

123 2c



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE INGENIERIA**

**ANALISIS DINAMICO DE CARGAS VIAJERAS  
EN VIGAS "FACTOR DE IMPACTO"**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

**INGENIERO CIVIL**

**P R E S E N T A :**

**ALEJANDRO SALAZAR HERNANDEZ**



MEXICO, D. F.

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

1990



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE.

	Página.
NOMENCLATURA .....	iii-iv
INDICE DE FIGURAS .....	v-vi
INDICE DE TABLAS .....	vii-viii
<b>CAPITULO I</b>	
1. INTRODUCCION .....	1-10
1.1. CONSIDERACIONES GENERALES .....	1-4
1.2. OBJETIVOS .....	4
1.3. CONCEPTOS .....	4-10
<b>CAPITULO II</b>	
2. REVISION DE LITERATURA TECNICA .....	11-28
<b>CAPITULO III</b>	
3. MODELO MATEMATICO .....	29-42
3.1. VIBRACION FORZADA EN MEDIOS CONTINUOS .....	29-37
3.1.1. El factor de participación modal .....	29-32
3.1.2. Condiciones iniciales .....	32-34
3.1.3. Solución de la ecuación del factor de participación modal .....	34-36
3.1.4. Vibración forzada en placas .....	36-37
3.1.5. Vibración forzada en vigas .....	37
3.2. ANALISIS DE FOURIER .....	37-39
3.2.1. Ortogonalidad entre funciones .....	37
3.2.2. Norma de una función .....	38

3.2.2.1. Conjunto ortonormal .....	38
3.2.3. Coeficientes de Fourier .....	38-39
3.2.4. Serie de Fourier generalizada .....	39
3.3. ANALISIS DINAMICO DE UNA VIGA SIMPLEMENTE APOYADA CON UNA CARGA PUNTUAL VIAJANDO A TRAVES DE SU CLARO .....	39-42

#### CAPITULO IV

4. ANALISIS NUMERICO .....	43-76
4.1. ANALISIS DINAMICO DE UNA VIGA SIMPLEMENTE APOYADA CON UNA CARGA PUNTUAL VIAJANDO A TRAVES DE SU CLARO .....	44-76
4.1.1. Representación de la carga por medio de una serie de Fourier .....	44-49
4.1.2. Deflexión dinámica .....	49-60
4.1.3. Efecto máximo "factor de amplificación" .....	60-76

#### CAPITULO V

5. CONCLUSIONES .....	77-78
REFERENCIAS .....	79-80

## NOBENCCLATURA.

- T Período.
- f Frecuencia.
- $\omega_k$  Frecuencia natural del sistema para el k-ésimo modo de vibrar.
- $\alpha_k$  Frecuencia de excitación para el k-ésimo modo.
- c Amortiguamiento.
- $c_{cr}$  Amortiguamiento crítico.
- $\lambda$  Fracción del amortiguamiento crítico.
- $\rho$  Peso volumétrico.
- h Espesor.
- E Módulo de Young.
- I Momento de inercia.
- $P_0$  Magnitud de la carga viajera.
- $v_0$  Velocidad constante a la cual se desplaza la carga.
- $v_r$  Velocidad de resonancia.
- $v_c$  Velocidad crítica.
- l Claro de la viga.
- m Masa por unidad de longitud.
- $\xi = v_0 t$  Posición de la carga viajera sobre el claro de la viga en

el instante  $t$ .

$\phi_k(x)$  Función coordenada (modal) para el  $k$ -ésimo modo.

$F_k$  Función de fuerza para el  $k$ -ésimo modo.

$\delta(x-\xi)$  Función de Dirac.

$c_k$  Coeficientes de Fourier.

$\|\phi_n(x)\|$  Norma de la función  $\phi_n(x)$ .

$\zeta_k$  Factor de amortiguamiento modal.

$\eta_k$  Factor de participación modal.

$u(x,t)$  Respuesta dinámica del sistema.

$\delta_{est}$  Deflexión estática.

$\delta_{din}$  Deflexión dinámica.

$\delta_{estmax}$  Deflexión estática máxima.

$\delta_{dinmax}$  Deflexión dinámica máxima.

$\alpha_1, \alpha_2$  Coordenadas curvilíneas.

ft Pies.

ln Pulgadas.

lbs Libras.

s Segundos.

INDICE DE FIGURAS.

<i>Figura.</i>	<i>Página.</i>
1.1.1 Carga concentrada desplazándose a velocidad constante a través del claro de una viga simiente apoyada .....	9
1.3.1 Movimiento periódico .....	9
1.3.2 Movimiento armónico simple .....	10
1.3.3 Elementos de un sistema vibratorio .....	10
4.1.1.1 Magnitud de la carga para $k=10$ .....	46
4.1.1.2 Magnitud de la carga para $k=25$ .....	46
4.1.1.3 Magnitud de la carga para $k=50$ .....	47
4.1.1.4 Magnitud de la carga para $k=75$ .....	47
4.1.1.5 Magnitud de la carga para $k=100$ .....	48
4.1.1.6 Magnitud de la carga en el punto $x=30$ ante la variación de los coeficientes "k" .....	48
4.1.2.1 Deflexión dinámica, perfil W3, claro 15, $v=1$ in/s .....	51
4.1.2.2 Deflexión dinámica, perfil W3, claro 15, $v=100$ in/s .....	51
4.1.2.3 Deflexión dinámica, perfil W3, claro 15, $v=1000$ in/s .....	52
4.1.2.4 Deflexión dinámica, perfil W3, claro 15, $v=2500$ in/s .....	52
4.1.2.5 Deflexión dinámica, perfil W3, claro 15, $v=3500$ in/s .....	53
4.1.2.6 Deflexión dinámica, perfil W3, claro 15, $v=5100$ in/s .....	54
4.1.2.7 Deflexión dinámica, perfil W3, claro 15, $v=10000$ in/s .....	54
4.1.2.8 Envolvente de deflexiones dinámicas máximas ante el cambio de la velocidad $v_0$ , perfiles W1, W2, W3, W4 y W5 .....	57

4.1.3.1 Deflexión estática máxima para el perfil W1 ante la variación del claro "I" .....	65
4.1.3.2 Deflexión dinámica máxima para el perfil W1 ante la variación del claro "I" .....	66
4.1.3.3 Deflexión por impacto para el perfil W1 ante la variación del claro "I" .....	67
4.1.3.4 Deflexión estática máxima para el claro I1 ante la variación del momento de inercia "I" .....	68
4.1.3.5 Deflexión dinámica máxima para el claro I1 ante la variación del momento de inercia "I" .....	69
4.1.3.6 Deflexión por impacto para el claro I1 ante la variación del momento de inercia "I" .....	70
4.1.3.7 Velocidad crítica para el perfil W1 ante la variación del claro "I" .....	71
4.1.3.8 Velocidad crítica para el claro I1 ante la variación del momento de inercia "I" .....	72
4.1.3.9 Deflexión estática, dinámica y por impacto para el perfil W3 ante la variación del claro "I" .....	73
4.1.3.10 Deflexión estática, dinámica y por impacto para el claro I5 ante la variación del momento de inercia "I" .....	74



INDICE DE TABLAS.

Tabla.	Página.
4.1.1 Claro "I" de la viga .....	44
4.1.2 Propiedades perfiles W .....	44
4.1.1.1 Magnitud de la carga viajera, ante la variación de los coeficientes "k" .....	45
4.1.1.2 Magnitud de la carga móvil en el punto $x=30$ in, ante la variación de los coeficientes "k" .....	45
4.1.2.1 Máximo desplazamiento dinámico ante el cambio de la velocidad $v_0$ y la posición de la carga $\xi$ en el tiempo $t$ ....	55
4.1.2.2 Envolvente de deflexiones dinámicas máximas ante el cambio de la velocidad $v_0$ , perfiles W1, W2, W3, W4 y W5 .....	56
4.1.2.3 Velocidades de resonancia para los perfiles W1, W2, W3, W4 y W5, para $k=1,2$ y 3 .....	58
4.1.3.1 Factor de amplificación .....	61
4.1.3.2 Desplazamiento estático máximo para el perfil W1 ante la variación del claro "I" de la viga .....	62
4.1.3.3 Desplazamiento dinámico máximo para el perfil W1 ante la variación del claro "I" de la viga .....	62
4.1.3.4 Desplazamiento por impacto para el perfil W1 ante la variación del claro "I" de la viga .....	63
4.1.3.5 Desplazamiento estático máximo para el claro I1 ante la variación del momento de inercia "I" .....	63

4.1.3.6 Desplazamiento dinámico máximo para el claro II ante la variación del momento de inercia "I" .....	63
4.1.3.7 Desplazamiento por impacto para el claro II ante la variación del momento de inercia "I" .....	64
4.1.3.8 Velocidad crítica para el perfil W1 ante la variación del claro "I" de la viga .....	64
4.1.3.9 Velocidad crítica para el claro II ante la variación del momento de inercia "I" .....	64
4.1.3.10 Pendiente y ángulo de inclinación para las rectas de los casos I, II y III .....	76

## CAPITULO I.

### 1. INTRODUCCION.

#### 1.1. CONSIDERACIONES GENERALES<sup>1</sup>

Un caso particular y de gran interés en el análisis de vibración forzada en medios continuos, lo representa el estudio del efecto producido por el paso de cargas viajando a través del claro de vigas. Los tipos de carga y condiciones de apoyo en la viga son de diversa naturaleza, sin embargo para una *aplicación práctica inmediata* enfocaremos nuestra atención a una carga concentrada que viaja a velocidad constante, a lo largo de una viga simplemente apoyada. Ver fig. (1.1.1).

El estudio de cargas móviles se inicia en el siglo XIX con la construcción de puentes ferroviarios, surgiendo así uno de los problemas ingenieriles típicos de estructuras bajo acciones dinámicas. En esa época se establecieron dos puntos de vista de análisis y diseño: uno consideraba el efecto de la carga móvil parecido al de *impacto* y el otro establecía que el paso a gran velocidad de una locomotora a través de un puente, no permitía *el tiempo suficiente para la deformación completa* de la estructura.

Teóricamente, el problema de cargas dinámicas en puentes fue atacado para el caso en el que la masa de la viga se consideraba pequeño comparada con la masa de la carga viajera. La solución aproximada original se debe a R. Willis (1849) y unos de los primeros experimentadores en este campo fueron Sir George Stokes (1849) y H. Zimmermann (1896).

El otro caso extremo, en el que la masa de la carga es pequeña comparada con la masa de la viga, fue originalmente examinado para una viga simplemente apoyada y una carga viajera a velocidad constante por A. N. Krylov en 1905, usando el *método de expansión de eigenfunciones*. Más tarde S. P. Timoshenko (1908), A. N. Lowan (1935) y N. G. Bondar

<sup>1</sup> Ref. (5), Part. 19, pp. 418-419, ref. (8), Part. 1, pp. 3-10, ref. (15), Chap. 4, pp. 363-365.

(1954) resolvieron este caso con la ayuda de *funciones de Green* y con ecuaciones integrales respectivamente. Posteriormente, en 1908 y 1922, Timoshenko proporcionó la solución al problema de una fuerza móvil armónica.

Hay que hacer notar que el caso que toma en cuenta las masas de la carga y la viga simultáneamente, resulta complicado y no fue resuelto sino hasta mucho tiempo después. En primer término lo examinaron H. Sailer (1921) y H. H. Jeffcott (1929) quienes proporcionaron un método iterativo, que en algunos casos divergía. Más adelante se presentó un método a base de *series de Fourier* con coeficientes desconocidos para la trayectoria de una carga concentrada de magnitud constante, actuando sobre una viga. Este método fue introducido por A. Schallenkamp (1937), V. M. Muchnikov (1953) y M. Ya. Ryazanova (1958) quienes presentaron la solución a dicho problema mediante el *método de ecuaciones integrales*. Posteriormente J. Naleszkiewicz (1953) utilizó el *método de Galerkin* y V. V. Bolotin (1961) el *método aproximado de soluciones asintóticas en cuadraturas*.

Un caso especial, muy ilustrativo del estado del arte en diseño de puentes de ferrocarril, se debe al trabajo de Sir Charles Inglis quien utiliza un análisis armónico. En octubre de 1928, Inglis publica<sup>2</sup> en el reporte al Bridge Stress Committee de Inglaterra lo siguiente:

*...estoy involucrado en el desarrollo de un análisis matemático satisfactorio, en el que (por medio de las evidencias de campo) se modela un problema y se ajusta con los hechos, hasta convertir dicho modelo en una herramienta de razonable simplicidad y utilidad práctica...*

*...El análisis de vibración de puentes es considerablemente complicado debido a que el golpeteo transmitido por las ruedas del ferrocarril, produce oscilaciones que se mueven a lo largo del puente. Un método poderoso y elegante para tomar en cuenta este movimiento es el del análisis armónico...*

Esta teoría se utilizó para el análisis dinámico de puentes ferroviarios.

---

<sup>2</sup> Ref. (15), pp.364-369.

rios ante el paso de locomotoras de vapor. Toma en cuenta el efecto de rodamiento del ferrocarril, es decir, las oscilaciones producto del movimiento a lo largo del puente. Los resultados teóricos de C. Inglis, que tienen una excelente concordancia con los obtenidos experimentalmente, fueron comparados más tarde (1956) por A. H. Chilver, K. Mise y S. Kunii con la ayuda de funciones elípticas. Además Inglis comenta la naturaleza "caprichosa" del impacto, lo cual lo hace difícil de calcular.

Los problemas relacionados con el efecto de cargas móviles sobre puentes de carreteras, fueron estudiados por tratados clásicos escritos por: Inglis (1934), B. Brückmann (1955), Kolousek (1956), I. I. Kazel (1960) y L. Fryba (1960).

En 1953<sup>3</sup> se publicó una nota de gran importancia sobre el efecto de cargas puntuales móviles sobre vigas simplemente apoyadas. Se establecieron el máximo valor de la relación entre la deflexión dinámica y estática, así como la velocidad y la posición de la carga en el claro a la cual ocurriría tal máximo. Sin embargo la importancia de esta investigación pasó desapercibida y no tuvo el impacto ni la atención del ingeniero de diseño de puentes, debido probablemente a la brevedad de esta nota técnica (menos de una página).

El estudio de cargas móviles tiene aplicaciones en el campo de la Ingeniería Civil de puentes ferroviarios y carreteros, puentes suspendidos, rieles, durmientes, grúas viajeras, cables, teleféricos, pistas, trenes subterráneos, túneles y tuberías. Además este enfoque puede ser de gran ayuda en otras Ingenierías tales como Mecánica, Naval, Aeronáutica y Espacial.

Si se toma en cuenta el avance que han experimentado las ramas del transporte<sup>4</sup>, tanto en estructuras como en las características de los

<sup>3</sup> Ref. (7), es una nota aclaratoria sobre la deficiencia del criterio que rige el valor del máximo efecto, p.592.

<sup>4</sup> Ref. (1), en diversos países del mundo se está investigando y desarrollando un vehículo magnéticamente levitado. Ensayos realizados en el Centro de Pruebas de los Ferrocarriles Nacionales Japoneses lograron probar con éxito un sólo vehículo, a una velocidad de 517 km/h, pp.289-277.

vehículos (rapidez y masa), es fácil notar la importancia y el alcance del tópico en cuestión, lo cual justifica una mejor comprensión del problema. En un futuro inmediato no sólo se considerarán cargas móviles a velocidades subsónicas sino también a velocidades supersónicas, ya que desde el punto de vista de la investigación científica se debe mantener el interés por el desarrollo moderno y tan profundo como sea posible, del conocimiento de nuestro entorno (Ref.(8), p.8).

### 1.2. OBJETIVOS.

Se desarrollará de manera comprensible un modelo matemático que represente una fuerza puntual viajando a través del claro de una viga simplemente apoyada. La respuesta dinámica (*deflexión*) se determinará mediante el enfoque clásico de *representación modal* o *expansión modal*. El objetivo principal será el de obtener la impedancia estática y dinámica de vigas simplemente apoyadas.

Se verá que es posible obtener una serie de nomogramas útiles en el diseño de sistemas de este tipo. Dichos nomogramas reflejarán la respuesta del modelo ante variaciones de parámetros tales como el claro de la viga, geometría de la sección transversal, velocidad a la que viaja la fuerza sobre la viga y el amortiguamiento en el sistema.

Es importante mencionar la ventaja del *método de la expansión modal* pues permite mediante la integración de ecuaciones, la extensión de este estudio para diferentes condiciones de apoyo de la viga y diversas distribuciones de carga sobre su claro.

### 1.3. CONCEPTOS.

*Movimiento periódico*<sup>5</sup>. Se llama movimiento periódico a aquel que se repite en intervalos de tiempo T iguales; si este movimiento se representa por la función  $x=x(t)$ , entonces, para todo t,  $x(t)=x(t+T)$  (Fig.(1.3.1)).

<sup>5</sup>, 6, 7, 8, 9 Ref. (15), pp.1-8.

**Vibraciones:**<sup>6</sup> Los movimientos producidos en un sistema elástico por la acción de fuerzas de excitación, se llaman vibraciones.

**Periodo  $T$ :**<sup>7</sup> Al tiempo  $T$  se le nombra periodo de la vibración.

**Frecuencia  $f$ :**<sup>8</sup> El recíproco del periodo  $f=1/T$  se le denomina frecuencia de la vibración.

**Movimiento armónico simple:**<sup>9</sup> Es la forma más simple del movimiento periódico, puede expresarse siempre en términos de senos y cosenos. En general, las funciones periódicas se representan por series de funciones armónicas nombradas *series de Fourier*.<sup>10</sup> Las series de Fourier se utilizan además para representar las funciones definidas sobre un intervalo finito dado. En la práctica, casi todas las funciones involucradas en problemas de Ingeniería pueden representarse por series de Fourier (fig.(1.3.2)).

**Sistemas vibratorios:**<sup>11</sup> El tema de vibración trata con el movimiento oscilatorio de sistemas dinámicos. Un sistema dinámico es una combinación de materia que tiene masa y cuyas partes experimentan un movimiento relativo. Todos los cuerpos son capaces de vibrar al tener masa y elasticidad, la masa es inherente al cuerpo y la elasticidad se debe a la resistencia al movimiento relativo de las partes del cuerpo. El movimiento oscilatorio del sistema puede ser desagradable, trivial o necesario para ejecutar una tarea. El objetivo del diseño es gobernar la vibración cuando resulta desagradable y realzarla cuando es de utilidad, aunque en general las vibraciones son indeseables.

**Elementos de un sistema vibratorio:**<sup>12</sup> Los elementos que constituyen un sistema vibratorio son idealizados y llamados masa  $m$ , rigidez  $k$  (constante de resorte), amortiguamiento  $c$  y fuerza de excitación  $F(t)$  (fig.(1.3.3)). Los tres primeros elementos describen el sistema físico. La energía se almacena en la masa y el resorte y parte de ella se disipa en el amortiguador. La energía entra al sistema a través de la aplicación de una

---

<sup>10</sup> El movimiento armónico simplifica algunos análisis utilizando vectores para representar dicho movimiento.

<sup>11,12,13</sup> Ref.(9), pp.1-5.

fuerza de excitación.

*Frecuencia natural.*<sup>13</sup> Es una propiedad del sistema y depende de los valores de  $m$  y  $k$ , siendo independiente de las condiciones iniciales o la amplitud de oscilación. La frecuencia natural describe la proporción de intercambio de energía<sup>14</sup> entre dos elementos, estos son la masa y la rigidez.

*Sistemas lineales.*<sup>15</sup> Los sistemas idealizados como masa concentrada, resorte lineal y amortiguamiento viscoso son llamados lineales; una propiedad importante de estos sistemas es que siguen el principio de superposición. Es decir, el movimiento resultante del sistema debido a la aplicación simultánea de algunas excitaciones, es una combinación lineal del movimiento esperado para cada una de las excitaciones actuando por separado.

