UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CUATRO TIPOS DE CONVERGENCIA PARA SUCESIONES DE FUNCIONES

TESIS PROFESIONAL

Que para obtener el Título de:

MATEMATICO

Presenta:

DANIEL VILLEGAS ESTRADA

México, D. F. 1990

I N T R O D U C C I O N

El presente trabajo está basado en una serie de artículos publicados por el Dr. Gerald Beer. El objetivo ha sido presentar el contenido de tales artículos en forma monográfica, es decir con mayor detalle y simplicidad que lo que normalmente es posible en un artículo de investigación de la naturaleza misma de esa vía de comunicación de resultados. Con esto se pretende que los conceptos aquí expuestos sean de fácil comprensión inclusive para un estudiante de matemáticas del nivel de licenciatura, quien podría encontrar interesantes y aún novedosos dos de los tipos de convergencia expuestos aquí, ya que los mismos no se incluyen en los libros de análisis tradicionalmente utilizados en los cursos de licenciatura.

El trabajo está dividido en dos partes que a su vez guardan relación entre si.

En la primera parte la cual abarca los dos primeros capítulos, se tratan algunos tipos especiales de convergencia. En el capítulo I se introduce el concepto de convergencia topológica de una sucesión de subconjuntos de un espacio métrico (X,d) y se relaciona tal tipo de convergencia con la convergencia en $(\mathcal{F}(X), \delta_d)$ (el espacio de los subconjuntos cerrados y no vacios del espacio métrico (X,d) con la métrica de Hausdorff δ_d). El objetivo de éste primer capítulo consiste en establecer condiciones bajo las cuales ambos tipos de convergencia coinciden. Tales condiciones son de vital importancia para el capítulo II, en el cual se manejan a las gráficas de las funciones continuas de un espacio métrico X en un espacio métrico Y como subconjuntos cerrados del espacio producto $X \times Y$. De esta manera, en éste capítulo se relacionan la convergencia puntual y la convergencia uniforme de sucesiones (f_n) en $C(X,Y)$ con la convergencia topológica y la convergencia en Hausdorff de las gráficas de los términos f_n de la sucesión, y, se establecen condiciones, en relación a los espacios X, Y y a la sucesión misma, bajo las cuales los diferentes tipos de convergencia coinciden.

La segunda parte la constituyen los capítulos III y IV. En el capítulo III se utilizan los resultados presentados en los dos anteriores para dar versiones o pruebas distintas de las clásicas de los teoremas de Dini, Ascoli y Stone referentes al espacio $C(X,Y)$. En el capítulo IV se maneja el espacio de funciones superiormente semicontinuas dotado con una métrica adecuada. Para definir tal métrica se utiliza el concepto de la hipográfica de una función. En el capítulo tambien se incluyen versiones de los teoremas de Dini y Ascoli para este espacio.

La dinámica que se ha tratado de seguir a lo largo del trabajo es presentar una proposición y dar contraejemplos para ver que las hipótesis pedidas son esenciales para la conclusión de la proposición, el objetivo de esto ha sido el reafirmar las hipótesis de la proposición para ser recordadas con facilidad en resultados posteriores. Así mismo en el capítulo II se incluyen una serie de cuadros donde se relacionan los distintos tipos de convergencia, con esto se pretende sintetizar los resultados presentados en tal capítulo, de tal forma que constituya una práctica referencia.

Para hacer autocentrado el trabajo se ha decidido incluir un apéndice separado en varias secciones, en el cual se recuerdan algunas caracterizaciones de los espacios compactos y de los subconjuntos densos en ninguna parte. También se incluyen las demostraciones clásicas de los teoremas de Dini y Ascoli. Asi mismo se justifican ciertos resultados que fueron utilizados en las demostraciones de algunas proposiciones que aparecen en el cuerpo principal del trabajo.

Por otro lado, con objeto de facilitar la lectura del trabajo se incluye al inicio del mismo una lista de los símbolos que serán empleados.

Finalmente, deseo aprovechar este espacio para externar mi estimación y gratitud al M. en C. Angel Manuel Carrillo Hoyo por sus valiosas aportaciones e inagotable paciencia en la revisión de los manuscritos de este trabajo.

CONTENIDO

LISTA DE SIMBOLOS

$B_\varepsilon(x_o)$	$\{x \in X: d(x,x_o) < \varepsilon\}$	
$B_\varepsilon[x_o]$	$\{x \in X: d(x,x_o) \leq \varepsilon\}$	
$\mathrm{Linf}(C_n)$	Límite inferior de la sucesión $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$	(pag. 1)
$\mathrm{Lsup}(C_n)$	Límite superior de la sucesión $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$	(pag. 1)
$\mathrm{int}(A)$	Interior del conjunto A	
$\overline{A}$	Cerradura del conjunto A	
$\mathcal{P}_o(X)$	Familia de subconjuntos no vacios de X	(pag. 7)
$\mathcal{F}(X)$	Familia de subconjuntos cerrados y no vacios de X	(pag. 8)
$B_\varepsilon[C]$	$\bigcup_{x \in C} B_\varepsilon[x]$	(pag. 7)
$\delta_d(A,B)$	Distancia en la métrica de Hausdorff entre los conjuntos A y B	(pag. 7)
$d_A(B)$	$\mathrm{Sup}\,\{d(x,A): x \in B\}$	(pag. 10)
$\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2))$	$\mathrm{Max}\,\{d_x(x_1,y_1),\ d_y(y_1,y_2)\}$	(pag. 20)
$F(X,Y)$	Conjunto de funciones de X en Y	(pag. 47)
$C(X,Y)$	Conjunto de funciones continuas de X en Y	(pag. 16)
$C(X)$	Conjunto de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$	(pag. 100)
$S(X)$	Conjunto de funciones superiormente semi-continuas	(pag. 100)
$U(X)$	Conjunto de funciones superiormente semi-continuas y acotadas	(pag. 100)
$(\ell^2, \Vert\ \Vert_2)$	Espacio de sucesiones cuadrado sumables	(pag. 35)
χ_n	Función característica	
$\sup(A)$	Supremo del conjunto A	
$\inf(A)$	Infimo del conjunto A	
$\mathrm{diam}(A)$	Diámetro del conjunto A	

epif	Epigráfica de la función f	(pag. 71)
hipof	Hipográfica de la función f	(pag. 101)
$\mu(A)$	Medida de Lebesgue del conjunto A	
$\overline{\lim}_{x\to x_0} f(x)$	Límite superior de la función f en x_0	(pag. 97)
$\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x)$	Límite inferior de la función f en x_0	(pag. 97)
$d_1(f,g)$	Distancia entre las funciones f y g	(pag. 104)
$d_2(f,g)$	Distancia entre las funciones f y g	(pag. 100)
$d_3(f,g)$	Distancia entre las funciones f y g	(pag. 103)
f_λ^+	Función λ-paralela y superior de f	(pag. 104)
f_λ^-	Función λ-paralela e inferior de f	(pag. 104)

C A P I T U L O   I

En este primer capítulo hablaremos de un tipo especial de convergencia de sucesiones de subconjuntos de un espacio métrico X, la llamada convergencia topológica. Así mismo haremos uso de la métrica de Hausdorff para hablar del espacio formado por los subconjuntos cerrados no vacíos de un espacio métrico X, y relacionar así la convergencia de elementos de este nuevo espacio con la convergencia topológica de sucesiones de subconjuntos del espacio X. El objetivo de esto es establecer algunas relaciones importantes entre estos tipos de convergencia, mismas que serán de utilidad en capítulos posteriores.

CONVERGENCIA TOPOLOGICA

Sean (X,d) un espacio métrico y $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X.

Definimos:

$\mathrm{Linf}(C_n) = \{x\in X;$ para cada $\varepsilon>0$, $B_\varepsilon(x)\cap C_n \neq \emptyset$ excepto para un número finito de índices $n\}$.

$\mathrm{Lsup}(C_n) = \{x\in X;$ para cada $\varepsilon>0$, $B_\varepsilon(x)\cap C_n \neq \emptyset$ para una infinidad de índices $n\}$.

$\mathrm{Linf}(C_n)$ se llama el límite inferior de la sucesión y $\mathrm{Lsup}(C_n)$ se llama el límite superior de la sucesión.

En realidad en las definiciones anteriores podemos substituir las "bolas abiertas" de radio ε con centro en x $(B_\varepsilon(x))$ por vecindades de x. de hecho se trabajará con vecindades y no con "bolas abiertas" cuando así sea conveniente.

Una primera observación que podemos hacer es que tanto el límite inferior como el límite superior preservan el orden, es decir, si $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones de subconjuntos de X tales que $C_n\subset D_n$ para cada $n\in\mathbb{N}$, entonces $\mathrm{Linf}(C_n)\subset \mathrm{Linf}(D_n)$ y $\mathrm{Lsup}(C_n)\subset \mathrm{Lsup}(D_n)$. La justificación de este hecho se sigue de que para cada $\varepsilon>0$ y $n\in\mathbb{N}$ se tiene $B_\varepsilon(x)\cap C_n\subset B_\varepsilon(x)\cap D_n$. Como un caso particular de la observación anterior tenemos que:

$$\mathrm{Linf}(\mathrm{int}(C_n))\subset \mathrm{Linf}(C_n)$$

y

$$\mathrm{Lsup}(\mathrm{int}(C_n))\subset \mathrm{Lsup}(C_n)$$

(donde $\mathrm{int}(C_n)$ denota al interior del conjunto C_n)

Podríamos preguntarnos lo siguiente: ¿En general se cumple la contención en el sentido inverso?, la respuesta es, no, como ejemplo de esto podemos considerar $X = \mathbb{R}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ definir:

$$C_n = (-1/n, 1+1/n) \cup \{2\}$$

Tenemos entonces que

$$\operatorname{Linf}(C_n) = \operatorname{Lsup}(C_n) = [0,1] \cup \{2\}$$

Sin embargo

$$\operatorname{Linf}(\operatorname{int}(C_n)) = \operatorname{Lsup}(\operatorname{int}(C_n)) = [0,1]$$

De acuerdo a este ejemplo no podemos asegurar que el límite inferior (superior) de una sucesión de subconjuntos coincida con el límite inferior (superior) de la sucesión de sus interiores, sin embargo, este no es el caso si en lugar de tomar en cuenta el interior de los conjuntos C_n consideramos su cerradura, es decir:

PROPOSICION I.1

Sean (X, d_X) un espacio métrico y $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X. Entonces $\operatorname{Linf}(C_n) = \operatorname{Linf}(\overline{C_n})$ y $\operatorname{Lsup}(C_n) = \operatorname{Lsup}(\overline{C_n})$ (donde $\overline{C_n}$ denota la cerradura de C_n).

DEMOSTRACION

Puesto que $C_n \subset \overline{C_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\operatorname{Linf}(C_n) \subset \operatorname{Linf}(\overline{C_n})$. Por otra parte, sean $x \in \operatorname{Linf}(\overline{C_n})$ y $\varepsilon > 0$ (si $\operatorname{Linf}(\overline{C_n}) = \emptyset$ entonces la afirmación es inmediata), se probará que $B_\varepsilon(x) \cap C_n \neq \emptyset$ excepto para un número finito de índices n, es decir, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B_\varepsilon(x) \cap C_n \neq \emptyset$ si $n \geq N$. Como $\varepsilon/2 > 0$ y $x \in \operatorname{Linf}(\overline{C_n})$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\varepsilon/2}(x) \cap \overline{C_n} \neq \emptyset$ si $n \geq N$, fijemos $n \geq N$ y tomemos $x_n \in B_{\varepsilon/2}(x) \cap \overline{C_n}$, entonces podemos encontrar $c_n \in C_n$ tal que $d(x_n, c_n) < \varepsilon/2$, por lo que $d(x, c_n) < \varepsilon$, así $B_\varepsilon(x) \cap C_n \neq \emptyset$ si $n \geq N$, por consiguiente:

$$\operatorname{Linf}(\overline{C_n}) \subset \operatorname{Linf}(C_n)$$

Se sigue que

$$\operatorname{Linf}(C_n) = \operatorname{Linf}(\overline{C_n})$$

Análogamente se prueba que: $\operatorname{Lsup}(C_n) = \operatorname{Lsup}(\overline{C_n})$ ■

Un resultado importante que será de utilidad en lo sucesivo es el siguiente:

PROPOSICION I.2

Sean (X,d) un espacio métrico y $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X, entonces tanto $\mathrm{Linf}(C_n)$ como $\mathrm{Lsup}(C_n)$ son subconjuntos cerrados de X.

DEMOSTRACION

Se probará que $X - \mathrm{Linf}(C_n)$ y $X - \mathrm{Lsup}(C_n)$ son abiertos en X.

Si $X - \mathrm{Linf}(C_n) = \emptyset$ no hay nada que probar, si no, sea $x \in X - \mathrm{Linf}(C_n)$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \cap C_n = \emptyset$ para una infinidad de índices n, se afirma que $B_\varepsilon(x) \subset X - \mathrm{Linf}(C_n)$. En efecto, pues si $y \in B_\varepsilon(x)$ entonces por ser $B_\varepsilon(x)$ abierto podemos encontrar $\varepsilon' > 0$ tal que $B_{\varepsilon'}(y) \subset B_\varepsilon(x)$, de donde se tiene que $B_{\varepsilon'}(y) \cap C_n = \emptyset$ para una infinidad de índices n, así $y \in X - \mathrm{Linf}(C_n)$, de donde $B_\varepsilon(x) \subset X - \mathrm{Linf}(C_n)$. Concluimos que $X - \mathrm{Linf}(C_n)$ es abierto en X.

Por otra parte, si $X - \mathrm{Lsup}(C_n) = \emptyset$, entonces $X - \mathrm{Lsup}(C_n)$ es abierto, si este no es el caso, sea $x \in X - \mathrm{Lsup}(C_n)$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_\varepsilon(x) \cap C_n \neq \emptyset$$

sólo para un número finito de índices n. Se afirma que $B_\varepsilon(x) \subset X - \mathrm{Lsup}(C_n)$. En efecto, pues si $y \in B_\varepsilon(x)$, podemos encontrar $\varepsilon' > 0$ tal que $B_{\varepsilon'}(y) \subset B_\varepsilon(x)$, de donde $B_{\varepsilon'}(y) \cap C_n \neq \emptyset$ sólo para un número finito de índices n, por consiguiente $y \in X - \mathrm{Lsup}(C_n)$, por lo cual $B_\varepsilon(x) \subset X - \mathrm{Lsup}(C_n)$, es decir, el conjunto $X - \mathrm{Lsup}(C_n)$ es abierto en X. ∎

Existe una forma mediante la cual podemos caracterizar a los elementos del límite inferior de una sucesión de conjuntos, intuitivamente si un punto pertenece al límite inferior, entonces a partir de cierto momento este punto debe estar arbitrariamente cercano a los términos de la sucesión, formalizando esto tenemos:

PROPOSICION I.3

Sean (X,d) un espacio métrico y $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos no vacios de X. Entonces, $y \in \mathrm{Linf}(C_n)$ si y sólo si existe una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a y con la propiedad de que $y_n \in C_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACION

Supongamos que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Es una sucesión que satisface las hipótesis. Sea $\varepsilon>0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \in B_\varepsilon(y)$ si $n \geq N$, así $B_\varepsilon(y) \cap C_n \neq \emptyset$ si $n \geq N$, por lo cual $y \in \mathrm{Linf}(C_n)$.

Inversamente. Sea $y \in \mathrm{Linf}(C_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$\alpha_n = d(y,C_n) = \inf \{ d(y,c) : c \in C_n \}$$

Se afirma que α_n converge a cero. En efecto, si $\varepsilon > 0$ y consideramos $B_{\varepsilon/2}(y)$, como $y \in \mathrm{Linf}(C_n)$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\varepsilon/2}(y) \cap C_n \neq \emptyset$ si $n \geq N$, así para cada $n \geq N$ podemos encontrar $x_n \in B_{\varepsilon/2}(y) \cap C_n$, de donde $d(x_n,y) < \varepsilon/2$, se sigue que $\alpha_n \leq d(x_n,y) < \varepsilon/2$ si $n \geq N$, por consiguiente α_n converge a cero. Por otra parte para cada $n \in \mathbb{N}$ $\alpha_n < \alpha_n + 1/n$, de donde existe $y_n \in C_n$ tal que $d(y,y_n) < \alpha_n + 1/n$. Consideremos la sucesión $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tenemos que $y_n \in C_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, es claro que esta sucesión converge a y, ya que por construcción $d(y,y_n) < \alpha_n + 1/n$ y $\alpha_n + 1/n$ converge a cero. ■

Tenemos un resultado semejante al anterior para el caso en que consideremos el límite superior de una sucesión de conjuntos, el cual dice lo siguiente.

PROPOSICION I.4

Sean (X,d) un espacio métrico y $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos no-vacios de X. Entonces $y \in \mathrm{Lsup}(C_n)$ si y sólo si existe una sucesión estrictamente creciente $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}$ y puntos $y_k \in C_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$ tal que $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge a y.

DEMOSTRACION

Sea $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ como en el enunciado, tomemos $\varepsilon > 0$ arbitrario, entonces existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $y_k \in B_\varepsilon(y)$ si $k \geq K$, pero como $y_k \in C_{n_k}$, entonces $B_\varepsilon(y) \cap C_{n_k} \neq \emptyset$ si $k \geq K$, y como $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es estrictamente creciente se tiene que $B_\varepsilon(y) \cap C_n \neq \emptyset$ para una infinidad de índices n, de donde $y \in \mathrm{Lsup}(C_n)$.

Inversamente. Supongamos que $y \in \mathrm{Lsup}(C_n)$, entonces para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene $B_{1/m}(y) \cap C_n \neq \emptyset$ para una infinidad de índices n. Sea $y_1 \in B_1(y) \cap C_{n_1}$, donde C_{n_1} es el primer término de la sucesión $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que intersecta a $B_1(y)$, sea $y_2 \in B_{1/2}(y) \cap C_{n_2}$, donde $n_2 > n_1$ y $B_{1/2}(y) \cap C_{n_2} \neq \emptyset$ (n_2 existe, pues de no ser así $B_{1/2}(y) \cap C_n \neq \emptyset$ sólo para un número finito de índices n), podemos continuar este proceso para cada $k \in \mathbb{N}$, teniendo finalmente una sucesión $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ con $y_k \in C_{n_k}$ y $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ estrictamente creciente, y, claramente $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge a y, puesto que $d(y,y_k) < 1/k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. ■

Hasta este momento hemos hecho algunas observaciones acerca del límite inferior y el límite superior de una sucesión de conjuntos, sin embargo, no hemos establecido ninguna relación entre estos conceptos. Lo primero que podemos afirmar es que si $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de subconjuntos de un espacio métrico X se cumple que $\mathrm{Linf}(C_n) \subset \mathrm{Lsup}(C_n)$, la inclusión en el otro sentido en general no es cierta, de hecho tenemos la siguiente:

DEFINICION I.5

Sean (X,d) un espacio métrico, C un subconjunto de X y $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X, si sucede que $\mathrm{Linf}(C_n) = \mathrm{Lsup}(C_n) = C$ diremos que $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge topológicamente a C.

OBSERVACION

Debido a que en general $\mathrm{Linf}(C_n) \subset \mathrm{Lsup}(C_n)$, para demostrar que $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge topológicamente a un subconjunto C de X basta probar que $C \subset \mathrm{Linf}(C_n)$ y $\mathrm{Lsup}(C_n) \subset C$.

EJEMPLOS I.6

a) Sean x, y dos puntos distintos de un espacio métrico X, consideremos la sucesión $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por:

$$\begin{cases} \{x\} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

$z \in X - \{x,y\}$, definamos $\varepsilon = \min\{d(x,z), d(y,z)\}$, entonces $\varepsilon > 0$, y, para toda $n \in \mathbb{N}$, $B_\varepsilon(z) \cap C_n = \emptyset$, se sigue que $z \notin \mathrm{Lsup}(C_n)$, de donde $\mathrm{Lsup}(C_n) = \{x,y\}$. Concluimos entonces que $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge topológicamente.

Puede suceder que una sucesión de conjuntos no vacios converja topológicamente al conjunto vacio, como ejemplo de esto consideremos:

b) Sea $X = \mathbb{R}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $C_n = \{n\}$, se cumple que $\mathrm{Linf}(C_n) = \mathrm{Lsup}(C_n) = \emptyset$, pues si $x \in \mathbb{R}$, $B_{1/2}(x) \cap C_n \neq \emptyset$ a lo más para un índice n, de donde $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge topológicamente a $\emptyset$.

c) Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos, en un espacio métrico X, y sea $x \in X$. Consideremos la sucesión de conjuntos $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $C_n = \{x_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge topológicamente a $\{x\}$ si y sólo si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Para convencernos de esto supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y tomemos $\varepsilon > 0$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $x_n \in B_\varepsilon(x)$, de aquí se sigue que $\{x\} \subset \mathrm{Linf}(C_n)$. Por otro lado, si $y \neq x$ se tiene que $d(x,y) = \varepsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ con la propiedad de que $x_n \in B_{\varepsilon/2}(x)$ si $n \geq N$, de donde $x_n \notin B_{\varepsilon/2}(y)$ si $n \geq N$, y por lo tanto $B_{\varepsilon/2}(y) \cap C_n = \emptyset$ si $n \geq N$, se sigue que $y \notin \mathrm{Lsup}(C_n)$, por lo cual $\mathrm{Lsup}(C_n) \subset \{x\}$, así $\mathrm{Linf}(C_n) = \mathrm{Lsup}(C_n) = \{x\}$.

El inverso se sigue facilmente.

Tomando en cuenta el ejemplo anterior, podemos concluir que la convergencia de una sucesión de puntos de un espacio métrico se puede interpretar como un caso particular de la convergencia topológica de conjuntos.

Como un último comentario de esta sección mencionamos que si se tienen dos métricas topológicamente equivalentes para un conjunto X, entonces, la convergencia topológica de sucesiones de subconjuntos de X es independiente de la métrica que consideremos.

MÉTRICA DE HAUSDORFF

En la sección anterior se consideraron sucesiones de subconjuntos de un espacio métrico X, en este sentido sería conveniente considerar la familia de subconjuntos no vacios de X y definir en ella una métrica adecuada para poder establecer bajo qué condiciones para X la convergencia de elementos de este nuevo espacio métrico coincide con la convergencia topológica, de hecho la métrica que se definirá en esta familia es la llamada métrica de Hausdorff.

NOTACION

Sea (X,d) un espacio métrico, en lo sucesivo denotaremos por $\mathcal{P}_o(X)$ a la familia de subconjuntos no vacios de X, es decir, $\mathcal{P}_o(X) = \{ A \subset X : A \neq \emptyset \}$. - También si $C \in \mathcal{P}_o(X)$ y $\varepsilon > 0$ denotaremos por $B_\varepsilon[C]$ a la unión de todas las "bolas cerradas" de radio ε y centro en puntos de C, en símbolos:

$$B_\varepsilon[C] = \bigcup_{x \in C} B_\varepsilon[x]$$

DEFINICION I.7

Si (X,d) es un espacio métrico y $A, K \in \mathcal{P}_o(X)$, definimos:

$$\delta_d(A,K) = \inf \{ \varepsilon > 0 : A \subset B_\varepsilon[K],\ K \subset B_\varepsilon[A] \}, \qquad \text{y}$$

$$\delta_d(A,K) = \infty \qquad \text{si } \{ \varepsilon > 0 : A \subset B_\varepsilon[K],\quad K \subset B_\varepsilon[A] \} = \emptyset$$

PROPOSICION I.8

Sea (X,d) un espacio métrico. La función $\delta_d : \mathcal{P}_o(X) \times \mathcal{P}_o(X) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ define una pseudométrica en $\mathcal{P}_o(X)$.

DEMOSTRACION

Se probará que se cumplen las siguientes condiciones:

i) $\delta_d(A,K) \geq 0$ para todos $A, K \in \mathcal{P}_o(X)$

ii) Si $A = K$ entonces $\delta_d(A,K) = 0$

iii) $\delta_d(A,K) = \delta_d(K,A)$ para todos $A,K \in \mathcal{P}_o(X)$

iv) $\delta_d(A,K) \leq \delta_d(A,C) + \delta_d(C,K)$ para todos $A, C, K \in \mathcal{P}_o(X)$

Claramente las tres primeras condiciones se tienen, para justificar la desigualdad del triángulo (iv), sean $\varepsilon_1 = \delta_d(A,C)$ y $\varepsilon_2 = \delta_d(C,K)$, si sucede que $\varepsilon_1 = \infty$ o $\varepsilon_2 = \infty$ la desigualdad se sigue inmediatamente, así podemos suponer que $\varepsilon_1 < \infty$ y $\varepsilon_2 < \infty$, sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario y consideremos $\rho = \varepsilon_1 + 1/n$ y $\gamma = \varepsilon_2 + 1/n$, así se cumplen las siguientes contenciones:

$$C \subset B_\beta[A] \;\text{ y }\; A \subset B_\beta[C]$$
$$C \subset B_\gamma[K] \;\text{ y }\; K \subset B_\gamma[C]$$

Tomemos $x \in K$ arbitrario, existe $c \in C$ tal que $d(x,c) \leq \gamma$, pero como $C \subset B_\beta[A]$ entonces existe $a \in A$ tal que $d(a,c) \leq \beta$, de aquí:

$$d(x,a) \leq \gamma + \beta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2/n$$

así $x \in B_{\varepsilon_1+\varepsilon_2+2/n}[A]$ y se sigue que $K \subset B_{\varepsilon_1+\varepsilon_2+2/n}[A]$.

Análogamente se prueba que $A \subset B_{\varepsilon_1+\varepsilon_2+2/n}[K]$, por consiguiente:

$$\delta_d(A,K) \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2/n$$

pero esto es válido para todo $n \in \mathbb{N}$, así $\delta_d(A,K) \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. ■

En realidad δ_d no define una métrica en $\mathcal{P}_0(X)$, puesto que si tomamos $X = \mathbb{R}$, $A = (0,1)$ y $K = [0,1]$, entonces se cumple que $\delta_d(A,K) = 0$ y sin embargo, $A \neq K$.

De acuerdo al ejemplo anterior, podemos pensar que el hecho de que δ_d no defina una métrica en $\mathcal{P}_0(X)$ se debe a que el conjunto $\mathcal{P}_0(X)$ es muy "grande", de hecho podemos conseguir que δ_d sea una métrica si la definimos únicamente sobre aquellos elementos de $\mathcal{P}_0(X)$ que son subconjuntos cerrados de X. Denotemos a este conjunto por $\mathcal{F}(X)$, es decir,

$$\mathcal{F}(X) = \{ A \subset X : A \text{ es cerrado en } X \text{ y } A \neq \emptyset \}.$$

PROPOSICION I.9

Sea (X,d) un espacio métrico, la restricción de δ_d a $\mathcal{F}(X)$ define una métrica sobre $\mathcal{F}(X)$. A dicha restricción también la denotaremos por δ_d.

DEMOSTRACION

De acuerdo a la proposición I.8 sólo hace falta probar que si $C, K \in \mathcal{F}(X)$ son tales que $\delta_d(C,K) = 0$ entonces $C = K$.

Para este fin sea $x \in C$ arbitrario y supongamos que $x \notin K$, como K es cerrado existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon[x] \cap K = \emptyset$, pero entonces $d(x,k) > \varepsilon$ para toda $k \in K$, esto significa que $x \notin B_\varepsilon[K]$ y de aquí que $C \not\subset B_\varepsilon[K]$, así $\delta_d(C,K) \geq \varepsilon > 0$, lo que es una contradicción, de donde se debe tener que $x \in K$ y por consiguiente $C \subset K$. Análogamente se prueba que $K \subset C$, y así $C = K$.

■

DEFINICION I.10

Sea (X,d) un espacio métrico. La métrica $\delta_d : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ se llama la métrica de Hausdorff.

Podríamos decir algo más acerca de esta métrica, ya hemos visto que δ_d no define una métrica en $\mathcal{P}_o(X)$, sin embargo sí lo hace sobre $\mathcal{F}(X)$, ahora bien, podemos interpretar a $\mathcal{F}(X)$ como el espacio cociente $\mathcal{P}_o(X)/\sim$ para una adecuada relación de equivalencia en $\mathcal{P}_o(X)$, de hecho esta relación de equivalencia se define como:

DEFINICION I.11

Sean (X,d) un espacio métrico y $A, B \in \mathcal{P}_o(X)$, decimos que $A \sim B$ si y sólo si $\overline{A} = \overline{B}$.

Es claro que $\sim$ define una relación de equivalencia, pues:

i) $\sim$ es reflexiva ($\overline{A} = \overline{A}$)

ii) $\sim$ es simétrica ($\overline{A} = \overline{B}$ implica $\overline{B} = \overline{A}$)

ii) $\sim$ es transitiva ($\overline{A} = \overline{B}$ y $\overline{B} = \overline{C}$ implican $\overline{A} = \overline{C}$)

Definimos $\tilde{\delta}_d(\tilde{A},\tilde{B}) = \delta_d(A,B)$, donde $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ son las clases de equivalencia de A y B respectivamente y $A, B \in \mathcal{P}_o(X)$.

Afirmamos que $\tilde{\delta}_d$ define una métrica en el espacio cociente $\mathcal{P}_o(X)/\sim$, para ello debemos convencernos de que $\tilde{\delta}_d$ esté bien definida, este hecho se asegura en la siguiente proposición:

PROPOSICION I.12

Sea (X,d) un espacio métrico, $\tilde{\delta}_d$ está bien definida en el espacio $\mathcal{P}_o(X)/\sim$.

DEMOSTRACION

Tomemos $C, K \in \mathcal{P}_o(X)$ arbitrarios, deseamos justificar que $\delta_d(C,K) = \delta_d(\overline{C}_o,\overline{K}_o)$, si $C \in \tilde{C}_o$ y $K \in \tilde{K}_o$. Veamos primero que $\delta_d(C,K) = \delta_d(C,\overline{K})$. Se pueden presentar las siguientes situaciones:

a) $\delta_d(C,K) = \infty$, si sucediera que $\delta_d(C,\overline{K}) < \infty$, entonces debe existir $\varepsilon > 0$ para el cual se cumple $C \subset B_\varepsilon[\overline{K}]$ y $\overline{K} \subset B_\varepsilon[C]$, de la última contención podemos afirmar que $K \subset B_{2\varepsilon}[C]$, además $C \subset B_{2\varepsilon}[K]$, puesto que si $c \in C$ entonces existe $k \in \overline{K}$ tal que $d(k,c) \leq \varepsilon$, pero entonces podemos encontrar $k' \in K$ tal que $d(k,k') \leq \varepsilon$ y así $d(c,k') \leq 2\varepsilon$, de donde $c \in B_{2\varepsilon}[K]$, como c fue arbitrario, concluimos que $C \subset B_{2\varepsilon}[K]$, pero el hecho de que $K \subset B_{2\varepsilon}[C]$ y $C \subset B_{2\varepsilon}[K]$ significa que $\delta_d(C,K) \leq 2\varepsilon$, lo cual es una contradicción.

b) Consideremos ahora el caso en que $\delta_d(C,K) < \infty$, sean:

$$A = \{ \varepsilon > 0 : C \subset B_\varepsilon[K],\ K \subset B_\varepsilon[C] \} \quad y \quad B = \{ \varepsilon > 0 : C \subset B_\varepsilon[\overline{K}],\ \overline{K} \subset B_\varepsilon[C] \}$$

Tomemos $\varepsilon \in A$ arbitrario y $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $C \subset B_\varepsilon[K] \subset B_\varepsilon[\overline{K}] \subset B_{\varepsilon+1/n}[\overline{K}]$. Por otra parte $\overline{K} \subset B_{\varepsilon+1/n}[C]$, ya que si $k \in \overline{K}$ entonces existe $k' \in K$ tal que $d(k,k') < 1/n$. Además como $K \subset B_\varepsilon[C]$ existe $c \in C$ tal que $d(c,k') \leq \varepsilon$, de donde $d(k,c) \leq \varepsilon + 1/n$, y de aquí $k \in B_{\varepsilon+1/n}[C]$. Tomando esto en cuenta se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$ $\varepsilon + 1/n \in B$, así $\delta_d(C,\overline{K}) \leq \varepsilon$ para todo $\varepsilon \in A$, de donde $\delta_d(C,\overline{K}) \leq \delta_d(C,K)$.

Tomemos ahora $\varepsilon \in B$, afirmamos que $\varepsilon + 1/n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, tenemos que $\overline{K} \subset B_\varepsilon[C]$, pero $K \subset \overline{K} \subset B_\varepsilon[C] \subset B_{\varepsilon+1/n}[C]$. Además si $c \in C$ del hecho de que $C \subset B_\varepsilon[\overline{K}]$ podemos encontrar $k \in \overline{K}$ tal que $d(c,k) \leq \varepsilon$, pero existe $k' \in K$ para el cual $d(k,k') < 1/n$, así $d(c,k') \leq \varepsilon + 1/n$, por consiguiente $C \subset B_{\varepsilon+1/n}[K]$. De acuerdo a nuestra afirmación concluimos que $\delta_d(C,K) \leq \varepsilon$ para todo $\varepsilon \in B$, y de aquí que $\delta_d(C,K) \leq \delta_d(C,\overline{K})$, pero entonces:

$$\delta_d(C,\overline{K}) \leq \delta_d(C,K) \qquad y \qquad \delta_d(C,K) \leq \delta_d(C,\overline{K})$$

De donde
$$\delta_d(C,K) = \delta_d(C,\overline{K})$$

Análogamente se puede probar que: $\delta_d(C,K) = \delta_d(\overline{C},K)$. Por consiguiente tenemos que: $\delta_d(C,K) = \delta_d(C,\overline{K}) = \delta_d(\overline{C},\overline{K}) = \delta_d(\overline{C}_o,\overline{K}_o)$, y así $\widetilde{\delta}_d$ está bien definida en $\mathcal{P}_o(X)/\sim$. Escribiremos en lo sucesivo δ_d en lugar de $\widetilde{\delta}_d$.

■

Una forma alternativa de definir la métrica de Hausdorff en $\mathcal{F}(X)$ es:
Si $A, B \in \mathcal{F}(X)$ entonces:

$$\delta_d(A,B) = \max\{ d_A(B),\ d_B(A) \}, \qquad y$$

$$\delta_d(A,B) = \infty \quad si\ d_A(B) = \infty \quad o \quad d_B(A) = \infty$$

donde $d_A(B) = \sup\{ d(x,A) : x \in B \}$.

La demostración de que ambas definiciones definen la misma métrica se darán en el apéndice E. En lo sucesivo cuando trabajemos con la métrica de Hausdorff utilizaremos la definición que creamos sea más conveniente según sea el caso.

Teniendo en cuenta al conjunto $\mathcal{F}(X)$ podemos preguntarnos por la relación que existe entre la convergencia de sucesiones en el espacio $(\mathcal{F}(X), \delta_d)$ y la convergencia topológica de conjuntos pertenecientes a $\mathcal{F}(X)$, en este sentido, un primer resultado nos dice que la convergencia según la métrica δ_d implica convergencia topológica.

PROPOSICION I.13

Sean (X,d) un espacio métrico arbitrario y $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{F}(X)$ tal que $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δ_d-converge a $C \in \mathcal{F}(X)$. Entonces $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge topológicamente a C.

DEMOSTRACION

Debemos probar que $C \subset \mathrm{Linf}(C_n)$ y $\mathrm{Lsup}(C_n) \subset C$.

Sean $x \in C$ y $\varepsilon > 0$ arbitrarios, puesto que $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δ_d-converge a C, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\delta_d(C_n, C) < \varepsilon/2$ si $n \geq N$, es decir, $C \subset B_{\varepsilon/2}[C_n]$ y $C_n \subset B_{\varepsilon/2}[C]$ si $n \geq N$, en particular $x \in B_{\varepsilon/2}[C_n]$, así para $n \geq N$ existe $c_n \in C_n$ tal que $d(x,c_n) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$, de donde $B_\varepsilon(x) \cap C_n \neq \emptyset$ si $n \geq N$ y por consiguiente $x \in \mathrm{Linf}(C_n)$, pero como x fue arbitrario concluimos que $C \subset \mathrm{Linf}(C_n)$. Por otra parte se tiene que $\mathrm{Lsup}(C_n) \neq \emptyset$ (pues $\emptyset \neq C \subset \mathrm{Linf}(C_n) \subset \mathrm{Lsup}(C_n)$). Sea $x \in \mathrm{Lsup}(C_n)$, como C es un subconjunto cerrado de X, para ver que $x \in C$ basta probar que x es un punto de contacto de C. Con este fin sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, se tiene que $B_{\varepsilon/2}(x) \cap C_n \neq \emptyset$ para una infinidad de índices n, de donde, para una infinidad de índices n existe $c_n \in C_n$ con la propiedad que $c_n \in B_{\varepsilon/2}(x)$. Ahora, como $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δ_d-converge a C existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $C \subset B_{\varepsilon/2}[C_n]$ y $C_n \subset B_{\varepsilon/2}[C]$ si $n \geq N$. Así podemos encontrar $n_o \geq N$ y $c_{n_o} \in C_{n_o} \cap B_{\varepsilon/2}(x)$, pero como $C_{n_o} \subset B_{\varepsilon/2}[C]$, entonces $c_{n_o} \in B_{\varepsilon/2}[C]$, y así existe $c \in C$ tal que $d(c_{n_o}, c) \leq \varepsilon/2$, y de aquí que $d(x,c) < \varepsilon$, por lo cual $B_\varepsilon(x) \cap C \neq \emptyset$. Concluimos que x es un punto de contacto de C, por lo tanto $x \in C$, y así $\mathrm{Lsup}(C_n) \subset C$. ■

A continuación damos un ejemplo para ver que en general el inverso de esta proposición es falso, en otras palabras, en general convergencia topológica no implica δ_d-convergencia.

EJEMPLO I.14

Sea $X = \mathbb{R}$ y para cada $n \in \omega$ sea $C_n = [0,1] \cup \{n\}$, entonces $(C_n)_{n \in \omega}$ converge topológicamente a $[0,1]$, pues si $x \in [0,1]$ y $\varepsilon > 0$ entonces para toda $n \in \omega$ $B_\varepsilon(x) \cap C_n \neq \emptyset$ y así $x \in \mathrm{Linf}(C_n)$, por lo cual $[0,1] \subset \mathrm{Linf}(C_n)$. Por otra parte si $x \notin [0,1]$, entonces $d(x,[0,1]) = \alpha > 0$, tomando $\varepsilon = \min\{\alpha, 1/2\}$ se tiene que $B_\varepsilon(x) \cap C_n \neq \emptyset$ a lo más para un índice n, así que $x \notin \mathrm{Lsup}(C_n)$, por consiguiente $\mathrm{Lsup}(C_n) \subset [0,1]$, y de aquí concluimos la convergencia topológica de $(C_n)_{n \in \omega}$ a $[0,1]$. Sin embargo $(C_n)_{n \in \omega}$ no δ_d-converge a $[0,1]$, ya que $\delta_d(C_n,[0,1]) = n - 1$ para toda $n \in \omega$ (pues $C_n \subset B_{n-1}[[0,1]]$ y si $0 < \varepsilon < n-1$ entonces $C_n \not\subset B_\varepsilon[[0,1]]$).

Observando el ejemplo anterior podríamos pensar que tal vez la causa de que no se tenga convergencia en Hausdorff es porque el espacio X considerado no es acotado, sin embargo esto *no* es cierto, pues aún con la condición de que X sea acotado no podemos asegurar que convergencia topológica implique convergencia según la métrica de Hausdorff.

EJEMPLO I.15

Sea $X = (0,1]$ (considerado como subespacio de $\mathbb{R}$), para cada $n \in \omega$ definimos $C_n = \{1/(n+1), 1\}$, entonces $(C_n)_{n \in \omega}$ converge topológicamente a $\{1\}$, pues, es claro que $\{1\} \subset \mathrm{Linf}(C_n)$ y si $x \in (0,1)$ podemos encontrar $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño de tal forma que $B_\varepsilon(x) \cap C_n \neq \emptyset$ a lo más para un índice n, de donde $x \notin \mathrm{Lsup}(C_n)$ y entonces $\mathrm{Lsup}(C_n) \subset \{1\}$. Sin embargo, $(C_n)_{n \in \omega}$ no δ_d-converge a $\{1\}$ ya que para cada $n \in \omega$ $\delta_d(C_n, \{1\}) = 1 - 1/(n+1)$.

Un hecho importante es que podemos conseguir que el inverso de la proposición I.13 sea cierto pidiendo algunas hipótesis referentes al espacio X, de hecho la convergencia en la métrica de Hausdorff y la convergencia topológica son equivalentes cuando X es compacto.

PROPOSICION I.16

Sea (X,d) un espacio métrico compacto, si $(C_n)_{n \in \omega}$ es una sucesión en $\mathcal{C}(X)$ topológicamente convergente a C entonces $(C_n)_{n \in \omega}$ δ_d-converge a C.

DEMOSTRACION

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, se probará que existe $N \in \omega$ tal que $C \subset B_\varepsilon[C_n]$ y $C_n \subset B_\varepsilon[C]$ si $n \geq N$. Como X es compacto podemos encontrar $x_1, x_2, \ldots x_r \in X$ con la propie-

dad siguiente
$$X = \bigcup_{i=1}^{r} B_{\varepsilon/2}(x_i)$$

Así, si $c \in B_{\varepsilon/2}(x_k) \cap C$ para alguna $k = 1,2,\ldots,r$, entonces del hecho que $C = \mathrm{Linf}(C_n)$ se sigue que existe $N_k \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\varepsilon/2}(x_k) \cap C_n \neq \emptyset$ si $n \geq N_k$, es decir que para toda $c \in B_{\varepsilon/2}(x_k) \cap C$ y $n \geq N_k$ existe $c_n \in C_n$ tal que $c \in B_\varepsilon[c_n]$, si tomamos $N_1 = \max\{N_k : B_{\varepsilon/2}(x_k) \cap C \neq \emptyset\}$ podemos asegurar que para toda $c \in C$ se tiene que $c \in B_\varepsilon[C_n]$ si $n \geq N_1$ y de aquí que $C \subset B_\varepsilon[C_n]$ si $n \geq N_1$. Por otra parte, se afirma que existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $C_n \subset B_\varepsilon[C]$ si $n \geq N_2$, pues si esto no fuera cierto podríamos encontrar una sucesión $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de números naturales estrictamente creciente y una sucesión $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ con $x_k \in C_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, tales que $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \cap B_\varepsilon[C] = \emptyset$, pero como X es compacto existe una subsucesión $(x_{k_s})_{s \in \mathbb{N}}$ de $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergente a un punto $x \in X$, pero esto significa que $x \in \mathrm{Lsup}(C_n)$, y de acuerdo a las hipótesis $x \in C$, lo que implica que $x_{k_s} \in B_\varepsilon(x)$ para s suficientemente grande, y entonces $x_{k_s} \in B_\varepsilon[C]$ para s suficientemente grande, lo que es una contradicción, pues sabíamos que $\{x_k\} \cap B_\varepsilon[C] = \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N}$, así, debe existir N_2 con la condición pedida. Si tomamos $N = \max\{N_1, N_2\}$ se cumple que $C \subset B_\varepsilon[C_n]$ y $C_n \subset B_\varepsilon[C]$ si $n \geq N$. ∎

Concluimos este primer capítulo mencionando algunas propiedades del espacio $(\mathcal{F}(X), \delta_d)$, tales propiedades serán de utilidad en capítulos posteriores.

PROPOSICION I.17
Sea (X, d_X) un espacio métrico completo. Entonces $(\mathcal{F}(X), \delta_d)$ es completo.

