21/
2 9

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LUGARES GEOMETRICOS: LA CIRCUNFERENCIA.

T E S I S

Que para obtener el Titulo de

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a

Nora María de Lourdes Ortigosa Zepeda

México, D. F. 1990

INTRODUCCION

Este trabajo está dirigido especialmente a los alumnos del 5º. año de bachillerato de la Escuela Nacional Preparatoria; para abordarlo, el alumno ya debe tener conocimiento acerca de: distancia entre dos puntos, punto medio de un segmento, la pendiente de una recta, la ecuación de la línea recta, distancia entre un punto y una recta así como nociones generales de la circunferencia.

Lo que se pretende es hacer más accesible a las Matemáticas en el área de la Geometría Analítica, indicándole cómo debe proceder a los planteamientos propuestos en relación a las fórmulas que debe de utilizar.

Para tal efecto se ha dividido a éste en cuatro capítulos de la siguiente manera:

En el primer capítulo se define lo que es un lugar geométrico y se describen lugares geométricos de manera analítica utilizando conocimientos previamente adquiridos en el curso.

En el segundo capítulo se estudia la circunferencia como un lugar geométrico, se deduce su ecuación conociendo el centro y la longitud del radio. Esta ecuación se conoce como ordinaria o canónica. Se presentan algunos ejemplos en los que es necesario encontrar las coordenadas del centro y la longitud del radio. Además, a partir de una ecuación en la forma ordinaria de la circunferencia, se encuentran las coordenadas del centro y la longitud del radio.

Después, a partir de la ecuación ordinaria, se obtiene otra, llamada general de la circunferencia y que es de la forma:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

especificando cómo encontrar las coordenadas del centro y la longitud del radio analizando los valores de D, E y F.

En el tercer capítulo, se estudian familias de circunferencias que están representadas por la ecuación:

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + k(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0$$

analizando lo que sucede cuando k toma valores de -1, 0 y diferentes de -1 y 0.

La ecuación anterior se propone, suponiendo que dos circunferencias se intersectan cortándose en dos puntos; se observa que se satisface también para cuando las circunferencias son tangentes y para cuando no se intersectan en ningún punto.

Si k = -1 entonces se obtiene la ecuación de una recta a la que se le conoce como eje radical. Y se demuestran algunas propiedades que satisface.

Por último en el cuarto capítulo se proponen algunos teoremas y lugares geométricos relativos a la circunferencia, los cuales son demostrados o identificados analíticamente utilizando lo presentado en los tres primeros capítulos. Algunos de los teoremas ya han sido demostrados en el curso de Matemáticas de 3º año de educación media básica utilizando geometría sintética, pero ahora pueden ser interesantes para los alumnos de bachillerato las demostraciones que aquí se presentan, haciendo así novedoso el campo "árido" y "abstracto" de las Matemáticas.

I N D I C E

CAPITULO I. LUGARES GEOMETRICOS.

1.1. DEFINICION. 6

1.2. MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO EN EL PLANO. 6

1.3. MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO EN EL ESPACIO. 16

1.4. LUGAR GEOMETRICO DE TODOS LOS CENTROS DE LOS RECTANGULOS INSCRITOS EN UN TRIANGULO. 19

1.5. EL PROBLEMA DEL GATITO EN LA ESCALERA. 28

1.6. LUGAR GEOMETRICO DE LOS PUNTOS QUE EQUIDISTAN DE TRES PUNTOS QUE NO SON COLINEALES. 31

CAPITULO II. ECUACION DE LA CIRCUNFERENCIA.

2.1. DEFINICION DE LA CIRCUNFERENCIA. 34

2.2. ECUACION ORDINARIA O CANONICA DE LA CIRCUNFERENCIA CON CENTRO EN C(h,k) Y RADIO r. 34

2.3. ALGUNOS EJEMPLOS. 41

2.4. ECUACION GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA. 50

2.5. ALGUNOS EJEMPLOS. 57

CAPITULO III. FAMILIAS DE CIRCUNFERENCIAS

3.1. DETERMINACION DE UNA CIRCUNFERENCIA SUJETA A TRES CONDICIONES DADAS. 67

3.2. ALGUNOS EJEMPLOS. 69

3.3. ANALISIS DE LA ECUACION: $x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + k(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0.$ 71

3.3.1. CUANDO $k = 0$. 72

3.3.2. CUANDO $k = -1$. 72

3.3.3. CUANDO $k \neq 0$ y $k \neq -1$. 74

3.4. LA POTENCIA DE UN PUNTO CON RESPECTO A UNA CIRCUNFERENCIA. 78

3.5. EL EJE RADICAL.

3.5.1. EL RADIO RADICAL. 86

CAPITULO IV. ALGUNOS TEOREMAS Y PROBLEMAS DE LUGARES GEOMETRICOS RELATIVOS A LA CIRCUNFERENCIA.

4.1. PROBLEMAS DE LUGARES GEOMETRICOS RELATIVOS A LA CIRCUNFERENCIA. 85

4.2. TEOREMAS SOBRE LA CIRCUNFERENCIA. 106

C A P I T U L O I

LUGARES GEOMETRICOS

1.1. Definición (Lugar Geométrico):

Un lugar geométrico es el conjunto de todos los puntos que satisfacen una condición establecida.

1.2. Mediatriz de un segmento en el plano.

Un ejemplo de lugar geométrico es la mediatriz de un segmento cuyos extremos son los puntos A y B. Recordemos que la mediatriz es la recta perpendicular al segmento AB que pasa por su punto medio. (Ver figura 1.1.)

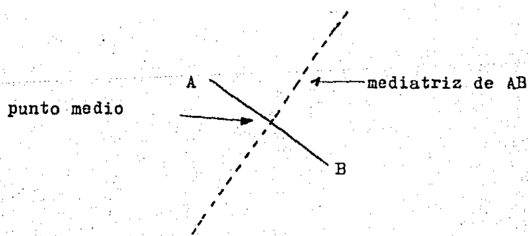


Figura 1.1.

Pero ¿qué condición satisfacen los puntos de la mediatriz?

La condición que satisfacen es que equidistan de los extremos del segmento. Es decir, si elegimos un punto, llamémosle D, que pertenezca a la mediatiz, la distancia que hay de D a un extremo es exactamente la misma que hay de D al otro extremo. Veamos por qué.

Si AB es un segmento y ℓ su mediatriz; por la definición de mediatriz sabemos que ℓ pasa por el punto medio de AB llamémosle M. (Ver figura 1.2.)

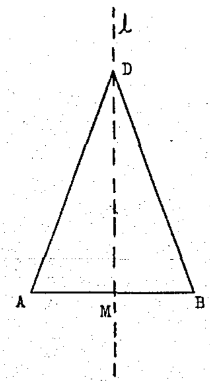


Figura 1.2.)

Uniendo D con A y con B se forman dos triángulos: $\triangle$ ADM y $\triangle$ BDM. (*)

Como M es el punto medio de AB entonces podemos afirmar que AM = MB.

Sabemos que ℓ es perpendicular al segmento AB, podemos decir que $\sphericalangle$ AMD = $\sphericalangle$ DMB ya que son rectos.

Además los triángulos tienen un lado común DM.

Entonces $\triangle$ AMD = $\triangle$ DMB.

Por lo tanto AD = DB.

Ahora veamos que si D es un punto que no pertenece al segmento AB y que además equidista a los extremos, AD = DB, entonces D pertenece a la mediatriz del segmento AB.

Tracemos una recta que pase por el punto D y por el punto M que es el punto medio de AB. (Ver figura 1.3.)

Como M es el punto medio del segmento AB, podemos afirmar que AM = MB.

---

* . $\triangle$ ADM es la abreviación de un triángulo cuyos vértices son A, D y M.

Entonces $\triangle ADM = \triangle MDB$

Por lo tanto $\sphericalangle AMD = \sphericalangle DMB = 90^o$, es decir, DM es perpendicular a AB. Concluimos que D pertenece a la mediatriz de AB.

Una mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos de un segmento.

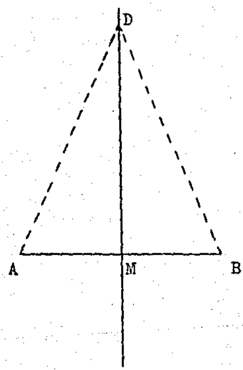


Figura 1.3.

En este trabajo los lugares geométricos se caracterizan analíticamente y en general mediante una ecuación. Así, los puntos que satisfacen dicha ecuación pertenecen a un lugar geométrico.

Consideremos por ejemplo la recta cuya ecuación es: $y = 2x + 10$.

Si $x = 2$, entonces $y = 2(2) + 10 = 4 + 10 = 14$. Así, $T_1(2,14)$ es un punto de la recta.

Si $x = -5$, entonces $y = 2(-5) + 10 = -10 + 10 = 0$. Así, $T_2(-5,0)$ es un punto de la recta.

:

Sabemos que por dos puntos pasa una única recta, entonces para trazar la gráfica de la recta anterior, basta con trazar la recta que pasa por los puntos que encontramos. (Ver figura 1.4.)

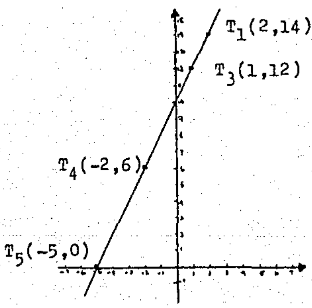


Figura 1.4.

Si $x = 1$, entonces $y = 2(1) + 10 = 12$. Si observamos la recta que trazamos podemos darnos cuenta que en efecto $T_3(1,12)$ está en la recta.

También podemos ver que $T_4(-2,6)$ está sobre la recta; veamos qué sucede si en la ecuación $y = 2x + 10$ sustituimos la abscisa de este punto. Si $x = -2$ entonces $y = 2(-2) + 10 = -4 + 10 = 6$, lo que ocurre es que obtenemos el valor de la ordenada del punto T_4, es decir T_4 satisface la ecuación.

Podemos afirmar que $y = 2x + 10$ es un ejemplo de lugar geométrico.

En general una recta cuya ecuación sea $y = mx + b$ es un lugar geométrico.

Problema:

Hallar el lugar geométrico del conjunto de los puntos que equidistan de los puntos $A(3,-8)$ y $B(-5,10)$.

Si nos fijamos bien lo que tenemos que encontrar es la ecuación de la mediatriz del segmento AB. (Ver inicio de esta sección).

Veamos gráficamente lo que debe de ocurrir en la figu ra 1.5.

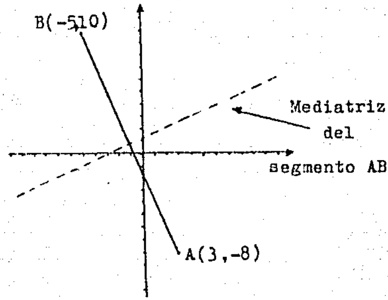


Figura 1.5.

Si T(x,y) es un punto que está sobre la mediatriz, entonces debe cumplir con la condición de que equidista de los extremos del segmento, es decir:

$$d(A,T) = d(B,T) \qquad (*)$$

$$d(A,T) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-(-8))^2}$$

$$d(B,T) = \sqrt{(x-(-5))^2 + (y-10)^2}$$

---

* . Denotaremos la distancia del punto A al punto T como d(A,T).

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y+8)^2} = \sqrt{(x+5)^2 + (y-10)^2}.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros se obtiene:

$$(x-3)^2 + (y+8)^2 = (x+5)^2 + (y-10)^2 .$$

Desarrollando los binomios obtenemos:

$$x^2-6x+9+y^2+16y+64 = x^2+10x+25+y^2-20y+100.$$

Escribiendo los términos en el primer miembro y después reduciendo términos semejantes se tiene que:

$$x^2-6x+9+y^2+16y+64-x^2-10x-25-y^2+20y-100 = 0,$$

es decir que,

$$-16x + 36y - 52 = 0.$$

Simplificando la ecuación dividiéndola entre -4:

$$4x - 9y + 13 = 0 \qquad (1.I.)$$

Esta ecuación debe ser la ecuación de la mediatriz. Comprobémoslo viendo que es perpendicular al segmento AB y que además el punto medio de AB satisface la ecuación 1.I.

Recordemos que dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es -1, es decir, si $m_1m_2 = -1$.

Calculemos la pendiente del segmento AB:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10 - (-8)}{-5 - 3} = \frac{10 + 8}{-8} = \frac{18}{-8} = -\frac{9}{4}.$$

La pendiente de la recta $Ax + By + C = 0$ es $-\frac{A}{B}$.

Entonces la pendiente de la recta 1.I. es:

$$m = -\left(-\frac{4}{9}\right) = \frac{4}{9}.$$

El producto de las pendientes es:

$$\left(-\frac{9}{4}\right)\left(\frac{4}{9}\right) = -1.$$

Por lo tanto las rectas son perpendiculares.

Por último calcularemos el punto medio de AB y veamos que sí satisface la ecuación 1.I. Recordemos que el punto medio T de $T_1(x_1,y_1)$ y $T_2(x_2,y_2)$ está dado por:

$$T\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$T\left(\frac{3 - 5}{2}, \frac{-8 + 10}{2}\right) = T\left(\frac{-2}{2}, \frac{2}{2}\right) = T(-1, 1).$$

Sustituyéndolo en la ecuación 1.I.:

$$
\begin{aligned}
4x - 9y + 13 &= 4(-1) - 9(1) + 13 \\
&= -4 - 9 + 13 \\
&= -13 + 13 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los puntos $A(3,-8)$ y $B(-5,10)$ es:

$$4x - 9y + 13 = 0.$$

1.3. Mediatriz de un segemento en el espacio.

¿Cuál será el conjunto de puntos que equidistan de dos puntos que están en el espacio?

Supongamos que $T(x,y,z)$ equidista de $T_1(x_1,y_1,z_1)$ y de $T_2(x_2,y_2,z_2)$, se debe de cumplir entonces que:

$$d(T_1,T) = d(T_2,T).$$

Utilizando la fórmula para calcular la distancia entre dos punto dados en el espacio sabemos que:

$$\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2} = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2}.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros, desarrollando los binomios, sumando términos semejantes al igualar la ecuación a cero obtenemos:

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2 ,$$

de aquí que, abriendo los paréntesis:

$$x^2-2x_1x+x_1^2+y^2-2y_1y+y_1^2+z^2-2z_1z+z_1^2 = x^2-2x_2x+x_2^2+y^2-2y_2y+y_2^2+z^2-2z_2z+z_2^2,$$

simplificando:

$$-2x_1x+2x_2x-2y_1y+2y_2y-2z_1z+2z_2z+x_1^2+y_1^2+z_1^2-x_2^2-y_2^2-z_2^2 = 0,$$

reagrupando :

$$(-2x_1+2x_2)x+(-2y_1+2y_2)y+(-2z_1+2z_2)z+x_1^2+y_1^2+z_1^2-x_2^2-y_2^2-z_2^2 = 0.$$

Finalmente sustituyendo:

$-2x_1+2x_2$ por A,
$-2y_1+2y_2$ por B,
$-2z_1+2z_2$ por C,
$x_1^2+y_1^2+z_1^2-x_2^2-y_2^2-z_2^2$ por D,

obtenemos $Ax+By+Cz+D=0$; ésta es la ecuación de un plano. (*)

* . LEHMANN? C. Geometría Analítica, pag. 342.