*Amortiguamiento.*<sup>16</sup> *Características del amortiguamiento.* Todos los sistemas estructurales dinámicos tienen amortiguamiento en algún grado, sin embargo el efecto no es significativo si la duración de la carga es corta y si además sólo la máxima respuesta dinámica es de interés. El amortiguamiento será de gran importancia si existe un estado continuo de vibración. De hecho, si se proporciona suficiente amortiguamiento, la vibración se elimina completamente. El amortiguamiento se presenta de diversas formas: pérdida de energía asociada con deslizamiento de conexiones estructurales entre miembros o entre la estructura y los soportes, en algunos casos el amortiguamiento puede deberse a la resistencia al movimiento producido por el aire u otros fluidos alrededor de la estructura. *El efecto de amortiguamiento es de oposición al movimiento producido por la fuerza y por lo tanto, la amplitud de la respuesta decrece.*

*Amortiguamiento viscoso.* Para propósitos de análisis, el

<sup>14</sup> Cambio de energía potencial a cinética del resorte y cambio de energía cinética a potencial de la masa en el sistema, debidos a un desplazamiento de la masa desde el equilibrio estático.

<sup>15</sup> Ref. (9), p.4.

<sup>16</sup> Ref. (4), pp.17-18.



amortiguamiento estructural se supone de tipo viscoso; es decir, la fuerza de amortiguamiento es opuesta pero proporcional a la velocidad. Por lo tanto, la fuerza de amortiguamiento aplicada a una masa concentrada se expresa como sigue:

$$\text{Fuerza de amortiguamiento} = -c\dot{y}$$

en donde  $\dot{y}$  es la velocidad de la masa y  $c$  es una constante. El signo (-) indica que la fuerza es siempre opuesta a la dirección de la velocidad.

**Amortiguamiento crítico.** Es difícil obtener la magnitud del coeficiente  $c$ , por esta razón se introduce el concepto de amortiguamiento crítico. Este es la cantidad de amortiguamiento que elimina completamente la vibración, se representa por la siguiente expresión:

$$c_{cr} = 2\sqrt{km}$$

en donde  $k$  y  $m$ , son la rigidez y la masa del sistema respectivamente. El concepto de amortiguamiento crítico es útil ya que se puede expresar con facilidad la cantidad de amortiguamiento, como un cierto porcentaje del crítico:

$$\lambda = c/c_{cr}$$

**Vibración libre.**<sup>17</sup> Se produce cuando un sistema oscila bajo la acción de fuerzas inherentes al mismo sistema y cuando las fuerzas de excitación externas no existen. Las vibraciones libres describen el comportamiento natural o los modos naturales de vibración de un sistema<sup>18</sup>.

**Vibración forzada.**<sup>19</sup> Es la vibración que ocurre debido a la excitación de fuerzas externas en el sistema físico. Cuando la excitación es oscilatoria, el sistema está forzado a vibrar a la frecuencia de excitación.

**Resonancia.**<sup>20</sup> Ocurre cuando la frecuencia de excitación coincide con una de las frecuencias naturales del sistema. Para mantener las vibraciones de un sistema no amortiguado en su frecuencia natural, no se

17 Ref. (12), pp.1-2.

18 Es decir, vibrará en una o más de sus frecuencias naturales.

19 Ref. (12), p.2.

20 Ref. (9), pp.7-8.

necesita la entrada de energía. Así, cualquier entrada de energía establecerá la elevación de la amplitud y la amplitud en resonancia de un sistema no amortiguado se incrementará sin límite. En un sistema con amortiguamiento, la entrada de energía se disipa con el amortiguamiento; por lo tanto, la amplitud de la vibración en resonancia para sistemas con amortiguamiento es finita y está determinada por la cantidad de amortiguamiento en el sistema.

**Grados de libertad.**<sup>21</sup> El número de coordenadas independientes requeridas para describir el movimiento o configuración de un sistema, se denomina número de grados de libertad del sistema. La configuración se define como la localización geométrica de todas las masas del sistema.

**Placa.**<sup>22</sup> Una placa es una lámina de material elástico la cual se halla en un plano. Las placas tienen rigidez a flexión como resultado de su espesor y la elasticidad del material de la placa. Durante la vibración transversal, las placas se deforman inicialmente por flexión perpendicular a su propio plano.

**Cascarón.**<sup>23</sup> Cascarón o estructura de pared delgada es un cuerpo tridimensional en el que el espesor es pequeño comparado con las dimensiones de su superficie. Un cascarón queda geoméricamente definido por una superficie media y un espesor en cada uno de los puntos de dicha superficie.

**Impacto.**<sup>24</sup> Se conoce como el efecto que produce la aplicación súbita de una fuerza. Cuando se aplica repentinamente una fuerza sobre un cuerpo elástico, se produce una onda de esfuerzos que se propaga a través del cuerpo.

---

<sup>21</sup> *Ibidem*, p.25, ref.(12), p.2.

<sup>22</sup> Ref.(8), p.233.

<sup>23</sup> Ref.(3), pp.2-3.

<sup>24</sup> Ref.(10), pp.572-573.

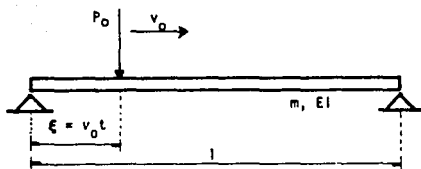


Fig.(1.1.1) Carga concentrada desplazandose a velocidad constante a través del claro de una viga simplemente apoyada.

- $P_0$  magnitud de la fuerza de excitación
- $v_0$  velocidad constante a la cual viaja la carga  $P_0$
- $\xi = v_0 t$  distancia a la que se encuentra la carga  $P_0$ , medida desde el apoyo izquierdo
- $l$  claro de la viga
- $E$  módulo de Young
- $I$  momento de inercia de la sección transversal
- $m$  masa por unidad de longitud de la viga

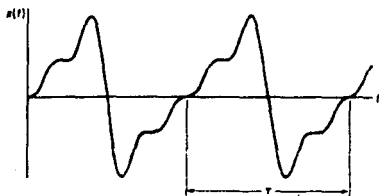


Fig.(1.3.1) Movimiento periódico.

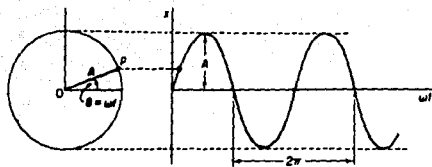


Fig.(1.3.2) Movimiento armónico simple.

A amplitud de la oscilación

$\omega$  frecuencia circular

$x = A \sin \omega t$  desplazamiento

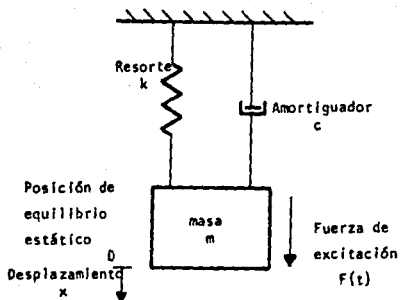


Fig.(1.3.3) Elementos de un sistema vibratorio.

## CAPITULO II.

### 2. REVISION DE LITERATURA TECNICA.

El tema de cargas móviles se aborda generalmente en la literatura dedicada a la *Dinámica Estructural* y *Teoría de Vibraciones*; aunque se pone de relieve la importancia del tópico, los análisis presentados muestran carencias y falta de precisión en el enfoque.

El caso de una carga puntual viajando a través del claro de una viga simplemente apoyada, se aborda como el *problema representativo de cargas móviles*. Este caso es el de mayor aplicación práctica (puentes de carreteras y ferroviarios) y debido a la sencillez del problema su solución permite la *comparación con sistemas de mayor complejidad*. El interés se centra en las vibraciones y la respuesta del sistema se determina por medio de los *desplazamientos dinámicos (deflexión)*. La teoría que se presenta en este tipo de literatura se considera estrechamente ligada a un *fenómeno de impacto* y sólo algunos autores incluyen correctamente lo que se denomina *factor de amplificación dinámica máximo*.

Los textos de Fryba (ref.(8)) y Soedel (ref.(11)) son fundamentales en el desarrollo de este trabajo; el primero es un *libro especializado* en el estudio de vibraciones producidas por cargas móviles sobre cuerpos y estructuras, Fryba enfatiza la necesidad de comprender mejor este tipo de problemas ya que en un futuro próximo su aplicación será de provecho en la Ingeniería Civil, Mecánica, Naval, Aeronáutica y Espacial. Del texto de Soedel se tomará el *método de representación modal* para obtener la solución del sistema en vibración forzada. Este método es de aplicación fácil y tiene la ventaja de extender el estudio a diversas estructuras.

Enseguida se observará que el problema de la carga concentrada viajando a través del claro de una viga se ha resuelto cualitativamente y pocos textos proporcionan algunos análisis numéricos. Sin embargo, un estudio cuantitativo y cualitativo para el *efecto máximo* no se ha realizado. Dos artículos publicados en revistas especializadas, ref.(1) y ref.(7), vienen a dar un nuevo *impulso al estudio de cargas móviles*.

Biggs<sup>25</sup> (1964) plantea la solución para el caso en donde una fuerza concentrada constante F viaja a través del claro de una viga simplemente apoyada a velocidad constante (fig. 1.1.1). A partir de la ecuación modal de movimiento con amortiguamiento  $\lambda=0$  y para una carga concentrada, esta ecuación se escribe como:

$$\ddot{A}_n + \omega_n^2 A_n = \frac{F \phi_n(c_f)}{\int_0^1 m [\phi_n(x)]^2 dx} \quad (2.1)$$

en donde  $\omega_n = \sqrt{\frac{EI}{m}} \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$  es la frecuencia natural del sistema,

$\phi_n(x) = \sin(n\pi x/l)$  es la función de forma modal para el n-ésimo modo y  $c_f$  es la distancia a la fuerza, medida desde el apoyo izquierdo de la viga,  $c_f = vt$  es función del tiempo,  $t$  se mide desde el instante en el que la fuerza entra al claro. La solución modal está expresada por

$$A_n = A_{nst} (DLF)_n \quad (2.2)$$

en donde  $A_{nst} = \frac{2F}{m l \omega_n^2}$  (2.2.1)

y  $(DLF)_n$  está determinada<sup>26</sup> por la siguiente función:

$$(DLF)_n = \frac{1}{1 - \Omega_n^2 / \omega_n^2} \left( \sin \Omega_n t - \frac{\Omega_n}{\omega_n} \sin \omega_n t \right) \quad (2.2.2)$$

en donde  $\Omega_n = \frac{n\pi v}{l}$  es la frecuencia de excitación.

Sustituyendo la ec.(2.2) evaluada por las ecs. (2.2.1) y (2.2.2) y combinando los modos de acuerdo a la siguiente expresión

$y = \sum_{n=1}^M A_n \phi_n(x)$ , obtenemos la solución total para la deflexión:

$$y = \frac{2F}{m l} \sum_{n=1}^M \frac{1}{\omega_n^2 - \Omega_n^2} \left( \sin \Omega_n t - \frac{\Omega_n}{\omega_n} \sin \omega_n t \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (2.3)$$

25 Ref.(4), 8.2 "Constant Force with Constant Velocity", pp.315-318.

26 Factor de carga dinámica para el sistema equivalente de un grado del n-ésimo modo.

Por otra parte, la solución para el caso con amortiguamiento se puede demostrar que tiene la siguiente forma:

$$y = \frac{2F}{mI} \sum_{n=1}^N \frac{\text{sen}(n\pi x/l)}{(\omega_n^2 - \Omega_n^2) + 4(\beta_n \Omega_n)^2} \left[ (\omega_n^2 - \Omega_n^2) \text{sen } \Omega_n t - 2\beta_n \Omega_n \cos \Omega_n t + e^{-\beta_n t} \left( 2\beta_n \Omega_n \cos \omega_n t + \frac{\Omega_n}{\omega_n} (2\beta_n^2 - \Omega_n^2 - \omega_n^2) \text{sen } \omega_n t \right) \right] \quad (2.4)$$

en donde  $\beta_n/\omega_n$  es la fracción de amortiguamiento crítico para el n-ésimo modo de vibrar.

Biggs coincide con otros autores al afirmar que para la mayoría de de las vigas consideradas en diseño, el amortiguamiento es pequeño y a menudo se puede despreciar, especialmente si el interés se enfoca a los primeros ciclos de la respuesta en cualquier modo. El autor concluye que la posibilidad de resonancia en el sistema no es importante por dos razones: primero, la carga sólo existe para un número limitado de ciclos, es decir, la duración de la carga en el primer modo es de un medio ciclo. Por lo tanto, la condición de resonancia para el primer modo será:

$$\omega_1 = \Omega_1, \text{ en donde } \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \text{ y } \Omega_1 = \frac{\pi v}{l}$$

así 
$$\frac{2\pi}{T_1} = \frac{\pi v}{l} \quad (2.5)$$

Segundo, para resonancia en los distintos modos, la carga debiera desplazarse a velocidades extremadamente altas. Si despejamos  $v$  de la ec. (2.5) obtenemos

$$v = \frac{2l}{T_1} \quad (2.6)$$

Las ecs. (2.3) y (2.4) se aplican mientras la fuerza está sobre la viga. La vibración libre ocurre después y se puede obtener utilizando como condiciones iniciales, a aquellas que tienen lugar en el instante en que la fuerza sale del claro.

Biggs propone que además de la relación entre los desplazamientos di-

dinámico y estático al centro del claro, también se considere la relación entre los momentos dinámico y estático, ya que existe proporcionalidad entre la deflexión y el momento flexionante estático al centro del claro.

Este autor proporciona además un estudio de vibración en puentes debido al tránsito de vehículos, en los que se aplica la teoría expuesta anteriormente. Dicha teoría se utiliza respetando una serie de suposiciones.<sup>27</sup> Por medio de resultados experimentales y teóricos, Biggs comprobó la validez del análisis viga-puente, aunque para el diseño práctico de puentes el enfoque empírico al valorar el factor de impacto<sup>28</sup>, seguirá aplicandose ya que el análisis presentado anteriormente tiene severas limitaciones.<sup>29</sup>

Hinkle, Morse y Tse<sup>30</sup> (1978) presentan un análisis modal para resolver la ecuación diferencial de una viga simplemente apoyada en vibración forzada.<sup>31</sup> A manera de ejemplo dichos autores consideran el caso de una fuerza concentrada móvil, sobre dicha viga, con velocidad constante para idealizar un puente (fig.1.1.1) y calculan las deflexiones en este sistema con amortiguamiento nulo y condiciones iniciales cero.

La ecuación diferencial particular del sistema<sup>32</sup>, para el caso de un sistema continuo es

$$M(u) * L(u) = F(x, t) \quad (2.7)$$

donde M y L ya se consideraron como operadores diferenciales lineales y F(x,t) es la fuerza de excitación. La deflexión u(x,t) será:

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) q_i(t) \quad (2.8)$$

27 Ref. (4), tomar la rigidez de la viga equivalente a la rigidez del piso, considerar sólo el modo fundamental viga-puente, idealizar el vehículo como un sistema de un grado y aplicar el peso del vehículo en su centro de masa, p.324.

28 Ibidem, el efecto dinámico se toma en cuenta como un incremento de la carga viva estática, en función del claro del puente, p.327.

29 Ibidem.

30 Ref. (8), "Undamped Forced Vibration-Modal Analysis", pp.285-288.

31 Resuelven los casos para las fuerzas concentrada, distribuida uniformemente y concentrada móvil.

32 La solución complementaria es cero si el sistema está en reposo.



la ec.(2.7) puede desacoplarse sustituyendo la ec.(2.8) en la ec.(2.7) y usando las propiedades de ortogonalidad<sup>33</sup>, se puede mostrar que

$$m_{11} \ddot{q}_{11} + k_{11} q_{11} = \int_0^l F(x,t) \phi_1(x) dx = Q_1(t) \quad (2.9)$$

en donde  $Q_1(t)$  se conoce como la fuerza generalizada del 1-ésimo modo.

El puente se idealiza como una viga uniforme simplemente apoyada de masa/longitud  $m$ . La fuerza concentrada  $F_0$  se aplica en  $x=\xi=vt$  para  $0 \leq vt \leq l$ . La fuerza  $Q_1(t)$  de la ec.(2.9) es

$$Q_1 = \int_0^l \left[ F_0 \delta(x-vt) \right] \phi_1(vt) dx$$

$$= \begin{cases} F_0 \phi_1(vt) & \text{para } 0 \leq vt \leq l \\ 0 & \text{para } t > l/v \end{cases}$$

en donde  $\phi_1(vt) = \sqrt{2} \sin(i\pi vt/l)$ ,  $m_{11} = ml$  y  $\omega_1^2 = EI(i\pi)^4 / (mJ^4)$ .

La solución particular se obtiene por medio de la integral de convolución. Así, para  $0 \leq vt \leq l$ ,  $q_1(t)$  para el 1-ésimo modo es

$$q_1(t) = \frac{1}{m_{11} \omega_1} \int_0^t \left[ F_0 \sqrt{2} \sin \frac{i\pi vt}{l} \right] \sin \omega_1(t-\tau) dt$$

$$= \frac{\sqrt{2} F_0}{mJ \omega_1} \frac{1}{a_1^2 - \omega_1^2} \left[ a_1 \sin \omega_1 t - \omega_1 \sin a_1 t \right] \quad (2.10)$$

en donde  $a_1 = i\pi v/l$ . Sustituyendo la ec.(2.10) en la ec.(2.8) obtenemos

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2F_0}{mJ \omega_i} \frac{1}{a_i^2 - \omega_i^2} \left[ a_i \sin \omega_i t - \omega_i \sin a_i t \right] \sin \frac{i\pi x}{l} \quad (2.11)$$

Volterra<sup>34</sup> (1965) en su estudio de vibración de sistemas continuos, utiliza el método de análisis armónico para obtener la respuesta de una viga uniforme a una carga concentrada móvil. Considera una viga

<sup>33</sup> Ver ec.(3.1.1.12) y el punto 3.2.1 "Ortogonalidad entre Funciones".

<sup>34</sup> Ref.(15), Chap.4, "Vibrations of Continuous Systems", pp.363-377.

simplemente apoyada de longitud  $L$  y de rigidez a la flexión  $EI$ . Las condiciones iniciales en un instante  $t$ , son:

$$w(x,0) = \frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = 0$$

Para determinar la respuesta de la viga sujeta a una carga externa que varía armónicamente con el tiempo, se utiliza la expresión<sup>35</sup>

$$p(x,t) = p(x) \sin(\omega t) \quad (2.12)$$

El método de análisis armónico consiste en expandir la función  $p(x)$  en una serie de Fourier y determinar la respuesta de la viga para cada una de las componentes armónicas de  $p(x,t)$ .

Si se considera el caso de una carga concentrada  $P_0$  avanzando a lo largo de una viga, con velocidad constante  $v_0$  (fig. 1.1.1). En el instante  $t$  la carga  $P_0$  está a una distancia  $a = v_0 t$  medida desde el apoyo izquierdo, entonces la distribución de carga en este instante puede representarse por la serie armónica:

$$p(x,t) = \frac{2P_0}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin n\omega_0 t \quad (2.13)$$

y la respuesta<sup>36</sup> de la viga sin amortiguamiento será:

$$w(x,t) = \frac{2P_0 L^3}{\pi^4 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{L}}{n^4 \left[ \frac{n\omega_0}{\omega_1} \right]^2} \left\{ \sin n\omega_0 t - \left[ \frac{\omega_0}{n\omega_1} \right] \sin n^2 \omega_1 t \right\} \quad (2.14)$$

en donde  $\omega_0 = \frac{\pi v_0}{L}$  y  $\omega_1 = \sqrt{\frac{EI}{m}} \left[ \frac{\pi}{L} \right]^2$

Volterra<sup>37</sup> plantea el problema de vibración en una vía de ferrocarril, que es la continuación del estudio de cargas móviles sobre

<sup>35</sup> Ibidem, 1.B "Application of Trigonometric Series to the Study of Deflection of Beams", pp.29-35.