DEMOSTRACION
Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{F}(X)$. Se probará que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δ_d-converge a A, donde
$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \qquad \text{y} \qquad B_n = \overline{\bigcup_{m \geq n} A_m}$$

Es claro que A es un subconjunto cerrado de X, así para probar la proposición sólo hace falta ver que $A \neq \emptyset$ y que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δ_d-converge a A. Para este fin consideremos lo siguiente:

Para cada $r > 0$ existe $N(r) \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \subset B_r[A_m]$ y $A_m \subset B_r[A_n]$ si — $n, m \geq N(r)$. (esto por ser $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy). Sea $\varepsilon > 0$, se - probará que si $n \geq N(\varepsilon/4)$ entonces $A_n \subset B_\varepsilon[A]$ y $A \subset B_\varepsilon[A_n]$. Sean $n, m \geq N(\varepsilon/4)$, entonces:

$$A_n \subset B_{\varepsilon/4}[A_m] \quad \text{y} \quad A_m \subset B_{\varepsilon/4}[A_n]$$

Asi $\qquad d_X(a, A_n) \leq \varepsilon/4 \quad$ para toda $a \in A_m$

y $\qquad d_X(a', A_m) \leq \varepsilon/4 \quad$ para toda $a' \in A_n$

Sean $n_0 \geq N(\varepsilon/4)$ fija y $n_0 < n_1 < n_2 \; \ldots$ una sucesión de números naturales tales que:

$$\delta_d(A_m, A_{n_k}) \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} \quad \text{si } m \geq n_k \text{ y } k \geq 0$$

Sea $a_{n_0} \in A_{n_0}$ arbitrario y sean $a_{n_1} \in A_{n_1}$, $a_{n_2} \in A_{n_2}, \ldots, a_{n_k} \in A_{n_k}, \ldots$ con la siguiente propiedad:

$$d_X(a_{n_{k+1}}, a_{n_k}) \leq d_X(a_{n_k}, A_{n_{k+1}}) + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} \quad \text{para } k \geq 0$$

Sean $j > k \geq 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
d_X(a_{n_j}, a_{n_k}) &\leq d_X(a_{n_j}, a_{n_{j-1}}) + d_X(a_{n_{j-1}}, a_{n_{j-2}}) + \ldots + d_X(a_{n_{k+1}}, a_{n_k}) \\
&\leq d_X(a_{n_{j-1}}, A_{n_j}) + d_X(a_{n_{j-2}}, A_{n_{j-1}}) + \ldots + d_X(a_{n_k}, A_{n_{k+1}}) + \\
&\quad + \varepsilon\left(\frac{1}{2^{j+1}} + \frac{1}{2^j} + \ldots + \frac{1}{2^{k+2}}\right) \\
&\leq \varepsilon\left(\frac{1}{2^{j+1}} + \frac{1}{2^j} + \ldots + \frac{1}{2^{k+2}}\right) + \varepsilon\left(\frac{1}{2^{j+1}} + \frac{1}{2^j} + \ldots + \frac{1}{2^{k+2}}\right) \\
&= \varepsilon\left(\frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{j-1}} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}}\right) \\
&\leq \varepsilon \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $j > k \geq 0$ se tiene

$$d_X(a_{n_j}, a_{n_k}) \leq \varepsilon \qquad (*)$$

De donde se sigue que $(a_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en X. Puesto que X es completo entonces $(a_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ converge a algún elemento a de X. Veamos que

$a \in A$. Tenemos que: $a_{n_j} \in A_{n_j} \subset B_{n_j}$ para todo $j \in \mathbb{N}$

Así, cualquier vecindad de a intersecta a B_{n_j} para una infinidad de índices j, esto implica que $a \in B_i$ para toda $i \in \mathbb{N}$. En efecto, pues si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a \notin B_k$ entonces como B_k es cerrado existe una vecindad de a que no intersecta a B_k, pero entonces tal vecindad puede intersectar solamente a un número finito de conjuntos B_{n_j} (pues $B_k \supset B_{k+1} \supset B_{k+2} \supset \ldots$), lo cual es una contradicción. Así $a \in B_i$ para toda $i \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $a \in A$, lo que implica que $A \neq \emptyset$, por lo cual $A \in \mathcal{F}(X)$.

Además, puesto que para toda $a_{n_o} \in A_{n_o}$

$$d_x(a, a_{n_o}) \leq d_x(a, a_{n_j}) + d_x(a_{n_j}, a_{n_o})$$

Tomando $n_j > n_o$ se tiene por ($*$) que:

$$d_x(a_{n_j}, a_{n_o}) \leq \varepsilon$$

De donde $$d_x(a, a_{n_o}) \leq d_x(a, a_{n_j}) + \varepsilon$$

Tomando límite cuando j tiende a ∞ se tiene:

$$d_x(a, a_{n_o}) \leq \varepsilon$$

y así $$A_{n_o} \subset B_\varepsilon[A] \qquad (1)$$

O sea, se ha probado que $n \geq N(\varepsilon/4)$ implica $A_n \subset B_\varepsilon[A]$.

Por otra parte, sea $x \in A$ y $n \geq N(\varepsilon/4)$, entonces

$$x \in B_n = \overline{\bigcup_{m \geq n} A_m}$$

así, existe $a_m \in A_m$ con $m \geq n$ tal que:

$$d_x(x, a_m) \leq \varepsilon/3$$

Sea $a_n \in A_n$ tal que $d_x(a_m, a_n) < d_x(a_m, A_n) + \varepsilon/3$, como $n, m \geq N(\varepsilon/4)$ se tiene

$$d_x(a_m, A_n) \leq \varepsilon/4 < \varepsilon/3$$

De donde:

$$d_x(x, A_n) \leq d_x(x, a_n) \leq d_x(x, a_m) + d_x(a_m, a_n) < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

Por consiguiente:

$$A \subset B_\varepsilon[A_n] \qquad (2)$$

De las contenciones (1) y (2) concluimos que:

$$\delta_d(A_n, A) < \varepsilon \qquad \text{si } n \geq N(\varepsilon/4)$$

Así $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δ_d-converge a A, y por lo tanto $(\mathcal{F}(X), \delta_d)$ es completo. ■

A lo largo de este trabajo se darán algunas versiones del teorema de Ascoli, para la siguiente proposición se hará uso de este teorema en su versión "tradicional". Por el momento sólo enunciaremos el teorema, el lector puede consultar la demostración en el apéndice C. Consideremos antes la siguiente:

DEFINICION I.18

Sea $\Omega \subset C(X,Y)$ (la familia de funciones continuas de X en Y con la norma del supremo), se dice que Ω es equicontinua en $x_0 \in X$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $f \in \Omega$ y $d_x(x_0,x) < \delta$ entonces $d_y(f(x_0),f(x)) < \varepsilon$. Se dice que Ω es puntualmente equicontinua si es equicontinua en cada punto de X. Finalmente se dice que Ω es uniformemente equicontinua si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f \in \Omega$ y $d_x(x,y) < \delta$ implica $d_y(f(x),f(y)) < \varepsilon$.

PROPOSICION I.19 (TEOREMA DE ASCOLI)

Sean (X,d_x) un espacio métrico compacto y $\mathcal{F} \subset C(X)$ (el conjunto de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$), $\mathcal{F}$ es un subconjunto compacto de $C(X)$ si y sólo si es cerrado, uniformemente equicontinuo y para cada $x \in X$ el conjunto $\mathcal{F}(x) = \{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ es compacto en $\mathbb{R}$.

PROPOSICION I.20

Sea (X,d_x) un espacio métrico compacto. Entonces $(\mathcal{F}(X), \delta_d)$ es también compacto.

DEMOSTRACION

Primeramente definimos la función $j: \mathcal{F}(X) \longrightarrow C(X)$ como:

$$j(E)(x) = d_x(x,E) \qquad \text{para todo } E \in \mathcal{F}(X) \text{ y toda } x \in X$$

Afirmamos lo siguiente:

i) j es inyectiva

ii) j es una isometría

iii) $\{j(E)\}_{E \in \mathcal{F}(X)}$ es uniformemente equicontinua.

En efecto, supongamos que $E, E' \in \mathcal{F}(X)$ son tales que: $j(E) = j(E')$. Así, si $x \in E$ entonces $j(E)(x) = d_x(x,E) = 0$, de aquí se tiene $d_x(x,E') = 0$, es decir, $x \in E'$, por lo cual $E \subset E'$. Análogamente se prueba que $E' \subset E$, por consiguiente $E = E'$, es decir, j es inyectiva.

Veamos ahora que j es una isometría, esto es, si $E, E' \in \mathfrak{F}(X)$ entonces:

$$\| j(E) - j(E')\| = \delta_d(E,E')$$

donde $\|j(E) - j(E')\| = \sup\{|d_x(x,E) - d_x(x,E')| : x \in X\}$

Tenemos:

$$d_{E'}(E) = \sup\{d_x(y,E') : y \in E\} \leq \sup\{|d_x(y,E) - d_x(y,E')| : y \in E\}$$
$$\leq \sup\{|d_x(x,E) - d_x(x,E')| : x \in X\}$$
$$= \|j(E) - j(E')\|$$

Así, $\qquad d_{E'}(E) \leq \|j(E) - j(E')\|$

Análogamente $\qquad d_E(E') \leq \|j(E) - j(E')\|$

De donde $\qquad \delta_d(E,E') = \max\{d_E(E'),\ d_{E'}(E)\} \leq \|j(E) - j(E')\| \qquad (1)$

Por otra parte, para toda $x \in X$, $y \in E$ y $y' \in E'$ se tiene:

$$d_x(x,y) \leq d_x(x,y') + d_x(y',y)$$

Así:

$$\inf\{d_x(x,y) : y \in E\} \leq \inf\{d_x(x,y') + d_x(y',y) : y \in E\} = d_x(x,y') + \inf\{d_x(y',y) : y \in E\}$$

Por lo tanto

$$d_x(x,E) \leq d_x(x,y') + d_x(y',E) \leq d_x(x,y') + d_E(E')$$

Se sigue

$$d(x,E) \leq \inf\{d_x(x,y') : y' \in E'\} + d_E(E')$$

De donde

$$d(x,E) \leq d(x,E') + d_E(E')$$

y así

$$d(x,E) - d(x,E') \leq d_E(E')$$

Análogamente $\qquad d(x,E') - d(x,E) \leq d_{E'}(E)$

Por consiguiente, para toda $x \in X$

$$|d(x,E') - d(x,E)| \leq \max\{d_E(E'),\ d_{E'}(E)\} = \delta_d(E,E')$$

y así $\qquad \| j(E) - j(E')\| \leq \delta_d(E,E') \qquad (2)$

De las desigualdades (1) y (2) concluimos que:

$$\| j(E) - j(E')\| = \delta_d(E,E')$$

Probaremos ahora que $\{j(E)\}_{E \in \mathfrak{F}(X)}$ es uniformemente equicontinua. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, debemos probar que existe $\delta > 0$ tal que si $d_x(x,y) < \delta$ y $E \in \mathfrak{F}(X)$ - entonces $|j(E)(x) - j(E)(y)| \leq \varepsilon$. Puesto que E es compacto existe $y_o \in E$ tal -

que $$d(y,E) = d(y,y_0)$$

Así $$d(x,E) - d(y,E) \leqslant d(y_0,x) - d(y,y_0) \leqslant d(x,y)$$

Análogamente existe $x_0 \in E$ tal que:

$$d(x,E) = d(x,x_0)$$

Por lo cual $$d(y,E) - d(x,E) \leqslant d(x_0,y) - d(x_0,x) \leqslant d(x,y)$$

De donde $$|d(x,E) - d(y,E)| \leqslant d(x,y)$$

Así, basta tomar $\delta = \varepsilon$ para tener que si $d(x,y)<\delta$ y $E \in \mathcal{F}(X)$ entonces:

$$|j(E)(x) - j(E)(y)| \leqslant \varepsilon$$

Ahora probaremos que $(\mathcal{F}(X), \delta_d)$ es compacto.

Como X es completo, por la proposición I.17 $(\mathcal{F}(X), \delta_d)$ es completo y por supuesto cerrado. Puesto que j es una isometría entonces $j(\mathcal{F}(X))$ es cerrado en $C(X)$ (ver apéndice E). Afirmamos que para cada $x \in X$ el conjunto $\{j(E)(x)\}_{E \in \mathcal{F}(X)}$ es acotado en $\mathbb{R}$. En efecto, sea $x \in X$ fijo, para cada $E \in \mathcal{F}(X)$ existe $x_0 \in E$ tal que

$$j(E)(x) = d(x,x_0)$$

Así $\{j(E)(x)\}_{E \in \mathcal{F}(X)} \subset \{d(x,y) : y \in X\}$. Puesto que X es acotado, entonces $\{d(x,y) : y \in X\}$ es acotado en $\mathbb{R}$, por lo cual $\{j(E)(x)\}_{E \in \mathcal{F}(X)}$ está acotado en $\mathbb{R}$.

Puesto que se satisfacen las hipótesis del teorema de Ascoli, concluimos que $j(\mathcal{F}(X))$ es compacto en $C(X)$. Pero como j es una isometría entonces $(\mathcal{F}(X), \delta_d)$ es compacto (ver apéndice E). ■

PROPOSICION I.21

Sean (X,d_x) un espacio métrico compacto y $\mathcal{C}(X) = \{C \in \mathcal{F}(X) : C$ es conexo$\}$. Entonces $(\mathcal{C}(X), \delta_d)$ es compacto.

DEMOSTRACION

De acuerdo a la proposición anterior basta probar que $\mathcal{C}(X)$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{F}(X)$. Sea $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{C}(X)$ convergente a algún $C \in \mathcal{F}(X)$. Se probará que $C \in \mathcal{C}(X)$, es decir, C es conexo. Supongamos lo contrario, entonces existen conjuntos abiertos en X: W y V tales que:

$$C = (W \cap C) \cup (V \cap C); \quad (W \cap C) \cap (V \cap C) = \emptyset; \quad W \cap C \neq \emptyset \text{ y } V \cap C \neq \emptyset$$

Entonces $(W \cap C)$ y $(V \cap C)$ son cerrados en C y por consiguiente cerrados en X. Así $(W \cap C)$ y $(V \cap C)$ son compactos. Por lo tanto:

$$d((W \cap C),(V \cap C)) > 0$$

Sea $\varepsilon = d((W \cap C),(V \cap C))$. Por hipótesis existe $N > 0$ tal que:

$$C_n \subset B_{\varepsilon/3}[C] \quad \text{y} \quad C \subset B_{\varepsilon/3}[C_n] \quad \text{si } n \geq N$$

Afirmamos que:

$$C_N = (C_N \cap B_{\varepsilon/2}(C \cap W)) \cup (C_N \cap B_{\varepsilon/2}(C \cap V))$$

En efecto, es claro que

$$(C_N \cap B_{\varepsilon/2}(C \cap W)) \cup (C_N \cap B_{\varepsilon/2}(C \cap V)) \subset C_N$$

Además, si $x \in C_N$ entonces existe $c \in C$ tal que:

$$d(x,c) \leq \varepsilon/3 < \varepsilon/2 \quad \text{y} \quad c \in C \cap W \quad \text{o} \quad c \in C \cap V$$

Así $\qquad x \in (C_N \cap B_{\varepsilon/2}(C \cap W)) \cup (C_N \cap B_{\varepsilon/2}(C \cap V))$

De donde $\qquad C_N \subset (C_N \cap B_{\varepsilon/2}(C \cap W)) \cup (C_N \cap B_{\varepsilon/2}(C \cap V))$

Notemos que $B_{\varepsilon/2}(C \cap W)$ y $B_{\varepsilon/2}(C \cap V)$ son abiertos. Además:

$$C_N \cap B_{\varepsilon/2}(C \cap W) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad C_N \cap B_{\varepsilon/2}(C \cap V) \neq \emptyset$$

pues existe $c_0 \in W \cap C$ y como $C \subset B_{\varepsilon/3}[C_N]$, existe $x \in C_N$ tal que:

$$d(x,c_0) \leq \varepsilon/3 < \varepsilon/2$$

Así $\qquad x \in C_N \cap B_{\varepsilon/2}(C \cap W)$

De manera similar, existen $c_1 \in V \cap C$ y $z \in C_N$ tales que:

$$d(z,c_1) \leq \varepsilon/3 < \varepsilon/2$$

De donde $\qquad z \in C_N \cap B_{\varepsilon/2}(C \cap V)$

Finalmente: $\qquad B_{\varepsilon/2}(C \cap W) \cap B_{\varepsilon/2}(C \cap V) \cap C_N = \emptyset$

ya que de lo contrario existirían $x \in C_N$, $c \in C \cap W$ y $c' \in C \cap V$ tales que:

$$d(x,c) < \varepsilon/2 \quad \text{y} \quad d(x,c') < \varepsilon/2$$

De donde $\qquad d(c,c') < \varepsilon$

lo que contradice la definición de ε.

Así, de acuerdo a las afirmaciones anteriores tenemos que C_N no es conexo, lo cual es una contradicción. De esta manera concluimos que C es conexo.

■

CAPITULO II

ESPACIO DE FUNCIONES

Generalmente cuando en el análisis se trabaja con sucesiones de funciones se manejan dos tipos importantes de convergencia: convergencia puntual y convergencia uniforme. Ahora bien, aprovechando el hecho de que las gráficas de funciones continuas de un espacio métrico X en un espacio métrico Y resultan ser conjuntos cerrados en el espacio producto $X \times Y$ provisto de la métrica del producto, es posible entonces hablar de la convergencia topológica y de la convergencia en Hausdorff de estas gráficas, es propósito de este trabajo tratar de encontrar algunas relaciones entre estos cuatro tipos de convergencia, así como establecer condiciones sobre los espacios X o Y buscando la equivalencia entre ellas.

Primeramente recordamos las definiciones de convergencia puntual y convergencia uniforme de una sucesión de funciones.

DEFINICIONES II.1

Sean (X,d_x) y (Y,d_y) dos espacios métricos arbitrarios, consideremos una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones de X en Y.

Se dice que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a una función f si para cada $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se cumple $d_y(f_n(x),f(x)) < \varepsilon$.

Se dice que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ y $x \in X$ se tiene que $d_y(f_n(x),f(x)) < \varepsilon$, en otras palabras $\sup\{d_y(f_n(x),f(x)) : x \in X\} \leq \varepsilon$.

Como mencionamos anteriormente estamos interesados en las gráficas de funciones continuas de un espacio métrico (X,d_x) en un espacio métrico (Y,d_y) las cuales resultan ser conjuntos cerrados en el espacio producto $(X \times Y, \rho)$, donde ρ es la métrica definida como:

$$\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{d_x(x_1,x_2),d_y(y_1,y_2)\}$$

para $x_1, x_2 \in X$ y $y_1, y_2 \in Y$.

NOTACION

Si (X,d_x) y (Y,d_y) son dos espacios métricos arbitrarios denotaremos por $C(X,Y)$ al conjunto de funciones continuas de X en Y. También si f es una función de X en Y por un abuso de notación usaremos la misma letra, en este caso f, para denotar a su gráfica. Del contexto resultará claro a que nos referimos en cada caso.

PROPOSICION II.2

Sean (X,d_x) y (Y,d_y) espacios métricos arbitrarios y sea $f:X \longrightarrow Y$ una función continua, es decir $f \in C(X,Y)$, entonces f es un conjunto cerrado de $(X \times Y, \rho)$.

DEMOSTRACION

Se probará que cualquier sucesión convergente en f converge a un punto de f. Para este propósito sea $(x_n, f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión convergente a un punto (x_o, y_o), en particular $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x_o y $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a y_o. Pero como f es continua se tiene que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $f(x_o)$, así que $f(x_o) = y_o$ y entonces $(x_o, y_o) \in f$. ■

El inverso de la proposición anterior se logra cuando los espacios X y Y son compactos.

PROPOSICION II.3

Sean (X,d_x) y (Y,d_y) espacios métricos compactos y $f:X \longrightarrow Y$. Si f es un subconjunto cerrado de $(X \times Y, \rho)$ entonces f es continua.

DEMOSTRACION

Supongamos que f no es continua en algún punto $x_o \in X$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ tal que $d_x(x_o, x_n) < 1/n$ y sin embargo $d_y(f(x_o), f(x_n)) > \varepsilon$. Consideremos la sucesión $((x_n, f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$, puesto que la gráfica de f es compacta en $X \times Y$ existe $((x_{n_k}, f(x_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ subsucesión de $((x_n, f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a algún elemento de la gráfica de f, digamos $(z, f(z))$. En particular $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = z$ y $\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(z)$. Pero por construcción $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge a x_o, de donde $z = x_o$, y así $(f(x_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ converge a $f(x_o)$ la cual es una contradicción. Concluimos que f es continua. ■

Para los resultados posteriores será de gran utilidad la siguiente proposición la cual caracteriza mediante sucesiones la convergencia topológica en $C(X,Y)$ y es la versión para $C(X,Y)$ de las proposiciones I.3 y I.4.

PROPOSICION II.4

Sean (X,d_x) y (Y,d_y) espacios métricos arbitrarios y sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C(X,Y)$ y $f \in C(X,Y)$, entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge topológicamente a f si y sólo si para cada $x \in X$ se cumplen las dos condiciones siguientes:

i) Cuando $((x_k, f_{n_k}(x_k)))_{k\in\mathbb{N}}$ converge a (x,y) entonces $y = f(x)$, donde $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de naturales estrictamente creciente.

ii) Existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a x para la cual $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$.

DEMOSTRACION

Supongamos que se cumplen i) y ii).

Sea $(x,f(x)) \in f$ arbitrario, por la condición (ii) existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a x y tal que $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$, formemos la sucesión $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $\alpha_n = (x_n, f_n(x_n))$ para cada $n\in\mathbb{N}$, así $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $(x,f(x))$, por la proposición I.3 tenemos que $(x,f(x)) \in \mathrm{Linf}(f_n)$ y por consiguiente $f \subset \mathrm{Linf}(f_n)$. Por otra parte, sea $\alpha = (x,y) \in \mathrm{Lsup}(f_n)$, por la proposición I.4 existe una sucesión $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de números naturales estrictamente creciente y una sucesión $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a α con $\alpha_k \in f_{n_k}$, así que los términos α_k son de la forma $\alpha_k = (x_k, f_{n_k}(x_k))$, por la condición (i) se tiene que $y = f(x)$ y por lo tanto $\alpha \in f$, de donde $\mathrm{Lsup}(f_n) \subset f$. Por lo tanto $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge topológicamente a f.

Inversamente. Supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge topológicamente a f. Sea $(x,f(x)) \in f$, en particular $(x,f(x)) \in \mathrm{Linf}(f_n)$, por la proposición I.3 existe una sucesión $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a $(x,f(x))$ tal que $\beta_n \in f_n$ para cada $\in\mathbb{N}$, es decir $\beta_n = (x_n, f_n(x_n))$, de aquí tenemos que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a x y además $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$, por lo cual la condición (ii) se cumple. Por otra parte, sea $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión estrictamente creciente de números naturales y sea $((x_k, f_{n_k}(x_k)))_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión que converge a (x,y), entonces por la proposición I.4 $(x,y) \in \mathrm{Lsup}(f_n) = f$, o sea $y = f(x)$, por lo que también se satisface (i).

■

Ahora ya estamos en condiciones de establecer algunas relaciones entre los distintos tipos de convergencia. En los cuadros de las páginas siguientes se encuentran sintetizadas las relaciones que se establecerán en este capítulo. Es bien conocido que convergencia uniforme implica convergencia puntual, los siguientes resultados nos indican que de hecho convergencia uniforme es el tipo más "fuerte" de convergencia.

PROPOSICION II.5

Sean (X,d_x) y (Y,d_y) espacios métricos arbitrarios y sean $f_1,f_2,\ldots, \in C(X,Y)$ tales que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f, entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δ_ρ-converge a f.

DEMOSTRACION

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, se probará que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\delta_\rho(f_n,f) \leq \varepsilon$ si $n \geq N$, para esto es suficiente probar que $f_n \subset B_\varepsilon[f]$ y $f \subset B_\varepsilon[f_n]$ si $n \geq N$. Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f sabemos que dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $\sup\{ d_y(f_n(x),f(x)) : x \in X\} < \varepsilon$, esto significa que para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$

$$\rho((x,f_n(x)),(x,f(x))) < \varepsilon$$

y de aquí que $f_n \subset B_\varepsilon[f]$ y $f \subset B_\varepsilon[f_n]$.

■

En los siguientes cuadros se muestran las relaciones que existen entre los distintos tipos de convergencia de sucesiones de funciones en $C(X,Y)$. Para que el manejo de tales cuadros sea más sencillo a continuación se dan una serie de indicaciones para su uso.

INDICACIONES

i) Los cuadros están clasificados de acuerdo a las condiciones pedidas a los espacios (X,d_x), (Y,d_y) y a la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

ii) Las letras T, H, U y P significan convergencia topológica, convergencia en Hausdorff, convergencia uniforme y convergencia puntual respectivamente.

iii) Las implicaciones van de los renglones hacia las columnas.

iV) Cuando la implicación es cierta se ha escrito la letra V (verdadero) y a continuación se indica el número de la proposición en la cual se basa la afirmación.

v) Cuando la implicación es falsa se ha escrito la letra F (falso) y a continuación se indica el número de un ejemplo que confirma la afirmación.

vi) En algunas ocasiones se ha escrito la palabra "cuadro # ", lo cual significa que la afirmación que se hace se deduce de la información contenida en el cuadro correspondiente.

CUADRO I

(X,d_x) y (Y,d_y) espacios métricos arbitrarios

$\Rightarrow$	T	H	U	P
T	//////////	F: cuadro I ejemplo II.31	F: ejemplo II.8	F: ejemplo II.31
H	V: prop. I.13	//////////	F: ejemplo II.5A	V: prop. II.18
U	V: corol. II.6	V: prop. II.5	//////////	V: conocido
P	F: ejemplo II.21	F: ejemplo II.19	F: cuadro I ejemplo II.19	//////////

CUADRO II

(X, d_x) espacio métrico compacto y (Y, d_y) espacio métrico arbitrario

→	T	H	U	P
T		F: cuadro II ejemplo II.13	F: ejemplo II.13	F: ejemplo II.13
H	V: cuadro I		V: corol. II.11	V: cuadro I
U	V: cuadro I	V: cuadro I		V: cuadro I
P	F: ejemplo II.21	F: cuadro II ejemplo II.21	F: cuadro II ejemplo II.21	

CUADRO III

(X, d_x) y (Y, d_y) espacios métricos compactos

→	T	H	U	P
T		V: prop. II.9	V: corol. II.12	V: cuadro III
H	V: cuadro I		V: cuadro II	V: cuadro I
U	V: cuadro I	V: cuadro I		V: cuadro I
P	F: ejemplo II.21	F: cuadro III ejemplo II.21	F: cuadro III ejemplo II.21	

CUADRO IV

(X,d_x) es un espacio métrico compacto con un número finito de componentes conexas y (Y,d_y) es un espacio métrico localmente compacto.

→	T	H	U	P
T		V: cuadro IV	V: prop. II.16	V: cuadro IV
H	V: cuadro I		V: cuadro II	V: cuadro I
U	V: cuadro I	V: cuadro I		V: cuadro I
P	F: ejemplo II.21	F: cuadro IV ejemplo II.21	F: cuadro IV ejemplo II.21	

CUADRO V

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puntualmente equicontinua

→	T	H	U	P
T		F: cuadro V ejemplo II.24	F: cuadro V ejemplo II.24	V: prop. II.22
H	V: cuadro I		F: ejemplo II5A	V: cuadro I
U	V: cuadro I	V: cuadro I		V: cuadro I
P	V: prop. II.22	F: ejemplo II.24	F: cuadro V ejemplo II.5A	

CUADRO VI

(X,d_x) espacio métrico localmente conexo

(Y,d_y) espacio métrico localmente compacto

→	T	H	U	P
T		F: cuadro V ejemplo II.24	F: cuadro V ejemplo II.24	V: prop. II.26
H	V: cuadro I		F: ejemplo II.5A	V: cuadro I
U	V: cuadro I	V: cuadro I		V: cuadro I
P	F: ejemplo II.21	F: cuadro VI ejemplo II.21	F: cuadro VI ejemplo II.21	

CUADRO VII

(X,d_x) espacio métrico compacto

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puntualmente equicontinua

→	T	H	U	P
T		V: cuadro VII	V: cuadro VII	V: cuadro V
H	V: cuadro I		V: cuadro II	V: cuadro I
U	V: cuadro I	V: cuadro I		V: cuadro I
P	V: cuadro V	V: cuadro VII	V: prop. II.32	

CUADRO VIII

(X,d_x) espacio métrico discreto

→	T	H	U	P
T		F: cuadro VIII ejemplo II.19	F: cuadro VIII ejemplo II.19	V: corol. II.23
H	V: cuadro I		F: ejemplo II.35	V: cuadro I
U	V: cuadro I	V: cuadro I		V: cuadro I
P	V: prop. II.20	F: ejemplo II.19	F: cuadro VIII ejemplo II.19	

CUADRO IX

(X,d_x) espacio métrico compacto con un número finito de componentes conexas.

→	T	H	U	P
T		F: cuadro IX ejemplo II.13	F: ejemplo II.13	F: ejemplo II.13
H	V: cuadro I		V: cuadro II	V: cuadro I
U	V: cuadro I	V: cuadro I		V: cuadro I
P	F: cuadro IV	F: cuadro IV	F: cuadro IV	

En general el inverso de la proposición anterior es falso, para convencernos de esto consideremos el siguiente ejemplo:

EJEMPLO II.5 A

Sean $X = Y = \mathbb{R}$ y $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida como $f(x) = x^2$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la función $f_n: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como $f_n(x) = (x + 1/n)^2$.

Afirmamos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δ_ρ-converge a f.

En efecto, puesto que para cada $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$\rho((x, f(x)), (x - 1/n, f_n(x - 1/n))) = 1/n$$

Entonces $\qquad f \subset B_{1/n}[f_n] \quad$ y $\quad f_n \subset B_{1/n}[f]$

De donde $\qquad \delta_\rho(f, f_n) \leq 1/n$

Por lo cual $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δ_ρ-converge a f.

Sin embargo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no converge uniformemente a f, pues para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$|f_n(n) - f(n)| = |n^2 + 2 + 1/n^2 - n^2| > 2$$

■

COROLARIO II.6

Con las mismas hipótesis de la proposición anterior. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f, entonces $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge topológicamente a f.

DEMOSTRACION

Por la proposición anterior $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δ_ρ-converge a f, pero por la proposición I.13 se tiene que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge topológicamente a f.

■

La siguiente proposición pone de manifiesto que para una amplia clase de espacios Y una condición necesaria para que el inverso del corolario anterior sea válido es que el espacio X sea compacto. Cabe mencionar que en lo sucesivo los espacios compactos jugarán un papel muy importante, motivo por el cual en el apéndice A se incluyen algunas caracterizaciones de estos espacios.

PROPOSICION II.7

Sean (X,d_x) y (Y,d_y) dos espacios métricos. Supongamos que $C([0,1],Y)$ es no trivial (esto significa que existe $\phi \in C([0,1],Y)$ tal que $\phi(0) \neq \phi(1)$). Si para toda sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $C(X,Y)$ se tiene que siempre que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converja topológicamente a f implica que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f, entonces X es compacto.

DEMOSTRACION

Se demostrará que si X no es compacto entonces convergencia topológica no implica convergencia uniforme. Sea (Y,d_y) tal que $C([0,1],Y)$ es no trivial. Como X no es compacto existe una sucesión $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sin subsucesiones convergentes, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $z_n \neq z_m$ si $n \neq m$. Se afirma que existe una sucesión $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números positivos tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ $\lambda_n < 1/n$ y además $B_{\lambda_n}[z_n] \cap B_{\lambda_m}[z_m] = \emptyset$ si $n \neq m$. En efecto, dado $z_k \in \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$, como z_k no es punto de acumulación de $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ existe $\varepsilon_k > 0$ tal que $(B_{\varepsilon_k}[z_k] - \{z_k\}) \cap \{z_n : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$, sea $\lambda_k = \min\{\varepsilon_k/2,\ 1/(2n)\}$, veamos que $B_{\lambda_n}[z_n] \cap B_{\lambda_m}[z_m] = \emptyset$ si $n \neq m$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\lambda_n \leq \lambda_m$, si sucediera que $B_{\lambda_n}[z_n] \cap B_{\lambda_m}[z_m] \neq \emptyset$, entonces existiría $z \in B_{\lambda_n}[z_n] \cap B_{\lambda_m}[z_m]$ y entonces $d_x(z_n,z_m) \leq d_x(z_n,z) + d_x(z,z_m) \leq 2\lambda_m \leq \varepsilon_m$, de donde $z_n \in B_{\varepsilon_m}[z_m]$, que nos lleva a una contradicción, así pues debemos tener $B_{\lambda_n}[z_n] \cap B_{\lambda_m}[z_m] = \emptyset$ si $n \neq m$.

Sea $f \in C(X,Y)$ tal que $f(x) = \phi(1)$ para todo $x \in X$, y para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $f_n \in C(X,Y)$ de la siguiente manera:

$$f_n(x) = \begin{cases} \Phi\left[\frac{1}{\lambda_n} d_x(x,z_n)\right] & \text{si } d_x(x,z_n) < \lambda_n \\ \Phi(1) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para ver que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge topológicamente a f utilizaremos la proposición II.4. Así pues sea $x \in X$ arbitrario, consideremos la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde $x_n = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, como $x \in B_{\lambda_n}[z_n]$ a lo más para un índice n, entonces $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\Phi(1)$ satisfaciéndose así la condición (ii) de la proposición II.4. Por otra parte, si $((x_k,f_{n_k}(x_k)))_{k\in\mathbb{N}}$ converge a (x,y) entonces como $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x se debe tener que $x_k \notin B_{\lambda_{n_k}}[z_{n_k}]$ para todo k suficientemente grande (pues de otra forma $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, y por consiguiente $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tendría una subsucesión convergente), por lo cual $(f_{n_k}(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\Phi(1) = f(x)$, cumpliéndose así la condición (i) de la proposición II.4, y por lo tanto se tiene la convergencia antes afirmada. Sin embargo, debido a que $\Phi(0) \neq \Phi(1)$ entonces $\varepsilon = d_y(\Phi(0),\Phi(1)) > 0$ y como para cada $n \in \mathbb{N}$ $d_y(f_n(z_n),f(z_n)) = d_y(\Phi(0),\Phi(1)) = \varepsilon$, entonces $\sup\{d_y(f_n(x),f(x)) : x \in X\} \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que concluimos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge uniformemente a f. ■

Así pues siendo Y un espacio tal que $C([0,1],Y)$ sea no trivial, el que X sea compacto es necesario para que convergencia topológica implique convergencia uniforme, sin embargo no es una condición suficiente, tal como lo muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO II.8

Sean $X = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ (considerado como subespacio de $\mathbb{R}$) y $Y = \mathbb{R}$, denotemos por f a la función constante cero y definamos para cada $n \in \mathbb{N}$ la función $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 1/n \\ n & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n \end{cases}$$

es claro que cada f_n pertenece a $C(X, \mathbb{R})$. Además $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge topológicamente a f, pero la convergencia no es uniforme. Justifiquemos primeramente la convergencia topológica, para lo cual nuevamente haremos uso de la proposición II.4.

Sea $x \in X$ arbitrario, pueden presentarse las siguientes situaciones:

a) si $x \neq 0$, consideremos la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donde $x_n = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, esta sucesión tiene la propiedad de que $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ pues $f_n(x) = 0$ si $1/n < x$.

b) si $x = 0$, consideremos la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donde:

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ \frac{1}{n-1} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

tenemos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x y además $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = \lim_{n\to\infty} f_n(\frac{1}{n-1}) = 0$, pues $f_n(\frac{1}{n-1}) = 0$ para $n \geq 2$. De aquí concluimos que se satisface la condición (ii) de la proposición II.4. Por otra parte, si la sucesión $((x_k, f_{n_k}(x_k)))_{k \in \mathbb{N}}$ converge a (x,y), se afirma que $y = 0$, para ver esto nuevamente consideremos dos casos diferentes:

a) si $x \neq 0$, entonces del hecho de que $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge a x se sigue que existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $x_k = x$ para toda $k \geq K$, y de aquí que $f_{n_k}(x_k) = f_{n_k}(x) = 0$ para todo n_k tal que $1/n_k < x$ y por lo tanto $y = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_k) = 0$.

b) si $x = 0$, como $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge a cero y $(f_{n_k}(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ es convergente, debe existir $K \in \mathbb{N}$ tal que $x_k > 1/n_k$ para todo $k \geq K$ (de otra forma $(f_{n_k}(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ no sería convergente), de donde $f_{n_k}(x_k) = 0$ para todo $k \geq K$, por lo cual $y = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_k) = 0$.

De esta forma en cualquiera de los dos casos se cumple que $y = 0$, es decir se satisface la condición (i) de la proposición II.4.

Sin embargo, como $f_n(0) - f(0) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, concluimos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no converge puntualmente a f y mucho menos uniformemente. ∎

Intentando establecer algunas condiciones de suficiencia para el inverso del corolario II.6, recordemos que en la proposición I.16 tenemos que convergencia topológica implica convergencia en la métrica de Hausdorff bajo la hipótesis de que X sea compacto. En este sentido sería conveniente dar una reinterpretación de esta proposición para el caso en que estemos manejando sucesiones de funciones, y, después relacionar la convergencia topológica con la convergencia uniforme vía la métrica de Hausdorff.

PROPOSICION II.9

Sean (X,d_x) y (Y,d_y) espacios métricos compactos, si $f,f_1,f_2,\ldots \in C(X,Y)$ son tales que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge topológicamente a f, entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δ_ρ-converge a f.

DEMOSTRACION

Tomando en cuenta que de acuerdo a las hipótesis el espacio $(X\times Y,\ \rho)$ resulta ser compacto, el resultado se sigue inmediatamente de la proposición I.16. ■

Ahora establecemos condiciones de suficiencia para que convergencia en Hausdorff implique convergencia uniforme.

PROPOSICION II.10

Sean (X,d_x) y (Y,d_y) espacios métricos arbitrarios y supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $C(X,Y)$ que δ_ρ-converge a una función uniformemente continua f, entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f.

DEMOSTRACION

Sea $\varepsilon>0$ arbitrario, como f es uniformemente continua existe $0<\delta<\varepsilon/2$ tal que si x, $y\in X$ y $d_x(x,y)<\delta$ entonces $d_y(f(x),f(y))<\varepsilon/2$. Por otra parte, como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δ_ρ-converge a f, se sigue que para $\beta=\delta/2$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $n\geq N$ implica $f\subset B_\beta[f_n]$ y $f_n\subset B_\beta[f]$. Tomemos $n\geq N$ fija y $x\in X$ arbitrario, debido a que $(x,f_n(x))\in f_n$ debe existir $(x_0,f(x_0))\in f$ para el cual $\rho((x,f_n(x)),(x_0,f(x_0)))\leq\beta$, o sea que se cumplen las siguientes desigualdades:

$$d_x(x,x_0)\leq\beta<\delta \qquad y \qquad d_y(f_n(x),f(x_0))\leq\beta<\delta<\varepsilon/2$$

pero $d_x(x,x_o)<\delta$ implica que $d_y(f(x),f(x_o))<\varepsilon/2$ y por lo tanto $d_y(f_n(x),f(x))\leq d_y(f_n(x),f(x_o))+d_y(f(x_o),f(x))<\varepsilon$. Tomando en cuenta que x fue arbitrario concluimos que si $n\geq N$ entonces $\sup\{d_y(f_n(x),f(x)):x\in X\}\leq\varepsilon$, y por consiguiente $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f. ■

COROLARIO II.11

Sean (X,d_x) un espacio métrico compacto y (Y,d_y) un espacio métrico arbitrario. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $C(X,Y)$ tal que $\delta\rho$-converge a $f\in C(X,Y)$ entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f.

DEMOSTRACION

Como $f\in C(X,Y)$ y X es compacto, entonces f resulta ser uniformemente continua y entonces la conclusión se sigue de la proposición anterior. ■

COROLARIO II.12

Si (X,d_x) y (Y,d_y) son espacios métricos compactos y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $C(X,Y)$ topológicamente convergente a $f\in C(X,Y)$, entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f.

DEMOSTRACION

Por la proposición II.9 tenemos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\delta\rho$-converge a f, y de acuerdo al corolario II.11 concluimos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f. ■

Tomando en cuenta al corolario II.12 tenemos que para que convergencia topológica implique convergencia uniforme no sólo debemos pedir condiciones al espacio X sino que también debemos tomar en cuenta al espacio Y, ahora bien el pedir la compacidad del espacio Y surgió de una manera natural al relacionar la convergencia topológica con la convergencia uniforme mediante la métrica de Hausdorff, pero podríamos pensar que esta condición es demasiado "fuerte", de hecho volviendo al ejemplo II.8 posiblemente la conclusión a la que llegamos no se debió tanto a la no compacidad de $\mathbb{R}$ sino a que el espacio X considerado tiene un número infinito de componentes conexas, el siguiente ejemplo muestra que esto no es del todo cierto, en él X es un espacio compacto y conexo y aún más Y es un espacio completo, y sin embargo, se tiene que convergencia topoló gica en C(X,Y) no necesariamente implica convergencia uniforme.

En el ejemplo haremos uso de ℓ^2 (el espacio de sucesiones cuadrado sumables), esto es, el espacio de sucesiones $\bar{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

metrizado mediante la norma:

$$\|\bar{x}\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2}$$

EJEMPLO II.13

Sean $X = [0,1]$ (considerado como subespacio de $\mathbb{R}$), $Y = \ell^2$ y $f:[0,1] \longrightarrow \ell^2$ definida como $f(x) = xe_1$, y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos la función $f_n:[0,1] \longrightarrow \ell^2$ de la siguiente manera:

$$f_n(x) = \begin{cases} xe_1 + (1-nx)e_n & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n \\ xe_1 & \text{si } 1/n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

donde $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es la base ortonormal estándar de ℓ^2 (es decir, e_n es la sucesión cuyo n-ésimo término es uno y los demás son ceros), cada f_n es continua pues está bien definida y es continua en los intervalos cerrados $[0,1/n]$ y $[1/n,1]$.

Afirmamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge topológicamente a f y sin embargo, la convergencia no es uniforme. En efecto, sea $x \in X$ arbitrario, si $x \neq \emptyset$, consideremos la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde $x_n = x$ para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica $1/n < x$, de aquí que $f_n(x_n) = f(x) = xe_1$ si $n \geq N$, o sea que $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $xe_1 = f(x)$. Si $x = 0$, tomemos la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde $x_n = 2/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, como para todo $n \in \mathbb{N}$ $1/n < 2/n$ tenemos que $f_n(x_n) = f_n(2/n) = (2/n)e_1$, pero entonces $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\bar{0} = f(0)$, (aquí $\bar{0}$ representa la sucesión constante cero). Hasta aquí tenemos que la condición (ii) de la proposición II.4 se cumple.

Por otra parte, supongamos que para alguna $x \in X$ existe $((x_k, f_{n_k}(x_k)))_{k\in\mathbb{N}}$

convergente a (x,α), (donde α representa a algún elemento de ℓ^2), considere mos dos casos: si $x \neq 0$, como $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x, debe existir $K\in\mathbb{N}$ tal que $k \geq K$ implica $1/n_k < x_k$ y por lo tanto $f_{n_k}(x_k) = x_k e_1$, de donde concluimos que $(f_{n_k}(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $xe_1 = f(x)$. Si $x = 0$, como $(f_{n_k}(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente el único candidato para ser el límite es la sucesión constante cero, (pues si tal límite fuera una sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $z_p \neq 0$ para alguna $p\in\mathbb{N}$ entonces $f_{n_k}(x_k) = x_k e_1 + (1 - n_k x_k)e_{n_k}$ para una infinidad de subíndices k y por lo tanto si $p > 1$ entonces $\|(z_n)_{n\in\mathbb{N}} - f_{n_k}(x_k)\|_2 \geq |z_p|$ para una infinidad de índices $n_k > p$ o bien si $p = 1$ entonces $\|(z_n)_{n\in\mathbb{N}} - f_{n_k}(x_k)\|_2 \geq |z_1 - x_k|$ para una infinidad de índices n_k, contradiciendo el hecho de que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es el límite de $(f_{n_k}(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$), y así $(f_{n_k}(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $f(0)$. En cualquiera de los dos casos se satisface la condición (i) de la proposición II.4, y por lo tanto se tiene la convergencia topológica.

Sin embargo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge uniformemente a f, de hecho *ni siquiera* converge puntualmente, pues $f_n(0) = e_n$ para cada $n\in\mathbb{N}$. ■

No obstante es posible sustituir la compacidad de Y por una condición más "débil", pero esto tiene como consecuencia pedir una condición extra al espacio X además de la compacidad, para aclarar esto consideremos la siguiente definición.

DEFINICION II.14

Sea (X,d_X) un espacio métrico, se dice que X es *localmente compacto* si para cada $x \in X$ existe un conjunto abierto $U \subset X$ tal que su *cerradura* es compacta y $x \in U$.

Es óbvio que un espacio métrico compacto es localmente compacto, pero el inverso es falso como un ejemplo podemos considerar a $\mathbb{R}$. En tanto que ℓ^2 es un ejemplo de un espacio que no es localmente compacto. La condición sobre el espacio Y de la cual hablabamos hace un momento es precisamente la compacidad local. Regresando nuevamente al ejemplo II.8 vemos que $Y = \mathbb{R}$ es localmente compacto, y de aqui podemos extraer la condición extra del espacio X, o sea que el hecho de que X tuviera un número infinito de componentes conexas sí fue determinante para que el ejemplo funcionara, en otras palabras, la nueva condición que debemos pedir al espacio X es que tenga un número finito de componentes conexas. La proposición II.16 confirmará lo anteriormente dicho, antes de enunciarla consideremos el siguiente lema:

LEMA II.15

Sean (X,d_x) un espacio métrico compacto con un número finito de componentes conexas y (Y,d_y) un espacio métrico arbitrario. Supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $C(X,Y)$ topológicamente convergente a $f\in C(X,Y)$. Entonces para cada $\varepsilon>0$ tal que $B_\varepsilon[f]$ sea compacto en $X\times Y$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $f_n\subset B_\varepsilon[f]$ si $n\geq N$.

DEMOSTRACION

Supongamos que la afirmación es falsa, entonces existen $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y puntos $\{x_k\in X: k\in\mathbb{N}\}$ tales que para cada $k\in\mathbb{N}$ se tiene $(x_k,f_{n_k}(x_k))\notin B_\varepsilon[f]$, puesto que X tiene un número finito de componentes conexas, entonces una de ellas debe contener a x_k para una infinidad de índices k, supongamos por simplicidad que cada x_k pertenece a la misma componente C de X, debido a que las componentes conexas de un espacio métrico son conjuntos cerrados y X es compacto entonces C es compacto, pero también C resulta ser un conjunto abierto por ser el complemento de las restantes componentes conexas, de donde para cada $c\in C$ existe $\lambda_c>0$ tal que $B_{\lambda_c}(c)\subset C$. Considerando la cubierta abierta de C dada por $\{B_{\lambda_c/2}(c): c\in C\}$ podemos encontrar $c_1,c_2,\ldots,c_r\in C$ tales que;

$$C\subset\bigcup_{i=1}^{r}B_{\lambda_{c_i}/2}(c_i)$$

sea $\lambda=\min\{\lambda_{c_i}/2: i=1,2,\ldots,r\}$, se afirma que $B_\lambda[C]=C$. En efecto, pues si $x\in B_\lambda[C]$ entonces $x\in B_\lambda[c^*]$ para alguna $c^*\in C$, es decir, $d_x(x,c^*)\leq\lambda$, pero por otro lado existe c_k con $1\leq k\leq r$ tal que $d_x(c^*,c_k)<\lambda_{c_k}/2$, pero en tonces $d_x(x,c_k) \leq \lambda_{c_k}$, es decir $x \in B_{\lambda_{c_k}}(c_k) \subset C$.

