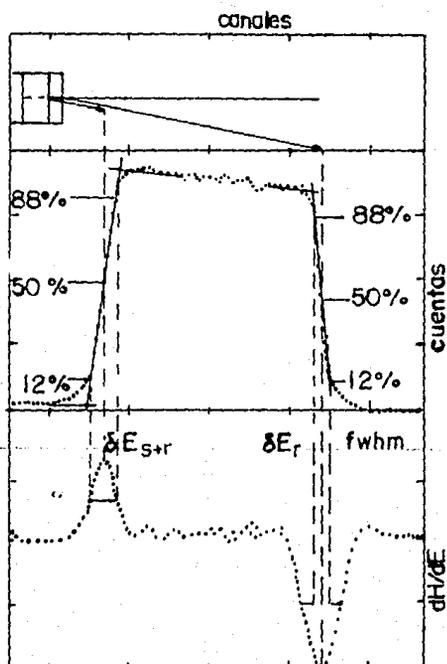


fig (3.9). El margen derecho de un espectro en RBS determina la resolución del sistema de detección en una energía en particular.

Capitulo 4

La luz es la sombra de Dios.
Einstein 1879-1955.

4.1. Resolución

Para determinar la resolución del preamplificador al aplicar RBS y así poder hacer una comparación con un modelo comercial se realizó la medición del espesor de una muestra de cobre. La comparación fue con un modelo ORTEC 109, propiedad del laboratorio del acelerador Van de Graaff de 0.7 Mev de la U.N.A.M.

Las energías del haz incidente fueron de 600, 650 y 700 keV para ambos preamplificadores, el ángulo de dispersión de 160° con el detector a 15 cm de la muestra con un tiempo de formación del pulso de $1\mu\text{seg}$ con pulsos positivos.

Una vez obtenido el espectro se calcula el valor del factor cinemático de dispersión K para las partículas incidentes (a las energías mencionadas), sobre la muestra de cobre. Este factor se multiplica por cada una de las energías de incidencia, obteniéndose así el valor KE_0 que corresponde al punto donde se encuentran el 50 por ciento de las cuentas del margen derecho del espectro, es decir, el canal donde se encuentra el centro del ancho a la mitad del máximo (FWHM). Luego se trazan los puntos en una gráfica de canales contra energía (KE_0), obteniéndose de ésta por medio de un ajuste lineal una pendiente con unidades de keV/canal.

Por último para comparar los resultados de los 2 preamplificadores figura (4.1), se multiplica la pendiente de cada una de las dos gráficas (se repiten los cálculos para el otro preamplificador), por el FWHM de cada una de las energías de incidencia, obteniendo así el número de keV de resolución a una energía en particular y lo cual se enlista a continuación.

4.2. Equipo utilizado

57

Para determinar la resolución del preamplificador se usaron los siguientes dispositivos:

El detector de barrera superficial es el modelo BA-013-025-100 con un área sensible de 1 cm^2 y una resolución de 13 keV para alfas de 5.486 MeV en el FWHM a una temperatura de operación de 21°C .

Un amplificador ORTEC en el cual se fijó un tiempo de formación de pulso de $1 \mu\text{seg}$ por medio de pulsos positivos y una ganancia de 150 y 200 para el preamplificador ORTEC 109 y el desarrollado respectivamente.

Una fuente de voltaje ORTEC para polarización del detector. Por medio de la fuente, además de polarizar el detector se tiene una lectura de la corriente de fuga superficial en el detector ($0.05 \mu\text{amperes}$).

Una cámara para vacío en la cual se montó el detector, la fuente triple y en una de sus paredes los dos preamplificadores.

Una tarjeta multicanal ORTEC acoplada a una computadora en la cual se analizaron los resultados de los espectros.

4.3. Montaje de los dispositivos

Los dispositivos anteriores se montaron de la siguiente forma: La fuente triple se colocó en una base dentro de la cámara de vacío, el detector también dentro de la cámara a una altura tal que la superficie donde se encuentra el radiosótomo que emite las alfas estuviera a la misma altura que la superficie sensible del detector a una distancia de 3 cm de esta superficie y utilizando un colimador de 1mm de diámetro colocado frente al detector.

