

323801
3
2g

UNIVERSIDAD ANAHUAC

Con estudios incorporados a la
Universidad Nacional Autónoma de México



**EL METODO DE NEWTON GENERALIZADO
Y LA PRUEBA DE KANTOROVICH:
FUNDAMENTOS, APLICACIONES Y COMENTARIOS.**

T E S I S
Que para obtener el título de :
A C T U A R I O
P r e s e n t a :
FERNANDO ENRIQUE LOYOLA AHEDO

México, D. F.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

1989



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------|----|
| INTRODUCCION | 1 |
| 1. MOTIVACION | |
| 1.1 Introducci3n | 4 |
| 1.2 El Proceso de Iteraci3n | 4 |
| 1.3 Iteraci3n en un Contexto m1s Amplio | 9 |
| 1.4 El M3todo de Newton Cl1sico | 13 |
| 2. ESPACIOS METRICOS Y ESPACIOS VECTORIALES NORMADOS | |
| 2.1 Introducci3n | 17 |
| 2.2 Espacios M3tricos | 17 |
| 2.2.1 Espacios L_p | 24 |
| 2.3 Convergencia | 30 |
| 2.4 Espacios Vectoriales Normados | 35 |
| 3. OPERADORES LINEALES Y SUS NORMAS | |
| 3.1 Introducci3n | 42 |
| 3.2 Operadores Lineales y Norma de Operadores | 42 |
| 3.3 El Principio de Mapeos de Contracci3n | 52 |
| 3.3.1 Soluci3n de Sistemas de Ecuaciones por el M3todo de Mapeos de Contracci3n | 59 |
| 3.3.2 Existencia y Unicidad de la Soluci3n de una Ecuaci3n Integral | 61 |
| 4. DIFERENCIACION E INTEGRACION | |
| 4.1 Introducci3n | 64 |
| 4.2 Diferenciaci3n Generalizada | 64 |
| 4.3 Generalizaci3n del Teorema de Valor Medio | 70 |
| 4.4 Series de Taylor | 73 |
| 4.5 Integraci3n Generalizada | 77 |

5. EL METODO DE NEWTON-RAPHSON GENERALIZADO

| | |
|-----------------------------------|----|
| 5.1 Introducción | 82 |
| 5.2 El Método de Newton – Raphson | 83 |
| 5.3 La Prueba de Kantorovich | 89 |
| 5.4 Otros Ejemplos | 94 |

6. DIFICULTADES EN LA APLICACION DEL LOS METODOS

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 6.1 Introducción | 108 |
| 6.2 Una Aplicación del Método de Newton – Raphson Generalizado en la Teoría Macroeconómica | 108 |
| 6.2.1 Funciones de Producción con Elasticidad Variable de Sustitución | 108 |
| 6.2.2 Esquema de la Resolución de la Ecuación Diferencial | 111 |
| 6.3 El Metodo de N-R Generalizado y la Prueba de Kantorovich en un Problema Actuarial | 115 |
| 6.3.1 El Coeficiente de Ajuste en la Teoría de la Ruina | 115 |
| 6.3.2 Determinación del Coeficiente de Ajuste | 120 |
| 6.3.3 Caso Numérico | 125 |

ALGUNAS CONSIDERACIONES FINALES

APENDICE EL Teorema de Kantorovich para el Método de Newton

BIBLIOGRAFIA SELECCIONADA

INTRODUCCION

El objeto de la presente tesis es el de exponer aquellos conceptos y resultados del análisis clásico que en una forma natural se extienden a objetos más generales que los relativos a los números reales; como pueden ser espacios n -dimensionales, complejos, de funciones, etc... ; con el propósito de difundir la generalidad de estos resultados y mostrar su aplicabilidad a problemas concretos.

La tesis estudia al análisis numérico desde un punto de vista moderno, es decir, influenciado por las computadoras electrónicas y el análisis funcional. El análisis numérico tradicionalmente era concebido como una disciplina ocupada de problemas que envuelven números y relaciones esencialmente aritméticas. El uso de las modernas computadoras ha facilitado mucho su desarrollo, pero el valor agregado que le ha proporcionado el análisis funcional es lo que lo ha colocado en una parte central de las matemáticas modernas, naciendo así, lo que podríamos llamar análisis funcional numérico. Por tanto, el hacer ver cómo se aplica el análisis funcional al análisis numérico es materia del presente trabajo, especialmente porque el análisis funcional no fué creado con una orientación primordial a las aplicaciones numéricas.

Una de las principales características de las matemáticas del presente siglo ha sido la concientización gradual de que los procedimientos y teoremas del álgebra y el cálculo se aplican no sólo a los números reales y complejos, o a los espacios vectoriales usuales, sino a una amplia variedad de otros objetos, incluyendo muchos que ahora son de gran interés en análisis numérico. Por ejemplo, ahora se reconoce que la descomposición de una función en una serie de Fourier corresponde a la descomposición de un vector en sus componentes; esto hizo ver la necesidad de trabajar con una ciencia que unificara a las demás.

Podemos encontrar entre las fuentes del análisis funcional al cálculo de variaciones, al estudio de las series de Fourier y al análisis real y complejo, tópicos que tienen sus raíces en las matemáticas de

siglos anteriores. Sin embargo, el análisis funcional es un producto del presente siglo, y en recientes décadas ha tomado gran importancia en las matemáticas modernas con una intensa difusión en diferentes áreas de la investigación.

La esencia del análisis funcional es que utiliza conceptos y métodos del análisis conjuntándolos con elementos del álgebra lineal y de la geometría para así extenderlos a conjuntos de objetos más generales como los espacios vectoriales. De este modo, el análisis funcional se encuentra dentro de lo que podemos denominar análisis moderno, entre cuyas ventajas encontramos su relativa simplicidad y su generalidad. Debe observarse que, aunque las ideas de gran generalidad son extremadamente valiosas, difícilmente son suficientes por sí mismas para tratar situaciones particulares y concretas. No obstante, es indudable que el análisis moderno produce una gran economía de pensamiento y organización al enfatizar el aspecto conceptual sobre el computacional o rígido, buscando encontrar la simplicidad subyacente a lo complejo. Así, el principal atractivo del análisis funcional es su enorme grado de abstracción por lo que puede entenderse como una disciplina unificadora. Esto proviene principalmente de su carácter eminentemente geométrico — la mayor parte de los resultados importantes son abstracciones de ideas geométricas intuitivas: al unificar conceptos, se reúnen muchos trucos matemáticos aparentemente diversos y especializados en unos pocos principios geométricos generales.

Mostramos una de las aplicaciones más importantes del análisis funcional en problemas propios del análisis numérico ayudándonos del concepto de sucesiones por iteración. Este, es una herramienta muy útil en la solución de ecuaciones por aproximación, y en especial, trabajamos en torno al método de Newton-Raphson (N-R); este método es uno de los métodos iterativos más comúnmente usados principalmente por tener una gran velocidad de convergencia. Por ello, mostraremos la generalización del método de N-R para resolver diversos tipos de ecuaciones, en las que sus objetos no son exclusivamente variables reales o complejas, sino que también podemos dar solución a ecuaciones en espacios de funciones, tales como ecuaciones diferenciales, integrales o bien sistemas de ecuaciones. Asimismo, para dar una simplificación a la cantidad de cálculos que se necesitan en la aplicación del método de N-R, mostramos un método

alternativo con la misma capacidad de generalización y un proceso para validar su convergencia; su prueba es debida al célebre matemático Kantorovich.

Entre los prerrequisitos del lector para la comprensión de la tesis se encuentran los conceptos básicos de teoría de conjuntos y del álgebra lineal, y un nivel intermedio del cálculo de varias variables.

