UNIVERSIDAD ANAHU.

ESCUELA DE ACTUARIA

Estudios Incorporados a la Universidad Nacional Autónoma de México

UNIVERSIDAD ANAHUAC

VINCE IN BONO MALUM

"OPTIMIZACION DE NIVELES DE PRODUCCION EN UN AMBIENTE DE INCERTIDUMBRE"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A:

ALVARO GALINDO BLANCO

MEXICO, D. F.

1992

CONTENIDO

INTRODUCCION

La toma de decisiones es un tema que nos concierne a todos. Con frecuencia tenemos que decidir sobre cosas importantes, a las que dedicamos tiempo y esfuerzo mental. Decisiones relativas a nuestra vida personal, decisiones de trabajo, o decisiones que afectan no solo a nosotros mismos sino a otras personas.

Generalmente se piensa que la elección de una forma de actuar es una actividad tan humana, tan dependiente de la persona del decisor, que un análisis abstracto y científico no es necesario, pero la realidad es que en ocasiones un estudio analítico del problema es de gran utilidad.

La dificultad en la selección de la mejor decisión es, en su mayoría, debida a incertidumbres presentes en la situación, a no saber con exactitud lo que sucedería si se adoptase determinada forma de actuación. A esto se le llama "toma de decisiones en un ambiente de incertidumbre.

La conclusión fundamental, es la de que sólo existe una forma razonable de tomar una decisión. Primero, las incertidumbres presentes en la situación deben ser cuantificadas en términos de probabilidades. En segundo lugar, las distintas consecuencias de las acciones posibles deben ser descritas de manera análoga en términos de utilidades. Finalmente, debe tomarse aquella decisión de la que pueda esperarse, en base a las probabilidades asignadas, una mayor utilidad, o "una menor pérdida".

El problema central de esta tesis, es precisamente optimizar "el nivel de pérdida" en una empresa, adecuando los niveles de producción de un producto a su demanda. La incertidumbre radica en que no conocemos el comportamiento de la demanda, de la cual sólo podemos suponer su distribución de probabilidad "a-priori". La pérdida se presenta cuando existen diferencias entre la producción y la demanda, ya sea por producir menos unidades de las que requiere el mercado, pues estamos desaprovechando el potencial de compra, y de esta manera dejamos de ganar dinero, o bien cuando producimos equipos en exceso, ya que éstos pueden sufrir una pérdida de valor el en tiempo, pues nuestro producto, aunque no es perecedero, depende de los cambios constantes de tecnología y puede no ser tan apreciado en un futuro por los consumidores, y también podemos incurrir en otro tipo de gastos, como el ocasionado por rebasar la capacidad de almacenamiento actual.

Hemos dividido este trabajo en cuatro capítulos, y un espacio final para las conclusiones. En el primer capítulo, daremos una breve introducción a lo que es la "Teoría de Decisiones", con algunas definiciones y conceptos básicos.

El segundo capítulo presenta el planteamiento general del problema, donde describiremos nuestros supuestos básicos y las características del producto que estamos estudiando, así como del ambiente que lo rodea.

En el tercer capítulo entraremos ya en los pasos iniciales para la resolución del problema, y estableceremos las funciones que vamos a manejar en nuestro problema de Decisión, y en el cuarto capítulo mostraremos un desarrollo completo del problema bajo dos diferentes supuestos de comportamiento de la demanda, llegando finalmente al capítulo de conclusiones, en el que analizaremos los resultados obtenidos y propondremos el camino a seguir de acuerdo con este análisis.

CAPITULO I

TEORIA DE DECISIONES

Decisiones y Eventos

Podemos decir que una persona tiene un problema de decisión, cuanto tiene que elegir entre dos o más formas de actuar. Lo primero que debe hacerse, es considerar las posibles formas de actuación tratando de cubrir de manera razonable todas las posibilidades en un conjunto de alternativas. Cuando esto se logra, se dice que tenemos un conjunto "exhaustivo". También es conveniente que esta lista sea confeccionada de tal manera que sólo una de las decisiones pueda ser tomada, a lo que llamamos una lista "exclusiva" de decisiones. A cada una de las decisiones puede nombrársele por una abreviatura comúnmente usada, la letra "d", con un subíndice, es decir, la "decisión uno" la nombraremos como d_1, la "decision dos" como d_2, y así sucesivamente. Para definir una lista de cualquier longitud, designamos con "m" el último subíndice de la lista, con lo que podemos decir que tenemos una lista d_1, d_2, ...d_m de decisiones.

Utilizaremos el término "evento" para referirnos a un hecho que puede suceder o no. Un evento sobre el que sabemos si tuvo (o tendrá) lugar será llamado evento cierto, y en el caso contrario será llamado evento incierto. Del mismo modo que en las decisiones, deberá ser posible elaborar una lista de eventos inciertos que cubra todas las contingencias que puedan afectar a la elección de una decisión. Además, estos eventos inciertos pueden transformarse en exahustivos y exclusivos, de forma que uno y solamente uno de ellos tendrá lugar. A esta lista la denominaremos como $\theta_1, \theta_2, \ldots\ldots\ldots, \theta_n$ de n eventos inciertos, donde el número m de decisiones y de n eventos inciertos no tienen por qué ser iguales. Además a cada suceso θ_j, podemos asociarle una probabilidad $p(\theta_j)$ de ocurrencia.

Personalidad del Decisor

Existe la creencia general de que cada individuo o compañía tiene (o debería tener) la misma actitud respecto al riesgo. La suposición empleada en la mayoría de los casos es que el que toma la decisión deserá escoger aquel curso de acción que ofrezca el más alto valor esperado de los beneficios. Pero, de hecho, la realidad demuestra que son muy pocos los hombres de negocios que adoptan esta actitud con respecto al riesgo al tomar decisiones importantes y de trascendencia. Algunos se niegan a incluir la incertidumbre en su análisis pero hacen cálculos pesimistas sobre las cantidades desconocidas cuya aparición afectará el éxito o el fracaso de la operación que están analizando. Otros admiten la necesidad de tener en cuenta la incertidumbre en su análisis, pero reflejan sus tendencias conservadoras aumentando las probabilidades de aquellos acontecimientos que podrían dar lugar a consecuencias desfavorables.

Para ejemplificar las diferentes actitudes respecto al riesgo, tómese el siguiente ejemplo.

Supóngase que se debe elegir entre alguno de los siguientes juegos:

Juego 1: la recompensa es igual a $500,000 con seguridad.

Juego 2: la recompensa puede ser:

$2,500,000 con probabilidad 0.10

$500,000 con probabilidad 0.89

$0 con probabilidad 0.01

En qué juego preferiríamos participar?

O bien, tómense en cuenta las siguientes opciones:

Juego 3: las posibles recompensas son:

$500,000 con probabilidad 0.11

$0 con probabilidad 0.89

Juego 4: las recompensas serían:

$2,500,000 con probabilidad 0.10

$0 con probabilidad 0.90

Para una mejor comparación, obsérvense los siguientes diagramas:

	PROB.	UTILIDAD
JUEGO 1	.10	500,000
	.89	500,000
	.01	500,000

	PROB.	UTILIDAD
JUEGO 2	.10	2,500,000
	.89	500,000
	.01	0

O bien

	PROB.	UTILIDAD		PROB.	UTILIDAD
	.10	500,000		.10	2,500,000
JUEGO 3	.01	500,000	JUEGO 4	.01	0
	.89	0		.89	0

Este ejemplo fué planteado primero por Allais (1953) y reproducido y discutido por Savage (1954). Se encontró que la mayoría de la gente prefiere el juego uno al juego dos, y el juego cuatro al juego tres. Al parecer la preferencia del juego uno sobre el dos radica en que se prefiera obtener con certidumbre una cantidad considerable de dinero, en lugar de arriesgarse para obtener una mayor. Cuando una persona prefiere el juego cuatro al tres, aparentemente razona así: la probabilidad de no recibir nada es solo un poco mayor en el cuatro que en el tres, pero sin embargo la posible ganancia del juego cuatro es mucho mayor.

Siendo la utilidad un número que mide la deseabilidad de una consecuencia, (cuanto mayor sea el número, más atractiva es la consecuencia), definimos una función "U" sobre el conjunto de posibles resultados, tal que u(θ) es llamada la utilidad del resultado θ. Esta función tiene las siguientes propiedades:

Propiedad 1: $u(\theta_1) > u(\theta_2)$ si y solo si el individuo prefiere θ_1 a θ_2.