Por lo tanto el conjunto de puntos que equidistan de dos puntos que están en el espacio es un plano.

1.4. Lugar geométrico de todos los centros de los rectángulos inscritos en un triángulo.

¿Cuál es el lugar geométrico de todos los centros de los rectángulos inscritos en un triángulo, si los rectángulos tienen un lado sobre un lado fijo del triángulo?

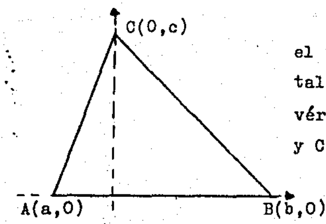


Figura 1.6.

Tracemos al triángulo en el plano cartesiano de manera tal que las coordenadas de sus vértices sean: A(a,0), B(b,0) y C(0,c). (Ver figura 1.6.)

Determinemos las ecuaciones de las rectas que pasan por AC y BC, utilizando la ecuación:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1).$$

La ecuación de la recta que pasa por AC es:

$$y - 0 = \frac{0 - c}{a - 0}(x - a), \text{ es decir,}$$

$$y = -\frac{c}{a}(x - a) \qquad (1.II.)$$

La ecuación de la recta que pasa por BC es:

$$y - 0 = \frac{0 - c}{b - 0}(x - b), \quad \text{así que,}$$

$$y = -\frac{c}{b}(x - b). \qquad (1.III.)$$

Si el lado fijo del triángulo es AB, el lado opuesto del rectángulo es un segmento paralelo al eje de las absci<u>i</u>sas y cuya ecuación es $y = d$ (1.IV.). (Ver figura 1.7)

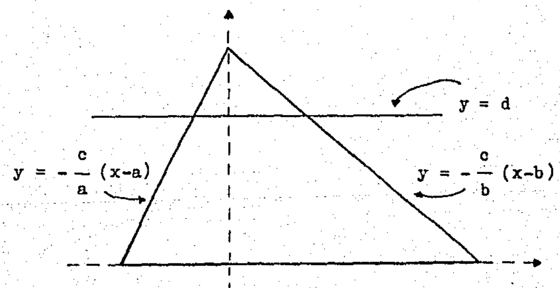


Figura 1.7.

Así los vértices superiores del rectángulo son los puntos de intersección de la recta 1.IV. con las rectas 1.II. y 1.III. Para encontrarlos, multipliquemos las ecuaciones 1.II., 1.III. y 1.IV. por ab:

$$aby = abc - bcx, \qquad (1.V.)$$

$$aby = abc - acx, \qquad (1.VI.)$$

$$aby = abd. \qquad (1.VII.)$$

Igualemos las ecuaciones 1.V. y 1.VII. para encontrar la abscisa del punto de intersección de AC con $y = d$.

$$abc - bcx = abd,$$

$$bcx = abc - abd,$$

$$x = a - \frac{ad}{c} = \frac{ac - ad}{c} = \frac{a(c - d)}{c}.$$

Por lo tanto la abscisa del punto de intersección de AC con la recta $y = d$ es:

$$x = \frac{a(c - d)}{c}.$$

Encontremos la abscisa del punto de intersección de BC con la recta $y = d$, igualando las ecuaciones 1.VI. y 1.VII.

$$abc - acx = abd,$$

$$acx = abc - abd,$$

$$x = b - \frac{bd}{c} = \frac{bc - bd}{c} = \frac{b(c - d)}{c}\,.$$

Por lo tanto la abscisa del punto de intersección de BC con la recta $y = d$ es:

$$x = \frac{b(c - d)}{c}\,.$$

Las ordenadas de ambos puntos son $y = d$.

$$\text{Si} \quad \left(\frac{a(c - d)}{c}\,,\, d\right) \quad y \quad \left(\frac{b(c - d)}{c}\,,\, d\right)$$

son los vértices superiores del rectángulo, entonces las coordenadas de los vértices inferiores son:

$$\left(\frac{a(c - d)}{c}\,,\, 0\right) \quad y \quad \left(\frac{b(c - d)}{c}\,,\, 0\right).$$

Las coordenadas del centro del rectángulo son el punto medio de una de las diagonales (*)

$$T\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\,,\, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

---

* . Una diagonal es el segmento que une pares de vértices no consecutivos.

$$T\left(\frac{\dfrac{a(c-d)}{c}+\dfrac{b(c-d)}{c}}{2},\ \frac{0+d}{2}\right)=$$

$$T\left(\frac{(a+b)(c-d)}{2c},\ \frac{d}{2}\right).$$

Por lo tanto las coordenadas del centro son:

$$\left(\frac{(a+b)(c-d)}{2c},\ \frac{d}{2}\right) \qquad (1.VIII.)$$

(Ver figura 1.8.).

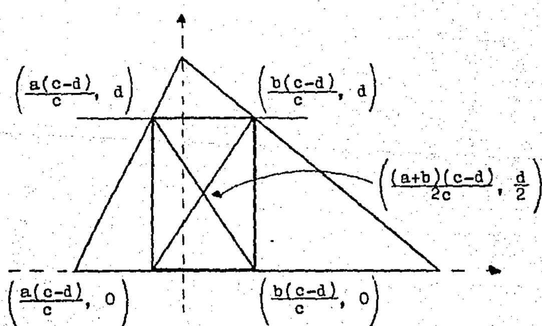


Figura 1.8.

Podemos observar que tanto la abscisa como la ordenada del centro del rectángulo "dependen" del valor de d.

Veamos que sucede si $d = 0$, es decir, si la recta $y = d$ coincide con la base del triángulo.(Ver figura 1.9.)

Sustituyamos $d = 0$ en 1.VIII.:

$$\left(\frac{(a+b)(c-d)}{2c}, \frac{d}{2}\right) = \left(\frac{(a+b)(c-0)}{2c}, \frac{0}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{(a+b)c}{2c}, 0\right) = \left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$$

Lo que obtenemos es el punto medio del lado AB del triángulo. La altura del rectángulo es cero. (Ver figura 1.9.)

Ahora veamos que sucede si $y = d$ pasa por C, es decir si $d = c$. (Ver figura 1.9.)

Sustituyamos $d = c$ en 1.VIII.:

$$\left(\frac{(a+b)(c-d)}{2c}, \frac{d}{2}\right) = \left(\frac{(a+b)(c-c)}{2c}, \frac{c}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{(a+b)(\ 0\ )}{2c} \ , \ \frac{c}{2} \right) = \left(\frac{0}{2c} \ , \ \frac{c}{2} \right) = \left(0 \ , \ \frac{c}{2} \right).$$

Lo que obtenemos es el punto medio de la altura del triángulo. (Ver figura 1.9.). La base del rectángulo es cero.

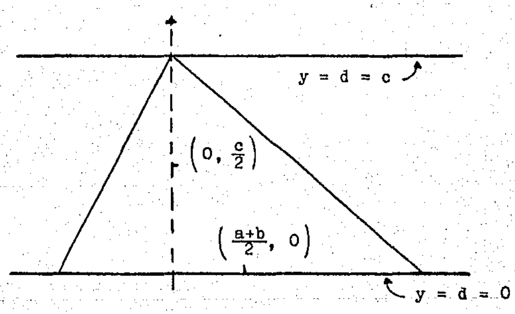


Figura 1.9.

Despejemos a d de la abscisa y la ordenada del centro del rectángulo. Recordemos que éstas son:

$$x = \frac{(a+b)(\ c - d)}{2c} \quad , \quad y = \frac{d}{2} \quad , \text{ de donde}$$

$$2cx = (a + b)(c - d), \quad \text{así que,}$$

$$\frac{2cx}{a + b} = c - d.$$

Despejando d, $\quad d = c - \dfrac{2cx}{a + b} \qquad (1.IX.)$

También $\quad d = 2y \qquad (1.X.)$

Se desea que y quede en términos de x, entonces igualando las ecuaciones 1.IX. y 1.X. tenemos que:

$$2y = c - \frac{2cx}{a + b}$$

despejando y tenemos:

$$y = \frac{c}{2} - \frac{cx}{a + b}, \quad \text{es decir,}$$

$$y = -\frac{c}{a + b}\left(x - \frac{a + b}{2}\right)$$

esta es la ecuación de una recta.

Entonces el lugar geométrico que buscamos es el segmento cuyos extremos son los puntos:

$$T_1\left(0\ ,\ \frac{c}{2}\right) \quad y \quad T_2\left(\frac{a+b}{2},\ \ 0\right)$$

(Ver figura 1.10.)

Por lo tanto el conjunto de los centros de los rectángulos inscritos en un triángulo tales que uno de los lados de los rectángulos está sobre un lado fijo del triángulo, es un segmento cuyos extremos son el punto medio del lado fijo y el punto medio de la altura del lado fijo.

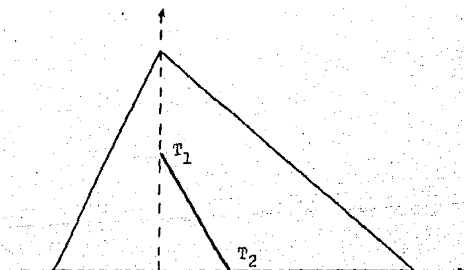


Figura 1.10.

1.5. El problema del gatito en la escalera .

Una escalera está apoyada en el suelo liso y con la pared en cada uno de sus extremos. Supongamos que un gatito flemático está sentado en el centro de la escalera. ¿Por qué línea se mueve el gatito si la escalera se desliza?(Ver figura 1.11.)

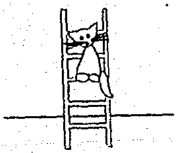


Figura 1.11.

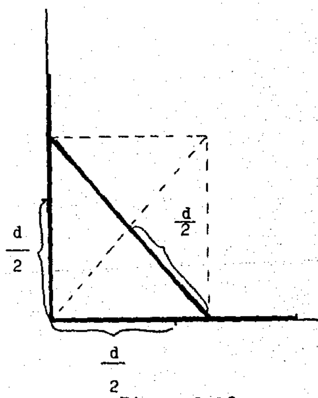


Figura 1.12.

Este problema lo podemos formular de la siguiente manera:

Si tenemos un ángulo recto y un segmento AC de longitud d, cuyos extremos están sobre el ángulo; debemos entonces determinar el conjunto de todos los centros de los segmentos AC. (Ver figura 1.12.)

El ángulo ABC siempre es recto, consideremos al rectángulo ABDC, donde AC y BD son las diagonales del rectángulo que se bisectan en M. Ya que AC se desliza sobre el ángulo ABC entonces tendremos diferentes rectángulos con diagonales constantes, AC, veamos las figuras: 1.13a., 1.13b. y 1.13c.:

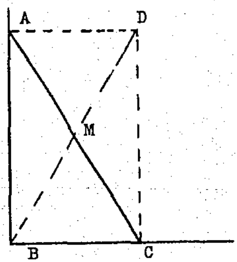


Figura 1.13a.

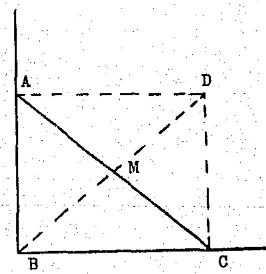


Figura 1.13b.

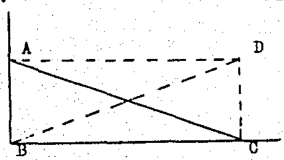


Figura 1.13c.

Como M bisecta las diagonales podemos afirmar que:

$$AM = BM = CM = DM = \frac{d}{2} .$$

Entonces B equidista de M en $\frac{d}{2}$ unidades.

Por lo tanto el conjunto de centros de los segmentos AC es el arco KL de la circunferencia con centro en B y radio $\frac{d}{2}$. (Ver figura 1.14.)

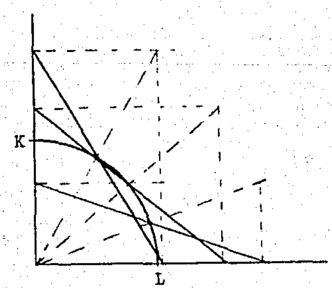


Figura 1.14.

1.6. Lugar geométrico de los puntos que equidistan de tres puntos que no son colineales.

Encontremos al conjunto de puntos que equidistan de los tres puntos: T_1, T_2 y T_3, si éstos no son colineales. (*)

Desglosemos este problema de la siguiente manera:

Busquemos primero el conjunto de puntos que equidistan a cada par de vértices, es decir las mediatrices; como los puntos no son colineales, las mediatrices no son paralelas entonces se intersectan en un punto y éste es el que buscamos.

Sólo será necesario hacerlo para dos pares de vértices, veamos por qué:

Si M y M' son las mediatrices de T_1T_2 y T_2T_3 respectivamente y T es la intersección de M con M', podemos afirmar por definición de mediatriz que:

$$d(T_1,T) = d(T_2.T) \qquad (1.XI.)$$

$$d(T_2,T) = d(T_3,T) \qquad (1.XII.)$$

*. Tres o más puntos son colineales si están sobre la misma recta.

de las ecuaciones 1.XI. y 1.XII. obtenemos que:

$$d(T_1,T) = d(T_3,T).$$

Gráficamente lo podemos observar en la figura 1.15.

Ya que T equidista de los tres puntos podemos afirmar que T es el centro de la circunferencia que pasa por T_1, T_2 y T_3.

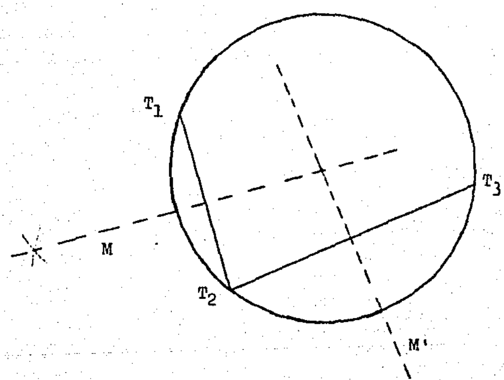


Figura 1.15.

¿Habrá otra circunferencia que pase por T_1, T_2 y T_3?