Tomemos $z \in C$ fijo, utilizando que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge topológicamente a f concluimos por la proposición II.4 que existe una sucesión $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a z para la cual $(f_k(z_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $f(z)$, pero como $B_\lambda[C] = C$ podemos suponer sin pérdida de generalidad que todos los términos de $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pertenecen a C. Para cada $k \in \mathbb{N}$ $f_k|C$ es un conjunto conexo en $X \times Y$ ($f_k|C$ simboliza a la gráfica de la función f_k restringida al conjunto C). Definimos la función $g_k\colon f_k|C \longrightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$g_k((c,f_k(c))) = \rho((c,f_k(c)),f)$$

para k suficientemente grande tenemos que:

Existe $(x_k,f_{n_k}(x_k)) \in f_{n_k}$ tal que $g_{n_k}((x_k,f_{n_k}(x_k))) \geq \varepsilon$ y además existe $(z_{n_k},f_{n_k}(z_{n_k})) \in f_{n_k}$ tal que $g_{n_k}((z_{n_k},f_{n_k}(z_{n_k}))) < \varepsilon$.

Por el teorema del valor intermedio existe $(y_k,f_{n_k}(y_k)) \in f_{n_k}$ tal que $g_{n_k}((y_k,f_{n_k}(y_k))) = \varepsilon$, de donde $\rho((y_k,f_{n_k}(y_k)), f) = \varepsilon$, por lo cual $d_y(f_{n_k}(y_k),f(y_k)) \geq \varepsilon$, pero $\{(x,y) \in X\times Y\colon \rho((x,y),f) = \varepsilon\}$ es un subconjunto cerrado de $B_\varepsilon[f]$ el cual es compacto, de donde $\{(x,y) \in X\times Y\colon \rho((x,y),f) = \varepsilon\}$ es compacto, de aquí que la sucesión $((y_k,f_{n_k}(y_k)))_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $((y_{k_i},f_{n_{k_i}}(y_{k_i})))_{i\in\mathbb{N}}$ convergente a algún elemento de $\{(x,y) \in X\times Y\colon \rho((x,y),f) = \varepsilon\}$, digamos (α,β). Claramente $(\alpha,\beta) \notin f$, pues la distancia de (α,β) a f es positiva y f es cerrado. Así entonces para $((y_{k_i},f_{n_{k_i}}(y_{k_i})))_{i\in\mathbb{N}}$ y (α,β) no se cumple la condición (i) de la proposición II.4, es decir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge topológicamente a f, lo que es una contradicción. Concluimos entonces que todos excepto un número finito de términos de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pertenecen a $B_\varepsilon[f]$. ■

En la demostración de la siguiente proposición se hace uso de un resultado que dice que si A y B son subconjuntos cerrados no vacios de un espacio compac to X tal que ninguna componente conexa de X intersecta a ambos, entonces existen conjuntos abiertos ajenos H_1 y H_2 tales que $A \subset H_1$, $B \subset H_2$ y $H_1 \cup H_2 = X$.- La justificación de esta afirmación es un poco extensa, motivo por el cual se ha decidido para no interrumpir el desarrollo del trabajo aceptarla como válida, dejando su demostración para el apéndice B.

PROPOSICION II.16

Sea (X,d_x) un espacio métrico compacto, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) X tiene un número finito de componentes conexas.
2) Para cada espacio métrico (Y,d_y) localmente compacto, la convergencia topológica de sucesiones de funciones en $C(X,Y)$ implica su convergencia uniforme.

DEMOSTRACION

(1) implica (2)

Sea (Y,d_y) cualquier espacio métrico localmente compacto, y, supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge topológicamente a f. De acuerdo al corolario II.12 es suficiente probar que todos excepto un número finito de términos de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pertenecen a algún subconjunto compacto común de $X\times Y$. Ahora, como X es compacto y f es continua entonces $f(X)$ es compacto, de donde $X\times f(X)$ es compacto. Por otra parte como $X\times Y$ es localmente compacto, cada punto de $X\times Y$ es el centro de un disco compacto de radio positivo, en particular para cada $(x,f(x))\in f$ existe $\lambda_x > 0$ con la propiedad de que $B_{\lambda_x}\left[(x,f(x))\right]$ es compacto, consideremos la cubierta abierta de f dada por $\left\{B_{\lambda_x}((x,f(x)))\right\}_{x\in X}$, del hecho que f es compacto se sigue que deben existir $x_1,x_2,\dots,x_m\in X$ tales que:

$$f \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_{\lambda_{x_i}}((x_i,f(x_i)))$$

para simplificar un poco la notación reemplazaremos λ_{x_i} por λ_i. Sea

$$E = \operatorname{int} \bigcup_{i=1}^{m} B_{\lambda_i}\left[(x_i,f(x_i))\right]$$

de aquí que $f \subset E$. Sea

$$\varepsilon = 1/2 \inf \{ \rho((x,f(x)),(z,y)) : x \in X,\ (z,y) \in (X \times Y) - E \}$$

Afirmamos que $B_\varepsilon[f]$es cerrado. En efecto, pues si $(a,b) \notin B_\varepsilon[f]$ y $\theta = \rho((a,b),f)$ entonces $\theta > \varepsilon$, sea$\alpha = \theta - \varepsilon$, se tiene que $B_\alpha((a,b)) \cap B_\varepsilon[f] = \emptyset$, pues si $(x_0,y_0) \in B_\alpha((a,b)) \cap B_\varepsilon[f]$ entonces $\rho((x_0,y_0),(a,b)) < \alpha$ y existiría $(x,f(x)) \in f$ tal que $\rho((x_0,y_0),(x,f(x))) \leq \varepsilon$, de donde $\rho((a,b),(x,f(x))) < \theta$, lo que es una contradicción. Así $B_\varepsilon[f]$debe ser cerrado. Además,

$$B_\varepsilon[f] \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_{\lambda_i}[(x_i,f(x_i))]$$

pues si $(a,b) \in B_\varepsilon[f]$ entonces existe $(x,f(x)) \in f$ tal que $\rho((a,b),(x,f(x))) \leq \varepsilon$ y por lo tanto $(a,b) \in E$. Finalmente como $\bigcup_{i=1}^{m} B_{\lambda_i}[(x_i,f(x_i))]$ es compacto y $B_\varepsilon[f]$ es cerrado tenemos que $B_\varepsilon[f]$es compacto.

De acuerdo al lema anterior se tiene que todos excepto un número finito de términos de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pertenecen a $B_\varepsilon[f]$.

(2) implica (1)

Supongamos que X tiene un número infinito de componentes conexas, sea $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de componentes de X distintas, por la compacidad de la familia de subconjuntos cerrados conexos y no vacios de X (ver proposición I.21), $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ debe tener una subsucesión convergente en la métrica de Hausdorff, supongamos por simplicidad que de hecho $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a C subconjunto cerrado conexo y no vacio de X, podemos también suponer sin pérdida de generalidad que ningún término de la sucesión es igual a C, asi que para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene $C_n \cap C = \emptyset$ y de aquí se sigue que para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $0 < \varepsilon_n < 1/n$ tal que $B_{\varepsilon_n}[C_n] \cap C = \emptyset$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos el conjunto:

$$F_n = X - \operatorname{int}(B_{\varepsilon_n}[C_n])$$

se sigue que $C \subset F_n$, usando la afirmación hecha en el parrafo anterior a esta proposición tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existen conjuntos abiertos ajenos V_n y W_n tales que:

$$C_n \subset V_n, \quad F_n \subset W_n \quad y \quad V_n \cup W_n = X$$

Sea Y cualquier espacio métrico localmente compacto (pero no compacto), y sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en Y sin subsucesiones convergentes. Para cada $n\in\mathbb{N}$ definimos la función $f_n : X \longrightarrow Y$ mediante la fórmula:

$$f_n(x) = \begin{cases} y_1 & \text{si } x\in W_n \\ y_n & \text{si } x\in V_n \end{cases}$$

Cada f_n es continua, pues es continua en los conjuntos abiertos W_n y V_n y además $W_n \cap V_n = \emptyset$. Se afirma que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge topológicamente a f, donde $f:X \longrightarrow Y$ está definida como $f(x) = y_1$ para toda $x\in X$. En efecto, veamos que se cumplen las condiciones de la proposición II.4. Primeramente supongamos que $((x_k, f_{n_k}(x_k)))_{k\in\mathbb{N}}$ es ρ-convergente, entonces debe existir $K\in\mathbb{N}$ tal que $f_{n_k}(x_k) = y_1$ si $k \geq K$, pues de otra forma podríamos encontrar una subsucesión de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, contradiciendo la condición pedida a $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de esta forma se cumple la condición (i) de la proposición II.4.

Para justificar que la condición ii) de la proposición II.4 se satisface consideremos dos casos:

a) Si $x\in C$ entonces $x\in W_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$ y de aquí que para todo $n\in\mathbb{N}$ se tiene $f_n(x) = y_1$, por lo cual la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde $x_n = x$ para todo $n\in\mathbb{N}$ cumple con que $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = y_1$.

b) Si $x \notin C$ observamos que $\delta_{d_x}(B_{\varepsilon_n}[C_n],C) \leq \delta_{d_x}(B_{\varepsilon_n}[C_n],C_n) + \delta_{d_x}(C_n,C)$, $\lim_{n\to\infty} \delta_{d_x}(B_{\varepsilon_n}[C_n],C_n) = 0$ pues $\varepsilon_n < 1/n$ y además $\lim_{n\to\infty} \delta_{d_x}(C_n,C) = 0$ pues $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δ_{d_x}-converge a C. Concluimos que $(B_{\varepsilon_n}[C_n])_{n\in\mathbb{N}}$ δ_{d_x}-converge a C.- Por otro lado, $V_n \subset B_{\varepsilon_n}[C_n]$ para todo $n\in\mathbb{N}$, pues si $a\in V_n$ entonces $a\notin W_n$ por lo cual $a\notin F_n$, de donde $a\in \operatorname{int}(B_{\varepsilon_n}[C_n])$, de aquí se sigue que $a\in B_{\varepsilon_n}[C_n]$.

Puesto que $x\notin C$ y $\lim_{n\to\infty} \delta_{d_x}(B_{\varepsilon_n}[C_n],C) = 0$ debe existir $N\in\mathbb{N}$ tal que $n\geq N$ implica $x\notin B_{\varepsilon_n}[C_n]$, por lo que $x\notin V_n$, así que $n\geq N$ implica $x\in W_n$, o sea $f_n(x) = y_1$, si consideramos la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n = x$ para todo $n\in\mathbb{N}$ se cumple que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = y_1$. De esta forma se cumple la condición (ii).

Ahora supongamos que la convergencia de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a f es uniforme. Sea $\varepsilon>0$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $\sup\{d_y(f_n(x),y_1): x\in X\}<\varepsilon$ si $n\geq N$. Tomando en cuenta que $V_n\neq 0$ para cada $n\in\mathbb{N}$, escogemos $x_n\in V_n$ con lo que tenemos que $d_y(f_n(x_n),y_1)<\varepsilon$, pero $f_n(x_n)=y_n$, de donde $d_y(y_n,y_1)<\varepsilon$ si $n\geq N$. Esto significa que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a y_1, lo que es una contradicción. Por lo tanto, podemos concluir que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge uniformemente a f. ■

Hasta este momento las proposiciones precedentes nos han relacionado la convergencia topológica, la convergencia según la métrica de Hausdorff y la convergencia uniforme en $C(X,Y)$, sin embargo no nos hemos referido a la convergencia puntual. Ahora lo haremos y veremos su relación con los otros tipos de convergencia. Ya habíamos mencionado que la convergencia uniforme implica la convergencia puntual, ahora bien el teorema de Dini nos da condiciones suficientes para que la convergencia puntual implique la convergencia uniforme.

PROPOSICION II.17 (TEOREMA DE DINI)

Sean (X,d_x) un espacio métrico compacto, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente en $C(X)$ y supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f. Si $f\in C(X)$ entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f.

La demostración de este teorema puede darse independientemente de los conceptos desarrollados en estas notas, (ésta aparece en el apéndice C), en el capítulo siguiente se dará una demostración utilizando el concepto de convergencia topológica.

La siguiente proposición nos relaciona convergencia puntual con δ_ρ-convergencia.

PROPOSICION II.18

Sean (X,d_x) y (Y,d_y) espacios métricos arbitrarios. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $C(X,Y)$ δ_ρ-convergente a $f\in C(X,Y)$ entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f.

DEMOSTRACION

Sea $x_o \in X$ y $\varepsilon > 0$ arbitrarios, puesto que f es continua en x_o debe existir $0 < \delta < \varepsilon/2$ tal que si $x \in X$ y $d_x(x,x_o) < \delta$ entonces $d_y(f(x),f(x_o)) < \varepsilon/2$. Sea $\beta = \delta/2$; de la hipótesis $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δ_ρ-converge a f podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica $f \subset B_\beta[f_n]$ y $f_n \subset B_\beta[f]$, de aquí podemos afirmar que para cada $n \geq N$ existe $(x_n, f(x_n)) \in f$ tal que $\rho((x_o,f_n(x_o)),(x_n,f(x_n))) \leq \beta$, o sea que se cumplen las siguientes desigualdades:

$$d_x(x_o,x_n) \leq \beta < \delta$$

y

$$d_y(f_n(x_o),f(x_n)) \leq \beta < \varepsilon/2$$

De la primera desigualdad se sigue que $d_y(f(x_n),f(x_o)) < \varepsilon/2$, por lo cual $d_y(f_n(x_o),f(x_o)) \leq d_y(f_n(x_o),f(x_n)) + d_y(f(x_n),f(x_o)) < \varepsilon$, puesto que esto es válido para todo $n \geq N$ concluimos que $(f_n(x_o))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x_o)$ y de aquí que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja puntualmente a f. ■

El inverso de la proposición anterior es falso.

EJEMPLO II.19

Sean $X = \mathbb{N}$ (considerado como subespacio de $\mathbb{R}$) y $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función constante cero. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la función $f_n: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ como:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = n \\ 0 & \text{si } x \neq n \end{cases}$$

Cada función f_n es continua y además $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f, sin embargo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no δ_ρ-converge a f, pues $\delta_\rho(f,f_n) = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Las siguientes proposiciones se refieren a la conexión entre convergencia puntual y topológica, en ellas se pedirán condiciones tanto a los espacios X y Y como a la sucesión misma.

PROPOSICION II.20

Sean (X,d_x) y (Y,d_y) dos espacios métricos. Si X es discreto entonces convergencia puntual en $C(X,Y)$ implica convergencia topológica. Inversamente, si $C([0,1],Y)$ es no trivial y convergencia puntual implica convergencia topológica entonces X es discreto.

DEMOSTRACION

Supongamos que X es discreto y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f. Sea $x\in X$ arbitrario, consideremos la sucesión $((x,f_n(x)))_{n\in\mathbb{N}}$, usando la hipótesis de convergencia puntual tenemos que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$, de esta manera se cumple que $(x,f(x))\in \mathrm{Linf}(f_n)$, puesto que x fue arbitrario se sigue que $f\subset \mathrm{Linf}(f_n)$. Por otra parte si $(x,y)\notin f$ (si Y consta de un solo punto, es decir $Y=\{y\}$, entonces $f_n(X)=y$ para todo $n\in\mathbb{N}$, o sea que la sucesión es constante y de hecho la convergencia sería uniforme y por lo tanto topológica), sea $\delta = 1/2d_y(f(x),y)$, por la convergencia puntual existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $n\geq N$ implica $d_y(f_n(x),f(x))<\delta$, pero entonces para $n\geq N$ se tiene $d_y(f_n(x),y)>\delta$. Consideremos la vecindad de (x,y) dada por $\{x\}\times B_\delta(y)$, (recuérdese que X es discreto). Esta vecindad sólo puede intersectar a $\{(x,f_n(x)):n\in\mathbb{N}\}$ para $n<N$, de donde $(x,y)\notin \mathrm{Lsup}(f_n)$. Se sigue entonces que $\mathrm{Lsup}(f_n)\subset f$ y por lo tanto la convergencia topológica de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a f.

Inversamente. Supongamos que $C([0,1],Y)$ es no trivial, es decir, existe $\varphi:[0,1]\longrightarrow Y$ continua tal que $\varphi(0)\neq\varphi(1)$. Si X no es discreto entonces debe tener un punto de acumulación, digamos x_o, consideremos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X convergente a x_o y tal que $d_x(x_o,x_{n+1})<d_x(x_o,x_n)$. Sea $\alpha_n = d_x(x_o,x_n)$ y definamos, para cada $n\in\mathbb{N}$, la función $f_n:X\longrightarrow Y$ como:

$$f_n(x)=\begin{cases}\varphi\left[\dfrac{1}{\alpha_n}d_x(x_o,x)\right] & \text{si } 0\leq d_x(x_o,x)\leq\alpha_n\\ \varphi\left[2-\dfrac{1}{\alpha_n}d_x(x_o,x)\right] & \text{si } \alpha_n\leq d_x(x_o,x)\leq 2\alpha_n\\ \varphi(0) & \text{si } d_x(x_o,x)\geq 2\alpha_n\end{cases}$$

Tenemos que f_n es continua para cada $n\in\mathbb{N}$. Sea $f:X\longrightarrow Y$ la función constante igual a $\varphi(0)$. Afirmamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f. En efecto, sea $x\in X$ arbitrario, si $x=x_o$ entonces $f_n(x)=\varphi(0)$ para todo $n\in\mathbb{N}$, si $x\neq x_o$ entonces $d_X(x,x_o) > 0$ y puesto que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero debe existir $N\in\mathbb{N}$ tal que $d_X(x,x_o) > 2\alpha_n$ si $n \geq N$, y así $f_n(x) = \varphi(0)$ para toda $n \geq N$. Se sigue de lo anterior la convergencia puntual. Sin embargo, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge topológicamente a f, pues $f_n(x_n) = \varphi(1)$ para cada $n\in\mathbb{N}$ y así la sucesión $((x_n,f_n(x_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $(x_o, \varphi(1))$, o sea que no se cumple la condición (i) de la proposición II.4. ■

La hipótesis de que X sea discreto es esencial para que convergencia puntual implique convergencia topológica. En el siguiente ejemplo los espacios X y Y son compactos y conexos, sin embargo convergencia puntual en $C(X,Y)$ no implica convergencia topológica.

EJEMPLO II.21

Sean $X = Y = [0,1]$ (considerado como subespacio de $\mathbb{R}$) y $f: X \longrightarrow Y$ la función constante cero. Para cada $n\in\mathbb{N}$ definimos la función $f_n: X \longrightarrow Y$ mediante la fórmula

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2 - nx & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{2}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Es claro que cada función f_n es continua y que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f. Sin embargo, la convergencia no es topológica, pues la sucesión $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero, pero la sucesión $(f_n(1/n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $1 \neq f(0)$, por lo cual no se cumple la condición (i) de la proposición II.4.

Así pues, si X es discreto entonces convergencia puntual implica convergencia topológica. Podríamos preguntarnos si la hipótesis de que X sea discreto es también suficiente para afirmar que convergencia puntual implique $\delta\rho$-convergencia. El ejemplo II.19 responde esta pregunta.

Siendo X y Y espacios métricos arbitrarios (o aún compactos y conexos) no podemos asegurar que convergencia puntual implique convergencia topológica para sucesiones arbitrarias en $C(X,Y)$. No obstante si la sucesión en cuestión es puntualmente equicontinua entonces convergencia puntual en $C(X,Y)$ implica convergencia topológica.

PROPOSICION II.22

Sean (X,d_x), (Y,d_y) espacios métricos arbitrarios y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones puntualmente equicontinua en $C(X,Y)$. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a $f\in C(X,Y)$ si y sólo si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge topológicamente a f.

DEMOSTRACION

Supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f pero que la convergencia no es topológica, puesto que la convergencia puntual implica que $f\subset \mathrm{Linf}(f_n)$, debemos tener que $\mathrm{Lsup}(f_n)\not\subset f$. Así pues, sea $(x,y)\in \mathrm{Lsup}(f_n)-f$, tomemos $0<\varepsilon<d_y(f(x),y)$. Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es puntualmente equicontinua existe $0<\delta<\varepsilon/3$ tal que $d_x(x,w)<\delta$ implica $d_y(f_n(x),f_n(w))<\varepsilon/3$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Por otra parte, puesto que $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ entonces existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $n\geq N$ implica $d_y(f_n(x),f(x))<\varepsilon/3$, pero como $(x,y)\in \mathrm{Lsup}(f_n)$ entonces su vecindad $B_\delta(x)\times B_\delta(y)$ intersecta a f_n para una infinidad de índices n, en particular existe $(w,f_{n_0}(w))\in B_\delta(x)\times B_\delta(y)$ con $n_0>N$, de aquí se tiene que:

$$d_y(f(x),y)\leq d_y(f(x),f_{n_0}(x))+d_y(f_{n_0}(x),f_{n_0}(w))+d_y(f_{n_0}(w),y)<\varepsilon$$

lo que es una contradicción, por lo cual debemos tener que $\mathrm{Lsup}(f_n)\subset f$ y por consiguiente $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge topológicamente a f.

Inversamente, supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge topológicamente a f. Sean $x\in X$ y $\varepsilon>0$ arbitrarios. Por el inciso (ii) de la proposición II.4, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X convergente a x para la cual $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$. Así existe $N_1\in\mathbb{N}$ tal que $n\geq N_1$ implica $d_y(f_n(x_n),f(x))<\varepsilon/2$. Por otra parte, como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es puntualmente equicontinua entonces existe $\delta>0$ tal que $d_x(y,x)<\delta$ implica $d_y(f_n(y),f_n(x))<\varepsilon/2$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Sea $N_2\in\mathbb{N}$ tal que $d_x(x_n,x)<\delta$ si $n\geq N_2$. Entonces $n\geq N_2$ implica $d_y(f_n(x_n),f_n(x))<\varepsilon/2$. Sea $N=\max\{N_1,N_2\}$. Entonces si $n\geq N$ se tiene:

$$d_y(f_n(x),f(x))\leq d_y(f_n(x),f_n(x_n))+d_y(f_n(x_n),f(x))<\varepsilon$$

De la desigualdad anterior concluimos que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$. Y, por consiguiente $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f. ■

COROLARIO II.23

Sean (X,d_x) un espacio métrico discreto, (Y,d_y) un espacio métrico arbitrario y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $F(X,Y)$ (el conjunto de funciones de X en Y).- Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge topológicamente a $f\in F(X,Y)$ entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f.

DEMOSTRACION

Observando que la hipótesis de que X sea discreto implica que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es puntualmente equicontinua, la afirmación es inmediata a partir de la proposición II.22 ∎

Volviendo a la proposición II.22, vemos que bajo la hipótesis de equicontinuidad puntual de la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergencia puntual y convergencia topológica son equivalentes. Sin embargo ésta condición pedida a la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es suficiente para afirmar que convergencia puntual implique δ_ρ-convergencia. El siguiente ejemplo confirma lo anteriormente dicho. No obstante, en la proposición II.32 veremos que la condición de que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sea puntualmente equicontinua aunada con la compacidad del espacio X será suficiente para afirmar que convergencia puntual no solo implica δ_ρ-convergencia sino convergencia uniforme.

EJEMPLO II.24

Sean $X = Y = \mathbb{R}$ y $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la función constante cero. Para cada $n\in\mathbb{N}$ definimos la función $f_n(x) = \frac{x}{n}$ con $x\in\mathbb{R}$.

La sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente equicontinua, pues dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, basta tomar $\delta = \varepsilon$ para afirmar que si $|x-y|<\delta$ entonces $|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon$ para toda $n\in\mathbb{N}$. Además es claro que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f. Sin embargo, $\delta_\rho(f_n,f) = \infty$ para toda $n\in\mathbb{N}$, es decir, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no δ_ρ-converge a f.

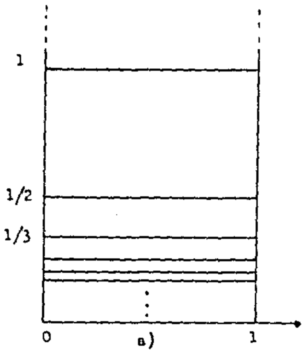
Buscando otras condiciones suficientes para que convergencia topológica implique convergencia puntual, recordamos la proposición II.16, así podemos asegurar que si X es compacto con un número finito de componentes conexas y Y es localmente compacto, entonces convergencia topológica implica convergencia puntual (de hecho la proposición II.16 asegura la convergencia uniforme). Sin embargo estas condiciones impuestas a los espacios X y Y son "muy fuertes", trataremos de"debilitar" un poco las condiciones de X. Recordamos la siguiente definición:

DEFINICION II.25

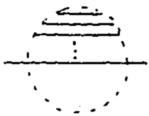
Un espacio (X,d_X) se llama localmente conexo si cada $x \in X$ tiene una base de vecindades formada por conjuntos abiertos y conexos.

OBSERVACION

Los conceptos de espacio conexo y espacio localmente conexo son independientes, es decir, ninguno de ellos implica al otro. Por ejemplo $X = [0,1) \cup (1,2]$ es localmente conexo pero no es conexo, inversamente, si X es el subespacio del plano consistente de las lineas verticales $x = 0$ y $x = 1$, de los segmentos de lines horizontales $\{(x,1/n): 0 \leq x \leq 1,\ n \in \mathbb{N}\}$ y el intervalo $[0,1]$, entonces X es conexo pero no es localmente conexo.



a)


b)

En la figura a) se muestra el espacio X, el cual no es localmente conexo pues para los puntos del intervalo (0,1), para ε suficientemente pequeño los "discos" de radio ε son disconexos, tal como se muestra en la figura b).

Una propiedad importante de los espacios localmente conexos, es que sus componentes conexas son conjuntos abiertos, y como una consecuencia de esto tenemos que los espacios compactos localmente conexos tienen un número finito de componentes conexas. Tomando en cuenta esto podemos afirmar que si X es compacto y localmente conexo, y, Y es localmente compacto entonces convergencia topológica implica convergencia uniforme y por lo tanto puntual en $C(X,Y)$. En la siguiente proposición queda de manifiesto que la condición de la compacidad de X se puede suprimir (en lo relativo a la implicación de la convergencia puntual), de hecho nos da condiciones de suficiencia para el inverso de la proposición II.22

PROPOSICION II.26

Sean (X,d_x) un espacio métrico localmente conexo y (Y,d_y) un espacio métrico localmente compacto. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $C(X,Y)$ topológicamente convergente a una función f, entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es puntualmente equicontinua.

DEMOSTRACION

Supongamos que para alguna $x\in X$ $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $f(x)$. Entonces existen $\varepsilon > 0$ y una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $d_y(f_{n_k}(x),f(x))\geq\varepsilon$ para todo $k\in\mathbb{N}$, ahora como $\operatorname{Linf}(f_n) = f$, existe una sucesión $((w_n,f_n(w_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a $(x,f(x))$. Si tomamos únicamente los índices que corresponden a la subsucesión anterior, tendremos una subsucesión $((w_{n_k},f_{n_k}(w_{n_k})))_{k\in\mathbb{N}}$ de $((w_n,f_n(w_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a $(x,f(x))$, pero como X es localmente conexo, x tiene una base de vecinades formada por conjuntos abiertos y conexos, asi pues, para cada $i\in\mathbb{N}$ existe C_i abierto y conexo tal que $C_i\subset B_{1/i}(x)$. y puesto que $(w_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x podemos tomar $w_{n_{k_i}}\in C_i$ con la condición de que $k_{i-1} < k_i$ para $i = 2,3,\ldots$. De esta forma hemos construido una subsucesión $(w_{n_{k_i}})_{i\in\mathbb{N}}$ convergente a x tal que $w_{n_{k_i}}\in C_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$, y, además se tiene $\lim_{i\to\infty} \operatorname{diam}(C_i) = 0$. Por otra parte, como Y es localmente compacto entonces $f(x)$ tiene una vecindad V compacta, tomemos $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ de tal forma que:

$$E = \{ y \in Y : d_y(f(x),y) = \varepsilon' \} \subset V$$

Observamos que como E es cerrado y $E \subset V$ entonces resulta que E es compacto. Puesto que $(f_{n_{k_i}}(w_{n_{k_i}}))_{i \in \mathbb{N}}$ converge a $f(x)$ existe $I \in \mathbb{N}$ tal que $d_y(f_{n_{k_i}}(w_{n_{k_i}}), f(x)) < \varepsilon'$ si $i \geq I$, pero entonces para $i \geq I$ se tiene que $f_{n_{k_i}}(C_i)$ intersecta tanto a $\{ y \in Y : d_y(y,f(x)) < \varepsilon' \}$ como a $\{ y \in Y : d_y(y,f(x)) > \varepsilon' \}$, (pues $x, w_{n_{k_i}} \in C_i$, $d_y(f_{n_{k_i}}(x),f(x)) \geq \varepsilon > \varepsilon'$ y $d_y(f_{n_{k_i}}(w_{n_{k_i}}),f(x)) < \varepsilon'$).

Tomando en cuenta que $f_{n_{k_i}}$ es continua y C_i es conexo podemos afirmar que $f_{n_{k_i}}(C_i) \cap E \neq \emptyset$ para $i \geq I$, con lo que tenemos $\operatorname{Lsup}(f_{n_{k_i}}(C_i) \cap E) \neq \emptyset$. En efecto, sea $a_i \in f_{n_{k_i}}(C_i) \cap E$ para cada $i \geq I$, la sucesión $(a_i)_{i \geq I}$ tiene una subsucesión $(a_{i_j})_{j \in \mathbb{N}}$ convergente pues E es compacto, si suponemos que $(a_{i_j})_{j \in \mathbb{N}}$ converge a $y_o \in E$ entonces $y_o \in \operatorname{Lsup}(f_{n_{k_i}}(C_i) \cap E)$, pero entonces $(x,y_o) \in \operatorname{Lsup}(f_n)$, puesto que si $\delta > 0$ entonces $C_i \subset B_\delta(x)$ para i suficientemente grande, ya que $\lim_{i\to\infty} \operatorname{diam}(C_i) = 0$, de donde $f_{n_{k_i}}(C_i) \subset f_{n_{k_i}}(B_\delta(x))$, de esta forma $(C_i \times B_\delta[y_o]) \cap f_{n_{k_i}} \neq \emptyset$, pero:

$$(C_i \times B_\delta[y_o]) \subset (B_\delta[x] \times B_\delta[y_o]) = B_\delta[(x,y_o)]$$

asi pues, $B_\delta[(x,y_o)] \cap f_{n_{k_i}} \neq \emptyset$, teniendo esto como consecuencia que $(x,y_o) \in \operatorname{Lsup}(f_n)$, pero $(x,y_o) \notin f$ ya que $y_o \in E$, por lo cual $\operatorname{Lsup}(f_n) \neq f$, lo que es una contradicción. Así pues $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente a f.

Supongamos ahora que para alguna $x \in X$ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no es equicontinua. Entonces existen $\varepsilon > 0$, una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y una sucesión $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a x tales que $d_y(f_{n_k}(z_k),f_{n_k}(x)) \geq 2\varepsilon$ para cada $k\in\mathbb{N}$, pero ya se demostró que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f, por lo cual $(f_{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$, así que existe $K'\in\mathbb{N}$ tal que $k \geq K'$ implica $d_y(f_{n_k}(x),f(x)) \leq \varepsilon$, de donde para $k \geq K'$ se tiene $d_y(f_{n_k}(z_k),f(x)) \geq \varepsilon$. Si observamos la primera parte de la demostración, en ella fue esencial el hecho de que $d_y(f_{n_k}(x),f(x)) \geq \varepsilon$. Asi pues si reemplazamos $(x,f_{n_k}(x))$ por $(z_k,f_{n_k}(z_k))$ se puede argumentar de una forma similar para llegar finalmente a la misma contradicción. Por lo cual concluimos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ debe ser puntualmente equicontinua. ■

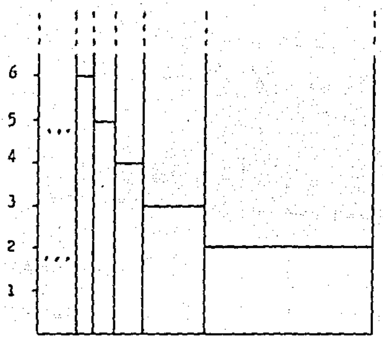
Algunas observaciones que podemos hacer acerca de esta proposición es que no podemos suprimir la condición de que el espacio Y sea localmente compacto, aún pidiendo que X sea compacto. como un ejemplo de esto recordemos el ejemplo II.13, en él se probó que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge topológicamente a la función f, donde $f(x) = xe_1$ para $x\in X$. Sin embargo, $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $f(0) = \tilde{0}$ ya que $d_y(f_n(0),f(0)) = 1$ para todo $n\in\mathbb{N}$, asi que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge puntualmente a f.

Similarmente la condición de que X sea localmente conexo no se puede suprimir, aún pidiendo que X sea compacto. Para convencernos de esto recordemos el ejemplo II.8. Ahora bien, podríamos suponer que en este ejemplo la convergencia puntual no se cumple debido a que X tiene una infinidad de componentes conexas, así podríamos preguntarnos, ¿bastará con que X sea conexo y Y localmente compacto para que convergencia topológica implique convergencia puntual o equicontinuidad puntual?. La respuesta es negativa, de hecho podemos considerar el siguiente ejemplo.

EJEMPLO II.27

Para cada $n\in\mathbb{N}$ sea $E_n = \left\{(x,n+1)\in\mathbb{R}^2 : \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}\right\}$, y sean $A = \left\{(0,y)\in\mathbb{R}^2 : y \geq 0\right\}$ y $B = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq 0,\ x = \frac{1}{n} \text{ para alguna } n\in\mathbb{N}\right\}$.

Sea $X = A \cup B \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ (considerado como subespacio de $\mathbb{R}^2$).

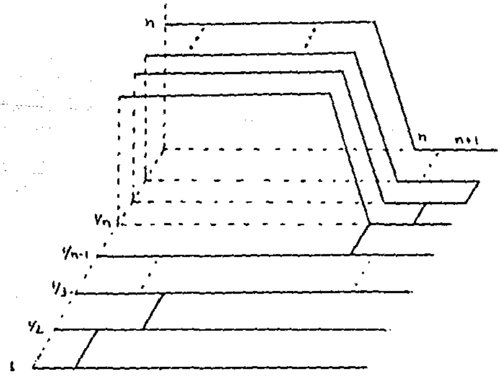


Espacio X

Resulta que X es conexo y cerrado pero no es localmente conexo. En efecto, X es conexo, pues $B \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ es conexo por trayectorias y por lo tanto conexo, y de aquí que $X = \overline{B \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}$ sea conexo. Sin embargo X no es localmente conexo, pues cualquier vecindad de un punto de la forma $(0,y)$ con $y \geq 0$ es disconexa.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la función $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$f_n(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; x > \frac{1}{n} \quad o \quad y > n \\ n & \text{si } \; x \leq \frac{1}{n} \quad y \quad y \leq n-1 \\ -n(y-n) & \text{si } \; x \leq \frac{1}{n} \quad y \quad n-1 \leq y \leq n \end{cases}$$



Gráfica de la función f_n

Es claro que cada función f_n es continua. Sea $f:X \longrightarrow \mathbb{R}$ la función constante cero. Afirmamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge topológicamente a f. En efecto, si $(x,y)\in X$ con $x > 0$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica $\frac{1}{n} < x$, por lo cual $f_n(x,y) = 0$ para todo $n \geq N$, así que $((x,y,f_n(x,y)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $(x,y,0)$. Por otra parte, si consideramos un punto de la forma $(0,y)$ con $y \geq 0$, la sucesión $((\frac{1}{n-1}, y, f_n(\frac{1}{n-1},y)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $(0,y,0)$. Hasta aquí tenemos que $f \subset \mathrm{Linf}(f_n)$. Para ver que $\mathrm{Lsup}(f_n) \subset f$, sea $(x,y,z) \in \mathrm{Lsup}(f_n)$, puede suceder que:

i) $x > 0$. En este caso se debe tener que $z = 0$, pues $f_n(x,y) = 0$ para n suficientemente grande, de donde $(x,y,z)\in f$.

ii) $x = 0$. También en este caso se debe tener que $z = 0$, pues si $z \neq 0$ al tomar $\delta = \min\{1,|z|\}$ y $(x_0,y_0,z_0)\in B_\delta((x,y,z))$ se cumple que a la larga $f_n(x_0,y_0) = n$ o $f_n(x_0,y_0) = 0$, por lo que $B_\delta((x,y,z)) \cap f_n = \emptyset$ para todo n suficientemente grande, contradiciendo el hecho de que $(x,y,z)\in \mathrm{Lsup}(f_n)$. Así pues $(x,y,z)\in f$.

Tomando en cuenta la conclusión de ambos casos tenemos que $\mathrm{Lsup}(f_n) \subset f$. De aquí que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja topológicamente a f. Sin embargo $f_n(0,0) = n$ para todo $n\in\mathbb{N}$, por lo cual $(f_n(0,0))_{n\in\mathbb{N}}$ no es convergente, así que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge puntualmente a f. Similarmente $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es equicontinua en $(0,0)$, pues dado $\varepsilon = 1$ y $\delta > 0$ arbitraria, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0-1} < \delta$, de donde $(\frac{1}{n_0-1},0)\in B_\delta((0,0))$ y sin embargo $|f_{n_0}(\frac{1}{n_0-1},0) - f_{n_0}(0,0)| = n_0$.

En el ejemplo precedente se utilizó el punto $(0,0)$ para justificar la no convergencia puntual de la sucesión, de hecho la sucesión no converge puntualmente para los puntos de la forma $(0,y)$, sin embargo la sucesión converge puntualmente para los puntos de la forma (x,y) con $x > 0$. Veamos ahora un ejemplo en el cual se tiene convergencia topológica pero en ningún punto del dominio se cumple convergencia puntual. En el ejemplo prescindiremos de la hipótesis de que X sea conexo.

Antes de ver el ejemplo recordemos los siguientes conceptos.

DEFINICION II.28

Sea F_o el intervalo $[0,1]$. Separemos el intervalo $(1/3,2/3)$, y sea:

$$F_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$$

Separemos los tercios centrales de estos intervalos y sea

$$F_2 = [0,1/9] \cup [2/9,3/9] \cup [6/9,7/9] \cup [8/9,1]$$

Continuando este proceso obtenemos una sucesión decreciente de conjuntos F_n. Sea $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$, a tal conjunto se le llama el conjunto ternario de Cantor o simplemente el conjunto de Cantor.

DEFINICION II.29

Sea (X,d_x) un espacio métrico y sean A, $B \subset X$, se dice que A es denso en B si $B \subset \overline{A}$. También, si $C \subset X$ se dice que C es denso en ninguna parte si C no es denso en cualquier conjunto abierto distinto del vacio o equivalentemente si $X - \overline{C}$ es un abierto denso en X. (ver apéndice A).

OBSERVACIONES

a) El conjunto de Cantor F es un subconjunto denso en ninguna parte en $[0,1]$.

b) Para cada $j \in \mathbb{N}$ podemos seleccionar j puntos $\{a_{j_1}, a_{j_2},\ldots,a_{j_j}\}$ en $[0,1] - F$ que satisfacen las siguientes condiciones:

i) $a_{j_1} < a_{j_2} < a_{j_3} < \ldots < a_{j_j}$

ii) $[0,1] \subset \bigcup_{i=1}^{j} B_{1/j}[a_{j_i}]$

En efecto, si $j = 1$ tomamos $a_{1_1} = 1/2$. Si $j \geq 2$ basta tomar

$$a_{j_k} \in \left(\frac{(k-1)(j+2)}{j(j+1)}, \frac{2+(k-1)(j+2)}{j(j+1)}\right) \cap \left([0,1] - F\right) \quad \text{para } k = 1,2,\ldots,j$$

a_{j_k} existe, pues F no puede contener a ningun intervalo abierto. Es claro que $a_{j_k} < a_{j_{k+1}}$ para $k = 1,2,\ldots,j$, pues

$$\frac{2+(k-1)(j+2)}{j(j+1)} < \frac{k(j+2)}{j(j+1)} \quad \text{para } k = 1,2,\ldots,j$$

y además (ii) se cumple puesto que:

$$\frac{2+k(j+2)}{j(j+1)} - \frac{(k-1)(j+2)}{j(j+1)} = \frac{j+4}{j(j+1)} \leq \frac{2}{j} \qquad \text{si } j \geq 2$$

EJEMPLO II.30

Sean $X = F$ (el conjunto de Cantor) y $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ la función constante cero. De acuerdo a la observación anterior para cada $j \in \mathbb{N}$ podemos seleccionar j puntos $\{a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_j}\}$ en $[0,1] - X$ que satisfacen:

i) $a_{j_1} < a_{j_2} < \ldots < a_{j_j}$

ii) $[0,1] \subset \bigcup_{i=1}^{j} B_{1/j}[a_{j_i}]$

Denotemos por $I(j,1) = [0, a_{j_1}]$, $I(j,2) = [a_{j_1}, a_{j_2}], \ldots, I(j,j+1) = [a_{j_j}, 1]$. -

Observemos que $\{I(j,k): k = 1,2,\ldots,j+1;\ j \in \mathbb{N}\}$ es una familia numerable de subconjuntos de $[0,1]$ que podemos ordenar totalmente de la siguiente forma:

$$I(j,k) < I(j',k') \quad \text{si } j < j' \quad \text{o} \quad \text{si } j = j' \text{ y } k < k'$$

De esta forma podemos dar una numeración $\varphi: \mathbb{N} \longrightarrow \{I(j,k): k=1,2,\ldots,j+1;\ j \in \mathbb{N}\}$ de $\{I(j,k): k=1,2,\ldots,j+1;\ j \in \mathbb{N}\}$ que preserva el orden. Denotemos a $\varphi(n)$ por $I(j_n,k_n)$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la función $f_n: X \longrightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

a) Si $0 \in I(j_n,k_n)$

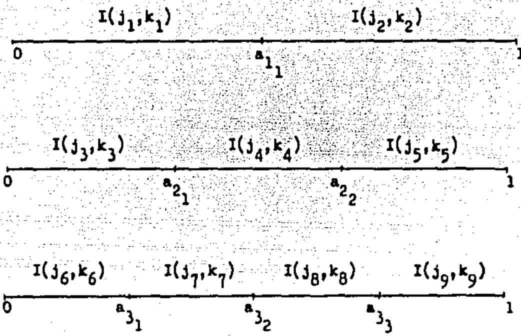
$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in I(j_n,k_n) \\ 0 & \text{si } x \in X - (\operatorname{int}(I(j_n,k_n)) \cup \{0\}) \end{cases}$$

b) Si $1 \in I(j_n,k_n)$

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in I(j_n,k_n) \\ 0 & \text{si } x \in X - (\operatorname{int}(I(j_n,k_n)) \cup \{1\}) \end{cases}$$

c) Si $0,1 \notin I(j_n,k_n)$

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in I(j_n,k_n) \\ 0 & \text{si } x \in X - \operatorname{int}(I(j_n,k_n)) \end{cases}$$



Tenemos que cada f_n está bien definida y además es continua, pues es continua en cada uno de los conjuntos cerrados. Ahora, si x_0 es un punto arbitrario de X entonces $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ no es convergente, de hecho ni siquiera es acotada, pues $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ es de la forma $(0,\ldots,0,n_1,0,\ldots,0,n_2,0,\ldots,0,n_3,0,\ldots\ldots)$, donde $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente de números naturales tales que $x_0 \in I(j_{n_k},k_{n_k})$ para cada $k\in\mathbb{N}$. De este modo para ningún punto $x\in X$ $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ resulta ser convergente. Sin embargo afirmamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge topológicamente a f. En efecto, dado $x_0\in X$ afirmamos que podemos encontrar una sucesión $((x_n,f_n(x_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a $(x_0,0)$ (dejamos pendiente la justificación de esta afirmación para darla al final del ejemplo), de esta forma $(x_0,0)\in \mathrm{Linf}(f_n)$ y así $f\subset \mathrm{Linf}(f_n)$. Por otra parte si $(x,y)\notin f$ entonces $y\neq 0$, podemos suponer $y>0$ (el caso $y<0$ se analiza de una forma análoga). Si tomamos $\delta > y$ tendremos que $X\times(0,\delta)$ es una vecindad de (x,y) y podemos encontrar $N\in\mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $n\geq N$ implica

$$f_n\cap(X\times(0,\delta))=\emptyset$$

Así $(x,y)\notin \mathrm{Lsup}(f_n)$, de aquí que $\mathrm{Lsup}(f_n)\subset f$. Por consiguiente $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge topológicamente a f.