<sup>36</sup> Ibidem, ver ec.(4.7.9), p.367.

<sup>37</sup> Otros casos de fuerzas móviles que estudia tal autor son la carga uniformemente distribuida y un pulso concentrado, viajando a través del claro de una viga simplemente apoyada.

vigas simplemente apoyadas. Para el caso de una fuerza concentrada moviéndose con velocidad constante a lo largo del riel, S. Timoshenko determinó la velocidad crítica, es decir, la rapidez a la cual la deflexión de un riel bajo una carga se convertirá en infinita. La vía de ferrocarril se idealiza como una *viga de extensión infinita* y de rigidez a la flexión  $EI$  constante, descansando sobre un suelo elástico<sup>38</sup>. Así, la velocidad crítica que obtuvo Timoshenko, se representa por:

$$v_{cr} = \sqrt{\frac{4EI k}{m}} \quad (2.15)$$

en donde  $k$  es el módulo de la cimentación y  $m$  es la masa por unidad de longitud de la viga.

La deflexión estática máxima es  $(w_{est})_{max} = P\beta/2k$  y la deflexión dinámica máxima es

$$(w_{din})_{max} = \frac{(w_{est})_{max}}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{v_{cr}^2}}} \quad (2.16)$$

en donde  $P$  es la carga externa concentrada moviéndose con una velocidad constante  $v_0$  y

$$\beta = \sqrt{\frac{k}{4EI}}$$

Volterra hace notar la discrepancia entre los resultados obtenidos por medio de este análisis y los que se obtuvieron experimentalmente. La razón, según dicho autor, se debe a que teóricamente la vía de ferrocarril se consideró apoyada continuamente y sin embargo, esto no se cumple en la realidad ya que la vía *no descansa directamente sobre el balasto*, sino sobre los durmientes. Por lo tanto, hay una oscilación vertical de la carga que se produce por el movimiento de durmiente a durmiente, la cual no consideró Timoshenko en su análisis.

<sup>38</sup> Ref. (15), E. Winkler desarrolló la teoría de flexión de vigas descansando sobre una cimentación elástica continua. La reacción por unidad de longitud se representa por  $kv$ , en donde  $w$  es la deflexión y  $k$  es una constante llamada módulo de la cimentación, p. 374.

Soedel<sup>39</sup> (1981) aplica la *función de influencia dinámica* en medios continuos, para resolver el caso de una carga puntual viajando sobre un cascarón cilíndrico simplemente apoyado. La ventaja de la *función de influencia dinámica*<sup>40</sup> en el análisis de estructuras, es que una vez que la función de influencia de la estructura se define, entonces una combinación infinita de cargas pueden tratarse mediante un proceso de integración.

La *función de influencia dinámica* de un cascarón<sup>41</sup> describe la respuesta de cada punto del cascarón, a un impulso unitario aplicado en otro punto. En el caso de vigas vibrando transversalmente, la función de influencia es unidireccional. Esto es, el impulso unitario se aplica en la dirección transversal y la respuesta es en la misma dirección.

Para la aplicación de una *carga puntual* viajando a través del claro de una viga simplemente apoyada, se utilizará la función reducida, desarrollada para un cascarón cilíndrico, que es :

$$I_k(t) = \int_0^t e^{-\alpha_k(t-t^*)} \sin \gamma_k(t-t^*) \sin \alpha t^* dt^* \\ = \frac{1}{2 \left[ \alpha_k^4 + 2\alpha_k^2(\alpha^2 + \gamma_k^2) + (\alpha^2 - \gamma_k^2)^2 \right]} \left[ e^{-\alpha_k t} (\xi_k \sin \gamma_k t + \alpha_k \cos \gamma_k t) - \alpha_k \cos \alpha t - \xi_k \sin \alpha t \right] (\alpha_k^2 + \eta_k^2) + \\ \left[ e^{-\alpha_k t} (\eta_k \sin \gamma_k t - \alpha_k \cos \gamma_k t) + \alpha_k \cos \alpha t + \eta_k \sin \alpha t \right] (\alpha_k^2 + \xi_k^2) \quad (2.17)$$

39 Ref. (11), Chap.9 "The Dynamic Influence (Green's) Function", pp.229-243.

40 Ibidem, a este tipo de funciones se les denomina funciones de Green, para este caso se conocerá como la función de Green dinámica del cascarón, p.230.

41 Ibidem, uno de los primeros en utilizar esta técnica fue Cottis quien calculó la respuesta de un cascarón a una onda viajera de presión, p.239.

en donde:

$$\alpha = \frac{k\pi v}{l}$$

$$a_k = C_k \omega_k$$

$$\xi_k = \alpha + \gamma_k$$

$$\eta_k = \alpha + \gamma_k$$

Por lo tanto la respuesta<sup>42</sup> para la viga con amortiguamiento será:

$$u(x,t) = A_0 I_k(t) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{l} \quad (2.18)$$

en donde  $A_0 = \frac{2F}{\pi \gamma_k l}$ ,  $F$ =magnitud de la fuerza e  $I_k(t)$  está dada por la ec.(2.17).

Del denominador de la ec. (2.17) se observa que la resonancia<sup>43</sup> ocurre cuando  $\alpha = \gamma_k$ , entonces todas las velocidades

$$v = \frac{l \omega_k}{\pi k} \quad (2.19)$$

deben evitarse. Lo anterior puede verse por medio de los periodos; el tiempo que toma la carga móvil para atravesar el cilindro es

$$T = \frac{l}{v} \quad (2.20)$$

Ya que  $T_k = \frac{2\pi}{\omega_k}$  y como  $\alpha$  es una frecuencia de excitación, su periodo

$$T_\alpha = \frac{2}{\alpha} T \quad (\alpha=1,2,3,\dots) \quad (2.21)$$

Esto significa que si la carga tarda  $T$  segundos para atravesar el cilindro, los periodos posibles de resonancia son  $2T$ ,  $T$ ,  $(2/3)T$ ,  $(2/4)T$ , etc.

Un punto interesante, entre otros, en el texto de Soedel lo representa el siguiente enunciado: *la aplicación súbita de una carga estática en un medio continuo, produce en el límite dos veces la magnitud de los*

<sup>42</sup> Soedel denomina sistemas reducidos a las placas, anillos, vigas y barras. El enfoque para estos sistemas es parecido al de cascarones.

<sup>43</sup> Ver capítulo II, ecs. (2.5) y (2.6.).

esfuerzos que se presentarían por la aplicación gradual de tal fuerza. El primero en establecer este valor fue Krylov en 1898 (ref.(11), s.6 "Step and Impulse Response, pp.210-212). En su momento oportuno, se mostrará la importancia fundamental que este límite adquiere.

Fryba<sup>44</sup> (1972) considera dos líneas que pueden seguirse al realizar el examen teórico de sólidos y elementos sujetos a cargas móviles. En la primera, la *expansión de series* se utiliza para elementos de *longitud finita* y proporciona soluciones relativamente fáciles, aunque para velocidades muy grandes se tienen problemas de convergencia. La segunda línea se aplica a sólidos y elementos de *grandes dimensiones (longitud infinita)* y considera sólo la vibración estacionaria del cuerpo. Este método tiene la ventaja de proporcionar una solución en forma cerrada, aunque en muchos casos complejos dicha solución se dificulta.

La mayoría de los problemas que plantea Fryba son resueltos por métodos de ecuaciones integrales. Para las coordenadas en el espacio se utiliza la *transformación de Fourier* y para las coordenadas en el tiempo se aplica la *transformación de Laplace-Carson*.

En el análisis que Fryba realiza de una viga simplemente apoyada sujeta a una fuerza móvil (fig. 1.1.1), adopta las siguientes suposiciones (Ref.(8), p.p.13-14) :

- A) El comportamiento de la viga se describe por las ecuaciones diferenciales de Bernoulli-Euler; la ley de Hooke, la hipótesis de Navier y el principio de Saint-Venant pueden aplicarse. La viga tiene una sección transversal constante y una masa constante por unidad de longitud.
- B) La masa de la carga móvil es pequeña comparada con la de la viga; esto significa que no se consideran los efectos gravitacionales de la carga.
- C) La carga se mueve a velocidad constante, de izquierda a derecha.
- D) El amortiguamiento de la viga es proporcional a la velocidad de vibración.

---

<sup>44</sup> Ref.(8), Chap. 1, pp.13-32, Chap. 2, pp.33-43.

E) Los cálculos se realizarán tomando en cuenta que para una viga simplemente apoyada la deflexión y el momento flexionante en los extremos son nulos, además la viga está en reposo en el instante en que arriba la fuerza.

Entonces, el problema se describe por la siguiente ecuación:

$$EJ \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + 2\mu\omega_b \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \delta(x-ct)P \quad (2.22)$$

Las condiciones de frontera son

$$\begin{aligned} v(0,t)=0 & ; & v(l,t)=0, \\ \left. \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0 & ; & \left. \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0 \end{aligned} \quad (2.22.1)$$

y las condiciones iniciales

$$v(x,0)=0 \quad ; \quad \left. \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (2.22.2)$$

en donde:

$v(x,t)$  = deflexión de la viga en un punto  $x$  y tiempo  $t$ , medida desde la posición de equilibrio.

$E$  = módulo de Young.

$J$  = momento de inercia constante de la sección transversal de la viga.

$\mu$  = masa constante por unidad de longitud de la viga.

$\omega_b$  = frecuencia circular de amortiguamiento de la viga.

$P$  = fuerza concentrada de magnitud constante.

$l$  = claro de la viga.

$c$  = rapidez constante de la carga viajera.

$\delta(x)$  se le llama *Función (impulso, también delta) de Dirac*, que en nuestro caso expresa la carga concentrada como sigue

$$P(x,t) = \delta(x)P \quad (2.23)$$

Las propiedades de la delta de Dirac, se expresan por las siguientes relaciones:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (2.24)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x) dx = f(a)$$

o

$$\int_a^b \delta(x-\xi) f(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{para } \xi < a < b \\ f(\xi) & \text{para } a < \xi < b \\ 0 & \text{para } a < b < \xi \end{cases} \quad (2.23.2)$$

Las relaciones fundamentales de Fourier para la transformación de la integral del seno son

$$V(j, t) = \int_0^l v(x, t) \operatorname{sen} \frac{j\pi x}{l} dx, \quad j=1, 2, 3, \dots$$

$$v(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{j=1}^{\infty} V(j, t) \operatorname{sen} \frac{j\pi x}{l} \quad (2.24)$$

Utilizando las condiciones de frontera y las propiedades de la función de Dirac y multiplicando cada término de la ec.(2.22) por  $\operatorname{sen}(j\pi x/l)$  e integrando con respecto a  $x$  entre 0 y  $l$ , obtenemos

$$\frac{j^4 \pi^4}{l^4} EJ V(j, t) + \mu \ddot{V}(j, t) + 2\mu \omega_b \dot{V}(j, t) = P \operatorname{sen} \frac{j\omega t}{l} \quad (2.25)$$

en donde la frecuencia circular del  $j$ -ésimo modo de vibrar de una viga simplemente apoyada es

$$\omega_{(j)}^2 = \frac{j^4 \pi^4}{l^4} \frac{EJ}{\mu}, \quad \text{su correspondiente frecuencia natural es}$$

$$f_{(j)} = \frac{\omega_{(j)}}{2\pi} = \frac{j^2 \pi}{2l^2} \left( \frac{EJ}{\mu} \right)^{1/2}$$

y la frecuencia circular se denota por

$$\omega = \frac{\pi c}{l}$$

Utilizando las expresiones anteriores, la ec.(2.25) se convierte en

$$\ddot{V}(j, t) + 2\omega_b \dot{V}(j, t) + \omega_{(j)}^2 V(j, t) = \frac{P}{\mu} \operatorname{sen}(j\omega t) \quad (2.26)$$

Aplicando el método de Laplace-Carson a la ec.(2.26) y utilizando la



ec. (2.24) obtenemos la solución para el caso en estudio ( $t \leq T$ )

$$v(x, t) = v_0 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{J^2 [J^2 (J^2 - \alpha^2) + 4\alpha^2 \beta^2]} \left\{ J^2 (J^2 - \alpha^2) \sin J\omega t - \frac{J\alpha [J^2 (J^2 - \alpha^2) - 2\beta^2]}{(J^4 - \beta^2)^{1/2}} e^{-\omega_b t} \sin \omega'_{(j)} t - 2J\alpha\beta \left[ \cos J\omega t - e^{-\omega_b t} \cos \omega'_{(j)} t \right] \right\} \sin \frac{J\pi x}{l} \quad (2.27)$$

en donde

$$\alpha = \frac{\omega}{\omega_{(1)}} = \frac{c}{2f_{(1)} l} = \frac{T_{(1)}}{2T} = \frac{c l}{\pi} \left( \frac{\mu}{EJ} \right)^{1/2} = \frac{c}{c_{cr}}$$

$$\beta = \frac{\omega_b}{\omega_{(1)}} = \frac{\omega_b J^2}{\pi^2} \left( \frac{\mu}{EJ} \right)^{1/2} = \frac{\phi}{2\pi}$$

son parámetros adimensionales característicos del efecto de rapidez ( $\alpha$ ) y el efecto de amortiguamiento ( $\beta$ ). Además:

$T_{(1)} = 1/f_{(1)}$  es el primer periodo de vibración libre.

$T = 1/c$  es el tiempo en que la fuerza atraviesa la viga.

$c_{cr} = 2f_{(1)} l = \frac{\pi}{l} \left( \frac{EJ}{\mu} \right)^{1/2}$  es la velocidad crítica.

$\phi = \omega_b / f_{(1)}$  es el decremento logarítmico del amortiguamiento del sistema.

$v_0 = \frac{Pl^3}{48EJ} = \frac{2P}{\mu l \omega_{(1)}^2} = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EJ}$  en donde  $v_0$  designa la deflexión en

la mitad del claro de la viga, cargada con una fuerza estática  $P$  en el punto  $x=l/2$ .

La frecuencia circular de una viga amortiguada para el caso subcrítico es:

$$\omega_{(j)}^2 = \omega_{(j)}^2 - \omega_b^2$$

Fryba analiza los casos especiales en los que intervienen el valor de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , estos son:

a) Caso estático ( $\alpha=0$ ).

b) Caso sin amortiguamiento ( $\beta=0$ ;  $\alpha \neq 1$ ,  $\alpha \neq n$ ).

c) Caso amortiguado

Subcrítico ( $\alpha \neq 1$ ,  $\beta < 1$ ;  $\alpha \neq n$ ,  $\beta < 1$ ).

Crítico ( $\beta = \beta_{cr} = n^2$ ).

Supercrítico ( $\beta > \beta_{cr}$ ).

Las gráficas de Fryba ilustran el efecto de  $\alpha$  y  $\beta$  en la respuesta  $v_{(1/2,t)}/v_0$ , en función de la posición de la carga ( $ct/l$ ). Los valores para  $\alpha$  son 0, 0.5, 1 y 2 y para  $\beta$  0, 0.1, 1 y 2. Con respecto a cada uno de los casos anteriores, se proponen simplificaciones de la ec. (2.27).

Fryba concluye que el amortiguamiento no es de gran importancia; en cuanto a la rapidez, para el caso de velocidad subcrítica,  $\alpha < 1$ , la deflexión máxima ocurre en la mitad del claro de la viga y se produce cuando la carga está alrededor de este punto. Para el caso supercrítico,  $\alpha > 1$ , el máximo ocurre hasta el instante en que  $t=T$ , es decir, cuando la fuerza móvil sale de la viga.

Fryba observa que la deflexión dinámica máxima está asociada con valores de  $\alpha$  entre 0.5 a 0.7, para magnitudes mayores de  $\alpha$  nota que la deflexión tiende rápidamente a cero y que para valores menores de  $\alpha$ , la deflexión es prácticamente igual a la deflexión estática.

Referente a su aplicación a puentes, el autor explica la relación entre el análisis de cargas viajeras sobre vigas y puentes ferroviarios y carreteros. Hace notar que los puentes generalmente están simplemente apoyados, tienen una masa mucho más grande que la masa del vehículo y es muy baja su primer frecuencia natural. Por lo tanto los efectos de los vehículos pueden reemplazarse por los efectos de las cargas viajeras.

Tomando en cuenta que para puentes con grandes claros el amortiguamiento es pequeño, la siguiente fórmula puede utilizarse con fines prácticos pues proporciona satisfactoriamente la deflexión dinámica

$$v(x,t) = v_0 \sin \omega t \sin \frac{\pi x}{l} \quad (2.28)$$

En un apartado de su libro<sup>45</sup>, Fryba compara la fórmula (2.28) con resultados experimentales. Este análisis simplificado muestra la validez de la teoría expuesta anteriormente.

Además el autor dedica un capítulo<sup>46</sup> al *coeficiente dinámico*, que en la práctica se define como la relación de la deflexión dinámica máxima a la deflexión estática en la mitad del claro de la viga

$$\delta = \frac{\text{MAX. } V_{(l/2, t)}}{V_0} \quad (2.29)$$

Como en el caso anterior compara los resultados teóricos con los experimentales, observando gran similitud.

Eichmann<sup>47</sup> (1953) hace notar la discrepancia que existe en los criterios para evaluar el máximo efecto de una fuerza móvil sobre una viga simplemente apoyada. L.E. Goodman<sup>48</sup> afirma que la *deflexión máxima dinámica no ocurre en el instante en que la carga sale de la viga*, como propuso Timoshenko<sup>49</sup>, sino que ocurre *aproximadamente a tres cuartos del claro de la viga*. Esto implica que el *factor correcto de amplificación máximo sea considerablemente mayor* al que aparece en la literatura y que su *correspondiente velocidad sea en gran medida menor* a la denominada *velocidad de resonancia*.

Si definimos el factor de amplificación como

$$A = \frac{\omega_1}{\omega_{st}} = \frac{\text{Deflexión dinámica máxima.}}{\text{Deflexión máxima estática debida a una carga concentrada.}}$$

podemos obtener una expresión, considerando sólo el primer modo, la cual Eichmann representa por

$$A = \frac{96}{\pi^4} \frac{\text{sen}(\pi vt/l) - (\pi v/\omega_1 l) \text{sen}(\omega_1 t)}{1 - (\pi v/\omega_1 l)^2} \quad (2.30)$$

45 Ibidem, Part II, pp.28-31.

46 Ibidem, Part III "Moving Harmonic Force", pp.33-43.

47 Ref.(7), p.582.

48 Idem.

49 Ref.(13), "Moving Constant Force", pp.352-356.

en donde  $v$ =velocidad de la fuerza constante,  $l$ =claro de la viga y  $\omega_1$  es la primera frecuencia natural de la viga. Se considera sólo el primer modo ya que la serie para la solución de la deflexión converge rápidamente<sup>50</sup>. Esta contiene el factor  $l^{-4}$ , en donde  $l$  denota el orden del modo.