La respuesta es: ¡ No !, Ya que el punto de intersec -

ción de las mediatrices M y M' es único.

<u>Observación:</u> Dados tres puntos no colineales, existe una circunferencia que pasa por los tres puntos.

C A P I T U L O I I

ECUACION DE LA CIRCUNFERENCIA

Por nuestros conocimientos de geometría elemental sabemos que la circunferencia es una línea curva cerrada plana, cuyos puntos equidistan del centro.

Demos ahora una definición de la circunferencia más elegante:

2.1. Definición (Circunferencia):

Es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que están a una distancia constante de un punto fijo. A la constante se le llama radio y el punto fijo se llama centro.

2.2. Ecuación de la circunferencia con centro en $C(h,k)$ y radio r.

Encontremos la ecuación de la circunferencia que tiene centro en $C(3,-2)$ y radio $r = 4$.

Si $T(x,y)$ pertenece a la circunferencia debe de cumplir con la condición de que la distancia de T a C debe de ser 4 unidades.

$$d(T,C) = 4$$

esto es $$\sqrt{(x - 3)^3 + (y - (-2))^2} = 4$$

elevando al cuadrado ambos miembros:

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16. \quad (2.I.)$$

esta es la condición que deben cumplir los puntos que equidistan al punto C(3,-2) en cuatro unidades.

Dibujemos la gráfica de esta circunferencia de la siguiente manera:

En el plano cartesiano localicemos el punto C(3,-2), haciendo centro en él abramos el compás 4 unidades y tracemos la circunferencia. (Ver figura 2.1.)

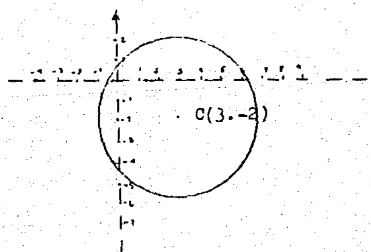


Figura 2.1.

Podemos ver que el punto $T_1(7,-2)$ está sobre la circunferencia, comprobemos que dicho punto satisface la ecuación 2.I.:

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = (7-3)^2 + (-2+2)^2 =$$

$$(4)^2 + (0)^2 = 16 + 0 = 16.$$

Por lo tanto T_1 satisface la ecuación 2.I.

En general, para encontrar la ecuación de una circunferencia sabiendo cuales son las coordenadas de su centro y la magnitud de su radio ¿será necesario repetir el procedimiento que anteriormente hicimos?

La respuesta es: ¡ No !

El procedimiento lo haremos por última vez. Supóngase que queremos encontrar la ecuación de una circunferencia cuyo centro está en $C(h,k)$ y que tiene un radio cuya magnitud es de r unidades.

Si $T(x,y)$ pertenece a este lugar geométrico, satisface la condición de que la distancia de él al centro debe de ser r.

$$d(T,C) = r.$$

es decir $$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

elevando al cuadrado ambos miembros tenemos que:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad (2.II.).$$

Esta ecuación la utilizaremos para conocer la ecuación de una circunferencia que tiene centro en $C(h,k)$ y radio r. Dicha ecuación recibe el nombre de ecuación de la circunferencia en la forma canónica o ecuación de la circunferencia en la forma ordinaria.

Demos algunos ejemplos:

Si la circunferencia tiene centro en $C(-2,5)$ y radio $r = 5$, entonces su ecuación es:

$$(x-(-2))^2 + (y-5)^2 = (5)^2$$

es decir, $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 25.$

Si la circunferencia tiene centro en $C\left(\frac{4}{9}, -\frac{6}{7}\right)$ y radio $r = 4$, entonces su ecuación es:

$$\left(x - \frac{4}{9}\right)^2 + \left(y - \left(-\frac{6}{7}\right)\right)^2 = (4)^2 ,$$

es decir, $$\left(x - \frac{4}{9}\right)^2 + \left(y + \frac{6}{7}\right)^2 = 16.$$

Si la circunfernecia tiene centro en $C\left(-8, -\frac{3}{4}\right)$ y radio $r = 2$, entonces su ecuación es:

$$(x - (-8))^2 + \left(y - \left(-\frac{3}{4}\right)\right)^2 = (\sqrt{2})^2,$$

es decir, $$(x + 8)^2 + \left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = 2.$$

Algo muy interesante también sucederá si nosotros tenemos una ecuación de la forma 2.II., ya que podemos afirmar que es la ecuación de la circunferencia que tiene centro en C(h,k) y radio r, siempre que el segundo miembro sea mayor que cero.

Nótese que la abscisa del centro es el término independiente del binomio que tiene el término "x", pero con signo contrario; la ordenada del centro es el término independiente del binomio que tiene el término "y", pero también con signo contratio. Mientras que el radio de la circunferencia es la raíz cuadrada del segundo miembro de la ecuación.

Demos algunos ejemplos:

La ecuación $(x - 8)^2 + (y - 3)^2 = 4$ representa una circunferencia con centro en $C(8,3)$ y radio $r = \sqrt{4}$, es decir $r = 2$.

La ecuación $(x + 9)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 36$ representa una circunferencia con centro en $C\left(-9, \frac{5}{2}\right)$ y radio $r = \sqrt{36}$, es decir, $r = 6$.

La ecuación $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{7}{4}\right)^2 = 23$ representa una circunferencia con centro en $C\left(-\frac{1}{3}, -\frac{7}{4}\right)$ y radio $r = \sqrt{23}$. (*)

Consideremos un caso particular de la ecuación de la circunferencia en la forma ordinaria:

La ecuación de la circunferencia cuyo centro es el ori

---

*. Se recomienda que cuando una raíz no sea exacta ($\sqrt{23} = 4.795831523...$) se deje indicada la operación.

gen, C(0,0), y radio r unidades. Sustituyendo en la ecuación 2.II. tenemos que:

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2,$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad (2.III.).$$

Podemos concluir que siempre que se desee conocer la ecuación de una circunferencia con centro en el origen y radio r, sólo bastará con sustituir el valor de r en la ecuación 2.III.

2.3. Algunos ejemplos.

En muchas ocasiones, se presentan casos en los que aparentemente no se nos proporciona el centro o el radio de la circunferencia para encontrar la ecuación de ésta. Mostraremos algunos ejemplos de este tipo y cómo resolverlos.

Ejemplo 2.3.1.

Si los extremos de uno de los diámetros de la circunferencia son $T_1(3,-8)$ y $T_2(-7,2)$ ¿cuál es la ecuación de la circunferencia?

Para poder encontrar la ecuación de la circunferencia, es necesario conocer el centro y la magnitud del radio. Como el diámetro es una cuerda que pasa por el centro, calculemos el punto medio del segmento T_1T_2 para saber cuales son las coordenadas del centro.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3 + (-7)}{2} = \frac{3 - 7}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \qquad \text{y}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-8 + 2}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Las coordenadas del centro son $C(-2,-3)$.

Para conocer la magnitud del radio calcularemos la distancia de C a T_1 ó de C a T_2.

$$d(C,T_1) = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}$$

$$= \sqrt{(3 - (-2))^2 + (-8 - (-3))^2}$$

$$= \sqrt{(3 + 2)^2 + (-8 + 3)^2}$$

$$= \sqrt{(5)^2 + (-5)^2}$$

$$= \sqrt{25 + 25}$$

$$= \sqrt{50}\,.$$

Por lo tanto la magnitud del radio es $r = \sqrt{50}$.

Sustituyendo las coordenadas de C y la magnitud del radio en la ecuación 2.II.:

$$(x - (-2))^2 + (y - (-3))^2 = (\sqrt{50}\,)^2,$$

$$(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 50,$$

esta es la ecuación de la circunferencia en la que T_1T_2 es uno de sus diámetros.

Ejemplo 2.3.2.

Determinemos la ecuación de la circunferencia en la que su centro tiene coordenadas C(3,-3) y pasa por el punto T(6,-7).

Como no se nos proporciona la magnitud del radio, tenemos que calcular la distancia de C a T.

$$
\begin{aligned}
d(C,T) &= \sqrt{(x_C - x_T)^2 + (y_C - y_T)^2} \\
&= \sqrt{(3 - 6)^2 + (-3 - (-7))^2} \\
&= \sqrt{(-3)^2 + (-3 + 7)^2} \\
&= \sqrt{9 + (4)^2} \\
&= \sqrt{9 + 16} \\
&= \sqrt{25} \\
&= 5.
\end{aligned}
$$

La magnitud del radio es entonces 5.

Sustituyendo las coordenadas del centro y el radio en la ecuación 2.II. tenemos que:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$
$$(x - 3)^2 + (y - (-3))^2 = (5)^2,$$
$$(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 25,$$

esta es la ecuación buscada.

Ejemplo 2.3.3.

Encontremos la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $5x + 3y + 26 = 0$ y $4x - 9y - 2 = 0$ y radio $r = 3$.

Para encontrar la ecuación de la circunferencia, tenemos que conocer las coordenadas del centro, ésto lo lograremos encontrando el punto de intersección de las dos rectas.

Resolvamos el sistema:

$$5x + 3y = -26 \qquad (2.IV.)$$
$$4x - 9y = 2 \qquad (2.V.).$$

Multiplicando la ecuación 2.IV. por 3 y sumando las ecuaciones:

$$\begin{array}{r} 15x + 9y = -78 \\ 4x - 9y = 2 \\ \hline 19x \qquad = -76 \end{array}$$

Despejando x:

$$x = \frac{-76}{19},$$

$$x = -4.$$

Sustituyendo en la ecuación 2.IV. ó 2.V. se tiene que:

$$5(-4) + 3y = -26,$$

es decir $\quad -20 + 3y = -26,$

reduciendo términos semejantes $\quad 3y = -26 + 20,$

$$3y = -6,$$

despejando y $\quad y = \dfrac{-6}{3},$

$$y = -2.$$

Las coordenadas del centro son $C(-4,-2)$ y la magnitud del radio es $r = 3$; sustituyéndolos en la ecuación 2.II:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2,$$

así que $\quad (x - (-4))^2 + (y - (-2))^2 = (3)^2,$

$$(x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

esta es entonces la ecuación buscada.

Ejemplo 2.3.4.

Determinemos la ecuación de la circunferencia con centro en C(10,-8) y que es tangente a la recta $x - 2y - 6 = 0$.

En este planteamiento no se nos proporciona la magnitud del radio, la obtendremos calculando la distancia del centro a la recta, utilizando la ecuación:

$$d = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d = \frac{|1(10) - 2(-8) - 6|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|10 + 16 - 6|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{|20|}{\sqrt{5}} = \frac{20}{\sqrt{5}}$$

entonces la magnitud del radio es $r = \dfrac{20}{\sqrt{5}}$.

Sustituyendo el centro y el radio en la ecuación 2.II. se tiene que:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2,$$

$$(x - 10)^2 + (y - (-8))^2 = \left(\frac{20}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$(x - 10)^2 + (y + 8)^2 = \frac{400}{5} \quad ,$$

$$(x - 10)^2 + (y + 8)^2 = 80$$

es la ecuación de la circunferencia.

Ejemplo 2.3.5.

Hallemos la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en el eje Y y que pasa por los puntos $T_1(-2,6)$ y $T_2(2,2)$.

En este ejemplo no se nos proporcionan el centro y el radio. Sabemos que el centro está sobre el eje Y, podemos afirmar que sus coordenadas son $C(0,y)$. Por la definición de circunferencia sabemos que:

$$d(C,T_1) = d(C,T_2)$$

es decir,

$$\sqrt{(0 - (-2))^2 + (y - 6)^2} = \sqrt{(0 - 2)^2 + (y - 2)^2}$$

con esta ecuación podemos conocer el valor de y. Elevemos al cuadrado ambos miembros de la ecuación, desarrollemos los binomios, después reduzcamos términos semejantes y por último resolvamos la ecuación:

$$(0 + 2)^2 + (y - 6)^2 = (-2)^2 + (y - 2)^2$$

$$4 + y^2 - 12y + 36 = 4 + y^2 - 4y + 4,$$

$$-12y + 4y = -36 + 4,$$

$-8y = -32$, así que

$$y = \frac{-32}{-8},$$

$$y = 4.$$

Entonces la ordenada del centro es 4. Hallemos la magnitud del radio calculando la distancia de C a T_1 ó de C a T_2.

$$d(C,T_2) = \sqrt{(x_C - x_T)^2 + (y_C - y_T)^2}$$

$$= \sqrt{(0 - 2)^2 + (4 - 2)^2}$$

$$= \sqrt{(-2)^2 + (2)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 4}$$

$$= \sqrt{8}.$$

Por lo tanto la magnitud del radio es $r = \sqrt{8}$, sustituyendo el radio y las coordenadas del centro en la ecuación 2.II., se tiene que:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2,$$

en consecuencia, $$(x - 0)^2 + (y - 4)^2 = (\sqrt{8})^2$$

y por lo tanto $$x^2 + (y - 4)^2 = 8$$

es la ecuación de la circunferencia.

2.4. Ecuación general de la circunferencia.

La ecuación de la circunferencia se puede representar de otra manera; para obtener esta nueva presentación utilizaremos la ecuación 2.II. de la siguiente manera:

Se desarrollan los binomios y se iguala a cero la ecuación:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2,$$
$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 - r^2 = 0,$$

ordenando la ecuación tenemos que

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0.$$

Sustituimos $-2h$ por D, $-2k$ por E y $h^2 + k^2 - r^2$ por F esto lo podemos hacer ya que h, k y r son constantes. Se tiene entonces la ecuación:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (2.VI.).$$

Esta es la ecuación de la circunferencia en la forma general.

¿Podremos conocer las coordenadas del centro y la magnitud del radio de una circunferencia si está representada en la forma general?

Para determinar las coordenadas del centro y la magnitud del radio, lo que haremos es utilizar el método de completar un trinomio cuadrado perfecto, para luego factorizarlo como el cuadrado de un binimio. Mediante este procedimiento tendremos una ecuación en la forma 2.II. en donde nosotros ya sabemos obtener las coordenadas del centro y la magnitud del radio de la circunferencia.

$$x^2 + Dx + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + y^2 + Ey + \left(\frac{E}{2}\right)^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 - F,$$

entonces $$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} + F,$$

es decir $$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4},$$

ecuación 2.VII.

Esta ecuación es semejante a la ecuación 2.II. Comparemos el numerador del segundo miembro con cero:

A.) Si $D^2 + E^2 - 4F$ es mayor que cero, lo que representa la ecuación es una circunferencia con centro en

$$C\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) \text{ y radio } r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}.$$

b.) Si $D^2 + E^2 - 4F$ es cero, lo que representa la e-

cuación es un punto con coordenadas $C\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$.

c.) Si $D^2 + E^2 - 4F$ es menor que cero, no existe un punto (x,y) que satisface la ecuación. Es decir es un lugar geométrico sin puntos, es el conjunto vacío.