En el primer capítulo se dan ejemplos de algunas técnicas iterativas usadas para la obtención de aproximaciones a la solución de ecuaciones; se trata el método de N-R en su forma más simple, y se muestra una serie de ecuaciones que pueden resolverse usando la presente herramienta. En los dos siguientes capítulos, se exponen las bases del análisis funcional trabajando con espacios métricos y espacios vectoriales normados, entre los que encontramos a los espacios de Banach y de Hilbert. Por consiguiente, definimos un operador, su norma, completitud y mapeo de contracción. En el cuarto capítulo mostramos una generalización del concepto de diferenciación; con ayuda del teorema de valor medio analizamos las ventajas de tomarlo como un mapeo de contracción; discutimos su papel en la reexpresión de una función en términos de su serie de Taylor, y generalizamos también la idea de una integral. El capítulo cinco es la parte central del trabajo: en él se describe la generalización del método de N-R mostrando la forma de aplicarlo y de encontrar la función de Kantorovich. Se concluye el capítulo exponiendo algunos ejemplos particulares. Por último, en el sexto capítulo se muestran dos aplicaciones del método de N-R generalizado, uno en la teoría macroeconómica y otro en el campo actuarial.

A manera de apéndice se dan algunos aspectos formales de la aportación de Kantorovich al método de N-R.

Quisiera agradecer al Dr. Pedro Reyes Ortega el haberme facilitado su análisis teórico sobre funciones de producción, y en especial al Act. Gerardo Lira C., a quien aprecio y admiro, y quien desinteresadamente colaboró en gran parte de la realización de este trabajo, aportando valiosos consejos, notas y material bibliográfico.

MOTIVACION

1.1. INTRODUCCION

En este capítulo se busca atraer al lector al uso del análisis funcional numérico, mostrando la utilidad práctica que tienen los métodos numéricos en la resolución de ecuaciones.

Inicialmente trabajaremos con los conceptos de iteración, distancia, convergencia y punto fijo en el campo de los números reales, exponiendo en una segunda etapa la amplia gama de problemas que podemos resolver al utilizar estos conceptos dentro del contexto del análisis funcional. En último término daremos una introducción al método de Newton-Raphson tradicional destacando su importancia dentro del análisis funcional en la resolución de expresiones aparentemente muy complejas.

1.2. EL PROCESO DE ITERACION

Uno de los métodos más comúnmente usados en el cálculo es el proceso de iteración. En él partimos de un objeto inicial ϕ_0 y lo sometemos a un proceso T , el cual lo transforma en otro objeto ϕ_1 , es decir, $\phi_1 = T\phi_0$; volvemos a aplicar T a ϕ_1 para obtener ϕ_2 , por lo que sucesivamente podemos escribir el proceso como $\phi_n = T\phi_{n-1}$ (ver fig 1).

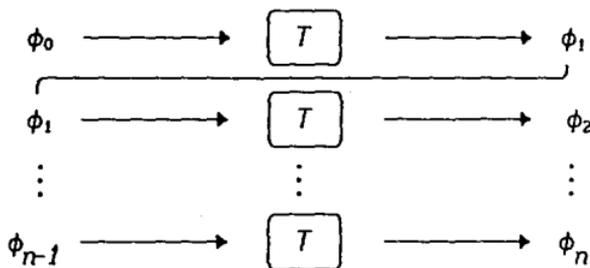


fig 1

Otra forma de escribir esto es indicando que la n -ésima salida es obtenida aplicando n veces el proceso T a la entrada inicial ϕ_0 , es decir

$$\phi_n = T^n \phi_0.$$

Cuando la distancia entre ϕ_n y ϕ_{n+1} va disminuyendo, $|\phi_{n+1} - \phi_n| < |\phi_n - \phi_{n-1}|$ para cualquier n , podemos imaginar que, para un gran número de aplicaciones del proceso T , esta distancia tiende a desaparecer, y por tanto decimos que el proceso converge a un punto fijo ϕ en el que

$$\phi = T\phi.$$

Para entender mejor lo anterior veamos el siguiente ejemplo numérico.

Ejemplo 1 Encontrar la raíz real de la ecuación $x^2+10x-3=0$. Si reexpresamos la ecuación como

$$x = \frac{3}{x+10},$$

tenemos a x en función de sí misma, es decir, $x=f(x)$, donde $f(x)=3/(x+10)$, por lo que tomando a f como el proceso iterativo con una aproximación inicial a la raíz de la ecuación original $x_0=0$, tenemos una lista sucesiva de resultados como sigue

$$\begin{array}{l} 0 \\ \downarrow \\ f(0) = 0.3 \\ \downarrow \\ f(0.3) = 0.291261 \\ \downarrow \\ f(0.291261) = 0.2915024 \\ \downarrow \\ f(0.2915024) = 0.2915026 \\ \downarrow \\ f(0.2915026) = 0.2915026 \\ \downarrow \\ \dots \end{array}$$

Fácilmente observamos que la distancia entre cada par de resultados va disminuyendo conforme el proceso avanza, y la iteración va convergiendo a un punto fijo. Con exactitud de 7 decimales tenemos una aproximación a la solución de la ecuación $x=f(x)=3/(x+10)$, misma que es equivalente a nuestra ecuación cuadrática inicial; por lo tanto, una conjetura razonable es que una raíz aproximada es 0.2915026. \square

En el ejemplo anterior, pretendimos resolver la ecuación $x=f(x)$ iniciando con un valor x_0 y aplicando f varias veces, obteniendo $x_1=f(x_0)$, $x_2=f(x_1)$, ..., $x_{n+1}=f(x_n)$, ..., y se juzgó que en el límite la sucesión

$$x_0, x_1, \dots, x_n \rightarrow x,$$

notamos igualmente, que la raíz x cumplía con la propiedad requerida $x=f(x)$, pero de seguro el lector se preguntará si la sucesión que uno propone siempre convergerá, y si es que lo hace, no estará seguro de si el límite definitivamente será una raíz de $x=f(x)$. Si la respuesta de ambas interrogantes fuera afirmativa, entonces tendríamos un potentísimo método para resolver ecuaciones y prácticamente cualquier otro método sería redundante. Para responder a la primer pregunta consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2 Tenemos el proceso $x=f(x)=(x^3+2x^2-1)/7$ con el fin de buscar una raíz a la ecuación $x^3+2x^2-7x-1=0$; si lleváramos a cabo este proceso con $x_0 \in [-3; 1]$, el proceso convergería a -1.378 ; pero si nuestra primera aproximación es $x_0=2$, tenemos

$$\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ \downarrow \\ x_1 = f(2) = 2.142857 \\ \downarrow \\ x_2 = f(2.142857) = 2.574761 \\ \downarrow \\ x_3 = f(2.574761) = 4.189697 \\ \downarrow \\ x_4 = f(4.189697) = 15.378747 \\ \downarrow \\ \dots \end{array}$$

Claramente nuestra iteración no se acerca a alguna raíz de la iteración cúbica. En las gráficas de la figura 2 se observan estos razonamientos, en la primera, 2a), se muestra claramente la convergencia del proceso en la intersección de la función cúbica y la línea de identidad $f(x)=x$; y en 2b), se observa la divergencia para $x_0=2$. □

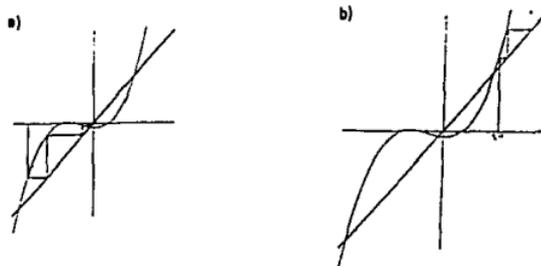


fig 2

Así, algunas funciones y algunos puntos iniciales nos proporcionan sucesiones convergentes a las raíces requeridas, pero frecuentemente nos encontramos sucesiones que no convergen, y puede ser que el problema si tenga solución. Una alternativa muy usada en análisis numérico es la de utilizar el método N-R de iteración, el cual está diseñado como un camino sistemático para decidir que función se utilizaría en la iteración y determinar el número de pasos en que se obtendría una aproximación deseada. Con este proceso muy a menudo se obtienen resultados exitosos.