Definiendo las cantidades adimensionales  $\beta = \omega_1 l/v$ , un factor que varía inversamente con la velocidad y  $k = vt/l$ , que define la posición de la fuerza sobre la viga en cualquier tiempo  $t$ . Entonces

$$A = \frac{96}{\pi^4} \frac{\text{sen } nk - (\pi/\beta) \text{sen } \beta k}{1 - (\pi/\beta)^2} \quad (2.31)$$

Diferenciando con respecto a  $k$

$$\frac{dA}{dk} = \frac{96}{\pi^4} \frac{\pi \cos nk - \pi \cos \beta k}{1 - (\pi/\beta)^2} \quad (2.32)$$

Así que para un valor estacionario

$$nk = 2n\pi - \beta k$$

o

$$k = 2n\pi / (\pi + \beta) \quad (2.33)$$

(El símbolo  $n$  denota algún entero). Examinando la ec.(2.32) observamos que  $n$  debe ser positivo, por lo tanto, debe usarse el signo positivo en la ec.(2.33). Las posibilidades más importantes son  $n=0$  y  $n=1$ . Timoshenko<sup>51</sup> estudió el caso para  $n=0$ , que implica  $\beta = \pi$ . Timoshenko afirma que para  $\beta = \pi$  y  $k=1$ , la fuerza sale de la viga y el factor de amplificación es 1.547. Este valor se usó en la literatura como el factor de amplificación máximo. El caso  $n=1$ , sin embargo, tiene un factor de amplificación mayor. En este caso  $k = 2\pi / (\pi + \beta)$  y sustituyendo en la ec.(2.31), resulta

$$A = \frac{96}{\pi^4} \frac{\text{sen} \left[ \frac{2\pi}{(1+\beta/\pi)} \right] - (\pi/\beta) \text{sen} \left[ \frac{2\beta}{(1+\beta/\pi)} \right]}{1 - (\pi/\beta)^2} \quad (2.34)$$

Esta función tiene como máximo un valor de 1.743 para  $\beta = 1.64\pi$ . Por lo tanto la deflexión dinámica máxima es aproximadamente 1.743 veces el valor de la deflexión estática. Esto ocurre cuando la velocidad es tal

<sup>50</sup> Ibidem, "Pulsating Force", ecs. (j), (g) y (h), pp.350-351.

<sup>51</sup> Ibidem, pp.355-358.

que el tiempo de tránsito es de 0.82 veces el periodo fundamental del claro. El valor correspondiente de  $k$  es 0.757, lo cual significa que la fuerza pasa aproximadamente por el punto situado a tres cuartos del claro de la viga, en el instante que la deflexión máxima ocurre.

Roark y Young<sup>52</sup> (1975) presentan los resultados obtenidos por Eichmann<sup>53</sup> y en la parte dedicada al comportamiento de cuerpos bajo esfuerzos dinámicos mencionan algunas características del impacto<sup>54</sup>. Resaltan la necesidad de conocer la carga de impacto para el diseño de un miembro que deberá resistir algún tipo de fuerza (estática y dinámica). Este diseño debe tomar en cuenta que el miembro absorbe determinada cantidad de energía.

Cuando una fuerza se aplica repentinamente<sup>55</sup> a un cuerpo elástico (como por un golpe), una onda de esfuerzos se propaga atravesando al cuerpo con una velocidad

$$V = \sqrt{\frac{386.4E}{\delta}} \text{ in/s} \quad (2.35)$$

donde  $E$  es el módulo de elasticidad del material en libras por pulgada cuadrada y  $\delta$  es la densidad del material en libras por pulgada cúbica.

Cuando una viga uniforme elástica simplemente apoyada está sujeta a un impacto longitudinal por un cuerpo rígido moviéndose con velocidad  $v$ , una onda de esfuerzos de compresión de intensidad

<sup>52</sup> Ref. (10), p. 578.

<sup>53</sup> Ref. (7), p. 562.

<sup>54</sup> Ref. (10), 4. "Dynamic Loading", dividen en dos categorías generales la carga de impacto: la primera considera una masa relativamente grande en movimiento lento golpeando una viga o barra, la energía cinética del movimiento de la masa se asume se convierte en energía de deformación en la viga y la deflexión es parecida a la estática. Un caso especial de esta carga, generalmente denominada carga súbita, ocurre cuando una masa que no está en movimiento se libera repentinamente sobre la viga. Esta produce aproximadamente el doble de esfuerzos que el de la carga aplicada gradualmente. El segundo caso de carga de impacto se presenta cuando la masa de la carga es infinitamente mayor al del miembro. Las ondas de esfuerzo viajan a través del miembro durante el impacto y continúan aún después del rebote, pp. 18-19.

<sup>55</sup> Ibidem, pp. 572-573.

$$\sigma = \frac{v}{V} E \text{ lb/in}^2 \quad (2.36)$$

se propaga. Se puede observar de las ecs.(2.35) y (2.36), que la intensidad del esfuerzo es independiente de la masa del cuerpo móvil, pero la extensión de la zona esforzada o el volumen del material sujeto simultáneamente a este esfuerzo, dependen de la masa del cuerpo móvil.

Si se considera que los esfuerzos debidos al impacto se distribuyen en todas las partes de cualquier cuerpo elástico como en el caso de una carga estática, se puede mostrar que la deformación vertical  $d_1$  y el esfuerzo  $\sigma_1$  que se producen en tal cuerpo (barra, viga, armadura, etc.) por el impacto vertical de un cuerpo cayendo con un peso  $h$ , son más grandes que la deformación  $d$  y el esfuerzo  $\sigma$  producidos por el mismo peso del cuerpo, aplicado como una carga estática en la relación<sup>56</sup>

$$\frac{d_1}{d} = \frac{\sigma_1}{\sigma} = 1 + \sqrt{1 + 2 \frac{h}{d}} \quad (2.37)$$

Si  $h=0$ , tenemos el caso de carga súbita y  $(d_1/d)=(\sigma_1/\sigma)=2$ , como se considera usualmente.

<sup>56</sup> Ibidem, p. 575.

## CAPITULO III.

### 3. MODELO MATEMATICO.

En este capítulo se presenta el *método de operadores con expansión modal* aplicado a la vibración forzada de *medios continuos*, con el propósito de utilizarse como una primera aplicación al *estudio de vigas*. El método se simplifica manejando algunas expresiones del *Análisis de Fourier* para lo cual se supone que existen las llamadas *Series de Fourier Generalizadas para cualquier condición de frontera*. En base a este método se obtiene un modelo matemático que representa entre otros problemas, el efecto de una carga concentrada viajando a través del claro de una viga simplemente apoyada. La solución incluye el caso *amortiguado* y el caso *no amortiguado*. Una vez que se obtienen dichas expresiones, nuestra atención se enfocará al *análisis numérico* para obtener el *efecto máximo* en el sistema de una carga puntual viajando a velocidad constante.

#### 3.1. VIBRACION FORZADA EN MEDIOS CONTINUOS.<sup>57</sup>

Es de interés fundamental para la ingeniería el estudio de la vibración forzada en medios continuos; conociendo los eigenvalores y los eigenvectores es posible obtener la solución forzada en términos de dichos elementos. Este enfoque se llama *representación modal o expansión modal* y data del trabajo de Bernoulli en 1747.

Las fuerzas se suponen independientes del movimiento del continuo y es por lo tanto aplicable a sistemas conservativos, esta es una aproximación admisible para la mayoría de los casos de vibración de medios continuos en ingeniería.

##### 3.1.1. El factor de participación modal.

Una fuerza excitará los modos naturales de un continuo en diversas

---

<sup>57</sup>Ref. (11), Chap.8 "Forced Vibrations of Shells by Modal Expansion", pp.189-209.

cantidades. La magnitud de participación de cada modo en la *respuesta total dinámica* está definida por el factor de participación modal. Este factor puede ser cero para ciertos modos y puede acercarse a grandes valores para otros, dependiendo de la naturaleza de la excitación.

En sentido matemático, los modos naturales de un continuo representan un grupo infinito de funciones ortogonales que satisfacen las condiciones de frontera de tal continuo; este espacio funcional multidireccional puede usarse para representar cualquier respuesta de la estructura. En el caso de sistemas con grados finitos de libertad, el espacio funcional es de dimensión finita y el número de vectores o modos naturales es igual al número de grados de libertad. Para sistemas continuos el número de grados de libertad es infinito. Esto significa que para el problema de equilibrio de sistemas continuos tridimensionales, la solución general para los desplazamientos será una serie infinita del siguiente tipo:

$$u_i(\alpha_1, \alpha_2, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(t) U_{ik}(\alpha_1, \alpha_2) \quad (3.1.1.1)$$

en donde  $i=1,2,3$ . Las variables  $U_{ik}$  son las componentes modales naturales en las tres direcciones principales. Los factores modales  $\eta_k$  no se conocen y tienen que determinarse de la siguiente manera.

Las ecuaciones de movimiento son de la forma:

$$L_1(u_1, u_2, u_3) - \lambda \dot{u}_1 - \rho h \ddot{u}_1 = -q_1 \quad (3.1.1.2)$$

en donde  $\lambda$  es un factor de amortiguamiento viscoso equivalente. Este factor se considera igual en las tres direcciones principales; lo cual no es necesariamente cierto. Debido a que los valores de amortiguamiento son notoriamente difíciles de obtener teóricamente y en vista de que se tendrá un mayor valor cualitativo que cuantitativo (además un factor de amortiguamiento uniforme ofrece ventajas en el cálculo), se decidió adoptar un factor de amortiguamiento uniforme. (Ver (14), los operadores  $L_1$  se definen de acuerdo al problema que se desea analizar)

Vemos de nuestras ecuaciones de movimiento para medios continuos, que al sustituir la ec.(3.1.1.1) en la ec.(3.1.1.2), resultará



$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ \eta_k L_1(U_{1k}, U_{2k}, U_{3k}) - \lambda_k^2 U_{1k} - \rho h \eta_k^2 U_{1k} \right] = -q_1 \quad (3.1.1.3)$$

Sin embargo, de nuestro análisis de eigenvalores sabemos que

$$L_1(U_{1k}, U_{2k}, U_{3k}) = -\rho h \omega_k^2 U_{1k} \quad (3.1.1.4)$$

Sustituyendo la ec. anterior en la ec.(3.1.1.3) resulta

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\rho h \eta_k^2 + \lambda_k^2 + \rho h \omega_k^2 \eta_k^2) U_{1k} = q_1 \quad (3.1.1.5)$$

Ya que sabemos que los modos naturales  $U_{1k}$  son ortogonales, *procede - remos como en un análisis de Fourier tomando ventaja de la ortogonalidad de las funciones  $U_{1p}$ . Multiplicamos ambos lados de la ec.(3.1.1.5) por un modo  $U_{1p}$ , en donde p, en general, es igual o no a k y se obtiene*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\rho h \eta_k^2 + \lambda_k^2 + \rho h \omega_k^2 \eta_k^2) U_{1k} U_{1p} = q_1 U_{1p} \quad (3.1.1.6)$$

La cual en forma expandida se puede escribir como sigue:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\rho h \eta_k^2 + \lambda_k^2 + \rho h \omega_k^2 \eta_k^2) U_{1k} U_{1p} = q_1 U_{1p} \quad (3.1.1.7)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\rho h \eta_k^2 + \lambda_k^2 + \rho h \omega_k^2 \eta_k^2) U_{2k} U_{2p} = q_2 U_{2p} \quad (3.1.1.8)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\rho h \eta_k^2 + \lambda_k^2 + \rho h \omega_k^2 \eta_k^2) U_{3k} U_{3p} = q_3 U_{3p} \quad (3.1.1.9)$$

Sumando las ecs.(3.1.1.7), (3.1.1.8) y (3.1.1.9) e integrando so - bre la superficie del medio continuo y a lo largo de las coordenadas  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , nos quedará la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (\rho h \eta_k^2 + \lambda_k^2 + \rho h \omega_k^2 \eta_k^2) \int_{\alpha_2} \int_{\alpha_1} (U_{1k} U_{1p} + U_{2k} U_{2p} + U_{3k} U_{3p}) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = \\ \int_{\alpha_2} \int_{\alpha_1} (q_1 U_{1p} + q_2 U_{2p} + q_3 U_{3p}) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (3.1.1.10) \end{aligned}$$

Utilizando las condiciones de ortogonalidad, definidas por las siguientes ecuaciones:

$$\int_{\alpha_2} \int_{\alpha_1} (U_{1k} U_{1p} + U_{2k} U_{2p} + U_{3k} U_{3p}) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = \delta_{pk} N_k \quad (3.1.11)$$

en donde

$$\delta_{pk} = \begin{cases} 1 & \text{si } p=k \\ 0 & \text{si } p \neq k \end{cases} \quad (3.1.12)$$

podemos suprimir la sumatoria<sup>58</sup> ya que todos los términos se eliminan, exceptuando el término para el cual  $p=k$ . Obteniéndose lo siguiente:

$$\ddot{\eta}_k + \frac{\lambda}{\rho h N_k} \dot{\eta}_k + \omega_k^2 \eta_k = F_k \quad (3.1.13)$$

en donde

$$F_k = \frac{1}{\rho h N_k} \int_{\alpha_2} \int_{\alpha_1} (q_1 U_{1k} + q_2 U_{2k} + q_3 U_{3k}) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2$$

y con

$$N_k = \int_{\alpha_2} \int_{\alpha_1} (U_{1k}^2 + U_{2k}^2 + U_{3k}^2) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (3.1.14)$$

Así, si tomamos  $k$  términos de la o las series de expansión modal como aproximación a un espacio completo infinito, resolveremos la ecuación definiendo los factores de participación modal para  $k$  funciones de participación. Las funciones que deben conocerse son las fuerzas  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$ , las componentes modales  $U_{1k}$ ,  $U_{2k}$  y  $U_{3k}$  y las frecuencias  $\omega_k$ . Además deben conocerse la densidad de masa por unidad de superficie del medio continuo y el factor de amortiguamiento  $\lambda$  (se estima).

### 3.1.2. Condiciones Iniciales.

Dos condiciones iniciales para cada factor modal de participación se requieren para la solución completa de la ec.(3.1.13); estas son los desplazamientos iniciales  $U_1(\alpha_1, \alpha_2, 0)$  y las velocidades iniciales  $\dot{U}_1(\alpha_1, \alpha_2, 0)$ , que se deben especificar para todos los puntos del continuo. En muchos casos prácticos las velocidades iniciales son cero, excepto para

<sup>58</sup> Ibidem, 5.8 "The Orthogonality Property of Natural Modes", ecs. (5.8.22) y (5.8.23), p.108.

problemas en donde ocurre un cambio periódico de condiciones de frontera.

Cuando se quiere conocer la *respuesta transitoria* y se especifican las condiciones iniciales, convertimos estas condiciones en condiciones iniciales del *factor de participación modal*, las cuales son  $\eta_k$  y  $\dot{\eta}_k$  en  $t=0$ . De la ec.(3.1.1.1), escribiremos

$$u_i(\alpha_1, \alpha_2, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(0) U_{1k}(\alpha_1, \alpha_2) \quad (3.1.2.1)$$

y

$$\dot{u}_i(\alpha_1, \alpha_2, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \dot{\eta}_k(0) U_{1k}(\alpha_1, \alpha_2) \quad (3.1.2.2)$$

Estas ecuaciones deben resolverse para  $\eta_k(0)$  y  $\dot{\eta}_k(0)$ . Multiplicando la ec.(3.1.2.1) por  $U_{ip}(\alpha_1, \alpha_2)$ , en donde  $p \neq k$  o  $p=k$  resulta

$$u_i(\alpha_1, \alpha_2, 0) U_{ip} = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(0) U_{1k} U_{ip} \quad (3.1.2.3)$$

En forma expandida, para  $i=1, 2$  y  $3$

$$u_1(\alpha_1, \alpha_2, 0) U_{1p} = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(0) U_{1k} U_{1p} \quad (3.1.2.4)$$

$$u_2(\alpha_1, \alpha_2, 0) U_{2p} = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(0) U_{2k} U_{2p} \quad (3.1.2.5)$$

$$u_3(\alpha_1, \alpha_2, 0) U_{3p} = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(0) U_{3k} U_{3p} \quad (3.1.2.6)$$

Sumando estas ecuaciones e integrando sobre la superficie del medio continuo

$$\int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} \left[ u_1(\alpha_1, \alpha_2, 0) U_{1p} + u_2(\alpha_1, \alpha_2, 0) U_{2p} + u_3(\alpha_1, \alpha_2, 0) U_{3p} \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(0) \int_{\alpha_2} \int_{\alpha_1} (U_{1k} U_{1p} + U_{2k} U_{2p} + U_{3k} U_{3p}) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (3.1.2.7)$$

Por *ortogonalidad* de la ec.(3.1.1.11), eliminamos la sumatoria ya que el lado derecho de la ecuación es cero para cualquier  $p$  excepto  $p=k$ . Entonces obtenemos:

$$\eta_k(0) = \frac{1}{N_k} \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} \left[ u_1(\alpha_1, \alpha_2, 0) U_{1k} + u_2(\alpha_1, \alpha_2, 0) U_{2k} + u_3(\alpha_1, \alpha_2, 0) U_{3k} \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (3.1.2.8)$$

en donde  $N_k$  resulta de la ec. (3.1.1.14).

Siguiendo el mismo procedimiento, resolveremos la ec. (3.1.2.2) para la segunda condición inicial:

$$\dot{\eta}_k(0) = \frac{1}{N_k} \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} \left[ \dot{u}_1(\alpha_1, \alpha_2, 0) U_{1k} + \dot{u}_2(\alpha_1, \alpha_2, 0) U_{2k} + \dot{u}_3(\alpha_1, \alpha_2, 0) U_{3k} \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (3.1.2.9)$$

### 3.1.3. Solución de la ecuación del factor de participación modal.

La ecuación del factor de participación modal es la ecuación de un oscilador simple. Así, interpretaremos la vibración forzada del continuo considerando a éste como compuesto de oscilaciones simples, donde cada oscilador consiste en el medio continuo restringido a vibrar en uno de sus modos naturales. Todas estas oscilaciones responden simultáneamente y la vibración total del continuo, es simplemente el resultado de la adición (superposición) de todas las vibraciones individuales.

La ecuación del oscilador simple se resolverá por medio de la técnica de transformación de Laplace. Se obtendrá la solución para amortiguamiento subcrítico<sup>59</sup> ya que es el caso de más importancia en aplicaciones a sistemas estructurales.

La ecuación del factor de participación modal (3.1.1.13) puede escribirse como

$$\ddot{\eta}_k + 2\zeta_k \omega_k \dot{\eta}_k + \omega_k^2 \eta_k = F_k(t) \quad (3.1.3.1)$$

en donde

$$F_k(t) = \frac{1}{\rho h N_k} \int_{\alpha_2} \int_{\alpha_1} (q_1 U_{1k} + q_2 U_{2k} + q_3 U_{3k}) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (3.1.3.2)$$

<sup>59</sup>) *Ibidem*, ver caso crítico y supercrítico, pp. 206-207.

$$\zeta_k = \frac{\lambda}{2\rho\omega_k} \quad (3.1.3.3)$$

$\zeta_k$  se conoce como el *coeficiente de amortiguamiento modal*, y es idéntico al coeficiente de amortiguamiento en el problema de un oscilador simple.

Utilizando la *transformación de Laplace* en la ec.(3.1.3.1), nos permite resolver para el factor de participación modal en el dominio de Laplace:

$$\eta_k(s) = \frac{F_k(s) + \eta_k(0) \left[ s + 2\zeta_k \omega_k \right] + \dot{\eta}_k(0)}{s^2 + \left[ s + \zeta_k \omega_k \right] + \omega_k^2 \left[ 1 - \zeta_k^2 \right]} \quad (3.1.3.4)$$

La *transformación inversa* depende de si el término  $(1 - \zeta_k^2)$  es positivo, cero o negativo. El caso en que  $(1 - \zeta_k^2)$  es positivo, cuando  $\zeta_k < 1$ , es el más común ya que es muy difícil que un sistema continuo o discreto se amortigue arriba de tal valor. Este caso se denomina *subcrítico*, el caso *crítico* ocurre cuando  $\zeta_k = 1$  y el *amortiguamiento supercrítico* tiene lugar cuando  $\zeta_k > 1$ .