Veamos un ejemplo para cada caso:

a.) $x^2 + y^2 - 8x + 14y + 1 = 0.$

Completando los trinomios cuadrados perfectos tenemos que:

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 14y + 49 = -1 + 16 + 49,$$

factorizando el primer miembro:

$$(x - 4)^2 + (y + 7)^2 = 64;$$

la ecuación representa una circunferencia con centro en

$C(4,-7)$ y radio $r = \sqrt{64} = 8.$

b.) $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 34 = 0.$

Completando los trinomios cuadrados perfectos tenemos que:

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = -34 + 9 + 25,$$

factorizando el primer miembro:

$$(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 0,$$

por lo tanto la ecuación representa una circunferencia con entro en $C(-3,5)$ y radio $r=\sqrt{0} = 0$; es decir sólo representa al punto C.

c.) $x^2 + y^2 - 12x - 2y + 50 = 0.$

Completando los trinomios cuadrados perfectos tenemos que:

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 2y + 1 = -50 + 36 + 1,$$

factorizando el primer miembro:

$$(x - 6)^2 + (y - 1)^2 = -13;$$

el segundo miembro es negativo; y esto no puede suceder por que el cuadrado de un número real siempre es mayor que cero, y el primer miembro es la suma de dos números positivos. Por lo tanto la ecuación representa el conjunto vacío.

Para conocer el centro y el radio de una circunferencia que está escrita en la forma general, basta con identificar a los coeficientes D,E y al término independiente F y sustituirlos en el segundo miembro de la ecuación 2.VII. y comparar con respecto a cero o bien en las fórmulas:

$$C\left(-\frac{D}{2}, \quad -\frac{E}{2}\right), \qquad r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F.}$$

Hagámoslo con los mismos ejemplos:

a.) $x^2 + y^2 - 8x + 14y + 1 = 0.$

Entonces $D = -8, \quad E = 14, \quad F = 1.$

$$C\left(-\left(\frac{-8}{2}\right), \quad -\frac{14}{2}\right) = C(4, -7),$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(-8)^2 + (14)^2 - 4(1)} = \frac{1}{2}\sqrt{64 + 196 - 4}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{256} = \frac{1}{2}(16) = 8.$$

Por lo tanto la ecuación representa una circunferencia con centro em $C(4,-7)$ y radio $r = 8$.

b.) $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 34 = 0.$

Entonces $D = 6$, $E = -10$, $F = 34$.

$$C\left(-\frac{6}{2}, -\left(\frac{-10}{2}\right)\right) = C(-3,5),$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(6)^2 + (-10)^2 - 4(34)} = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 100 - 136}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{136 - 136} = \frac{1}{2}\sqrt{0} = \frac{1}{2}\ (0) = 0.$$

Por lo tanto la ecuación representa únicamente al punto $C(-3,5)$.

c.) $x^2 + y^2 - 12x - 2y + 50 = 0.$

Entonces $D = -12$, $E = -2$, $F = 50$.

$$C\left(-\left(\frac{-12}{2}\right), -\left(\frac{-2}{2}\right)\right) = C(6,1),$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(-12)^2 + (-2)^2 - 4(50)} = \frac{1}{2}\sqrt{144 + 4 - 200}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{-52}$$

la ecuación representa un lugar geométrico sin puntos, es decir es el conjunto vacío.

2.5. Algunos ejemplos.

Ejemplo 2.5.1.

Obtener la ecuación de la circunferencia en la forma general que pasa por el punto A(2,2) cuyo centro está en el segmento dirigido AB y lo divide en la razón $r = 2$, las coordenadas de B son (-4,-4).

Obtendremos las coordenadas del centro utilizando las fórmulas:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \qquad y \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} \ .$$

$$x = \frac{2 + 2(-4)}{1 + 2} = \frac{2 - 8}{3} = \frac{-6}{3} = -2.$$

$$y = \frac{2 + 2(-4)}{1 + 2} = \frac{2 - 8}{3} = \frac{-6}{3} = -2.$$

Las coordenadas del centro son C(-2,-2).

Calculemos la magnitud del radio encontrando la distancia de C a A.

$$d(C,A) = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32}.$$

Sustituyendo la magnitud del radio, las coordenadas del centro en la ecuación 2.II. tenemos que:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2,$$

$$(x - (-2))^2 + (y - (-2))^2 = (\sqrt{32})^2,$$

$$(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 32.$$

Desarrollando los binomios, igualando la ecuación a cero y sumando términos semejantes tenemos que:

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 - 32 = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 4x + 4y - 24 = 0$$

esta es la ecuación buscada.

Ejemplo 2.5.2.

Determinemos las coordenadas del centro y la longitud del radio de la circunferencia que pasa por los puntos $T_1(6,5)$, $T_2(-2,1)$ y $T_3(0,-1)$.

Encontremos la ecuación de la mediatriz del segmento T_1T_2. Si $T(x,y)$ pertenece a la mediatriz se cumple que:

$$d(T_1,T) = d(T_2,T)$$

es decir:

$$\sqrt{(x-6)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(x-(-2))^2 + (y-1)^2},$$

elevando al cuadrado ambos miembros, desarrollando los binomios y reduciendo términos semejantes al igualar a cero la ecuación se tiene que:

$$(x-6)^2 + (y-5)^2 = (x+2)^2 + (y-1)^2,$$

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 10y + 25 = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1,$$

$$-16x - 8y + 56 = 0.$$

Dividiendo la ecuación entre -8 obtenemos:

$$2x + y - 7 = 0 \qquad (2.VIII.)$$

Ahora encontremos la mediatriz del segmento T_2T_3. Si $T(x,y)$ pertenece a la mediatriz se cumple que:

$$d(T_2,T) = d(T_3,T)$$

es decir:

$$\sqrt{(x-(-2))^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-(-1))^2},$$

efectuando el procedimiento anterior se tiene que:

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = x^2 + (y+1)^2,$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + y^2 + 2y + 1,$$

$$4x - 4y + 4 = 0.$$

Dividiendo la ecuación entre 4 tenemos que:

$$x - y + 1 = 0 \qquad (2.IX.)$$

El punto de intersección de las mediatrices, es el centro de la circunferencia, se obtiene resolviendo el sistema formado por las ecuaciones 2.VIII. y 2.IX.

$$2x + y = 7 \quad \text{y}$$
$$x - y = -1.$$

Sumando las ecuaciones obtenemos:

$$3x = 6, \qquad x = \frac{6}{3}, \qquad x = 2.$$

Sustituyendo x en la segunda ecuación del sistema obtenemos el valor de y.

$$x - y = -1$$

$$2 - y = -1, \quad -y = -2 - 1, \quad -y = -3, \quad y = 3.$$

Por lo tanto (2,3) son las coordenadas del punto que equidista de los puntos T_1, T_2 y T_3; es decir es el centro de la circunferencia.

El radio de la circunferencia es:

$$r = d(T,T_1) = \sqrt{(2-6)^2 + (3-5)^2}$$

$$= \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2}$$

$$= \sqrt{16 + 4}$$

$$= \sqrt{20}.$$

Por lo tanto las coordenadas del centro de la circunfe rencia son C(2,3) y la longitud del radio es $r = \sqrt{20}$.

Ejemplo 2.5.3.

Encontremos las coordenadas del centro y la longitud del radio de la circunferencia que pasa por los puntos $T_1(-2,-5)$, $T_2(-1,0)$ y $T_3(-6,1)$, pero utilizando un procedimiento diferente al que hicimos en el ejemplo 2.5.2.

Supongamos que la circunferencia tiene la ecuación:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (2.V)$$

Ya que los tres puntos pertenecen a la circunferencia, deben de satisfacer la ecuación; para determinar los valores de D, E y F sustituyamos las coordenadas de los puntos en la ecuación 2.V.

Para T_1 tenemos que:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

$$(-2)^2 + (-5)^2 + D(-2) + E(-5) + F = 0,$$

es decir, $4 + 25 - 2D - 5E + F = 0,$

así que, $2D + 5E - F = 29. \qquad (2.X.)$

Para T_2 tenemos que:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

$$(-1)^2 + (0)^2 + D(-1) + E(0) + F = 0,$$

es decir, $1 - D + F = 0,$

así que, $D - F = 1. \qquad (2.XI.)$

Para T_3 tenemos que:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

$$(-6)^2 + (1)^2 + D(-6) + E(1) + F = 0,$$

es decir, $36 + 1 - 6D + E + F = 0,$

entonces $6D - E - F = 37.$ (2.XII.)

Las ecuaciones 2.X., 2.XI. y 2.XII. forman un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, resolvámoslo por el método de sustitución.

$$2D + 5E - F = 29 \qquad (2.X.)$$

$$D \qquad - F = 1 \qquad (2.XI.)$$

$$6D - E - F = 37 \qquad (2.XII.)$$

Despejemos D de la ecuación 2.XI. y sustituyámosla en las ecuaciones 2.X. y 2.XII.:

$$D - F = 1,$$

por lo tanto $D = F + 1.$ (2.XIII.)

Sustituyendo D en 2.X. tenemos que:

$$2D + 5E - F = 29,$$

$$2(F + 1) + 5E - F = 29,$$

entonces $2F + 2 + 5E - F = 29,$

reduciendo términos semejantes $5E + F = 29.$ (2.XIV)

Sustituyendo D en 2.XII. tenemos:

$$6D - E - F = 37,$$

$$6(F + 1) - E - F = 37,$$

entonces $$6F + 6 - E - F = 37,$$

reduciendo términos semejantes $$5F - E = 31. \qquad (2.XV.)$$

Depejamos ahora F de la ecuación 2.XIV. y sustituyámos la en la ecuación 2.XV.:

$$5E + F = 27,$$

$$F = 27 - 5E. \qquad (2.XVI.)$$

$$5F - E = 31,$$

$$5(27 - 5E) - E = 31,$$

es decir $$135 - 25E - E = 31,$$

entonces $$-26E = -104,$$

despejando E $$E = \frac{-104}{-26},$$

por lo tanto $$E = 4.$$

Sustituyendo E en la ecuación 2.XVI.:

$$F = 27 - 5E,$$

$$F = 27 - 5(4),$$

$$F = 27 - 20,$$

$$F = 7.$$

Sustituyendo F en la ecuación 2.XIII.:

$$D = F + 1,$$

$$D = 7 + 1,$$

$$D = 8.$$

Por lo tanto la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos: $T_1(-2,-5)$, $T_2(-1,0)$ y $T_3(-6,1)$ es:

$$x^2 + y^2 + 8x + 4y + 7 = 0.$$

Las coordenadas del centro son:

$$C\left(-\frac{D}{2}, \quad -\frac{E}{2}\right) \Rightarrow C\left(-\frac{8}{2}, \quad -\frac{4}{2}\right) = C(-4,-2).$$

La longitud del radio es:

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} = \frac{1}{2}\sqrt{(8)^2 + (4)^2 - 4(7)}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{64 + 16 - 28} = \frac{1}{2}\sqrt{52} = \frac{1}{2}\sqrt{(4)(13)}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4}\sqrt{13} = \frac{1}{2}(2)\sqrt{13} = \sqrt{13}.$$

C A P I T U L O I I I

FAMILIAS DE CIRCUNFERENCIAS

3.1. Determinación de una circunferencia sujeta a tres condiciones dadas.

Si observamos las ecuaciones ordinaria y general de una circunferencia,

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

vemos que hay tres constantes arbitrarias: h,k,r y D, E y F respectivamente.

Podemos entonces decir que "analíticamente, la ecuación de una circunferencia se determina completamente por tres condiciones independientes". (*)

Y en el sentido geométrico también vimos que una circunferencia es determinada por tres puntos no colineales. (1.6.)

---

* . LEHMANN, C. Geometría Analítica, pag. 106.

Una circunferencia que satisface sólo dos condiciones no es única. Y la ecuación de "esta" circunferencia contiene una constante arbitraria a la que llamaremos parámetro. Esta ecuación representa a un conjunto de circunferencias que llamaremos familias de circunferencias.

3.2. Algunos ejemplos.

Ejemplo 3.2.1.

La familia de circunferencias concéntricas, cuyo centro común es C(-3,2), está representada por la ecuación:

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = k^2,$$

en donde k es el parámetro ($k \geqslant 0$). (Ver figura 3.1.)

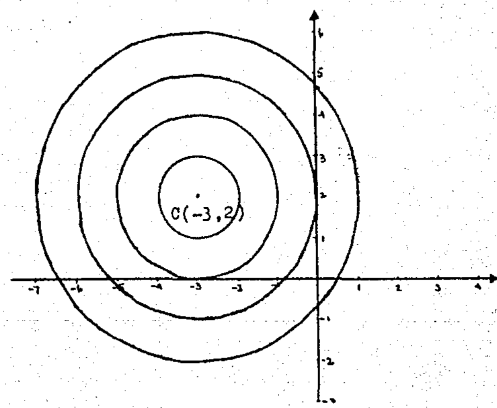


Figura 3.1.

Ejemplo 3.2.2.

La familia de circunferencias que son tangentes a los ejes coordenados del cuarto cuadrante es representada por la ecuación:

$$(x - k)^2 + (y + k)^2 = k^2,$$

con $k \geqslant 0$; el centro de cada circunferencia es el punto $C(k,-k)$ (Ver figura 3.2.)

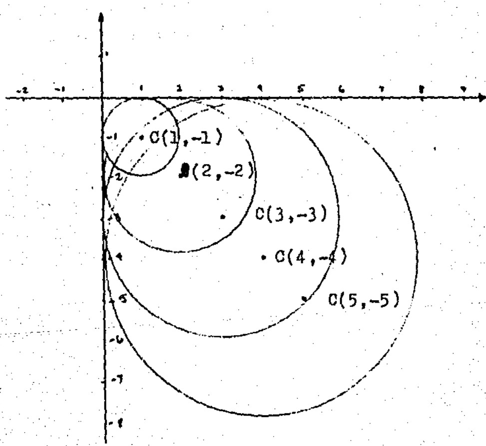


Figura 3.2.

3.3. Análisis de la ecuación

$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + k(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0.$

Supongamos que las ecuaciones de las circunferencias C_1 y C_2 son:

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0 \qquad (3.I.)$$

$$x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0 \qquad (3.II.)$$

respectivamente y que se intersectan en los puntos:

$$T_1(x_1, y_1) \quad y \quad T_2(x_2, y_2).$$

Multipliquemos la ecuación 3.II. por una constante arbitraria k:

$$k(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0. \qquad (3.III$$

Sumemos las ecuaciones 3.I. y 3.III.:

$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + k(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0$
(ecuación 3.IV.).