Propiedad 2: sea Θ un conjunto de posibles resultados, donde con probabilidad p el resultado puede ser θ_1 y con probabilidad 1-p el resultado puede ser θ_2 , entonces

$$u(\Theta) = pu(\theta_1) + (1-p)u(\theta_2)$$

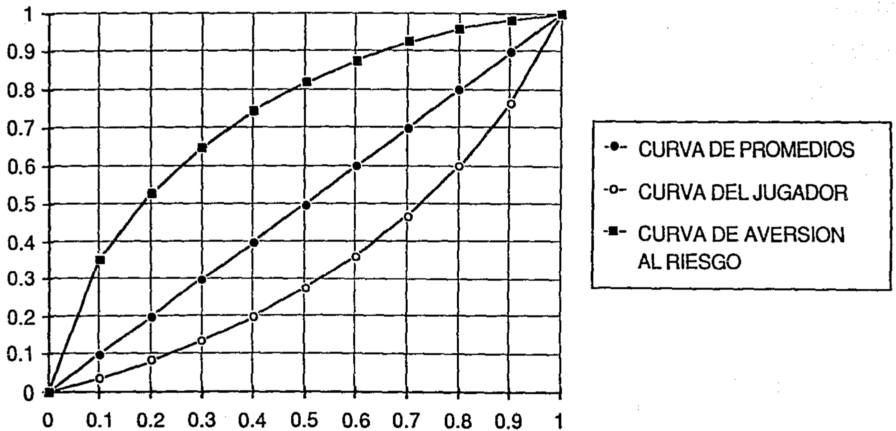
Volviendo a nuestro ejemplo, y si decimos que para una cantidad de dinero x, denotamos la utilidad de x como u(x), podemos hacer una observación: si la función de utilidad de una persona "U" satisface las desigualdades:

$$u(2,500,000) > u(500,000) > u(0)$$

entonces, se sigue que esta persona preferirá el juego uno al dos solamente si prefiere el juego tres al juego cuatro, lo que entra en conflicto con las preferencias observadas de la gente. Esto no es sino un ejemplo de la influencia que tiene la personalidad del decisor y su actitud ante el riesgo al decidir entre dos cursos de acción.

Para impactar la personalidad del decisor, una opción es conjuntar en una misma cifra la probabilidad de un suceso y la actitud ante el riesgo. Una herramienta importante para lograr esto es el empleo de una curva de preferencia, que es un resumen completo de la actitud con respecto al riesgo que tiene el que ha de tomar la decisión a lo largo del dominio de variación necesario para resolver un determinado problema, incluyendo el mejor y el peor resultado que se puedan producir. El eje horizontal es el que muestra dichas consecuencias, cuyos puntos terminales se llaman consecuencias de referencia, (R_0 y R_1). El eje vertical tendrá los "índices de preferencia", tomando valores de cero a uno, con lo que podremos interpretarlo como probabilidades. La obtención de los siguientes puntos se logra preguntando al decisor sus equivalentes de certeza con respecto a apuestas 50-50 dando como consecuencias a éstas un rango fijo. Con esto obtenemos un valor en el eje horizontal, y para obtener el valor en el eje vertical promediamos los dos valores de los puntos de la apuesta. Este procedimiento se continua hasta poder obtener la curva, la cual deberá ser verificada para que refleje la posición del decisor ante el riesgo. La siguiente gráfica muestra las curvas de preferencia más comunes, aunque puede darse el caso de una combinación de ellas.

CURVA DE PERSONALIDAD DEL DECISOR



Deberemos hacer notar que aunque existen muchas clases importantes de decisiones de negocios a las que podemos aplicar la teoría de la preferencia, existen otras clases a las que no se puede aplicar. Se puede usar con la mayoría de los problemas a corto plazo, pero no es de aplicación en problemas a mas largo plazo en los cuales existen ingresos y gastos inciertos separados en el tiempo y en los que la fecha en que nos enteraremos de los resultados de las incertidumbres es muy importante, pues no se pueden ajustar las diferencias en el tiempo mediante un simple descuento. Tal es el caso de nuestro problema, por lo que no utilizaremos este tipo de procedimiento, aunque nuestros sentimientos respecto al riesgo son reflejados implícitamente en el planteamiento del problema.

Función de Utilidad

Como ya mencionamos anteriormente, a cada resultado posible puede asociársele una utilidad, ya sea monetaria o no, lo cual puede permitirnos comparar la satisfacción que recibimos por cada uno de ellos, y podemos elegir entonces el que mejor convenga.

Recordando la definición de la función de utilidad, definimos una función "U" sobre el conjunto de posibles resultados (Θ), tal que $u(\theta)$ es llamada la utilidad del resultado θ. Esta función tiene las siguientes propiedades:

Propiedad 1: $u(\theta_1) > u(\theta_2)$ si y solo si el individuo prefiere θ_1 a θ_2.

Propiedad 2: sea Θ un conjunto de posibles resultados, donde con probabilidad p el resultado puede ser θ_1 y con probabilidad 1-p el resultado puede ser θ_2 , entonces

$$u(\Theta) = pu(\theta_1) + (1-p)u(\theta_2)$$

Para ejemplificar el uso de la función de utilidad, supóngase que debemos elegir entre los siguientes dos proyectos:

PROYECTO 1

	PROBABILIDAD	INGRESO
EXITO	.75	1,000
FRACASO	.25	0

PROYECTO 2

	PROBABILIDAD	INGRESO
EXITO	.80	900
FRACASO	.20	0

La esperanza matemática del resultado en cada caso es:

PROYECTO 1	750
PROYECTO 2	720

Si nosotros definimos nuestra función de utilidad como creciente, es decir, que entre mayor ganancia el resultado es mejor, entonces

$$U(750) > U(720)$$

y preferiríamos desarrollar el proyecto 1.

Nuestro problema no presenta ninguna dificultad en este sentido, pues la utilidad está medida únicamente en términos de dinero, y por lo tanto nuestro problema se reduce a elegir el curso de acción que mayores beneficios económicos nos reporte, de acuerdo a los resultados posibles (la factibilidad de cada uno de ellos va de acuerdo a la función de probabilidad propuesta).

Conviene resaltar, aunque es obvio suponerlo, que un aumento en la cantidad de dinero que obtenemos de un resultado, implica un aumento en nuestra función de utilidad, lo que quiere decir que la utilidad es creciente en función del dinero recibido.

Una práctica muy utilizada en problemas de decisión, es trabajar con el negativo de la función de utilidad para cada resultado, y llamar a esté número la "pérdida" (la función de pérdida se especifica con la letra "L"), en lugar de la utilidad ("U"). Nosotros entonces hablaremos de una función de pérdida en lugar de una función de utilidad

$$L_x = - U_x$$

Ambiente de Incertidumbre

Si se pueden predecir con certeza las consecuencias de cada alternativa de acción, entonces se tiene una tarea de toma de decisiones bajo certidumbre. En este caso, la dificultad en la decisión es púramente técnica, pudiéndose ordenar las decisiones de mejor a peor para elegir entre ellas. Si las consecuencias de una acción dependen de algun evento incierto, decimos que estamos tomando decisiones bajo condiciones de riesgo.

Sin embargo, en muchas decisiones que debemos tomar, no conocemos con exactitud las consecuencias por tomar determinado curso de acción, a lo que llamamos "toma de decisiones en un ambiente de incertidumbre". Algunas personas manejan estas situaciones introduciendo en el problema los sentimientos subjetivos de optimismo y pesimismo. Un camino mas seguro, consiste en reducir al máximo la incertidumbre obteniendo toda la información adicional posible sobre el problema, y expresar aquellos conocimientos o sentimientos que se tengan sobre los eventos en términos de una distribución de probabilidad.

En esta tesis tratamos de establecer un nivel adecuado de producción de un equipo de oficina, pero no disponemos de datos certeros sobre el comportamiento de la demanda. Lo que se hará es suponer una distribución "a-priori" de la demanda (nos referimos a probabilidades "a-priori" cuando éstas son asignadas a posibles resultados antes de haber realizado un experimento o tener resultados reales de un experimento), y en base a esto podremos minimizar el riesgo de pérdida.

CAPITULO II

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Planteamiento General

Como se mencionó anteriormente, estamos tratando de optimizar el nivel de producción de un producto, para el cual no tenemos certeza del comportamiento de su demanda.

Formalmente, nuestro conjunto de posibles resultados puede ser cualquier número entero mayor o igual que cero. Esto quiere decir, que la demanda no puede ser negativa, y estamos dejando el límite superior abierto, (aunque como se verá al establecer la función "a-priori" de la demanda, la probabilidad de que ésta alcance proporciones muy alejadas de la media esperada que se definirá es muy pequeña).

De la misma manera, nuestro conjunto de posibles decisiones, al depender la producción directamente de la demanda, será el de producir cualquier número de unidades mayor o igual a cero.

Con esto estamos sentando las bases de nuestro problema de decisión, y nos quedará solamente el describir en términos de utilidad o riesgo cada posible resultado, para elegir el curso de acción (decidir el nivel de producción) que mejores beneficios económicos nos reporte.

Descripción del entorno

El mercado que estamos analizando, es el de productos de oficina en el territorio mexicano.