Para el caso subcrítico ( $\zeta < 1$ ) definimos un número real y positivo  $\gamma_k$

$$\gamma_k = \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} \quad (3.1.3.5)$$

y la transformación inversa de Laplace de la ec.(3.1.3.4), nos dará el siguiente resultado:

$$\eta_k(t) = e^{-\zeta_k \omega_k t} \left[ \eta_k(0) \cos \gamma_k t + \left[ \eta_k(0) \zeta_k \omega_k + \dot{\eta}_k(0) \right] \frac{\sin \gamma_k t}{\gamma_k} \right] + \frac{1}{\gamma_k} \int_0^t F_k(\tau) e^{-\zeta_k \omega_k (t-\tau)} \sin \gamma_k (t-\tau) d\tau \quad (3.1.3.6)$$

La solución se expresa en la forma de la *integral de convolución*, ya que la función de fuerza  $F_k(t)$  es hasta este punto arbitraria. Cuando esta se conoce, la integral de convolución puede evaluarse. También se podría

utilizar la transformación inversa de Laplace de la ec.(3.1.3.4), con una función de fuerza conocida.

Debe notarse que las vibraciones causadas por las condiciones iniciales, son oscilatorias pero *decaen exponencialmente con el tiempo*. Cuando la integral de convolución se evalúa para una fuerza específica, se dividirá en una *parte transitoria* y posiblemente en una *parte estacionaria* si la fuerza es periódica. La parte transitoria decaerá exponencialmente con el tiempo.

Un caso especial de considerable interés técnico sucede cuando el *amortiguamiento es nulo*. La solución se reduce a

$$\eta_k(t) = \eta_k(0) \cos \omega_k t + \dot{\eta}_k(0) \frac{\sin \omega_k t}{\omega_k} + \frac{1}{\omega_k} \int_0^t F_k(\tau) \sin \omega_k (t-\tau) d\tau \quad (3.1.3.7)$$

Ya que la mayoría de las estructuras están ligeramente amortiguadas, la ec.(3.1.3.7) se utiliza para estimar una respuesta aproximada con un cálculo relativamente simple.

#### 3.1.4. Vibración forzada en placas<sup>80</sup>.

En el caso especial de una placa, el problema se simplifica para una solución con movimiento transversal dominante como sigue:

$$F_k = \frac{1}{\rho h N_k} \int_{\alpha_2} \int_{\alpha_1} q_3 U_{3k} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (3.1.4.1)$$

en donde

$$N_k = \int_{\alpha_2} \int_{\alpha_1} U_{3k}^2 A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (3.1.4.2)$$

La solución para un medio con cargas en su plano, involucrará la siguiente función:

<sup>80</sup> Ibidem, 8.4 "Reduced System", p.208.

$$F_k = \frac{1}{\rho h N_k} \int_{\alpha_2} \int_{\alpha_1} (q_1 U_{1k} + q_2 U_{2k}) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (3.1.4.3)$$

en donde

$$N_k = \int_{\alpha_2} \int_{\alpha_1} (U_{1k}^2 + U_{2k}^2) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (3.1.4.4)$$

Para aproximaciones de cascarones y placas, cuando los modos transversales son dominantes, las ecs. (3.1.4.1) y (3.1.4.2) se aplican. Esta es una buena aproximación ya que  $|U_{3k}| \gg |U_{1k}|$ ,  $|U_{2k}|$  para modos con movimiento transversal dominante.

### 3.1.5. Vibración forzada en vigas<sup>61</sup>.

Para la vibración transversal de una viga

$$F_k = \frac{1}{\rho h N_k} \int_{\alpha_2} \int_{\alpha_1} q_3 U_{3k} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (3.1.5.1)$$

en donde

$$N_k = \int_{\alpha_2} \int_{\alpha_1} U_{3k}^2 A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (3.1.5.2)$$

## 3.2. ANALISIS DE FOURIER<sup>62</sup>.

### 3.2.1. Ortogonalidad entre funciones.

Dos funciones  $f_1$  y  $f_2$  se dicen ortogonales en un intervalo  $a \leq x \leq b$  si

$$\int_a^b f_1(x) f_2(x) dx = 0$$

Un conjunto de funciones de valores reales  $\phi_0(x)$ ,  $\phi_1(x)$ ,  $\phi_2(x)$ , ..., se dice ortogonal en un intervalo  $a \leq x \leq b$  si

$$\int_a^b \phi_m(x) \phi_n(x) dx \begin{cases} = 0 & , m \neq n \\ \neq 0 & , m = n \end{cases}$$

<sup>61</sup> Ibidem, p.209.

<sup>62</sup> Ref.(14).

### 3.2.2. Norma de una función.

Al número positivo  $\|\phi_n(x)\|^2 = \int_a^b \phi_n^2(x) dx$  se le llama norma cuadrada de  $\phi_n(x)$  y a

$\|\phi_n(x)\| = \sqrt{\int_a^b \phi_n^2(x) dx}$  se le conoce como la norma de la función  $\phi_n(x)$ .

#### 3.2.2.1. Conjunto ortonormal.

Cuando  $\|\phi_n(x)\|=1$  para  $n=0,1,2, \dots$  el conjunto  $\{\phi_n(x)\}$  se dice es ortonormal en el intervalo de definición.

#### 3.2.3. Coeficientes de Fourier.

Cualquier conjunto ortogonal de funciones  $\{\phi_n(x)\}$ ,  $n=0,1,2, \dots$  puede normalizarse, esto es, puede transformarse en un conjunto ortonormal dividiendo cada función por su norma.

Si  $\{\phi_n(x)\}$  es un conjunto ortogonal infinito de funciones, que satisfacen condiciones de frontera arbitrarias en un intervalo  $a \leq x \leq b$ , y  $f(x)$  es una función definida en el intervalo  $a \leq x \leq b$ , tal que se puede expresar como la combinación lineal de los elementos  $\phi_n(x)$  como sigue:

$$f(x) = c_0 \phi_0(x) + c_1 \phi_1(x) + \dots + c_n \phi_n(x) + \dots$$

entonces al multiplicar la ecuación anterior por  $\phi_n(x)$  e integrando sobre el intervalo de definición, de  $x=a$  hasta  $x=b$ , obtenemos lo siguiente:

$$\int_a^b f(x) \phi_n(x) dx = c_0 \int_a^b \phi_0(x) \phi_n(x) dx + c_1 \int_a^b \phi_1(x) \phi_n(x) dx + \dots + c_n \int_a^b \phi_n(x) \phi_n(x) dx + \dots$$



Por ortogonalidad, cada término en el lado derecho de esta ecuación es cero, exceptuando cuando  $m=n$ . En este caso

$$\int_a^b f(x)\phi_n(x) dx = c_n \int_a^b \phi_n(x)^2 dx$$

se deduce que los coeficientes requeridos son:

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x) dx}{\int_a^b \phi_n(x)^2 dx}, \quad n=0,1,2,\dots$$

### 3.2.4. Serie de Fourier generalizada.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x) \quad (3.2.4.1)$$

en donde

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x) dx}{\int_a^b \phi_n(x)^2 dx} \quad (3.2.4.2)$$

$\phi_n(x)$  deberá satisfacer condiciones de frontera arbitrarias, como ya se especificó.

La serie (3.2.4.1) con coeficientes (3.2.4.2), se llama *serie de Fourier generalizada*.

### 3.3. ANALISIS DINAMICO DE UNA VIGA SIMPLEMENTE APOYADA CON UNA CARGA PUNTUAL VIAJANDO A TRAVES DE SU CLARO.

La respuesta del sistema se determinará por medio de la *deflexión máxima de la viga* considerandose<sup>83</sup> un análisis elástico. La sección transversal es constante y la rigidez de la viga a flexión es  $EI$ . La masa de la carga se considera muy pequeña comparada con la masa de la viga. El amortiguamiento es de tipo viscoso y la velocidad a la que se desplaza la

<sup>83</sup> Ver Capítulo II.

fuerza es constante. Las condiciones iniciales y las de frontera son iguales a cero<sup>64</sup>. (Ver fig.1.1.1).

Las ecs. (3.2.4.1) y (3.2.4.2) se pueden escribir<sup>65</sup> como sigue:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi_k(x) \quad (3.3.1)$$

$$c_k = \frac{\langle f(x), \phi_k(x) \rangle}{\langle \phi_k(x), \phi_k(x) \rangle} \quad (3.3.2)$$

en donde  $c_k$  son los coeficientes de la serie (3.3.1),  $\phi_k(x) = \text{sen} \frac{k\pi x}{l}$  es la función coordenada de la viga simplemente apoyada y  $f(x)$  es la función de carga. Además, para dos funciones arbitrarias  $g_1(x)$  y  $g_2(x)$  definidas en el intervalo  $(a, b)$ , se tendrá que:

$$\langle g_1(x), g_2(x) \rangle = \int_b^a g_1(x) g_2(x) dx$$

Utilizando la ec. (2.23) que expresa la carga concentrada por medio de la función de Dirac y la ec. (2.23.2) que representa las propiedades de esta función, para obtener los coeficientes tenemos

$$\begin{aligned} \langle f(x), \phi_k(x) \rangle &= \int_0^l P_0 [\delta(x-\xi)] \text{sen} \frac{k\pi x}{l} dx \\ &= P_0 \text{sen} \frac{k\pi \xi}{l} = P_0 \text{sen} \frac{k\pi v_0 t}{l} \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

en donde  $P_0$  = magnitud de la fuerza y  $\xi$  será reemplazada por  $v_0 t$ , para representar el movimiento de la carga a velocidad constante  $v_0$ . Por otro lado,  $\|\phi_k(x)\|^2$  se obtiene<sup>66</sup> como sigue:

$$\langle \phi_k(x), \phi_k(x) \rangle = \int_0^l \text{sen}^2 \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{l}{2} \quad (3.3.4)$$

64 Idem, ecs. (2.22.1) y (2.22.2).

65 Ref. (14).

66 Discrepancia y confusión entre los diversos autores.

Sustituyendo las ecs. (3.3.3) y (3.3.4) en la ec. (3.3.2) obtenemos:

$$c_k = \frac{2P_0}{l} \operatorname{sen} \frac{k\pi x_0}{l} \quad (3.3.5)$$

La función de carga se obtiene sustituyendo la ec. (3.3.5) en la ec. (3.3.1), entonces

$$f(x) = \frac{2P_0}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen}(\alpha_k t) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{l} \quad (3.3.6)$$

en donde  $\alpha_k = \frac{k\pi v_0}{l}$

De las ecs. (3.1.4.1), (3.1.4.2) y (3.3.2) se obtiene

$$F_k = \frac{c_k}{m} \quad (3.3.7)$$

en donde  $m$  es la masa por unidad de longitud. Entonces de la ec. (2.22.2) y sustituyendo la ec. (3.3.7) en la ec. (3.1.3.6), obtenemos:

$$\eta_k(t) = \frac{1}{\gamma_k m} \int_0^t c_k e^{-\alpha_k(t-\tau)} \operatorname{sen} \gamma_k(t-\tau) d\tau \quad (3.3.8)$$

en donde:

$\eta_k(t)$  = factor de participación modal.

$\omega_k = \sqrt{\frac{EJ}{m} \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2}$  = frecuencia natural del sistema para el  $k$ -ésimo modo de vibrar.

$\lambda$  = fracción del amortiguamiento crítico.

$\zeta_k = \frac{\lambda}{2m\omega_k}$  = factor de amortiguamiento modal.

$\gamma_k = \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2}$  (para el caso subcrítico).

$\alpha_k = \zeta_k \omega_k$

Sustituyendo la ec. (3.3.5) en la ec. (3.3.8), se obtiene:

$$\eta_k(t) = \frac{2P_0}{mI\gamma_k} \int_0^t e^{-\alpha_k(t-\tau)} \frac{kxv_0}{I} \sin \gamma_k(t-\tau) d\tau \quad (3.3.9)$$

Integrando esta última ecuación:

$$\eta_k(t) = \frac{P_0}{mI\gamma_k \left[ \alpha_k^2 + 2\alpha_k^2(\alpha_k^2 + \gamma_k^2) + (\alpha_k^2 - \gamma_k^2)^2 \right]}$$

$$\left( \left[ e^{-\alpha_k t} \left( \xi_k \sin \gamma_k t + \alpha_k \cos \gamma_k t \right) - \alpha_k \cos \alpha_k t - \xi_k \sin \alpha_k t \right] \left[ \alpha_k^2 + \gamma_k^2 \right] + \left[ e^{-\alpha_k t} \left( I_k \sin \gamma_k t - \alpha_k \cos \gamma_k t \right) + \alpha_k \cos \alpha_k t + I_k \sin \alpha_k t \right] \left[ \alpha_k^2 + \xi_k^2 \right] \right) \quad (3.3.10)$$

en donde

$$I_k = \alpha_k + \gamma_k$$

$$\xi_k = \alpha_k - \gamma_k$$

De la ec. (3.1.1) la deflexión será

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (3.3.11)$$

Para el caso en el que el amortiguamiento es cero ( $\lambda=0$ ),  $\alpha_k=0$  y  $\gamma_k=\omega_k$ , entonces la ec. (3.3.11) se reduce a la siguiente expresión:

$$u(x,t) = \frac{2P_0}{mI} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_k \left( \omega_k^2 - \alpha_k^2 \right)} \left[ \omega_k \sin \alpha_k t - \alpha_k \sin \omega_k t \right] \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (3.3.12)$$

## CAPITULO IV.

### 4. ANALISIS NUMERICO.

El siguiente estudio consistirá en variar los parámetros del sistema modelado en la etapa anterior, para ello se utilizarán las expresiones (3.3.6) y (3.3.12) que representan la función de carga y la deflexión dinámica en el sistema sin amortiguamiento<sup>67</sup>, respectivamente.

Los parámetros a variar son:

- A) Velocidad a la que viaja la carga sobre la viga ( $v_0$ ).
- B) Geometría de la sección transversal, por medio de la inercia (I).
- C) Claro de la viga (J).

La tabla (4.1.1) muestra los valores de la longitud entre los apoyos de la viga. Para el análisis se utilizaron perfiles de acero tipo W<sup>68</sup>, con módulo de elasticidad  $E=30\ 000\ 000$  (lb/in<sup>2</sup>), en la tabla (4.1.2) se presentan las características de las secciones utilizadas. El rango de variación de la velocidad es de 1 a 100 000 (in/s) y la carga tiene una magnitud  $P_0=10\ 000$  lbs.

Nuestro principal objetivo es obtener la respuesta dinámica del sistema, tomando como referencia el máximo estático.

Al inicio se probará numéricamente la convergencia de la serie que representa la función de carga, posteriormente se calculará la deflexión dinámica del sistema para observar el comportamiento de éste ante el cambio de posición de la carga al ir viajando a cierta velocidad constante. La siguiente etapa consistirá en obtener la envolvente de los desplazamientos dinámicos máximos, calculados para cada velocidad de cruceo analizada.

---

67 El efecto de amortiguamiento se desprecia, lo anterior se justifica desde el punto de vista teórico, ver capítulo II. Además un análisis numérico que se realizó para el caso subcrítico mostró la pequeña diferencia con el caso no amortiguado.

68 Ref. (2), Chapter I "W Shapes", Dimensions and Properties, pp. 15-29.

l	1	2	3	4	5	6
$I_1$ (in <sup>4</sup> )	200	300	500	800	1200	2000

Tabla (4.1.1) Claro "l" de la viga.

l	$W_1^*$	$d_i$	$I$ (in <sup>4</sup> )	$m^{**}$
1	36x300	36	20300	0.0647
2	30x211	30	10300	0.0455
3	24x162	24	5170	0.0349
4	33x130	33	6710	0.0280
5	30x173	30	8200	0.0373
6	21x147	21	3630	0.0317
7	21x 83	21	2070	0.0201
8	21x 57	21	1170	0.0123

\*  $d$  (in) x (lb/ft),  $d$  = peralte.  
 \*\* masa por unidad de longitud, (lb s<sup>2</sup>/in<sup>2</sup>).

Tabla (4.1.2) Propiedades perfiles W.

Una vez que se detecten los máximos para cada envolvente, con su respectiva posición, tiempo y velocidad a la que ocurren, se repetirá el mismo análisis para cada perfil y longitud.

Finalmente se pretende enunciar una ley que describa el desplazamiento dinámico máximo en el sistema en función de la longitud, sección transversal y velocidad. Para esto, adoptando un criterio práctico, se proporcionarán nomogramas de diseño que representen el efecto máximo.

#### 4.1. ANALISIS DINAMICO DE UNA VIGA SIMPLEMENTE APOYADA CON UNA CARGA PUNTUAL VIAJANDO A TRAVES DE SU CLARO.

##### 4.1.1. Representación de la carga por medio de una serie de Fourier.

Para probar la convergencia de la serie (3.3.6) se utilizó un sistema con valores arbitrarios, por simplicidad se tomó un valor unitario de la magnitud de la carga viajera, el claro de la viga es de cien pulgadas. El

análisis se realiza alrededor del punto situado a treinta pulgadas del apoyo izquierdo. La tabla (4.1.1.1) y las gráficas (4.1.1.1) a la (4.1.1.5) muestran la magnitud de la carga ante la variación del número de coeficientes de Fourier "k".

X(in).	Magnitud de la respuesta Po (lb).				
	k=10	k=25	k=50	k=75	k=100
21	0.012	0.028	0.040	0.014	0
22	0.026	0.010	0.000	0.010	0
23	0.040	-0.022	-0.050	-0.036	0
24	0.054	-0.048	0.000	0.048	0
25	0.068	-0.049	0.068	-0.035	0
26	0.079	-0.010	0.000	-0.010	0
27	0.089	0.065	-0.110	0.079	0
28	0.096	0.155	0.000	-0.155	0
29	0.099	0.229	0.322	0.215	0
30	0.100	0.260	0.500	0.760	1
31	0.097	0.235	0.315	0.220	0
32	0.091	0.163	0.000	-0.163	0
33	0.083	0.070	-0.103	0.084	0
34	0.073	-0.010	0.000	-0.010	0
35	0.060	-0.054	0.060	-0.040	0
36	0.047	-0.056	0.000	0.056	0
37	0.034	-0.027	-0.042	-0.041	0
38	0.022	0.010	0.000	0.010	0
39	0.010	0.034	0.032	0.020	0

Tabla (4.1.1.1) Magnitud de la carga viajera, ante la variación de los coeficientes "k".

k	10	25	50	75	100	200	400	700
P <sub>o</sub>	0.1	0.25	0.5	0.75	1.0	2.0	4.0	7.0

Tabla (4.1.1.2) Magnitud de la carga móvil en el punto x=30 in, ante la variación de los coeficientes "k".

De estas figuras se observa que la serie converge bien hasta un valor de k=100, si se aumenta el número de coeficientes, la magnitud de la carga en x=30 (in) tiende al infinito, como se ve en la tabla (4.1.1.2) y la figura (4.1.1.6).

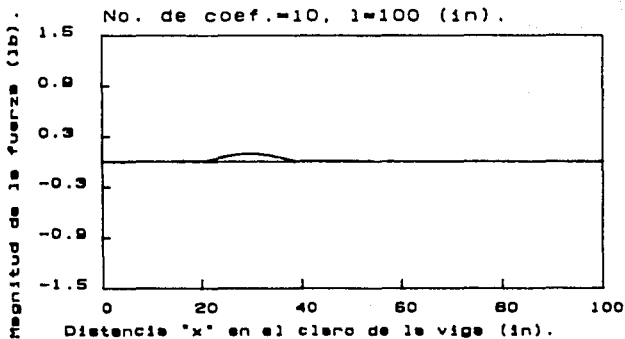


Fig.(4.1.1.1) Magnitud de la carga para  $k=10$ .