Veamos que sucede si k toma determinados valores:

3.3.1. Cuando $k = 0$.

Si $k = 0$ entonces obtenemos la ecuación de la circunferencia C_1.

3.3.2. Cuando $k = -1$.

Si $k = -1$, entonces los términos cuadráticos se anulan y lo que obtenemos es la ecuación de una recta a la que llamaremos "eje radical". Esta recta es la cuerda común de las circunferencias C_1 y C_2, y además es perpendicular a la recta que une los centros de C_1 y C_2. Veamos que es cierto:

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + k(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0,$$

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + (-1)(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0,$$

$$(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + F_1 - F_2 = 0. \qquad (3.V.)$$

Recordemos que la pendiente de la recta $Ax + By + C = 0$ es $-\dfrac{A}{B}$.

Entonces la pendiente de la recta 3.V. es:

$$m = -\frac{D_1 - D_2}{E_1 - E_2} \qquad (3.VI.)$$

Las coordenadas de los centros de las circunferencias C_1 y C_2 son:

$$\left(-\frac{D_1}{2}, -\frac{E_1}{2}\right) \quad y \quad \left(-\frac{D_2}{2}, -\frac{E_2}{2}\right)$$

respectivamente. (Consultar 2.4.). Determinemos la pendiente de la recta que pasa por ambos centros, utilizando la fórmula:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} .$$

$$m = \frac{-\frac{E_1}{2} - \left(-\frac{E_2}{2}\right)}{-\frac{D_1}{2} - \left(-\frac{D_2}{2}\right)} = \frac{-\frac{E_1}{2} + \frac{E_2}{2}}{-\frac{D_1}{2} + \frac{D_2}{2}} = \frac{\frac{-E_1 + E_2}{2}}{\frac{-D_1 + D_2}{2}}$$

$$= \frac{-E_1 + E_2}{-D_1 + D_2} . \qquad (3.VII.)$$

Multipliquemos las ecuaciones 3.VI. y 3.VII. para verificar que el eje radical y la recta que une a los centros son perpendiculares utilizando la condición de que: Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es menos uno.

$$\left(-\frac{D_1 - D_2}{E_1 - E_2}\right)\left(\frac{-E_1 + E_2}{-D_1 + D_2}\right) = \left(\frac{-D_1 + D_2}{E_1 - E_2}\right)\left(\frac{-E_1 + E_2}{-D_1 + D_2}\right)$$

$$\frac{-E_1 + E_2}{E_1 - E_2} = \frac{-(E_1 - E_2}{E_1 - E_2} = -1.$$

Por lo tanto las rectas son perpendiculares.

3.3.3. Cuando $k \neq 0$ y $k \neq -1$.

Si $k \neq 0$ y $k \neq -1$ obtenemos la ecuación de una circunferencia:

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + k(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0,$$

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + kx^2 + ky^2 + kD_2x + kE_2y + kF_2 = 0,$$

$$(1+k)x^2 + (1+k)y^2 + (D_1 + kD_2)x + (E_1 + kE_2)y + F_1 + kF_2 = 0,$$

dividiendo la ecuación entre 1+k obtenemos:

$$x^2 + y^2 + \frac{D_1 + kD_2}{1 + k}x + \frac{E_1 + kE_2}{1 + k}y + \frac{F_1 + kF_2}{1 + k} = 0. \quad (3.VIII.)$$

Si sustituimos D por $\dfrac{D_1 + kD_2}{1 + k}$, E por $\dfrac{E_1 + kE_2}{1 + k}$,

y F por $\dfrac{F_1 + kF_2}{1 + k}$;

obtenemos $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ que representa a una circunferencia siempre y cuando $D^2 + E^2 - 4F > 0$.

Todas las circunferencias que pertenecen a la familia de circunferencias tienen centro en la recta que une a los centros de las circunferencias C_1 y C_2. Comprobémoslo:

La familia de circunferencias está representada por la ecuación 3.VIII.

$$x^2 + y^2 + \frac{D_1 + kD_2}{1 + k} x + \frac{E_1 + kE_2}{1 + k} y + \frac{F_1 + kF_2}{1 + k} = 0,$$

entonces los centros tienen coordenadas:

$$\left(-\frac{D_1 + kD_2}{2(1 + k)} , -\frac{E_1 + kE_2}{2(1 + k)} \right). \qquad (3.IX.)$$

La recta que une a los centros tiene pendiente:

$$m = \frac{-E_1 + E_2}{-D_1 + D_2}$$

(ver la ecuación 3.VII.); entonces su ecuación la determinamos con la ecuación:

$$y - y_1 = m(x - x_1),$$

$$y - \left(- \frac{E_1}{2} \right) = \frac{-E_1 + E_2}{-D_1 + D_2} \left(x - \left(- \frac{D_1}{2} \right) \right),$$

$$y + \frac{E_1}{2} = \frac{-E_1 + E_2}{-D_1 + D_2} \left(x + \frac{D_1}{2} \right),$$

$$\frac{-E_1 + E_2}{-D_1 + D_2} \left(x + \frac{D_1}{2} \right) - y - \frac{E_1}{2} = 0. \qquad (3.X.)$$

Veamos entonces que el punto representado por 3.IX. satisface la ecuación 3.X.:

$$\frac{-E_1 + E_2}{-D_1 + D_2} \left(x + \frac{D_1}{2} \right) - y - \frac{E_1}{2} = 0,$$

$$\frac{-E_1 + E_2}{-D_1 + D_2} \left(- \frac{D_1 + kD_2}{2(1+k)} + \frac{D_1}{2} \right) - \left(- \frac{E_1 + kE_2}{2(1+k)} \right) - \frac{E_1}{2} =$$

$$\frac{-E_1 + E_2}{-D_1 + D_2} \left(\frac{-(D_1 + kD_2) + (1 + k)D_1}{2(1 + k)} \right) + \frac{E_1 + kE_2}{2(1 + k)} - \frac{E_1}{2} =$$

$$\frac{-E_1 + E_2}{-D_1 + D_2} \left(\frac{-D_1 - kD_2 + D_1 + kD_1}{2(1 + k)} \right) + \frac{E_1 + kE_2 - (1 + k)E_1}{2(1 + k)} =$$

$$\frac{-E_1 + E_2}{-D_1 + D_2} \left(\frac{-k(-D_1 + D_2)}{2(1 + k)} \right) + \frac{E_1 + kE_2 - E_1 - kE_1}{2(1 + k)} =$$

$$\frac{-k(-E_1 + E_2)}{2(1 + k)} + \frac{k(-E_1 + E_2)}{2(1 + k)} =$$

$$\frac{(-E_1 + E_2)(-k + k)}{2(1 + k)} = \frac{(-E_1 + E_2)(0)}{2(1 + k)} = \frac{0}{2(1 + k)} = 0.$$

Si C_1 y C_2 son circunferencias tangentes en el punto $T(x,y)$, $(T = T_1 = T_2)$, entonces la ecuación 3.IV. también representa una familia de circunferencias tangentes a C_1 y C_2 en T, siempre y cuando $k \neq -1$.

Si $k = 1$ entonces obtenemos la ecuación del eje radical. El eje radical pasa por $T(x,y)$, es decir, es tangente común de C_1 y C_2.

Si C_1 y C_2 no tiene ningún punto en común, la ecuación 3.IV. representa una familia de circunferencias, para $k \neq -1$, en donde se debe cumplir que $D^2 + E^2 - 4F > 0$. Ningún par de circunferencias de la familia tiene un punto común con C_1 y C_2.

Si $k = -1$, entonces se obtiene la ecuación del eje radical. El eje radical no tiene un punto común con C_1 y C_2.

3.4. La potencia de un punto con respecto a una circunferencia.

Consideremos a la circunferencia con centro en el origen y radio r, su ecuación es $x^2 + y^2 = r^2$; a la recta que pasa por P(a,0), $a > r$, y pendiente m, su ecuación es $y = m(x - a)$ que se intersecta con la circunferencia en los puntos A y B; y a la recta que es tangente a la circunferencia en el punto T y que pasa por P. (Ver figura 3.3.)

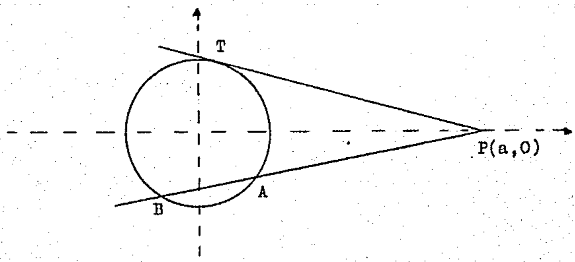


Figura 3.3.

Veamos que $(PA)(PB) = (PT)^2$.

A esta relación se le conoce como: La potencia de un punto con respecto a una circunferencia.

Calculemos las coordenadas de A y B, sustituyendo $y = m(x - a)$ en $x^2 + y^2 = r^2$.

$$x^2 + (m(x - a))^2 = r^2$$

$$x^2 + m^2x^2 - 2am^2x + a^2m^2 - r^2 = 0$$

$$(1 + m^2)x^2 - 2am^2x + a^2m^2 - r^2 = 0 \qquad (3.XI.)$$

Resolvamos esta ecuación utilizando la fórmula general para ecuaciones de segundo grado, para obtener las abscisas de A y B.

$$x = \frac{-(-2am^2) \pm \sqrt{(-2am^2)^2 - 4(1 + m^2)(a^2m^2 - r^2)}}{2(1 + m^2)}$$

$$= \frac{2am^2 \pm \sqrt{4a^2m^4 - 4(a^2m^2 - r^2 + a^2m^4 - r^2m^2)}}{2(1 + m^2)}$$

$$= \frac{2am^2 \pm \sqrt{4(a^2m^4 - (a^2m^2 - r^2 + a^2m^4 - r^2m^2))}}{2(1 + m^2)}$$

$$= \frac{2am^2 \pm 2\sqrt{a^2m^4 - a^2m^2 + r^2 - a^2m^4 + r^2m^2}}{2(1 + m^2)}$$

$$= \frac{am^2 \pm \sqrt{r^2(1 + m^2) - a^2m^2}}{1 + m^2}$$

$$x_1 = \frac{am^2 + \sqrt{r^2(1 + m^2) - a^2m^2}}{1 + m^2}$$

$$x_2 = \frac{am^2 - \sqrt{r^2(1 + m^2) - a^2m^2}}{1 + m^2}$$

Sustituyendo x_1 y x_2 en $y = m(x - a)$ obtenemos las ordenadas de A y B.

$$y_1 = m\left(\frac{am^2 + \sqrt{r^2(1 + m^2) - a^2m^2}}{1 + m^2} - a\right)$$

$$y_2 = m\left(\frac{am^2 - \sqrt{r^2(1 + m^2) - a^2m^2}}{1 + m^2} - a\right)$$

Por lo tanto:

$$A = \left(\frac{am^2 + \sqrt{r^2(1 + m^2) - a^2m^2}}{1 + m^2}\ ,\ m\left(\frac{am^2 + \sqrt{r^2(1 + m^2) - a^2m^2}}{1 + m^2} - a\right)\right)$$

$$B = \left(\frac{am^2 - \sqrt{r^2(1+m^2) - a^2m^2}}{1+m^2} \; , \; m\left(\frac{am^2 - \sqrt{r^2(1+m^2) - a^2m^2}}{1+m^2} - a \right) \right)$$

Calculemos ahora la distancia de P a A y de P a B.

$$d(P,A) = \sqrt{\left(a - \frac{am^2 + \sqrt{r^2(1+m^2) - a^2m^2}}{1+m^2} \right)^2 + \left(0 - m\left(\frac{am^2 + \sqrt{r^2(1+m^2) - a^2m^2}}{1+m^2} - a \right) \right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(a - \frac{am^2 + \sqrt{r^2(1+m^2) - a^2m^2}}{1+m^2} \right)^2 + m^2\left(a - \frac{am^2 + \sqrt{r^2(1+m^2) - a^2m^2}}{1+m^2} \right)^2}$$

$$= \sqrt{(1+m^2)\left(a - \frac{am^2 + \sqrt{r^2(1+m^2) - a^2m^2}}{1+m^2} \right)^2}$$

$$= \sqrt{1+m^2}\left(a - \frac{am^2 + \sqrt{r^2(1+m^2) - a^2m^2}}{1+m^2} \right)$$

$$d(P,B) = \sqrt{\left(a - \frac{am^2 - \sqrt{r^2(1+m^2) - a^2m^2}}{1 + m^2}\right)^2 + \left(0 - m\left(\frac{am^2 - \sqrt{r^2(1+m^2) - a^2m^2}}{1 + m^2} - a\right)\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(a - \frac{am^2 - \sqrt{r^2(1+m^2) - a^2m^2}}{1 + m^2}\right)^2 + m^2\left(a - \frac{am^2 - \sqrt{r^2(1+m^2) - a^2m^2}}{1 + m^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(1 + m^2)\left(a - \frac{am^2 - \sqrt{r^2(1 + m^2) - a^2m^2}}{1 + m^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 + m^2}\left(a - \frac{am^2 - \sqrt{r^2(1 + m^2) - a^2m^2}}{1 + m^2}\right)$$

Calculemos ahora el producto de PA por PB:

$$(PA)(PB) = \sqrt{1 + m^2}\left(a - \frac{am^2 + \sqrt{r^2(1+m^2) - a^2m^2}}{1 + m^2}\right)\sqrt{1 + m^2}\left(a - \frac{am^2 - \sqrt{r^2(1+m^2) - a^2m^2}}{1 + m^2}\right)$$

$$= (\sqrt{1+m^2})^2 \left(\left(a - \frac{am^2}{1+m^2}\right) + \frac{\sqrt{r^2(1+m^2) - a^2m^2}}{1+m^2}\right)\left(\left(a - \frac{am^2}{1+m^2}\right) - \frac{\sqrt{r^2(1+m^2) - a^2m^2}}{1+m^2}\right)$$

$$= (1+m^2)\left(\left(a - \frac{am^2}{1+m^2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{r^2(1+m^2) - a^2m^2}}{1+m^2}\right)^2\right)$$

$$= (1+m^2)\left(a^2 - \frac{2a^2m^2}{1+m^2} + \frac{a^2m^4}{(1+m^2)^2} - \frac{r^2(1+m^2) - a^2m^2}{(1+m^2)^2}\right)$$

$$= a^2(1+m^2) - 2a^2m^2 + \frac{a^2m^4}{1+m^2} - \frac{r^2(1+m^2) - a^2m^2}{1+m^2}$$

$$= a^2 + a^2m^2 - 2a^2m^2 + \frac{a^2m^4 - r^2(1+m^2) + a^2m^2}{1+m^2}$$

$$= a^2 - a^2m^2 + \frac{a^2m^2(1+m^2) - r^2(1+m^2)}{1+m^2}$$

$$= a^2 - a^2m^2 + \frac{(1 + m^2)(a^2m^2 - r^2)}{1 + m^2}$$

$$= a^2 - a^2m^2 + a^2m^2 - r^2$$

$$= a^2 - r^2 .$$

Por lo tanto $(PA)(PB) = a^2 - r^2$. (3.XII)

Calculemos ahora la distancia de P a T. Como PT es tangente a la circunferencia, $\sphericalangle$ PTO es recto, entonces el PTO es rectángulo. De manera tal que: TO y TP son catetos y OP es la hipotenusa.