Para responder a la interrogante de que si para la sucesión convergente producida por f , el límite definitivamente será una raíz de $x=f(x)$, imaginemos que se desea encontrar una x para la cual $x=f(x)$, y que producimos una sucesión convergente $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots, x$ donde $x_n = f(x_{n-1})$, si por ejemplo f es una función continua, entonces las $f(x_n)$'s estarán tan cercanas a $f(x)$ en la medida de que las x_n 's estén cerca de x , es decir:

$$\begin{array}{ccccccc}
 f(x_0), & f(x_1), & \dots, & f(x_n), & \dots & \rightarrow & f(x) \\
 || & || & & || & & & ||? \\
 x_1, & x_2, & \dots, & x_{n+1}, & \dots & (\rightarrow) & x.
 \end{array}$$

Como podemos ver, la sucesión de $f(x_n)$'s es simplemente parte de la sucesión de x_n 's la cual converge a x ; así, $x=f(x)$ y el límite x satisface la ecuación.

La mayor parte de las funciones con que trabajaremos serán continuas, es decir, que si x y y están suficientemente cerca, entonces $f(x)$ y $f(y)$ también lo estarán. Si f es de esta clase, y lleva a un proceso iterativo convergente, entonces el límite de esta sucesión debe ser la raíz $x=f(x)$. Lo anterior se demuestra en el siguiente teorema.

Teorema 1.1 Sea X un subconjunto de números reales, sea $f: X \rightarrow X$ continua, y sea $x_0 \in X$. Si la sucesión $x_{n+1} = f(x_n)$ converge a $x \in X$ entonces, $x=f(x)$.

Dem. Tenemos $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots \rightarrow x$; esto quiere decir que las x_n 's se van acercando a x y, por continuidad las $f(x_n)$'s se van acercando a $f(x)$. Como las x_n 's son obtenidas a partir de las $f(x_n)$'s, entonces $x=f(x)$. \square

Para aclarar mejor lo anterior observamos lo que sucede con una función no continua en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3 Sea $[x]$ la función " piso " o " mayor entero no mayor a x ", (por ejemplo $[2.21] = 2$). (fig 3)

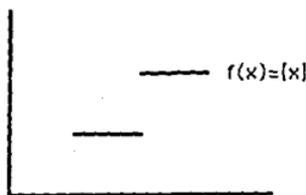


fig 3

Ahora tratemos de resolver con $x_0=1$ la ecuación

$$x = f(x) = [x] + 1 - \frac{1}{2} ([x] + 1 - x)^2.$$

Siguiendo el esquema tenemos:

$$\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ \downarrow \\ x_1 = f(1) = 1.5 \\ \downarrow \\ x_2 = f(1.5) = 1.875 \\ \downarrow \\ x_3 = f(1.875) = 1.9921875 \\ \downarrow \\ x_4 = f(1.9921875) = 1.9999695 \\ \text{etc...} \end{array}$$

claramente la sucesión converge a 2:

$$\begin{array}{ccccccc} f(1) & , & f(1.5) & , & f(1.875) & , & f(1.9921875) & , & \dots \\ || & & || & & || & & || & & \\ 1.5 & , & 1.875 & , & 1.9921875 & , & 1.9999695 & , & \dots \end{array}$$

sin embargo, no se satisface que $2=f(2)$ pues $f(2)=2.5$. Por tanto el límite no satisface $x=f(x)$. Obsérvese que en este ejemplo la función f no es continua. \square

1.3 ITERACION EN UN CONTEXTO MAS AMPLIO

Cuando estudiamos cálculo desde el punto de vista del análisis funcional no nos concierne la naturaleza de los objetos ϕ — tales objetos pueden ser números, vectores, matrices, funciones o algunos de los anteriores juntos; con esto ampliamos nuestro contexto de aplicación del proceso de iteración. A continuación mostramos algunos ejemplos de este hecho.

Ejemplo 4 Si trabajamos en el plano \mathbb{R}^2 podríamos usar las iteraciones

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n y_n + x_n + 0.07 \\ y_{n+1} &= x_n^2 + y_n^2 + y_n - 0.41 \end{aligned}$$

con $x_0=0.1$ y $y_0= -0.6$ para encontrar la intersección de la hipérbola $xy=-0.07$ y la circunferencia $x^2+y^2=0.41$. La siguiente tabla y la figura 4 muestran los resultados del proceso.

| n | x | y |
|-----|----------|-----------|
| 0 | 0.1 | -0.6 |
| 1 | 0.11 | -0.64 |
| 2 | 0.1096 | -0.6283 |
| 3 | 0.110738 | -0.631527 |
| 4 | 0.110840 | -0.630438 |
| 5 | 0.110949 | -0.630708 |
| 6 | 0.110973 | -0.630606 |
| 7 | 0.110993 | -0.630627 |
| 8 | 0.110998 | -0.630617 |
| 9 | 0.111001 | -0.630619 |
| 10 | 0.111002 | -0.630618 |
| 11 | 0.111002 | -0.630618 |

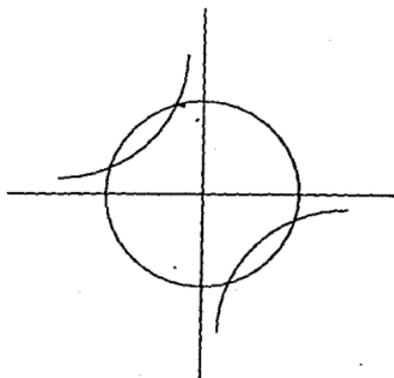


fig 4

Claramente, iniciando con $(x_0, y_0)=(0.1, -0.6)$ después de 11 iteraciones tenemos un proceso invariante a una aproximación de 6 decimales; para comprobar que tenemos un buen acercamiento sustituimos nuestras aproximaciones en las ecuaciones de la hipérbola y la circunferencia:

$$x^*y^* = (0.111002) (-0.630618) \approx -0.07, y$$

$$x^{*2} + y^{*2} = (0.111002)^2 + (-0.630618)^2 \approx 0.41. \quad \square$$

En el ejemplo anterior mostramos que nuestras iteraciones no sólo operan con números. Continuaremos con algunos ejemplos en los que aplicaremos iteración a funciones. Para comenzar, imaginemos que tenemos un proceso en el cual la función $x(t)=t^2$ para $t \in \mathbb{R}$ es convertida en una nueva función $y(t)=t^2+1$ para $t \in \mathbb{R}$. En forma esquemática tenemos:



Otro proceso podría comenzar con una función determinada x , produciendo y con la siguiente regla:

$$y(t) = 1 + \int_0^t u^2 x(u) du.$$

Así, si $x(t)$ es la función cero entonces $y(t)=1$ para toda t , y si $x(t)=\text{sen}(t^3)$, entonces

$$y(t) = 1 + \int_0^t u^2 \text{sen}(u^3) du = 1 + \left[-\frac{1}{3} \cos(u^3) \right]_0^t = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cos t^3.$$

Si la integral se encuentra definida, este proceso puede ser aplicado a cualquier función continua para producir otra función continua. De este modo, si X es el conjunto de funciones continuas (por ejemplo $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$), entonces el proceso toma una $x \in X$ y crea una $y \in X$; el proceso es simplemente una función $f: X \rightarrow X$. Esto no difiere en principio de los ejemplos en la sección previa, excepto en que los elementos de X son en sí mismas funciones. Conjuntando este concepto con el proceso iterativo podemos encontrar resultados muy interesantes como se muestra a continuación.