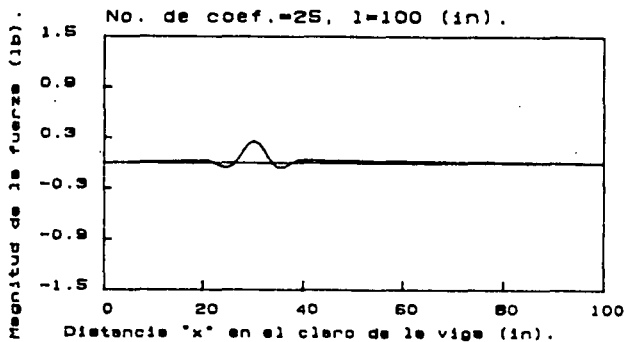


Fig.(4.1.1.2) Magnitud de la carga para  $k=25$ .



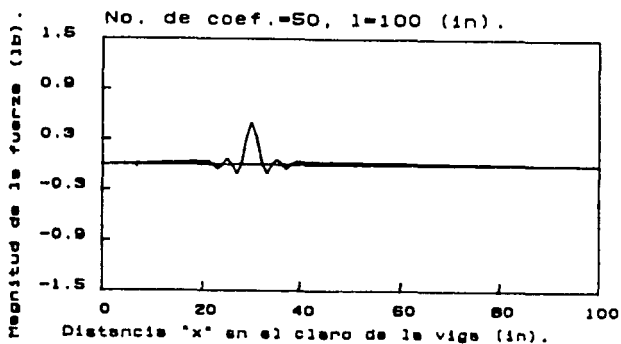


Fig.(4.1.1.3) Magnitud de la carga para  $k=50$ .

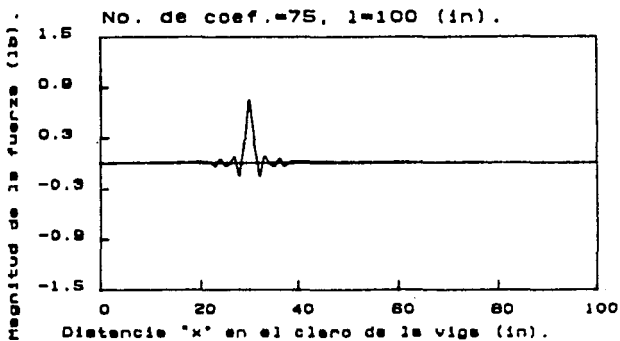


Fig.(4.1.1.4) Magnitud de la carga para  $k=75$ .

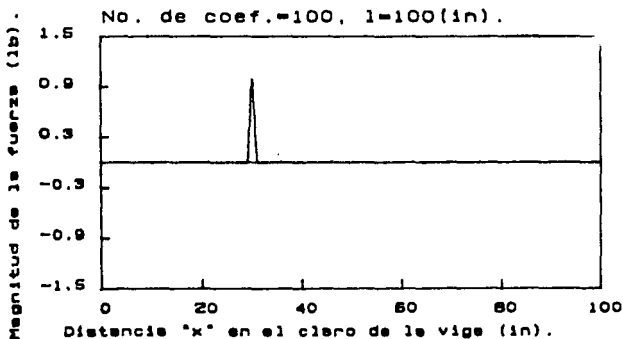


Fig.(4.1.1.5) Magnitud de la carga para  $k=100$ .

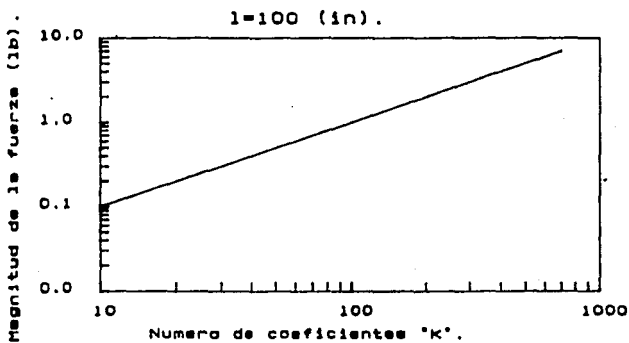


Fig.(4.1.1.6) Magnitud de la carga en el punto  $x=30$   
 ante la variación de los coeficientes "k".

Además de las figuras (4.1.1.1) a la (4.1.1.5), puede observarse que conforme se aumente el valor de "k", la magnitud tiende a concentrarse en el punto  $x = 30$  (in) con amplitud infinita y picos de amplitud cada vez más angosta (ver picos en las figuras (4.1.1.1) a la (4.1.1.5)).

Lo anterior se explica de la definición de la *función Delta*<sup>69</sup>, ya que este tipo de función tiene un área unitaria evaluada en el intervalo de integración. Así, en el límite cuando el valor del ancho del pico, por ejemplo de la figura (4.1.1.5), tiende a cero, la amplitud tiende al infinito y sin embargo se debe conservar un valor finito de la norma del pulso e igual a 1.0. Esto es, el área bajo las curvas de las figuras (4.1.1.1) a la (4.1.1.5), seguirá siendo unitaria.

#### 4.1.2. Deflexión dinámica.

El criterio para evaluar la convergencia de la serie (3.3.12) es parecido al que se utilizó en el inciso anterior y sólo deberá adicionarse la influencia del valor de la velocidad  $v_0$ .

Una carga móvil desplazándose a baja velocidad sobre el claro de una viga simplemente apoyada, produce el mismo efecto que esta fuerza produciría *aplicada estáticamente*. Por lo tanto, para escoger el número necesario de *coeficientes de Fourier* para determinar la respuesta dinámica del sistema de manera satisfactoria, se calcularán las deflexiones dinámicas causadas por una carga, viajando a 1 in/s para diferentes valores de "k", comparando éstas con las deflexiones estáticas correspondientes.

La deflexión estática máxima<sup>70</sup> para una carga concentrada actuando sobre una viga simplemente apoyada, ocurre al centro del claro y se denota por la siguiente expresión:

$$\delta_{\text{max}} = \frac{Fl^3}{48 EI} \quad (4.1.2.1)$$

<sup>69</sup> Ref. (12), Chap. 4 "Transient Vibration", pp.78-83, ver en el Capítulo II de esta tesis la ec. 2.23.1.

<sup>70</sup> Gleck, Kurt, "Manual de Fórmulas Técnicas", Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A., México, D.F., 18a. ed., 1981, p.44.

en donde  $F$  es la magnitud de la fuerza,  $l$  es el claro de la viga y  $EI$  es la rigidez a flexión de la viga.

En general, se encontró que para el problema en estudio, un número de  $k=20$  proporcionaba una aproximación<sup>71</sup> adecuada.

Para iniciar el cálculo de los desplazamientos dinámicos de una viga al cambiar la posición de la carga " $x = \xi = v_0 t$ " en el tiempo " $t$ ", se escogió arbitrariamente el perfil W3, con una inercia  $I=5170 \text{ in}^4$ . El valor del claro de la viga está etiquetado como  $l=1200 \text{ in}$ , la magnitud de la carga aplicada es  $P_0=10000 \text{ lb}$  y las velocidades del análisis son  $v_0 = 1, 100, 1000, 2500, 3500, 5100$  y  $10000 \text{ in/s}$ .

La deflexión estática máxima, evaluada por la expresión (4.1.2.1) es (para este caso)  $\delta_{\text{max}} = 2.32 \text{ in}$ .

Las figuras (4.1.2.1) a la (4.1.2.7) ilustran las deformaciones adoptadas por la viga al paso de la carga viajera con velocidad  $v_0$ . Las líneas punteadas corresponden a los desplazamientos que ocurren en el intervalo  $0 \leq t \leq (l/2v_0)$ , de 0 a  $l/2$ , y las líneas continuas corresponden a los desplazamientos en el intervalo  $(l/2v_0) < t \leq (l/v_0)$ .

En cada una de las figuras siguientes, la curva identificada por "d" corresponde a la máxima deflexión dinámica adoptada por la viga a cierta velocidad.

El máximo desplazamiento dinámico, su localización exacta y el tiempo en el que ocurre dicha deflexión máxima, están dados en la tabla (4.1.2.1).

<sup>71</sup> Se probaron puntos  $x = 0.25$  y  $0.50 l$ . Para la respuesta máxima del caso estático se pueden hacer reducciones por la mayor participación del modo fundamental, sin embargo para los demás puntos en el claro de la viga, deben tomarse en cuenta las demás armónicas, ver referencia (14).

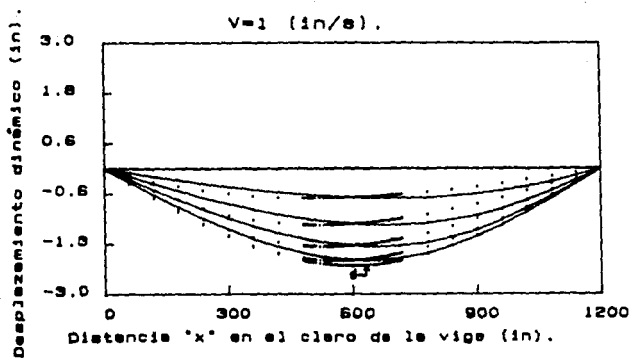


Fig.(4.1.2.1) Deflexión dinámica, perfil W3, claro 15, v=1 in/s.

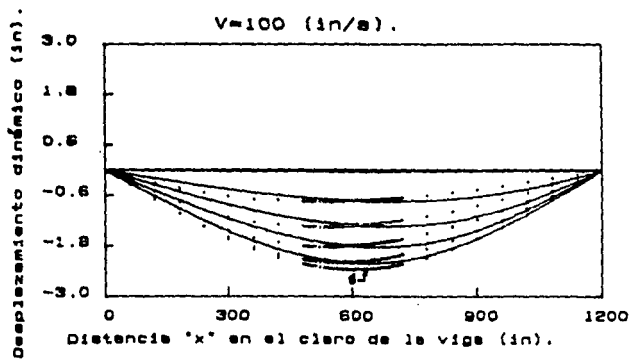


Fig.(4.1.2.2) Deflexión dinámica, perfil W3, claro 15, v=100 in/s.

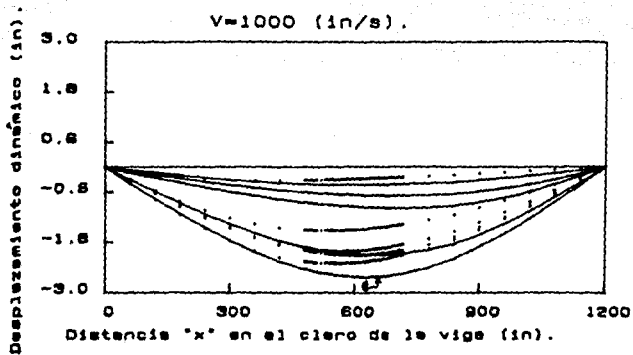


Fig.(4.1.2.3) Deflexión dinámica, perfil W3, claro 15,  $v=1000$  in/s.

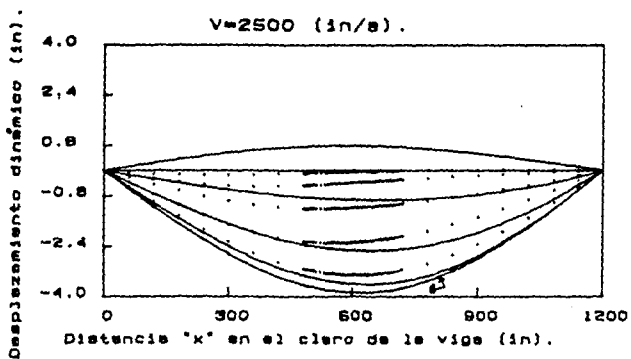


Fig.(4.1.2.4) Deflexión dinámica, perfil W3, claro 15,  $v=2500$  in/s.

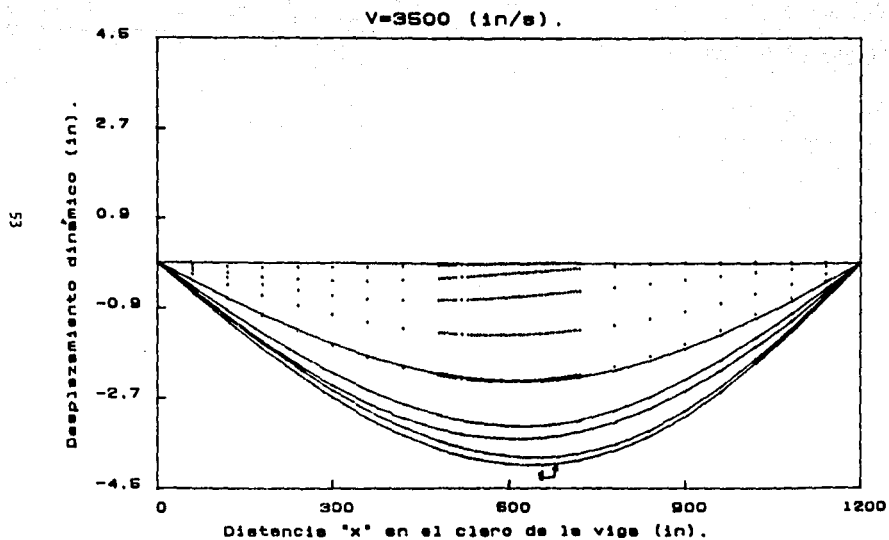


Fig.(4.1.2.5) Deflexión dinámica, perfil W3, claro 15,  $v=3500 \text{ in/s}$ .

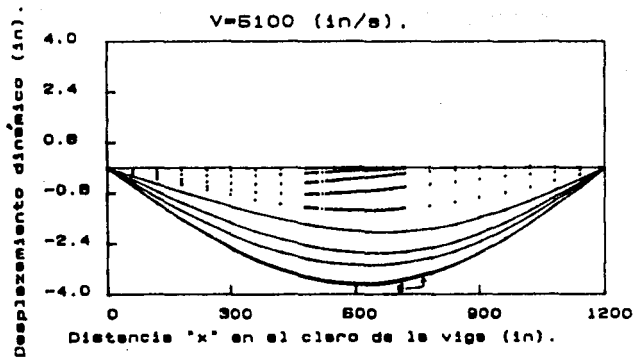


Fig.(4.1.2.6) Deflexión dinámica, perfil W3, claro 15,  $v=5100 \text{ in/s}$ .

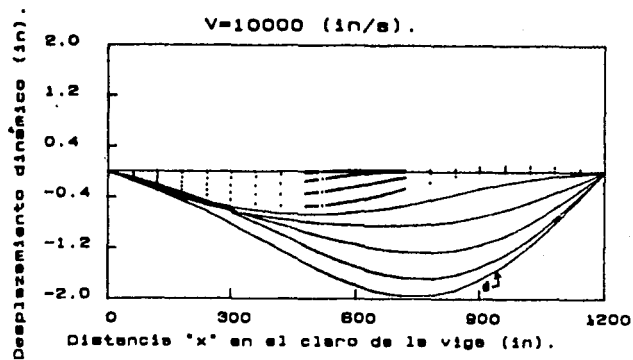


Fig.(4.1.2.7) Deflexión dinámica, perfil W3, claro 15,  $v=10000 \text{ in/s}$ .



$v_0$ (in/s).	$\xi$ (frac. de l).	t (s).	$\delta_{din}$ (in).
1	0.50	600.00	2.32
100	0.50	6.00	2.36
1000	0.60	0.72	2.63
2500	0.63	0.30	3.89
3500	0.77	0.26	4.03
5100	1.00	0.23	3.69
10000	1.00	0.12	1.96

Tabla (4.1.2.1) Máximo desplazamiento dinámico  $\delta_{din}$  ante el cambio de de la velocidad  $v_0$  y la posición de la carga  $\xi$  en el tiempo t.

Se observa de la tabla (4.1.2.1) que para una velocidad entre 1 y 100 in/s, el desplazamiento dinámico máximo es igual al estático máximo y ocurre cuando la carga está al centro del claro.

Para la velocidad de 1000 in/s la deflexión dinámica máxima, es ligeramente mayor a la deflexión estática máxima y sucede cuando la carga recorrió un poco más de la mitad del claro.

A una velocidad de 2500 in/s ya se presenta un incremento considerable en la deflexión dinámica y se nota que la posición de la carga cuando ocurre el máximo desplazamiento, se corre a la derecha conforme se aumenta la velocidad.

Para el caso en que se alcanza la máxima deflexión dinámica en el sistema,  $v_0=3500$  in/s, la carga se ubica en un punto cercano a los tres cuartos del claro de la viga.

Finalmente, para las velocidades 5100 y 10000 in/s, el desplazamiento dinámico máximo ocurre en el instante en que la carga sale del claro de la viga, ambos desplazamientos son menores a la deflexión dinámica máxima del sistema. Es importante notar que para una velocidad de 10000 in/s la deflexión dinámica es ya menor al desplazamiento estático máximo. En la fig. (4.1.2.8) se muestran estos resultados en forma de una curva etiquetada con el nombre W3.

Procediendo de igual manera que en el caso del perfil W3, se realizó el análisis de los perfiles W1, W2, W4 y W5, los resultados para estas secciones transversales se muestran en la tabla (4.1.2.2) y la figura (4.1.2.8).

Para determinar el máximo valor de cada envolvente, consideraremos que éste ocurre en un sistema sin amortiguamiento, cuando se iguala la frecuencia de excitación a la frecuencia del sistema. Esto es

$$\alpha_k = \omega_k \quad (4.1.2.2)$$

$V_0$ (in/s).	Desplazamiento dinámico máximo (in/s).				
	W1	W2	W3	W4	W5
1	0.5911	1.1651	2.3214	1.7885	1.4636
100	0.5946	1.1723	2.3616	1.7963	1.4838
300	0.6124	1.2139	2.4009	1.8625	1.5052
1000	0.6613	1.3562	2.6265	2.0802	1.6957
1500			3.0315		
2500	0.8441	1.7873	3.8629	2.7336	2.2456
3000	0.9070	1.9211	3.9957	2.9460	2.4335
3500	0.9791	1.9843	*4.0345	3.0081	2.5035
4000	0.9937	2.0031	3.9398	3.0980	2.5413
4200		2.0248		3.1061	*2.5437
4300		*2.0251		3.1081	
4400		2.0245		*3.1087	
5000	1.0275	1.9927	3.7028	3.0753	2.4981
5100	*1.0275				
5500	1.0215	1.9501	3.5985	3.0095	2.4382
6000	0.9935	1.8795	3.4158	2.9234	2.3428
7000	0.9579	1.7817	2.9362	2.7718	2.2203
10000	0.7618	1.2464	1.9606	1.9797	1.5367
15000	0.4815	0.7483	0.9756	1.2072	0.9152
20000	0.2950	0.4203	0.4726	0.6857	0.5106
30000	0.1190	0.1969	0.2785	0.3145	0.2428
40000	0.0853	0.1184	0.1636	0.1941	0.1431
50000	0.0506	0.0802	0.1041	0.1302	0.0990
60000	0.0398	0.0553	0.0767	0.0907	0.0667
80000	0.0236	0.0334	0.0452	0.0525	0.0413
100000	0.0155	0.0225	0.0301	0.0355	0.0277

\* Deflexión dinámica máxima en el sistema para el perfil W1.

Tabla (4.1.2.2) Envolvente de deflexiones dinámicas máximas ante el cambio de la velocidad  $v_0$ , perfiles W1, W2, W3, W4 y W5.