$d(T,O) = r$, ya que TO es un radio.
$d(O,P) = a$.

Utilizando el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$a^2 = r^2 + (PT)^2 .$$

$$(PT)^2 = a^2 - r^2. \qquad (3.XIII.)$$

Igualando las ecuaciones 3.XII y 3.XIII. tenemos que:

$$(PA)(PB) = a^2 - r^2.$$

$$(PT)^2 = a^2 - r^2.$$

Por lo tanto $(PA)(PB) = (PT)^2$, esto es lo que queríamos demostrar.

Nótese que no utilizamos para nada que:

$$(-2am^2)^2 - 4(1 + m^2)(a^2m^2 - r^2) > 0$$

es decir, que no importa si las soluciones de la ecuación 3.XI son reales o complejas. Cuando no son reales las soluciones de la recta que pasa por P no se intersecta con la circunferencia, sin embargo la relación:

$$(PA)(PB) = (PT)^2$$

sigue cumpliéndose.

3.5. El eje radical.

Supongamos que C_1 y C_2 son dos circunferencias que se cortan en los puntos A y B. AB es una cuerda de cada una de las circunferencias. Entonces cualquier punto P(x,y) del eje radical es un punto de la misma potencia, (PA)(PB), con respecto a las dos circunferencias.

Podemos entonces definir al eje radical de la siguiente manera:

"El eje radical de dos circunferencias es el lugar geométrico de los puntos cuyas potencias con respecto a las dos circunferencias son iguales". (*)

Como vimos antes (3.4.), no importa si AB no se intersecta con la circunferencia para que se cumpla la relación:

$$(PA)(PB) = (PT)^2$$

con PT tangente a la circunferencia.

* .SHIVELY, L. Introducción a la geometría moderna, pag. 81.

3.5.1.EL radio radical.

Supongamos que tenemos tres circunferencias no concéntricas y cuyos centros son no colineales, de manera tal que cada par tiene un eje radical.

Si ℓ_1 es el eje radical de la primera y la segunda circunferencia, y ℓ_2 es el eje radical de la segunda y tercera circunferencia; llamémosle P al punto de intersección de ℓ_1 y ℓ_2 . Entonces P tendrá potencias iguales con respecto a las tres circunferencias, por tanto el eje radicla de la pri primera y tercera circunferencias también pasará por P.

Hemos visto entonces que si tenemos tres circunferencias cuyos centros no son colineales entonces los ejes radicales de las circunferencias tomados por pares concurren en un punto único al que llamaremos radio radical.(Ver figura 3.4.)

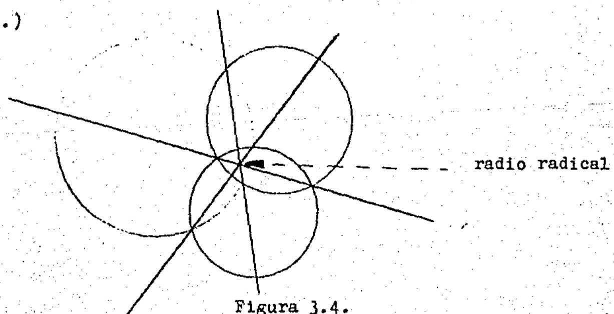


Figura 3.4.

C A P I T U L O I V

ALGUNOS PROBLEMAS DE LUGARES GEOMETRICOS Y TEOREMAS RELATIVOS A LA CIRCUNFERENCIA

4.1. Problemas de lugares geométricos relativos a la circunferencia.

4.1.1. Un punto se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos $T_1(2,0)$ y $T_2(-1,0)$ es siempre igual a 5. Hallar e identificar la ecuación de su lugar geométrico.

Supongamos que las coordenadas del punto que se mueve son P(x,y). Sabemos además que se cumple la relación:

$$(d(P,T_1))^2 + (d(P,T_2))^2 = 5,$$

$$\left(\sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x+1)^2 + (y-0)^2}\right)^2 = 5,$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + x^2 + 2x + 1 + y^2 - 5 = 0,$$

$$2x^2 + 2y^2 - 2x = 0,$$

$$x^2 + y^2 - x = 0.$$

Calculemos $D^2 + E^2 - 4F$ y comparémoslo con cero. (Consultar 2.4.)

$$D^2 + E^2 - 4F = (-1)^2 + (0)^2 - 4(0) = 1 > 0.$$

Por lo tanto se trata de una circunferencia con centro:

$$C\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) = C\left(-\left(\frac{-1}{2}\right), -\frac{0}{2}\right) = C\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

y radio $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} = \frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$.

<u>4.1.2. Un punto se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de sus distancias a las dos rectas: $3x - y + 4 = 0$, $x + 3y - 7 = 0$ es siempre igual a 2. Hallar, identificar y trazar el lugar geométrico de P.</u>

Supongamos que las coordenadas del punto P son (x,y), sabemos también que se cumple la relación:

$$(d(P, \ell_1))^2 + (d(P, \ell_2))^2 = 2.$$

$$\left(\frac{|3x - y + 4|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}}\right)^2 + \left(\frac{|x + 3y - 7|}{\sqrt{1^2 + 3^2}}\right)^2 = 2$$

$$\frac{9x^2 + y^2 + 16 + 24x - 8y - 6xy}{(\sqrt{10})^2} + \frac{x^2 + 9y^2 + 49 - 14x - 42y + 6xy}{(\sqrt{10})^2} = 2,$$

$$\frac{10x^2 + 10y^2 + 10x - 50y + 65}{10} = 2,$$

$$x^2 + y^2 + x - 5y + \frac{65}{10} - 2 = 0,$$

$$x^2 + y^2 + x - 5y + \frac{45}{10} = 0.$$

Calculemos $D^2 + E^2 - 4F$ y comparémoslo con cero. (Consultar 2.4.):

$$D^2 + E^2 - 4F = (1)^2 + (-5)^2 - 4\left(\frac{45}{10}\right) = 1 + 25 - \frac{180}{10}$$

$$= 26 - 18 = 8 > 0.$$

Por lo tanto se trata de una circunferencia con centro en:

$$C\left(-\frac{D}{2}, \ -\frac{E}{2}\right) = C\left(-\frac{1}{2}, -\left(\frac{-5}{2}\right)\right) = C\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

y radio $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} = \frac{1}{2}\sqrt{8} = \sqrt{2}$.

(Ver figura 4.1.)

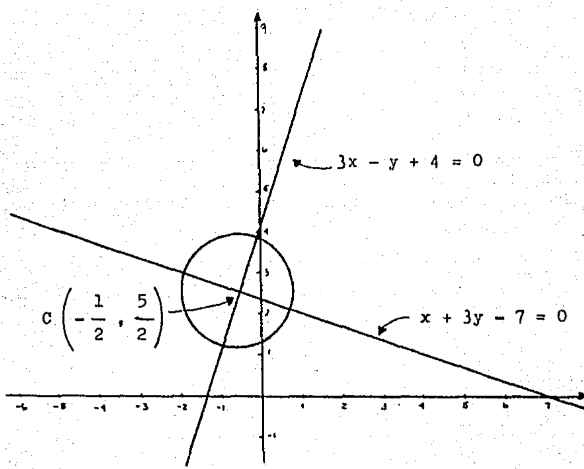


Figura 4.1.

4.1.3. Un punto se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de sus distancias de los tres puntos $T_1(0,3)$, $T_2(3,0)$ y $T_3(-2,-2)$ es siempre igual a 30. Hallar e identificar la ecuación de su lugar geométrico.

Supongamos que el punto que se mueve tiene coordenadas $P(x,y)$. Además sabemos que se cumple la siguiente relación:

$$(d(P,T_1))^2 + (d(P,T_2))^2 + (d(P,T_3))^2 = 30,$$

$$(\sqrt{(x-0)^2 + (y-3)^2})^2 + (\sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2})^2 + (\sqrt{(x+2)^2 + (y+2)^2})^2 = 30,$$

$$x^2 + (y-3)^2 + (x-3)^2 + y^2 + (x+2)^2 + (y+2)^2 = 30,$$

desarrollando los binomios:

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 + x^2 - 6x + 9 + y^2 + x^2 + 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 = 30,$$

sumando términos semejantes:

$$3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y - 4 = 0,$$

dividendo la ecuación entre 3 tenemos que:

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{4}{3} = 0.$$

Calculemos $D^2 + E^2 - 4F$ y comparémoslo con cero:

$$D^2 + E^2 - 4F = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4\left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$= \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{3} = \frac{4 + 4 + 48}{9} = \frac{56}{9} > 0.$$

Por lo tanto se trata de una circunferencia con centro en:

$$C\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) = C\left(\frac{2}{6}, \frac{2}{6}\right) = C\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

y radio $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{56}{9}} = \frac{2\sqrt{14}}{6} = \frac{\sqrt{14}}{3}$.

<u>4.1.4. Un punto se mueve de tal manera que el cuadrado de su distancia del punto T(1,2) es siempre igual al doble de su distancia de la recta $3x + 4y - 1 = 0$. Hallar e identificar la ecuación de su lugar geométrico.</u>

Supongamos que el punto que se mueve tiene coordenadas P(x,y). Sabemos que se cumple la relación:

$$(d(P,T))^2 = 2(d(P,\ell)$$

$$\left(\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}\right)^2 = 2\,\frac{|3x+4y-1|}{\sqrt{9+16}},$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = \frac{6x+8y-2}{\sqrt{25}},$$

desarrollando los binomios y multiplicando la ecuación por 5:

$$5(x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4) = 6x + 8y - 2,$$

$$5x^2 - 10x + 5 + 5y^2 - 20y + 20 - 6x - 8y + 2 = 0,$$

reduciendo términos semejantes:

$$5x^2 + 5y^2 - 16x + 28y + 27 = 0,$$

dividiendo la ecuación entre 5:

$$x^2 + y^2 - \frac{16}{5}x - \frac{28}{5}y + \frac{27}{5} = 0.$$

Calculemos $D^2 + E^2 - 4F$ y comparémoslo con cero. (Consultar 2.4.)

$$D^2 + E^2 - 4F = \left(-\frac{16}{5}\right)^2 + \left(-\frac{28}{5}\right)^2 - 4\left(\frac{27}{5}\right)$$

$$= \frac{256}{25} + \frac{576}{25} - \frac{108}{5} = \frac{256 + 576 - 540}{25} = \frac{292}{25} > 0.$$

Por lo tanto se trata de una circunferencia con centro es:

$$C\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) = C\left(\frac{8}{5}, \frac{14}{5}\right)$$

y radio $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{292}{25}} = \frac{2\sqrt{73}}{2\ (5)} = \frac{\sqrt{73}}{5}$.

4.1.5. Un punto se mueve de tal amnera que su distancia del punto $T_1(4,2)$ es siempre igual al doble de su distancia del punto $T_2(-1,3)$. Hallar e identificar la ecuación de su lugar geométrico.

Supongamos que las coordenadas del punto que se mueve son $P(x,y)$. Sabemos que se cumple la condición:

$$d(P,T_1) = 2(d(P,T_2)).$$

$$\sqrt{(x - 4)^2 + (y - 2)^2} = 2\sqrt{(x + 1)^2 + (y + 3)^2},$$

elevando al cuadrado:

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4(\,(x+1)^2 + (y+3)^2\,),$$

desarrollando los binomios:

$$x^2 -8x +16 +y^2 -4y + 4 = 4(x^2 + 2x + 1 + y^2 + 6y + 9),$$

$$x^2 -8x +16 +y^2 -4y +4 -4x^2 -8x -4 -4y^2 -24y -36 = 0,$$

reduciendo términos semejantes:

$$-3x^2 - 16x - 3y^2 - 28y - 20 = 0,$$

dividiendo la ecuación entre -3:

$$x^2 + y^2 + \frac{16}{3}x + \frac{28}{3}y + \frac{20}{3} = 0.$$

Calculemos $D^2 + E^2 - 4F$ y veamos cómo es con relación a cero:

$$D^2 + E^2 - 4F = \left(\frac{16}{3}\right)^2 + \left(\frac{28}{3}\right)^2 - 4\left(-\frac{20}{3}\right)$$

$$= \frac{256}{9} + \frac{784}{9} + \frac{80}{3} = \frac{256 + 784 + 240}{9} = \frac{1280}{9} > 0.$$

Por lo tanto se trata de una circunferencia con centro en:

$$C\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) = C\left(-\frac{16}{6}, -\frac{28}{6}\right) = C\left(-\frac{8}{3}, -\frac{14}{3}\right)$$

y radio $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1280}{9}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{3}\sqrt{5}$

$$= \frac{8\sqrt{5}}{3}.$$

4.1.6. Un punto se mueve de tal manera que su distancia del punto $T_1(2,-2)$ es siempre igual a un tercio de su distancia del punto $T_2(4,1)$. Hallar e identificar la ecuación de su lugar geométrico.

Supongamos que el punto que se mueve tiene coordenadas $P(x,y)$. Además sabemos que se cumple la relación:

$$d(P,T_1) = \frac{1}{3}\, d(P,T_2) \quad ó \quad 3d(P,T_1) = d(P,T_2)$$

$$3\sqrt{(x-2)^2+(y+2)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2},$$

elevando al cuadrado y desarrolando los binomios:

$$9(x^2-4x+4+y^2+4y+4) = x^2-8x+16+y^2-2y+1,$$

$$9x^2-36x+9y^2+36y+72-x^2+8x-y^2+2y-17=0,$$

reduciendo términos semejantes:

$$8x^2+8y^2-28x+38y+55=0,$$

dividiendo entre 8:

$$x^2+y^2-\frac{28}{8}x+\frac{38}{8}y+\frac{55}{8}=0,$$

simplificando los coeficientes:

$$x^2+y^2-\frac{7}{2}x+\frac{19}{4}y+\frac{55}{8}=0.$$

Calculemos D^2+E^2-4F y comparémoslo con cero. (Consultar 2.4.).

$$D^2+E^2-4F = \left(-\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{19}{4}\right)^2-4\left(\frac{55}{8}\right)=$$

$$= \frac{49}{4} + \frac{361}{16} - \frac{55}{2} = \frac{196 + 316 - 440}{16} = \frac{117}{16} > 0.$$

Por lo tanto se trata de una circunferencia con centro en:

$$C\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) = C\left(\frac{7}{4}, -\frac{19}{8}\right)$$

y radio $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{117}{16}} = \frac{\sqrt{117}}{2(4)} = \frac{\sqrt{117}}{8}.$

<u>4.1.7. Un punto se mueve de tal manera que su distancia de un punto fijo es siempre igual a k veces su distancia de otro punto fijo. Demostrar que el lugar geométrico de P es una circunferencia para valores apropiados de k.</u>

Supongamos que las coordenadas del punto que se mueve son $P(x,y)$ y las de los puntos fijos son $T_1(0,0)$ y $T_2(a,0)$ con $a \neq 0$.