Para conectar el detector al preamplificador se utilizó un cable RG-58 C/U de polietileno de 0.50 cm de diámetro, con una impedancia de 50 ohms y una capacitancia de 100.1 pf/m con una atenuación de 0.174 dB a 100 Mhz. La longitud del cable es de 10 cm, por lo cual la capacitancia total es de 10.01 pf, que es muy pequeña y que puede despreciarse gracias a la retroalimentación capacitiva del preamplificador explicada en el capítulo 2.

La fuente de voltaje alimenta al detector por medio del preamplificador. Los voltajes de alimentación fueron de 35 y 50 V para el detector al usar los dos preamplificadores, el

desarrollado y ORTEC respectivamente. Por medio de esta fuente también se alimentó al preamplificador con voltajes de 24, -24 y 12 volts.

Una vez montados los dispositivos, se tomaron tiempos de conteo similares para los dos preamplificadores al usar la fuente triple. La duración de éstos de 5 horas. Para los experimentos de RBS la duración fue de aproximadamente 5 minutos para cada preamplificador.

4.4. Selección del detector

Para determinar las características óptimas para el análisis de alfas se tienen que tomar en cuenta cantidades tales como el alcance, poder de frenamiento, tiempo de interacción, distancia sensible y voltaje de polarización, las cuales se analizan en el capítulo 1 y que a continuación fijamos sus valores.

En cuanto al alcance se tiene que para medir la energía de las alfas al atravesar por el detector es necesario conocer esta cantidad con precisión, para que de esta manera al pasar por el detector las partículas entreguen toda su energía dentro de él y no solamente una parte. Esto es, si la distancia en la cual la partícula interacciona con el detector es menor a la longitud de la zona de agotamiento, ésta entregará toda su energía al detector y se tendrá una lectura precisa y confiable de la energía de la partícula. Las partículas alfa entre 4 y 9 Mev tienen un alcance entre 15 y 60 μm o en función del poder de frenamiento relativo (ecuación 1.2) está entre 3 y 15 mg/cm^2 . En el detector la zona de agotamiento para un voltaje de 25 volts está entre 15 y 90 μm . El manual del detector asegura una zona de agotamiento de 100 μm lo cual verifica la elección adecuada del detector.

El tiempo de interacción (ecuación 1.35) es de $1.4 \times 10^{-12} \text{seg}$ para alfas de 4 MeV. El poder de frenamiento en keV/μ para el silicio de alfas entre 4 y 10 MeV está entre 200 y 90.

El arreglo del detector junto con el colimador se hizo con el fin de que solamente partículas viajando en una línea paralela a la normal a la superficie del detector penetraran en éste, para que de esta manera asegurar que toda su energía se entregue en la zona de agotamiento del detector y no que se pierda parte de esta en rebotes o colisiones con las orillas del detector.

Energía de incidencia (keV)	Resolución (keV)
600	70.48
650	72.44
700	78.32

Preamplificador construido

Energía de incidencia (keV)	Resolución (keV)
600	38.52
650	29.82
700	39.76

De estos datos se tiene que la resolución del preamplificador construido es un 54 por ciento mejor que la del modelo comercial a 600 keV y para la energía de 650 keV 69 por ciento. Estas comparaciones aparecen gráficamente en la figura (4.1).

**ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

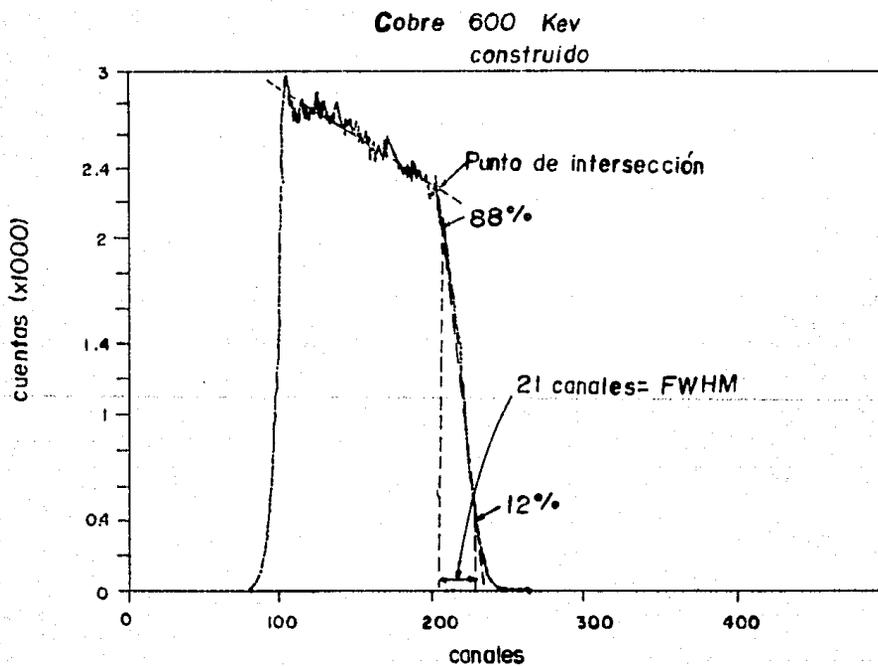


figura (4.1) Gráficas de espectros RBS para una energía de incidencia de 600 keV donde se muestran el número de canales al FWHM en cada uno de los preamplificadores.

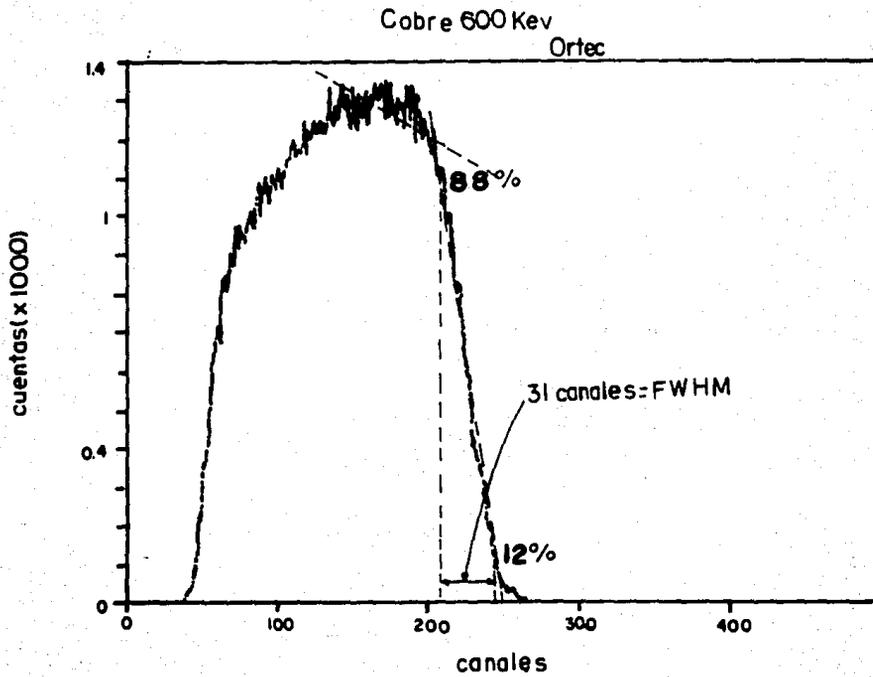


figura (4.1 a) Gráfica de espectro RBS a 600 keV para el preamplificador comercial.

La resolución utilizando una fuente triple de alfas de ^{239}Pu , ^{241}Am y ^{244}Cm con energías de 5.1046, 5.48574 y 5.80496 MeV respectivamente, la obtenemos utilizando la técnica anterior. En este caso tomamos la diferencia de energía entre el Curio y el Plutonio y dividimos entre el número de canales para multiplicar luego por el FWHM. Para este caso tenemos que la pendiente es de 3.708159 keV/canal y para cada una de las alfas de la fuente se tienen resoluciones que se muestran en la siguiente tabla:

Energía de la partícula en MeV	Resolución en keV
5.1046	67.08
5.48574	64.85
5.80496	78.13

para el Plutonio, Americio y Curio respectivamente en el preamplificador construido. Para el preamplificador ORTEC se tiene una pendiente de 3.07202 keV/canal y al multiplicar por los respectivos anchos a la mitad del máximo de cada una de las energías se tienen las resoluciones de

Energía de la partícula en MeV	Resolución en keV
5.1046	80.89
5.48574	78.56
5.80496	100.00

para las mismas fuentes. De lo cual es fácil ver que la resolución se mejoró en por lo menos un 17 por ciento (Plutonio) en comparación con el pramplificador ORTEC. Este resultado aparece en la figura (4.2).