Sólo falta justificar la existencia de la sucesión $((x_n,f_n(x_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a $(x_0,0)$. Con este propósito para cada $n\in\mathbb{N}$ definimos el conjunto:

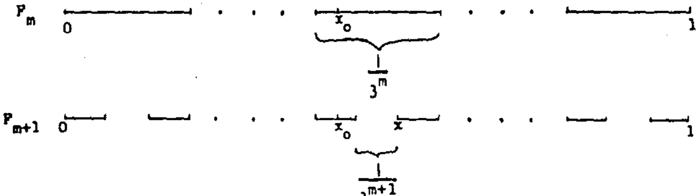
$$A_n = \{x \in X: f_n(x) \neq 0\}$$

Observemos que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0$. También para cada $m \in \mathbb{N}$ definimos

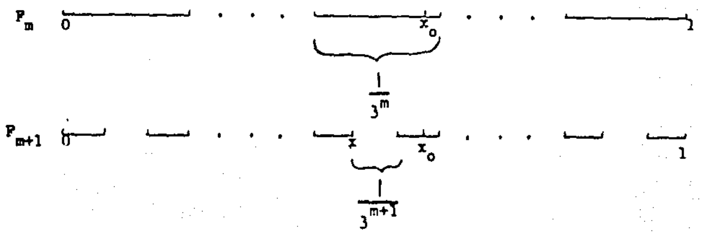
$$D_m(x_o) = \left\{x \in X: \frac{1}{3^{m+1}} \leqslant |x - x_o| < \frac{1}{3^m}\right\}$$

Tenemos que estos conjuntos son no vacios, pues $x_o \in F_{m+1}$ (donde este conjunto es uno de los conjuntos a partir de los cuales se construye el conjunto de Cantor), y como los extremos de cada intervalo de F_m pertenecen a X, entonces podemos encontrar $x \in X$ tal que $\frac{1}{3^{m+1}} \leqslant |x - x_o| < \frac{1}{3^m}$. Para esto basta tomar x de acuerdo al siguiente criterio:

a) Si x_o se encuentra a la izquierda del punto medio de uno de los intervalos que componen F_m entonces tomamos como x al extremo izquierdo del intervalo siguiente en F_{m+1}



b) Si x_o se encuentra a la derecha del punto medio de uno de los intervalos que componen F_m entonces tomamos como x al extremo derecho del intervalo anterior en F_{m+1}



Puesto que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N_1$ implica diam$(A_n) < \frac{1}{3}$, análogamente para cada $m \in \mathbb{N} - \{1\}$ existe $N_m > N_{m-1}$ tal que $n \geq N_m$ implica diam$(A_n) < \frac{1}{3^m}$, observemos que $n \geq N_m$ y $f_n(x_o) \neq 0$ implican $A_n \subset B_{1/3^m}(x_o)$, pues si $x \in A_n$ entonces como diam$(A_n) < \frac{1}{3^m}$ y $x_o \in A_n$ entonces $|x - x_o| < \frac{1}{3^m}$ y así $x \in B_{1/3^m}(x_o)$.

Tomemos ahora $y_m \in D_m(x_o)$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Debe suceder que $y_m \notin A_n$ si $f_n(x_o) \neq 0$ y $n \geq N_{m+1}$, pues $A_n \subset B_{1/3^{m+1}}(x_o)$ y $|y_m - x_o| \geq \frac{1}{3^{m+1}}$. De aquí tenemos que $f_n(y_m) = 0$ si $f_n(x_o) \neq 0$ y $n \geq N_{m+1}$.

Definimos la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la siguiente manera:

$$x_n = \begin{cases} x_o & \text{si } n \leq N_2 - 1 \\ \\ z_{m-1} & \text{si } N_m \leq n \leq N_{m+1} - 1 \qquad \text{con } m \geq 2 \end{cases}$$

Donde

$$z_{m-1} = \begin{cases} y_{m-1} & \text{si } f_{n_j}(x_o) \neq 0 \\ & \qquad\qquad\qquad \text{con } N_m \leq n_j \leq N_{m+1} - 1 \\ x_o & \text{si } f_{n_j}(x_o) = 0 \end{cases}$$

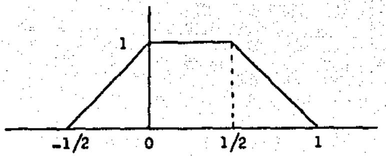
Así la sucesión $((x_n, f_n(x_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $(x_o, 0)$, puesto que $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge a x_o y $f_n(z_m) = 0$ para $n \geq N_2$. ■

En relación a la proposición II.26, tenemos el siguiente ejemplo que muestra que suprimiendo la hipótesis que Y sea localmente compacto se puede tener convergencia topológica sin que haya convergencia puntual en punto alguno. En el ejemplo el espacio X además de ser localmente conexo es conexo y compacto.

EJEMPLO II.31

Definimos la función $g_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como

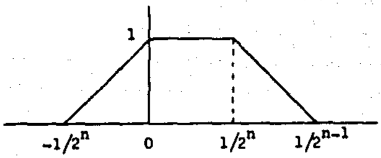
$$g_1(x) = (1 + 2x)\chi_{[-1/2,0)} + \chi_{[0,1/2)} - 2(x-1)\chi_{[1/2,1]}$$



Gráfica de la función g_1

Para cada $n \geq 2$ definimos la función $g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como:

$$g_n(x) = g_1(2^{n-1}x)$$

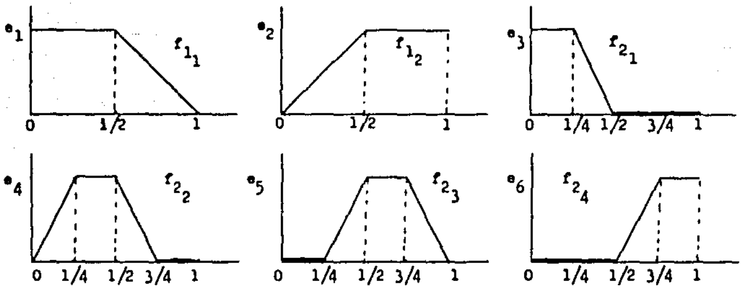


Gráfica de la función g_n para $n \geq 2$

Para $n \in \mathbb{N}$ e $1 \leq i \leq 2^n$ definimos la función $f_{n_i} : [0,1] \longrightarrow \ell^2$ como:

$$f_{n_i}(x) = g_n\left(x - \frac{i-1}{2^n}\right) e_{2^n+i-2}$$

(donde $\{e_i\}$ es la base ortonormal canónica de ℓ^2)



Gráficas de las funciones f_{1_1}, f_{1_2}, f_{2_1}, f_{2_2}, f_{2_3} y f_{2_4}

Finalmente para cada $m \in \mathbb{N}$ sea $f_m = f_{n_i}$, donde (n,i) es la única pareja con $n \in \mathbb{N}$ e $1 \leqslant i \leqslant 2^n$ tal que $m = 2^n+i-2$.

Tenemos que la sucesión $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ está contenida en $C([0,1], \ell^2)$. Afirmamos que $(f_m(x))_{m \in \mathbb{N}}$ es divergente para cada $x \in [0,1]$. En efecto, sea $x \in [0,1]$ y supongamos que $(f_m(x))_{m \in \mathbb{N}}$ converge. Entonces $(f_m(x))_{m \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Así existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $m, m' \geqslant 2^N-2$ implica

$$\left\| f_m(x) - f_{m'}(x) \right\|_2 < \sqrt{2}$$

Sea $n \geqslant N$ entonces existen $1 \leqslant i \leqslant 2^n$ y $1 \leqslant j \leqslant 2^{n+1}$ tales que:

$$\frac{i-1}{2^n} \leqslant x \leqslant \frac{i}{2^n} \qquad \text{y} \qquad \frac{j-1}{2^{n+1}} \leqslant x \leqslant \frac{j}{2^{n+1}}$$

Sean $m = 2^n+i-2$ y $m' = 2^{n+1}+j-2$, entonces $m, m' > 2^N-2$ y por lo tanto $\left\|f_m(x) - f_{m'}(x)\right\|_2^2 < 2$, pero:

$$f_m(x) = f_{n_i}(x) = g_1\left(2^{n-1}\left(x - \frac{i-1}{2^n}\right)\right)e_m$$

y

$$f_{m'}(x) = f_{(n+1)_j}(x) = g_1\left(2^n\left(x - \frac{j-1}{2^{n+1}}\right)\right)e_{m'}$$

Tomando en cuenta que $\frac{i-1}{2^n} \leqslant x \leqslant \frac{i}{2^n}$ notamos que se cumple que:

$$0 \leqslant x - \frac{i-1}{2^n} \leqslant \frac{1}{2^n} \qquad \text{y de aqui} \qquad 0 \leqslant 2^{n-1}\left(x - \frac{i-1}{2^n}\right) \leqslant \frac{1}{2}$$

Similarmente de $\frac{j-1}{2^{n+1}} \leqslant x \leqslant \frac{j}{2^{n+1}}$ se sigue que $0 \leqslant 2^n\left(x - \frac{j-1}{2^{n+1}}\right) \leqslant \frac{1}{2}$

Así $f_m(x) = e_m$ y $f_{m'}(x) = e_{m'}$, pero $m' > m$ por lo cual $\left\|f_m(x) - f_{m'}(x)\right\|_2 = \sqrt{2}$. Lo que es una contradicción.

Por otra parte si $f:[0,1] \longrightarrow \ell^2$ es la función constante cero. Afirmamos que $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge topológicamente a f. Para justificar esta afirmación hagamos primero las siguientes observaciones:

Para cada pareja (n,i) con $n \geqslant 2$ e $1 < i < 2^n$ se tiene:

$$\left\{x : f_{n_i}(x) \neq \bar{0}\right\} = \left(\frac{i-2}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right)$$

En tanto que para $n \geqslant 2$ se tiene tambien

$$\left\{x : f_{n_1}(x) \neq \bar{0}\right\} = \left[0, \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

Y

$$\left\{x : f_{n_{2^n}}(x) \neq \bar{0}\right\} = \left(\frac{2^n-2}{2^n}, 1\right]$$

En efecto. Sean $n \geqslant 2$ e $1 < i < 2^n$, entonces $f_{n_i}(x) \neq \bar{0}$ si y sólo si

$$2^{n-1}\left(x - \frac{i-1}{2^n}\right) \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$$

de donde

$$-\frac{1}{2^n} + \frac{i-1}{2^n} < x < \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{i-1}{2^n}$$

y de aquí

$$\frac{i-2}{2^n} < x < \frac{i+1}{2^n}$$

Similarmente, $f_{n_1}(x) \neq \bar{0}$ si y sólo si $2^{n-1}x \in (-1/2, 1)$, es decir

$$-\frac{1}{2^n} < x < \frac{1}{2^{n-1}}$$

Pero como $x \in [0,1]$, entonces lo anterior es equivalente a:

$$0 \leqslant x < \frac{1}{2^{n-1}}$$

Finalmente, $f_{n_{2^n}}(x) \neq \bar{0}$ si y sólo si $2^{n-1}\left(x - \frac{2^n-1}{2^n}\right) \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

De donde

$$-\frac{1}{2^n} + \frac{2^n-1}{2^n} < x < \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{2^n-1}{2^n}$$

es decir

$$\frac{2^n-2}{2^n} < x < \frac{2^n+1}{2^n}$$

nuevamente como $x \in [0,1]$ esto es equivalente a:

$$\frac{2^n-2}{2^n} < x \leqslant 1$$

Se probará ahora que $f \subset \mathrm{Linf}(f_m)$. Sea $x \in [0,1]$, y sean $x_1, x_2 \in [0,1]$ arbitrarios. Para $m \geq 3$ definimos $x_m = x$ si $f_m(x) = \bar{0}$, y, si $f_m(x) \neq \bar{0}$ entonces definimos x_m de acuerdo al criterio que se da a continuación:

Como $f_m(x) \neq \bar{0}$ entonces $f_{n_i}(x) \neq \bar{0}$ donde $m = 2^n+i-2$ con $n \geq 2$ e $1 \leq i \leq 2^n$, por lo anterior:

a) $x \in \left(\frac{i-2}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right)$ con $1 < i < 2^n$

b) $x \in \left[0, \frac{1}{2^{n-1}}\right)$, o bien

c) $x \in \left(\frac{2^n-2}{2^n}, 1\right]$

Definimos $x_m = \frac{i-2}{2^n}$, $x_m = \frac{1}{2^{n-1}}$, o bien $x_m = \frac{2^n-2}{2^n}$ de acuerdo a que se satisfaga a), b) o c) respectivamente.

Así, en este caso $x_m \in [0,1]$, $f_m(x_m) = \bar{0}$ y $|x_m - x| < \frac{3}{2^n}$. De donde la sucesión $((x_m, f_m(x_m)))_{m \in \mathbb{N}}$ converge a $(x,\bar{0})$ y de aquí se sigue que $f \subset \mathrm{Linf}(f_m)$.

Finalmente se probará que $\mathrm{Lsup}(f_m) \subset f$.

Sea $((x_k, f_{m_k}(x_k)))_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión convergente a (x,y), donde $(f_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ y $x_k \in [0,1]$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces $x \in [0,1]$ y $(f_{m_k}(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge a y. Si $f_{m_k}(x_k) \neq \bar{0}$ sólo para un número finito de índices k entonces $y = \bar{0}$ y se sigue la afirmación. Si $f_{m_k}(x_k) \neq \bar{0}$ para una infinidad de índices k, entonces $f_{m_k}(x_k) = \lambda_k e_{m_k}$ para una infinidad de índices k (donde $\lambda_k = g_1\left(2^{n-1}\left(x_k - \frac{i-1}{2^n}\right)\right)$ con $m_k = 2^n+i-2$), es decir la sucesión $(\lambda_k e_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge a y. Por lo que $(\lambda_k e_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, pero $\|\lambda_{k'} e_{m_{k'}} - \lambda_k e_{m_k}\|_2^2 = |\lambda_k|^2 + |\lambda_{k'}|^2 \geq \lambda_k^2$. O sea que $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ debe converger a cero. Por otra parte $\left(\|\lambda_k e_{m_k}\|_2\right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge a $\|y\|_2$ es decir $\|y\|_2 = 0$, y por consiguiente $y = \bar{0}$. ∎

PROPOSICION II.32

Sean (X,d_x) un espacio métrico compacto y (Y,d_y) un espacio métrico arbitrario, supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $C(X,Y)$ puntualmente convergente a una función continua f. Entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f si y sólo si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es puntualmente equicontinua.

DEMOSTRACION

Supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es puntualmente equicontinua. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, se probará que existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica

$$\sup\left\{d_y(f_n(x),f(x));\ x\in X\right\} \leq \varepsilon$$

Por la equicontinuidad puntual, para cada $x\in X$ existe $\delta_x > 0$ tal que si $d_x(x,y) < \delta_x$ entonces $d_y(f_n(x),f_n(y)) < \varepsilon/3$ para todo $n\in\mathbb{N}$, de aquí se tiene:

$$d_y(f(x),f(y)) = d_y(\lim_{n\to\infty} f_n(x), \lim_{n\to\infty} f_n(y)) = \lim_{n\to\infty} d_y(f_n(x),f_n(y)) \leq \varepsilon/3$$

Así $d_y(f(x),f(y)) \leq \varepsilon/3$ si $d_x(x,y) < \delta_x$.

Por otra parte como X es compacto existen $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$ tales que:

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} B_{\delta_{x_i}}(x_i)$$

Como para cada $x\in X$ $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$ podemos tomar $N\in\mathbb{N}$ suficientemente grande para que $n\geq N$ implique $d_y(f_n(x_i),f(x_i)) < \varepsilon/3$ para $i = 1,\dots,k$. Tomemos ahora $x\in X$ arbitrario, podemos encontrar $1\leq i\leq k$ con la propiedad $d_x(x,x_i) < \delta_{x_i}$, asi que si $n\geq N$ se tiene:

$$d_y(f_n(x),f(x)) \leq d_y(f_n(x),f_n(x_i)) + d_y(f_n(x_i),f(x_i)) + d_y(f(x_i),f(x)) < \varepsilon$$

Pero esto es válido para toda $x\in X$, por lo tanto si $n\geq N$ entonces:

$$\sup\left\{d_y(f_n(x),f(x): x\in X\right\} \leq \varepsilon$$

Inversamente, supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f. Sean $x_o \in X$ y $\varepsilon > 0$ arbitrarios, se probará que existe $\delta > 0$ tal que si $d_x(x,x_o) < \delta$ entonces $d_y(f_n(x),f_n(x_o)) < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f existe $N\in\mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $d_y(f_n(x),f(x)) < \varepsilon/3$ para todo $x \in X$. Por otra parte como f es uniformemente continua existe $\delta' > 0$ tal que $d_x(x,y) < \delta'$ implica $d_y(f(x),f(y)) < \varepsilon/3$.- Análogamente para cada $1 \leq i \leq N-1$ existe $\delta_i > 0$ tal que si $d_x(x,y) < \delta_i$ entonces $d_y(f_i(x),f_i(y)) < \varepsilon/3$. Sea

$$\delta = \min\left\{\delta',\ \delta_1,\ \delta_2,\ \ldots\ ,\ \delta_{N-1}\right\}$$

Entonces si $x \in X$ es tal que $d_x(x,x_o) < \delta$ se tiene

$$d_y(f_n(x),f_n(x_o)) \leq \varepsilon/3 < \varepsilon \qquad \text{si } n = 1, 2, \ldots, N-1 \qquad \text{y}$$

$$d_y(f_n(x),f_n(x_o)) \leq d_y(f_n(x),f(x)) + d_y(f(x),f(x_o)) + d_y(f(x_o),f_n(x_o)) < \varepsilon \quad \text{si } n \geq N$$

De cualquier forma $d_y(f_n(x),f_n(x_o)) < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Concluimos este capítulo dando una caracterización de algunos espacios compactos. De acuerdo a la proposición II.5 y al corolario II.11, tenemos que si X es compacto la topología de la convergencia uniforme y la topología de la métrica de Hausdorff en C(X,Y) son iguales. Ahora bien si el inverso fuese cierto tendríamos que la igualdad de estas topologías sería una forma de caracterizar a los espacios compactos. En realidad tal inverso no se cumple. De hecho la igualdad de estas topologías se tiene para cualquier espacio X metrizado con la métrica discreta.

PROPOSICION II.33

Sean (X,d_x) un conjunto con la distancia discreta estándar, (Y,d_y) un espacio métrico arbitrario y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C(X,Y)$. Entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a una función f si y sólo si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\delta\rho$-converge a f.

DEMOSTRACION

De acuerdo a la proposición II.5 si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\delta\rho$-converge a f.

Inversamente, supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\delta\rho$-converge a f. Sea $0<\varepsilon<1$ arbitrario, por hipótesis sabemos que existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $n\geqslant N$ implica

$$f\subset B_\varepsilon[f_n] \qquad y \qquad f_n\subset B_\varepsilon[f]$$

En particular dado $x\in X$ arbitrario existe $(y,f_n(y))\in f_n$ tal que

$$\rho((x,f(x)),(y,f_n(y)))\leqslant\varepsilon$$

Así, $d_x(x,y)\leqslant\varepsilon$ y $d_y(f(x),f_n(y))\leqslant\varepsilon$, pero como X está considerado con la distancia discreta estándar se tiene que $x=y$ y así $d_y(f(x),f_n(x))\leqslant\varepsilon$. Como esto es válido para toda $x\in X$ y $n\geqslant N$ concluimos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f. ■

No obstante, si nos restringimos a los espacios con un número finito de componentes conexas, la equivalencia de la topología uniforme y la topología de la métrica de Hausdorff en $C(X)$ caracteriza a los espacios compactos.

PROPOSICION II.34

Sea (X,d_x) un espacio métrico con un número finito de componentes conexas. La topología de convergencia uniforme y la topología de la métrica de Hausdorff en $C(X)$ son equivalentes si y sólo si X es compacto.

DEMOSTRACION

Por el corolario II.11 tenemos que si X es compacto entonces la topología de convergencia uniforme y la topología de la métrica de Hausdorff en $C(X,\mathbb{R})$ son iguales.

Inversamente. Supongamos que X no es compacto. Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de términos distintos sin subsucesiones convergentes contenida en alguna componente C de X. Se afirma que existe una sucesión decreciente de números $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $0<\lambda_n\leq 1/n$, $B_{\lambda_n}[z_n]\cap B_{\lambda_m}[z_m]=\emptyset$ si $n\neq m$ y $B_{\lambda_n}[z_n]\subset C$.

En efecto, para cada término z_k de la sucesión existe $\varepsilon_k>0$ tal que $B_{\varepsilon_k}[z_k]\cap\{z_n: n\neq k\}=\emptyset$. Por otra parte como C es abierto (pues X tiene un número finito de componentes conexas) existe $\delta_k>0$ tal que $B_{\delta_k}[z_k]\subset C$. Tomemos $\lambda_1=\min\{\varepsilon_1/2,\ \delta_1,\ 1\}$ y $\lambda_k=\min\{\varepsilon_k/2,\ \delta_k,\ 1/k,\ \lambda_{k-1}\}$ si $k\geq 2$, así, para cada $n\in\mathbb{N}$ se tiene que $B_{\lambda_n}[z_n]\subset C$. Además $B_{\lambda_n}[z_n]\cap B_{\lambda_m}[z_m]=\emptyset$ si $n\neq m$, pues si existiera $x\in B_{\lambda_n}[z_n]\cap B_{\lambda_m}[z_m]$ entonces suponiendo que $n<m$ tendríamos que $d_x(z_n,z_m)\leq d_x(z_n,x)+d_x(x,z_m)\leq\lambda_n+\lambda_m\leq 2\lambda_n$, y así $z_m\in B_{\varepsilon_n}[z_n]$, lo que es una contradicción.

Definimos la función $f:X\longrightarrow[0,1]$ como:

$$f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{d_x(x,z_n)}{\lambda_n} & \text{si } x\in B_{\lambda_n}[z_n] \quad \text{para } n\in\mathbb{N}\\ 0 & \text{en caso contrario}\end{cases}$$

Por otra parte para cada $n\in\mathbb{N}$ definimos la función $g_n: B_{\lambda_n}[z_n]\longrightarrow[0,1]$ como:

$$g_n(x)=\begin{cases}1-\dfrac{2d_x(x,z_n)}{\lambda_n} & \text{si } 0\leq d_x(x,z_n)\leq\lambda_n/2\\ \\ 0 & \text{si } \lambda_n/2\leq d_x(x,z_n)\leq\lambda_n\end{cases}$$

Finalmente para cada $n\in\mathbb{N}$ definimos la función $f_n:X\longrightarrow[0,1]$ como:

$$f_n(x) = \begin{cases} g_n(x) & \text{si } d_x(x,z_n) \leq \lambda_n \\ \\ f(x) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Es claro que cada función g_n es continua, la justificación de la continuidad de las funciones f_n y de la función f se dará al final de la demostración.

Afirmamos que $f_n(B_{\lambda_n}[z_n]) = f(B_{\lambda_n}[z_n]) = [0,1]$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

En efecto, sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces $d_x(z_{n+1},z_n) > \lambda_n$ y como $d_x(z_n,z_n) = 0$, - z_n, $z_{n+1} \in C$ y C es conexo, se sigue del teorema del valor intermedio que para cada $0 \leq \lambda \leq \lambda_n$ existe $z_\lambda \in C$ tal que $d_x(z_\lambda, z_n) = \lambda$ (así $z_\lambda \in B_{\lambda_n}[z_n]$). - Ahora bien, Sea $0 \leq y \leq 1$. Entonces:

$$0 \leq \lambda \,(= (1-y)\lambda_n) \leq \lambda_n$$

y

$$0 \leq \lambda' \left(= \frac{(1-y)\lambda_n}{2}\right) \leq \frac{\lambda_n}{2}$$

Por lo anterior existen z_λ , $z_{\lambda'} \in B_{\lambda_n}[z_n]$ tales que:

$$d_x(z_\lambda, z_n) = (1-y)\lambda_n$$

y

$$d_x(z_{\lambda'}, z_n) = \frac{(1-y)\lambda_n}{2}$$

Así $f(z_\lambda) = 1 - (1-y) = y = f_n(z_{\lambda'})$. De donde se sigue la afirmación.

Se probará que $\delta_\rho(f,f_n) \leq 2/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sean $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Por lo anterior existen w_1, $w_2 \in B_{\lambda_n}[z_n]$ tales que

$$f(w_1) = f_n(x) \qquad \text{y} \qquad f_n(w_2) = f(x)$$

Sean

$$x_1 = \begin{cases} w_1 & \text{si } x \in B_{\lambda_n}[z_n] \\ \\ x & \text{si } x \notin B_{\lambda_n}[z_n] \end{cases}$$

$$x_2 = \begin{cases} w_2 & \text{si } x \in B_{\lambda_n}[z_n] \\ x & \text{si } x \notin B_{\lambda_n}[z_n] \end{cases}$$

Entonces

$$\rho((x,f(x)),(x_2,f_n(x_2))) \leq 2/n$$

y

$$\rho((x,f_n(x)),(x_1,f(x_1))) \leq 2/n$$

De donde $\delta\rho(f,f_n) \leq 2/n$

y por lo tanto $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\delta\rho$-converge a f.

Por otra parte afirmamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge uniformemente a f. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $y_n \in X$ tal que $d_X(y_n, z_n) = \lambda_n/2$, así

$$|f_n(y_n) - f(y_n)| = \left|1 - \frac{2(\lambda_n/2)}{\lambda_n} - 1 + \frac{\lambda_n/2}{\lambda_n}\right| = 1/2$$

de aquí que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no puede converger uniformemente a f.

Sólo falta justificar la continuidad de las funciones f_n y de la función f. Debido a que la demostración de ambas continuidades es semejante, sólo se probará la continuidad de la función f. Para este propósito sea $x \in X$ arbitrario, analizemos cada una de las siguientes situaciones:

a) Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_{\lambda_n}(z_n)$ entonces es claro que f es continua en x.

b) Supongamos existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $d_X(x, z_{n_o}) = \lambda_{n_o}$. Sea $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X convergente a x, veamos que $(f(x_m))_{m\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x) = 0$. Sea $A = \{m \in \mathbb{N} : x_m \in B_{\lambda_n}(z_n) \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $A_n = \{x_m : m \in \mathbb{N}\} \cap B_{\lambda_n}(z_n)$.

b.1) Si A es finito entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq M$ entonces $x_m \in X - \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{\lambda_n}(z_n)$, de aqui que $f(x_m) = 0$ si $m \geq M$, por lo cual $(f(x_m))_{m\in\mathbb{N}}$ converge a cero.

b.2) Si A es infinito analizemos las siguientes situaciones:

b.2.1) No puede suceder que A_k sea infinito si $k \neq n_o$, pues si éste fuera el caso existiría una subsucesión $(x_{m_i})_{i \in \mathbb{N}}$ de $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ contenida en A_k, de esta forma ésta subsucesión debe converger a algún punto de $B_{\lambda_k}[z_k]$, pero como $(x_{m_i})_{i \in \mathbb{N}}$ debe converger a x tendríamos que $x \in B_{\lambda_{n_o}}[z_{n_o}] \cap B_{\lambda_k}[z_k]$, lo que es una contradicción.

b.2.2) No es posible que $A_k \neq \emptyset$ para una infinidad de índices k, pues en este caso existiría una sucesión $(f(x_{m_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ con $x_{m_k} \in A_{m_k}$ contenida en $[0,1]$ la cual debe tener una subsucesión convergente, para simplificar la notación supongamos que ella misma es convergente. Pero

$$f(x_{m_k}) = 1 - \frac{d_X(x_{m_k}, z_{m_k})}{\lambda_{m_k}}$$

Puesto que $(\lambda_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge a cero entonces $\lim\limits_{k \to \infty} d_X(x_{m_k}, z_{m_k}) = 0$ y como $d_X(z_{m_k}, x) \leq d_X(z_{m_k}, x_{m_k}) + d_X(x_{m_k}, x)$, entonces $(z_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge a x, lo que es una contradicción pues $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión sin subsucesiones convergentes.

De acuerdo a lo anterior podemos concluir que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq M$ implica $x_m \in X - \bigcup\limits_{n \neq n_o} B_{\lambda_n}(z_n)$, por lo cual $(f(x_m))_{m \in \mathbb{N}}$ converge a cero.

c) Finalmente, si $x \in X - \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} B_{\lambda_n}[z_n]$. Nuevamente consideremos el conjunto $A = \{ m \in \mathbb{N} : x_m \in B_{\lambda_n}(z_n)$ para algún $n \in \mathbb{N}\}$. Se afirma que tal conjunto debe ser finito, pues si fuera infinito entonces existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que el conjunto A_{n_o} es infinito o $A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de índices n. Se puede argumentar de una forma similar a los incisos b.2.1) y b.2.2) para ver que ambas situaciones son imposibles. Así existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq M$ implica $x_m \in X - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{\lambda_n}(x_n)$, por lo cual $f(x_m) = 0$ si $m \geq M$, por lo anterior concluimos que $(f(x_m))_{m \in \mathbb{N}}$ converge a cero. ■

Observémos que la proposición II.33 se enunció pidiendo que X fuese un espacio con la distancia discreta estándar, esto tuvo que ser así pues si (X,d_X) es un espacio discreto arbitrario entonces δ_ρ-convergencia no necesariamente implica convergencia uniforme en $C(X,Y)$.

EJEMPLO II.35

Sean $X = \{1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}$ considerado como subespacio de $\mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$ y $f = \chi_{\{1/2n\}_{n \in \mathbb{N}}}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos la función $f_n : X \longrightarrow Y$ como:

$$f_n = \chi_{\{1/2m\}_{m \leq n}}$$

Entonces $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δ_ρ-converge a f. En efecto, sean $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $1/2N < \varepsilon$. Se afirma que $n \geq N$ implica: $f_n \subset B_\varepsilon[f]$ y $f_n \subset B_\varepsilon[f]$

Para justificar esta afirmación sean $x \in X$ y $n \geq N$ arbitrarios, entonces

$$f_n(x) = \begin{cases} \text{a) } 0 & \text{si } x = \frac{1}{2m+1} \text{ para alguna } m \in \mathbb{N} \\ \text{b) } 1 & \text{si } x = \frac{1}{2m} \text{ para alguna } m \leq n \\ \text{c) } 0 & \text{si } x = \frac{1}{2m} \text{ para alguna } m > n \end{cases}$$

Analizando cada caso se tiene:

a) $(x,f_n(x)) = (x,f(x))$ por lo cual $\rho((x,f_n(x)),(x,f(x))) = 0$

b) $(x,f_n(x)) = (x,f(x))$ por lo cual $\rho((x,f_n(x)),(x,f(x))) = 0$

c) $\rho((\frac{1}{2m},f_n(\frac{1}{2m})),(\frac{1}{2m-1},f(\frac{1}{2m-1}))) = \frac{1}{2m-1} < \frac{1}{2n} < \varepsilon$

Así $$f_n \subset B_\varepsilon[f]$$

Inversamente, sea $x \in X$ arbitrario, entonces

$$f(x) = \begin{cases} \text{a) } 0 & \text{si } x = \frac{1}{2m+1} \text{ para alguna } m \in \mathbb{N} \\ \text{b) } 1 & \text{si } x = \frac{1}{2m} \text{ para alguna } m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a) $(x,f(x)) = (x,f_n(x))$ por lo cual $\rho((x,f(x)),(x,f_n(x))) = 0$

b) $\rho((\frac{1}{2m},f(\frac{1}{2m})), (\frac{1}{2n},f_n(\frac{1}{2n}))) < \frac{1}{2n} < \varepsilon$

Así $$f \subset B_\varepsilon[f_n]$$

Sin embargo, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no converge uniformemente a f ya que:

$$\| f_n - f \| \geq | f_n(\tfrac{1}{2n+2}) - f(\tfrac{1}{2n+2}) | = | 0 - 1 | = 1$$

C A P I T U L O I I I

En el capítulo anterior se trabajó con el espacio $C(X,Y)$ y fueron relaciona dos varios tipos de convergencia en él. En el presente capítulo se hablará de tres teoremas clásicos del análisis referentes al espacio $C(X,Y)$: El teorema de Dini, el teorema de Arzela - Ascoli y el teorema de aproximación de Stone.- Nuestro propósito ahora es tratar estos teoremas utilizando algunos de los resultados vertidos en el capítulo anterior.

PROPOSICION III.1 " TEOREMA DE DINI "

Sean (X, d_x) un espacio métrico compacto, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión decreciente en $C(X)$ y $f = \inf(f_n)$. Si $f \in C(X)$ entonces $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f.

DEMOSTRACION

Se probará que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge topológicamente a f.

En primer lugar, sea $(x, f(x)) \in f$ arbitrario, la sucesión $((x, f_n(x)))_{n \in \mathbb{N}}$ tiene la propiedad de que $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$, de donde $(x, f(x)) \in \mathrm{Linf}(f_n)$ por lo que $f \subset \mathrm{Linf}(f_n)$.

Por otra parte, para ver que $\mathrm{Lsup}(f_n) \subset f$ consideremos la siguiente definición:

$$\mathrm{epi}f = \{(x,y) : x \in X,\ y \geqslant f(x)\}$$

(al conjunto epif se le llama la epigráfica de f)

Afirmamos que $\mathrm{Lsup}(f_n) \subset \mathrm{epi}f$. En efecto, sea $(x,y) \notin \mathrm{epi}f$, como epif es un conjunto cerrado, existe una vecindad V de (x,y) tal que $V \cap \mathrm{epi}f = \emptyset$, pero $f_n \subset \mathrm{epi}f$ para todo $n \in \mathbb{N}$, asi $V \cap f_n = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y de aquí que $(x,y) \notin \mathrm{Lsup}(f_n)$.

Supongamos ahora que $(x,y) \notin f$, veamos que (x,y) no puede pertenecer a $\mathrm{Lsup}(f_n)$.

i) Si $(x,y) \notin \mathrm{epi}f$ de acuerdo a la afirmación anterior $(x,y) \notin \mathrm{Lsup}(f_n)$.

ii) Si $(x,y) \in \mathrm{epi}f$ entonces $y > f(x)$, por lo cual podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) \leqslant f_N(x) < f(x) + \alpha/3$, donde $\alpha = y - f(x)$, entonces α resulta ser un número positivo, y como f_N es una función continua, existe $\delta > 0$ tal que si $w \in B_\delta[x]$ entonces $|f_N(x) - f_N(w)| < \alpha/3$. Consideremos la vecindad de (x,y) dada por $B_\delta[x] \times [y - \alpha/3, \infty)$. Se tiene que esta vecindad no intersecta a f_n para todo $n \geq N$, de aquí que $(x,y) \notin \text{Lsup}(f_n)$.

Hasta aquí tenemos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge topológicamente a f. Ahora, como cada f_n pertenece al conjunto compacto

$$X \times [\inf_{x \in X}(f(x)),\ \sup_{x \in X}(f_1(x))]$$

De acuerdo al corolario II.12 se concluye que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f.

■

" TEOREMA DE ASCOLI "

En la última parte del capítulo I se mencionó una de las versiones tradicionales del teorema de Ascoli. Ahora daremos una versión de este teorema relacionada con el concepto de convergencia topológica. Antes de dar tal versión será conveniente tratar algunas proposiciones preliminares.

PROPOSICION III.2

Sean (X,d_x) un espacio métrico numerable, (Y,d_y) un espacio métrico arbitrario y $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $C(X,Y)$. Si para cada $x \in X$ la cerradura del conjunto $\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ es compacta entonces existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge para cada $x \in X$.

DEMOSTRACION

Sea $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, por la compacidad de la cerradura de $\{f_n(x_1) : n \in \mathbb{N}\}$ existe una subsucesión $(f_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $(f_n^{(1)}(x_1))_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Análogamente existe una subsucesión $(f_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(f_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $(f_n^{(2)}(x_2))_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente. En general para cada $j \geq 2$ existe una subsucesión $(f_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(f_n^{(j-1)})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(f_n^{(j)}(x_j))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. Consideremos la sucesión diagonal $(f_n^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Observando que $(f_n^{(n)})_{n=j}^{\infty}$ es una subsucesión de $(f_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ concluimos que $(f_n^{(n)}(x_j))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente para todo $j\in\mathbb{N}$. Con lo cual queda probada la proposición. ■

PROPOSICION III.3

Sean (X,d_x), (Y,d_y) espacios métricos arbitrarios y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $C(X,Y)$ puntualmente equicontinua tal que $\overline{\{f_n(x);\ n\in\mathbb{N}\}}$ es un subespacio de Y completo para cada $x\in X$. Si las sucesiones $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ convergen para cada $x\in D$, siendo D un subconjunto denso de X, entonces $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para cada punto de X y además la función límite es continua.

Observación: Si Y es completo entonces $\overline{\{f_n(x):\ n\in\mathbb{N}\}}$ es un subespacio de Y completo para cada $x\in X$.

DEMOSTRACION

Dado $x\in X$ y $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que $d_x(x,y)<\delta$ implica $d_y(f_n(x),f_n(y))<\varepsilon/3$ para todo $n\in\mathbb{N}$, puesto que D es denso en X podemos encontrar un punto $x_o\in D$ tal que $d_x(x,x_o)<\delta$, y, como por hipótesis $(f_n(x_o))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, debe ser una sucesión de Cauchy, por lo que existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $n,\ m\geq N$ implica $d_y(f_n(x_o),f_m(x_o))<\varepsilon/3$. De esta manera tenemos:

$$d_y(f_n(x),f_m(x))\leq d_y(f_n(x),f_n(x_o))+d_y(f_n(x_o),f_m(x_o))+d_y(f_m(x_o),f_m(x))<\varepsilon$$

si $n,\ m\geq N$. Así $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y converge por la completez de $\overline{\{f_n(x):\ n\in\mathbb{N}\}}$.

Sea $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Para ver que f es continua, tomemos $x\in X$ arbitrario y $\varepsilon>0$, por la equicontinuidad puntual de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe $\delta>0$ tal que si $d_x(x,y)<\delta$ entonces $d_y(f_n(x),f_n(y))<\varepsilon$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Así:

$$d_y(f(x),f(y)) = d_y(\lim_{n\to\infty} f_n(x), \lim_{n\to\infty} f_n(y)) = \lim_{n\to\infty} d_y(f_n(x),f_n(y)) \leq \varepsilon$$

Por consiguiente f es una función continua. ∎

Utilizando las proposiciones anteriores podemos dar la siguiente versión del teorema de Ascoli.

PROPOSICION III.4 (TEOREMA DE ASCOLI)

Sean (X,d_x) un espacio métrico separable, (Y,d_y) un espacio métrico arbitrario y $\mathcal{F} \subset C(X,Y)$. Entonces cada sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{F}$ tiene una subsucesión uniformemente convergente, sobre subconjuntos compactos, a una función continua si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

i) Para cada $x \in X$ el conjunto $\mathcal{F}_x = \{g(x);\ g \in \mathcal{F}\}$ tiene cerradura compacta en Y.

ii) $\mathcal{F}$ es puntualmente equicontinua.

DEMOSTRACION

Supongamos que se cumplen (i) y (ii).

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{F}$. Por hipótesis existe D subconjunto de X denso y numerable. Como para cada $x \in X$ la cerradura de $\mathcal{F}_x$ es compacta entonces por la proposición III.2 se sigue que existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge para cada $x \in D$. Y por la proposición III.3 se sigue que $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge para cada $x \in X$ y la función límite es continua. Por la proposición II.32 $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en cualquier subconjunto compacto K de X.

Inversamente. Sean $x \in X$ y $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{F}_x$. Puesto que $\{x\}$ es un subconjunto compacto de X, por hipótesis debe existir $(f_{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a un punto de la cerradura de $\mathcal{F}_x$, de aquí se deduce la compacidad de la cerradura de $\mathcal{F}_x$, es decir se cumple la condición (i).

Por otra parte, supongamos que existe $x \in X$ tal que $\mathcal{F}$ no es equicontinua en x, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $x_n \in X$ y $f_n \in \mathcal{F}$ que satisfacen: $d_x(x,x_n) < 1/n$ y $d_y(f_n(x),f_n(x_n)) > \varepsilon$. Observamos que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x y por lo tanto $K = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es un subconjunto compacto de X. Por hipótesis $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ debe tener una subsucesión $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ uniformemente convergente en K a una función continua f, por lo que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $j \geq N$ implica $d_y(f_{n_j}(y),f(y)) < \varepsilon/3$ para todo $y \in K$. También ya que f es continua existe $\delta > 0$ tal que si $d_x(x,z) < \delta$ entonces $d_y(f(x),f(z)) < \varepsilon/3$. Tomando j suficientemente grande tal que $d_x(x,x_{n_j}) < \delta$ y $d_y(f_{n_j}(y),f(y)) < \varepsilon/3$ para todo $y \in K$, se tiene:

$$d_y(f_{n_j}(x),f_{n_j}(x_{n_j})) \leq d_y(f_{n_j}(x),f(x)) + d_y(f(x),f(x_{n_j})) + d_y(f(x_{n_j}),f_{n_j}(x_{n_j})) < \varepsilon$$

lo que es una contradicción, de donde se debe tener que $\mathcal{F}$ es puntualmente equicontinua. ■

Ahora damos la versión del teorema de Ascoli que involucra el concepto de convergencia topológica.

PROPOSICION III.5 (TEOREMA DE ASCOLI)

Sean (X,d_x) un espacio métrico separable, (Y,d_y) un espacio métrico arbitrario y $\mathcal{F} \subset C(X,Y)$. Consideremos las siguientes condiciones:

i) Cada sucesión en $\mathcal{F}$ tiene una subsucesión topológicamente convergente a una función continua f.

ii) $\mathcal{F}$ es puntualmente equicontinua y para cada $x \in X$ el conjunto $\mathcal{F}_x = \{g(x) : g \in \mathcal{F}\}$ tiene cerradura compacta.

Entonces la condición (ii) siempre implica a la condición (i), y, si además X es localmente conexo y Y es localmente compacto, entonces la condición (i) implica a la condición (ii).

DEMOSTRACION

Para ver que la condición (ii) implica a la condición (i), sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{F}$. Por la proposición III.4 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión que converge puntualmente en X a una función continua f, pero entonces por la proposición II.22 tal subsucesión converge topológicamente a f.

Ahora, para ver que la condición (i) implica a la condición (ii), suponiendo que X es localmente conexo y Y es localmente compacto, veamos que se cumplen las condiciones de la proposición III.4. Por hipótesis X es separable, además si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{F}$, por la condición (i), $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ topológicamente convergente a una función continua f, además la proposición II.26 nos garantiza que tal subsucesión converge puntualmente a f y como $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es puntualmente equicontinua, se sigue, de acuerdo a la proposición II.32 que $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en subconjuntos compactos de X. De esta manera se cumplen las condiciones de la proposición III.4 equivalentes a (ii), y, así $\mathcal{F}$ es puntualmente equicontinua y para cada $x\in X$ el conjunto $\mathcal{F}_x$ tiene cerradura compacta. ■

Consideremos ahora un ejemplo para ver que la condición de separabilidad de X es esencial para obtener la condición (i) a partir de la condición (ii) en la proposición anterior.

EJEMPLO III.6

Sea (X,d_x) un espacio métrico arbitrario. Para cada $n\in\mathbb{N}$ sea:

$$\Omega_n = \{A\subset X:\ x,\ y\in A \text{ implica } d_x(x,y)\geq 1/n\}$$

Por el lema de Zorn Ω_n tiene un elemento maximal A_n. Observemos que para cada $n\in\mathbb{N}$ se tiene:

$$X = \bigcup_{x\in A_n} B_{1/n}[x]$$

En efecto, para ver esto tomemos $x_o\in X$ arbitrario, si $x_o\in A_n$ es inmediato que:

$$x_o\in \bigcup_{x\in A_n} B_{1/n}[x]$$

Si $x_o\notin A_n$ debe existir $x'\in A_n$ tal que $d_x(x_o,x') < 1/n$, pues de otra forma x_o sería elemento de A_n por ser A_n maximal. Así

$$x_o\in \bigcup_{x\in A_n} B_{1/n}[x]$$

y por consiguiente:

$$X = \bigcup_{x \in A_n} B_{1/n}[x]$$

Consideremos ahora el conjunto $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. B resulta ser un subconjunto denso en X. Si suponemos que X es no separable debe existir $n_o \in \mathbb{N}$ tal que A_{n_o} es no numerable. Por la hipótesis del continuo podemos suponer que la cardinalidad de A_{n_o} es mayor o igual a C (la cardinalidad de $\mathbb{R}$).