Si bien disponemos de datos históricos del desenvolvimiento del ramo de productos para oficina en México, el producto sobre el que estamos trabajando es novedoso en muchos sentidos (tecnología superior, segmento del mercado que queremos atacar, costo, etc.), además de involucrar cambios significativos en cuanto a su comercialización, como son una amplia garantía, servicio, capacitación al usuario, etc., por lo que se dificulta conocer con exactitud la demanda que tendrá entre los consumidores. Tampoco se tiene experiencia de la comercialización de este producto en otros países, pues su lanzamiento es simultáneo con ellos, y aunque se tuviera, esta experiencia sería sólo utilizable para ciertos aspectos, como pueden ser servicio, rendimiento del equipo, etc., pero no para planificar la venta del mismo, pues los mercados pueden resultar totalmente diferentes, desde la economía de cada país, restricciones diferentes en cuanto a la importación de este tipo de productos y sus partes y materiales, impuestos, desarrollo de canales publicitarios, competencia, etc.

Sin embargo, la compañía dispone de personal con gran experiencia en el ramo, que ha manejado productos que involucran muchas de las características que hemos mencionado, y pueden realizar un pronóstico del éxito de su lanzamiento en México. Aunado a esto, se ha desarrollado un estudio para conocer el número aproximado de clientes potenciales, arrojando cifras de cuántos de ellos podrían estar interesados en adquirirlo.

En cuanto al entorno económico, las perspectivas para México han sido estimadas por economistas especializados en estas proyecciones, por lo que podemos tener un panorama confiable para un corto plazo, en el que se preveé una recuperación económica considerable, con una mayor inversión que en los períodos precedentes, y con mejores perspectivas para el comercio de equipos de oficina.

De esta manera podemos establecer inicialmente el número de compradores que tendremos en el período analizado (el año fiscal de la compañía), pero nuestro problema sigue siendo el definir las desviaciones que pueda tener la demanda sobre este número, es decir, establecer una función de probabilidad que pueda describir el comportamiento que estamos esperando de la demanda (probabilidad "a-priori").

Características del Producto

La alta tecnología utilizada en su fabricación es la principal característica del equipo que queremos producir. Está destinado a remplazar en parte los equipos menos sofisticados de que disponen algunos clientes, y busca una ambiciosa penetración entre el segmento que actualmente se tiene catalogado como "no usuario", es decir, no dispone de productos similares. Sin embargo, no es el único en su tipo, pues otras compañías competidoras disponen de equipos similares, que pueden rivalizar con el nuestro, tanto en tecnología como en costo, aunque no disponen de una estructura tan desarrollada como la de nuestra empresa, ni de una aceptación tan amplia en el mercado.

Es un equipo que por su costo, tamaño, capacidad, pretende alcanzar el mercado de pequeños consumidores, ofreciéndoseles el servicio incluído en el precio inicial, así como un paquete de materiales de alto rendimiento, de fácil manejo por parte del usuario. Es un producto de alta confiabilidad en su rendimiento, para el cual se preveé un número pequeño de llamadas por parte del cliente a causa de descomposturas o mal funcionamiento.

CAPITULO III

ESTABLECIMIENTO DE LA FUNCION DE UTILIDAD

Comportamiento de la demanda

Para resolver nuestro problema de optimización del nivel de producción, uno de los puntos mas importantes a definir es el de pronosticar la demanda que tendrá nuestro producto en el mercado.

Existe una amplia variedad de métodos de pronósticos, que dependen de los objetivos que se persiguen y de las bases con que se cuenta en cada caso. Sin embargo una gran parte de ellos se basan en datos históricos del pasado para la variable que se desea pronosticar, como puede ser el análisis de "series de tiempo"[5], con el que se pretende estudiar y describir las características de una serie de datos en el tiempo, tanto en sus factores de "tendencia-ciclo" (largo plazo), como de estacionalidad (efectos producidos por fenómenos que se repiten en el corto plazo), así como de una componente de irregularidad que sirve para caracterizar los movimientos imprevisibles y considerados como aleatorios. Existen otros tipos de pronósticos que llamaremos "causales", pues influyen o se relacionan con la variable que se quiere pronosticar, aunque en éstos no solo intervienen métodos cuantitativos, pues es muy importante el juicio de los expertos en la elaboración del modelo. Un ejemplo de este tipo de modelos es el Análisis de Regresión[5], que trata de identificar una relación funcional entre una o más variables independientes (predictoras) y la variable dependiente (pronóstico).

Sin embargo en esta tesis planteamos un problema de proyección de demanda a corto plazo, (suponemos además que el proceso es estacionario, es decir, esperamos que los niveles de demanda no sufran alteraciones considerables de un período a otro en el mediano plazo), pero no contamos con datos históricos sobre los que podamos basarnos para utilizar uno de los métodos de predicción antes mencionados.
Sin embargo contamos con un grupo de empleados de gran experiencia en la compañía y en el ramo que deseamos atacar, los cuales han trabajado para determinar en base a sus conocimientos cual podría ser la aceptación del producto en el mercado. Además, se ha realizado un estudio mercadológico acerca del tamaño del mercado, clientes potenciales a corto plazo, número de usuarios con que cuenta la competencia actualmente, precios a los que se pueden obtener productos similares, etc. Con esto podemos forjarnos una idea inicial de nuestra demanda, aunque para nuestro propósito, deberemos reflejar nuestras expectativas en una función de probabilidad, facilitando el desarrollo técnico del problema. Por experiencia se ha demostrado que un gran número de poblaciones involucradas en estudios de mercado se comportan de una manera "normal"[4], y además es conocida la utilidad de esta función y su fácil manejo desde el punto de vista analítico, por lo que nos hemos decidido por dicha función como distribución "a-priori" de la demanda. Más adelante se presentará el desarrollo de nuestro problema bajo estos supuestos, aunque encontraremos algunas dificultades en el manejo de integrales en nuestro análisis, por lo que hemos querido buscar otra opción en cuanto a la función "a-priori" en cuestión.

La opción que elegimos es la función Beta, pues su manejo es mucho más sencillo, además de otras características, como la de que si escogemos adecuadamente los parámetros de la función, presenta una forma muy similar a la normal ("forma de campana"), lo que esperamos refleje nuestras expectativas de demanda. También se presentará entonces el desarrollo completo del problema bajo el supuesto de una distribución Beta "a-priori".

Pérdida por diferencias entre producción y demanda

La base para establecer nuestra función de pérdida será el hecho de que siempre que exista una diferencia entre la producción (basada en nuestros pronósticos) y la demanda real, tendremos una pérdida.

En el caso de que la producción resulte menor que la demanda, estamos "dejando de ganar" dinero, al desaprovechar nuestras oportunidades de ventas, lo cual puede ser visto como una pérdida, pues no utilizaríamos completamente el potencial de compradores que el mercado ofrece. Por otro lado, si producimos en exceso, es decir, si nuestra producción rebasa la demanda real, tenemos también una pérdida, pues deberemos almacenar estos equipos, y esto incrementa nuestros costos, y aún mas, podríamos vernos en la necesidad de rentar o construir un nuevo almacén. Además, los constantes cambios de tecnología, provocarán que nuestro producto pierda competitividad y tengamos que venderlo a un precio menor.

Comportamiento de la Función de Pérdida

La función de pérdida para este ejercicio fué elaborada precisamente tomando en cuenta las diferencias entre producción y demanda.

En el caso en que la producción es menor que la demanda, estamos proponiendo una función lineal de pérdida, como sigue:

$$L_x = a(\xi - x) \qquad si\ x<\xi$$

En donde:

a = pérdida unitaria, vista como nuestra ganancia neta (ingreso - costo)

ξ = demanda

x = producción

Para el caso de que nuestra producción rebase la demanda real, debemos contemplar otro tipo de situaciones. Primero, como lo mencionamos, el producto puede sufrir una pérdida de valor en el tiempo, la cual no es necesariamente lineal. En nuestro estudio, hemos pensado en una función que acelera la pérdida a medida que transcurre el tiempo. Si pensamos por ejemplo en una función del tiempo "t", tal que para $t=1$ represente un 10%, y valuada en $t=6$ sea el 100%, podemos definir f(t) como:

$$f(t) = (0.1)\, t^{\ln 10/\ln 6} = (0.1)\, t^{1.2851}$$

Con lo que para cada período, tendremos las siguientes pérdidas:

PERIODO	PORCENTAJE DE PERDIDA
0	0%
1	10.00%
2	24.37%
3	41.03%
4	59.39%
5	79.11%
6	100.00%

Ahora bien, para facilitar el manejo del problema, hemos buscado definir una función más sencilla y hemos ajustado una curva a nuestras pérdidas estimadas por año, siendo esta curva una parábola:

$$f(t) = \frac{t^2}{100} + \frac{t}{10}$$

Que se comporta de la siguiente manera:

PERIODO	PORCENTAJE DE PERDIDA
0	0%
1	10.00%

2	24.00%
3	39.00%
4	56.00%
5	75.00%
6	96.00%

Donde "t" es el tiempo que debemos almacenar nuestro producto. Con esto podemos calcular la pérdida para cualquier período de tiempo.