Ejemplo 5 Si usamos el proceso $\gamma_{n+1}(x) = 1 - \int_0^x \gamma_n(t) dt$ con $\gamma_0(x) \equiv 0$, encontramos que la iteración se aproxima a

$$\gamma(x) = e^{-x},$$

la cual puede expresarse como una solución a la ecuación integral

$$\gamma(x) = 1 - \int_0^x \gamma(t) dt,$$

Para ver esto llevamos a cabo las iteraciones indicadas sustituyendo la función nula 0 por el término $\gamma(t)$, de la ecuación anterior obtenemos $\gamma_1(t)=1$, y este resultado lo remplazamos, a su vez, en el mismo término $\gamma(t)$ para obtener γ_2 , y así sucesivamente:

$$Y_0(x) = 0$$

$$Y_1(x) = 1$$

$$Y_2(x) = 1 - x$$

$$Y_3(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2}$$

$$Y_4(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3 \cdot 2}$$

...

$$Y_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^n \frac{x^i (-1)^i}{i!} .$$

□

En el ejemplo trabajamos con una ecuación integral lineal, pero la linealidad no es necesaria; esto se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6 Si tenemos la ecuación integral no lineal

$$f(x) = x + \int_0^x f^2(t) dt$$

y aplicamos la iteración

$$f_{n+1}(x) = x + \int_0^x f_n^2(t) dt$$

con $f_0(x) \equiv 0$, entonces

$$f_0(x) = 0 ,$$

$$f_1(x) = x ,$$

$$f_2(x) = x + \frac{x^3}{3} ,$$

$$f_3(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{1x^7}{63} .$$

Aquí notamos que $f_n(x)$ son los primeros n -términos de la serie de Taylor aplicado a la función $\tan x$, la cual es la solución a nuestra ecuación. □

1.4 METODO DE NEWTON CLASICO

En los ejemplos anteriores hemos utilizado iteraciones para dar a solución a la ecuación

$$x = f(x),$$

o lo que es lo mismo, encontrar una raíz para la ecuación $g(x)=0$ en donde

$$x = f(x) = x - g(x).$$

En el caso de que esta ecuación sea algebraica, cualquier solución $x=\eta$ de $g(x) = 0$ es también solución a la ecuación

$$x = f(x) = x - \frac{g(x)}{h(x)}$$

para cualquier función $h(x)$. Por supuesto, $h(x)$ debe ser distinta de cero para x cercanas a η . Como la ecuación anterior tiene una función arbitraria $h(x)$ debemos escoger una función de manera que $f(x)$ converja tan rápidamente como sea posible a la raíz deseada η . Para ayudarnos en la búsqueda de $h(x)$ utilizamos el siguiente resultado de gran importancia en métodos numéricos.

Teorema 1.2 Supongamos que $f(\eta)=\eta$ y que $|f'(x)| \leq \lambda < 1$ en el intervalo $|x-\eta| \leq \alpha$ en donde α es cualquier número positivo. Escogamos un número x_0 en este intervalo. Entonces la sucesión de iteraciones $x_i, i=1,2,\dots$, definida recurrentemente por la ecuación $x_{n+1}=f(x_n)$, siempre converge a η .

Dem. Si $f(\eta)=0$, entonces se tiene que $|f'(x)| \leq \lambda < 1$ para $|x-\eta|$ suficientemente pequeño, por lo que calculamos

$$F(x) = \frac{d}{dx} \left(x - \frac{g(x)}{h(x)} \right) = 1 - \frac{g'(x)}{h(x)} + \frac{h'(x)g(x)}{h^2(x)}$$

y observamos que:

$$F(\eta) = 1 - \frac{g'(\eta)}{h(\eta)};$$

esto nos sugiere tomar $h(x)=g'(x)$ ya que entonces $F(\eta)=0$. En realidad

la elección de $h(x) = g'(x)$ es una elección óptima puesto que la convergencia de x_n a η será muy rápida. Esto se sigue inmediatamente del hecho de que λ^n puede ser arbitrariamente pequeño cuando x_n tiende a η . Por consiguiente, la iteración definida en forma recurrente puede ser:

$$x_{n+1} = f(x_n) = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$$

Al esquema anterior se le conoce como el método de Newton o de Newton-Raphson (N-R) para resolver la ecuación $g(x) = 0$.

Ejemplo 7 Podemos utilizar el método de Newton para calcular la raíz cuadrada de 2; aquí $g(x) = x^2 - 2 = 0$ y entonces la fórmula recurrente para este problema sería,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

La iteración genera la siguiente sucesión:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1.4 \\ x_1 &= 1.41428571 \\ x_2 &= 1.41421356 \\ x_3 &= 1.41421356 \\ &\dots \\ x_{10} &= 1.41421356 ; \end{aligned}$$

fácilmente podemos notar que la iteración se aproxima muy rápidamente a la raíz deseada, con un error máximo de 10^{-8} , obtenido desde las primeras 3 aplicaciones del proceso adoptado. \square

Ejemplo 8 Una aplicación práctica del ejemplo anterior puede ser su uso en las calculadoras modernas para determinar la raíz j -ésima de cualquier número positivo 'a'. Para esto, se tendría el siguiente

proceso en el que sólo se usan operaciones básicas compuestas "+, -" tomando en cuenta que la potenciación es sólo una multiplicación repetida, y la multiplicación es únicamente una suma repetida.

Aquí $g(x) = x^j - a = 0$, de donde

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n^j - a}{j x_n^{j-1}} = x_n \left(1 - \frac{1}{j}\right) + \frac{a}{j x_n^{j-1}} \\ &= \frac{x_n}{j} (j-1) + \frac{a}{j} (x_n^{1-j}) \\ &= \frac{1}{j} (x_n (j-1) + a x_n^{1-j}) . \end{aligned}$$

Así, la calculadora podría encontrar el valor de $\sqrt[17]{2234}$ mediante la simple iteración

$$x_{n+1} = \frac{16}{17} x_n + \frac{2234}{17 x_n^{16}} . \quad \square$$

De esta forma, podemos tomar el método de N-R como el método de extracción de raíces con el cual nos ayudamos de una iteración óptima en el sentido de rapidez de convergencia. Ahora bien, el método de N-R se encuentra inmerso dentro de lo que podemos denominar análisis clásico. En el presente estudio se darán las bases para poder aplicar el método de N-R desde el punto de vista del análisis funcional, en el que no interesa la naturaleza de los objetos a tratar, de forma que podremos aplicar el método para encontrar la solución de diversos tipos de ecuaciones. Ejemplos de ellas se presentan a continuación.

— Ecuaciones Integrales como

$$a \int_1^x [y(s)]^2 ds + ax[y(x)]^2 - y(x) + b = 0, \text{ con } a, b > 0, y_0(x) \equiv 0.$$

— Ecuaciones Diferenciales como

$$\frac{du}{dx} - (x + u)^2 = 0$$

con $u_0(x) = -x$.

— Sistemas de ecuaciones, tales como

$$x' = x^2 + y^2 - 200,$$

$$y' = y^3 + xy - x^3,$$

con $x_0 = y_0 = 10$.

Las bases del análisis funcional descansan en la conceptualización de lo que son espacios métricos y espacios vectoriales normados, entre los que destacan los espacios de Banach y de Hilbert. Por consiguiente son de importancia especial los significados de operador, norma de operador, completitud y mapeos de contracción. En tal sentido, el presente trabajo profundizará en estos conceptos dando ejemplos para su mayor entendimiento. Se trabajará también con los conceptos de diferenciación e integración generalizada, así como la generalización del método de N-R.

ESPACIOS METRICOS Y ESPACIOS VECTORIALES NORMADOS .

2.1 INTRODUCCION

En la primera parte del capítulo introduciremos el concepto de un espacio métrico y exploraremos sus propiedades, mostrando ejemplos de espacios métricos importantes. En segundo lugar trabajaremos con los espacios métricos particulares L_p , l_p y de Hilbert destacándolos por su importancia dentro de las matemáticas modernas. En una tercera etapa estudiamos los conceptos de convergencia en un espacio métrico, la definición de una sucesión de Cauchy y la definición de un espacio métrico completo. Seguidamente hondamos en la conceptualización de un vector y su norma, definiendo así lo que es un espacio vectorial normado, mostrando como un espacio de esta naturaleza puede ser tomado como un espacio métrico y, con ayuda del concepto de completitud, podemos concluir el capítulo dando la definición de un espacio de Banach (vectorial, normado y completo).