Sea $K = \{g : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\} : g^{-1}(1)$ es un conjunto infinito$\}$. Resulta que la cardinalidad de K es C, así existe una función inyectiva $\varphi : K \longrightarrow A_{n_o}$. Para cada $g \in K$ sea $E(g) = \{ n \in \mathbb{N} : g(n) = 1\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ formemos $W_n \subset X$ como sigue: $x \in W_n$ si existe $g_x \in K$ tal que $d_x(x, \varphi(g_x)) < 1/3n_o$ y n tiene un núme- impar de predecesores en $E(g_x)$. Observemos que si $x \in W_n$ entonces la función g_x con las condiciones pedidas debe ser única, pues si existiera otra función $g_x' \in K$ satisfaciendo las condiciones, tendríamos:

$$d_x(\varphi(g_x), \varphi(g_x')) \leq d_x(\varphi(g_x),x) + d_x(x,\varphi (g_x')) < 2/3n_o < 1/n_o$$

Lo que es una contradicción ya que $\varphi(g_x) \neq \varphi(g_x')$ (pues φ es inyectiva) y, $\varphi(g_x)$ y $\varphi(g_x')$ pertenecen a A_{n_o} por lo cual $d_x(\varphi(g_x), \varphi(g_x')) \geq 1/n_o$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la función $f_n : X \longrightarrow [0,1]$ de la siguiente manera:

$$f_n(x) = \begin{cases} 3n_o d_x(x, \varphi(g_x)) & \text{si } x \in W_n \\ 1 & \text{si } x \notin W_n \end{cases}$$

Afirmamos que cada f_n es una función de Lipschitz con constante de Lipschitz igual a $3n_o$. En efecto, si $x, y \in X$ son tales que $x \notin W_n$, $y \notin W_n$ entonces — $|f_n(x) - f_n(y)| = 0$, supongamos que $x, y \in W_n$, es decir existen $g_x, g_y \in K$ tales que $d_x(x, \varphi(g_x)) < 1/3n_o$ y $d_x(y, \varphi(g_y)) < 1/3n_o$:

i) Si $d_x(x,y) < 1/3n_o$ entonces $g_x = g_y$, pues:

$$d_x(\varphi(g_x), \varphi(g_y)) \leq d_x(\varphi(g_x),x) + d_x(x,y) + d_x(y, \varphi(g_y)) < 1/n_o$$

y de aquí $\varphi(g_x) = \varphi(g_y)$, y finalmente por la inyectividad de φ se tiene $g_x = g_y$. Así:

$$|f_n(x) - f_n(y)| = |3n_o d_x(x, \varphi(g_x)) - 3n_o d_x(y, \varphi(g_x))|$$
$$= 3n_o |d_x(x, \varphi(g_x)) - d_x(y, \varphi(g_x))|$$
$$\leq 3n_o d_x(x,y)$$

ii) Si $d_x(x,y) \geq 1/3n_o$ entonces:

$$|f_n(x) - f_n(y)| = 3n_o |d_x(x, \varphi(g_x)) - d_x(y, \varphi(g_y))|$$
$$\leq 3n_o(1/3n_o) = 1 \leq 3n_o d_x(x,y)$$

Finalmente, supongamos que $x \in W_n$, $y \notin W_n$, entonces existe $g_x \in K$ tal que $d_x(x, \varphi(g_x)) < 1/3n_o$ y por lo tanto $d_x(y, \varphi(g_x)) \geq 1/3n_o$ (pues de otra forma se tendría $y \in W_n$), así que $3n_o d_x(y, \varphi(g_x)) \geq 1$, pero entonces:

$$|f_n(y) - f_n(x)| = 1 - 3n_o d_x(x, \varphi(g_x))$$
$$\leq 3n_o d_x(y, \varphi(g_x)) - 3n_o d_x(x, \varphi(g_x))$$
$$= 3n_o(d_x(y, \varphi(g_x)) - d_x(x,\varphi(g_x)))$$
$$\leq 3n_o d_x(x,y)$$

Así, cada f_n es de Lipschitz y por lo tanto continua.

La sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisface la condición (ii) de la proposición III.5, pues como cada f_n tiene constante de Lipschitz $3n_o$ resulta que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente equicontinua. Además para cada $x \in X$ el conjunto $\{f_n(x): n \in \mathbb{N}\}$ está contenido en $[0,1]$, es decir es acotado y por lo tanto tiene cerradura compacta. Sin embargo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no cumple la condición (i), es decir no tiene subsucesiones topológicamente convergentes. En efecto, si $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ es cualquier subsucesión de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ entonces debe ser de la forma $(f_{h(k)})$ donde h es un isomorfismo que preserva el orden de $\mathbb{N}$ en $E(g)$ para alguna $g \in K$. Se afirma que $\mathrm{Linf}(f_{n_k}) \cap (\{\varphi(g)\} \times [0,1]) = \emptyset$. En efecto, supongamos

a) $(\varphi(g), \alpha) \in \{\varphi(g)\} \times [0,1)$. Sea $\delta = \min\{1/3n_o, 1 - \alpha\}$, si

$B_\delta((\varphi(g),\alpha)) \cap f_{n_k} \neq \emptyset$ para alguna $k \in \mathbb{N}$ debe existir $(x_o, f_{n_k}(x_o)) \in f_{n_k}$ tal que:

$$d_x(x_o, \varphi(g)) < 1/3n_o \qquad y \qquad |f_{n_k}(x_o) - \alpha| < 1 - \alpha$$

de la segunda desigualdad se sigue que $f_{n_k}(x_o) < 1$, así que $x_o \in W_{n_k}$, de donde $g = g_{x_o}$ y n_k tiene un número impar de predecesores en $E(g)$, por consiguiente n_{k+1} tiene un número par de predecesores en $E(g)$. De esta forma si $x \in B_\delta(\varphi(g))$ entonces $f_{n_{k+1}}(x) = 1$, así que $|f_{n_{k+1}}(x) - \alpha| = 1 - \alpha$ de donde $(x, f_{n_{k+1}}(x)) \notin B_\delta(\varphi(g),\alpha)$, por consiguiente $B_\delta((\varphi(g),\alpha)) \cap f_{n_{k+1}} = \emptyset$ y así $(\varphi(g),\alpha) \notin \mathrm{Linf}(f_{n_k})$.

b) Consideremos ahora el punto $(\varphi(g),1)$ y tomemos $\delta = \min\{1/6n_o, 1/2\}$. Si $B_\delta((\varphi(g),1)) \cap f_{n_k} \neq \emptyset$ para alguna $k \in \mathbb{N}$ debe existir $(x_o, f_{n_k}(x_o)) \in f_{n_k}$ tal que $d_x(x_o, \varphi(g)) < 1/6n_o$ y $|f_{n_k}(x_o) - 1| = 1 - f_{n_k}(x_o) < 1/2$, de aquí se tiene que $x_o \notin W_{n_k}$ (pues si $x_o \in W_{n_k}$ entonces $f_{n_k}(x_o) = 3n_o d_x(x_o, \varphi(g)) < 1/2$ y así $1 - f_{n_k}(x_o) > 1 - 1/2 = 1/2$), por lo cual n_k debe tener un número par de predecesores en $E(g)$ y así n_{k+1} tiene un número impar de predecesores en $E(g)$. Tomando en cuenta esto si $x \in B_\delta(\varphi(g))$ entonces $x \in W_{n_{k+1}}$ y así $f_{n_{k+1}}(x) = 3n_o d_x(x, \varphi(g)) < \frac{1}{2}$, por lo cual $1 - f_{n_{k+1}}(x) > 1 - 1/2 = 1/2$, por consiguiente $(x, f_{n_{k+1}}(x)) \notin B_\delta((\varphi(g),1))$, por lo tanto $B_\delta((\varphi(g), 1)) \cap f_{n_{k+1}} = \emptyset$ y así $(\varphi(g),1) \notin \mathrm{Linf}(f_{n_k})$.

Con lo cual concluimos que:

$$\mathrm{Linf}(f_{n_k}) \cap (\{\varphi(g)\} \times [0,1]) = \emptyset$$

Pero entonces no puede existir una función $f: X \longrightarrow [0,1]$ que esté contenida en $\mathrm{Linf}(f_{n_k})$ (pues $(\varphi(g), f(\varphi(g)) \in f$), y por consiguiente $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ no converge topológicamente a alguna función f.

■

PROPOSICION III.7

Sean (X,d_x) un espacio métrico completo, (Y,d_y) un espacio métrico arbitrario y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C(X,Y)$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge topológicamente a $f\in C(X,Y)$ entonces existe $E\subset X$ tal que E es un G_δ denso en X y para cada $x\in E$ $f(x)$ es un límite subsucesional de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

DEMOSTRACION

Para cada $n\in\mathbb{N}$ y $\varepsilon>0$ formamos el conjunto

$$A(n,\varepsilon)=\bigcap_{j>n}\{x\in X:\ d_y(f_j(x),f(x))\geq\varepsilon\}$$

Este conjunto resulta ser cerrado pues para $j>n$ fija el conjunto $\{x\in X:\ d_y(f_j(x),f(x))\geq\varepsilon\}$ es cerrado y así $A(n,\varepsilon)$ es cerrado por ser intersección de cerrados. Además $A(n,\varepsilon)$ es denso en ninguna parte, pues si $x_0\in A(n,\varepsilon)$ y $\lambda>0$ entonces $B_\lambda(x_0)\not\subset A(n,\varepsilon)$. En efecto, por la continuidad de f existe $\lambda'<\lambda$ tal que $d_x(x,x_0)<\lambda'$ implica $d_y(f(x),f(x_0))<\varepsilon/2$, puesto que $f=\mathrm{Lsup}(f_n)$ debe existir $(x',f_j(x'))\in f_j$ con $j>n$ tal que:

$$\rho((x_0,f(x_0)),(x',f_j(x')))<\min\{\lambda',\varepsilon/2\}$$

de aquí $\qquad d_x(x',x_0)<\lambda' \qquad$ y $\qquad d_y(f(x_0),f_j(x'))<\varepsilon/2$

de donde $\qquad d_y(f_j(x'),f(x'))\leq d_y(f_j(x'),f(x_0))+d_y(f(x_0),f(x'))<\varepsilon$

de esta forma $x'\in B_\lambda(x_0)-A(n,\varepsilon)$.

Para cada $n,k\in\mathbb{N}$ definimos el conjunto

$$B(n,k)=X-A(n,1/k)$$

Por consiguiente cada $B(n,k)$ resulta ser un conjunto abierto y denso en X. Definimos

$$E=\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\in\mathbb{N}}B(n,k)$$

Tenemos que E es un conjunto G_δ, además por el teorema de categoría de Baire E resulta ser denso en X.

Veamos ahora que para cada $x\in E$, $f(x)$ es un límite subsucesional de —

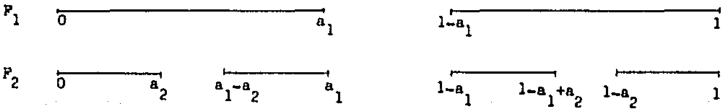
$(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Para este propósito sea $x \in E$ arbitrario, entonces $x \in B(n,k)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $k \in \mathbb{N}$, se sigue que $x \notin A(n,1/k)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N}$. Asi para cada $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N}$ debe existir $j > n$ tal que $d_y(f_j(x),f(x)) < 1/k$. Denotemos por $J(n,k)$ al menor entero (mayor que n) con esta propiedad, es decir $d_y(f_{J(n,k)}(x),f(x)) < 1/k$, sea $n_1 = J(1,1)$ y para $k > 1$ sea $n_k = J(n_{k-1},k)$. Consideremos la sucesión $(f_{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ la cual resulta ser subsucesión de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ pues $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente y además $(f_{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$. ∎

Podemos observar que en la demostración de la proposición anterior no hicimos uso completo de que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge topológicamente a f, sino solamente usamos que $f \subset \text{Lsup}(f_n)$. Otra observación que podemos hacer es que la subsucesión encontrada depende del elemento x escogido. Podríamos preguntarnos si existe una subsucesión de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que sea independiente de x, es decir, ¿existe una subsucesión de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente puntualmente a alguna función f en algun conjunto G_δ denso en X?. La respuesta es negativa aún con la hipótesis adicional de que X sea compacto, a este respecto daremos un par de ejemplos. Para el primero de ellos haremos uso de un lema previo.

En páginas anteriores se definió el conjunto de Cantor, ahora haremos uso de una generalización de este conjunto.

Sea $0 < \beta < 1$, consideremos la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde $a_n = \dfrac{\beta}{2^n} + \dfrac{(1-\beta)}{3^n}$ se tiene que $0 < 2a_n < a_{n-1}$, de hecho $a_{n-1} - 2a_n = \dfrac{1-\beta}{3^n}$.

Construyamos el conjunto F de forma similar a como se construyó el conjunto de Cantor, con la diferencia de que en el n-ésimo paso sean suprimidos 2^{n-1} intervalos de longitud $\dfrac{1-\beta}{3^n}$ (ver figura).



$$F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$$

Con respecto a este conjunto de Cantor podemos hacer las siguientes observaciones:

a) F es cerrado en $[0,1]$, pues si $x \in [0,1] - F$ entonces $x \in (a,b)$, donde (a,b) es algún intervalo abierto suprimido en la construcción.

b) F es un conjunto denso en ninguna parte en $[0,1]$, ya que F no puede contener a ningún intervalo abierto no vacio (a,b), pues existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < b - a$.

c) Si μ denota la medida de Lebesgue entonces $\mu(F) = \beta$, pues

$$\mu([0,1] - F) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}(1-\beta)}{3^n} = \frac{1-\beta}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1-\beta}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right) = 1 - \beta$$

y así $\mu(F) = \beta$.

d) $[0,1] - F$ es de la segunda categoría ya que F es de la primera y $[0,1]$ es de la segunda.

LEMA III.8

Sea F un conjunto de Cantor con medida positiva construido a partir de la sucesión $\bar{a}_n = \frac{\beta}{2^n} + \frac{(1-\beta)}{3^n}$. Para cada $x_0 \in F$ y $\varepsilon > 0$ $\mu(\{x \in F: |x - x_0| < \varepsilon\}) > 0$. Además para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un conjunto V_n que es la unión de una colección finita de intervalos abiertos y ajenos $\{W_{n_i} : i = 1, 2, \ldots, k_n\}$ contenidos en $[0,1]$ y tales que:

i) Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $1 \leq i \leq k_n$ los puntos finales de W_{n_i} pertenecen a $[0,1] - F$.

ii) Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $1 \leq i \leq k_n$ se tiene $W_{n_i} \cap F \neq \emptyset$.

iii) Para cada $x \in F$ y $n \in \mathbb{N}$ existe $y \in V_n$ tal que $|x - y| < 1/n$.

iv) $\mu(V_n) < 1/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACION

Sea $x_o \in F$ y $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_N < \varepsilon$, considerando el conjunto F_N tenemos que $x_o \in I_{N_i}$, donde I_{N_i} es alguno de los intervalos que componen a F_N.

$$F_N \quad \underset{I_{N_1}}{\overline{\qquad}} \quad \underset{I_{N_2}}{\overline{\qquad}} \qquad \underset{I_{N_3}}{\overline{\qquad}} \quad \underset{I_{N_4}}{\overline{\qquad}} \cdots \underset{\substack{x_o \\ I_{N_i}}}{\overline{\qquad}} \quad \underset{I_{N_{i+1}}}{\overline{\qquad}} \cdots \overline{\qquad} \quad \underset{I_{N_{2^N}}}{\overline{\qquad}}$$

Así $I_{N_i} \subset B_\varepsilon(x_o)$, llamemos P_j a $I_{N_j} \cap F$ para $1 \leq j \leq 2^N$, con lo cual tenemos los conjuntos $P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots, P_{2^N}$, y así

$$F = \bigcup_{i=1}^{2^N} P_i$$

Veamos que $\mu(P_i) = \mu(P_j)$ para $1 \leq i, j \leq 2^N$. Llamemos G_i y G_j a los intervalos generados en el proceso de construcción en los intervalos I_{N_i} e I_{N_j} respectivamente, así que $P_i = \bigcap G_i$ y $P_j = \bigcap G_j$, de aquí se sigue que:

$$\mu(P_i) = \mu(\cap G_i) = \lim \mu(G_i) = \lim \mu(G_j) = \mu(\cap G_j) = \mu(P_j)$$

Como $\mu(F) = \beta$ entonces $\mu(P_i) = \beta/2^N$, tenemos entonces que $\mu(P_i) > 0$ y como $P_i \subset I_{N_i} \subset B_\varepsilon(x_o)$ se sigue que $P_i \subset B_\varepsilon(x_o) \cap F$, de donde $\mu(B_\varepsilon(x_o) \cap F) > 0$.

Veamos ahora que para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar una colección finita de intervalos abiertos y ajenos $\{W_{n_i} : i = 1, 2, \ldots, k_n\}$ contenidos en $[0,1]$ que satisfacen las condiciones pedidas.

Si $n = 1$ sea $y_1 \in F - \{0,1\}$, tomemos $a_1 \in (0,y_1) - F$ y $b_1 \in (y_1,1) - F$ y sea $V_1 = (a_1,b_1)$.

Si $n \geq 2$, sean $y_1, \ldots, y_{n_k} \in F \cap (0,1)$ tales que $F \subset \bigcup_{i=1}^{k_n} B_{1/n}(y_i)$ (esto es posible pues $F \cap (0,1)$ es totalmente acotado), podemos suponer que estos elementos están ordenados de tal forma que:

$$0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{k_n} < 1$$

Sea $0 < \delta < \min\left\{\frac{1}{2nk_n}, y_1, 1 - y_{k_n}, \frac{\min}{2}\left\{y_i - y_{i-1}: 2 \leq i < k_n\right\}\right\}$. Para cada y_i con $i = 1, 2, \ldots, k_n$ existen:

$$a_i \in (y_i - \delta, y_i) - F \quad \text{y} \quad b_i \in (y_i, y_i + \delta) - F$$

Sea $W_{n_i} = (a_i, b_i)$ y hagamos $V_n = \bigcup_{i=1}^{k_n} (a_i, b_i)$

Así V_n cumple con las condiciones pedidas, pues es una unión finita de intervalos abiertos ajenos y además:

i) los puntos finales de estos intervalos pertenecen a $[0,1] - F$

ii) Cada intervalo intersecta a F, pues $y_i \in (a_i, b_i)$

iii) Si $x_0 \in X$ entonces existe y_i con $1 \leq i \leq k_n$ tal que $|x_0 - y_i| < 1/n$

iv) $\mu(V_n) = \sum_{i=1}^{k_n} \mu(a_i, b_i) < \sum_{i=1}^{k_n} \frac{2}{2nk_n} = \frac{2k_n}{2nk_n} = \frac{1}{n}$ ■

Ahora veamos el ejemplo que habíamos mencionado anteriormente.

EJEMPLO III.9

Sea $X = F$ (el conjunto de Cantor considerado en el lema anterior). Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la función $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \notin V_n \\ 0 & \text{si } x \in V_n \end{cases}$$

(donde los conjuntos V_n son los mencionados en el lema precedente)

Puesto que los puntos finales de cada W_{n_i} pertenecen a $[0,1] - X$ tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $V_n \cap X$ es cerrado y abierto en X, de aquí se sigue que cada función f_n es continua. Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ la función constante cero. Se afirma que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge topológicamente a f.

En efecto, si $x_0 \in X$ por la condición (iii) del lema para cada $n \in \mathbb{N}$ existe

$y_n \in V_n$ tal que $|y_n - x_o| < 1/n$, pero entonces $y_n \in W_{n_i}$ para alguna $1 \leq i \leq k_n$, por la condición (ii) del lema $W_{n_i} \cap X \neq \emptyset$, así, existe $x_n \in X$ tal que — $x_n \in W_{n_i}$, y como $W_{n_i} \subset V_n$ la condición (iv) del lema implica que $\mu(W_{n_i}) < 1/n$, por lo cual $|y_n - x_n| < 1/n$, de donde $|x_o - x_n| \leq |x_o - y_n| + |y_n - x_n| < 2/n$. - Como $x_n \in V_n$ entonces $f_n(x_n) = 0$, por lo tanto la sucesión $((x_n, f_n(x_n)))_{n \in \mathbb{N}}$ - converge a $(x_o, 0)$, por consiguiente $f \subset \mathrm{Linf}(f_n)$.

Por otra parte, si $(x,y) \notin f$ entonces $y \neq 0$, supongamos $y > 0$ (el caso $y < 0$ es análogo). Sea $\delta > y$, así $X \times (0, \delta)$ es una vecindad de (x,y), pero existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > \delta$ y así $X \times (0, \delta) \cap f_n = \emptyset$ si $n \geq N$, de donde $(x,y) \notin \mathrm{Lsup}(f_n)$, lo que implica que $\mathrm{Lsup}(f_n) \subset f$. Asi pues $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge topológicamente a f.

Sin embargo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no tiene ninguna subsucesión puntualmente convergente en algún conjunto G_δ denso en X. En efecto, si $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ es una subsucesión arbitraria de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y denotamos por $A_k = V_{n_k} \cap X$ y $B_k = \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$ entonces- se cumple que

$$E = \{ x \in X : \lim_{k \to \infty} f_{n_k}(x) = 0 \} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$$

pues si $x_o \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$ entonces $x_o \in B_i$ para alguna $i \in \mathbb{N}$, y, entonces — $x_o \in \bigcap_{k=i}^{\infty} A_k$, asi $x_o \in V_{n_k}$ para toda $k \geq i$, por lo cual $f_{n_k}(x_o) = 0$ si $k \geq i$, - de donde $\lim_{k \to \infty} f_{n_k}(x_o) = 0$, y así $x_o \in E$. Inversamente, si $x_o \in E$, tomando — $0 < \varepsilon < 1$ existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $f_{n_k}(x_o) < \varepsilon$ si $k \geq i$, de donde $x_o \in V_{n_k}$ para - toda $k \geq i$, así $x_o \in \bigcap_{k=i}^{\infty} A_k$, por lo tanto $x_o \in B_i$ y así $x_o \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$, y de - aquí $E \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$.

Veamos que E es un conjunto de la primera categoría, es decir es la unión - numerable de conjuntos densos en ninguna parte. Para esto, es suficiente demostrar que cada conjunto B_k es denso en ninguna parte en X. Observemos primero- que si $i \geq k$ entonces $B_k \subset A_i \subset V_{n_i}$, pero $\lim_{i \to \infty} \mu(V_{n_i}) = 0$, así $\mu(B_k) = 0$ por lo cual $\mathrm{int}_x(B_k) = \emptyset$ ($\mathrm{int}_x(B_k)$ denota el interior de B_k relativo a X), pues si $\mathrm{int}_x(B_k) \neq \emptyset$ existiría $x' \in X$ y $\varepsilon > 0$ tales que $\{ y \in X: |y - x'| < \varepsilon \} \subset B_k$ pero por el lema anterior $\mu(\{ y \in X: |y - x'| < \varepsilon \}) > 0$ y así $\mu(B_k) > 0$, lo que es una contradicción, de esta forma cada B_k es un conjunto denso en ninguna parte en X. Se afirma que E no puede contener ningún conjunto G_δ denso en X. Supongamos lo contrario y sea $U \subset E$ un conjunto G_δ denso en X, entonces U sería de la forma $U = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} D_i$ con D_i abierto para cada $i \in \mathbb{N}$, se sigue que cada conjunto D_i sería denso en X. Pero

$$X - U = X - \bigcap_{i \in \mathbb{N}} D_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (X - D_i)$$

Como cada $X - D_i$ es un conjunto cerrado denso en ninguna parte en X —— $(X - (X - D_i) = D_i)$, entonces $X - U$ es de la primera categoría, así —— $X = E \cup (X - U)$ es de la primera categoría. Lo que es una contradicción. ∎

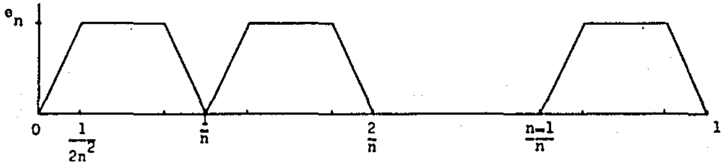
El segundo ejemplo que habíamos mencionado en páginas anteriores es el siguiente:

EJEMPLO III.10

Para cada número natural n mayor o igual a 2 definimos la función $g_n: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ como:

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = \frac{i}{n} \quad \text{para alguna } 0 \leq i \leq n \\ 1 & \text{si } x \in \left[\frac{i}{n} + \frac{1}{2n^2}, \frac{i+1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right] \quad \text{para alguna } 0 \leq i \leq n-1 \\ 2n^2(x - \frac{i}{n}) & \text{si } x \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i}{n} + \frac{1}{2n^2}\right] \quad \text{para alguna } 0 \leq i \leq n-1 \\ -2n^2(x - \frac{i}{n}) & \text{si } x \in \left[\frac{i}{n} - \frac{1}{2n^2}, \frac{i}{n}\right] \quad \text{para alguna } 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Cada función g_n es continua pues está bien definida y es continua en cada uno de los intervalos cerrados. Ahora definimos la función $f_1:[0,1] \longrightarrow \ell^2$ (el espacio de sucesiones cuadrado sumables) por: $f_1(x) = e_1$ para todo $x \in [0,1]$, y, para $n \geq 2$ definimos $f_n:[0,1] \longrightarrow \ell^2$ como $f_n(x) = g_n(x)e_n$ (donde $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es la base ortonormal estándar de ℓ^2).



Aspecto de la gráfica de una función f_n $(n \geq 2)$

Sea $f:[0,1] \longrightarrow \ell^2$ la función constante $\overline{0}$ ($\overline{0}$ representa a la sucesión constante cero). Afirmamos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge topológicamente a f. En efecto, si $x \in [0,1]$ entonces para cada $n \geq 2$ existe $1 \leq i_n \leq n$ tal que $\frac{i_n - 1}{n} \leq x \leq \frac{i_n}{n}$. Sea $x_1 = x$ y para $n \geq 2$ sea $x_n = \frac{i_n - 1}{n}$, se sigue que para cada $n \in \mathbb{N}$ $|x_n - x| \leq 1/n$ y así la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x, por lo tanto la sucesión $((x_n, f_n(x_n)))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $(x, \overline{0})$, y, por consiguiente $f \subset \mathrm{Lin}(f_n)$.

Nuevamente sea $x \in [0,1]$ arbitrario, y supongamos que la sucesión $((x_k, f_{n_k}(x_k)))_{k \in \mathbb{N}}$ converge a (x,y). Se probará que $y = \overline{0}$. Puesto que la sucesión $(f_{n_k}(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge a y tenemos que es una sucesión de Cauchy, por lo cual dado $\varepsilon > 0$ existe $K \in \mathbb{N}$ tal que si $k, k' \geq K$ entonces:

$$\| f_{n_k}(x_k) - f_{n_{k'}}(x_{k'}) \|_2 < \varepsilon$$

Recordando la definición de la función f_{n_k} tenemos:

$$\begin{aligned} \| f_{n_k}(x_k) - f_{n_{k'}}(x_{k'}) \|_2 &= \| g_{n_k}(x_k) e_{n_k} - g_{n_{k'}}(x_{k'}) e_{n_{k'}} \|_2 \\ &= \left(|g_{n_k}(x_k)|^2 + |g_{n_{k'}}(x_{k'})|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Así $$\| f_{n_k}(x_k) - f_{n_{k'}}(x_{k'}) \|_2 \geq |g_{n_k}(x_k)|$$

de donde $|g_{n_k}(x_k)| < \varepsilon$ si $k \geq K$, se sigue que $(g_{n_k}(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge a 0. Por otra parte, $\lim_{k\to\infty} |g_{n_k}(x_k)| = \| y \|_2$, por lo tanto $\| y \|_2 = 0$, y de aquí se sigue que $y = \overline{0}$, así $\mathrm{Lsup}(f_n) \subset f$. Por consecuencia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge topológicamente a f.

Sin embargo, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no tiene ninguna subsucesión que converja puntualmente en algún subconjunto G_δ denso en $[0,1]$. Para ver esto, sean $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ una subsucesión arbitraria de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $E = \{ x \in [0,1] : (f_{n_k}(x))_{k \in \mathbb{N}} \text{ converge} \}$.

Se afirma que: $$E \subset \bigcup_{K \in \mathbb{N}} B_K$$

donde $$B_K = \bigcap_{k \geq K} A_{n_k}$$

siendo $$A_{n_k} = \bigcup_{i=0}^{n_k-1} \left[\frac{i}{n_k}, \frac{i}{n_k} + \frac{1}{2n_k^2}\right] \cup \bigcup_{j=1}^{n_k} \left[\frac{j}{n_k} - \frac{1}{2n_k^2}, \frac{j}{n_k}\right]$$

En efecto, si $x \notin \bigcup_{K \in \mathbb{N}} B_K$ entonces $x \notin B_K$ para todo $K \in \mathbb{N}$, así para todo $K \in \mathbb{N}$ existe $k \geq K$ tal que $x \notin A_{n_k}$, por lo cual $f_{n_k}(x) = e_{n_k}$. Así pues dado $N \in \mathbb{N}$ existen $k, k' \geq N$ tales que $\| f_{n_k}(x) - f_{n_{k'}}(x) \|_2 = \sqrt{2}$, y de aquí concluimos que $(f_{n_k}(x))_{k \in \mathbb{N}}$ diverge, es decir $x \notin E$.

Por otra parte, usando nuevamente la medida de Lebesgue, puesto que para todo $K \in \mathbb{N}$ se cumple $B_K \subset A_{n_k}$ si $k \geq K$, entonces $\mu(B_K) \leq \mu(A_{n_k})$ para todo $k \geq K$, pero $\mu(A_{n_k}) = n_k/n_k^2 = 1/n_k$, de aquí que $\mu(B_K) \leq 1/n_k$ para todo $k \geq K$, y, así $\mu(B_K) = 0$, por lo cual para cada $K \in \mathbb{N}$ el conjunto B_K es denso en ninguna parte en $[0,1]$. Así pues E es un conjunto de la primera categoría, y, argumentando de la misma forma que en la parte final del ejemplo anterior concluimos que E no puede contener un conjunto G_δ denso en $[0,1]$.

" TEOREMA DE STONE "

DEFINICION III.11

Sean (X,d_x) un espacio métrico arbitrario y $f:X \longrightarrow \mathbb{R}$, $g:X \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones arbitrarias, se definen las funciones $\max(f,g):X \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\min(f,g):X \longrightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$\max(f,g)(x) = \max\{f(x),\ g(x)\}$$

$$\min(f,g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

Si Λ es una familia de funciones de X a $\mathbb{R}$ se dice que Λ es una latiz si siempre que $f,\ g \in \Lambda$ se cumple

$$\max(f,g) \in \Lambda \qquad y \qquad \min(f,g) \in \Lambda$$

PROPOSICION III.12 (TEOREMA DE STONE)

Sean (X,d_x) un espacio métrico compacto y Λ un subconjunto no vacio de $C(X,\mathbb{R})$ que satisface las siguientes condiciones:

i) Λ es una latiz

ii) Dados (x,a) y $(y,b) \in X \times \mathbb{R}$ con $x \neq y$, existe $g \in \Lambda$ tal que $g(x) = a$ y $g(y) = b$.

Entonces Λ es denso en $C(X,\mathbb{R})$, donde $C(X,\mathbb{R})$ se considera con la norma del supremo.

DEMOSTRACION

Sean $f \in C(X,\mathbb{R})$ y $\varepsilon > 0$, debemos demostrar que existe $g \in \Lambda$ tal que:

$$\|f - g\| = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in X\} \leq \varepsilon$$

Fijemos $x \in X$, entonces para cad $y \in X$ existe $g_{xy} \in \Lambda$ tal que $g_{xy}(x) = f(x)$ y $g_{xy}(y) = f(y)$. La función $h_y = g_{xy} - f$ es continua y como $h_y(y) = 0$ existe V_y vecindad abierta de y tal que $z \in V_y$ implica $|g_{xy}(z) - f(z)| < \varepsilon$, es decir:

$$f(z) - \varepsilon < g_{xy}(z) < f(z) + \varepsilon$$

La familia $\{V_y : y \in X\}$ es una cubierta abierta de X, así existen $y_1, \ldots, y_n \in X$

tales que: $$X = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$$

Sea $g_x = \max(g_{xy_i} : i = 1,\ldots,n)$, resulta que $g_x \in \Omega$ y además si $z \in X$ entonces existe $1 \leq i_o \leq n$ tal que $z \in V_{y_{i_o}}$, de donde:

$$g_x(z) \geq g_{xy_{i_o}}(z) > f(z) - \varepsilon$$

Así, para cada $x \in X$ hemos encontrado una función $g_x \in \Omega$ tal que $g_x(x) = f(x)$ $g_x(z) > f(z) - \varepsilon$ para todo $z \in X$.

Ahora, si $s_x = g_x - f$ entonces s_x es continua, así que existe W_x vecindad abierta de x tal que si $z \in W_x$ entonces $|g_x(z) - f(z)| < \varepsilon$.

Consideremos la cubierta abierta de X formada por $\{W_x : x \in X\}$. Existen $x_1, \ldots, x_m \in X$ tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} W_{x_i}$$

Definimos $g = \min(g_{x_i} : i = 1, \ldots, m)$. Resulta que $g \in \Omega$, y, sólo falta probar que $\|f - g\| \leq \varepsilon$. Con este propósito sea $z \in X$ arbitrario, tenemos que $g(z) = g_{x_{i_o}}(z)$ para algún $1 \leq i_o \leq m$, pero $g_{x_i}(z) \geq f(z) - \varepsilon$ para toda $1 \leq i \leq m$. Así $g(z) \geq f(z) - \varepsilon$, de donde

$$-\varepsilon \leq g(z) - f(z) \tag{1}$$

Por otra parte $z \in W_{x_{j_o}}$ para alguna $1 \leq j_o \leq m$. De donde

$$|g_{x_{j_o}}(z) - f(z)| < \varepsilon$$

es decir $$-\varepsilon + f(z) < g_{x_{j_o}}(z) < \varepsilon + f(z)$$

pero $$g(z) \leq g_{x_j}(z) \quad \text{para toda } 1 \leq j \leq m$$

por consiguiente $$g(z) < \varepsilon + f(z)$$

es decir $$g(z) - f(z) < \varepsilon$$

Combinando esto con (1) concluimos que:

$$|g(z) - f(z)| \leqslant \varepsilon$$

Puesto que z fue un elemento arbitrario de X entonces

$$|g(z) - f(z)| \leqslant \varepsilon \qquad \text{para toda } z \in X$$

de donde
$$\| f - g \| \leqslant \varepsilon$$

■

OBSERVACION

La condición (ii) de la proposición anterior se cumple si Ω satisface las siguientes condiciones:

1) Para cada $f \in \Omega$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ las funciones αf y $\alpha + f$ pertenecen a Ω.
2) Ω separa puntos, es decir, si $x, y \in X$ con $x \neq y$ entonces existe $h \in \Omega$ tal que $h(x) \neq h(y)$.

En efecto, si (x,a) y $(y,b) \in X \times \mathbb{R}$ con $x \neq y$ entonces de acuerdo a la condición (2) existe $h \in \Omega$ tal que $h(x) \neq h(y)$, pero por la condición (1) $\alpha h + \beta \in \Omega$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Así la condición (ii) se cumple si existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\alpha h(x) + \beta = a \qquad y \qquad \alpha h(y) + \beta = b$$

Observamos que el sistema de ecuaciones anterior tiene solución, pues su determinante está dado por:

$$h(x) - h(y)$$

el cual es distinto de cero ya que $h(x) \neq h(y)$.

PROPOSICION III.13 (TEOREMA DE STONE GENERALIZADO)

Sean (X, d_x) un espacio métrico compacto y $\Omega \subset C(X, \mathbb{R})$ una latiz. Entonces Ω es denso en $C(X, \mathbb{R})$ si y sólo si dada $f \in C(X, \mathbb{R})$, $x, y \in X$ y $\varepsilon > 0$ existe $f_{xy} \in \Omega$ tal que:

$$|f_{xy}(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad y \qquad |f_{xy}(y) - f(y)| < \varepsilon$$

DEMOSTRACION

Supongamos que Ω es denso en $C(X, \mathbb{R})$. Sean $f \in C(X, \mathbb{R})$ y $\varepsilon > 0$ entonces existe $g \in \Omega$ tal que $\sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\} < \varepsilon$, así $g = f_{xy}$ satisface la condición pedida en la proposición.

Inversamente. Sean $f \in C(X, \mathbb{R})$ y $\varepsilon > 0$, debemos encontrar $h \in \Omega$ tal que $\|h - f\| = \sup\{|h(x) - f(x)| : x \in X\} \leq \varepsilon$. Sea $x \in X$ fija, por hipótesis para cada $y \in X$ existe $f_{xy} \in \Omega$ tal que:

$$|f(x) - f_{xy}(x)| < \varepsilon \qquad \text{y} \qquad |f(y) - f_{xy}(y)| < \varepsilon$$

Así para cada $y \in X$ podemos formar el conjunto abierto

$$G_y = \{ z \in X : |f_{xy}(z) - f(z)| < \varepsilon \}$$

Observemos que $y \in G_y$, de donde $\{G_y : y \in X\}$ es una cubierta abierta de X. Por la compacidad de X deben existir $y_1, \ldots, y_n \in X$ tales que:

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} G_{y_i}$$

Definimos $g_x = \max(f_{xy_i} : i=1, \ldots, n)$, por hipótesis $g_x \in \Omega$. Si tomamos $z \in X$ arbitrario entonces existe $1 \leq k \leq n$ tal que $z \in G_{y_k}$, de donde

$$|f_{xy_k}(z) - f(z)| < \varepsilon$$

es decir
$$f(z) - \varepsilon < f_{xy_k}(z) < f(z) + \varepsilon$$

Por otra parte teníamos que:

$$f(x) - \varepsilon < f_{xy}(x) < f(x) + \varepsilon \qquad \text{para toda } y \in X$$

Puesto que $g_x(x) = f_{xy_i}(x)$ para alguna $1 \leq i \leq n$, entonces

$$g_x(x) < f(x) + \varepsilon$$

De esta forma para cada $x \in X$ existe una función $g_x \in \Omega$ tal que $g_x(x) < f(x) + \varepsilon$ y $g_x(z) > f(z) - \varepsilon$ para toda $z \in X$. Para cada $x \in X$ definimos el conjunto abierto:

$$H_x = \{ z \in X : g_x(z) < f(z) + \varepsilon \}$$

Observando que $x \in H_x$ se tiene que $\{H_x : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X, por la compacidad de X existen $x_1, \ldots, x_m \in X$ tales que:

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} H_{x_i}$$

Definimos la función $h = \min(g_{x_i} : i = 1,\ldots,m)$. Por hipótesis $h \in \Omega$. Sólo resta probar que $\|f - h\| < \varepsilon$.

Para este propósito sea $z \in X$ arbitrario, entonces existe $1 \leq k \leq m$ tal que $z \in H_{x_k}$, así $g_{x_k}(z) < f(z) + \varepsilon$, pero $h(z) \leq g_{x_k}(z)$, se sigue que:

$$h(z) \leq f(z) + \varepsilon$$

Por otra parte, como para cada $x \in X$ se cumple que $g_x(z) > f(z) - \varepsilon$ para todo $z \in X$, y puesto que $h(z) = g_{x_j}(z)$ para alguna $1 \leq j \leq m$ entonces:

$$h(z) > f(z) - \varepsilon$$

de aquí se tiene $\quad f(z) - \varepsilon < h(z) < f(z) + \varepsilon$

es decir $\quad |h(z) - f(z)| < \varepsilon$

puesto que z fue arbitrario concluimos que:

$$\|f - h\| \leq \varepsilon$$

■

DEFINICION III.14

Sean X un espacio topológico y $\Omega \subset F(X,\mathbb{R}) = \{f : f: X \longrightarrow \mathbb{R}\}$. Se dice que Ω aisla puntos en $X \times \mathbb{R}$ si para cada pareja de puntos (x_1,α_1), (x_2,α_2) en $X \times \mathbb{R}$ tales que $x_1 \neq x_2$ o $x_1 = x_2$ y $\alpha_1 < \alpha_2$ existe $f \in \Omega$ tal que:

$$(x_1,\alpha_1) \in \operatorname{int}(\{(x,\alpha) : \alpha \leq f(x)\})$$

$$(x_2,\alpha_2) \notin \{(x,\alpha) : \alpha \leq f(x)\}$$

OBSERVACION

En el caso de que Ω conste de funciones continuas la propiedad anterior es equivalente a que (x_1,α_1) quede situado debajo de la gráfica de f (es decir $\alpha_1 < f(x_1)$) y (x_2,α_2) quede situado encima de la gráfica de f (es decir $f(x_2) < \alpha_2$).

En efecto, si (x_1,α_1), (x_2,α_2) y f satisfacen las condiciones de la definición, es claro que (x_1,α_1) queda situado debajo de la gráfica de f, y, (x_2,α_2) queda situado encima de la gráfica de f.

Inversamente. Supongamos que (x_1,α_1) queda debajo de la gráfica de f y (x_2,α_2) queda encima de la gráfica de f. Entonces es claro que:

$$(x_2,\alpha_2) \notin \{(x,\alpha):\ \alpha \leq f(x)\}$$

Además, como $f(x_1) - \alpha_1 > 0$, entonces por la continuidad de f existe un conjunto abierto U tal que $x_1 \in U$ y para todo $z \in U$ se cumple:

$$|f(x_1) - f(z)| < (f(x_1) - \alpha_1)/2$$

Si denotamos a $f(x_1) - \alpha_1$ por λ tenemos:

$$|f(x_1) - f(z)| < \lambda/2 \quad \text{si } z \in U$$

De donde $U \times (\alpha_1 - \lambda/2,\ \alpha_1 + \lambda/2)$ es una vecindad abierta de (x_1,α_1) que está contenida en $\{(x,\alpha):\ \alpha \leq f(x)\}$, pues si $(z,\beta) \in U \times (\alpha_1 - \lambda/2, \alpha_1 + \lambda/2)$ entonces $z \in U$ y

$$\alpha_1 - \lambda/2 < \beta < \alpha_1 + \lambda/2 = \frac{\alpha_1 + f(x_1)}{2}$$

Por otra parte, como $z \in U$ entonces:

$$|f(z) - f(x_1)| < \lambda/2$$

es decir
$$-\frac{\lambda}{2} + f(x_1) < f(z) < \frac{\lambda}{2} + f(x_1)$$

en particular
$$\frac{\alpha_1 + f(x_1)}{2} < f(z)$$

de donde
$$\beta < f(z)$$

concluimos que $(x_1,\alpha_1) \in \operatorname{int}(\{(x,\alpha):\ \alpha < f(x)\})$.

PROPOSICION III.15

Sean X un espacio de Hausdorff compacto y $\Omega \subset C(X,\mathbb{R})$ tal que dados $\varepsilon > 0$, $(x_1,x_2) \in X \times X$ y $f \in C(X,\mathbb{R})$ existe $h \in \Omega$ tal que:

$$|h(x_1) - f(x_1)| < \varepsilon \qquad y \qquad |h(x_2) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Entonces Ω aisla puntos en $X \times \mathbb{R}$.

DEMOSTRACION

Sean (x_1, α_1) y $(x_2, \alpha_2) \in X \times \mathbb{R}$.

i) Si $x_1 = x_2$ y $\alpha_1 < \alpha_2$. Sea $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ la función constante igual a $(\alpha_1 + \alpha_2)/2$, se tiene que $f \in C(X, \mathbb{R})$. Sea $\varepsilon = (\alpha_2 - \alpha_1)/2$, así $\varepsilon > 0$.

Por hipótesis existe $h \in \Omega$ tal que:

$$|h(x_1) - f(x_1)| < \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}$$

De aqui $$f(x_1) - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} < h(x_1) < f(x_1) + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}$$

Es decir $$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} < h(x_1) < \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}$$

De donde $$\alpha_1 < h(x_1) < \alpha_2$$

Así, h es la función aisladora, pues (x_1, α_1) queda debajo de su gráfica y (x_2, α_2) queda encima de su gráfica.

ii) Si $x_1 \neq x_2$. Como X es de Hausdorff y compacto entonces es normal, así, por el lema de Urysohn existe $f: X \longrightarrow [0,1]$ continua tal que $f(x_1) = 0$ y $f(x_2) = 1$. Puede suceder alguna de las siguientes situaciones con respecto a α_1 y α_2:

a) $\alpha_1 < \alpha_2$

b) $\alpha_2 < \alpha_1$

c) $\alpha_1 = \alpha_2$

Analicemos cada una de ellas:

a) Si $\alpha_1 < \alpha_2$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha_1 + \varepsilon < \alpha_2 - \varepsilon$. Definimos la función $j: [0,1] \longrightarrow [\alpha_1 + \varepsilon, \alpha_2 - \varepsilon]$ como:

$$j(t) = (\alpha_2 - \alpha_1 - 2\varepsilon)t + \alpha_1 + \varepsilon \qquad t \in [0,1]$$

Así, $g = j \circ f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua tal que:

$$g(x_1) = j(f(x_1)) = j(0) = \alpha_1 + \varepsilon$$

y $$g(x_2) = j(f(x_2)) = j(1) = \alpha_2 - \varepsilon$$

Por hipótesis existe $h \in \Omega$ tal que:

$$|h(x_1) - g(x_1)| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |h(x_2) - g(x_2)| < \varepsilon$$

Entonces $\quad g(x_1) - \varepsilon < h(x_1) \quad$ y $\quad h(x_2) < g(x_2) + \varepsilon$

De donde $\quad \alpha_1 < h(x_1) \quad$ y $\quad h(x_2) < \alpha_2$

Así, h es la función aisladora buscada.

b) Si $\alpha_2 < \alpha_1$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha_2 + \varepsilon < \alpha_1 - \varepsilon$. El razonamiento es análogo al inciso anterior sustituyendo la función j por la función $j' : [0,1] \longrightarrow [\alpha_2 + \varepsilon, \alpha_1 - \varepsilon]$ tal que:

$$j'(t) = (\alpha_2 - \alpha_1 + 2\varepsilon)t + \alpha_1 - \varepsilon \qquad t \in [0,1]$$

c) Si $\alpha_1 = \alpha_2$. Sea $\varepsilon > 0$ arbitraria. El razonamiento es análogo al inciso a) sustituyendo la función j por la función $j'' : [0,1] \longrightarrow [\alpha_1 - \varepsilon, \alpha_1 + \varepsilon]$ definida como:

$$j''(t) = 2\varepsilon t + \alpha_1 - \varepsilon \qquad t \in [0,1]$$

■

C A P I T U L O I V

" FUNCIONES SEMICONTINUAS "

DEFINICION IV.1

Sea (X,d_X) un espacio métrico. Se dice que una función $f:X \longrightarrow \mathbb{R}$ es superiormente semicontinua en un punto $x_0 \in X$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$ y $d_X(x,x_0) < \delta$ implica $f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$. Análogamente, f es inferiormente semicontinua en un punto $x_0 \in X$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $d_X(x,x_0) < \delta$ entonces $f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon$. Finalmente se dice que f es superiormente (inferiormente) semicontinua si lo es para cada punto de X.