Ahora bien, lo que haremos para calcular la pérdida, será integrar la función que resulta de multiplicar el número de unidades excedentes por su pérdida de valor en el tiempo, estimada mediante la derivada de la parábola mencionada, es decir:

$$f'(t) = \left(\frac{t^2}{100} + \frac{t}{10}\right)'$$

lo que representa la "velocidad" de la pérdida o pérdida marginal. Esta integral irá de los límites de cero a $\frac{x-\xi}{\xi}$, que es el número de unidades de tiempo que tardaremos en deshacernos de los excedentes. Además, definimos a "b" como nuestra pérdida unitaria por producir excedentes.

La función queda entonces

$$L_x = b\int_0^{\frac{(x-\xi)}{\xi}} (x - t\xi - \xi)\left(\frac{t^2}{100} + \frac{t}{10}\right)' dt \qquad si\ x>\xi$$

Además, decidimos añadir un costo "A" para el caso de que nuestros excedentes (producción menos demanda) rebasen nuestra capacidad de almacenamiento, determinada por el número "C". Dicho costo "A" ha sido pensado como un desembolso único que tendrá que hacer la compañía para adquirir o rentar un almacén adicional para guardar los excedentes. Nuestra función de pérdida completa queda entonces como:

$$L_x = \begin{cases} a(\xi - x) & si\ x<\xi \\ b\int_0^{\frac{(x-\xi)}{\xi}} (x - t\xi - \xi)\left(\dfrac{t^2}{100} + \dfrac{t}{10}\right)' dt & si\ 0<(x-\xi)<c \\ b\int_0^{\frac{(x-\xi)}{\xi}} (x - t\xi - \xi)\left(\dfrac{t^2}{100} + \dfrac{t}{10}\right)' dt \ +A & si\ (x-\xi)>c \end{cases}$$

Si desarrollamos la integral

$$\int_0^{\frac{(x-\xi)}{\xi}} (x-t\xi-\xi)\left(\frac{t^2}{100}+\frac{t}{10}\right)' dt$$

$$= x\int\left(\frac{t^2}{100}+\frac{t}{10}\right)' dt \;-\xi\int t\left(\frac{t^2}{100}+\frac{t}{10}\right)' dt \;-\xi\int\left(\frac{t^2}{100}+\frac{t}{10}\right)' dt$$

$$= x\left[\frac{t^2}{100}+\frac{t}{10}\right]_0^{\frac{(x-\xi)}{\xi}} -\xi\left[\frac{t^3}{150}+\frac{t^2}{20}\right]_0^{\frac{(x-\xi)}{\xi}} -\xi\left[\frac{t^2}{100}+\frac{t}{10}\right]_0^{\frac{(x-\xi)}{\xi}}$$

$$= x\left[\frac{\left(\frac{x-\xi}{\xi}\right)^2}{100}+\frac{\left(\frac{x-\xi}{\xi}\right)}{10}\right] -\xi\frac{\left(\frac{x-\xi}{\xi}\right)^3}{150} -\frac{3}{50}\xi\left(\frac{x-\xi}{\xi}\right)^2 -\xi\frac{\left(\frac{x-\xi}{\xi}\right)}{10}$$

$$= \left(\frac{x-\xi}{\xi}\right)^2\left[\frac{x}{100}-\frac{3}{150}\xi\right] + \left(\frac{x-\xi}{\xi}\right)\left[\frac{x-\xi}{10}\right] - \left(\frac{x-\xi}{\xi}\right)^3\frac{\xi}{150}$$

$$= \frac{x^2-2x\xi+\xi^2}{\xi^2}\left[\frac{x}{100}-\frac{3}{50}\xi\right]+\frac{x^2-2x\xi+\xi^2}{10\xi}-\frac{x^3-3x^2\xi+3x\xi^2-\xi^3}{150\xi^2}$$

$$= \frac{x^3}{300\xi^2}+\frac{x^2}{25\xi}+9\frac{x}{100}+\frac{7\xi}{150}$$

podemos redefinir nuestra función de pérdida como:

$$L_x = \begin{cases} a(\xi-x) & si\ \ x<\xi \\ b\left[\frac{x^3}{300\xi^2}+\frac{x^2}{25\xi}+9\frac{x}{100}+7\frac{\xi}{150}\right] & si\ \ 0<(x-\xi)<c \\ b\left[\frac{x^3}{300\xi^2}+\frac{x^2}{25\xi}+9\frac{x}{100}+7\frac{\xi}{150}\right]+A & si\ \ (x-\xi)>c \end{cases}$$

CAPITULO IV

DESARROLLO

Minimización de la función de pérdida

Nuestro problema es ahora obtener el punto donde nuestra función de pérdida sea mínima. Esto se logra minimizando la integral del producto de la función de pérdida por la función de distribución del parámetro del que depende dicha función, (en este caso la demanda, para la que estamos suponiendo su función de distribución), es decir:

$$E(L(x,\xi)) = \int_R L_x(u) f_\xi(u)\, du$$

Para ilustrar el procedimiento, hemos realizado un ejercicio muy simple, en el que la pérdida es lineal dependiendo del número de equipos que sean producidos en exceso, o bien el mercado que esté siendo desperdiciado por producir menos equipos de los debidos. La función de distribución que suponemos para la demanda es "general", es decir, no definimos ninguna distribución en especial. El planteamiento entonces queda como sigue:

Sea:

$$\xi \sim f_\xi(u)$$

$$L_x(\xi) = \begin{cases} b(x-\xi) & si\ x>\xi \\ a(\xi - x) & si\ x<\xi \end{cases}$$

Minimizar $\int_{-\infty}^{x} b(x-u) f_\xi(u)\,du + \int_{x}^{+\infty} a(u-x) f_\xi(u)\,du$

$\int_{-\infty}^{x} b(x-u) f_\xi(u)\,du + \int_{x}^{+\infty} a(u-x) f_\xi(u)\,du$

$= \int_{-\infty}^{x} bxf_\xi(u)\,du - \int_{-\infty}^{x} buf_\xi(u)\,du + \int_{x}^{+\infty} auf_\xi(u)\,du - \int_{x}^{+\infty} axf_\xi(u)\,du$

$= bxF(x) - \int_{-\infty}^{x} buf_\xi(u)\,du + \int_{x}^{+\infty} auf_\xi(u)\,du - ax\left[1 - F(x)\right]$

Sumando y Restando $\int_{-\infty}^{x} auf_\xi(u)\,du$

$= bxF(x) - \int_{-\infty}^{x} buf_\xi(u)\,du - \int_{-\infty}^{x} auf_{xi}(u)\,du + aE(\xi) - ax\left[1 - F(x)\right]$

$= bxF(x) - (a+b)\int_{-\infty}^{x} uf_\xi(u)\,du + aE(\xi) - ax\left[1 - F(x)\right]$

$= (a+b)(xF(x)) - ax + aE(\xi) - (a+b)\int_{-\infty}^{x} uf_\xi(u)\,du$

Por Partes $\int n\,dm = nm - \int m\,dn$

Sea $n = u \quad => \quad dn = du$

$dm = f_\xi(u)\,du \quad => \quad m = F(u)$

$= (a+b)(xF(x)) - ax + aE(\xi) - (a+b)\left[xF(x) - \int_{-\infty}^{x} F(u)\,du\right]$

$= -ax + aE(\xi) + (a+b)\int_{-\infty}^{x} F(u)\,du$

Derivando e igualando a cero

$-a + (a+b)F(x) = 0$

$F(x) = \dfrac{a}{a+b}$

$$x = F^{-1}\left(\frac{a}{a+b}\right)$$

Con este breve ejercicio hemos podido determinar el nivel de producción "x" que minimiza nuestro riesgo de pérdida de acuerdo a nuestros supuestos. En este caso en particular, depende de los valores de "a" y "b" (definidos anteriormente como los costos unitarios por producir abajo y arriba de la demanda respectivamente).

Así, hemos presentado el procedimiento que seguiremos en nuestro problema, aunque los supuestos variarán, pues incluiremos otro tipo de expectativas

Caso de la demanda distribuida como Normal

Como mencionamos anteriormente hemos desarrollado dos ejercicios de minimización de la función de pérdida, (obteniendo el nivel de producción óptimo), a partir de dos supuestos diferentes para el comportamiento de la demanda. El primero es definiendo una función de distribución Normal ("a-priori") para dicha demanda, y el segundo caso con la función Beta. En el caso de la normal, el desarrollo del problema presenta ciertas dificultades técnicas en algunas de las integrales que deben de resolverse, y cuyo desarrollo se verá conforme se avance en el mismo. Uno de los principales problemas que se encontró, es que el límite inferior a considerar en el planteamiento de la función de pérdida para el intervalo en el cual puede moverse la demanda, no puede ser cero, pues una de las integrales no está definida en este punto, por lo que desde el planteamiento se trabajará con una normal "truncada" a la izquierda de "uno", (un número suficientemente pequeño escogido arbitrariamente).