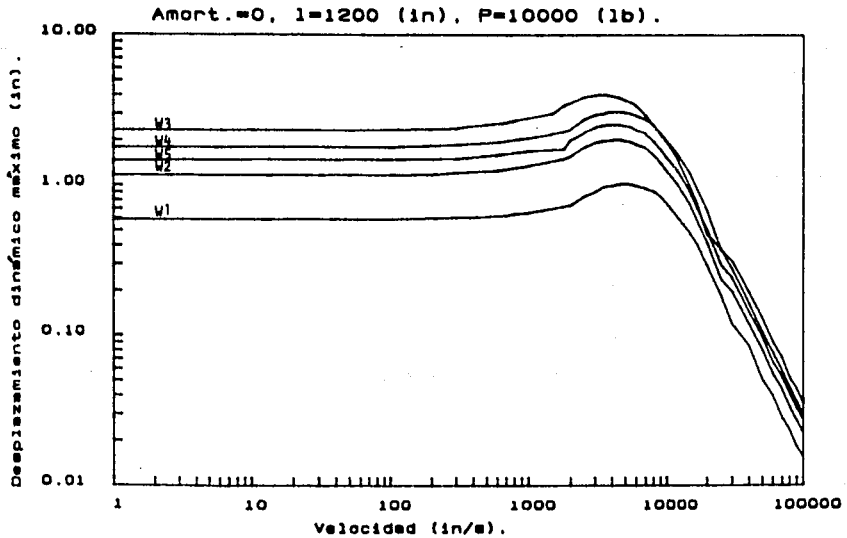


Fig.(4.1.2.8) Envolvente de deflexiones dinámicas máximas ante el cambio de la velocidad  $v$ , perfiles W1, W2, W3, W4 y W5.

en donde

$$\alpha_k = \frac{k\pi v_0}{l} \quad (k=1,2,3,\dots) \quad (4.1.2.3)$$

y

$$\omega_k = \sqrt{\frac{EI}{m}} \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 \quad (4.1.2.4)$$

Para obtener la "velocidad de resonancia" se sustituyen las ecs. (4.1.2.3) y (4.1.2.4) en la ec. (4.1.2.2), despejando  $v_0$  obtenemos lo siguiente:

$$v_r = \sqrt{\frac{EI}{m}} \left( \frac{k\pi}{l} \right) \quad (4.1.2.5)$$

Así, la expresión anterior representa la velocidad a la cual se espera una amplificación del desplazamiento dinámico.

En la tabla (4.1.2.3) se muestran las velocidades de resonancia para los modos  $k=1, 2$  y  $3$  para los perfiles  $W1, W2$  y  $W3$ .

i	$W_i$ (in <sup>4</sup> ).	Velocidad crítica $v_c$ (in/s).		
		k=1	k=2	k=3
1	20300	8032.0	16064.0	24096.1
2	10300	6822.5	13645.0	20467.4
3	5170	5519.0	11038.0	16557.0

Tabla (4.1.2.3) Velocidades de resonancia para los perfiles  $W1, W2$  y  $W3, k=1, 2$  y  $3$ .

Para ilustrar el efecto del cambio de la velocidad  $v_0$  en la deflexión dinámica del sistema en estudio, enfocaremos nuestra atención a la configuración de la envolvente correspondiente al perfil  $W3$ , ver figura (4.1.2.8).

Se observa que la envolvente consta al inicio de una *línea recta*, como se mostró anteriormente, entre los desplazamientos correspondientes a las velocidades entre 1 y 100 in/s. Estos desplazamientos no varían significativamente y se mantienen constantes en una magnitud aproximada al valor del *máximo desplazamiento estático* (2.32 in).

Entre las velocidades de 100 y 1500 in/s, ocurre un *cambio gradual*, para  $v_0=1500$  in/s se tiene un desplazamiento dinámico de aproximadamente 3.03 in, éste representa un incremento del treinta por ciento con respecto al *máximo estático*.

En este punto ( $v_0=1500$  in/s) las deflexiones dinámicas experimentan un *cambio significativo* al aumentar progresivamente la velocidad hasta 3500 in/s, en donde finalmente ocurre el valor *máximo*. Este incremento en los desplazamientos es notorio. *La deflexión dinámica máxima en el sistema es de 4.03 in y representa 1.74 veces el valor de la deflexión estática máxima.*

Por último, la curva decrece hasta describir una *línea recta* que *tiende rápidamente a cero*.

Al llegar a este punto hay que revisar el concepto clásico de velocidad de resonancia en el sistema.

Se nota de la figura (4.1.2.8) que cuando la *primera velocidad de resonancia* se alcanza,  $v_r = 5500$  in/s, la *amplificación máxima de la respuesta* ya ocurrió a una velocidad  $v_0 = 3500$  in/s.

Para la primera velocidad de resonancia,  $v_0 = 3500$  in/s, se presenta una deflexión dinámica de aproximadamente 3.6 in, lo cual representa sólo un incremento del *cincuenta y cinco por ciento* de la *deflexión estática máxima*.

Para la segunda y tercera velocidad de resonancia ocurre lo mismo,

11000 y 16500 in/s respectivamente, aún cuando los desplazamientos dinámicos correspondientes a estas velocidades están por abajo del valor de la máxima deflexión estática.

Surge así la necesidad de identificar el instante y la velocidad a la que ocurre la mayor respuesta del sistema. Por lo tanto, denominaremos "velocidad crítica" a aquella velocidad para la cual la deflexión dinámica máxima se presenta. En el caso del perfil W3, la velocidad crítica  $v_c$  es igual a 3500 in/s como ya se mostró.

El comportamiento anterior es similar al que se presenta en los demás perfiles en función de sus respectivos valores del momento de inercia (I) y masa por unidad de longitud (m). Además se puede observar de la figura (4.1.2.8), que la configuración de las envolventes en sus diversas etapas, presenta proporcionalidad entre sus valores<sup>72</sup>.

#### 4.1.3. Efecto máximo "factor de amplificación".

Utilizando los espectros de las deflexiones dinámicas con el cambio de la velocidad de crucero  $v_0$ , se compararán tanto las deflexiones dinámicas máximas contra los desplazamientos estáticos máximos como las velocidades de resonancia ( $k=1$ ) contra las velocidades críticas, para cada perfil. Además se mostrará el instante en que ocurre el efecto máximo, para determinar la posición de la carga viajera y el punto sobre la viga donde se presenta dicho efecto. En la tabla (4.1.3.1) se ilustra lo anterior y se observa

<sup>72</sup> Las rectas del inicio y final de las envolventes son prácticamente paralelas. Hay que tomar en cuenta la precisión del análisis entre punto y punto, así como los valores de I y m para cada perfil.

Wi	I (in <sup>4</sup> )	*Deflexiones		$\frac{\delta_{dmax}}{\delta_{e max}}$	**Velocidad.		$\frac{V_r}{V_c}$	t (s).	$\xi_{(1)}$	$\chi_{(2)}$
		$\delta_{e max}$	$\delta_{d max}$		Vr	Vc				
1	20300	0.59	1.03	1.74	8032	5100	1.57	0.18	0.77	0.53
2	10300	1.16	2.02	1.74	6822	4300	1.59	0.21	0.76	0.53
3	5170	2.32	4.03	1.74	5519	3500	1.58	0.26	0.77	0.53
4	8710	1.78	3.11	1.74	7019	4400	1.60	0.21	0.76	0.53
5	8200	1.46	2.54	1.74	6723	4200	1.60	0.22	0.76	0.53

\* in.

\*\* in/s.

(1) y (2) fracción de 1.

Tabla (4.1.3.1) Factor de amplificación.

que para todos los perfiles se mantiene un valor constante de la razón entre los desplazamientos dinámico y estático máximos, este valor es de 1.74 y lo llamaremos el "factor de amplificación". De forma similar, existe proporción entre la velocidad de resonancia y la velocidad crítica, la razón entre estas velocidades es de aproximadamente 1.6. La deflexión dinámica máxima ocurre en un punto cercano al centro del claro, cuando la carga viajera se ubica sobre un punto situado a casi tres cuartos del claro de la viga.

Anteriormente se mostró la relación que existe entre el desplazamiento máximo dinámico y el máximo estático ante la variación de la velocidad  $v_0$  y el momento de inercia I, manteniendo constante el valor del claro de la viga. A continuación se presentarán los resultados que se obtuvieron en un análisis paramétrico para otros valores del claro "l" de la viga, con el fin de comprobar que el factor de amplificación se mantiene constante ante la variación de los parámetros del sistema. Esto implica proporcionar la velocidad crítica (instante en que sucede el máximo) y por tanto la ubicación de la carga sobre el claro de la viga.

Para describir el comportamiento del sistema utilizaremos una representación gráfica, ya que el análisis paramétrico demuestra la proporción que existe en la máxima respuesta ante la variación del momento de inercia y el claro de la viga, ver tablas (4.1.3.2) a la (4.1.3.9).

Las figuras (4.1.3.1), (4.1.3.2) y (4.1.3.3) son nomogramas que

sirven para calcular el valor de la deflexión estática, dinámica y por impacto respectivamente, para un perfil dado ante la variación del claro "l" de la viga. Los nomogramas de las figuras (4.1.3.4), (4.1.3.5) y (4.1.3.6) representan el valor de la deflexión estática, dinámica y por impacto respectivamente, para un claro "l" dado ante la variación del momento de inercia "I". Las figuras (4.1.3.7) y (4.1.3.8) son nomogramas que representan el valor de la velocidad crítica para un perfil dado ante la variación del claro "l" y el valor de la velocidad crítica para un claro "l" dado ante la variación del momento de inercia "I".

El valor de la deflexión producida por la aplicación repentina de una carga, se considerará en el límite como dos veces la magnitud de la deflexión producida por esta carga aplicada estáticamente. Por lo tanto en nuestro estudio el desplazamiento por impacto es el doble del valor de la deflexión estática. (Sistema de comportamiento elástico).

I (in.)	Desplazamiento estático máximo (in.)				
	W1	W2	W3	W4	W5
200	0.0027	0.0054	0.0107	0.0083	0.0068
300	0.0092	0.0182	0.0363	0.0279	0.0229
500	0.0428	0.0843	0.1679	0.1294	0.1059
800	0.1752	0.3452	0.6877	0.5289	0.4336
1200	0.5911	1.1650	2.3211	1.7884	1.4634
2000	2.7367	5.3937	10.7458	8.2795	6.7751

Tabla (4.1.3.2) Desplazamiento estático máximo para el perfil W1 ante la variación del claro "l" de la viga.

I (in.)	Desplazamiento dinámico máximo (in.)				
	W1	W2	W3	W4	W5
200	0.0048	0.0094	0.0187	0.0144	0.0118
300	0.0161	0.0316	0.0630	0.0486	0.0397
500	0.0743	0.1465	0.2919	0.2249	0.1840
800	0.3045	0.6001	1.1955	0.9211	0.7537
1200	1.0276	2.0252	4.0347	3.1087	2.5439
2000	4.7573	9.3759	18.6793	14.3923	11.7771

Tabla (4.1.3.3) Desplazamiento dinámico máximo para el perfil W1 ante la variación del claro "l" de la viga.



I (in <sup>4</sup> )	Desplazamiento por impacto (in).				
	w1	w2	w3	w4	w5
200	0.0055	0.0108	0.0215	0.0166	0.0136
300	0.0185	0.0364	0.0725	0.0559	0.0457
500	0.0855	0.1686	0.3358	0.2587	0.2117
800	0.3503	0.6904	1.3755	1.0598	0.8672
1200	1.1823	2.3301	4.6422	3.5768	2.9268
2000	5.4735	10.7875	21.4915	16.5590	13.5501

Tabla (4.1.3.4) Desplazamiento por impacto para el perfil W1 ante la variación del claro "l" de la viga.

I (in <sup>4</sup> )	Desplazamiento estático máximo (in).					
	l1	l2	l3	l4	l5	l6
5170	0.0107	0.0363	0.1679	0.6877	2.3211	10.7458
6710	0.0083	0.0279	0.1294	0.5299	1.7884	8.2795
8200	0.0068	0.0229	0.1059	0.4336	1.4634	6.7751
10300	0.0054	0.0182	0.0843	0.3452	1.1650	5.3937
20300	0.0027	0.0092	0.0428	0.1752	0.5911	2.7367

Tabla (4.1.3.5) Desplazamiento estático máximo para el claro l1 ante la variación del momento de inercia "I".

I (in <sup>4</sup> )	Desplazamiento dinámico máximo (in).					
	l1	l2	l3	l4	l5	l6
5170	0.0187	0.0630	0.2919	1.1955	4.0347	18.6793
6710	0.0144	0.0486	0.2249	0.9211	3.1087	14.3923
8200	0.0118	0.0397	0.1840	0.7537	2.5439	11.7771
10300	0.0094	0.0316	0.1465	0.6001	2.0252	9.3759
20300	0.0048	0.0161	0.0743	0.3045	1.0276	4.7573

Tabla (4.1.3.6) Desplazamiento dinámico máximo para el claro l1 ante la variación del momento de inercia "I".

I (in <sup>4</sup> )	Desplazamiento por impacto (in).					
	11	12	13	14	15	16
5170	0.0215	0.0725	0.3358	1.3755	4.6422	21.4915
6710	0.0166	0.0559	0.2587	1.0598	3.5768	16.5590
8200	0.0136	0.0457	0.2117	0.8672	2.9268	13.5501
10300	0.0108	0.0364	0.1686	0.6904	2.3301	10.7875
20300	0.0055	0.0185	0.0855	0.3503	1.1823	5.4735

Tabla (4.1.3.7) Desplazamiento por impacto para el claro 11 ante la variación del momento de inercia "I".

I (in <sup>4</sup> )	Velocidad crítica (in/s).				
	W3	W4	W5	W2	W1
200	20696.3	26323.4	25212.3	25584.3	30120.1
300	13797.5	17549.0	16808.2	17056.2	20080.1
500	8278.5	10529.4	10084.9	10233.7	12048.0
800	5174.1	6580.9	6303.1	6396.1	7530.0
1200	3449.4	4387.2	4202.1	4264.0	5020.0
2000	2069.6	2632.3	2521.2	2558.4	3012.0

Tabla (4.1.3.8) Velocidad crítica para el perfil W1 ante la variación del claro "I" de la viga.

I (in <sup>4</sup> )	Velocidad crítica (in/s).					
	11	12	13	14	15	16
5170	20696.3	13797.5	8278.5	5174.1	3449.4	2069.6
6710	26323.4	17549.0	10529.4	6580.9	4387.2	2632.3
8200	25212.3	16808.2	10084.9	6303.1	4202.1	2521.2
10300	25584.3	17056.2	10233.7	6396.1	4264.0	2558.4
20300	30120.1	20080.1	12048.0	7530.0	5020.0	3012.0

Tabla (4.1.3.9) Velocidad crítica para el claro 11 ante la variación del momento de inercia "I".

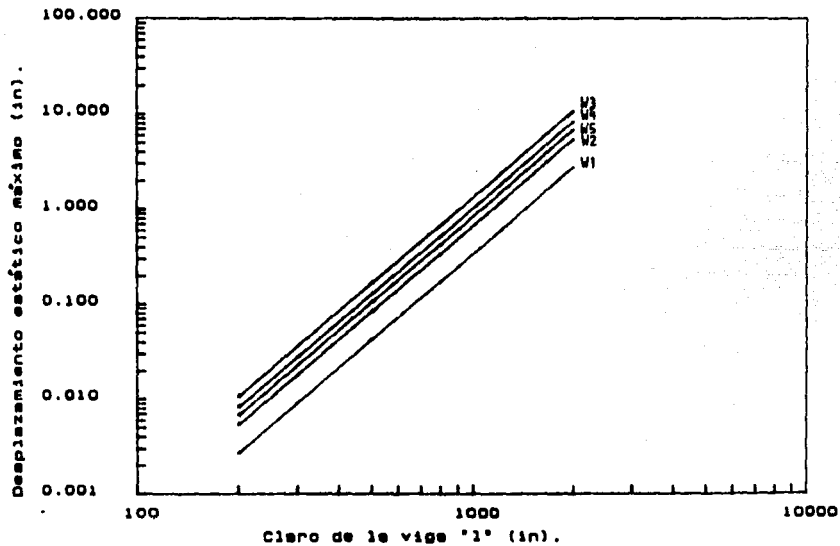


Fig.(4.1.3.1) Deflexión estática máxima para el perfil W1 ante la variación del claro "1".

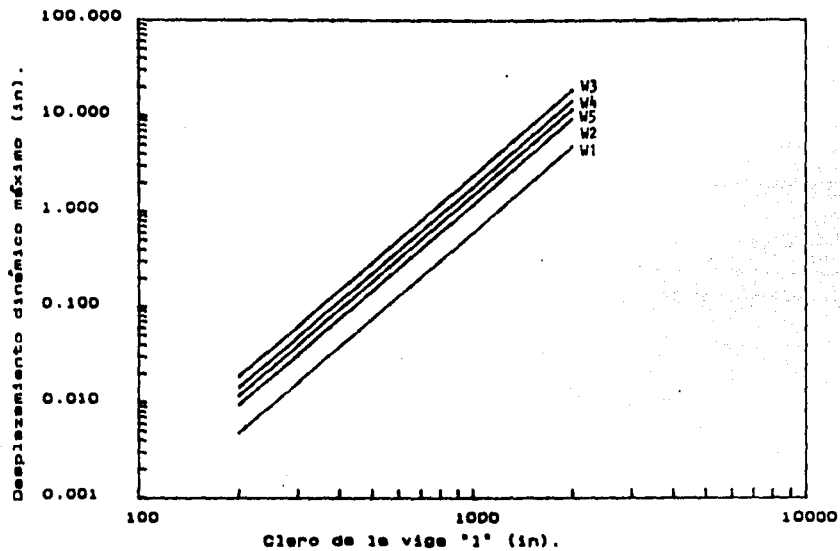


Fig.(4.1.3.2) Deflexión dinámica máxima para el perfil W1 ante la variación del claro "l".

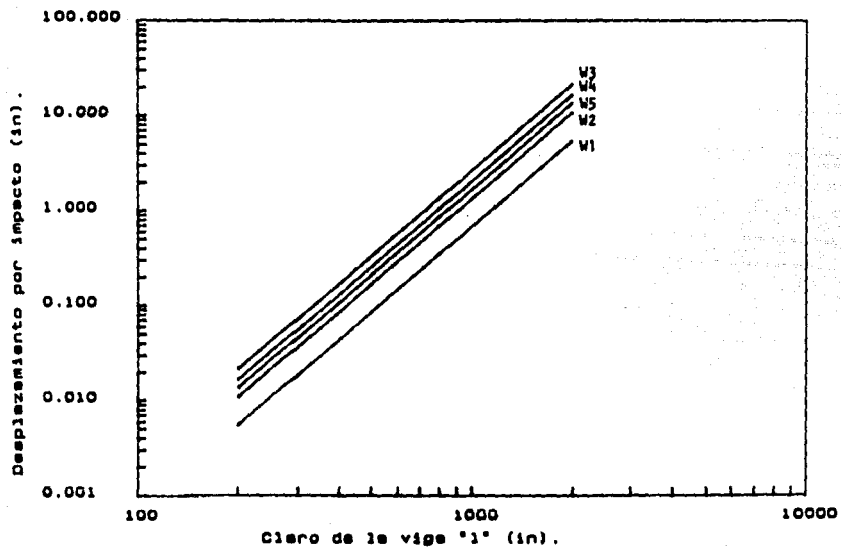


Fig.(4.1.3.3) Deflexión por impacto para el perfil W1 ante la variación del claro "l".