Una forma alternativa de definir la semicontinuidad inferior y superior es por medio de los límites superior e inferior de una función, cuya definición recordamos a continuación:

DEFINICION IV.2

Sean (X,d_X) un espacio métrico, f una función de X en $\mathbb{R}$ y $x_0 \in X$, definimos:

$$\overline{\lim_{x \to x_0}} f(x) = \inf_{\delta > 0} \left\{ \sup \{ f(x) : d_X(x,x_0) < \delta \} \right\}$$

que es llamado el límite superior de f en x_0, y

$$\underline{\lim_{x \to x_0}} f(x) = \sup_{\delta > 0} \left\{ \inf \{ f(x) : d_X(x,x_0) < \delta \} \right\}$$

que es llamado el límite inferior de f en x_0.

Afirmación: f es superiormente semicontinua en x_0 si y sólo si

$$f(x_0) = \overline{\lim_{x \to x_0}} f(x)$$

En efecto. Supongamos que f es superiormente semicontinua en x_0. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_0 > 0$ tal que si $d_X(x,x_0) < \delta_0$ entonces $f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$, así

$$\sup \left\{ f(x) : d_X(x,x_0) < \delta_0 \right\} \leq f(x_0) + \varepsilon$$

de donde : $\overline{\lim\limits_{x \to x_0}} f(x) = \inf\limits_{\delta > 0} \{\sup \{f(x): d_X(x,x_0) < \delta\}\} \leq f(x_0) + \varepsilon$

Puesto que esto es válido para todo $\varepsilon > 0$ tenemos:

$$\overline{\lim_{x \to x_0}} f(x) \leq f(x_0)$$

Por otra parte, para toda $\delta > 0$ se tiene :

$$f(x_0) \leq \sup \{f(x): d_X(x,x_0) < \delta\}$$

de donde $\quad f(x_0) \leq \inf\limits_{\delta > 0} \{\sup \{f(x): d_X(x,x_0) < \delta\}\} = \overline{\lim\limits_{x \to x_0}} f(x)$

así, concluímos que $\quad f(x_0) = \overline{\lim\limits_{x \to x_0}} f(x)$

Inversamente. Supongamos que $f(x_0) = \overline{\lim\limits_{x \to x_0}} f(x)$, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_0 > 0$ tal que:

$$\sup \{f(x): d_X(x,x_0) < \delta_0\} \leq f(x_0) + \varepsilon$$

así, para toda $x \in X$ tal que $d_X(x,x_0) < \delta_0$ se tiene $f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$, por lo cual f es superiormente semicontinua en x_0.

Similarmente: f es inferiormente semicontinua en x_0 si y sólo si:

$$f(x_0) = \underline{\lim_{x \to x_0}} f(x)$$

A lo largo de este capítulo se utilizarán algunos resultados acerca de las funciones semicontinuas, por esta razón es conveniente introducirlos en este momento.

1) f es una función continua si y sólo si f es inferiormente semicontinua y superiormente semicontinua .

2) f es una función superiormente semicontinua (inferiormente semicontinua) si y sólo si $(-f)$ es una función inferiormente semicontinua (superiormente semicontinua).

3) si f y g son superiormente (inferiormente) semicontinuas entonces $f + g$ también es superiormente (inferiormente) semicontinua.

4) Si g es una función superiormente (inferiormente) semicontinua y f es una función inferiormente (superiormente) semicontinua, entonces la función $g - f$ es superiormente (inferiormente) semicontinua.

Centraremos nuestra atención en las funciones superiormente semicontinuas, aunque en realidad, los resultados expuestos en el presente capítulo tienen su dual con respecto a las funciones inferiormente semicontinuas con los cambios adecuados.

Primeramente consideremos la siguiente:

PROPOSICION IV.3

Sean (X, d_X) un espacio métrico compacto y $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función superiormente semicontinua, entonces f está acotada superiormente.

DEMOSTRACION

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, para cada $x \in X$ existe $\delta_x > 0$ tal que $d_X(x,y) < \delta_x$ implica $f(y) \leq f(x) + \varepsilon$. Consideremos la cubierta abierta de X dada por $\{B_{\delta_x}(x) : x \in X\}$, como X es compacto existen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ tales que:

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B_{\delta_{x_i}}(x_i)$$

Sea $M = \max \{ f(x_i) + \varepsilon : i = 1,2,\ldots,n \}$. Afirmamos que $f(x) \leq M$ para toda $x \in X$. En efecto, si $x \in X$ entonces existe $1 \leq i \leq n$ tal que $x \in B_{\delta_{x_i}}(x_i)$, y así

$f(x) \leq f(x_i) + \varepsilon \leq M.$ ■

Observemos que si una función es superiormente semicontinua no podemos asegurar que esté acotada inferiormente, aún cuando esté definida en un espacio compacto. Como un ejemplo de esto consideremos la función $f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x \in (0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

NOTACION

En lo sucesivo utilizaremos la siguiente notación

$C(X)$ denotará al conjunto de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$.

$S(X)$ denotará al conjunto de funciones superiormente semicontinuas de X en $\mathbb{R}$.

$U(X)$ denotará al conjunto de funciones acotadas y superiormente semicontinuas de X en $\mathbb{R}$.

Deseamos definir una métrica en $U(X)$, para lo cual haremos uso de la métrica de Hausdorff. Puesto que esta métrica está definida sobre conjuntos cerrados, y, las gráficas de funciones superiormente semicontinuas no necesariamente son conjuntos cerrados en $X \times \mathbb{R}$, (por ejemplo la función mayor entero menor o igual que x; $[x]$), entonces debemos asociar a cada función superiormente semicontinua un conjunto cerrado en $X \times \mathbb{R}$. Esto lo logramos de dos formas diferentes, cada una de las cuales dará origen a una métrica diferente.

La forma más natural de asociarle un conjunto cerrado en $X \times \mathbb{R}$ a cada elemento de $U(X)$ es considerar la cerradura de su gráfica, esto da origen a la siguiente métrica infinita en $U(X)$.

DEFINICION IV.4

Sea (X,d_x) un espacio métrico arbitrario, definimos la función $d_2 : U(X) \times U(X) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ como:

$$d_2(f,g) = \delta_\rho(\overline{f},\overline{g})$$

donde $\overline{f}$ y $\overline{g}$ denotan la cerradura de la gráfica de f y g respectivamente.

Para comprobar que d_2 define una métrica en $U(X)$ sólo hace falta ver que si f y g son elementos de $U(X)$ tales que $\overline{f} = \overline{g}$ entonces $f = g$. Para comprobar esto, supongamos que existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \neq g(x_0)$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f(x_0) > g(x_0)$, sea $\varepsilon = f(x_0) - g(x_0)$, entonces ε es positivo y como g es una función superiormente semicontinua existe $\delta > 0$ tal que $d_x(x,x_0) \leq \delta$ implica $g(x) \leq g(x_0) + \varepsilon/2$. Sea $0 < \lambda < \min\{\delta, \varepsilon/2\}$, se afirma que $B_\lambda[(x_0,f(x_0))] \cap \overline{g} = \emptyset$. En efecto, si $(y,a) \in B_\lambda[(x_0,f(x_0))]$ entonces:

$$d_x(y,x_0) \leq \lambda < \delta$$

y $$|a - f(x_o)| \leq \lambda < \varepsilon/2$$

puesto que $d_x(y,x_o) < \delta$ se tiene

$$g(y) \leq g(x_o) + \varepsilon/2$$

y ya que $$\frac{\varepsilon}{2} = \frac{f(x_o) - g(x_o)}{2}$$

se sigue que $$g(y) \leq \frac{f(x_o) + g(x_o)}{2}$$

por otra parte $$\frac{f(x_o) + g(x_o)}{2} = f(x_o) - \frac{\varepsilon}{2} < a$$

así $$g(y) < a$$

de aquí, se sigue que $(y,a) \notin \bar{g}$, por consiguiente $(x_o,f(x_o)) \in \bar{f} - \bar{g}$, así que $\bar{f} \neq \bar{g}$, lo que es una contradicción.

La otra forma de asociar a cada elemento f de $U(X)$ un conjunto cerrado en $X \times \bar{\mathbb{R}}$ lo logramos por medio del concepto de hipográfica de una función (hipof).

DEFINICION

Sean (X,d_x) un espacio métrico arbitrario y $f:X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$, definimos:

$$\text{hipof} = \{ (x,\alpha): x \in X, \ \alpha \leq f(x) \}$$

Un hecho importante es que si $f \in S(X)$ entonces hipof es un conjunto cerrado en $X \times \bar{\mathbb{R}}$, para la justificación de esta afirmación haremos uso del siguiente:

LEMA IV.5

Sean (X,d_x) un espacio métrico, $x_o \in X$ y $f:X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ una función arbitraria. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en X convergente a x_o, entonces:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f(x_n) \leq \overline{\lim_{x\to x_o}} f(x)$$

donde $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f(x_n)$ denota el límite superior de la sucesión $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$, y - $\overline{\lim\limits_{x\to x_o}} f(x)$ es el límite superior de f en x_o definido en páginas anteriores.

DEMOSTRACION

Si $\overline{\lim}_{x\to x_o} f(x) = \infty$ entonces no hay nada que probar.

Supongamos que $\overline{\lim}_{x\to x_o} f(x) < \infty$ y sea $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \overline{\lim_{n\to\infty}} f(x_n)$$

Sea r un número mayor que $\overline{\lim}_{x\to x_o} f(x)$. Existe $\delta > 0$ tal que:

$$\sup\{ f(x):\ d_x(x,x_o) < \delta\} < r$$

Así, $f(x) < r$ si $d_x(x,x_o) < \delta$. Por otra parte existe $K > 0$ tal que: $d_x(x_{n_k},x_o) < \delta$ si $k \geq K$, por lo tanto

$$f(x_{n_k}) < r \qquad \text{si } k \geq K$$

Así, $\overline{\lim}_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \leq r$. Y como esto es válido para todo $r > \overline{\lim}_{x\to x_o} f(x)$ se sigue que:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f(x_n) \leq \overline{\lim_{x\to x_o}} f(x)$$

■

PROPOSICION IV.6

Sean (X,d_x) un espacio métrico arbitrario y $f:X \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces f es superiormente semicontinua si y sólo si hipof es un conjunto cerrado en $X \times \mathbb{R}$.

DEMOSTRACION

Supongamos que f es superiormente semicontinua. Sea $((x_n,\alpha_n))_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en hipof convergente a (x_o,α_o), debemos probar que $(x_o,\alpha_o) \in$ hipof. Se tiene que para cada $n\in\mathbb{N}$ $\alpha_n \leq f(x_n)$, así,

$$\alpha_o = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} \alpha_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} f(x_n)$$

pero

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f(x_n) \leq \overline{\lim_{x\to x_o}} f(x)$$

puesto que $\overline{\lim_{x \to x_0}} f(x) = f(x_0)$

se sigue que $\alpha_0 \leq f(x_0)$

y de esta forma $(x_0,\alpha_0) \in$ hipof

Inversamente, supongamos que f no es superiormente semicontinua, entonces existen $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ tal que $d_X(x_n,x_0) < 1/n$ y $f(x_n) > f(x_0) + \varepsilon$. Consideremos la sucesión $((x_n,f(x_0)+\varepsilon))_n$, se tiene que la sucesión está contenida en hipof y, además, la sucesión converge a $(x_0,f(x_0) + \varepsilon)$ el cual no pertenece a hipof. Por lo anterior concluimos que hipof no es un conjunto cerrado en $X \times \mathbb{R}$.

■

Teniendo en cuenta la proposición anterior tiene sentido considerar la siguiente definición.

DEFINICION IV.7

Sea (X,d_X) un espacio métrico arbitrario, definimos la función $d_3: S(X) \times S(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ como:

$$d_3(f,g) = \delta_\rho(\text{hipof},\text{hipog})$$

(que la función es real valuada se verá en la proposición IV.17)

Nuevamente, para comprobar que d_3 define una métrica en $S(X)$ sólo hace falta ver que si f y g son elementos de $S(X)$ tales que hipof = hipog entonces f = g. Para comprobar esto supongamos que existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \neq g(x_0)$, sin pérdida de generalidad podemos suponer $f(x_0) > g(x_0)$, sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $g(x_0) < \alpha < f(x_0)$, de aquí se tiene que $(x_0,\alpha) \in$ hipof − hipog, y así hipof $\neq$ hipog, lo que es una contradicción.

Una tercer métrica que podemos considerar en $U(X)$, es la métrica de convergencia uniforme, la cual denotaremos por d_1, es decir:

$$d_1(f,g) = \sup \{ |f(x) - g(x)| : x \in X \}$$

Antes de establecer algunas relaciones entre estas tres métricas asociaremos a cada función en $S(X)$ unas nuevas funciones, las cuales serán de utilidad en la demostración de proposiciones posteriores.

DEFINICION IV.8

Sean (X,d_X) un espacio métrico arbitrario y $f \in S(X)$. Para cada $\lambda > 0$ se definen las funciones $f_\lambda^+ : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f_\lambda^- : X \longrightarrow \mathbb{R}$ como:

$$f_\lambda^+(x) = \sup \{ \alpha \in \mathbb{R} : (x,\alpha) \in B_\lambda[\overline{f}] \}$$

$$f_\lambda^-(x) = \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : (x,\alpha) \in B_\lambda[\overline{f}] \}$$

A la función f_λ^+ la llamaremos "la función λ-paralela y superior de f", y, a la función f_λ^- la llamaremos "la función λ-paralela e inferior de f".

Notamos que $f_\lambda^+(x) = \sup \{ f(y) : y \in B_\lambda[x] \} + \lambda$ si $\overline{f} = f$ (en particular si f es continua).

En efecto. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $(x,\alpha) \in B_\lambda[\overline{f}] = B_\lambda[f]$. Existe $y_0 \in X$ tal que

$$d_X(y_0,x) \le \lambda \qquad y \qquad |\alpha - f(y_0)| \le \lambda$$

Así $$\alpha \le f(y_0) + \lambda \le \sup \{ f(y) : y \in B_\lambda[x] \} + \lambda$$

por lo tanto $$f_\lambda^+(x) \le \sup \{ f(y) : y \in B_\lambda[x] \} + \lambda$$

Por otra parte, dado $\varepsilon > 0$ existe $y_0 \in B_\lambda[x]$ tal que:

$$f(y_0) + \lambda \ge \sup \{ f(y) : y \in B_\lambda[x] \} + \lambda - \varepsilon$$

y como $(x, f(y_0) + \lambda) \in B_\lambda[f]$ entonces

$$f_\lambda^+(x) \ge \sup \{ f(y) : y \in B_\lambda[x] \} + \lambda - \varepsilon$$

como esto es válido para todo $\varepsilon > 0$ se sigue que:

$$f_\lambda^+(x) \ge \sup \{ f(y) : y \in B_\lambda[x] \} + \lambda$$

Así $$f_\lambda^+(x) = \sup \{ f(y) : y \in B_\lambda[x] \} + \lambda$$

Además si $f|B_{\lambda'}(x)$, con $\lambda' > \lambda$ es continua entonces

$$f_\lambda^+(x) = \sup\{ f(y) : y \in B_\lambda[x]\} + \lambda$$

En efecto, se sigue como antes que

$$f_\lambda^+(x) \geq \sup\{ f(y) : y \in B_\lambda[x]\} + \lambda$$

Por otra parte, sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $(x,\alpha) \in B_\lambda[\overline{f}]$. Así existen $y_0 \in X$ y $\beta \in \mathbb{R}$ tales que $d_X(x,y_0) \leq \lambda$, $|\alpha - \beta| \leq \lambda$ y $(y_0,\beta) \in \overline{f}$. Así existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que $((x_n,f(x_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a (y_0,β). Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d_X(x,x_n) < \lambda'$ si $n \geq N$, y por la continuidad de f en $B_{\lambda'}(x)$ se tiene que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(y_0)$, pero como $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a β se tiene $f(y_0) = \beta$. Por lo tanto

$$d_X(x,y_0) \leq \lambda \quad \text{y} \quad |\alpha - f(y_0)| \leq \lambda$$

De donde $\alpha \leq f(y_0) + \lambda$

Así $f_\lambda^+(x) \leq \sup\{ f(y) : y \in B_\lambda[x]\} + \lambda$

Por lo tanto $f_\lambda^+(x) = \sup\{ f(y) : y \in B_\lambda[x]\} + \lambda$

Consideremos algunos ejemplos y algunas propiedades que cumple la función λ-paralela y superior.

EJEMPLO IV.9

a) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f = \chi_n$, entonces:

$$f_\lambda^+ = \chi_{[n-\lambda,\, n+\lambda]} + \lambda$$

b) Sea $X = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1\}$. Consideremos la función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como:

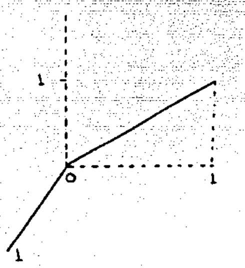
$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Si $\lambda \geq 1$ se tiene:

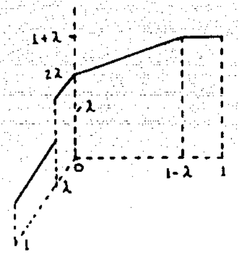
$$f_\lambda^+(x,y) = 1 + \lambda \qquad \text{para todo } (x,y) \in X$$

Si $0 < \lambda < 1$ entonces

$$f_\lambda^+(x,y) = \begin{cases} \lambda & \text{si } 1 \geq x > \lambda, \quad y = 0 \\ 2\lambda & \text{si } 0 \leq x \leq \lambda, \quad y = 0 \\ y + 2\lambda & \text{si } x = 0, \quad 0 \leq y \leq 1 - \lambda \\ 1 + \lambda & \text{si } x = 0, \quad 1 - \lambda < y \leq 1 \end{cases}$$



Gráfica de la función f



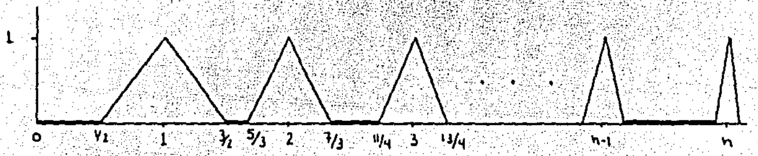
Gráfica de la función f^+
(con $0 < \lambda < 1$)

c) Sea $X = [0,\infty)$ y consideremos la función $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = n \quad n \in \mathbb{N} \\ 0 & x \in \left[0,\frac{1}{2}\right] \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[n + \frac{1}{n+1},\ n + 1 - \frac{1}{n+2}\right] \\ (n+1)(x-n) + 1 & x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[n - \frac{1}{n+1},\ n\right] \\ -(n+1)(x-n) + 1 & x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[n,\ n + \frac{1}{n+1}\right] \end{cases}$$

Es decir, la función f conecta linealmente los puntos:

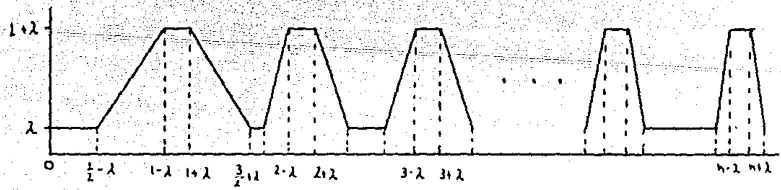
(0,0), (1/2,0), (1,1), (3/2,0), (5/3,0), (2,1), (7/3,0), (11/4,0), (3,1),....



Gráfica de la función f

Si $\lambda < 1/12$, entonces:

$$f_\lambda^+(x) = \begin{cases} \lambda & x \in \left[0, \frac{1}{2} - \lambda\right] \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[n + \frac{1}{n+1} + \lambda, n+1 - \frac{1}{n+2} - \lambda\right] \\ 1 + \lambda & x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[n - \lambda, n + \lambda\right] \\ (n+1)\left[x - (n - \lambda)\right] + 1 + \lambda & x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[n - \frac{1}{n+1} - \lambda, n - \lambda\right] \\ -(n+1)\left[x - (n + \frac{1}{n+1} + \lambda)\right] + \lambda & x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[n + \lambda, n + \frac{1}{n+1} + \lambda\right] \end{cases}$$



Gráfica de la función f_λ^+
(con $0 < \lambda < 1/12$)

Veamos ahora algunas propiedades de las funciones λ-paralelas y superiores.

PROPOSICION IV.10

Sean (X,d_x) un espacio métrico compacto, $f\in S(X)$ y $\lambda > 0$. Entonces:

$$B_\lambda[\text{hipof}] = \text{hipof}_\lambda^+$$

DEMOSTRACION

Sea $(x,\alpha)\in B_\lambda[\text{hipof}]$, entonces existe $(y,\beta)\in \text{hipof}$ $(\beta\leq f(y))$ tal que

$$\rho((x,\alpha),(y,\beta))\leq \lambda$$

Puesto que $\rho((x, \alpha + f(y) - \beta),(y,f(y))) = \rho((x,\alpha),(y,\beta))\leq \lambda$

Entonces $(x,\alpha+ f(y) - \beta)\in B_\lambda[\overline{f}]$

Así $\alpha + f(y) - \beta \leq f_\lambda^+(x)$

Pero $f(y) - \beta \geq 0$

De donde $\alpha \leq f_\lambda^+(x)$

Por lo cual $(x,\alpha)\in \text{hipof}_\lambda^+$

Por consiguiente $B_\lambda[\text{hipof}]\subset \text{hipof}_\lambda^+$

Inversamente, supongamos que $(x,\alpha)\in \text{hipof}_\lambda^+$, es decir $\alpha\leq f_\lambda^+(x)$. Afirmamos que para cada $n\in \mathbb{N}$

$$(x,f_\lambda^+(x))\in B_{\lambda+1/n}\,[f]$$

En efecto, para cada $n\in\mathbb{N}$ existe $\alpha_n > f_\lambda^+(x) - \dfrac{1}{2n}$ tal que $(x,\alpha_n)\in B_\lambda[\overline{f}]$,- así $\alpha_n\leq f_\lambda^+(x)$ de donde existe $(y,a)\in\overline{f}$ tal que

$$\rho((x,\alpha_n),(y,a))\leq\lambda < \lambda + \frac{1}{2n}$$

así $\qquad d_x(x,y) < \lambda + \dfrac{1}{2n} \qquad$ y $\qquad |\alpha_n - a|\leq\lambda$

de la segunda desigualdad tenemos:

$$-\lambda + \frac{1}{2n}\leq\alpha_n + \frac{1}{2n} - a\leq\lambda+\frac{1}{2n}$$

así $$-\lambda+\frac{1}{2n}\leq\alpha_n+\frac{1}{2n} - a\leq f_\lambda^+(x) + \frac{1}{2n} - a$$

de donde $$-\lambda \leq f_\lambda^+(x) - a$$

y $$-\lambda - \frac{1}{2n} < -\lambda \leq f_\lambda^+(x) - a \qquad (1)$$

por otra parte $$f_\lambda^+(x) < \alpha_n + \frac{1}{2n}$$

así $$f_\lambda^+(x) - a < \alpha_n + \frac{1}{2n} - a \leq \lambda + \frac{1}{2n} \qquad (2)$$

Tomando en cuenta las desigualdades (1) y (2) tenemos:

$$-\lambda - \frac{1}{2n} < f_\lambda^+(x) - a < \lambda + \frac{1}{2n}$$

por consiguiente $$|f_\lambda^+(x) - a| < \lambda + \frac{1}{2n}$$

pero entonces $$\rho((x, f_\lambda^+(x)), (y, a)) \leq \lambda + \frac{1}{2n}$$

por otra parte, como $(y,a) \in \overline{f}$ existe $(z, f(z)) \in f$ tal que

$$\rho((z, f(z)), (y, a)) < \frac{1}{2n}$$

se sigue que $$\rho((x, f_\lambda^+(x)), (z, f(z))) \leq \lambda + \frac{1}{n}$$

así $$(x, f_\lambda^+(x)) \in B_{\lambda+1/n}[f]$$

Tomando en cuenta la afirmación anterior, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $(y_n, f(y_n)) \in f$ tal que:

$$\rho((x, f_\lambda^+(x)), (y_n, f(y_n))) \leq \lambda + \frac{1}{n}$$

como para cada $n \in \mathbb{N}$ $$|f_\lambda^+(x) - f(y_n)| \leq \lambda + \frac{1}{n}$$

entonces la sucesión $(f(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada, es decir, existe $M > 0$ tal que $|f(y_n)| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, como X es compacto entonces $X \times [-M, M]$ es un subconjunto compacto de $X \times \mathbb{R}$, así la sucesión $((y_n, f(y_n)))_{n \in \mathbb{N}}$ debe tener una subsucesión convergente, para hacer simple la notación supongamos que de hecho $((y_n, f(y_n)))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a un punto $(y, \beta) \in X \times \mathbb{R}$. Observemos que la sucesión $((y_n, f(y_n)))_{n \in \mathbb{N}}$ está contenida en hipof, el cual es un conjunto cerrado, por esta razón $(y, \beta) \in$ hipof. Por otra parte puesto que

$$\rho((x, f_\lambda^+(x)), (y_n, f(y_n))) \leq \lambda + \frac{1}{n}$$

al tomar límites cuando n tiende a infinito obtenemos

$$\rho((x, f_\lambda^+(x)), (y, \beta)) \leq \lambda$$

así $$(x, f_\lambda^+(x)) \in B_\lambda[\text{hipof}]$$

Finalmente puesto que $\alpha \leq f_\lambda^+(x)$, entonces $(x, \alpha) \in B_\lambda[\text{hipof}]$, pues como

$$\rho((x, f_\lambda^+(x)), (y, \beta)) \leq \lambda \quad \text{y} \quad \alpha - f_\lambda^+(x) \leq 0$$

entonces $$(y, \beta + \alpha - f_\lambda^+(x)) \in \text{hipof}$$

y además $$\rho((x, \alpha), (y, \beta + \alpha - f_\lambda^+(x))) = \rho((x, f_\lambda^+(x)), (y, \beta)) \leq \lambda$$

de donde $$\text{hipof}_\lambda^+ \subset B_\lambda[\text{hipof}]$$

concluimos que $$B_\lambda[\text{hipof}] = \text{hipof}_\lambda^+$$ ■

PROPOSICION IV.11

Sean (X, d_X) un espacio métrico compacto y $f \in S(X)$. Para cada $\lambda > 0$ se tiene $f_\lambda^+ \in U(X)$.

DEMOSTRACION

Primeramente veamos que para cada $\lambda > 0$ la función f_λ^+ es acotada. Sea $\lambda > 0$, para ver que f_λ^+ está acotada superiormente, sea $M > 0$ tal que $f(x) \leq M$ para todo $x \in X$ (esto es válido pues como $f \in S(X)$ entonces está acotada superiormente). Afirmamos que $f_\lambda^+(x) \leq M + \lambda$ para todo $x \in X$. En efecto, sean $x \in X$ y $(x, \alpha) \in B_\lambda[\overline{f}]$, existe $(y, \beta) \in \overline{f}$ tal que

$$d_X(x, y) \leq \lambda \quad \text{y} \quad |\alpha - \beta| \leq \lambda$$

de la segunda desigualdad se sigue que:

$$\alpha \leq \beta + \lambda$$

pero $\beta \leq M$, por lo cual $\alpha \leq M + \lambda$, y así $f_\lambda^+(x) \leq M + \lambda$, como esto es válido para todo $x \in X$ concluimos que f_λ^+ está acotada superiormente por $M + \lambda$.

Ahora, supongamos que f_λ^+ no está acotada inferiormente, entonces podemos construir una sucesión $((z_n,\alpha_n))_{n \in \mathbb{N}}$ contenida en el complemento de hipof_λ^+ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ $\alpha_n < -n$. Como para cada $n \in \mathbb{N}$ el término $(z_n,\alpha_n) \in (X \times \mathbb{R})$ − hipof_λ^+, por la proposición anterior se tiene:

$$(z_n,\alpha_n) \in (X \times \mathbb{R}) - B_\lambda\,[\text{hipof}]$$

así $$\rho((z_n,\alpha_n),(x,a)) > \lambda \qquad \text{para todo } (x,a) \in \text{hipof}$$

Por otra parte, como X es compacto la sucesión $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ debe tener una subsucesión convergente, nuevamente para simplificar la notación supongamos que de hecho $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a cierto $z \in X$. Así, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d_X(z,z_n) < \lambda$ si $n \geq N_1$. También existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $-N_2 < f(z)$, de donde $\alpha_n < f(z)$ si $n \geq N_2$. Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$, entonces si $n \geq N$

$$d_X(z,z_n) < \lambda \qquad \text{y} \qquad \alpha_n < f(z)$$

así $$(z_n,\alpha_n) \in B_\lambda\,[\{(z,\alpha): \alpha \leq f(z)\}]$$

y como $\{(z,\alpha): \alpha \leq f(z)\} \subset$ hipof entonces $(z_n,\alpha_n) \in B_\lambda\,[\text{hipof}]$, lo que es una contradicción. Así pues f_λ^+ debe estar acotada inferiormente.

Por último para comprobar que $f_\lambda^+ \in S(X)$ basta con demostrar que hipof_λ^+ es un conjunto cerrado en $X \times \mathbb{R}$. Por la proposición anterior sabemos que:

$$\text{hipof}_\lambda^+ = B_\lambda\,[\text{hipof}]$$

Afirmamos que en $X \times \mathbb{R}$ es válido el teorema de Heine-Borel, es decir, un subconjunto de $X \times \mathbb{R}$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado. En efecto, sabemos que en general si un conjunto F es compacto entonces es cerrado y acotado, inversamente, supongamos que $F \subset X \times \mathbb{R}$ es cerrado y acotado, entonces existe $M \in \mathbb{R}$ tal que:

$$F \subset X \times [-M, M]$$

pero $X \times [-M, M]$ es compacto y F es cerrado, se sigue que F es compacto.

Se sigue de la afirmación anterior que si F es un subconjunto cerrado de $X \times \mathbb{R}$ y $\delta > 0$ entonces $B_\delta\,[F]$ es un subconjunto cerrado de $X \times \mathbb{R}$ (ver apéndice D). En particular como hipof es un subconjunto cerrado de $X \times \mathbb{R}$ (pues $f \in S(X)$)

entonces $B_\lambda[\text{hipof}]$ es un subconjunto cerrado de $X \times \mathbb{R}$.

∎

Otra propiedad que mencionaremos de las funciones λ-paralelas superiores es la siguiente: Si f es una función continua de un espacio X en $\mathbb{R}$ no necesariamente f_λ^+ resulta ser continua aún cuando el espacio X sea conexo y compacto (observar el ejemplo IV.9 (b)). Sin embargo, si X es un subconjunto convexo y compacto de un espacio lineal normado entonces las funciones λ-paralela superior para cada elemento de $C(X)$ resultan ser continuas. Para justificar esta afirmación consideremos antes los siguientes lemas.

LEMA IV.12

Sean $(X, \|\ \|)$ un espacio lineal normado, $K \subset X$ convexo, $x_0 \in K$ y $r > 0$, entonces:

$$B_r^{(K)}[x_0] = \overline{B_r^{(K)}(x_0)}$$

donde $B_r^{(K)}[x_0]$ y $B_r^{(K)}(x_0)$ son las "bolas" en K (cerrada y abierta) con centro x_0 y radio r.

DEMOSTRACION

Claramente $\overline{B_r^{(K)}(x_0)} \subset B_r^{(K)}[x_0]$. Inversamente, sea $y \in B_r^{(K)}[x_0]$, es decir, $\|y - x_0\| \leq r$. Para todo $t \in [0,1]$ se tiene:

$$x_0 + t(y - x_0) \in K$$

y
$$\|x_0 + t(y - x_0) - x_0\| = t\|y - x_0\| \leq r$$

es decir
$$x_0 + t(y - x_0) \in B_r^{(K)}(x_0) \qquad \text{si } t \in [0,1)$$

Por otra parte, sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, entonces para t muy próxima a 1 se tiene:

$$\|x_0 + t(y - x_0) - y\| = (1 - t)\|x_0 - y\| < \varepsilon$$

y así $y \in \overline{B_r^{(K)}(x_0)}$, por lo cual $B_r^{(K)}[x_0] \subset \overline{B_r^{(K)}(x_0)}$

∎

LEMA IV.13

Sean $(X, \|\ \|)$ un espacio lineal normado, $K \subset X$ convexo y compacto, $x_0 \in K$, $f: K \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y $r > 0$. Entonces

$$\sup\{f(x): x \in B_r^{(K)}(x_0)\} = \sup\{f(x): x \in B_r^{(K)}[x_0]\}$$

DEMOSTRACION

Es claro que: $\sup\{f(x): x \in B_r^{(K)}(x_0)\} \leq \sup\{f(x): x \in B_r^{(K)}[x_0]\}$.

Inversamente, sea $\alpha = \sup\{f(x): x \in B_r^{(K)}[x_0]\}$, de acuerdo al lema anterior $\alpha = \sup\{f(x): x \in \overline{B_r^{(K)}(x_0)}\}$. Puesto que K es compacto entonces $\overline{B_r^{(K)}(x_0)}$ es compacto, por lo cual existe $y_0 \in \overline{B_r^{(K)}(x_0)}$ tal que $\alpha = f(y_0)$. Por otra parte existe una sucesión $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contenida en $B_r^{(K)}(x_0)$ convergente a y_0, como f es continua se tiene:

$$\lim_{n \to \infty} f(y_n) = f(y_0)$$

pero $f(y_n) \leq \sup\{f(x): x \in B_r^{(K)}(x_0)\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

de donde $\alpha \leq \sup\{f(x): x \in B_r^{(K)}(x_0)\}$

así, concluimos que:

$$\sup\{f(x): x \in B_r^{(K)}[x_0]\} = \sup\{f(x): x \in B_r^{(K)}(x_0)\}$$

■

LEMA IV.14

Bajo las mismas hipótesis del lema anterior, si $\lambda > 0$ entonces

$$f_\lambda^+(x) = \sup\{f(y): y \in B_\lambda^{(K)}(x)\} + \lambda$$

DEMOSTRACION

De acuerdo a la observación hecha después de la definición IV.8 sabemos:

$$f_\lambda^+(x) = \sup\{f(y): y \in B_\lambda^{(K)}[x]\} + \lambda$$

Tomando en cuenta el lema anterior se tiene:

$$f_\lambda^+(x) = \sup\{f(y): y \in B_\lambda^{(K)}(x)\} + \lambda$$

■

LEMA IV.15

Sean $(X, \|\ \ \|)$ un espacio lineal normado, $K \subset X$ convexo, x, $x_0 \in K$ y $\lambda > 0$. - Si $y \in B_\lambda^{(K)}[x]$ entonces $y \in B_\lambda^{(K)}[x_0]$ o $\|y - z\| \leq \|y - x_0\|$ para alguna $z \in K$ tal que $\|z - x_0\| = \lambda$.

DEMOSTRACION

Sea $y \in B_\lambda^{(K)}[x]$ y supongamos que $y \notin B_\lambda^{(K)}[x_0]$, entonces $\|y - x_0\| > \lambda$. El - segmento $\{x_0 + t(y - x_0) : t \in [0,1]\}$ está contenido en K. Definimos la función $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ como:

$$g(t) = \|x_0 + t(y - x_0) - x_0\| = t\|y - x_0\|$$

así $g(0) = 0$ y $g(1) = \|y - x_0\|$. Puesto que g es continua y $[0,1]$ es conexo - por el teorema del valor intermedio existe $t_0 \in [0,1]$ tal que:

$$g(t_0) = \|x_0 + t_0(y - x_0) - x_0\| = \lambda$$

sea $z = x_0 + t_0(y - x_0)$, así

$$\|z - x_0\| = t_0\|y - x_0\| = \lambda \quad \text{y} \quad \|z - y\| = (1 - t_0)\|y - x_0\|$$

se sigue de la primera igualdad que:

$$t_0 = \frac{\lambda}{\|y - x_0\|}$$

sustituyendo t_0 en la segunda igualdad se tiene:

$$\|z - y\| = \left(1 - \frac{\lambda}{\|y - x_0\|}\right)\|y - x_0\| = \|y - x_0\| - \lambda$$

pero $$\lambda \geq \|y - x\|$$

así $$\|z - y\| \leq \|y - x_0\| - \|y - x\| \leq \|x - x_0\|$$

lo cual acompleta la demostración.

■

Haciendo uso de los lemas anteriores enunciamos la siguiente proposición.

PROPOSICION IV.16

Sean $(X, \| \ \|)$ un espacio lineal normado, $K \subset X$ convexo y compacto, $f: K \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y $\lambda > 0$. Entonces f^+_λ es una función continua.

DEMOSTRACION

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, puesto que f es uniformemente continua existe $\delta > 0$ tal que si $x, x' \in K$ y $\|x - x'\| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Sean $x, x_0 \in K$ tales que $\|x - x_0\| < \delta$. De acuerdo al lema IV.14

$$f^+_\lambda(x) = \lambda + f(y_x) \qquad \text{para alguna } y_x \in B_\lambda[x]$$

y

$$f^+_\lambda(x_0) = \lambda + f(y_{x_0}) \qquad \text{para alguna } y_{x_0} \in B_\lambda[x_0]$$

Se probará que: $|f^+_\lambda(x) - f^+_\lambda(x_0)| < \varepsilon$. Observemos en primer lugar que:

$$|f^+_\lambda(x) - f^+_\lambda(x_0)| = |f(y_x) - f(y_{x_0})|$$

Si $f(y_x) = f(y_{x_0})$ la afirmación se cumple inmediatamente. Supongamos que $f(y_x) > f(y_{x_0})$, entonces $y_x \notin B_\lambda[x_0]$ (pues $f(y_{x_0}) = \max\{f(y) : y \in B_\lambda[x_0]\}$), por el lema IV.15 existe $z \in K$ tal que:

$$\|z - x_0\| = \lambda \qquad \text{y} \qquad \|z - y_x\| \leq \|x - x_0\| < \delta$$

de la desigualdad anterior se sigue que

$$|f(z) - f(y_x)| < \varepsilon$$

en particular

$$f(y_x) < f(z) + \varepsilon \leq f(y_{x_0}) + \varepsilon$$

así

$$|f(y_x) - f(y_{x_0})| = f(y_x) - f(y_{x_0}) < \varepsilon$$

Análogamente, si $f(y_{x_0}) > f(y_x)$ se cumple

$$|f(y_x) - f(y_{x_0})| < \varepsilon$$

Por lo cual f^+_λ resulta ser uniformemente continua. ■

Volvamos al espacio de las funciones superiormente semicontinuas y a las tres métricas de $U(X)$ consideradas en páginas anteriores, la siguiente proposición nos dice algo más acerca de la métrica d_3.

PROPOSICION IV.17

d_3 es una función real valuada en el espacio de las funciones superiormente semicontinuas.

DEMOSTRACION

Debemos probar que si f y g son funciones superiormente semicontinuas entonces $d_3(f,g)<\infty$. Para esto veamos que existe un número $r > 0$ tal que $\text{hipog} \subset B_r[\text{hipof}]$.

Por la proposición IV.11 $f_1^+ \in U(X)$, asi que existe $w \in \mathbb{R}$ tal que

$$w < \inf\{f_1^+(x): x \in X\}$$

Sea $\beta = \sup\{g(x): x \in X\}$ (el cual existe pues al ser g superiormente semicontinua está acotada superiormente).
Sea $r = 1 + |\beta - w|$. Afirmamos que:

$$\text{hipog} \subset B_r[\text{hipof}]$$

En efecto, sea $(x,a) \in \text{hipog}$, así $a \leq g(x) \leq \beta$, de donde $\beta - a \geq 0$. Por otra parte $w < f_1^+(x) + \beta - a$ para toda $x \in X$, es decir

$$a - |\beta - w| \leq a - (\beta - w) < f_1^+(x)$$

de donde
$$a < f_1^+(x) + |\beta - w|$$

así
$$a < f^+_{1+|\beta - w|}(x)$$

(ver la justificación de esta desigualdad al final de la demostración).
Por lo cual $(x,a) \in \text{hipof}^+_{1+|\beta-w|}$. Haciendo uso de la proposición IV.10 tenemos:

$$(x,a) \in B_{1+|\beta - w|}[\text{hipof}]$$

de donde
$$\text{hipog} \subset B_{1+|\beta - w|}[\text{hipof}]$$

Similarmente, tomando $w' \in \mathbb{R}$ tal que $w' < \inf\{g_1^+(x): x \in X\}$ y $\beta' = \sup\{f(x): x \in X\}$ se prueba que:

$$\text{hipof} \subset B_{1+|\beta' - w'|}[\text{hipog}]$$

De esta forma $d_3(f,g) \leq \max\{1 + |\beta - w|,\ 1 + |\beta' - w'|\}$

Solo hace falta justificar la desigualdad que dejamos pendiente en el desarrollo de la demostración, la justificaremos ahora.

Existe $\alpha' \in \mathbb{R}$ tal que $a - |\beta - w| < \alpha' < f_1^+(x)$ y $(x, \alpha') \in B_1[\overline{f}]$, de donde existe $(y, \Theta) \in \overline{f}$ tal que

$$d_x(x,y) \leq 1 \quad \text{y} \quad |\alpha' - \Theta| \leq 1$$

así
$$-1 \leq \alpha' - \Theta \leq 1$$

por lo cual $-1 - |\beta - w| \leq -1 + |\beta - w| \leq \alpha' + |\beta - w| - \Theta \leq 1 + |\beta - w|$

es decir
$$|\alpha' + |\beta - w| - \Theta| \leq 1 + |\beta - w|$$

de donde
$$(x, \alpha' + |\beta - w|) \in B_{1+|\beta - w|}[\overline{f}]$$

así
$$a < \alpha' + |\beta - w| \leq f^+_{1+|\beta - w|}(x)$$

concluimos que
$$a < f^+_{1+|\beta - w|}(x)$$

∎

PROPOSICION IV.18

Sea (X, d_x) un espacio métrico compacto. Si $f, g \in U(X)$ entonces:

$$d_3(f,g) \leq d_2(f,g) \leq d_1(f,g)$$

DEMOSTRACION

Sea $\lambda = d_1(f,g)$, así $|f(x) - g(x)| \leq \lambda$ para todo $x \in X$.

Sea $(x, f(x)) \in f$ arbitrario, entonces

$$\rho((x,f(x)),(x,g(x))) \leq \lambda$$

de aquí tenemos que $f \subset B_\lambda[\overline{g}]$, pero recordemos que $B_\lambda[\overline{g}]$ es un conjunto cerrado en $X \times \mathbb{R}$, por lo cual $\overline{f} \subset B_\lambda[\overline{g}]$.

Análogamente $\overline{g} \subset B_\lambda[\overline{f}]$, por lo cual concluimos que

$$d_2(f,g) \leq \lambda = d_1(f,g)$$

Por otra parte, sea $\alpha > 0$ tal que $\overline{g} \subset B_\alpha[\overline{f}]$ y $\overline{f} \subset B_\alpha[\overline{g}]$. Para cada $x \in X$ se tiene $(x, g(x)) \in B_\alpha[\overline{f}]$, así

$$g(x) \leq f^+_\alpha(x)$$

de donde
$$\text{hipo}g \subset \text{hipo}f^+_\alpha = B_\alpha[\text{hipo}f]$$

Análogamente $\qquad \text{hipof} \subset B_\alpha[\text{hipog}]$

de aquí $\qquad d_3(f,g) \leq \alpha$

pero esto es válido para todo $\alpha > 0$ tal que $\bar{g} \subset B_\alpha[\bar{f}]$ y $\bar{f} \subset B_\alpha[\bar{g}]$

así que $\qquad d_3(f,g) \leq d_2(f,g)$

∎

De acuerdo a la proposición anterior podemos concluir que d_1-convergencia -(convergencia uniforme) implica d_2-convergencia, y a su vez, d_2-convergencia - implica d_3-convergencia. Veamos ahora algunos ejemplos que muestran que los inversos de estas implicaciones no necesariamente son ciertos.

Primeramente veamos que d_2-convergencia no implica d_1-convergencia, ni siquiera implica convergencia puntual.

EJEMPLO IV.19

Sean $X = [0,1]$ y $f:X \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f = \chi_0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la función $f_n:X \longrightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$f_n = \begin{cases} \chi_{[0,\frac{1}{n}]} & \text{si n es par} \\ \\ \chi_{1/n} & \text{si n es impar} \end{cases}$$

Tanto la función f como cada una de las funciones f_n pertenecen a $U(X)$. Además $d_2(f_n,f) = 1/n$ por lo cual $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d_2-converge a f. Sin embargo, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge puntualmente a f, de hecho $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ no es convergente.

Ahora veamos un ejemplo con el cual queda de manifiesto que d_3-convergencia no implica d_2-convergencia.