Además de la resolución, otra ventaja del preamplificador desarrollado es la relacionada con la colección de carga, esto es, en el mismo tiempo dado a ambos preamplificadores en cada experimento, el modelo construido colecta casi el doble de la carga generada por el detector en comparación al modelo comercial debido a los componentes utilizados en la etapa de entrada, lo cual se menciona en el capítulo anterior.

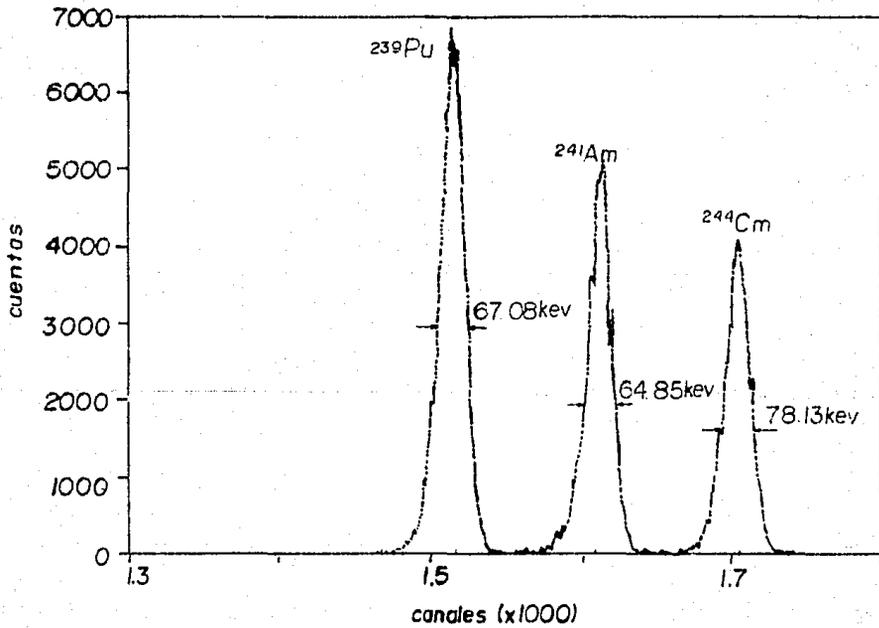


figura (4.2) Resolución en keV para una fuente triple de Americio, Curio y Plutonio del preamplificador construido.

4.6. Conclusiones

- 1. La resolución obtenida al realizar el estudio de una muestra de cobre por medio de la técnica de Retrodispersión de Iones (RBS) al utilizar el preamplificador desarrollado resultó de un 54 por ciento mejor que la del preamplificador comercial, esto puede observarse en el margen derecho del espectro de la muestra al contar el número de canales entre el 12 y el 88 por ciento a partir de la caída de la meseta.**
- 2. Al aumentar la resolución pueden distinguirse con mayor facilidad partículas con energías cercanas, como en el caso del análisis del espectro de la fuente triple de alfas.**
- 3. Con base en lo anterior, el espesor de una película puede determinarse con mayor precisión, aprovechando esto, se pueden observar películas cada vez más delgadas.**
- 4. El nivel de ruido es muy bajo, debido a los transistores de efecto de campo utilizados en la primera etapa del diseño.**
- 5. La polarización del detector es menor con el preamplificador contruido que la del comercial, por tanto el usar éste, evita el envejecimiento del detector.**
- 6. El problema de la saturación de la señal al utilizar un preamplificador comercial queda eliminado, pudiendo observar esto en la parte izquierda del espectro RBS de la muestra de cobre. Esto debido a que los transistores utilizados en la etapa de entrada tienen tiempos de respuesta muy bajos.**
- 7. De lo anterior resulta que los tiempos de conteo son menores al utilizar el preamplificador construido, es decir, se colecta más carga en tiempos iguales.**
- 8. Por tanto, el propósito de igualar la resolución de un preamplificador comercial fue alcanzado, mostrando con esto que equipo con características muy especiales puede constriirse sin mayores dificultades.**

APÉNDICE A

El haz de iones con una densidad espacial n se dirige hacia un centro dispersor. El número de partículas que pasan antes de la dispersión, por el anillo diferencial de radio b , esta cantidad ya mencionada como el parámetro de impacto debe conservarse después de la dispersión.