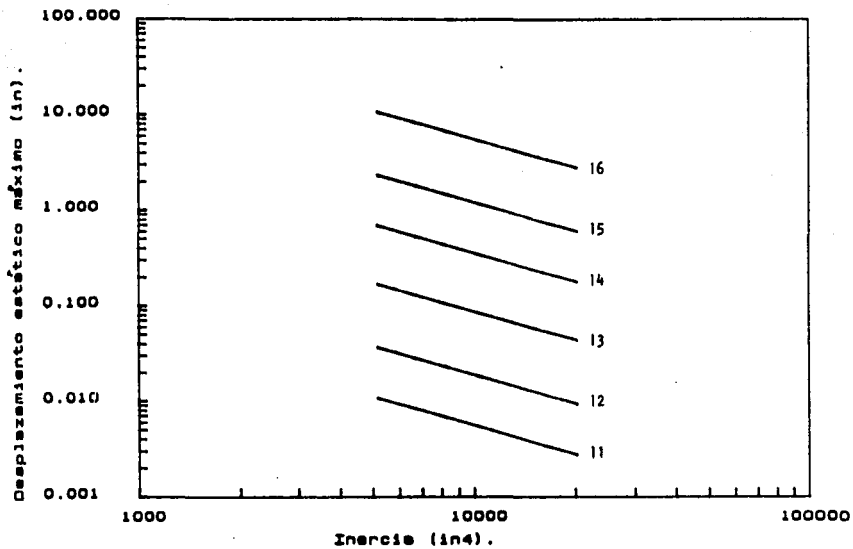


Fig.(4.1.3.4) Deflexión estática máxima para el claro II ante la variación del momento de inercia "I".

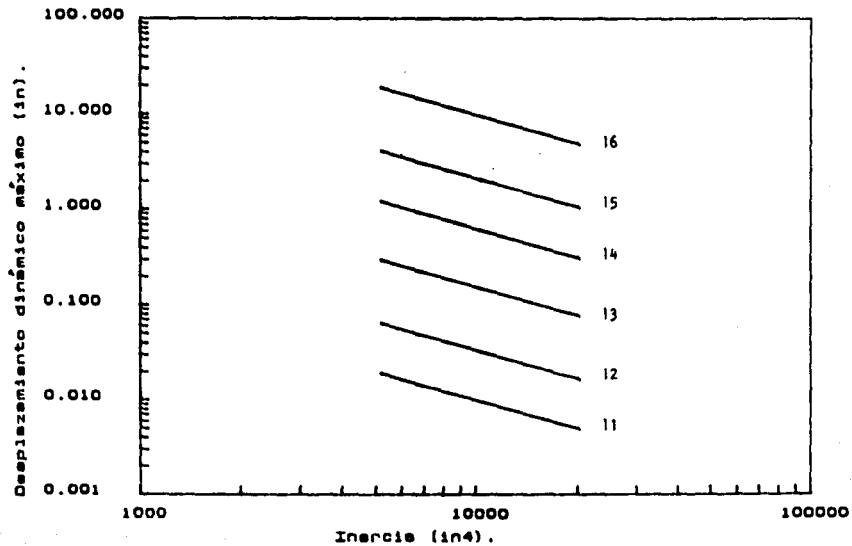


Fig.(4.1.3.5) Deflexión dinámica máxima para el claro 11 ante la variación del momento de inercia "I".

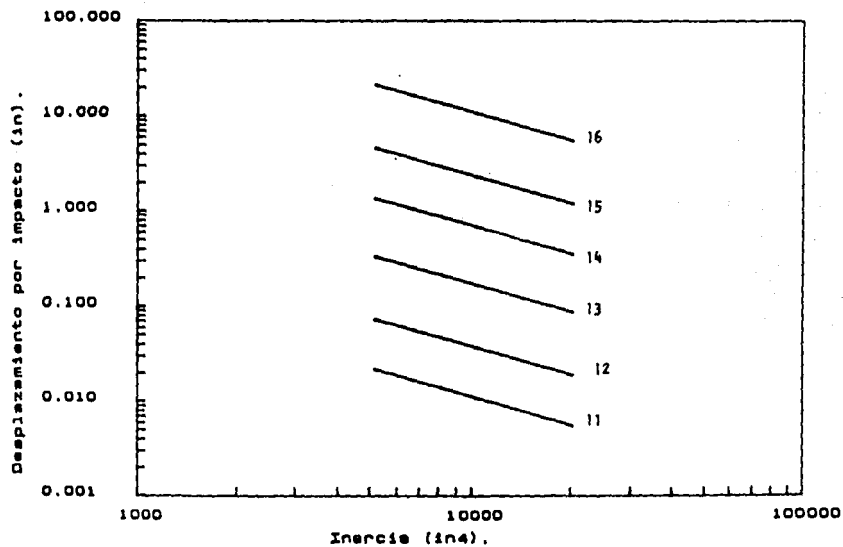


Fig.(4.1.3.6) Deflexión por impacto para el claro li ante la variación del momento de inercia "I".



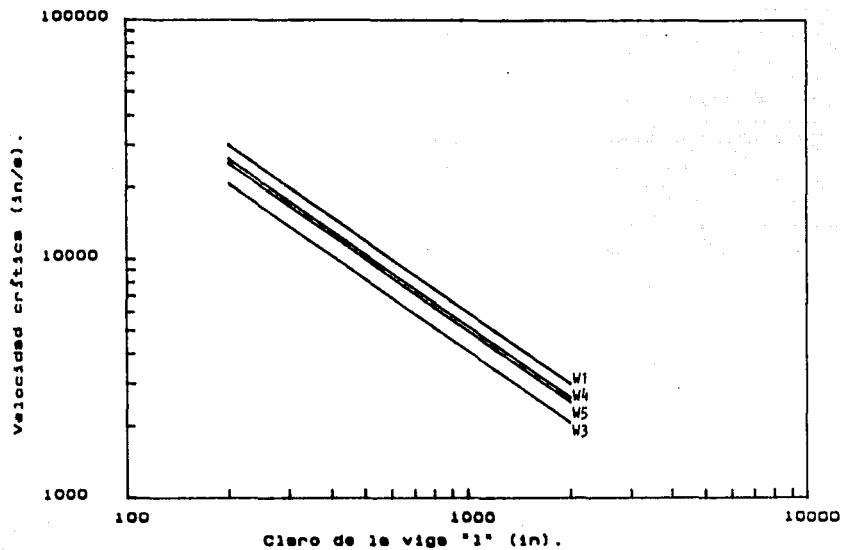


Fig.(4.1.3.7) Velocidad crítica para el perfil W1 ante la variación del claro "1".

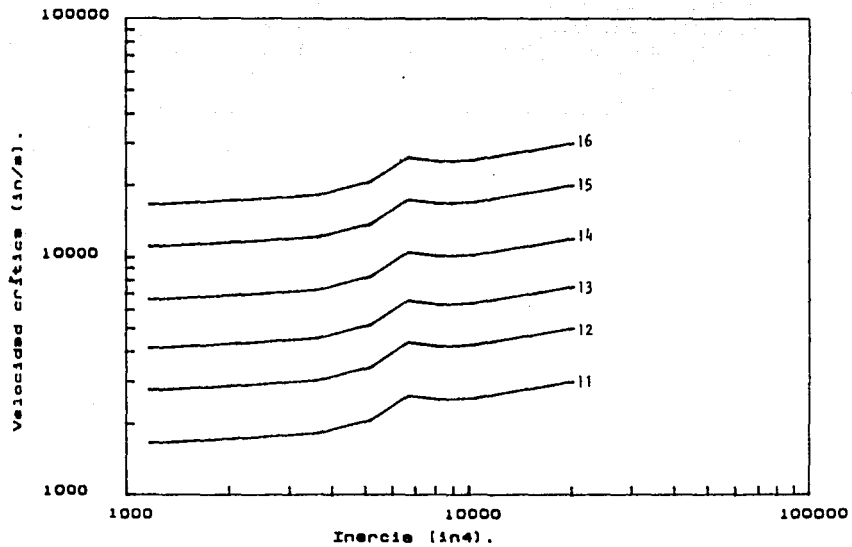


Fig.(4.1.3.8) Velocidad crítica para el caso 11 ante la variación del momento de inercia " $I$ ".

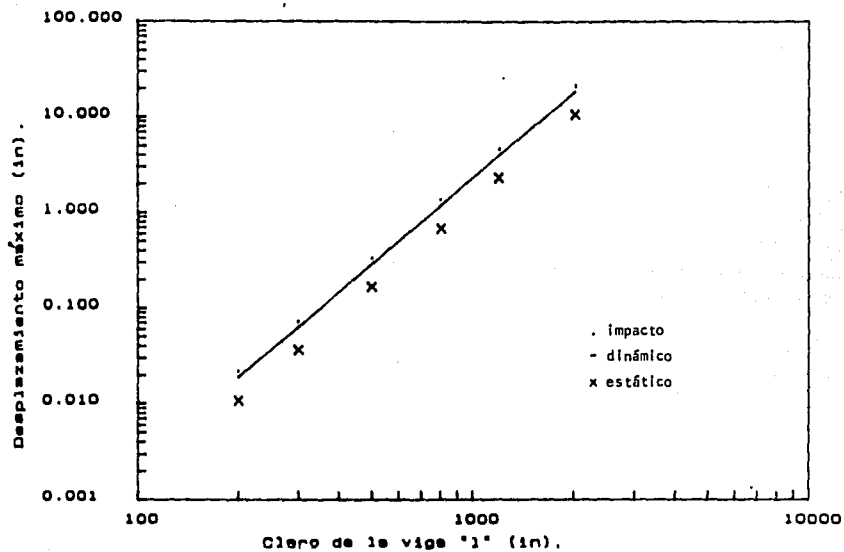


Fig.(4.1.3.9) Deflexión estática, dinámica y por Impacto para el perfil W3 ante la variación del claro "1".

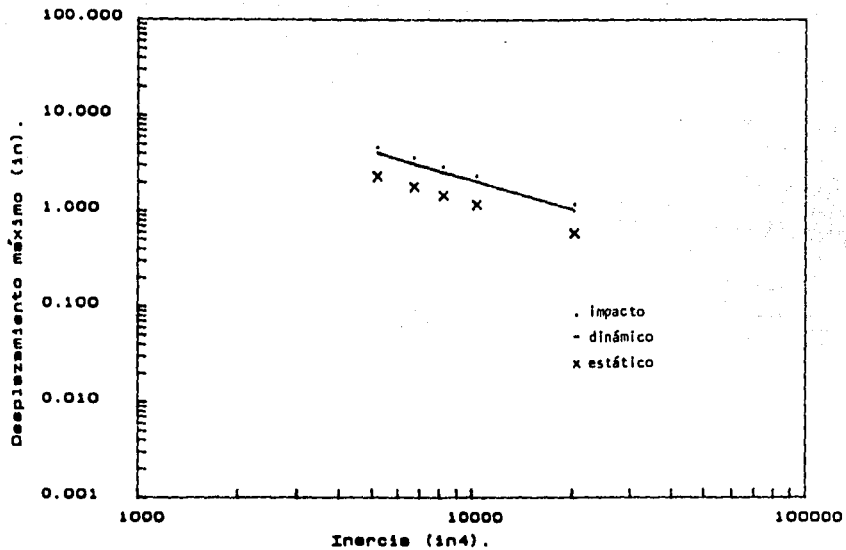


Fig.(4.1.3.10) Deflexión estática, dinámica y por impacto para el claro 15 ante la variación del momento de inercia ( $I$ ).

De las figuras (4.1.3.1), (4.1.3.2) y (4.1.3.3), se observa que las deflexiones mayores corresponden al perfil con menor momento de inercia, W3, y las deflexiones menores ocurren para el perfil con mayor momento de inercia, W1. Como se esperaba, las deflexiones aumentan ante el decremento del momento de inercia "I" y el incremento en el claro "l" de la viga. Las rectas que describen las deflexiones para estos perfiles son paralelas de pendiente positiva. El comportamiento anterior también se manifiesta en los casos que ilustran las figuras (4.1.3.4), (4.1.3.5) y (4.1.3.6). Estas rectas también son paralelas pero de pendiente negativa.

La velocidad crítica tiene una magnitud mayor conforme se disminuye el claro de la viga y se aumenta el momento de inercia de la sección transversal. Para el caso del perfil W4, ver figura (4.1.3.7) y tablas (4.1.2) y (4.1.3.1), lo anterior no se cumple. Para justificar esta incongruencia debemos notar de la ecuación (4.1.2.4), que el valor de la masa por unidad de longitud "m", debe tomarse en cuenta. Para los perfiles tipo W no existe proporcionalidad<sup>73</sup> entre los valores de "I" y "m", como sería en el caso para secciones rectangulares, por ejemplo. Este efecto se ilustra mejor en la figura (4.1.3.8). El valor de la inercia correspondiente al perfil W4,  $I=6710 \text{ in}^4$ , produce un incremento mayor de la velocidad crítica con respecto al que experimentan los perfiles W5, W7 y W8; éste valor de la velocidad desciende notoriamente para el caso del perfil W5, para después aumentar gradualmente. La proporción que existe en el comportamiento del sistema, se refleja en las rectas paralelas que describen la velocidad crítica.

Unas curvas que tienden a un comportamiento lineal en ejes logarítmicos<sup>74</sup>, pueden ajustarse mediante el método de mínimos cuadrados por una regresión potencial del siguiente tipo:

$$y = A x^B$$

y

$$\ln y = \ln A + B \ln x$$

<sup>73</sup> Entre el peralte "d" y el espesor del alma y los patines.

<sup>74</sup> Ref. (14).

o

$$y = a + bx$$

en donde a es la ordenada al origen y b es la pendiente de la recta, en ejes logarítmicos.

Para nuestro estudio no es necesario ajustar las curvas de desplazamientos y velocidades, pues gráficamente<sup>75</sup> puede notarse que las rectas que describen el comportamiento del sistema son paralelas. Así, para obtener el valor de la pendiente de las rectas en las figuras (4.1.3.1) a la (4.1.3.7), tomaremos los puntos extremos para cualquier recta, por lo tanto:

$$\operatorname{tg} \theta = m = b = \frac{\ln y_1 - \ln y_0}{\ln x_1 - \ln x_0}$$

en donde  $x_1$  representa el valor de la abscisa para cualquier punto  $i(x, y)$  de la recta en estudio y  $y_1$  es el correspondiente valor de la ordenada.

Las rectas de las figuras (4.1.3.1), (4.1.3.2) y (4.1.3.3) son paralelas entre sí, ver fig. (4.1.3.9), a este caso lo identificaremos como el I. De manera similar el caso II representará las rectas de las figuras (4.1.3.4), (4.1.3.5) y (4.1.3.6) y el caso III el de las rectas de la figura (4.1.3.7). La finalidad de lo anterior es para obtener la pendiente de las rectas y por tanto su inclinación, ver tabla (4.1.3.10).

Caso	Pendiente b	Angulo de inclinación $\theta$
I	3	71°.6'
II	-1	-45°.0'
III	-1	-45°.0'

Tabla (4.1.3.10) Pendiente y ángulo de inclinación para las rectas de los casos I, II y III.

<sup>75</sup> Para que pueda medirse directamente el ángulo de inclinación de las rectas (pendiente), deben graficarse estas rectas en ejes logarítmicos con igual número de ciclos y longitud de eje.

## CAPITULO V.

### 5. CONCLUSIONES.

La deflexión dinámica máxima, producida por una carga concentrada viajando a través del claro de una viga simplemente apoyada, se puede determinar por medio de la velocidad crítica  $v_c$  como se verá enseguida.

Se comprobó que la amplificación de la respuesta en un sistema (sin amortiguamiento) de este tipo, no ocurre cuando la carga se desplaza a la velocidad de resonancia  $v_r$  para cualquier modo.

El análisis paramétrico muestra que el desplazamiento dinámico máximo ocurre a una velocidad,  $v_c$ , menor a la velocidad de resonancia para el primer modo. Para velocidades bajas la deflexión dinámica tiende al desplazamiento estático, correspondiente al punto de análisis. La respuesta para velocidades mayores a la crítica (la velocidad de resonancia para el k-ésimo modo está incluida) tiende rápidamente a cero. De hecho, cuando la carga se desplaza a la segunda velocidad de resonancia, la deflexión dinámica es menor al desplazamiento estático máximo (para la carga puntual en cuestión).

Así, para nuestro estudio tenemos dos puntos de referencia. Determinaremos la máxima deflexión dinámica del sistema en función del desplazamiento estático máximo y la velocidad crítica en función de la velocidad de resonancia.

Es importante mencionar la relación que existe entre la deflexión estática, dinámica y por impacto, ver figuras (4.1.3.9) y (4.1.3.10). La respuesta dinámica está acotada entre los valores estático y por impacto. Es decir, la máxima deflexión dinámica en el sistema es siempre mayor a la deflexión estática máxima y debe ser menor al desplazamiento producido por impacto.

Resumiendo: el factor de amplificación dinámica máximo tiene un valor de 1.74 y la velocidad crítica es 0.625 del valor de la velocidad de resonancia para el primer modo. La deflexión dinámica máxima ocurre en un punto cercano a la mitad del claro, cuando la carga se ubica a casi tres cuartos del claro de la viga. Esto es:

$$\delta_{\text{por impacto}} = 2 \delta_{\text{est}}_{\text{max}}$$

$$\delta_{\text{dmax}} = 1.74 \delta_{\text{est}}_{\text{max}}$$

$$v_c = \frac{v_{r1}}{1.6} = 0.625 v_{r1} = \frac{0.625\pi}{l} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

$$x = 0.53l$$

$$\xi = v_0 t = 0.76l$$



REFERENCIAS.

- 1) Aida, T., "Dynamic stability of thin walled beams under traveling follower load system", Journal of Sound and Vibration, vol. 86, 1983.
- 2) AISC, "Manual of steel construction", American Institute of Steel Construction, Inc., Chicago, Illinois, 8a. ed., 1980.
- 3) Aviña-Lemus, Norma, "Vibraciones libres y forzadas en estructuras de pared delgada", Tesis profesional, México, D.F., 1987.
- 4) Biggs, John M., "Introduction to structural dynamics", Mc Graw-Hill, Inc., U.S.A., 1984
- 5) Biggs, John M., Hansen, Robert J., Holley Jr., Kyle J., Minamy, John K., Nayet, Saul and Morris, Charles H., "Structural design for dynamic loads", Mc Graw-Hill, Inc., U.S.A., 1959.
- 6) Blevins, Robert D., "Formulas for natural frequency and mode shape", Robert Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 1979.
- 7) Eichmann, E. S., "Note on the maximum effect of a moving force on a simple beam", ASME J. Appl. Mech., vol. 20, no. 4, december 1953.
- 8) Fryba, Ladislav, "Vibrations of solids and structures under moving loads", Noordhoff, International Publishing, Prague, Czechoslovakia, 1972.
- 9) Hinkle, Rolland T., Morse, Ivan E. and Tae, Francis S., "Mechanical vibrations, theory and applications", Allyn and Bacon, Inc., Boston, Massachusetts, 2a. ed., 1978.

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

- 10) Roark, Raymond J. and Young, Warren C. "Formulas for stress and strain", Mc Graw-Hill Book Company, U.S.A., 5a. ed., 1975.
- 11) Soedel, Werner, "Vibrations of shells and plates", Marcel Dekker, Inc., New York, New York, 1981.
- 12) Thomson, William T., "Theory of vibration with applications", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1972.
- 13) Timoshenko, Stephen, "Vibration problems in engineering", D. Van Nostrand Company, Inc., U.S.A., 2a. ed., 1937.
- 14) Urrutia-Galicia, J.L., "Vibración forzada en medios continuos", Apuntes de clase, México, D. F., 1988.
- 15) Volterra, Enrico and Zachmanoglou, E. C., "Dynamics of vibrations", Carles E. Merrill Brooks, Inc., Columbus, Ohio, 1965.