Una función normal truncada a la izquierda de $x=\gamma$ se define como:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < \gamma \\ \dfrac{k}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} & si\ x \geq \gamma \end{cases}$$

Donde:

$$k = \left[1 - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-1}$$

Trabajaremos en nuestro ejercicio sin definir ningún valor para nuestra media "μ" y nuestra desviación estándar "σ", aunque para obtener nuestro nivel óptimo deberá establecerse un valor para ambos. La desviación estándar puede variar dependiendo de las espectativas que tenemos de la demanda, es decir, de la función "a-priori" que queramos establecer, pues si damos una desviación estándar mas pequeña la probabilidad de que la demanda esté lejos de la media disminuye y viceversa.

Entonces nuestro problema queda planteado como sigue:

Sea:

$$f_\xi(u) = \begin{cases} 0 & si \;\; u<\varepsilon \\ \dfrac{k}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2} & si \;\; u \geq \varepsilon \end{cases}$$

$$con \;\; k = \left[1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-1}$$

$$donde \;\; \varepsilon = 1$$

Entonces la función a minimizar es:

$$b \int_1^{x-c} \left[\frac{x^3}{300u^2} + \frac{x^2}{25u} + 9\frac{x}{100} + 7\frac{u}{150}\right] \frac{k}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2} du$$

$$+ A \int_1^{x-c} \frac{k}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2} du$$

$$+ b \int_{x-c}^{x} \left[\frac{x^3}{300u^2} + \frac{x^2}{25u} + 9\frac{x}{100} + 7\frac{u}{150} \right] \frac{k}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2} du$$

$$+ a \int_{x}^{\infty} (u-x) \frac{k}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2} du$$

$$= k \Big[b \int_{1}^{x} \left[\frac{x^3}{300u^2} + \frac{x^2}{25u} + 9\frac{x}{100} + 7\frac{u}{150} \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2} du$$

$$+ A \int_{1}^{x-c} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2} du + \; + a \int_{x}^{\infty} u \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2} du$$

$$- ax \left[1 - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \right] \Big]$$

Sumando y Restando $a \int_{1}^{x} u \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2} du$

$$= k \Big[b \int_{1}^{x} \left[\frac{x^3}{300u^2} + \frac{x^2}{25u} + 9\frac{x}{100} + 7\frac{u}{150} \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2} du$$

$$+ A \left[\Phi\left(\frac{x-c-\mu}{\sigma}\right) \right] + a\mu - a \int_{1}^{x} u \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2} du - ax \left[1 - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \right] \Big]$$

Cabe mencionar que el término

$$A \left[\Phi\left(\frac{x-c-\mu}{\sigma}\right) \right]$$

solo es válido si $(x-c) > 1$. Si estamos evaluando el ejercicio con una $(x-c) > 1$, entonces este término se convierte en cero

Para encontrar la integral

$$\int_1^x \left[\frac{x^3}{300u^2} + \frac{x^2}{25u} + 9\frac{x}{100} + 7\frac{u}{150}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2} du$$

utilizamos el desarrollo en serie

$$e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2} = 1 - \frac{\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^4}{8} - \frac{\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^6}{48}$$

con lo que obtenemos integrales muy sencillas, y que pueden ser resueltas utilizando las fórmulas adecuadas.

Esta es la parte más compleja para resolver de la función que queremos minimizar, y el resto no presenta grandes dificultades técnicas para su solución. Con esto podría pensarse que el problema entonces se reduce a completar el desarrollo, obteniendo el mínimo de la función mediante su derivada. Sin embargo, el desarrollo en serie de

$$e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2} = 1 - \frac{\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^4}{8} - \frac{\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^6}{48}$$

que definimos anteriormente, presenta una nueva dificultad. Este desarrollo es muy exacto cuando $\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)$ toma valores entre cero y uno, incluso si solamente tomamos los primeros cuatro términos de la serie. Sin embargo para valores de $\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)$ mayores a uno, se observa que en los primeros términos de la serie, el numerador crece mas rápidamente que el denominador respecto al término anterior, y esto prevalece hasta que el número de términos es grande (entre doce y quince aproximadamente).

Como en nuestro problema $\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)$ efectivamente toma valores mayores a uno, entonces nuestro desarrollo en serie debería incluir cuando menos doce términos.

Hasta aquí hemos hecho el planteamiento completo del problema y las herramientas que deberemos utilizar si queremos resolverlo. Sin embargo, omitimos dicho desarrollo en esta tesis pensando en que lo más importante, el planteamiento, ha quedado establecido, y únicamente sería cuestión de seguir el curso que hemos definido para obtener un resultado.

Además a continuación presentaremos el segundo de nuestros casos, en el que suponemos que la demanda sigue una distribución Beta en su comportamiento, y para este caso realizamos el desarrollo completo del problema, y como podrá observarse, no encontramos las dificultades del caso de la función Normal.

Caso de la demanda distribuida como Beta

El segundo de los casos que presentamos es el desarrollo del problema a partir del supuesto de que la demanda tiene una función de distribución Beta, con parámetros "α" y "β", y el resto de la simbología permanece constante, es decir:

ξ = *Demanda*

x = *Produción*

a = *Costo por unidad por producir abajo de la demanda*

b = *Costo por unidad por producir arriba de la demanda*

C = *Capacidad de almacenaje actual*

A = *Costo por exceder la capacidad de almacenaje*

Lo que haremos será un desarrollo del problema para cualquier función Beta (α y β sin definir), y al final haremos algunas valuaciones utilizando funciones Beta en las que α y β tomen valores iguales, pues este tipo de funciones presenta en su distribución una forma de "campana", que es como podría esperarse que se comporte la demanda, siendo la ventaja de la distribución Beta el hecho de que no presenta las dificultades de desarrollo que la Normal.

Nuestro problema es entonces minimizar:

$$b \int_0^{x-c} \left[\frac{x^3}{300u^2} + \frac{x^2}{25u} + 9\frac{x}{100} + 7\frac{u}{150}\right] \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\,du$$

$$+ A \int_o^{x-c} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\,du$$

$$+ b \int_{x-c}^{x} \left[\frac{x^3}{300u^2} + \frac{x^2}{25u} + 9\frac{x}{100} + 7\frac{u}{150}\right] \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1} du$$

$$+ a \int_{x}^{1} (u-x) \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1} du$$

$$= b \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \left[\frac{x^3}{300} \frac{\Gamma(\alpha-2)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta-2)} F_{\alpha-2,\beta}(x)\right.$$

$$+ \frac{x^2}{25} \frac{\Gamma(\alpha-1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta-1)} F_{\alpha-1,\beta}(x)$$

$$+ \frac{9x}{100} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} F_{\alpha,\beta}(x)$$

$$+ \frac{7}{150} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} F_{\alpha+1,\beta}(x)$$

$$+ A\, F_{\alpha,\beta}(x-c)$$

$$+ \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} a \left[\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \left(1 - F_{\alpha+1,\beta}(x)\right) - x \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \left(1 - F(\alpha,\beta(X)\right)\right]$$

Derivando e igualando a cero

$$b \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \left[\frac{\Gamma(\alpha-2)\Gamma(\beta)}{300\,\Gamma(\alpha+\beta-2)} (x^3 f_{\alpha-2,\beta}(x) + 3\, F_{\alpha-2,\beta}(x)\, x^2)\right.$$

$$+ \frac{\Gamma(\alpha-1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta-1)} (x^2 f_{\alpha-1,\beta}(x) + 2F_{\alpha-1,\beta}(x)x)$$

$$+ \frac{9\,\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{100\,\Gamma(\alpha+\beta)} (x\, f_{\alpha,\beta}(x) + F_{\alpha,\beta}(x))$$

$$+ \frac{7}{150} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} f_{\alpha+1,\beta}(x)$$

$$+ A\, f_{\alpha,\beta}(x-c)$$

$$+ a\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\left[\frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(-f_{\alpha+1\beta}(x))\right.$$

$$+\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\,x\,f_{\alpha\beta}(x)$$

$$-\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(1-F_{\alpha\beta}(x))$$

Aquí cabe mencionar, al igual que lo hicimos para el caso con la función Normal, que el término

$$A\,f_{\alpha\beta}(x-c)$$

deberá utilizarse solamente para aquellos casos en que $(x-c)>0$. Si valuamos el ejercicio con una $(x-c)\leq 0$, entonces éste término toma valor cero. Esto está incluido en el programa que diseñamos en lenguaje A.P.L., el cuál evalúa la derivada de la función que queremos minimizar, y mediante el cual podemos obtener el valor que toma dicha derivada para valores dados de "a", "b", "C", y "x". Este programa también tiene la facilidad de ser utilizado para cualquier distribución Beta, definiendo en el mismo los valores de "α" y "β". Esto se logró elaborando un programa que obtiene el valor que toma la función de distribución Beta en cualquier punto y para cualesquiera parámetros, y luego utilizamos ese programa para obtener la función acumulada de dicha función de acuerdo con la fórmula

$$\int_a^b f(x)\,dx \;\; h\left[\frac{1}{2}f(a)+f(x_1)+f(x_2)+\ldots\ldots+f(x_{n-1})+\frac{1}{2}f(b)\right]$$

Donde $h=\dfrac{(b-a)}{n}$

y $x_{0}(=a), x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n-1}, x_n(=b)$ *son los puntos finales de los n intervalos* y que no es otra cosa sino la obtención de una integral por medio del área de los rectángulos cuya base se obtiene de dividir el intervalo que estamos integrando entre un número determinado, y cuya altura está definida por el valor que toma la función que estamos integrando en cada uno de los puntos en que dividimos el intervalo.