EJEMPLO IV.20

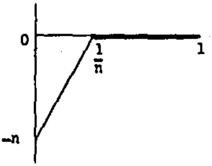
Sean $X = [0,1]$ y $f:X \longrightarrow \mathbb{R}$ la función constante cero. Para cada $n \in \mathbb{N}$ - definimos la función $f_n:X \longrightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2(x - 1/n) & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n \\ \\ 0 & \text{si } 1/n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Tanto la función f como cada una de las funciones f_n son continuas y por lo tanto pertenecen a $U(X)$. Observemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\text{hipof}_n \subset \text{hipof} \qquad \text{y} \qquad \text{hipof} \subset B_{1/n}\left[\text{hipof}_n\right]$$

de donde $d_3(f_n, f) \leq 1/n$, por lo cual $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d_3-converge a f. Sin embargo como $\rho((0,-n), f) = n$ entonces $d_2(f_n, f) = n$, por lo cual $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no d_2-converge a f.



Gráfica de la función f_n

Sin embargo si el espacio X es compacto y la función límite es continua entonces d_2-convergencia es equivalente a d_1-convergencia. Antes de justificar esta afirmación consideremos el siguiente lema:

LEMA IV.21

Sean (X, d_x) un espacio métrico compacto y $f \in C(X)$. Entonces las sucesiones $(f^+_{1/k})_{k \in \mathbb{N}}$ y $(f^-_{1/k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergen uniformemente a f.

DEMOSTRACION

Sea $\varepsilon > 0$, debemos probar que existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq K$ implica $f^+_{1/k}(x) - f(x) \leq \varepsilon$ para todo $x \in X$. Como f es uniformemente continua existe $0 < \delta < \varepsilon/2$ tal que si $d_x(x, x') < \delta$ entonces $|f(x) - f(x')| < \varepsilon/2$. Sea

$K \in \mathbb{N}$ tal que $1/K < \delta$. Sean $x \in X$ arbitrario, $k \geq K$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $(x,\alpha) \in B_{1/k}[\overline{f}]$, existe $(y,f(y)) \in f$ tal que:

$$d_x(x,y) \leq 1/k \quad \text{y} \quad |\alpha - f(y)| \leq 1/k$$

en particular se tiene $\alpha \leq f(y) + 1/k$, y como $d_x(x,y) \leq 1/k < \delta$ entonces:

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon/2$$

en particular
$$f(y) < f(x) + \varepsilon/2$$

de donde
$$\alpha < f(x) + \varepsilon/2 + 1/k < f(x) + \varepsilon$$

así
$$f^{+}_{1/k}(x) \leq f(x) + \varepsilon$$

Puesto que esto es válido para todo $x \in X$ se concluye que $(f^{+}_{1/k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f.

Similarmente se prueba que $(f^{-}_{1/k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f. ■

PROPOSICION IV.22

Sean (X,d_x) un espacio métrico compacto, $f \in C(X)$ y $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $S(X)$. Entonces $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d_1-converge a f si y sólo si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d_2-converge a f.

DEMOSTRACION

De acuerdo a la proposición IV.18 $d_2(f_n,f) \leq d_1(f_n,f)$, asi que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d_1-converge a f entonces $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d_2-converge a f.

Inversamente, supongamos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d_2-converge a f. Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d_2(f_n,f) < 1/k$ si $n \geq N$, es decir $\delta_\rho(\overline{f}_n, f) < 1/k$ si $n \geq N$ o sea $\overline{f}_n \subset B_{1/k}[f]$ y $f \subset B_{1/k}[\overline{f}_n]$ si $n \geq N$, así para cada $x \in X$ y $n \geq N$

$$(x,f_n(x)) \in B_{1/k}[f]$$

de donde
$$f^{-}_{1/k}(x) \leq f_n(x) \leq f^{+}_{1/k}(x)$$

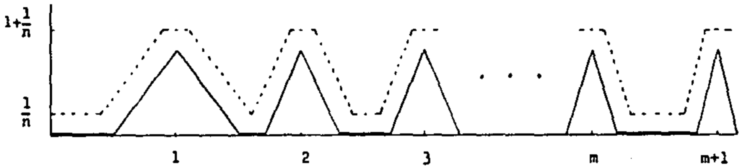
pero por el lema anterior tanto $(f^{-}_{1/k})_{k \in \mathbb{N}}$ como $(f^{+}_{1/k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergen uniformemente a f, por lo tanto $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d_1-converge a f. ■

Veamos ahora un ejemplo que muestra que la condición de compacidad del espacio X es esencial en la proposición anterior.

EJEMPLO IV.23

Sean $X = [0,\infty)$ y $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ la función que conecta linealmente los puntos: (0,0), (1/2,0), (1,1), (3/2,0), (5/3,0), (2,1), (7/3,0), ... (ver ejemplo IV.9 c)).

Afirmamos que la sucesión $(f^+_{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$ d_2-converge a f. Para justificar esta afirmación veamos que si $n \geq 12$ entonces $d_2(f^+_{1/n}, f) \leq 1/n$, es decir — $f^+_{1/n} \subset B_{1/n}[f]$ y $f \subset B_{1/n}[f^+_{1/n}]$. El aspecto de las funciones f y $f^+_{1/n}$ para $n \geq 12$ se muestra en la gráfica siguiente.

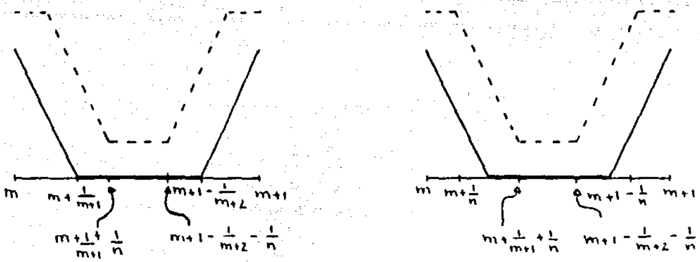


$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = m \quad m \in \mathbb{N} \\ 0 & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \left[m + \frac{1}{m+1}, m + 1 - \frac{1}{m+2}\right] \\ (m+1)(x-m) + 1 & x \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \left[m - \frac{1}{m+1}, m\right] \\ -(m+1)(x-m) + 1 & x \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \left[m, m + \frac{1}{m+1}\right] \end{cases}$$

Si $n \geqslant 12$

$$f^+_{1/n}(x) = \begin{cases} 1/n & x \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right] \cup \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \left[m + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n},\ m+1 - \frac{1}{m+2} - \frac{1}{n}\right] \\ 1 + 1/n & x \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \left[m - \frac{1}{n},\ m + \frac{1}{n}\right] \\ (m+1)\left(x - \left(m - \frac{1}{n}\right)\right) + 1 + \frac{1}{n} & x \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \left[m - \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n},\ m - \frac{1}{n}\right] \\ -(m+1)\left(x - \left(m + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n}\right)\right) + \frac{1}{n} & x \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \left[m + \frac{1}{n},\ m + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n}\right] \end{cases}$$

En realidad basta con analizar la situación entre dos números enteros consecutivos, para lo cual lo dividiremos en varias partes.



(a) (b)

Utilizando la figura (a) veamos que $f \subset B_{1/n}\left[f^+_{1/n}\right]$

si $x \in \left[m,\ m + \frac{1}{m+1}\right]$ entonces $\rho\left((x, f(x)), \left(x + \frac{1}{n},\ f^+_{1/n}\left(x + \frac{1}{n}\right)\right)\right) = \frac{1}{n}$

si $x \in \left[m + \frac{1}{m+1},\ m + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n}\right]$ entonces $\rho\left((x, f(x)), \left(m + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n},\ f^+_{1/n}\left(m + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n}\right)\right)\right) = \frac{1}{n}$

si $x \in \left[m + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n},\ m+1 - \frac{1}{m+2} - \frac{1}{n}\right]$ entonces $\rho\left((x, f(x)), (x,\ f^+_{1/n}(x))\right) = \frac{1}{n}$

si $x \in \left[m+1-\frac{1}{m+2}-\frac{1}{n},\ m+1-\frac{1}{m+2}\right]$ entonces

$$\rho((x,f(x)),(m+1-\frac{1}{m+2}-\frac{1}{n},\ f^{+}_{1/n}(m+1-\frac{1}{m+2}-\frac{1}{n}))) = \frac{1}{n}$$

si $x \in \left[m+1-\frac{1}{m+2},\ m+1\right]$ entonces $\rho((x,f(x)),(x-\frac{1}{n},\ f^{+}_{1/n}(x-\frac{1}{n}))) = \frac{1}{n}$

Así $$f \subset B_{1/n}\left[f^{+}_{1/n}\right]$$

Utilizando la figura (b) veamos que $f^{+}_{1/n} \subset B_{1/n}[f]$

si $x \in \left[m,\ m+\frac{1}{n}\right]$ entonces $\rho((x,f^{+}_{1/n}(x)),(m,f(m))) = \frac{1}{n}$

si $x \in \left[m+\frac{1}{n},\ m+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{n}\right]$ entonces $\rho((x,f^{+}_{1/n}(x)),(x-\frac{1}{n},f(x-\frac{1}{n}))) = \frac{1}{n}$

si $x \in \left[m+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{n},\ m+1-\frac{1}{m+2}-\frac{1}{n}\right]$ entonces $\rho((x,f^{+}_{1/n}(x)),(x,f(x))) = \frac{1}{n}$

si $x \in \left[m+1-\frac{1}{m+2}-\frac{1}{n},\ m+1-\frac{1}{n}\right]$ entonces $\rho((x,f^{+}_{1/n}(x)),(x+\frac{1}{n},f(x+\frac{1}{n}))) = \frac{1}{n}$

si $x \in \left[m+1-\frac{1}{n},\ m+1\right]$ entonces $\rho((x,f^{+}_{1/n}(x)),(m+1,f(m+1))) = \frac{1}{n}$

Así $$f^{+}_{1/n} \subset B_{1/n}[f]$$

De aquí podemos concluir que $(f^{+}_{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$ d_2-converge a f. Sin embargo la sucesión $(f^{+}_{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$ no converge uniformemente a f, pues para $n > 1$ se tiene $f^{+}_{1/n}(n-1-\frac{1}{n}) = 1+\frac{1}{n}$ mientras que $f(n-1-\frac{1}{n}) = 0$. Asi que la convergencia no puede ser uniforme.

Puesto que d_3 es una métrica en $S(X)$ y no sólo en $U(X)$, nos enfocaremos principalmente a este tipo de convergencia. La siguiente proposición nos da condiciones suficientes y necesarias para que una sucesión en $S(X)$ sea d_3-convergente.

PROPOSICION IV.24

Sean (X,d_X) un espacio métrico compacto, $f \in S(X)$ y $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $S(X)$. Entonces $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d_3-converge a f si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

1) Para cada $x \in X$ se satisface que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión convergente a x entonces $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} f_n(x_n) \leq f(x)$.

2) Para cada $x \in X$ existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a x para la cual $\underline{\lim\limits_{n \to \infty}} f_n(x_n) \geq f(x)$

DEMOSTRACION

Supongamos que se cumplen las condiciones (1) y (2).

Sea $\varepsilon > 0$, afirmamos que para cada $x \in X$ existen $0 < \delta_x < \varepsilon$ y $N_x \in \mathbb{N}$ tales que si $d_X(x,y) < \delta_x$ y $n \geq N_x$ entonces $f_n(y) < f(x) + \varepsilon$.

En efecto, pues de no ser cierto existiría $x \in X$ tal que para cada $m \in \mathbb{N}$ existiría $y_m \in X$ y n_m tan grande como quisiéramos tales que $d_X(y_m,x) < 1/m$ y $f_{n_m}(y_m) \geq f(x) + \varepsilon$. Podemos lograr que la sucesión $(n_m)_{m \in \mathbb{N}}$ sea estrictamente creciente. Si construimos la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de acuerdo al siguiente criterio

$$x_n = \begin{cases} x & \text{si } n \neq n_m \text{ para todo } m \in \mathbb{N} \\ y_m & \text{si } n = n_m \text{ para algún } m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Se tendría que la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x, sin embargo $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} f_n(x_n) > f(x)$, contradiciendo la condición (1).

Ahora, como $\{B_{\delta_x}(x) : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X existen $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ tales que:

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} B_{\delta_{x_i}}(x_i)$$

Sea $N_1 = \max\{N_{x_i} : 1 \leq i \leq k\}$. Afirmamos que $\text{hipof}_n \subset B_\varepsilon[\text{hipof}]$ si $n \geq N_1$.

En efecto, sean $x \in X$ arbitrario y $n \geq N_1$, existe $1 \leq i \leq k$ tal que $d_x(x,x_i) < \delta_{x_i} < \varepsilon$, así

$$\rho((x,f_n(x)),(x_i,f_n(x)-\varepsilon)) = \varepsilon$$

además
$$f_n(x) < f(x_i) + \varepsilon$$

o sea
$$f_n(x) - \varepsilon < f(x_i)$$

por lo cual $(x_i,f_n(x)-\varepsilon) \in$ hipof, por consiguiente

$$(x,f_n(x)) \in B_\varepsilon[\text{hipof}]$$

como esto es válido para todo $x \in X$ entonces

$$f_n \subset B_\varepsilon[\text{hipof}]$$

de aquí podemos afirmar que hipof$_n \subset B_\varepsilon[\text{hipof}]$, pues si $(x,a) \in$ hipof$_n$ entonces existe $(y,b) \in$ hipof tal que:

$$\rho((x,f_n(x)),(y,b)) \leq \varepsilon$$

pero $\quad (y,b-(f_n(x)-a)) \in$ hipof $\quad$ (pues $f_n(x) - a \geq 0$)

y
$$\rho((x,a),(y,b-(f_n(x)-a))) \leq \varepsilon$$

así
$$(x,a) \in B_\varepsilon[\text{hipof}]$$

Por otra parte, por la semicontinuidad superior de f, para cada $x \in X$ existe $0 < \delta_x < \varepsilon/2$ tal que $d_x(x,y) < \delta_x$ implica $f(y) < f(x) + \varepsilon/2$. Considerando la cubierta abierta de X dada por $\{B_{\delta_x}(x) : x \in X\}$ podemos extraer una subcubierta finita

$$X = \bigcup_{i=1}^{\ell} B_{\delta_{x_i}}(x_i)$$

Ahora bien, de acuerdo a la condición (2) para cada $x_i \in X$ con $1 \leq i \leq \ell$ existe una sucesión $(x_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a x_i para la cual

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x_n^{(i)}) \geq f(x_i)$$

De este modo para cada x_i existe $N_{x_i} \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_{x_i}$ entonces $f(x_i) - \varepsilon/2 < f_n(x_n^{(i)})$. También para cada x_i con $1 \leq i \leq \ell$ existe $N'_{x_i} \in \mathbb{N}$ tal-que $n \geq N'_{x_i}$ implica $d_X(x_n^{(i)}, x_i) < \delta_{x_i} < \varepsilon/2$. Sea $N_2 = \max\{N_{x_i}, N'_{x_i} : 1 \leq i \leq \ell\}$, así, si $n \geq N_2$ entonces para todo x_i con $1 \leq i \leq \ell$ se cumple

$$f(x_i) - \varepsilon/2 < f_n(x_n^{(i)}) \qquad y \qquad d_X(x_n^{(i)}, x_i) < \delta_{x_i}$$

Afirmamos que hipof $\subset B_\varepsilon[\text{hipof}_n]$ para todo $n \geq N_2$.
En efecto, sean $n \geq N_2$ y $x \in X$ arbitrario, existe $1 \leq i \leq \ell$ tal que $d_X(x, x_i) < \delta_{x_i}$, de donde

$$d_X(x, x_n^{(i)}) \leq d_X(x, x_i) + d_X(x_i, x_n^{(i)}) < 2\delta_{x_i} < \varepsilon$$

y además $\quad f(x) < f(x_i) + \varepsilon/2 < f_n(x_n^{(i)}) + \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = f_n(x_n^{(i)}) + \varepsilon$

así $$(x, f(x)) \in B_\varepsilon[\text{hipof}_n]$$

pues, si $0 < f(x) - f_n(x_n^{(i)}) < \varepsilon$ entonces

$$(x, f(x)) \in B_\varepsilon[(x_n^{(i)}, f_n(x_n^{(i)}))] \subset B_\varepsilon[\text{hipof}_n]$$

si $f(x) - f_n(x_n^{(i)}) \leq 0$ entonces $(x_n^{(i)}, f(x)) \in \text{hipof}_n$ y por lo tanto

$$(x, f(x)) \in B_\varepsilon[(x_n^{(i)}, f(x))] \subset B_\varepsilon[\text{hipof}_n]$$

como x fue arbitraria podemos concluir que $f \subset B_\varepsilon[\text{hipof}_n]$ y de aquí que hipof $\subset B_\varepsilon[\text{hipof}_n]$, por lo tanto si $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ se tiene:

$$\text{hipof}_n \subset B_\varepsilon[\text{hipof}] \qquad y \qquad \text{hipof} \subset B_\varepsilon[\text{hipof}_n]$$

Por consiguiente $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d_3-converge a f.

Inversamente, supongamos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d_3-converge a f y que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión convergente a $x \in X$. Consideremos la sucesión $((x_n, f_n(x_n)))_{n \in \mathbb{N}}$. Como $\lim_{n \to \infty} \delta_\rho(\text{hipof}_n, \text{hipof}) = 0$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $(y_n, \beta_n) \in$ hipof tal que

$$\lim_{n \to \infty} \rho((y_n, \beta_n), (x_n, f_n(x_n))) = 0$$

de donde

$$\lim_{n \to \infty} y_n = \lim_{n \to \infty} x_n = x \qquad y \qquad \overline{\lim_{n \to \infty}}\, \beta_n = \overline{\lim_{n \to \infty}}\, f_n(x_n)$$

Puesto que $\beta_n \leq f(y_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \beta_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} f(y_n)$$

pero como $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, dado $\lambda > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(y_n) \leq f(x) + \lambda \qquad \text{si } n \geq N$$

como esto es válido para toda $\lambda > 0$ entonces

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f(y_n) \leq f(x)$$

y por consiguiente
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(y_n) \leq f(x)$$

Cumpliéndose así la condición (1).

Por otra parte, sea $x \in X$ arbitrario, consideremos el punto $(x,f(x)) \in f$, como $\lim_{n\to\infty} \delta_\rho[\text{hipof},\text{hipof}_n] = 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $(x_n, \lambda_n) \in \text{hipof}_n$, de tal forma que:

$$\lim_{n\to\infty} \rho((x,f(x)),(x_n, \lambda_n)) = 0$$

así
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = f(x)$$

puesto que $\lambda_n \leq f_n(x_n)$ concluimos que:

$$f(x) = \underline{\lim_{n\to\infty}} \lambda_n \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x_n)$$

cumpliéndose así la condición (2). ■

Con respecto a la proposición anterior podemos hacer la siguiente observación: Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d_3-converge a f entonces para cada $x \in X$ existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a x para la cual $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$

Veamos ahora un ejemplo que muestra que en la proposición anterior la hipótesis de la compacidad de X es esencial para asegurar que las condiciones (1) y (2) implican d_3-convergencia.

EJEMPLO IV.25

Sean (X,d_x) un espacio métrico no compacto y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X sin subsucesiones convergentes. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la función $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$

de la siguiente manera:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y_n \\ 0 & \text{si } x \neq y_n \end{cases}$$

Observemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ la función $f_n \in U(X)$.

Sea $f: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ la función constante cero.

Afirmamos que la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cumple las condiciones (1) y (2) de la proposición precedente. En efecto, si $x \in X$ y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión convergente a x, como x no puede ser punto de acumulación de $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ entonces existen $\varepsilon > 0$ y $N_0 \in \mathbb{N}$ tales que $n \geq N_0$ implica $y_n \notin B_\varepsilon(x)$, pero por otra parte existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1$ entonces $x_n \in B_\varepsilon(x)$. Sea $N = \max\{N_0, N_1\}$, podemos asegurar que si $n \geq N$ entonces $x_n \neq y_n$, de donde $f_n(x_n) = 0$, de aquí concluimos que $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x_n) = 0$, cumpliéndose así la condición (1).

Por otra parte, si $x \in X$ definimos la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donde $x_n = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x, y además, puesto que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica $y_n \neq x$, entonces si $n \geq N$ se tiene $f_n(x_n) = 0$, de donde $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x_n) = 0$, cumpliéndose así la condición (2).

Sin embargo, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no d_3-converge a f, pues para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$d_3(f_n, f) = 1$$

Concluimos este trabajo dando versiones de los teoremas de Dini y Stone para el espacio $S(X)$, y dando una versión del teorema de Ascoli utilizando algunos de los conceptos vistos aquí.

TEOREMA DE DINI

Antes de enunciar el teorema recordemos la siguiente

DEFINICION IV.26

Un espacio X se llama numerablemente compacto si de cualquier cubierta abierta y numerable de X se puede extraer una subcubierta finita.

PROPOSICION IV.27 (TEOREMA DE DINI)

Sean (X, d_X) un espacio numerablemente compacto y $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $S(X)$. Si para cada $x \in X$ la sucesión $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ decrece monótonamente a cero entonces $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a la función constante cero.

Antes de demostrar la proposición hacemos la siguiente afirmación:

Si $f \in S(X)$ y $\varepsilon > 0$ entonces el conjunto $\{ x \in X: f(x) < \varepsilon \}$ es abierto en X.

En efecto, designamos por:

$$A = \{ x \in X: f(x) < \varepsilon \}$$

Sea $x_0 \in A$ arbitrario, puesto que $\varepsilon - f(x_0) > 0$ por la semicontinuidad superior de f existe $\delta > 0$ tal que si $d_X(x, x_0) < \delta$ entonces

$$f(x) < f(x_0) + (\varepsilon - f(x_0)) = \varepsilon$$

así $B_\delta(x_0) \subset A$ y por lo tanto A es abierto.

(notamos que esto es válido aún cuando X no es compacto).

Ahora demostraremos la proposición.

Sea $\varepsilon > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $O_n = \{ x \in X: f_n(x) < \varepsilon \}$. Observemos que estos conjuntos forman una sucesión creciente. Por la afirmación anterior cada O_n es un subconjunto abierto de X. Además para cada $x \in X$ $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$ entonces

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n$$

Por ser X numerablemente compacto existe un número finito de conjuntos $O_{n_1}, O_{n_2}, \ldots, O_{n_r}$ cuya unión es igual a X, de hecho

$$X = O_{n_r}$$

(suponemos que n_r es el índice mayor de esta colección finita).

De aquí $f_{n_r}(x) < \varepsilon$ para toda $x \in X$, y por lo tanto si $n \geq n_r$ se tiene $0 \leq f_n(x) \leq f_{n_r}(x) < \varepsilon$ para toda $x \in X$, de aquí concluimos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a la función constante cero. ■

TEOREMA DE STONE

Nuestro propósito en esta parte es dar condiciones suficientes para que una familia de funciones superiormente semicontinuas sea densa en $S(X)$ respecto a la métrica d_3 (d_3-densa). Una primera observación que podemos hacer a este respecto es la siguiente:

PROPOSICION IV.28

Sea (X, d_x) un espacio métrico compacto. Entonces $U(X)$ es d_3-denso en $S(X)$.

DEMOSTRACION

Sean $f \in S(X)$ y $\varepsilon > 0$, sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \varepsilon$, sabemos que $f^+_{1/n} \in U(X)$, y puesto que

$$\text{hipof} \subset \text{hipof}^+_{1/n} \qquad \text{y} \qquad \text{hipof}^+_{1/n} = B_{1/n}[\text{hipof}]$$

se sigue que $d_3(f^+_{1/n}, f) < \varepsilon$, de donde $U(X)$ es d_3-denso en $S(X)$. ■

Ahora bien, $U(X)$ satisface las siguientes condiciones:

i) $U(X)$ es una latiz

ii) $U(X)$ aisla puntos

En efecto. Veamos primeramente que $U(X)$ es una latiz.

Sean $f, g \in U(X)$, es claro que $\max(f,g)$ y $\min(f,g)$ son funciones acotadas. Por otra parte, sean $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in X$ arbitrario, existe $\delta_1 > 0$ tal que — $d_x(x, x_0) < \delta_1$ implica $f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$. Similarmente, existe $\delta_2 > 0$ tal que $d_x(x, x_0) < \delta_2$ implica $g(x) \leq g(x_0) + \varepsilon$.

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces si $d_x(x, x_0) < \delta$ se tiene:

$$f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$$

y

$$g(x) \leq g(x_0) + \varepsilon$$

así $\max\{f(x), g(x)\} \leq \max\{f(x_o) + \varepsilon, g(x_o) + \varepsilon\}$

por lo cual $\max(f,g)(x) \leq \max(f,g)(x_o) + \varepsilon$

de donde $\max(f,g) \in S(X)$

Análogamente:

$$\min\{f(x), g(x)\} \leq \min\{f(x_o) + \varepsilon, g(x_o) + \varepsilon\}$$

por lo cual $\min(f,g)(x) \leq \min(f,g)(x_o) + \varepsilon$

de donde $\min(f,g) \in S(X)$

Por todo lo anterior concluimos que $U(X)$ es una latiz.

Ahora veamos que $U(X)$ aisla puntos en X .

Sean (x_1, α_1) y $(x_2, \alpha_2) \in X \times \mathbb{R}$.

a) si $x_1 = x_2$ y $\alpha_1 < \alpha_2$. Sea $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ la función constante igual a $(\alpha_1 + \alpha_2)/2$, entonces $f \in U(X)$ y aisla a (x_1, α_1) de (x_2, α_2).

b) si $x_1 \neq x_2$ y $\alpha_1 < \alpha_2$, la función aisladora es la definida en el inciso anterior. Si $x_1 \neq x_2$ y $\alpha_2 \leq \alpha_1$, entonces $d_x(x_1, x_2) > 0$, sea $\delta = \frac{1}{2} d_x(x_1, x_2)$. Definimos la función $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha_2 - 1 & \text{si } d_x(x, x_2) < \delta/2 \\ \alpha_1 + 1 & \text{si } d_x(x, x_2) \geq \delta/2 \end{cases}$$

Claramente $f \in U(X)$ y aisla a (x_1, α_1) de (x_2, α_2).

Estas propiedades son precisamente las condiciones suficientes que aseguran que una familia de funciones superiormente semicontinuas sea d_3-densa en $S(X)$. Antes de enunciar la versión del teorema de Stone que nos interesa, consideremos algunos lemas preliminares.

LEMA IV.29

Sean (X, d_x) un espacio métrico compacto, $M \in \mathbb{R}$ y $\Theta \subset S(X)$ una latiz. Para cada $h \in \Theta$ sea $h^* : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$h^*(x) = \min\{h(x), M\}$$

Entonces $\Theta^* = \{h^* : h \in \Theta\}$ es una latiz en $S(X)$.

DEMOSTRACION

Sea $h \in \Theta$, debemos probar que $h^* \in S(X)$, para este propósito sean $\varepsilon > 0$ y $x \in X$ arbitrarios.

Si $h^*(x) = M$ entonces como $h^*(y) \leq M$ para todo $y \in X$ es claro que $h^*(y) \leq h^*(x) + \varepsilon$ para todo $y \in X$.

Si por el contrario $h^*(x) = h(x)$, entonces puesto que existe $\delta > 0$ tal que $d_X(x,y) < \delta$ implica $h(y) \leq h(x) + \varepsilon$, se sigue que $d_X(x,y) < \delta$ implica $h^*(y) \leq h^*(x) + \varepsilon$, y así $h^* \in S(X)$.

Por otra parte, afirmamos que si $h^*, g^* \in \Theta^*$ entonces:

$$\max(h^*,g^*) = (\max(h,g))^*$$

y

$$\min(h^*,g^*) = (\min(h,g))^*$$

En efecto, supongamos que $\max(h^*,g^*)(x) = h^*(x)$, es decir $h^*(x) \geq g^*(x)$. Puede presentarse una de las siguientes situaciones:

i) Si $h^*(x) = M$ entonces $h(x) \geq M$, de donde

$$\max(h,g)(x) \geq M$$

y así
$$(\max(h,g))^*(x) = M$$

ii) Si $h^*(x) < M$ entonces $h(x) < M$, y como $g^*(x) \leq h^*(x) = h(x) < M$ entonces $g(x) < M$, es decir

$$g^*(x) = g(x)$$

de donde
$$\max(h,g)(x) = h(x) < M$$

por lo cual
$$(\max(h,g))^*(x) = h(x) = h^*(x)$$

En cualquiera de las dos situaciones concluimos que:

$$\max(h^*,g^*)(x) = (\max(h,g))^*(x)$$

De forma análoga, si sucede que $\max(h^*,g^*)(x) = g^*(x)$ se concluye que:

$$\max(h^*,g^*)(x) = (\max(h,g))^*(x)$$

Como x fue arbitrario se tiene:

$$\max(h^*,g^*) = (\max(h,g))^*$$

Similarmente se prueba que:

$$\min(h^*, g^*) = (\min(h,g))^*$$

Pero como $\max(h,g) \in \Theta$ y $\min(h,g) \in \Theta$ entonces

$$\max(h^*, g^*) \in \Theta^* \quad y \quad \min(h^*, g^*) \in \Theta^*$$

■

LEMA IV.30

Sean (X, d_x) un espacio métrico compacto y $\Theta \subset S(X)$ una latiz. Entonces $\Theta' = \{\text{hipoh}: h \in \Theta\}$ es cerrado bajo uniones e intersecciones finitas.

DEMOSTRACION

La justificación es inmediata a partir del hecho de que si f y $g \in \Theta$ entonces:

$$\text{hipof} \cup \text{hipog} = \text{hipo}(\max(f,g))$$

$$\text{hipof} \cap \text{hipog} = \text{hipo}(\min(f,g))$$

■

LEMA IV.31

Sean X un espacio topológico compacto, $C \subset X$ compacto y Σ una familia de subconjuntos compactos de X cerrada bajo uniones e intersecciones finitas, además supongamos que para cada pareja $(x,y) \in C \times (X - C)$ existe $K(x,y) \in \Sigma$ tal que $x \in \text{int}(K(x,y))$ y $y \notin K(x,y)$. Entonces si O es un conjunto abierto distinto de X que contiene a C entonces existe $K \in \Sigma$ para el cual

$$C \subset \text{int}(K) \quad y \quad K \subset O$$

DEMOSTRACION

Sea $y \in X - O$ fijo, para cada $x \in C$ existe $K(x,y) \in \Sigma$ para el cual $x \in \text{int}(K(x,y))$ y $y \notin K(x,y)$. Consideremos la cubierta abierta de C dada por $\{\text{int}(K(x,y)): x \in C\}$. Por la compacidad de C existen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in C$ tales que

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{n} \text{int}(K(x_i, y))$$

Sea $K_y = \bigcup_{i=1}^{n} K(x_i,y)$. Observemos que $C \subset \mathrm{int}(K_y)$, $K_y \in \sum$, K_y es cerrado en X y además $y \notin K_y$. Repitiendo esta construcción para cada $y \in X - O$ podemos considerar la cubierta abierta de $X - O$ dada por $\{ X - K_y : y \in X - O\}$. Por la compacidad de $X - O$ existen $y_1, y_2, \ldots, y_k \in X - O$ tales que

$$X - O \subset \bigcup_{i=1}^{k} (X - K_{y_i}) = X - \bigcap_{i=1}^{k} K_{y_i}$$

Sea $K = \bigcap_{i=1}^{k} K_{y_i}$, así $K \in \sum$. Además como $C \subset \mathrm{int}(K_{y_i})$ para todo $1 \leq i \leq k$ - entonces

$$C \subset \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{int}\,(K_{y_i}) = \mathrm{int}\left(\bigcap_{i=1}^{n} K_{y_i}\right) = \mathrm{int}(K)$$

Y por último como $X - O \subset X - K$ entonces $K \subset O$. ■

PROPOSICION IV.32 (TEOREMA DE STONE)

Sean (X,d_X) un espacio métrico compacto y $\Omega \subset S(X)$ una latiz que aisla puntos en $X \times \bar{\mathbb{R}}$.

a) Si $f \in S(X)$ entonces existe una sucesión $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en Ω d_3-convergente a f por arriba.

b) Si $f \in C(X)$ y $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d_3-converge a f por arriba entonces $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f.

DEMOSTRACION

a) Por la proposición IV.28 sabemos que cada función superiormente semicontinua puede ser d_3-aproximada por arriba por sus "funciones $\frac{1}{n}$-paralelas superiores". Así que basta demostrar la proposición para funciones en $U(X)$.

Sea $f \in U(X)$, existen m, $M \in \mathbb{R}$ tales que para cada $x \in X$

$$m < f(x) < M$$

Para cada $h \in \Omega$ definimos la función $h^* : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ como:

$$h^*(x) = \min\{ h(x), M\}$$

De acuerdo al lema IV.29 tenemos que $\Omega^{*} = \{h^{*} : h \in \Omega\}$ es una latiz en $S(X)$.

Para cada $h \in \Omega$ sea $K_h = \{(x,\alpha) : m \leq \alpha \leq h^{*}(x)\}$. Es decir,

$$K_h = \mathrm{hipoh}_n^{*} \cap X \times [m,\infty)$$

Cada conjunto K_h es un subconjunto cerrado de $X \times [m,M]$ y por lo tanto es compacto, además la familia $\Sigma = \{K_h : h \in \Omega\}$ es cerrada bajo uniones e intersecciones finitas (ver lema IV.30). Sea

$$C = \{(x,\alpha) : m \leq \alpha \leq f(x)\}$$

Afirmamos que Σ satisface las condiciones del lema precedente con respecto al conjunto C en el espacio compacto $X \times [m,M]$.

En efecto, sean $(x_1,\alpha_1) \in C$ y $(x_2,\alpha_2) \in (X \times [m,M]) - C$. Observemos que si $x_1 = x_2$ entonces $\alpha_1 < \alpha_2$ (pues $\alpha_1 \leq f(x_1)$ y $\alpha_2 > f(x_1)$), así, podemos afirmar que $x_1 \neq x_2$ o si $x_1 = x_2$ entonces $\alpha_1 < \alpha_2$. Puesto que Ω aisla puntos existe $h \in \Omega$ tal que:

$$(x_1,\alpha_1) \in \mathrm{int}(\mathrm{hipoh}) \qquad y \qquad (x_2,\alpha_2) \notin \mathrm{hipoh}$$

así $h(x_2) < \alpha_2 \leq M$, de donde $h^{*}(x_2) = h(x_2)$, por lo cual $h^{*}(x_2) < \alpha_2$ y así

$$(x_2,\alpha_2) \notin K_h$$

Por otra parte, como $(x_1,\alpha_1) \in \mathrm{int}(\mathrm{hipoh})$ existe $\lambda > 0$ y V vecindad de x_1 tal que $V \times (\alpha_1 - \lambda, \alpha_1 + \lambda) \subset \mathrm{hipoh}$. Sea $\delta = \min\{M - \alpha_1, \lambda\}$, como $\alpha_1 < M$ se tiene $\delta > 0$ y $V \times (\alpha_1 - \delta, \alpha_1 + \delta) \subset \mathrm{hipoh}^{*}$.

En efecto, sea $(x,a) \in V \times (\alpha_1 - \delta, \alpha_1 + \delta)$. Como

$$V \times (\alpha_1 - \delta, \alpha_1 + \delta) \subset V \times (\alpha_1 - \lambda, \alpha_1 + \lambda) \subset \mathrm{hipoh}$$

se tiene $a \leq h(x)$. Además

$$a < \alpha_1 + \delta < \alpha_1 + M - \alpha_1 = M$$

por lo cual $a < M$, así $a \leq \min\{h(x), M\} = h^{*}(x)$, de donde $(x,a) \in \mathrm{hipoh}^{*}$.-

Se sigue que $(x_1,\alpha_1) \in \mathrm{int}(\mathrm{hipoh}^{*})$ relativo a $X \times [m,M]$, y, por consiguiente $(x_1,\alpha_1) \in \mathrm{int}(K_h)$ ya que también se tiene que:

$$V \times (\alpha_1 - \delta, \alpha_1 + \delta) \cap X \times [m,M] \subset X \times [m,\infty)$$

Así, queda demostrada la afirmación.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$O_n = B_{1/n}(C) \cap (X \times [m,M])$$

Así para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto O_n es abierto relativo al espacio $X \times [m,M]$, y además $C \subset O_n$, por el lema precedente existe $h_n \in \Omega$ tal que

$$C \subset \operatorname{int}(K_{h_n}) \qquad y \qquad K_{h_n} \subset O_n$$

podemos suponer que M es lo suficientemente grande para que $f(x) + \frac{1}{n} < M$ - para todo $n \in \mathbb{N}$ y toda $x \in X$. Observemos que si $n \in \mathbb{N}$ y $(y,\beta) \in O_n$ entonces- $\beta < M$.

Afirmamos que para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$d_3(h_n, f) \leq 1/n$$

En efecto, sea $n \in \mathbb{N}$ fija. Si $(x,h_n^*(x)) \in K_{h_n}$ entonces $(x,h_n^*(x)) \in O_n$ y así $h_n^*(x) < M$, y por lo tanto $h_n^*(x) = h_n(x)$. Es decir $(x,h_n^*(x)) \in K_{h_n}$ implica - $h_n^*(x) = h_n(x)$.

Sea $x \in X$ arbitrario, $(x,f(x)) \in C \;\; (\subset K_{h_n})$, así

$$m \leq f(x) \leq h_n^*(x)$$

de donde $$(x,h_n^*(x)) \in K_{h_n}$$

y por lo tanto $$h_n^*(x) = h_n(x)$$

por lo cual $$f(x) \leq h_n(x)$$

de donde $$\text{hipof} \subset \text{hipoh}_n \subset B_{1/n}[\text{hipoh}_n]$$

Por otra parte $C \subset \text{hipof}$, de donde $B_{1/n}[C] \subset B_{1/n}[\text{hipof}]$, pero $O_n \subset B_{1/n}[C]$, por consiguiente $O_n \subset B_{1/n}[\text{hipof}]$, así

$$K_{h_n} \subset B_{1/n}[\text{hipof}]$$

Observemos que $$\text{hipoh}_n \subset K_{h_n} \cup \{(x,\alpha) : \alpha \leq m\}$$

y como $\{(x,\alpha): \alpha \leq m\} \subset \text{hipof} \subset B_{1/n}[\text{hipof}]$

concluimos que $\text{hipoh}_n \subset B_{1/n}[\text{hipof}]$

así $d_3(h_n, f) \leq 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Concluimos que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d_3-converge por arriba a f. (es por arriba ya que como se observó anteriormente $f(x) \leq h_n(x)$ para toda $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$).

b) Sea $f \in C(X)$ y $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión d_3-convergente a f por arriba.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $N_k \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N_k$ implica

$$\text{hipof} \subset \text{hipoh}_n \subset B_{1/k}[\text{hipof}] = \text{hipof}^{+}_{1/k}$$

Así para toda $x \in X$ y $n \geq N_k$ se tiene:

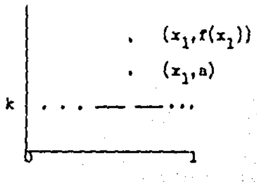
$$f(x) \leq h_n(x) \leq f^{+}_{1/k}(x)$$

de acuerdo al lema IV.21 sabemos que $(f^{+}_{1/k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f, y de aquí concluimos la convergencia uniforme de $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a f. ∎

Las condiciones enunciadas en esta versión del teorema de Stone son suficientes pero no necesarias, para comprobar esto sea $X = [0,1]$ y Ω la familia de $S(X)$ formada por todas las funciones que coinciden con alguna función constante excepto en un conjunto finito de puntos.

Afirmamos que Ω no aisla puntos en $X \times \mathbb{R}$.

En efecto, si $(x_1,a), (x_2,a) \in X \times \mathbb{R}$ con $x_1 \neq x_2$, no puede existir $f \in \Omega$ tal que $(x_1,a) \in \text{int(hipof)}$ y $(x_2,a) \notin \text{hipof}$, pues para que $(x_1,a) \in \text{int(hipof)}$ se debe tener $a < f(x_1)$ y existir un conjunto V vecindad de (x_1,a) contenido en hipof. Como $f(x) = k$ excepto para un número finito de puntos, podemos afirmar que $k > a$, de no ser así tendríamos una situación como la que se muestra en el siguiente dibujo.



esto no puede suceder, pues (x_1,a) no pertenecería al interior de hipof.

Por otra parte, $f(x_2)$ debe ser mayor o igual a k, (de otra forma f no sería superiormente semicontinua), por lo tanto $(x_2,a) \in$ hipof, y así Ω no aisla puntos en $X \times \mathbb{R}$.

Afirmamos que Ω es d_3-densa en $S(X)$.

En efecto, puesto que $U(X)$ es d_3-denso en $S(X)$, basta justificar que Ω es d_3-densa en $U(X)$. Con este propósito, sean $f \in U(X)$ y $\varepsilon > 0$ arbitrarios, existe $m \in \mathbb{R}$ tal que:

$$m \leq f(x) \quad \text{para toda } x \in X$$

Por otra parte, para cada $x \in X$ existe $0 < \delta_x < \varepsilon$ tal que:

$$d_x(x,y) < \delta_x \quad \text{implica} \quad f(y) \leq f(x) + \varepsilon$$

Puesto que X es compacto existen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ tales que:

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{\delta_{x_i}}(x_i)$$

Definimos la función $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$g(x) = \begin{cases} f(x_i) & \text{si } x = x_i \quad \text{para alguna } 1 \leq i \leq n \\ \\ m & \text{si } x \neq x_i \quad \text{para toda } 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Es claro que $g \in \Omega$, además $g(x) \leq f(x)$ para toda $x \in X$, de donde

$$\text{hipo}g \subset \text{hipo}f \subset B_\varepsilon[\text{hipo}f] \qquad (1)$$

Por otra parte, si $(x,f(x)) \in f$ entonces existe $1 \leq i \leq n$ tal que $d_x(x,x_i) < \delta_{x_i} < \varepsilon$, asi $f(x) \leq f(x_i) + \varepsilon$, de donde

$$f(x) - f(x_i) \leq \varepsilon$$

i) Si $0 \leq f(x) - f(x_i)$ entonces

$$|f(x) - g(x_i)| = |f(x) - f(x_i)| \leq \varepsilon$$

así $$(x, f(x)) \in B_\varepsilon[\text{hipo}g]$$

ii) Si $f(x) - f(x_i) < 0$, entonces $f(x) < f(x_i) = g(x_i)$, de donde

$$(x_i, f(x)) \in \text{hipo}g$$

y por lo tanto $\qquad (x, f(x)) \in B_\varepsilon[\text{hipo}g]$

De cualquier forma podemos concluir que $(x, f(x)) \in B_\varepsilon[\text{hipo}g]$, y, puesto que $(x, f(x))$ fue arbitrario tenemos que:

$$f \subset B_\varepsilon[\text{hipo}g]$$

Esto en conjunción con (1) nos indica que

$$d_3(f, g) \leq \varepsilon$$

Y por consiguiente Ω es d_3-densa en $U(X)$.

Antes de pasar al teorema de Ascoli veamos un par de ejemplos de familias d_3-densas en $S(X)$.

EJEMPLO IV.33

Sean (X, d_x) un espacio métrico compacto y $\Omega = \{f \in S(X) : f \text{ es simple}\}$, (una función simple es aquella cuya imagen es un conjunto finito). Afirmamos que Ω es d_3-densa en $S(X)$.

En efecto, es claro que Ω forma una latiz y además aisla puntos en $X \times \mathbb{R}$, pues si (x_1, α_1), $(x_2, \alpha_2) \in X \times \mathbb{R}$

i) Si $\alpha_1 < \alpha_2$ $(\alpha_2 < \alpha_1)$ entonces sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha_1 < \alpha < \alpha_2 \qquad (\alpha_2 < \alpha < \alpha_1)$$

Sea $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ la función constante igual a α, así $f \in \Omega$ y es tal que aisla a (x_1, α_1) de (x_2, α_2).

ii) Si $\alpha_1 = \alpha_2$ entonces $x_1 \neq x_2$, así $d_x(x_1, x_2) > 0$. Sean $2r = d_x(x_1, x_2)$ y $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha_1 + 1 & \text{si } x \notin B_r(x_2) \\ \alpha_1 - 1 & \text{si } x \in B_r(x_2) \end{cases}$$

Observemos que $f \in \Omega$ y además $(x_1,\alpha_1) \in \mathrm{int}(\mathrm{hipof})$ y $(x_2,\alpha_2) \notin \mathrm{hipof}$, es decir, f aisla (x_1,α_1) de (x_2,α_2).

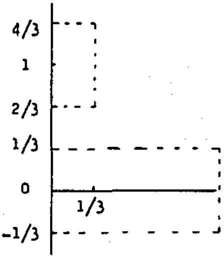
Otro ejemplo de una familia d_3-densa en $S(X)$ es $C(X)$, pues es una latiz en $S(X)$ que aisla puntos en $X \times \mathbb{R}$.

Un último comentario que hacemos sobre el teorema de Stone es que las condiciones de suficiencia pedidas en esta versión aseguran d_3-densidad, sin embargo no implican d_2-densidad, por ejemplo $C(X)$ no es necesariamente d_2-densa en $U(X)$. Para ver esto, sea $X = [0,1]$ y consideremos la función $\chi_0 \in U(X)$. Afirmamos que no puede existir $g \in C(X)$ tal que:

$$d_2(\chi_0, g) \leq 1/3$$

En efecto, puesto que $\overline{\chi}_0 = \{(x,0): 0 \leq x \leq 1\} \cup (0,1)$, entonces

$$B_{1/3}[\overline{\chi}_0] = ([0,1/3] \times [2/3,4/3]) \cup ([0,1] \times [-1/3,1/3])$$



De esta forma, si $d_2(\chi_0, g) \leq 1/3$ entonces

$$g \subset B_{1/3}[\overline{\chi}_0]$$

De donde g no puede ser continua, pues estaría contenida en los rectángulos descritos anteriormente y ellos formarían una disconexión de g.