2.2 ESPACIOS METRICOS .

Definición 2.1. Un conjunto X es llamado un espacio métrico si a cada par de elementos x, y de este conjunto, le corresponde un número real no negativo $\rho(x, y)$ que cumple con las siguientes condiciones:

- | | | |
|------|-------------------------------------------|---------------------------|
| M1) | $\rho(x, y) = 0 \iff x=y$ | Identidad |
| M2) | $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ | Simetría |
| M3) | $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ | Desigualdad del Triángulo |

El número $\rho(x, y)$ es llamado distancia o métrica entre los elementos x y y , y las condiciones anteriores son denominadas axiomas métricos. Es evidente que $\rho(x, y)$ denota una función de dominio X y rango \mathbb{R}^+ . Con una función así construida sobre un conjunto X podemos dar las siguientes definiciones.

Definición 2.2 $S(a,r)$ denota a la esfera de centro a y radio r , y consiste de todos los puntos p que se encuentran a una distancia r del centro a ; es decir,

$$S(a,r) = \{ p \in X / \rho(p,a) = r \}.$$

Ejemplo 1 Si trabajamos con un tablero de ajedrez, podemos definir a la distancia entre dos casillas, como el mínimo número de jugadas que necesita el rey para pasar de una casilla a otra. En este sentido, si $r=2$ y $a=4R$ entonces $S(a,r)=\{ 6CR, 5CR, 4CR, 3CR, 2CR, 6AR, 2AR, 6R, 2R, 6D, 2D, 6AD, 5AD, 4AD, 3AD, 2AD \}$, como se ilustra en la figura 5. \square

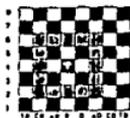


fig 5

Definición 2.3 $B(a,r)$ denota a la bola abierta con centro a y radio r , y consiste de todos los puntos p que se encuentran a una distancia menor a r del centro a :

$$B(a,r) = \{ p \in X / \rho(p,a) < r \}.$$

Ejemplo 2 Continuando con el ejemplo 1 tenemos que $S(4R,2)=\{5AR, 5R, 5D, 4AR, 4R, 4D, 3AR, 3R, 3D\}$ (fig 6). \square



fig 6

Definición 2.4 $\bar{B}(a,r)$ denota a la bola cerrada con centro a y radio r , y consiste de todos los puntos que se encuentran a una distancia menor o igual a r del centro a , es decir,

$$\bar{B}(a,r) = \{ p \in X / \rho(p,a) \leq r \}.$$

Ejemplo 3 En el caso de la métrica definida anteriormente para el tablero de ajedrez podemos observar el hecho de que $B = \text{SUB}$:

$$\begin{aligned} B(a,r) &= B(a,r) \cup S(a,r) \\ &= \{ 5AR, 5R, 5D, 4AR, 4R, 4D, 3AR, 3R, 3D \} \cup \\ &= \{ 6CR, 5CR, 4CR, 3CR, 2CR, 6AR, 2AR, 6R, 2R, 6D, \\ &\quad 2D, 6AD, 5AD, 4AD, 3AD, 2AD \} \\ &= \{ 6CR, 6AR, 6R, 6D, 6AD, 5CR, 5AR, 5R, 5D, 5AD, \\ &\quad 4CR, 4AR, 4R, 4D, 4AD, 3CR, 3AR, 3R, 3D, 3AD \\ &\quad 2CR, 2AR, 2R, 2D, 2AD \}. \end{aligned}$$

Esto se visualiza en la figura 7. □

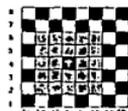


fig 7

Los conceptos anteriores deben relacionarse al espacio métrico de que se trate, es decir, a la naturaleza de los objetos que contiene y a la definición de distancia que se contemple. A continuación se dan algunos ejemplos de espacios métricos importantes.

Ejemplo 4 Sea $X = \mathbb{R}$ donde \mathbb{R} es el conjunto de todos los números reales. Si $x \in X$ y $y \in X$, defínase $\rho(x,y) = |x-y|$ (fig 8). Es fácil comprobar que los axiomas métricos son satisfechos.

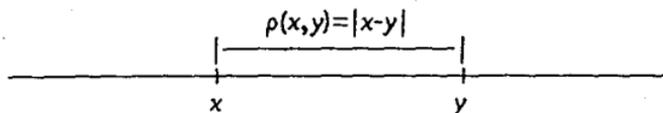


fig 8

$$M1) \rho(x, x) = |x - x| = |0| = 0$$

$$M2) \rho(x, y) = |x - y| = |y - x| = \rho(y, x)$$

$$M3) \text{ Si } a = x - y \quad \text{y} \quad b = y - z \quad \text{tenemos}$$

$$(|a|+|b|)^2 = |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \geq a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 = |a+b|^2$$

de donde $|a|+|b| \geq |a+b|$. Entonces

$$\rho(x,y) + \rho(y,z) = |x-y| + |y-z| \geq |x-y+y-z| = |x-z| = \rho(x,z)$$

y así $\rho(x,y) + \rho(y,z) \geq \rho(x,z)$.

Inmediatamente podemos observar que en la recta real para un punto cualquiera a resulta que

$$\begin{aligned} S(a,r) &= \{ a-r, a+r \}, \\ B(a,r) &=] a-r : a+r [\\ B(a,r) &= [a-r : a+r]. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 5 El Espacio Euclidiano E_n

Sea X un espacio vectorial n -dimensional con producto interno. Si $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ y $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \in X$ y definimos

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{i=1}^n (\xi_i - \eta_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

claramente los axiomas de métrica son satisfechos:

$$M1) \rho(x,x) = \left(\sum_{i=1}^n (\xi_i - \xi_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n 0^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$M2) \rho(x,y) = \left(\sum_{i=1}^n (\xi_i - \eta_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n (\eta_i - \xi_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \rho(y,x)$$

M3) Para probar la desigualdad del triángulo nos ayudamos definiendo a a_i como la diferencia entre los i -ésimos componentes de los vectores x y y , y a b_i como la diferencia por componentes entre los vectores y y z , es decir, $a_i = \xi_i - \eta_i$ y $b_i = \eta_i - \chi_i$, en donde

$$x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n),$$

$$y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n),$$

$$z = (\chi_1, \chi_2, \chi_3, \dots, \chi_n).$$

Entonces debemos demostrar que $|a|+|b| \geq |a+b|$ pues tendríamos

$$\begin{aligned} \rho(x,y) + \rho(y,z) &= (\sum(\xi_i - \eta_i)^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum(\eta_i - \chi_i)^2)^{\frac{1}{2}} = \\ &= (\sum a_i^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum b_i^2)^{\frac{1}{2}} = \\ &= ||a|| + ||b|| \geq ||a+b|| = \\ &= (\sum(a_i + b_i)^2)^{\frac{1}{2}} = \\ &= (\sum((\xi_i - \eta_i) + (\eta_i - \chi_i))^2)^{\frac{1}{2}} = \\ &= (\sum(\xi_i - \chi_i)^2)^{\frac{1}{2}} = \rho(x,z), \end{aligned}$$

de donde $\rho(x,y) + \rho(y,z) \geq \rho(x,z)$. Ahora, la relación encerrada arriba es verdadera,

$$\begin{aligned} (||a|| + ||b||)^2 &= ||a||^2 + 2 ||a|| ||b|| + ||b||^2 \\ &\geq a \cdot a + 2a \cdot b + b \cdot b \\ &= (a+b) \cdot (a+b) \\ &= ||a+b||^2. \end{aligned}$$