Después, combinaremos nuestro programa que evalúa la derivada de nuestra función, con otro programa que es el de "búsqueda de punto medio", para el cual también desarrollamos un programa en A.P.L. El procedimiento en este método es muy sencillo, pues solo hay que indicar al programa dos valores iniciales entre los cuales tengamos la seguridad de que se encuentra una raíz real. Esto se logra haciendo una valuación de la función para valores sucesivos, y cuando se note que dicha valuación cambia de signo, esto será indicativo de que hemos encontrado el intervalo deseado. Luego el programa divide el intervalo en dos, y checa "de que lado" se encuentra la raíz, es decir, si se encuentra a la derecha o a la izquierda del punto medio, y con esto obtenemos un nuevo intervalo. El proceso se continúa hasta hacer el intervalo tan pequeño como se quiera, y obtener la aproximación que se desee de la raíz.

Un método alternativo para la obtención de nuestro resultado sería desarrollar la derivada de la función que estamos minimizando hasta obtener un polinomio, (esto es posible dado que tanto la función de destribución Beta como su acumulada pueden expresarse como polinomios). Entonces utilizaríamos el método de Bairstow para encontrar raíces de polinomios, (para esto hemos diseñado un programa en lenguaje A.P.L. de acuerdo al diagrrama de flujo que aparece en "Computer Applications of Numerical Methods", Kuo, Shan S., Addison - Wesley, pp 120-121".

El método de Bairstow sirve para resolver ecuaciones polinomiales de cualquier grado con coeficientes reales, es decir, de la forma:

$$y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \dots\dots\dots + a_n = 0$$

el cual tiene "n" raíces, únicas o repetidas.

Este método, a grandes razgos, utiliza una factorización del polinomio por un factor cuadrático del tipo $(y^2 + py + q)$, encontrando un valor para p y q por medio de un proceso iterativo, y posteriormente, una vez encontradas las dos raíces del término cuadrático, utiliza el mismo procedimiento para encontrar las restantes.

Si por ejemplo, realizamos el ejercicio con una función Beta "a-priori" con parámetros "α" y "β" = 4, y definiendo los siguientes valores:

a = 140

b = 70

c = 1/3

A = 50,000

encontramos que efectivamente existe un cambio de signo en la función a minimizar en el intervalo de cero a uno. Mediante nuestro programa que utiliza valuaciones sucesivas para encontrar la raíz (Punto Medio), encontramos que la raíz es 0.3210. (Puede comprobarse que este punto es un mínimo valuando la función original).

Entonces, si para la función Beta en el intervalo 0 - 1, con valores "α" y "β" = 4, definimos la siguiente relación:

x = 0		0 unidades
x = 0.5		3,000 unidades
x = 1		6,000 unidades

y los valores intermedios definidos por : No. unidades = x por 6,000, entonces encontramos que el valor que minimiza nuestro riesgo es 1,926 unidades.

Para hacer algunas comparaciones, veamos que sucede si variamos algunos de los supuestos iniciales. Si mantenemos los valores del ejercicio anterior, y solo cambiamos los valores de "α" y "β", y en lugar de darles valolr de cuatro les damos valor de diez, nuestra función de distribución "a-priori" toma forma de una "campana" mas alargada que la anterior, es decir, nuestras probabilidades mas altas se acercan mas a la media. Nuestro resultado encontrado para este ejercicio es de 0.3861, es decir, 2,317 unidades.

Si exageramos aún más nuestros valores de "α" y "β" y los fijamos, digamos en 27 para ambas, el resultado es .4167, es decir, 2500 unidades.

Así podemos continuar con los cambios que se quieran en los valores iniciales de nuestras variables, pues el programa tiene la flexibilidad requerida para aceptarlos, y solamente tenemos que indicárselos antes de correrlos.

Para ver como afectan otras variables en el programa, tómense los siguientes valores:

$$a = 140$$

$$b = 70$$

$$c = 0.15$$

$$A = 50{,}000$$

$$\alpha = \beta = 4$$

Aquí nuestro cambio respecto al primero de los casos que presentamos es en nuestra capacidad de almacenamiento "c", la cual estamos disminuyendo a 0.15 . El resultado obtenido fué de 0.1765, es decir, 1,059 unidades.

En otro caso, si invertimos los valores de "a" y "b", que representan la cantidad de dinero que perdemos por producir abajo y arriba de la demanda respectivamente, es decir:

$$a = 70$$

$$b = 140$$

$$c = 1/3$$

$$A = 50{,}000$$

$$\alpha = \beta = 4$$

nuestro resultado es afectado también, y es de 0.2167, es decir, 1,300 unidades.

CONCLUSION

Análisis de resultados

El resultado encontrado mediante el ejercicio en el que utilizamos la función Beta como distribución "a-priori" de la demanda, concuerda con las espectativas que pueden tenerse de acuerdo a los precedentes y condiciones que fijamos al iniciar el problema.

Como pudo observarse, al variar la distribución "a-priori", cuando hacíamos crecer los valores de "α" y "β" , nuestro resultado se acercaba más hacia la media, pues esto es efecto de que nuestra esperanza de la demanda también se acerca a la media.

También se observó que nuestra capacidad de almacenamiento podía hacer variar el resultado, pues cuando la redujimos, el resultado obtenido también se redujo significativamente, pues el gasto que establecimos por incurrir en problemas de almacenamiento es muy alto. Aquí cabe mencionar que este dato solo es relevante en cierto rango, pues dentro del problema establecimos una limitante de su efecto, que era el de que la producción debía rebasarlo para que repercutiera en el resultado, y si la producción era menor no tenía ningún efecto. Para entender esto, supóngase que se tiene una capacidad de almacenamiento muy grande, digamos de 5,000 unidades, y que realizamos nuestro ejercicio con este dato. Para este caso en particular, el efecto es nulo, pues de cualquier manera el problema tiene un resultado por abajo de esa cifra, es decir, sería el mismo que si no ponemos la restricción.

Igualmente es relevante el definir correctamente los valores de "a" y "b", que son los costos por producir abajo y arriba de la demanda respectivamente. En el caso inicial el costo "b" era mayor que el de "a", pero cuando invertimos los valores, vimos que nuestro resultado se acercaba más a la media, aunque sin rebasarla. Esto es claro también pues en este caso alternativo perderíamos mas por una unidad que "dejamos de vender", que por una que se nos queda en el almacén, y entonces deberemos producir más que en el primer caso.

Con todos estos casos podemos entonces concluir que además de que es importante seguir un procedimiento adecuado para la resolución de nuestro problema, deberemos buscar las alternativas que faciliten su solución, reduciendo los costos en que tengamos que incurrir, (en este caso tiempo y herramientas disponibles), pero conservando la credibilidad que resulta de un planteamiento correcto. Asimismo, también se destaca la importancia de elegir bien nuestros supuestos al resolver el problema, pues deben estar fijados lo mas sólidamente posible, pues de ellos depende en gran parte el resultado que obtendremos.

Recomendaciones

Es evidente que el proceso de planeación de la producción involucra un elevado número de factores que deben ser resueltos para una mejor utilización de nuestra planta productiva, desde la planeación estratégica de nuestro producto, que involucra decisiones de gran envergadura básicamente en el diseño de nuestros sistemas, así como la planeación táctica, que tiene que ver con modificaciones menores. Luego viene la implementación de todo el proceso, y la puesta en marcha de la parte operativa, así como la parte de control del sistema, lo que permite realizar evaluaciones del desempeño del mismo para el caso de que tenga que llevarse a cabo una "re-planeación" del mismo.