Sabemos además que se cumple la relación:

$$d(P,T_1) = k\,(d(P,T_2)),$$

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = k\sqrt{(x - a)^2 + (y - 0)^2},$$

elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación:

$$x^2 + y^2 = k^2 ((x - a)^2 + y^2)^2,$$

desarrollando el binomio:

$$x^2 + y^2 - k^2x^2 - 2ak^2 - a^2k^2 - k^2y^2 = 0,$$

sumando términos semejantes:

$$(1 - k^2)x^2 + (1 - k^2)y^2 - 2ak^2x - a^2k^2 = 0,$$

dividiendo entre $1 - k^2$:

$$x^2 + y^2 - \frac{2ak^2}{1 - k^2}x - \frac{a^2k^2}{1 - k} = 0.$$

Calculemos $D^2 + E^2 - 4F$ y comparémoslo con cero:

$$D^2 + E^2 - 4F = \left(-\frac{2ak^2}{1 - k^2}\right)^2 + (0)^2 - 4\left(-\frac{a^2k^2}{1 - k^2}\right)$$

$$= \frac{4a^2k^4}{(1-k^2)^2} + \frac{4a^2k^2}{1-k^2} = \frac{4a^2k^4 + (1 - k^2)(4a^2k^2)}{(1-k^2)^2}$$

$$= \frac{4a^2k^4 + 4a^2k^2 - 4a^2k^4}{(1-k^2)^2} = \frac{4a^2k^2}{(1-k^2)^2} > 0 \quad (k \neq 1).$$

Por lo tanto la ecuación representa una circunferencia con centro en:

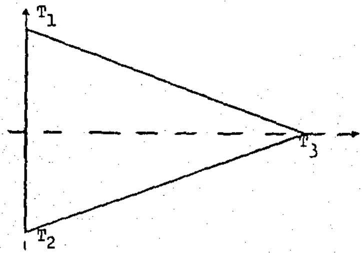
$$C\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) = C\left(\frac{ak^2}{1-k^2}, 0\right).$$

y radio $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4a^2k^2}{(1-k^2)^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2ak}{1-k^2}$

$$= \frac{ak}{1-k^2} \qquad \text{con } k \neq 1.$$

4.1.8. Un punto P se mueve de tal manera que el cuadrado de su distancia de la base de un triángulo isósceles es siempre igual al producto de sus distancias de los otros dos lados. Demostrar que el lugar geométrico de P incluye una circunferencia.

Supongamos que la base del triángulo está sobre el eje de las ordenadas, de manera tal que sus extremos son los puntos: $T_1(0,b)$ y $T_2(0,-b)$. Las coordenadas del tercer vértice son $T_3(a,0)$ y las del punto que se mueve son $P(x,y)$.



Determinemos las ecuaciones de cada uno de sus lados.

Si ℓ_1 es la recta que pasa por T_1T_2 entonces su ecuación es $x = 0$.

Si ℓ_2 es la recta que pasa por T_2T_3 entonces su ecuación es:

$$y + b = \frac{-b - 0}{0 - a}(x - 0),$$

es decir, $$y + b = \frac{b}{a}x,$$

multiplicando por a: $a(y + b) = bx,$

$ay + ab = bx,$

igualando a cero tenemos: $bx - ay - ab = 0.$

Si ℓ_3 es la recta que pasa por T_1T_3 entonces su ecuación es:

$$y - b = \frac{b - 0}{0 - a}(x - 0),$$

es decir $y - b = -\dfrac{b}{a}x,$

multiplicando por $-a$: $-a(y - b) = bx,$

$-ay + ab = bx,$

igualando a cero tenemos: $bx + ay - ab = 0.$

$$d(P, \ell_1) = |x| ,$$

$$d(P, \ell_2) = \frac{|bx - ay - ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$d(P, \ell_3) = \frac{|bx + ay - ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Sabemos que se cumple la siguiente relación:

$$(|x|)^2 = \frac{|bx - ay - ab|}{\sqrt{b^2 + a^2}} \cdot \frac{|bx + ay - ab|}{\sqrt{b^2 + a^2}}$$

Ya que $\left| bx - ay - ab \right| \left| bx + ay - ab \right| > 0$, entonces de la ecuación anterior obtenemos:

$$x^2 = \frac{b^2x^2 - a^2y^2 + a^2b^2 - 2ab^2x}{b^2 + a^2}$$

multiplicando la ecuación por $a^2 + b^2$:

$$(a^2 + b^2)x^2 = b^2x^2 - a^2y^2 + a^2b^2 - 2ab^2x,$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 + a^2b^2 - 2ab^2x - (a^2 + b^2)x^2 = 0,$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 + a^2b^2 - 2ab^2x - a^2x^2 - b^2x^2 = 0,$$

sumando términos semejantes:

$$-a^2x^2 - a^2y^2 - 2ab^2x + a^2b^2 = 0,$$

dividiendo entre -a obtenemos:

$$x^2 + y^2 + \frac{2b^2}{a} x - b^2 = 0.$$

Calculemos $D^2 + E^2 - 4F$ y comparémoslo con cero:

$$D^2 + E^2 - 4F = \left(\frac{2b^2}{a}\right)^2 + (0)^2 - 4(-b^2) = \frac{4b^4}{a^2} + 4b^2$$

$$= \frac{4b^4 + 4a^2b^2}{a^2} > 0 \qquad (a \neq 0).$$

Por lo tanto se trata de una circunferencia con centro en:

$$C\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) = C\left(-\frac{b^2}{a}, 0\right)$$

y radio $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4b^4 + 4a^2b^2}{a^2}}$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{4b^2(b^2 + a^2)}}{a} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2b}{a}\sqrt{b^2 + a^2} = \frac{b}{a}\sqrt{b^2 + a^2}.$$

<u>Observación:</u>

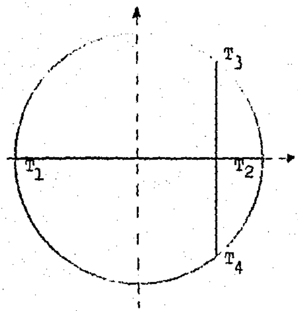
Si consideramos que

$$(bx - ay - ab)(bx + ay - ab) < 0,$$

entonces lo que obtenemos es que el lugar geométrico de P es una hipérbola.

4.2. Teoremas sobre la circunferencia.

4.2.1. Todo diámetro perpendicular a una cuerda la divide en dos partes iguales.



Supongamos que la circunferencia tiene centro en el origen, es decir, su ecuación es $x^2 + y^2 = r^2$ (2.III).

Supongamos que la cuerda tiene por ecuación $x = a$. Como el diámetro es perpendicular a la cuerda sus extremos son los puntos: $T_1(-r,0)$ y $T_2(r,0)$.

El diámetro corta entonces a la cuerda en el punto $T(a,0)$.

Los puntos de intersección de la cuerda con la circunferencia tienen coordenadas $T_3(a,b)$ y $T_4(a,c)$. Estos puntos satisfacen la ecuación 2.III. sustituyámoslos:

$$a^2 + b^2 = r^2 \quad , \quad a^2 + c^2 = r^2,$$

restemos la segunda ecuación de la primera, obtenemos entonces: $b^2 - c^2 = 0$.

Factorizando la ecuación anterior tenemos que:

$$(b - c)(b + c) = 0,$$

debe entonces suceder que:

$$\text{i.)}\ b - c = 0 \quad \text{ó} \quad \text{ii.)}\ b + c = 0.$$

i.) Si $b - c = 0$, entonces $b = c$, lo cual no es posible. (Ver figura 4.2.)

ii.) Si $b + c = 0$, entonces $b = -c$. Despejando b de $a^2 + b^2 = r^2$, tenemos que $|b| = \sqrt{r^2 - a^2}$. Si $b > 0$ entonces $b = \sqrt{r^2 - a^2}$ y $c = -\sqrt{r^2 - a^2}$. Si $b < 0$ entonces $b = -\sqrt{r^2 - a^2}$ y $c = \sqrt{r^2 - a^2}$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $b > 0$, es decir, $b = \sqrt{r^2 - a^2}$ y $c = -\sqrt{r^2 - a^2}$.

Entonces $T_3(a,b) = T_3(a, \sqrt{r^2 - a^2})$

y $T_4(a,c) = T_4(a,-b) = T_4(a,-\sqrt{r^2 - a^2})$.

Calculemos ahora la distancia de T a T_3 y la distancia de T a T_4.

$$d(T,T_3) = \sqrt{(a - a)^2 + (0 - \sqrt{r^2 - a^2})^2} = \sqrt{r^2 - a^2} .$$

$$d(T,T_4) = \sqrt{(a - a)^2 + (0 - (-\sqrt{r^2 - a^2})^2} = \sqrt{r^2 - a^2} .$$

De las dos ecuaciones anteriores podemos concluir que $TT_3 = TT_4$.

<u>4.2.2. Si por los extremos de un diámetro se trazan dos cuerdas paralelas, estas son iguales.</u>

Supongamos que la circunferencia tiene centro en el origen, es decir, su ecuación es: $x^2 + y^2 = r^2$ (2.III.).

Supongamos que los extremos del diámetro son los puntos $T_1(-r,0)$ y $T_2(r,0)$. (Ver figuras 4.3a. y 4.3b.)

Cada cuerda tiene por extremos: $T_1(-r,0)$ y $T_3(a,b)$, $T_2(r,0)$ y $T_4(c,d)$ respectivamente.

Como T_3 y T_4 están sobre la circunferencia, entonces cumplen con la ecuación 2.III. Sustituyamos los puntos T_3 y T_4:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

$$a^2 + b^2 = r^2 \quad , \quad c^2 + d^2 = r^2 .$$

Despejemos b y d de la ecuación:

$$|b| = \sqrt{r^2 - a^2} \quad ; \quad |d| = \sqrt{r^2 - c^2}.$$

Si obsrevamos las figuras 4.3a. y 4.3b. podemos ver que:

i.) Si $b > 0$ entonces $d < 0$.

ii.) Si $b < 0$ entonces $d > 0$.

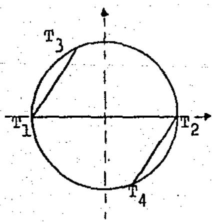


Figura 4.3a.

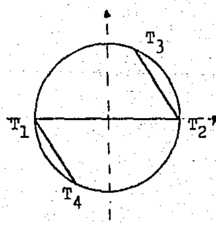


Figura 4.3b.

Entonces para el caso i. tenemos que: $b=\sqrt{r^2 - a^2}$ y $d = -\sqrt{r^2 - c^2}$, mientras que para el caso ii. tenemos que: $b = -\sqrt{r^2 - a^2}$ y $d = \sqrt{r^2 - c^2}$.

Sin pérdida de generalidad supongamos el caso ii. Sustituyamos b y d en las ordenadas de T_3 y T_4 respectivamente:

$$T_3(a,b) = T_3(a,-\sqrt{r^2 - a^2}), \quad T_4(c,d) = T_4(c,\sqrt{r^2 - c^2}).$$

Como las cuerdas son paralelas entonces tiene la misma pendiente, utilicemos la fórmula

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} .$$

$$\frac{0 - (-\sqrt{r^2 - a^2})}{-r - a} = \frac{0 - \sqrt{r^2 - c^2}}{r - c},$$

$$\frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{-(r + a)} = \frac{-\sqrt{r^2 - c^2}}{r - c}$$

elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación:

$$\frac{r^2 - a^2}{(r + a)^2} = \frac{r^2 - c^2}{(r - c)^2} ,$$

factorizando los numeradores:

$$\frac{(r + a)(r - a)}{(r + a)^2} = \frac{(r + c)(r - c)}{(r - c)^2} ,$$

entonces $$\frac{r - a}{r + a} = \frac{r + c}{r - c} ,$$

multiplicando la ecuación por $(r + a)(r - c)$;

$$(r - a)(r - c) = (r + a)(r + c),$$

así que $r^2 - (a + c)r + ac = r^2 + (a + c)r + ac$,

reduciendo términos semejantes: $-(a + c)r = (a + c)r$,

dividiendo entre r: $-a - c = a + c$,

entonces $- a -a = c + c$,

es decir $-2a = 2c$,

por lo tanto $-a = c$.

Por lo tanto podemos escribir las coordenadas de T_4 de otra manera sustituyendo c por -a:

$$T_4(c, \sqrt{r^2 - c^2}\ ) = T_4(-a, \sqrt{r^2 - (-a)^2}\ )$$

$$= T_4(-a, \sqrt{r^2 - a^2}\ ).$$

Calculemos la distancia de T_1 a T_3:

$$d(T_1,T_3) = \sqrt{(-r - a)^2 + (0 -(-\sqrt{r^2 - a^2}))^2}$$

$$= \sqrt{(-(r + a))^2 + (\sqrt{r^2 - a^2}\ )^2}$$

$$= \sqrt{(r + a)^2 + r^2 - a^2} \qquad (4.I.)$$

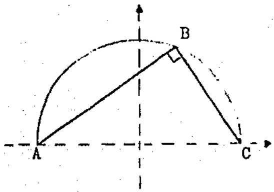
Ahora calculemos la distancia de T_2 a T_4:

$$d(T_2,T_4) = \sqrt{(r - (-a))^2 + (0 - (\sqrt{r^2 - a^2}))^2}$$

$$= \sqrt{(r + a)^2 + r^2 - a^2} \qquad (4.II)$$

Por lo tanto de las ecuaciones 4.I. y 4.II. podemos decir que $d(T_1,T_3) = d(T_2,T_4)$, es decir, las cuerdas son iguales.

<u>4.2.3. Cualquier ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.</u>



Supongamos que la semicircunferencia tiene su centro en el origen, su ecuación es entonces $x^2 + y^2 = r^2$ (2.III.).