Parecería que estamos haciendo una pequeña trampa cuando utilizamos la desigualdad $||a|| ||b|| \geq a \cdot b$; esto puede ser probado por tomando el producto punto del vector c consigo mismo, donde $c = (b \cdot a)a - (a \cdot a)b$;

$$\begin{aligned} 0 \leq ||c||^2 = c \cdot c &= ((b \cdot a)a - (a \cdot a)b) \cdot ((b \cdot a)a - (a \cdot a)b) \\ &= (b \cdot a)(a \cdot (b \cdot a)a - (a \cdot a)b) - (a \cdot a)(b \cdot (b \cdot a)a - (a \cdot a)b) \\ &= (b \cdot a)(a \cdot b)(a \cdot a) - (b \cdot a)(a \cdot b)(a \cdot a) - (a \cdot a)(a \cdot b)(b \cdot a) + (a \cdot a)(a \cdot a)(b \cdot b) \\ &= (a \cdot a)((a \cdot a)(b \cdot b) - (a \cdot b)(b \cdot a)) \\ &= ||a||^2 (||a||^2 ||b||^2 - |a \cdot b|^2) \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} ||a||^2 (||a||^2 ||b||^2 - |a \cdot b|^2) &\geq 0 \\ ||a||^2 ||b||^2 &\geq |a \cdot b|^2 \\ \text{y } ||a|| ||b|| &\geq |a \cdot b|. \end{aligned}$$

Un espacio dotado de esta métrica es llamado Espacio Euclidiano n -dimensional, y se simboliza por E_n . \square

Ejemplo 6 Si tomamos el caso particular en el que n es 2 tratamos con la geometría plana. En este ejemplo mostramos como con un mismo conjunto, podemos formar diferentes espacios métricos al definir diferentes métricas. Sean,

$$\begin{aligned} \rho_1(x_1, x_2) &= |x_1| + |x_2| && \text{distancia } l_1 \\ \rho_2(x_1, x_2) &= (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} && \text{distancia } l_2 \\ \rho_3(x_1, x_2) &= \max \{ |x_1|, |x_2| \} && \text{distancia } l_\infty. \end{aligned}$$

Vamos a verificar rápidamente las condiciones de métrica para ρ_1 y ρ_3 , para ρ_2 las condiciones fueron verificadas en el ejemplo anterior. Para ρ_1 tenemos que

$$\rho_1(x, x) = |x| + |x| = 2|x|, \quad 2|x| = 0 \iff x=0,$$

$$\rho_1(x, y) = |x| + |y| = |y| + |x| = \rho_1(y, x), \quad y$$

$$\rho_1(x, y) \leq |x| + |y| + |z| + |z| = |x| + |z| + |y| + |z| = \rho_1(x, z) + \rho_1(y, z);$$

y para ρ_3 se tiene

$$\rho_3(x, x) = \max \{ |x|, |x| \} = |x|, \quad |x|=0 \iff x=0,$$

$$\rho_3(x, y) = \max \{ |x|, |y| \} = \max \{ |y|, |x| \} = \rho_3(y, x), \quad y$$

$$\begin{aligned} \rho_3(x, y) &= \max \{ |x|, |y| \} \leq \max \{ |x| + |z|, |y| + |z| \} \\ &\leq \max \{ |x|, |z| \} + \max \{ |y|, |z| \} \\ &= \rho_3(x, z) + \rho_3(y, z), \end{aligned}$$

la última desigualdad se justifica por lo siguiente:

$$\begin{aligned} |x| &\leq \max \{ |x|, |z| \}, \\ |y| &\leq \max \{ |y|, |z| \}, \\ |z| &\leq \max \{ |y|, |z| \}, \\ |z| &\leq \max \{ |x|, |z| \}; \end{aligned}$$

sumando las desigualdades anteriores por parejas tenemos que

$$|x|+|z| \leq \max \{|x|, |z|\} + \max \{|y|, |z|\},$$

$$|y|+|z| \leq \max \{|y|, |z|\} + \max \{|x|, |z|\},$$

por lo que satisfacemos la desigualdad del triángulo para ρ_3 .

Podemos referirnos a este tipo de espacios métricos como espacios l_p . Para esquematizar mejor el concepto de estos espacios mostramos la figura 9, en ella podemos observar el comportamiento de una esfera de radio unitario cuando se compara en diferentes espacios l_p . Si $p=1$, en el plano R^2 la esfera esta representada por un rombo, incrementando el valor de p , podemos ver cómo el area formada por los puntos interiores a la esfera comienza a crecer, convirtiéndose, al llegar a $p=2$, en una circunferencia; y cuando hacemos tender p a ∞ nuestra esfera de radio unitario se representa por un cuadrado. Observe cómo los puntos de intersección de las diferentes esferas con los ejes son los mismos. □

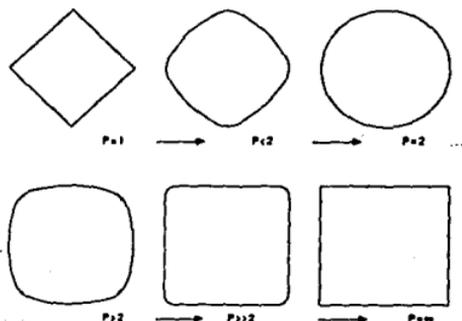


fig 9

Ejemplo 7 El espacio de funciones continuas con la métrica de separación máxima. Sea X el conjunto de todas las funciones continuas definidas en el intervalo $[0,1]$ y defínase, para cualquier par (x,y) de funciones $x,y \in X$,

$$\rho(x,y) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)|.$$

Se está tomando como distancia entre las funciones x y y en X a la máxima separación de sus gráficas (ver figura 10).

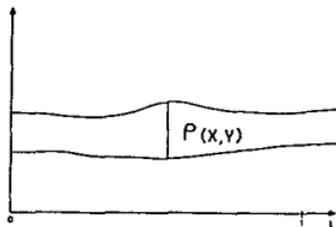


fig 10

Claramente $\rho(x, y) \geq 0$ y $\rho(x, y) = 0$ si y sólo si $x(t) = y(t)$. Verifiquemos pues la desigualdad del triángulo. Tenemos,

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, 1], \quad |x(t) - z(t)| &= |(x(t) - y(t)) + (y(t) - z(t))| \\ &\leq |x(t) - y(t)| + |y(t) - z(t)| \\ &\leq \max |x(t) - y(t)| + \max |y(t) - z(t)| \\ &= \rho(x, y) + \rho(y, z) \end{aligned}$$

por consiguiente $\rho(x, z) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - z(t)| \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Al conjunto de funciones continuas así definido se le denomina espacio de funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$, denotado por $C[0, 1]$. \square

2.2.1 Espacios L_p

Definición 2.5 .- Si la n -ésima potencia de $|x(t)|$ es integrable, donde $0 \leq t \leq 1$, se dice que $x(t)$ es de clase $L_p(0, 1)$; es decir, $x(t) \in L_p(0, 1)$ si y sólo si

$$\int_0^1 |x(t)|^p dt < \infty.$$

Tomaremos como convención $1 \leq p < \infty$; el caso $p = \infty$ se trabaja en forma particular. Si $x(t)$ y $y(t)$ son de clase $L_p(0, 1)$, entonces $x(t) + y(t)$ también lo es. En efecto, si a y b son números reales se cumple que $|a+b| \leq |a| + |b|$;

si $|a| < |b|$ se obtiene

$$|a+b| \leq 2|b|,$$

luego

$$|a+b|^p \leq 2^p (|a|^p + |b|^p);$$

similarmemente, si $|b| < |a|$ el resultado es

$$|a+b|^p \leq 2^p (|a|^p + |b|^p).$$

Si $a=x(t)$ y $b=y(t)$, entonces $|x(t)+y(t)|^p \leq 2^p (|x(t)|^p + |y(t)|^p)$, de donde, por linealidad de la integral

$$\begin{aligned} \int_0^1 |x(t)+y(t)|^p dt &\leq 2^p \left[\int_0^1 |x(t)|^p dt + \int_0^1 |y(t)|^p dt \right], \\ &\leq 2^p (k_1 + k_2), \end{aligned}$$

donde k_1 y k_2 son números reales positivos, y así la suma $x(t)+y(t)$ es de clase $L_p(0,1)$.