Después deberá buscarse la optimización del proceso, tomando en cuenta básicamente los costos de operación del sistema, la calidad del producto, la capacidad productiva, la flexibilidad de ajuste al cambio según las circunstancias, etc.

El problema que nosotros hemos analizado es solamente una parte de todo este sistema, aunque, sin temor a equivocarnos, es una de las más importantes, pues nos dá una base para iniciar todo el proceso, fijando una cantidad estimada de la demanda, con lo que podemos enlazar todos los aspectos de la producción.

Siendo entonces la estimación de la demanda un punto tan importante para producir un bien, deberá estudiarse cuidadosamente su posible comportamiento, a partir de todas las herramientas que se tengan a la mano. El planteamiento que hemos fijado, resulta ideal para situaciones en las que la información de la que se dispone es escasa, y sin embargo brinda resultados que deben ser superiores a los que obtendríamos si lo realizáramos de una manera emprírica, como es el caso de un buen número de productos fabricados en nuestro país. Así pues, resulta un instrumento efectivo y que no representa gastos mayores para el que lo utiliza. Además, el hacer cualquier modificación ya sea en los costos o restricciones que se fijaron, o bien incluir algunas adicionales, es relativamente sencillo, por lo que también puede decirse que es totalment flexible, y las únicas dificultades que pueden presentarse son meramente de desarrollo.

Es pues nuestra recomendación, que cualquier proceso que involucre la estimación de algún parámetro, sea optimizado a través de la "Teoría de Decisiones", planteando una función de utilidad adecuada, ya sea monetaria o no, que nos permita tener una mayor seguridad del éxito de dicho proceso.

BIBLIOGRAFIA

[1] Lindley, D.V. (1977). Principios de la Teoría de la Decisión. Vinces-Vives

[2] Swokowski, Earl W. (1982) .Cálculo con Geometría Analítica. Grupo Ed. Iberoamericana

[3] DeGroot, Morris H. (1970). Optimal Statistical Decisions. McGraw Hill Book Co.

[4] Meyer, Paul L. (1973). Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas. Fondo Educativo Interamericano

[5] Guerrero, Víctor M. (1983). Análisis Estadístico de Series de Tiempo Económicas, pp. 1-48

[6] Kreyszig, Erwin. (1979). Advanced Engineering Mathematics. J. Wiley & Sons, pp. 784-790

[6] Hammond, John S. Decisiones Mejores Utilizando la Teoría de la Preferencia. Biblioteca Harvard de Administración de Empresas No. 84

[7] Kuo, Shan S. (1972). Computer Applications of Numerical Methods. Addison Wesley

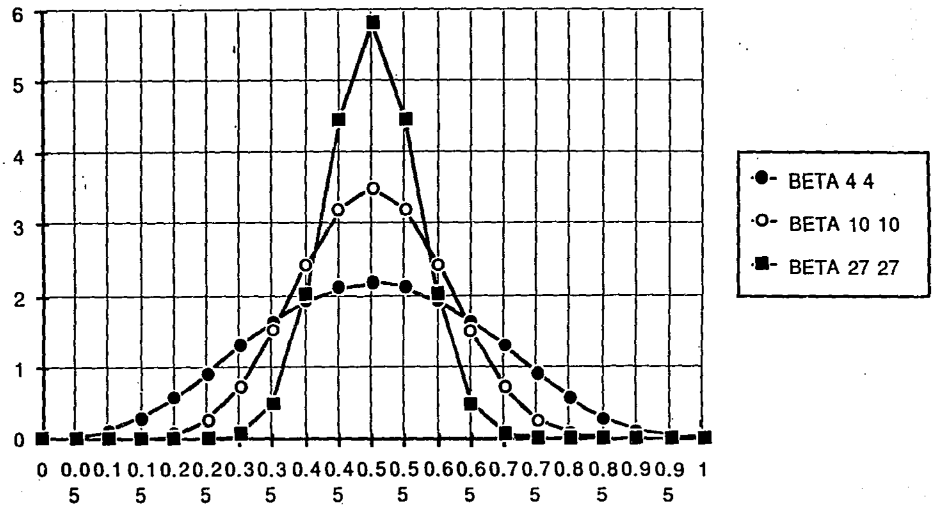
[8] Silvey, S.D. (1975). Statistical Inference. Chapman and Hall

APENDICES

A continuación anexamos los programas "BAIRTOW" y "PUNTOMEDIO", para encontrar raíces de polinomios, elaborados en lenguaje A.P.L., así como las "corridas" del programa "PUNTOMEDIO" que se utilizaron en el caso del problema con la función "Beta" como distribución "a-priori" de la demanda.