Supongamos también que los puntos A, B y C forman el ángulo inscrito. Las coordenadas de estos puntos son: A$(-r,0)$, B(a,b) y C$(r,0)$.

Como los puntos están en la semicircunferencia satisfacen la ecuación 2.III., es decir, para el punto B tenemos que:

$$a^2 + b^2 = r^2 \quad ,$$

despejando b tenemos que $|b| = \sqrt{r^2 - a^2}$ o bien:

$b = \sqrt{r^2 - a^2}$ si $b > 0$ ó $b = -\sqrt{r^2 - a^2}$ si $b < 0$.

Sin pérdida de genralidad supongamos que $b > 0$, es decir $b = \sqrt{r^2 - a^2}$. Sustituyendo b en la ordenada de B tenemos que $B(a,b) = B(a, \sqrt{r^2 - a^2})$.

Determinemos las ecuaciones de las rectas que pasan por A y B y por B y C utilizando la fórmula:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1).$$

Para A y B tenemos que:

$$y - 0 = \frac{0 - \sqrt{r^2 - a^2}}{-r - a}(x + r),$$

es decir:

$$y = \frac{-\sqrt{r^2 - a^2}}{-(r + a)}(x + r),$$

o bien:

$$y = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r + a}(x + r) \qquad (4.III.)$$

Para B y C obtenemos:

$$y - 0 = \frac{\sqrt{r^2 - a^2} - 0}{a - r}(x - r),$$

es decir:

$$y = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a - r}(x - r). \qquad (4.IV.)$$

La pendiente de la recta 4.III. es $\dfrac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r + a}$, y la pendiente de la recta 4.IV. es $\dfrac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a - r}$.

Multiplicando ambas pendientes tenemos que:

$$\left(\frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r + a}\right)\left(\frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a - r}\right) = \frac{r^2 - a^2}{a^2 - r^2} = \frac{r^2 - a^2}{-(r^2 - a^2)} = -1.$$

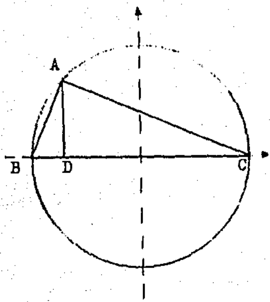
Como el producto de pendientes es menos uno, las rectas son perpendiculares, es decir, $\measuredangle$ ABC es recto.

<u>4.2.4.Si de un punto cualquiera de una circunferencia se traza una perpendicular a un diámetro, la logitud de la perpendicular es media proporcional entre las longitudes de de los dos segmentos en los que divide al diámetro.</u>

Tenemos que demostrar que: $(AD)^2 = (BD)(DC)$.

Supongamos que la circunferencia tiene centro en el origen, entonces su ecuación es $x^2 + y^2 = r^2$ (2.III.).

Supongamos también que los extremos del diámetro tienen



coordenadas B(-r,0) y C(r,0). A(a,b) es el punto de la circunferencia desde el cual se traza la perpendicular; como A está en la circunferencia entonces satisface la ecuación 2.III. es decir, $a^2 + b^2 = r^2$; despejemos b: $|b| = \sqrt{r^2 - a^2}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $b > 0$, entonces

$$b = \sqrt{r^2 - a^2} .$$

Sustituyamos b en la ordenada de A:

$$A(a,b) = A(a, \sqrt{r^2 - a^2}).$$

D(a,0) es el pie de la perpendicular.

Calculemos la distancia de A a D:

$$d(A,D) = \sqrt{(a - a)^2 + (\sqrt{r^2 - a^2} - 0)^2}$$

$$= \sqrt{0^2 + (\sqrt{r^2 - a^2})^2}$$

$$= \sqrt{r^2 - a^2} \quad .$$

Elevemos al cuadrado $d(A,D)$:

$$(AD)^2 = (\sqrt{r^2 - a^2})^2 = r^2 - a^2. \qquad (4.V.)$$

Calculemos ahora la distancia de B a D y de D a C. Como las ordenadas de los tres puntos son cero utilicemos la fórmula $d = |x_1 - x_2|$.

$$d(B,D) = |-r - a| \quad , \quad d(D,C) = |a - r| \; .$$

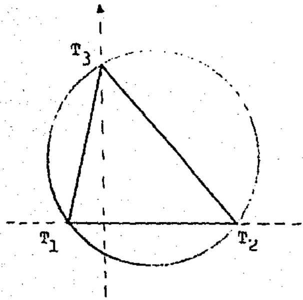
Multipliquemos $d(B,D)$ por $d(D,C)$:

$$(BD)(DC) = |-r - a||a - r| = r^2 - a^2 \qquad (4.VI.)$$

De las ecuaciones 4.V y 4.VI. podemos concluir que:

$$(AD)^2 = (BD)(DC).$$

4.2.5. Si se tiene una circunferencia circunscrita a cualquier triángulo dado, entonces el producto de las longitudes de dos lados cualesquiera del triángulo es igual al producto de la longitud del diámetro por la longitud de la altura trazada al tercer lado.



Supongamos que los vértices del triángulo son los puntos $T_1(a,0)$, $T_2(b,0)$ y $T_3(0,c)$.

Tenemos que demostrar que:
$d(T_1,T_3)\ d(T_2,T_3) = 2r(\text{altura})$.
(ecuación 4.VII.).

Determinemos las distancias de T_1 a T_3 y de T_2 a T_3:

$$d(T_1,T_3) = \sqrt{(a - 0)^2 + (0 - c)^2} = \sqrt{a^2 + c^2}.$$

$$d(T_2,T_3) = \sqrt{(b - 0)^2 + (0 - c)^2} = \sqrt{b^2 + c^2}\ .$$

La altura del triángulo es igual a c.

Para encontrar la longitud del diámetro, determinemos la ecuación de las mediatrices de dos de sus lados y encontraremos el punto de intersección de éstas para obtener las coordenadas del radio y así conocer su longitud.

Las coordenadas del punto medio de T_1T_2 son:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} , \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{a + b}{2} , 0 .$$

La ecuación de la mediatriz de T_1T_2 es:

$$x = \frac{a + b}{2} \qquad (4.VIII.)$$

Las coordenadas del punto medio de T_1T_3 son:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2} , \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = \left(\frac{a + 0}{2} , \frac{0 + c}{2} \right) = \left(\frac{a}{2} , \frac{c}{2} \right)$$

La pendiente de T_1T_3 es:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{0 - c}{a - 0} = - \frac{c}{a} .$$

Como la mediatriz es perpendicular al segmento, la pendiente de la mediatriz es $\frac{a}{c}$.

La ecuación de la mediatriz es entonces:

$$y - \frac{c}{2} = \frac{a}{c}\left(x - \frac{a}{2}\right),$$

multiplicando por c tenemos:

$$cy - \frac{c^2}{2} = ax - \frac{a^2}{2},$$

igualando la ecuación a cero:

$$ax - cy + \frac{c^2 - a^2}{2} = 0. \qquad (4.IX.)$$

Determinemos el punto de intersección de las mediatrices 4.VIII. y 4.IX sustituyendo a x (ecuación 4.VIII.) en la ecuación 4.IX., para así conocer la ordenada del punto.

$$a\left(\frac{a + b}{2}\right) - cy + \frac{c^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0,$$

$$\frac{a^2}{2} + \frac{ab}{2} - cy + \frac{c^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0,$$

$$cy = \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} ,$$

$$y = \frac{ab + c^2}{2c} .$$

Por lo tanto las coordenadas del centro de la circunfe rencia son:

$$C\left(\frac{a + b}{2} , \frac{ab + c^2}{2c}\right) .$$

Calculemos la longitud del radio:

$$d(C,T_1) = \sqrt{\left(a - \frac{a + b}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{ab + c^2}{2c}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2a - a - b}{2}\right)^2 + \left(- \frac{ab + c^2}{2c}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a - b}{2}\right)^2 + \frac{a^2b^2 + 2abc^2 + c^4}{4c^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} + \frac{a^2b^2 + 2abc^2 + c^4}{4c^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2c^2 - 2abc^2 + b^2c^2 + a^2b^2 + 2abc^2 + c^4}{4c^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2 + c^4}}{2c}.$$

Por lo tanto la longitud del diámetro es:

$$2r = d = \frac{\sqrt{a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2 + c^4}}{c}.$$

Multipliquemos las distancias $d(T_1, T_3)$ por $d(T_2, T_3)$:

$$\begin{aligned} d(T_1,T_3)d(T_2,T_3) &= \sqrt{a^2 + c^2}\sqrt{b^2 + c^2} \\ &= \sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)} \\ &= \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 + c^4} \qquad (4.X.) \end{aligned}$$

Multipliquemos ahora la longitud del diámetro por la altura:

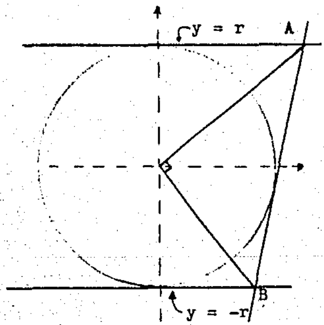
$$\begin{aligned} 2rc = dc &= \frac{\sqrt{a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2 + c^4}}{c}\cdot c \\ &= \sqrt{a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2 + c^4} \qquad (4.XI.) \end{aligned}$$

Por las ecuaciones 4.X. y 4.XI. podemos afirmar que:

$$d(T_1,T_3)\ d(T_2,T_3) \ = \ 2r(\text{altura})$$

y es lo que queríamos demostrar.

<u>4.2.6. Si se trazan tangentes a una circunferencia, paralelas entre sí, que cortan a una tercera tangente en los puntos A y B, entonces las rectas que unen A y B con el centro son perpendiculares entre sí.</u>



Supongamos que la circunferencia tiene centro en el origen, es decir, su ecuación es $x^2 + y^2 = r^2$ (2.III.).

Supongamos que las tangentes a la circunferencia paralelas entre sí tienen por ecuación $y = r$ 4.XII. y $y = -r$ (4.XIII.) respectivamente.

Supongamos que T(a,b) es el punto de tangencia de la tercera tangente; como T está en la circunferencia, entonces satisface la ecuación 2.III, es decir, $a^2 + b^2 = r^2$. Despejemos b, $|b| = \sqrt{r^2 - a^2}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $b > 0$, es decir $b = \sqrt{r^2 - a^2}$. Sustituyámos b en la ordenada de T:

$$T(a,b) = T(a, \sqrt{r^2 - a^2}) .$$

Calculemos la pendiente de OT:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{0 - \sqrt{r^2 - a^2}}{0 - a} = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} .$$

Como el radio OT es perpendicular a la tangente que pasa por T, entonces la pendiente de la tangente es:

$$m = - \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}}$$

y su ecuación es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

es decir:

$$y - \sqrt{r^2 - a^2} = - \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}}(x - a) \qquad (4.XIV).$$

Determinemos las abscisas de los puntos de intersección de las rectas 4.XII. y 4.XIII. con la recta 4.XIV.

Sustituyamos $y = r$ en la ecuación 4.XIV.:

$$y - \sqrt{r^2 - a^2} = - \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}} (x - a) ,$$

$$\frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}} x = \frac{a^2}{\sqrt{r^2 - a^2}} - r + \sqrt{r^2 - a^2} ,$$

$$x = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} \frac{a^2}{\sqrt{r^2 - a^2}} - r + \sqrt{r^2 - a^2} ,$$

$$x = \frac{a^2}{a} - \frac{r\sqrt{r^2 - a^2}}{a} + \frac{r^2 - a^2}{a} ,$$

$$x = \frac{r^2 - r\sqrt{r^2 - a^2}}{a} .$$

entonces las coordenadas del punto de intersección de las rectas 4.XII y 4.IV. son:

$$A\left(\frac{r^2 - r\sqrt{r^2 - a^2}}{a} , r \right) .$$

Sustituyamos $y = -r$ en la ecuación 4.XIV.:

$$y - \sqrt{r^2 - a^2} = - \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}} (x - a)$$

$$-r - \sqrt{r^2 - a^2} = - \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}} x + \frac{a^2}{\sqrt{r^2 - a^2}} ,$$

$$\frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}} x = \frac{a^2}{\sqrt{r^2 - a^2}} + r + \sqrt{r^2 - a^2} ,$$

$$x = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} \left(\frac{a^2}{\sqrt{r^2 - a^2}} + r + \sqrt{r^2 - a^2} \right),$$

$$x = \frac{a^2}{a} + \frac{r\sqrt{r^2 - a^2}}{a} + \frac{r^2 - a^2}{a} ,$$

$$x = \frac{r^2 + r\sqrt{r^2 - a^2}}{a}.$$

entonces las coordenadas del punto de intersección de las rectas 4.XIII. y 4. 4.XIV. son:

$$B\left(\frac{r^2 + r\sqrt{r^2 - a^2}}{a} , -r \right)$$

La pendiente de OA es $\dfrac{ra}{r^2 - r\sqrt{r^2 - a^2}}$

La pendiente de OB es $\dfrac{-\,ra}{r^2 + r\sqrt{r^2 - a^2}}$.

Multiplicando las pendientes de OA y OB obtenemos que:

$$\left(\frac{ra}{r^2 - r\sqrt{r^2 - a^2}}\right)\left(\frac{-ra}{r^2 + r\sqrt{r^2 - a^2}}\right)$$

$$= \frac{-r^2a^2}{r^4 - r^2(r^2 - a^2)} = \frac{-r^2a^2}{r^4 - r^4 + r^2a^2} = \frac{-r^2a^2}{r^2a^2} = -1.$$

el producto de las pendientes es -1 , por lo tanto OA es perpendicular a OB.

FULLER, Gordon.
<u>Geometría Analítica.</u>
(tr. Ing. Ignacio Ayala Zazueta)
México, Ed. CECSA, 1988.

LEHMANN, Charles H.
<u>Geometría Analítica.</u>
(tr. Ing. Rafael García Díaz)
México, Ed. UTEHA, 1978.

RIDER, Paul R.
<u>Geometría Analítica.</u>
(tr. Susana Blumovicz Perelberg)
Barcelona, Ed. Montaner y Simón, 1966.

SANTALO, Marcelo y CARBONEL, Vicente.
<u>Geometría Analítica.</u>
México, Ed. Porrúa, 1981.

SHIVELY, Levi S.
<u>Introducción a la Geometría Moderna.</u>
(tr. Andrés Palacios Priego)
México, Ed. CECSA, 1980.

VASILIEV, N. B. y GUTENMAJER, V. L.
Rectas y Curvas.
(tr. Margarita Gómez)
URSS, Ed. Mir Moscú, 1980.

WENTWORTH, Jorge y SMITH, David Eugenio.
Geometría Plana y del Espacio.
México, Ed. Porrúa, 1974.