A continuación mostraremos porque podemos referirnos a L_p como espacio métrico:

Definamos

$$\rho(x,y) = \left[\int_0^1 |x(t)-y(t)|^p dt \right]^{1/p}$$

y probemos la validez de los axiomas de métrica para este espacio.

$$M1) \left[\int_0^1 |x(t)-x(t)|^p dt \right]^{1/p} = \left[\int_0^1 0 dt \right]^{1/p} = 0$$

$$M2) \left[\int_0^1 |x(t)-y(t)|^p dt \right]^{1/p} = \left[\int_0^1 |y(t)-x(t)|^p dt \right]^{1/p}$$

M3) Para demostrar la desigualdad del triángulo — en este caso llamada desigualdad de Minkowski — nos ayudaremos de la desigualdad de Hölder, la cual enunciamos como sigue:

$$\int_0^1 |x(t) y(t)| dt \leq \left[\int_0^1 |x(t)|^p dt \right]^{1/p} \left[\int_0^1 |y(t)|^q dt \right]^{1/q}$$

donde $1/p+1/q=1$.

Mostraremos primero esta última desigualdad. Consideremos la función $\tau=t^a$ con $a>0$. Se tiene $\tau'=at^{a-1}>0$ para $t>0$, por lo que $\tau=t^a$ es una función creciente, para cualquier número positivo t , de este modo, la función inversa $t=\tau^{1/a}$ puede ser definida. Dados dos números reales positivos ξ y η , considérense las rectas $t=\xi$ y $\tau=\eta$, y la gráfica $\tau=t^a$ como en la figura 11.

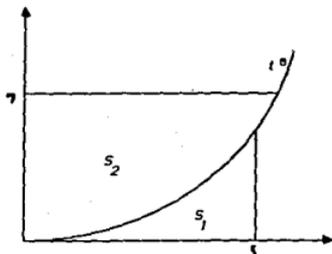


fig 11

Se han determinado dos "regiones" acotadas por segmentos y curvas cuyas áreas están dadas por

$$S_1 = \int_0^{\xi} t^a dt = \frac{\xi^{a+1}}{a+1}, \quad S_2 = \int_0^{\eta} \tau^{1/a} d\tau = \frac{\eta^{1/(a+1)}}{1/(a+1)}.$$

Es fácil observar que la suma de las áreas de estas dos regiones satisface que $S_1+S_2 \geq \xi\eta$, mientras que la igualdad se cumple si $\eta=\xi^a$, de forma que

$$\xi\eta \leq \frac{\xi^{a+1}}{a+1} + \frac{\eta^{1+1/a}}{1+1/a}.$$

Escribiendo $p=1+a$ y $q=1+1/a$ entonces $1/p+1/q=1$ (cuando p y q se encuentran así relacionados se dice que son conjugados el uno del otro). Obviamente, si $p>1$ entonces $q>1$, por lo que

$$\xi\eta \leq \frac{\xi^p}{p} + \frac{\eta^q}{q}.$$

Ahora tómense $x(t) \in L_p(0,1)$ y $y(t) \in L_p(0,1)$ y sean

$$\xi = \frac{|x(t)|}{\left[\int_0^1 |x(t)|^p dt \right]^{1/p}} \quad \text{y} \quad \eta = \frac{|y(t)|}{\left[\int_0^1 |y(t)|^q dt \right]^{1/q}}.$$

por la desigualdad anterior se obtiene

$$\frac{|x(t)| |y(t)|}{\left[\int_0^1 |x(t)|^p dt \right]^{1/p} \left[\int_0^1 |y(t)|^q dt \right]^{1/q}} \leq \frac{|x(t)|^p}{p \int_0^1 |x(t)|^p dt} + \frac{|y(t)|^q}{q \int_0^1 |y(t)|^q dt};$$

integrando ambos lados de la expresión resulta que

$$\frac{\int_0^1 |x(t)| |y(t)| dt}{\left[\int_0^1 |x(t)|^p dt \right]^{1/p} \left[\int_0^1 |y(t)|^q dt \right]^{1/q}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

lo que implica que

$$\int_0^1 |x(t)| |y(t)| dt \leq \left[\int_0^1 |x(t)|^p dt \right]^{1/p} \left[\int_0^1 |y(t)|^q dt \right]^{1/q}$$

con lo cual demostramos la desigualdad de Hoelder.

Ahora estamos listos para demostrar la desigualdad de Minkowski. Si $x(t), y(t) \in L_p(0,1)$ entonces:

$$\left[\int_0^1 |x(t) + y(t)|^p dt \right]^{1/p} \leq \left[\int_0^1 |x(t)|^p dt \right]^{1/p} + \left[\int_0^1 |y(t)|^p dt \right]^{1/p}$$

Si $z(t) \in L_p(0,1) \Rightarrow |z(t)|^{p-1} \in L_q(0,1)$ debido a que

$$\begin{aligned} (|z(t)|^{p-1})^q &= |z(t)|^{(p-1)p/(p-1)} = |z(t)|^p \\ \Rightarrow |z(t)|^{(p-1)q} &\text{ es una función integrable.} \end{aligned}$$

Tomando a $|x(t)+y(t)|^p$ como $|x(t)+y(t)|^{p-1}|x(t)+y(t)|$, separando la integral resultante y aplicando, en dos ocasiones la desigualdad de Hölder a la función $|x(t)+y(t)|^{p-1} \in L_q(0,1)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 |x(t)+y(t)|^p dt &\leq \int_0^1 |x(t)+y(t)|^{p-1} |x(t)| dt + \int_0^1 |x(t)+y(t)|^{p-1} |y(t)| dt \\ &\leq \left[\int_0^1 |x(t)+y(t)|^{(p-1)q} dt \right]^{1/q} \left[\int_0^1 |x(t)|^p dt \right]^{1/p} + \\ &\quad + \left[\int_0^1 |x(t)+y(t)|^{(p-1)q} dt \right]^{1/q} \left[\int_0^1 |y(t)|^p dt \right]^{1/p} \\ &= \left[\int_0^1 |x(t)+y(t)|^p dt \right]^{1/q} \left[\left[\int_0^1 |x(t)|^p dt \right]^{1/p} + \left[\int_0^1 |y(t)|^p dt \right]^{1/p} \right] \end{aligned}$$

tomado en cuenta que $1-1/q=1/p$ y dividiendo la desigualdad entre

$$\left[\int_0^1 |x(t)+y(t)|^p dt \right]^{1/q},$$

se obtiene

$$\left[\int_0^1 |x(t)+y(t)|^p dt \right]^{1/p} \leq \left[\int_0^1 |x(t)|^p dt \right]^{1/p} + \left[\int_0^1 |y(t)|^p dt \right]^{1/p}.$$

es decir, $(|x|+|y|)_p \leq |x|_p + |y|_p$. □

Otro espacio métrico con el cual trabajaremos significativamente son los espacios l_p , los cuales se definen a continuación.

Definición 2.6 Sea X el conjunto de sucesiones de números reales $\{\xi_1, \xi_2, \dots\}$. Sea $x = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ y $y = \{\eta_1, \eta_2, \dots\}$; entonces definimos la distancia entre x y y por

$$\rho(x, y) = \left(\sum |\xi_i - \eta_i|^p \right)^{1/p}.$$

Un espacio así definido se denomina espacio l_p .

Una vez más los axiomas se cumplen. Es inmediato verificar que $\rho(x,y) \geq 0$ y $\rho(x,y) = 0$ si y sólo si $x=y$, y que $\rho(x,y) = \rho(y,x)$. La demostración de la desigualdad del triángulo se sigue de la desigualdad de Minkowski para sumas, la cual tendría una demostración análoga a la anterior, sólo que en término de sumatorias. Toma especial importancia en las matemáticas modernas el caso particular en que $p=2$, el espacio l_2 . Continuaremos mostrando algunos otros ejemplos de espacios métricos relevantes.