GRAFICAS COMPARATIVAS

FUNCIONES BETA (PARAMETROS INDICADOS)



```
    ∇ PUNTOMED PARAMETROS;M;I;EP;N
[1]  ⍝PROGRAMA DE PUNTO MEDIO
[2]  ⍝PROGRAMA PARA ENCONTRAR LA RAIZ DE UNA FUNCION (EN ESTE CASO
[3]  ⍝DE LA FUNCION INCLUIDA EN EL PROGRAMA OTRASBETAS
[4]  ⍝LA VARIABLE 'EP' ES LA APROXIMACION DESEADA
[5]  ⍝DEBEN ALIMENTARSE DOS VALORES ENTRE LOS QUE SE ENCUENTRE LA RAIZ
[6]   'A= ',⍕A ⋄ 'B= ',⍕B ⋄ 'C= ',⍕C ⋄ 'AA= ',⍕AA
[7]   'ALFA = ',⍕PARAMETROS[1] ⋄ 'BETA= ',⍕PARAMETROS[2]
[8]   'DAME LOS LIMITES INICIALES IZQUIERDO Y DERECHO' ⋄ M←⎕
[9]   'I      X[I]                 F[X]'
[10]  I←2 ⋄ (3 0 ⍕1),(7 4 ⍕M[1]), 15 3 ⍕PARAMETROS TODASBETAS M[1] ⋄ EP←⎕
[11]  (3 0 ⍕2),(7 4 ⍕M[2]), 15 3 ⍕PARAMETROS TODASBETAS M[2]
[12] L1:I←I+1 ⋄ N←(+/M)÷2 ⋄ F←PARAMETROS TODASBETAS N
[13]  (3 0 ⍕I),(7 4 ⍕N), 15 3 ⍕F
[14]  →L2 SI F>0
[15]  →L3 SI F<-EP ⋄ →L4
[16] L2:→L4 SI F≤EP
[17] L3:→L5 SI(F×PARAMETROS TODASBETAS M[1])<0
[18]  M[1]←N ⋄ →L6
[19] L5:M[2]←N
[20] L6:→L1
[21] L4:'LA RAIZ ES :'
[22]  21 4 ⍕N
    ∇
```



```
    ∇ Z←PARAMETROS TODASBETAS X;α;ω
[1]  ⍝PROGRAMA PARA EL CASO BETA
[2]  ⍝PROGRAMA PARA OBTENER EL VALOR QUE TOMA LA DERIVADA DE LA FUNCION
[3]  ⍝QUE QUEREMOS MINIMIZAR EN UN PUNTO DADO (X)
[4]  ⍝LOS VALORES A B C AA SON VARIABLES GLOBALES
[5]   α←PARAMETROS[1] ⋄ ω←PARAMETROS[2]
[6]   Z←((!α-3)×(!ω-1)÷(!α+ω-3))×((X*3)×((α-2),ω) BETAO X)+3×(X*2)×((α-2),ω) FBETA X
[7]   Z←Z+((!α-2)×(!ω-1)÷25×!α+ω-2)×((X*2)×((α-1),ω) BETAO X)+2×X×((α-1),ω) FBETA X
[8]   Z←Z+(9×(!α-1)×(!ω-1)÷100×(!α+ω-1))×(X×(α,ω) BETAO X)+(α,ω) FBETA X
[9]   Z←Z+(7×(!α)×(!ω-1)÷150×(!α+ω))×((α+1),ω) BETAO X
[10]  Z←Z×B×(!α+ω-1)÷(!α-1)×(!ω-1)
[11]  →L1 SI X<C ⋄ Z←Z+AA×(α,ω) BETAO X-C
[12] L1:Z←Z+A×((!α+ω-1)÷(!α-1)×(!ω-1))×(((!α)×(!ω-1)÷(!α+ω))×-((α+1),ω) BETAO X)+(((!α-1)×(!ω-1)÷(!α+ω-1))×X×(α,ω) BETAO X)+(-(!α-1
     ×(!ω-1)÷(!α+ω-1))×1-(α,ω) FBETA X
    ∇
```

```
    ∇ Z←PARAMETROS FBETA PUNTOFIN;A;B;H;X0;N;ZZ
[1]  ⍝ FUNCION ACUMULADA BETA. ACUMULA HASTA PUNTOFIN
[2]  ⍝ CALCULA LA INTEGRAL POR MEDIO DE RECTANGULOS
[3]   N←100 ⋄ A←0 ⋄ B←PUNTOFIN
[4]   H←(B−A)÷N ⋄ X0← 1↓+\100⍴H ⋄ ZZ←0
[5]   'I←⍳99' ITERATE 'ZZ←ZZ+PARAMETROS BETA0 X0[I]'
[6]   Z←H×(0.5×PARAMETROS BETA0 A)+(0.5×PARAMETROS BETA0 B)+ZZ
    ∇
```

```
    ∇ Z←PARAMETROS BETA0 X;α;ω
[1]  ⍝ ESTA FUNCION ES LA F. DE DIST. BETA
[2]   α←PARAMETROS[1] ⋄ ω←PARAMETROS[2]
[3]   Z←((!α+ω−1)÷(!α−1)×!ω−1)×(X*α−1)×(1−X)*ω−1
    ∇
```



```
    ∇ Z←A SI B
[1]  ⍝ DA POR RESULTADO A SI B ES VERDADERO, VACIO SI NO LO ES.
[2]   Z←B/A
    ∇
```

```
∇ BAIRSTOW;A;N;P1;Q1;B;C;P;Q;M;I;CBAR;DEN;D;E;F;ΔP;ΔQ;SUM;SUM1;EP;⎕IO
 ⍝ PROGRAMA PARA RESOLVER POLINOMIOS DE GRADO 'N'
 ⍝ DE LA FORMA A[0]X*N + A[1]X*N-1 + ...... + A[N]X*0
 ⍝ (LA VARIABLE CON GRADO MAXIMO EN EL POLINOMIO DEBE TENER VALOR
 ⍝ DEL COEFICIENTE IGUAL A UNO
 ⍝ P1 Y Q1 SON LOS VALORES INICIALES
 ⍝ 'EP' ES LA APROXIMACION DESEADA
  'CUAL ES EL GRADO DEL POLINOMIO?' ⋄ N←⎕ ⋄ P1←Q1←0 ⋄ B←(N+1)⍴0 ⋄ C←N⍴0 ⋄ EP←0.001 ⋄ ⎕IO←0
  'CUALES SON LOS COEFICIENTES?' ⋄ A←⎕ ⋄ →L1 SI(N+1)=⍴A ⋄ 'NUMERO DE DATOS INCORRECTOS' ⋄ →⎕LC
 L1:→STOP SI N<1
 L2:→L3 SI N=1
  →L4 SI N≤2
  P←P1 ⋄ Q←Q1 ⋄ M←1
 L5:I←3 ⋄ B[1]←A[1]-P ⋄ B[2]←A[2]-Q+P×B[1] ⋄ ⍝ CALCULO DE LAS B'S
  B[I]←A[I]-(P×B[I-1])+Q×B[I-2] ⋄ →⎕LC SI N≥I←I+1
  I←3 ⋄ C[1]←B[1]-P ⋄ C[2]←B[2]-Q+P×C[1] ⋄ ⍝CALCULO DE LAS C'S
  C[I]←B[I]-(P×C[I-1])+Q×C[I-2] ⋄ →⎕LC SI(N-1)≥I←I+1
  CBAR←C[N-1]-B[N-1] ⋄ ⍝CALCULO DE LA C BARRA
  →L6 SI N=3
  DEN←(C[N-2]*2)-CBAR×C[N-3] ⋄ →L6+1
 L6:DEN←(C[N-2]*2)-CBAR
  →L7 SI DEN=0 ⋄ →L8
 L7:'DIVISION ENTRE CERO' ⋄ →STOP
 L3:D←-A[1] ⋄ E←0 ⋄ 12 5 ⍕N,D,E ⋄ →STOP
 L4:P←A[1] ⋄ Q←A[2]
 L9:D←-P÷2 ⋄ F←Q-P×P÷4
 L10:→L11 SI F>0 ⋄ E←(|F)*0.5
  I←D ⋄ S←E ⋄ E←0 ⋄ D←I+S ⋄ →L12
 L11:E←(|F)*0.5 ⋄ 12 5 ⍕N,D,E
  E←-E ⋄ N←N-1
 L12: 12 5 ⍕N,D,E ⋄ N←N-1
  →STOP SI N≤0 ⋄ A←B ⋄ →L2
 L8:→L13 SI N=3 ⋄ ΔP←((B[N-1]×C[N-2])-B[N]×C[N-3])÷DEN ⋄ →L13+1
 L13:ΔP←((B[N-1]×C[N-2])-B[N])÷DEN
  ΔQ←((B[N]×C[N-2])-B[N-1]×CBAR)÷DEN
  P←P+ΔP ⋄ Q←Q+ΔQ ⋄ SUM←(|ΔP)+|ΔQ
  →L15 SI M≠1
  SUM1←SUM
 L14:→L9 SI SUM≤EP
  →⎕LC+1 SI M≠25 ⋄ 'CONVERGE LENTAMENTE'
  M←M+1 ⋄ →L5
 L15:→STOP SI M<1
  →L14 SI M≠5 ⋄ →L14 SI SUM<SUM1
  'DIVERGENTE'
 STOP:'STOP'
∇
```

```
A= 140
B= 70
C= 0.3333333333
AA= 50000
ALFA = 4
BETA= 4
DAME LOS LIMITES INICIALES IZQUIERDO Y DERECHO
      .01 .99

I      X-I-              F-X-
  1 0.0100        -140.000
  2 0.9900       81679.427
  3 0.5000       19080.387
  4 0.2550         -72.131
  5 0.3775         611.904
  6 0.3162          -6.047
  7 0.3469          53.287
  8 0.3316          14.490
  9 0.3239           4.029
 10 0.3201          -1.059
 11 0.3220           1.473
 12 0.3210           0.204
LA RAIZ ES :
               0.3210
```


CORRIDA CASO "BETA"

a = 140

b = 70

c = 1/3 = 0.333

A = 50,000

ALFA = BETA = 4

```
A= 140
B= 70
C= 0.3333333333
AA= 50000
ALFA = 10
BETA= 10
DAME LOS LIMITES INICIALES IZQUIERDO Y DERECHO
      .01 .99

I      X-I-           F-X-
  1 0.0100        -140.000
  2 0.9900       70512.015
  3 0.5000        1140.987
  4 0.2550        -129.260
  5 0.3775         -15.250
  6 0.4387         137.025
  7 0.4081          44.350
  8 0.3928          12.581
  9 0.3852          -1.754
 10 0.3890           5.304
 11 0.3871           1.748
 12 0.3861          -0.009
LA RAIZ ES :
                0.3861
```


CORRIDA CASO "BETA"

a = 140

b = 70

c = 1/3 = 0.333

A = 50,000

ALFA = BETA = 10

```
A= 140
B= 70
C= 0.3333333333
AA= 50000
ALFA = 27
BETA= 27
DAME LOS LIMITES INICIALES IZQUIERDO Y DERECHO
       .01 .99

I       X-I-            F-X-
  1 0.0100          -140.000
  2 0.9900         20762.242
  3 0.5000           312.539
  4 0.2550          -139.878
  5 0.3775           -90.051
  6 0.4387            77.331
  7 0.4081           -24.509
  8 0.4234            22.337
  9 0.4158            -2.215
 10 0.4196             9.789
 11 0.4177             3.717
 12 0.4167             0.733
LA RAIZ ES :
                   0.4167
```


CORRIDA CASO "BETA"

a = 140

b = 70

c = 1/3 = 0.333

A = 50,000

ALFA = BETA = 27

A= 140
B= 70
C= 0.15
AA= 50000
ALFA = 4
BETA= 4
DAME LOS LIMITES INICIALES IZQUIERDO Y DERECHO
.01 .99

I	X-1-	F-X-
1	0.0100	-140.000
2	0.9900	18453.768
3	0.5000	82747.929
4	0.2550	5737.319
5	0.1325	-133.046
6	0.1937	399.476
7	0.1631	-110.076
8	0.1784	27.833
9	0.1708	-63.704
10	0.1746	-24.470
11	0.1765	-0.058

LA RAIZ ES :
0.1765

CORRIDA CASO "BETA"

a = 140

b = 70

c = 0.15

A = 50,000

ALFA = BETA = 4

```
A= 70
B= 140
C= 0.3333333333
AA= 50000
ALFA = 4
BETA= 4
DAME LOS LIMITES INICIALES IZQUIERDO Y DERECHO
       .01 .99
```

I	X-I-	F-X-
1	0.0100	-69.999
2	0.9900	83139.186
3	0.5000	19511.488
4	0.2550	49.932
5	0.1325	-57.713
6	0.1937	-22.448
7	0.2244	8.481
8	0.2091	-8.236
9	0.2167	-0.199

```
LA RAIZ ES :
                 0.2167
```


CORRIDA CASO "BETA"

a = 70

b = 140

c = 1/3 = 0.333

A = 50,000

ALFA = BETA = 4