TEOREMA DE ASCOLI

La equivalencia de las métricas d_1 y d_2 en $C(X)$ cuando X es un espacio métrico compacto (ver proposición IV.22) marca la pauta de la versión del teorema de Ascoli dada aquí.

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada de funciones en $C(X)$, con X compacto, entonces existe $r > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$f_n \subset X \times [-r,r]$$

Observando que el espacio $X \times [-r,r]$ es compacto y que f_n es un conjunto cerrado en $X \times [-r,r]$ tenemos que de hecho cada f_n es un conjunto compacto. Sabemos por el capítulo I que la familia de conjuntos compactos de un espacio métrico compacto forma bajo la métrica de Hausdorff un espacio métrico compacto, así, podemos afirmar que existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente en la métrica de Hausdorff a un subconjunto compacto C de $X \times [-r,r]$. Si C fuese la gráfica de una función f entonces por ser C compacto se tendría que f sería continua, y de acuerdo a la proposición IV.22 la subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ debe converger uniformemente a f. La siguiente proposición nos da condiciones necesarias y suficientes para que el conjunto C sea la gráfica de una función.

PROPOSICION IV.34 (TEOREMA DE ASCOLI)

Sean (X,d_x) un espacio métrico compacto y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C(X)$. Supongamos que existe un subconjunto compacto C de $X \times \mathbb{R}$ tal que $\delta_\rho(f_n,C)$ tiende a cero. Entonces C es la gráfica de una función si y sólo si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente equicontinua.

DEMOSTRACION

Primeramente hagamos la siguiente observación:

Para cada $x \in X$ existe $\alpha_x \in \mathbb{R}$ tal que $(x,\alpha_x) \in C$.

En efecto, como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en la métrica de Hausdorff a C, entonces converge topológicamente a C (ver proposición I.13), es decir

$$\operatorname{Linf}(f_n) = \operatorname{Lsup}(f_n) = C$$

Como C es compacto en $X \times \mathbb{R}$ resulta ser acotado, de donde $B_\varepsilon[C]$ es acotado para todo $\varepsilon > 0$ y como $f_n \subset B_\varepsilon[C]$ para n suficientemente grande, entonces para cada $x \in X$ el conjunto $\{f_n(x): n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto acotado en $\mathbb{R}$, así $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $(f_{n_k}(x))_{k \in \mathbb{N}}$ convergente a algún $\alpha_x \in \bar{\mathbb{R}}$, pero esto implica que $(x, \alpha_x) \in C$, pues como ya se hizo notar las condiciones anteriores aseguran que $(x, \alpha_x) \in \mathrm{Lsup}(f_n)$.

Supongamos ahora que C no es la gráfica de una función, de acuerdo a la observación anterior deben existir (x, α) y $(x, \beta) \in C$ con $\alpha \neq \beta$. Puesto que $C = \mathrm{Linf}(f_n)$ por la proposición I.3 existen sucesiones

$$((z_n, f_n(z_n)))_{n \in \mathbb{N}} \qquad y \qquad ((y_n, f_n(y_n)))_{n \in \mathbb{N}}$$

convergentes a (x, α) y (x, β) respectivamente. Como $\alpha \neq \beta$ entonces $\frac{1}{4}|\alpha - \beta| > 0$, así dado $\delta > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $d_X(z_n, y_n) < \delta$,

$$|f_n(z_n) - \alpha| < \tfrac{1}{4}|\alpha - \beta| \qquad y \qquad |f_n(y_n) - \beta| < \tfrac{1}{4}|\alpha - \beta| \qquad \text{si } n \geq N$$

de donde $\qquad |f_n(z_n) - f_n(y_n)| > \frac{1}{2}|\alpha - \beta| \qquad$ si $n \geq N$

por lo cual $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no es uniformemente equicontinua.

Inversamente, supongamos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no es uniformemente equicontinua. Así, existen $\varepsilon > 0$, una subsucesión $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y sucesiones $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ y $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en X tales que para cada $k \in \mathbb{N}$ $d_X(z_k, y_k) < 1/k$ y

$|f_{n_k}(y_k) - f_{n_k}(z_k)| > \varepsilon$.

Como X es compacto la sucesión $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ debe tener una subsucesión $(z_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ convergente a algún $x \in X$. Si consideramos la sucesión $(y_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$, nuevamente por la compacidad de X debe tener una subsucesión convergente, para simplificar la notación supondremos que de hecho $(y_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ es convergente.

Puesto que $\qquad d_X(x, y_{k_i}) \leq d_X(x, z_{k_i}) + d_X(z_{k_i}, y_{k_i})$

y como ambas $d_x(x,z_{k_i})$ y $d_x(z_{k_i},y_{k_i})$ tienden a cero, entonces $(y_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ — converge a x. Recordando que para n suficientemente grande $f_n \in B_t[C]$, podemos afirmar que las sucesiones $(f_{n_{k_i}}(y_{k_i}))_{i\in\mathbb{N}}$ y $(f_{n_{k_i}}(z_{k_i}))_{i\in\mathbb{N}}$ están acotadas, y por lo tanto deben tener una subsucesión convergente, nuevamente para simplificar la notación supondremos que de hecho

$$(f_{n_{k_i}}(z_{k_i}))_{i\in\mathbb{N}} \text{ converge a } \alpha$$

$$\text{y} \qquad (f_{n_{k_i}}(y_{k_i}))_{i\in\mathbb{N}} \text{ converge a } \beta \qquad (1)$$

Puesto que para cada $i\in\mathbb{N}$ se tiene $|f_{n_{k_i}}(y_{k_i}) - f_{n_{k_i}}(z_{k_i})| > \varepsilon$ entonces - $\alpha \neq \beta$. De (1) se sigue que (x,α) y (x,β) son elementos de C, Así C no es la gráfica de una función.

■

APENDICES

A

Puesto que los espacios métricos compactos juegan un papel muy importante en el desarrollo de este trabajo, dedicaremos este apartado para dar algunas de las caracterizaciones más comunes de este tipo de espacios. Adoptaremos la definición más usada de compacidad, es decir, un espacio X es compacto si de cualquier cubierta abierta se puede extraer una subcubierta finita. Antes de enunciar las distintas caracterizaciones de compacidad recordemos las siguientes definiciones.

DEFINICIONES

Sean (X,d_x) un espacio métrico y $\mathfrak{F} = \{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de subconjuntos de X, se dice que $\mathfrak{F}$ tiene la propiedad de intersección si

$$\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha \neq \emptyset$$

Se dice que $\mathfrak{F}$ tiene la propiedad de intersección finita si para todo $A \subset I$ finito se cumple

$$\bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha \neq \emptyset$$

Se dice que X es totalmente acotado si para cada $\varepsilon > 0$ existe una colección finita de elementos de X, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, tal que

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i)$$

PROPOSICION

Sea (X,d_x) un espacio métrico, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) X es compacto

ii) Si $\mathfrak{F} = \{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia de subconjuntos cerrados de X que tiene la propiedad de intersección finita, entonces $\mathfrak{F}$ tiene la propiedad de intersección.

iii) X es totalmente acotado y completo.

iv) Todo subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación.

v) Toda sucesión en X tiene una subsucesión que converge a un punto de X.

DEMOSTRACION

i) implica ii)

Sea $\mathcal{F} = \{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de subconjuntos cerrados de X que tiene la propiedad de intersección finita. Supongamos que:

$$\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha = \emptyset$$

Entonces $X - \bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha = X$, o sea $\bigcup_{\alpha \in I} (X - C_\alpha) = X$, por lo cual $\mathcal{F}' = \{X - C_\alpha : \alpha \in I\}$ es una cubierta abierta de X. Así, existe $A \subset I$ finito tal que

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} (X - C_\alpha) = X - \bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha$$

De donde $\bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha = \emptyset$, lo cual es una contradicción.

ii) implica i)

Sea $\mathcal{F} = \{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una cubierta abierta de X, consideremos la familia de conjuntos cerrados $\mathcal{F}' = \{X - C_\alpha : \alpha \in I\}$. Como $X = \bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha$ entonces $X - \bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha = \emptyset$, así $\bigcap_{\alpha \in I} (X - C_\alpha) = \emptyset$, es decir $\mathcal{F}'$ no tiene la propiedad de intersección, por hipótesis $\mathcal{F}'$ no tiene la propiedad de intersección finita. Por lo que existe $A \subset I$ finito tal que

$$\bigcap_{\alpha \in A} (X - C_\alpha) = \emptyset$$

Así $X = \bigcup_{\alpha \in A} C_\alpha$, es decir $\mathcal{F}'' = \{C_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{F}$. Por consiguiente X es compacto.

i) implica iv)

Sea C un subconjunto infinito de X, supongamos que $C' = \emptyset$ (C' denota el conjunto de puntos de acumulación de C). Para cada $x \in X$ existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $(B_{\varepsilon_x}(x) - \{x\}) \cap C = \emptyset$. Consideremos la familia $\mathcal{F} = \{B_{\varepsilon_x}(x) : x \in X\}$ la cual es una cubierta abierta de X, por hipótesis existen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B_{\varepsilon_{x_i}}(x_i)$$

De donde
$$C \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{\varepsilon_{x_i}}(x_i)$$

Así
$$C = C \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_{\varepsilon_{x_i}}(x_i)\right) \subset \{x_1, \ldots, x_n\}$$

Lo cual es una contradicción, pues C es un conjunto infinito.

iv) implica v)

Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión arbitraria contenida en X. Sea $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Si A es finito existe $x \in X$ tal que $x_n = x$ para una infinidad de índices n, entonces la sucesión (x) converge a x. Si A es infinito por hipótesis tiene un punto de acumulación $x \in X$. Así para toda $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $B_{1/n}(x) \cap A$ resulta ser infinito. Sea x_{n_1} un elemento de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_{n_1} \in B_1(x)$. Sea x_{n_2} un elemento de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que satisfaga las siguientes condiciones:

$$n_2 > n_1 \qquad y \qquad x_{n_2} \in B_{1/2}(x)$$

Podemos asegurar que x_{n_2} existe, pues de otra forma $B_{1/2}(x)$ intersectaría sólo a un subconjunto finito de A. En general sea x_{n_k} un elemento de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$n_k > n_{k-1} \qquad y \qquad x_{n_k} \in B_{1/k}(x)$$

Entonces $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a x.

v) implica i)

Supongamos que toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente. Se afirma que X es totalmente acotado.

En efecto, supongamos que la afirmación es falsa, es decir existe $\varepsilon_o > 0$ -

tal que para todo $A \subset X$ finito se tiene:

$$X \not\subset \bigcup_{x \in A} B_{\varepsilon_o}(x)$$

Sea x_1 un punto arbitrario de X, existe $x_2 \in X$ tal que $d_x(x_1, x_2) \geq \varepsilon_o$ (de lo contrario $X = B_{\varepsilon_o}(x_1)$). De la misma forma existe $x_3 \in X$ tal que

$$d_x(x_1, x_3) \geq \varepsilon_o \qquad y \qquad d_x(x_2, x_3) \geq \varepsilon_o$$

(pues de lo contrario $X = \bigcup_{i=1}^{2} B_{\varepsilon_o}(x_i)$). En general para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $x_k \in X$ tal que

$$d_x(x_k, x_i) \geq \varepsilon_o \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, k-1$$

Así, ninguna subsucesión de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, por lo tanto $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no tiene subsucesiones convergentes, lo cual es una contradicción.

Veamos ahora que X es separable, es decir existe $K \subset X$ numerable tal que $\overline{K} = X$. Para este propósito observemos (por lo anterior) que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $A_n \subset X$ finito tal que

$$X = B_{1/n}[A_n]$$

Sea $K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, así K es numerable y además es denso en X, pues si $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_o < \varepsilon$, y como $x \in B_{1/n_o}[A_{n_o}]$ entonces existe $a_{n_o} \in A_{n_o}$ tal que $d_x(x, a_{n_o}) \leq 1/n_o < \varepsilon$, así

$$B_\varepsilon(x) \cap K \neq \emptyset$$

De donde $x \in \overline{K}$ y por lo tanto K es denso en X.

Veamos ahora que toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta numerable. Sea $\mathfrak{F} = \{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una cubierta abierta de X. Denotemos por:

$$\mathfrak{L} = \{B_{1/n}(k) : k \in K,\ n \in \mathbb{N}\}$$

$\mathfrak{L}$ es numerable por lo cual lo podemos representar como

$$\mathfrak{L} = \{G_i : i \in \mathbb{N}\}$$

Sea $\mathcal{L}' = \{G_i \in \mathcal{L} : G_i \subset T_\alpha$ para alguna $\alpha \in I\}$. Se afirma que:

$$\bigcup_{G_i \in \mathcal{L}'} G_i = \bigcup_{\alpha \in I} T_\alpha$$

En efecto, claramente $\bigcup_{G_i \in \mathcal{L}'} G_i \subset \bigcup_{\alpha \in I} T_\alpha$. Por otra parte si $x \in \bigcup_{\alpha \in I} T_\alpha$ entonces existen $\alpha \in I$ y $\varepsilon > 0$ tales que $B_\varepsilon(x) \subset T_\alpha$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $2/n < \varepsilon$. Existe $a \in A_n$ tal que $d_x(x,a) < 1/n$, así

$$B_{1/n}(a) \subset B_\varepsilon(x) \subset T_\alpha$$

De donde $\qquad x \in B_{1/n}(a) \qquad$ y $\qquad B_{1/n}(a) \in \mathcal{L}'$

Por lo cual $$\bigcup_{\alpha \in I} T_\alpha \subset \bigcup_{G_i \in \mathcal{L}'} G_i$$

Puesto que $\mathcal{L}'$ es numerable entonces es de la forma $\mathcal{L}' = \{G_i : i \in J\}$ (donde J es un conjunto numerable). Para cada $G_i \in \mathcal{L}'$ sea $\alpha_i \in I$ tal que $G_i \subset T_{\alpha_i}$, entonces

$$\bigcup_{i \in J} G_i = \bigcup_{i \in J} T_{\alpha_i}$$

Así, $\{T_{\alpha_i} : i \in J\}$ es una subcubierta numerable de X.

Ahora veamos que si tenemos una sucesión decreciente de subconjuntos de X cerrados y no vacios $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ entonces

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$$

En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n \in F_n$. Por hipótesis la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente a algún elemento de X, sea x tal elemento. Se afirma que $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$ la sucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ está contenida en F_n a excepción de un número finito de índices k, como cada F_n es cerrado se tiene que $x \in F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Finalmente se probará que X es compacto.

Sea $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una cubierta abierta de X, sea $\mathcal{G}' = \{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una subcubierta numerable de $\mathfrak{F}$. Supongamos que $\mathfrak{F}'$ no tiene una subcubierta finita. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$F_n = X - \bigcup_{i=1}^{n} G_i$$

Se tiene que $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados no vacios de X, así

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$$

De donde $X \neq X - \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X - F_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\bigcup_{i=1}^{n} G_i) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} G_i$

Pero entonces tenemos que $\mathfrak{F}'$ no es subcubierta de X, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\mathfrak{F}'$ debe tener una subcubierta finita, y, por consiguiente X es compacto.

i) implica iii)

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, la familia $\mathfrak{F} = \{B_\varepsilon(x) : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X. Por hipótesis existen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i)$$

Así, X es totalmente acotado.

Sea ahora $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X, como X es compacto toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente, en particular existe $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ subsucesión de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a algún $x \in X$. Pero como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy de hecho $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x. Por lo tanto X es completo.

iii) implica v)

Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X. Se probará que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión de Cauchy.

Sea $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Si A es finito, entonces existe $x \in X$ tal que $x_n = x$ para una infinidad de índices n, por lo tanto la subsucesión (x) converge a x. Si A es infinito, puesto que X es totalmente acotado entonces A es totalmente acotado, en particular dado $\varepsilon = 1/2$ existen $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_r} \in A$ tales -

que $$A \subset \bigcup_{i=1}^{r} B_{1/2}(x_{n_i})$$

existe $1 \leq i \leq r$ tal que $x_n \in B_{1/2}(x_{n_i})$ para una infinidad de índices n. Así existe una subsucesión $(x_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que para toda pareja $x_n^{(1)}, x_m^{(1)} \in \{x_n^{(1)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ se tiene:

$$d_X(x_n^{(1)}, x_m^{(1)}) < 1$$

Repitiendo lo anterior para la sucesión $(x_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ y tomando $\varepsilon = 1/4$ se asegura la existencia de una subsucesión $(x_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(x_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ tal que para toda pareja $x_n^{(2)}, x_m^{(2)} \in \{x_n^{(2)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ se cumple

$$d_X(x_n^{(2)}, x_m^{(2)}) < 1/2$$

Podemos continuar este proceso para obtener una sucesión de subsucesiones de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. De hecho cada uno de los renglones siguientes es una subsucesión del renglón anterior.

$$\begin{array}{cccc}
x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & x_3^{(1)}, & \ldots \\
x_1^{(2)}, & x_2^{(2)}, & x_3^{(2)}, & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
x_1^{(r)}, & x_2^{(r)}, & x_3^{(r)}, & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Tales que para cada $r \in \mathbb{N}$ se tiene $d_X(x_n^{(r)}, x_m^{(r)}) < \frac{1}{2^{r-1}}$

Formemos la sucesión de la diagonal, es decir $(x_r^{(r)})_{r \in \mathbb{N}}$, así $(x_r^{(r)})_{r \in \mathbb{N}}$ es subsucesión de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, y además es de Cauchy, pues si $\varepsilon > 0$ existe $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^{r_0-1} < \varepsilon$, de donde, si $r, r' \geq r_0$ entonces

$$d_X(x_r^{(r)}, x_{r'}^{(r')}) < 1/2^{r_0-1} < \varepsilon$$

Puesto que X es completo $(x_r^{(r)})_{r \in \mathbb{N}}$ es convergente. ∎

También recordamos algunas de las caracterizaciones más comunes de conjuntos densos en ninguna parte.

DEFINICION

Sean (X,d_X) un espacio métrico arbitrario y $A \subset X$. Se dice que A es denso en ninguna parte si $X - \overline{A}$ es denso en X.

PROPOSICION

Sean (X,d_X) un espacio métrico arbitrario y $A \subset X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) A es denso en ninguna parte

ii) A no es denso en ningún conjunto abierto distinto del vacio.

iii) $\operatorname{int}(\overline{A}) = \emptyset$

DEMOSTRACION

i) implica ii)

Sea B un conjunto abierto en X distinto del vacio, por hipótesis $B \cap (X - \overline{A}) \neq \emptyset$, así existe $x \in (B - \overline{A})$, es decir $B \not\subset \overline{A}$, de donde A no es denso en B.

ii) implica iii)

Puesto que $\operatorname{int}(\overline{A}) \subset \overline{A}$ entonces A es denso en $\operatorname{int}(\overline{A})$. Como $\operatorname{int}(\overline{A})$ es un conjunto abierto por hipótesis se sigue que $\operatorname{int}(\overline{A}) = \emptyset$.

iii) implica i)

Debemos probar que $X = \overline{X - \overline{A}}$.

Supongamos que existe $x \in X$ tal que $x \notin \overline{X - \overline{A}}$, asi x es un punto exterior de $X - \overline{A}$, por lo cual existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \cap (X - \overline{A}) = \emptyset$, de donde $B_\varepsilon(x) \subset \overline{A}$, es decir $x \in \operatorname{int}(\overline{A})$, lo cual es una contradicción, por consiguiente $X = \overline{X - \overline{A}}$ y así A es un conjunto denso en ninguna parte. ∎

B

En la proposición II.16 se hizo uso del siguiente resultado:

Si A y B son subconjuntos cerrados no vacíos de un espacio métrico compacto X tal que ninguna componente conexa de X intersecta a ambos entonces existen conjuntos abiertos ajenos H_1 y H_2 tales que:

$$A \subset H_1 \qquad B \subset H_2 \qquad H_1 \cup H_2 = X$$

Daremos la justificación de esta afirmación, para lo cual haremos uso de algunos lemas que a continuación se enuncian. En todos se supone que X es un espacio métrico.

DEFINICION

Sea $\mathcal{F} = \{E_z\}_{z \in I}$ una familia de subconjuntos no vacíos de X, se dice que $\mathcal{F}$ es una cadena si para cada $E_z \in \mathcal{F}$ existe $E_{z'} \in \mathcal{F}$ tal que $E_z \cap E_{z'} \neq \emptyset$.

Si A y B son dos subconjuntos de X, se dice que están conectados por una cadena si existe una cadena finita $\mathcal{F} = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ tal que $A = E_1$ y $B = E_n$.

LEMA

Una condición necesaria y suficiente para que un espacio X sea conexo es que dada cualquier cubierta abierta o una cubierta cerrada finita $\{E_z\}$ de X, se tiene que cualquier par de miembros de $\{E_z\}$ pueden conectarse por una cadena contenida en $\{E_z\}$.

DEMOSTRACION

Si X no es conexo, sean H_1, H_2 una separación de X, entonces $\{E_z\} = \{H_1, H_2\}$ no cumple con las condiciones del enunciado.

Inversamente. Supongamos que X es conexo. Sea $E_a \in \{E_z\}$, definimos

$$H_1 = \cup \{E_z : E_z \text{ pueden conectarse a } E_a \text{ por una cadena en } \{E_z\}\}$$

Sea
$$H_2 = X - H_1$$

Tomando como hipótesis que $\{E_z\}$ es una cubierta abierta de X entonces tanto H_1 como H_2 son abiertos, pues si $x \in H_1$ entonces $x \in E_{z_0}$ donde E_a y E_{z_0} pueden conectarse por una cadena en $\{E_z\}$. Existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset E_{z_0}$, de donde $B_\varepsilon(x) \subset H_1$ y así H_1 es abierto. De una forma similar se demuestra que H_2 es abierto.

Tomando como hipótesis que $\{E_z\}$ es una cubierta cerrada finita entonces tanto H_1 como H_2 son cerrados. En efecto, sea $x \in \overline{H}_1$, si $x \in E_z$ para todo z no hay nada que probar. Si este no es el caso entonces para cada z tal que $x \notin E_z$ sea $\varepsilon_z > 0$ tal que $B_{\varepsilon_z}(x) \subset X - E_z$ y sea $\alpha = \min\{\varepsilon_z : x \notin E_z\}$, de donde $\alpha > 0$. - Sea $y \in B_\alpha(x) \cap H_1$, entonces $y \in E_{z^*}$, donde E_{z^*} puede conectarse a E_a por una - cadena en $\{E_z\}$. Si sucediera que $x \notin H_1$ entonces $x \notin E_{z^*}$ por lo cual $B_\alpha(x) \subset X - E_{z^*}$, de donde $y \in X - E_{z^*}$, lo cual es una contradicción. Así $x \in H_1$ y por consiguiente H_1 es cerrado. De una forma análoga se prueba que H_2 es cerrado.

Concluimos que cualquiera de las hipótesis acerca de $\{E_z\}$ nos conduce a que H_1/H_2 es una separación de X y como $\emptyset \neq E_a \subset H_1$, y X es conexo se tiene que $H_2 = \emptyset$. ■

DEFINICION

Sea $\varepsilon > 0$. Una ε-cadena en X es una sucesión finita de puntos de X, - $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tales que $d_x(a_i, a_{i+1}) \leq \varepsilon$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Si $x, y \in X$ se dice que están conectados por una ε-cadena si existe una ε-cadena en X, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tal que $a_1 = x$ y $a_n = y$.

Un espacio métrico X es ε-conexo si cualquier pareja de elementos de X pueden conectarse por una ε-cadena.

LEMA

Sea (X,d_x) un espacio métrico. Si (X,d_x) es conexo entonces es ε-conexo para todo $\varepsilon > 0$.

DEMOSTRACION

Sea $\varepsilon > 0$, consideremos la cubierta abierta de X dada por $\{B_{\varepsilon/2}(x): x \in X\}$. Sean a, $b \in X$, por el lema anterior $B_{\varepsilon/2}(a)$ y $B_{\varepsilon/2}(b)$ pueden conectarse por una cadena de elementos de $\{B_{\varepsilon/2}(x): x \in X\}$, es decir existen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tales que $x_1 = a$, $x_n = b$ y $\{B_{\varepsilon/2}(x_i): i = 1, 2, \ldots, n\}$ es una cadena que conecta a $B_{\varepsilon/2}(a)$ con $B_{\varepsilon/2}(b)$. Tomemos $a_1 = a$, $a_i \in B_{\varepsilon/2}(x_{i-1}) \cap B_{\varepsilon/2}(x_i)$ para $i = 2, 3, \ldots, n$ y $a_{n+1} = b$. Así $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ es una ε-cadena que conecta a con b. ■

El inverso del lema anterior no es cierto en general, por ejemplo $X = \mathbb{R} - \{0\}$ es ε-conexo para todo $\varepsilon > 0$, sin embargo no es conexo. No obstante este inverso es válido para espacios compactos.

LEMA

Sea (X,d_x) un espacio métrico compacto. X es conexo si y sólo si es ε-conexo para todo $\varepsilon > 0$.

DEMOSTRACION

De acuerdo al lema anterior, sabemos que si X es conexo entonces es ε-conexo para todo $\varepsilon > 0$.

Inversamente. Supongamos que X es ε-conexo para todo $\varepsilon > 0$ pero no es conexo. Sea H_1/H_2 una separación de X, como H_1 y H_2 son compactos y ajenos entonces $d_x(H_1,H_2) = \varepsilon > 0$. Tomemos $x_1 \in H_1$ y $x_2 \in H_2$, entonces no existe una $\varepsilon/2$-cadena en X que conecta a x_1 con x_2, de donde X no es $\varepsilon/2$-conexo, lo cual es una contradicción. ■

LEMA

Sean $\varepsilon > 0$ y $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados ε-conexos de un espacio métrico compacto X. Entonces $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ es 2ε-conexo.

DEMOSTRACION

Sea $r > 0$. Se afirma que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $F_n \subset B_r[F]$.

En efecto, supongamos lo contrario, es decir $F_n \not\subset B_r[F]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in F_n$ tal que $d_X(x_n, F) \geq r$. Por ser X compacto existe una subsucesión convergente $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Sea $x = \lim_{k \to \infty} x_{n_k}$. Entonces $d_X(x, F) \geq r$ (o sea $x \notin F$) y por otro lado dado $n \in \mathbb{N}$ se tiene $x_{n_k} \in F_n$ para todo k suficientemente grande, por lo tanto $x \in F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ o sea $x \in F$. Lo que es una contradicción.

Sean a, $b \in F$, por la afirmación anterior existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $F_n \subset B_{\varepsilon/2}[F]$. Sean $a = a_1, a_2, \ldots, a_k = b$ una ε-cadena en F_n. Para $2 \leq i \leq k-1$ sea $b_i \in F$ tal que $d_X(a_i, b_i) \leq \varepsilon/2$, se tiene que $a, b_2, \ldots, b_{k-1}, b$ es una 2ε-cadena que conecta los puntos a y b. ■

Como una consecuencia del lema anterior tenemos que, si $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados y conexos de un espacio compacto X, entonces $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ es conexo.

En efecto, sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, como F_n es conexo para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces en particular cada F_n es $\varepsilon/2$-conexo. Por el lema anterior F es ε-conexo. Como esto es válido para todo $\varepsilon > 0$ y F es compacto, entonces F debe ser conexo.

LEMA

Sean (X, d_X) un espacio métrico compacto y a, $b \in X$. Si para cada $\varepsilon > 0$ a y b pueden conectarse por una ε-cadena en X, entonces ellos están conectados en X, es decir, pertenecen a un subconjunto conexo de X.

DEMOSTRACION

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea E_n el conjunto de puntos de X que pueden conectarse con a por una $1/n$-cadena, por hipótesis $b \in E_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, de donde

$$b \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$$

Cada conjunto $X - E_n$ es abierto, pues si $x \in X - E_n$ claramente $B_{1/n}(x) \subset X - E_n$. Así cada conjunto E_n es cerrado y por lo tanto compacto. Observemos que $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente, y para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto E_n es $1/n$-conexo. Sea $n_o \in \mathbb{N}$ fijo, entonces E_n es $1/n_o$-conexo si $n \geq n_o$. Sea $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n = \bigcap_{n \geq n_o} E_n$, se tiene que C es compacto y $2/n_o$-conexo, pero esto es válido para todo $n_o \in \mathbb{N}$, de donde C es conexo y además $a, b \in C$. ■

LEMA

Sea (X, d_x) un espacio métrico compacto. Si a y b son dos puntos que no están conectados en X, entonces existe una separación H_1/H_2 de X tal que $a \in H_1$ y $b \in H_2$.

DEMOSTRACION

Por el lema anterior existe un número $\varepsilon > 0$ tal que a y b no pueden conectarse en X por una ε-cadena. Definimos H_1 como el conjunto de puntos de X que pueden conectarse con a por una ε-cadena, y sea $H_2 = X - H_1$. Así H_1/H_2 forma una separación de X, y claramente $a \in H_1$ y $b \in H_2$. ■

PROPOSICION

Si A y B son subconjuntos cerrados no vacios de un espacio métrico compacto X tales que ninguna componente conexa de X intersecta a ambos, entonces existe una separación H_1/H_2 de X tal que $A \subset H_1$ y $B \subset H_2$.

DEMOSTRACION

Primero se probará que existe un número $\alpha > 0$ tal que ningún punto de A está conectado a un punto de B por una α-cadena. Supongamos lo contrario. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sean $a_n \in A$ y $b_n \in B$ tales que pueden conectarse por una $1/n$-cadena. Pues to que A es compacto existe una subsucesión $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a un punto $a\in A$. Análogamente $(b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente a un punto b de B, para simplificar la notación supongamos que de hecho $(b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $b\in B$. Así, para cada $\varepsilon > 0$ existe $k\in\mathbb{N}$ tal que

$$1/n_k < \varepsilon \qquad d_X(a,a_{n_k}) < \varepsilon \qquad y \qquad d_X(b,b_{n_k}) < \varepsilon$$

Puesto que a_{n_k} y b_{n_k} pueden conectarse por una $1/n_k$-cadena tendríamos que a y b pueden conectarse por una ε-cadena, y por lo tanto a y b están conectados en X, contradiciendo la hipótesis de que ninguna componente conexa de X intersecta tanto a A como a B.

Asi pues debe existir $\alpha > 0$ con la propiedad de que ningún punto de A puede conectarse a punto alguno de B por una α-cadena. Definimos H_1 como el conjunto de puntos de X que pueden ser conectados a algún punto de A por una α-cadena, y $H_2 = X - H_1$. Es claro que H_1 y H_2 cumplen con lo establecido en el enunciado. ∎

C

Durante el desarrollo de este trabajo se dieron algunas versiones de los teoremas de Dini y Ascoli aprovechando algunos de los conceptos expuestos aquí. Nuestro propósito en este apartado es dar la versión "tradicional" de cada uno de estos teoremas.

TEOREMA DE DINI

Sean (X,d_X) un espacio métrico compacto y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente en $C(X,\mathbb{R})$. Supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f. Si $f\in C(X,\mathbb{R})$ entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f.

DEMOSTRACION

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Para cada $n\in\mathbb{N}$ definimos:

$$B_n = \{x\in X:\ f_n(x) - f(x) \geq \varepsilon\}$$

Puesto que para cada $n\in\mathbb{N}$ la función $f_n - f$ es continua, se sigue que cada B_n es cerrado y por lo tanto compacto. Se tiene que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos compactos de X. Se afirma que existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $B_N = \emptyset$ (y por lo tanto $B_n = \emptyset$ para $n \geq N$). En efecto, supongamos que la afirmación es falsa, es decir $B_n \neq \emptyset$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Ya que X es compacto se tendría que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \neq \emptyset$$

Pero esto no es posible, pues si $x_0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ entonces $f_n(x_0) - f(x_0) \geq \varepsilon$ para todo $n\in\mathbb{N}$, contradiciendo la hipótesis de convergencia puntual. Así existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $B_N = \emptyset$, de donde $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) - f(x) < \varepsilon$ para todo $x\in X$ y todo $n \geq N$, es decir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f. ∎

TEOREMA DE ASCOLI

Sean (X,d_x) un espacio métrico compacto y $\mathfrak{F} \subset C(X)$. $\mathfrak{F}$ es un subconjunto compacto de $C(X)$ si y sólo si $\mathfrak{F}$ es cerrado, equicontinuo y para cada $x \in X$ el conjunto $\mathfrak{F}(x) = \{f(x): f \in \mathfrak{F}\}$ es compacto en $\mathbb{R}$.

DEMOSTRACION

Supongamos que $\mathfrak{F}$ es compacto en $C(X)$. Es claro que $\mathfrak{F}$ es un subconjunto cerrado de $C(X)$. Sea $x \in X$ arbitrario, veamos que $\mathfrak{F}(x)$ es compacto en $\mathbb{R}$. Definimos la función $\delta_x : C(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ como: $\delta_x(f) = f(x)$. Observemos que δ_x es lineal, pues si f, $g \in C(X)$ y a, $b \in \mathbb{R}$ entonces

$$\delta_x(af + bg) = (af + bg)(x) = af(x) + bg(x) = a\,\delta_x(f) + b\,\delta_x(g)$$

Además δ_x es continua, pues dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|f-g\| < \delta$ entonces $|\delta_x(f) - \delta_x(g)| < \varepsilon$. En efecto, si tomamos $\delta = \varepsilon$ se tiene:

$$|\delta_x(f) - \delta_x(g)| = |\delta_x(f - g)| = |(f - g)(x)| \leq \|f - g\| < \varepsilon$$

Puesto que $\mathfrak{F}$ es compacto entonces $\delta_x(\mathfrak{F})$ es compacto, es decir, $\mathfrak{F}(x)$ es compacto en $\mathbb{R}$.

Ahora veamos que $\mathfrak{F}$ es una familia equicontinua. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, puesto que $\mathfrak{F}$ es compacto entonces es totalmente acotado, es decir existen $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathfrak{F}$ tales que

$$\mathfrak{F} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{\varepsilon/3}(f_i)$$

Como cada $f \in \mathfrak{F}$ es uniformemente continua, se tiene en particular que para cada $1 \leq i \leq n$ existe $\delta_i > 0$ tal que $d_x(x,y) < \delta_i$ implica $|f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon/3$. Sea $\delta = \min\{\delta_i : i = 1,2,\dots,n\}$, así, si $f \in \mathfrak{F}$ y $d_x(x,y) < \delta$ entonces, como $f \in \bigcup_{i=1}^{n} B_{\varepsilon/3}(f_i)$, existe $1 \leq k \leq n$ tal que $\|f - f_k\| < \varepsilon/3$, de donde

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)|$$

Así

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Por lo cual $\mathfrak{F}$ es equicontinua.

Inversamente, supongamos que $\mathcal{F}$ es cerrado, equicontinuo y que para cada $x \in X$ $\mathcal{F}(x)$ es compacto en $\mathbb{R}$. Puesto que $C(X)$ es completo entonces $\mathcal{F}$ es completo. Así, para demostrar que $\mathcal{F}$ es compacto basta probar que es totalmente acotado. Para este fin, sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, como $\mathcal{F}$ es equicontinuo existe $\delta > 0$ tal que si $d_x(x,y) < \delta$ y $f \in \mathcal{F}$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/4$. Por otra parte, como X es compacto existen $x_1, x_2, \ldots, x_p \in X$ tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^{p} B_\delta(x_i)$$

Definimos la función $g: C(X) \longrightarrow \mathbb{R}^p$ como:

$$g(f) = (f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_p))$$

Como para cada $x \in X$ el conjunto $\mathcal{F}(x)$ es compacto, se tiene en particular que para cada $1 \leq i \leq p$ el conjunto $\mathcal{F}(x_i)$ es compacto. Así $\mathcal{F}(x_i)$ es acotado en $\mathbb{R}$ para toda $1 \leq i \leq p$, se sigue que $g(\mathcal{F})$ es acotado en $\mathbb{R}^p$ y por lo tanto $\overline{g(\mathcal{F})}$ es compacto en $\mathbb{R}^p$. En particular $\overline{g(\mathcal{F})}$ es totalmente acotado, de donde $g(\mathcal{F})$ es también totalmente acotado. Así existen $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{F}$ tales que

$$g(\mathcal{F}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{\varepsilon/4}(g(f_i))$$

Entonces para cada $f \in \mathcal{F}$ existe $1 \leq k \leq n$ tal que

$$(f(x_1), \ldots, f(x_p)) \in B_{\varepsilon/4}((f_k(x_1), \ldots, f_k(x_p)))$$

Es decir $|f(x_i) - f_k(x_i)| < \varepsilon/4$ para toda $1 \leq i \leq p$.

Sea $f \in \mathcal{F}$ arbitraria, se probará que existe $1 \leq k \leq n$ tal que $\| f - f_k \| < \varepsilon$. Sea $x \in X$ arbitrario, existe $1 \leq i \leq p$ tal que $d_x(x, x_i) < \delta$. Pero también existe $1 \leq k \leq n$ tal que $|f(x_i) - f_k(x_i)| \leq \varepsilon/4$ para toda $1 \leq i \leq p$.

Así $|f(x) - f_k(x)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f_k(x_i) - f(x_i)| + |f_k(x_i) - f_k(x)|$

De donde $|f(x) - f_k(x)| < \varepsilon$ para toda $x \in X$, por lo cual concluimos que $\| f - f_k \| \leq \varepsilon$, y así $\mathcal{F}$ es totalmente acotado y por lo tanto compacto.

■

D

PROPOSICION

Sea (X,d_x) un espacio métrico en el cual es válido el teorema de Heine-Borel (un subconjunto de X es compacto si y sólo si es cerrado y acotado). Si F es un subconjunto cerrado de X entonces para todo $\delta > 0$ el conjunto $B_\delta[F]$ es cerrado en X.

DEMOSTRACION

Sean $\delta > 0$ arbitraria y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $B_\delta[F]$ convergente a algún punto $x_o \in X$, debemos probar que $x_o \in B_\delta[F]$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in F$ tal que $d_x(x_n,y_n) \leq \delta$. Por otra parte, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x_o existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d_x(x_n,x_o) < 1$ si $n \geq N$. Así para $n \geq N$ se tiene:

$$d_x(y_n,x_o) \leq d_x(y_n,x_n) + d_x(x_n,x_o) < \delta + 1$$

Por lo cual $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada, y por hipótesis se tiene que $\overline{\{y_n : n\in\mathbb{N}\}}$ es compacto en X. De donde $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ debe tener una subsucesión $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a algún punto $y_o \in \overline{\{y_n : n\in\mathbb{N}\}} \subset F$. Puesto que

$$d_x(y_{n_k},x_{n_k}) \leq \delta \qquad \text{para toda } k\in\mathbb{N}$$

Tomando límites cuando k tiende a infinito tenemos:

$$d_x(y_o,x_o) \leq \delta$$

y así

$$x_o \in B_\delta[F]$$

■

E

En la última proposición del capítulo I se utilizó una definición alternativa de la métrica de Hausdorff, así como algunas propiedades de una isometría.- Es propósito de este apartado justificar estos resultados.

DEFINICION

Sean (X,d_X) un espacio métrico y $A,\ B \subset X$. Se define

$$d_A(B) = \sup\{\, d_X(x,A) : x \in B \}$$

Si $A,\ B \in \mathcal{F}(X)$ definimos

$$\rho(A,B) = \max\{d_A(B),\ d_B(A)\}$$

PROPOSICION

Sean (X,d_X) un espacio métrico y $A,\ B \in \mathcal{F}(X)$. Entonces

$$\rho(A,B) = \delta_H(A,B)$$

DEMOSTRACION

Sea $\alpha = \rho(A,B)$. Si $\alpha = \infty$ entonces $\alpha \geq \delta_d(A,B)$. Supongamos $\alpha < \infty$. - Sea $P = \{\, \varepsilon > 0 : A \subset B_\varepsilon[B],\ B \subset B_\varepsilon[A] \}$. Entonces

$$\alpha \geq d_A(B) = \sup\{\, d_X(b,A) : b \in B \}$$

y

$$\alpha \geq d_B(A) = \sup\{\, d_X(a,B) : a \in A \}$$

Se probará que $\alpha + 1/n \in P$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $a \in A$ arbitrario, entonces - $d_X(a,B) \leq d_B(A) < \alpha + 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así $d_X(a,B) < \alpha + 1/n$, esto implica que existe $b \in B$ tal que $d_X(a,b) < \alpha + 1/n$, así $a \in B_{\alpha+1/n}[B]$, por lo cual

$$A \subset B_{\alpha+1/n}[B]$$

Análogamente: si b es un elemento arbitrario de B entonces

$$d_x(b,A) \leq d_A(B) < \alpha + 1/n \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

Esto implica que existe $a \in A$ tal que $d_x(a,b) < \alpha + 1/n$, de donde $b \in B_{\alpha+1/n}[A]$, y por lo tanto

$$B \subset B_{\alpha+1/n}[A]$$

Así $\alpha + 1/n \in P$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto $\alpha \geq \inf P = \delta_d(A,B)$, es decir

$$\rho(A,B) \geq \delta_d(A,B)$$

Por otra parte, si $P = \emptyset$ entonces $\delta_d(A,B) = \infty$ y por lo tanto $\delta_d(A,B) \geq \rho(A,B)$. Supongamos $P \neq \emptyset$ y sea $\varepsilon \in P$ arbitrario, es decir

$$A \subset B_\varepsilon[B] \qquad y \qquad B \subset B_\varepsilon[A]$$

Entonces para cada $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $d_x(a,b) \leq \varepsilon$. Se sigue que $d_x(a,B) \leq \varepsilon$. Pero esto es válido para toda $a \in A$, por lo cual

$$\sup \{ d_x(a,B) : a \in A \} \leq \varepsilon$$

Es decir $$d_B(A) \leq \varepsilon$$

De una forma similar se prueba que:

$$d_A(B) \leq \varepsilon$$

Así $$\rho(A,B) = \max \{ d_A(B),\ d_B(A) \} \leq \varepsilon$$

Como esto es válido para todo $\varepsilon \in P$ se tiene:

$$\rho(A,B) \leq \inf P = \delta_d(A,B)$$

y así concluimos que:

$$\rho(A,B) = \delta_d(A,B)$$

■

PROPOSICION

Sean (X,d_x) un espacio métrico completo, (Y,d_y) un espacio métrico arbitrario y $j: X \longrightarrow Y$ una isometría. Si E es un subconjunto cerrado de X entonces $j(E)$ es un subconjunto cerrado de Y.

DEMOSTRACION

Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $j(E)$ convergente a algún $y\in Y$. Se probará que $y\in j(E)$.

Para cada $n\in\mathbb{N}$ sea $x_n\in E$ tal que $j(x_n)=y_n$. Como $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y j es una isometría, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en X. Así $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a algún $x\in E$. Se afirma que $y=j(x)$. En efecto, dado $\varepsilon>0$ arbitrario existe $N\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq N$ entonces

$$d_x(x_n,x)<\varepsilon$$

De donde $$d_y(j(x_n),j(x))<\varepsilon \qquad \text{si } n\geq N$$

Es decir $$d_y(y_n,j(x))<\varepsilon \qquad \text{si } n\geq N$$

Pero esto significa que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $j(x)$. Así $j(E)$ es cerrado en Y. ■

PROPOSICION

Sean (X,d_x), (Y,d_y) espacios métricos arbitrarios y $E\subset X$. Si $j(E)$ es compacto en Y entonces E es compacto en X.

DEMOSTRACION

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en E. Para cada $n\in\mathbb{N}$ sea $y_n=j(x_n)$, así $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $j(E)$. Por hipótesis existe $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a algún $y\in j(E)$. Consideremos la sucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, la cual es subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Se afirma que $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x, donde x es tal que $$j(x)=y$$

En efecto, sea $\varepsilon>0$ arbitrario, puesto que $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a y, existe $K\in\mathbb{N}$ tal que si $k\geq K$ entonces $d_y(y_{n_k},y)<\varepsilon$, de aquí tenemos

$$d_x(x_{n_k},x)=d_y(j(x_{n_k}),j(x))=d_y(y_{n_k},y)<\varepsilon \qquad \text{si } k\geq K$$

Así $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesion convergente en E. Concluimos que E es compacto. ■

B I B L I O G R A F I A

1.- Gerald Beer, On Uniform Convergence of Continuous Functions and Topological Convergence of Sets, Can. Math. Bull , Vol 26 (1983) pp. 418 - 424.

2.- Gerald Beer, More on Convergence of Continuous Functions and Topological Convergence of Sets, Can. Math. Bull, Vol 28 (1985) pp. 52 - 59.

3.- Gerald Beer, Upper Semicontinuous Functions and the Stone Approximation Theorem, Journal of Approximation Theory, Vol 34 (1982) pp. 1 - 11.

4.- H. L. Royden, Real Analysis, Macmillan Co., New York, 1968.

5.- J. P. Aubin, Applied Abstract Analysis, Wiley, New York, 1977

6.- K. Kuratowski, Topology, Academic Press, New York, 1968.

7.- M. H. Stone, A Generalized Weierstrass Theorem, in "Studies in Modern Analysis", (R.C.Buck, Ed.) Vol 1, M.A.A. Studies in Mathematics, Prentice - Hall Englewodd Cliffs N.J. 1962.

8.- M. H. A. Newman, Elements of the Topology of Plane Sets of Points, Cambridge at the University Press, Cambridge, 1961.