El número de partículas que pasan por el anillo es

$$N = nv2\pi b db \quad (1)$$

donde v es la velocidad de los iones. El número de partículas que salen dispersadas es,

$$N = nv\sigma(\theta)|d\Omega| \quad (2)$$

con $d\Omega$ el elemento de ángulo sólido determinado por el ángulo θ de dispersión.

Al igualar (1) y (2)

$$2\pi b db = \sigma(\theta)|db|$$

Luego al considerar simetría azimutal, se tiene que

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$$

y

$$b|db| = \sigma(\theta)\sin\theta|d\theta|$$

Por tanto

$$\sigma(\theta) = \frac{b}{\sin\theta}|db/d\theta| \quad (3)$$

Para obtener la relación entre b y θ , se emplea la ecuación

$$\theta = \Pi - \int_{r_m}^{\infty} \frac{2b}{r^2} \left(1 - \frac{z_1 z_2 e^2}{rE} - \frac{b^2}{r^2} \right)^{1/2} dr \quad (4)$$

donde r_m es la distancia de máximo acercamiento al centro dispersor, y que resulta

$$r_m = b \left(\frac{z_1 z_2 e^2}{2bE} + \left(1 + \left(\frac{z_1 z_2 e^2}{2bE} \right)^2 \right)^{1/2} \right) \quad (5)$$

e integrando se obtiene

$$\tan(\theta/2) = \frac{z_1 z_2 e^2}{2bE} \quad (6)$$

la cual al sustituirla en la ecuación (3.13) se obtiene la sección eficaz diferencial

$$\sigma(\theta) = \left(\frac{z_1 z_2 e^2}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta/2} \quad (7)$$

Esto anterior transcrito al sistema del laboratorio se tiene

$$\sin(\theta - \theta') = \frac{m_1}{m_2} \sin \theta' \quad (8)$$

donde θ' es el ángulo en el sistema del laboratorio.

De la ecuación $b|db| = \sigma(\theta) \sin \theta |d\theta|$ obtenemos

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \sin \theta r d\theta \right) = \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin \theta d\theta$$

y de la ecuación para S sustituyendo $x = \frac{m_1}{m_2}$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta'}{d\theta} &= 1 + \frac{x \cos \theta}{\cos(\theta - \theta')} \\ &= \frac{\sin \theta}{\sin \theta' \cos(\theta - \theta')} \end{aligned}$$

así que $\frac{d\sigma}{d\Omega} / \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\sin\theta}{\sin\theta l} \right) \frac{1}{\cos(\theta - \theta l)} \quad (9)$

Luego aplicando la ecuación anterior a la ecuación (8)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)' = \left(\frac{z_1 z_2 e^2}{2E_L} \right)^2 \left(\frac{(1+x)\sin\theta}{2\sin\theta \sin^2 \theta/2} \right)^2$$

en donde E_L es la energía en el sistema del laboratorio dada por

$$E_L = E(1+x)$$

Luego al suponer el blanco en reposo resulta que

$$1+x = (\sin(\theta - \theta l) + \sin\theta l) / \sin\theta l$$

ecuación que usando dos identidades trigonométricas

$$\sin \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} = \cot \frac{\theta}{2}$$

y

$$\frac{\sin\theta l + \sin(\theta - \theta l)}{\cos\theta l + \cos(\theta - \theta l)} = \tan \frac{\theta}{2}$$

obtenemos

$$\frac{(1+x)\sin\theta}{2\sin^2\theta/2} = \frac{\cos\theta l + \cos(\theta - \theta l)}{\sin\theta l}$$

Por tanto al sustituirlo en la ecuación para $\{S_o\}$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \left(\frac{z_1 z_2 e^2}{d\Omega} \right)^2 \frac{(\cos\theta l + \cos(\theta - \theta l))^2}{\sin^4 \theta l \cos(\theta - \theta l)}$$

y finalmente

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) \left(\frac{z_1 z_2 e^2}{2E_0 \sin^2 \theta}\right)^2 \frac{(\cos\theta + |1 - (m_1 \sin\theta/m_2)^2|^{1/2})^2}{(1 - (m_1 \sin\theta/m_2)^2)^{1/2}}$$

Si en esta ecuación no tomamos en cuenta el retroceso del blanco se tiene que si $m_1 \gg m_2$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{z_1 z_2 e^2}{E_0}\right) \frac{1}{\sin^4 \theta/2}$$