Ejemplo 8 Sea $X \neq \emptyset$ el conjunto de los números complejos, y para $x, y \in X$ defínase $\rho(x,y) = |x-y|$, entonces la pareja (X, ρ) forma un espacio métrico. \square

Ejemplo 9 Sea X un conjunto y ρ una métrica sobre X . Entonces la siguiente función de $X \cdot X$ a \mathbb{R} también es una métrica:

$$\nu(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}, \quad \forall x, y \in X.$$

Observe que este ejemplo trata de la obtención de nuevas métricas a partir de métricas ya existentes, ρ es cualquier métrica definida sobre X .

M1) Si $\nu(x,y) = 0$, entonces necesariamente $\rho(x,y) = 0$. Como ρ es métrica entonces $x=y$. Por otro lado, si $x=y$, entonces $\rho(x,y) = 0$, de donde

$$\nu(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

M2) Ya que ρ es métrica, $\rho(x,y) = \rho(y,x)$, por lo que

$$\nu(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} = \frac{\rho(y,x)}{1+\rho(y,x)} = \nu(y,x).$$

M3) Si x es diferente de y , entonces, ya que ρ es métrica, tenemos $0 < \rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(y,z)$, por lo que

$$\frac{1}{\rho(x,y)} \geq \frac{1}{\rho(x,z) + \rho(y,z)} > 0.$$

Así, vemos que

$$\frac{1+\rho(x,y)}{\rho(x,y)} = \frac{1}{\rho(x,y)} + 1 \geq \frac{1}{\rho(x,z)+\rho(y,z)} + 1 = \frac{1+\rho(x,z)+\rho(y,z)}{\rho(x,z)+\rho(y,z)},$$

de donde, tomando recíprocos,

$$\begin{aligned} \nu(x,y) &= \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} \leq \frac{\rho(x,z)+\rho(y,z)}{1+\rho(x,z)+\rho(y,z)} = \frac{\rho(x,z)}{1+\rho(x,z)+\rho(y,z)} + \frac{\rho(y,z)}{1+\rho(x,z)+\rho(y,z)} \\ &\leq \frac{\rho(x,z)}{1+\rho(x,z)} + \frac{\rho(y,z)}{1+\rho(y,z)} = \nu(x,z) + \nu(y,z). \end{aligned}$$

Si $x=y$, como $\nu(x,y)=0$, la desigualdad del triángulo es trivial. \square

2.3 CONVERGENCIA

Continuando con nuestro esquema, daremos las bases necesarias para poder trabajar con lo que son espacios métricos completos. Para ello nos internaremos en el significado de límites y convergencia, además de proporcionar la definición de una sucesión de Cauchy en un espacio métrico completo.

Definición 2.7 .- Un elemento x de un espacio métrico X es llamado límite de una sucesión de elementos $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ de X si $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. En este caso escribimos $x_n \rightarrow x$ o $\lim x_n = x$. Se dice que una sucesión converge, o es convergente, si ρ tiene un límite (fig 12).

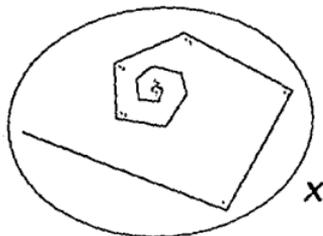


fig 12

Una propiedad derivada de la definición de distancia a la teoría de límites es que una sucesión sólo puede tener un límite, en cualquier espacio métrico. La propiedad es resultado de los axiomas de la

definición de distancia.

$$\rho(P, Q) \leq \rho(P, x_n) + \rho(Q, x_n)$$

pero, por hipótesis cada uno de los términos del lado derecho tienden a 0 cuando n se incrementa por lo que $\rho(P, Q) = 0$ y $P = Q$. Por tanto, sólo existe un límite en la sucesión. \square

Otra propiedad derivada de la definición de distancia se puede observar en el siguiente teorema:

Teorema 2.1 Si una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de un espacio métrico X converge a un punto x en X , entonces es acotada en el siguiente sentido: Para todo punto fijo θ del espacio, el conjunto de números $\rho(x_n, \theta)$ es acotado.

Dem. - Por la desigualdad del triángulo tenemos que para todo n , $\rho(x_n, \theta) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, \theta)$; como x_n converge a x entonces $\rho(x_n, x) \leq a$ donde a es un número real no negativo, además, $\rho(x, \theta)$ también es un número fijo por tanto $\rho(x_n, \theta) \leq a + \rho(x, \theta) = k$. \square

Este teorema nos dice que la distancia de cualquier punto de la sucesión convergente $\{x_n\}$ a un punto fijo θ nunca se disparará — siempre será a lo más, un número real positivo $k < \infty$. Una definición importante en teoría de sucesiones se expresa a continuación.

Definición 2.8 Una sucesión $\{x_n\}$ donde $x_n \in X$ para todo n es llamada una sucesión de Cauchy en un espacio métrico (X, ρ) si y sólo si

$$\rho(x_n, x_m) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad n, m \rightarrow \infty;$$

es decir, que para todo $\epsilon > 0$ debe existir $n_0(\epsilon)$ tal que $\rho(x_n, x_m) < \epsilon$ siempre que $n, m > n_0(\epsilon)$. \square

Teorema 2.2 Si una sucesión $\{x_n\}$ converge a un límite x entonces es una sucesión de Cauchy.

Dem. - Sea $x = \lim x_n$. Entonces existe para todo $\epsilon > 0$ un índice $n_0(\epsilon)$ tal que

$$\rho(x_n, x) < \epsilon/2 \quad \text{para } n \geq n_0(\epsilon);$$

asimismo, existe para todo $\epsilon > 0$ otro índice $m_0(\epsilon)$ tal que

$$\rho(x_m, x) < \epsilon/2 \quad \text{para } m \geq m_0(\epsilon);$$

en consecuencia,

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) < \epsilon,$$

para $n \geq n_0$ y $m \geq m_0$, por lo que queda demostrado. \square

El teorema no es verdadero a la inversa pues existen espacios métricos en los cuales existen sucesiones fundamentales (o sucesiones de Cauchy) las cuales no convergen a un límite en el espacio. A continuación se muestran algunos ejemplos.

Ejemplo 10 Sea X el conjunto de los números racionales, y definamos la distancia entre cada par de números por

$$\rho(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|.$$

Claramente (X, ρ) es un espacio métrico. La sucesión $\{r_n\} = \{2^{-n}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\}$ es una sucesión de Cauchy en X , y converge al límite 0. Ahora, si tomamos

$$\{r_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\};$$

esta sucesión también es de Cauchy en X pero no tiene límite en X . Esto es debido a que el límite de la sucesión $\{r_n\}$ cuando $n \rightarrow \infty$ es el número neperiano e , y sí es una sucesión de Cauchy, pero el número e no es un número racional, por tanto $\{r_n\}$ no tiene límite en X . \square

La figura 13 muestra una sucesión de Cauchy en el plano. Si escogemos un punto de la sucesión cualquiera x_0 , y dibujamos un círculo con centro x_0 y radio E_1 tal que contenga a todos los puntos de la sucesión con índices mayores o iguales que a , entonces la definición nos dice que existirá un punto posterior x_1 ($a < b$) tal que todos los puntos posteriores a x_1 caerán dentro de un círculo de radio más pequeño E_2 y con centro x_1 . Del mismo modo, la definición nos asegura que existirán puntos posteriores a x_1 donde $b < c$ tal que todos los puntos posteriores a x_2 caerán en un círculo aún más pequeño con centro x_2 y así sucesivamente. Los círculos seguirán haciéndose más y más pequeños hasta que se identifique un único punto, el cual es el límite de la sucesión. La figura sólo muestra el caso de dos dimensiones, pero nos ayuda mucho para visualizar el significado de una sucesión de Cauchy en cualquier espacio métrico.

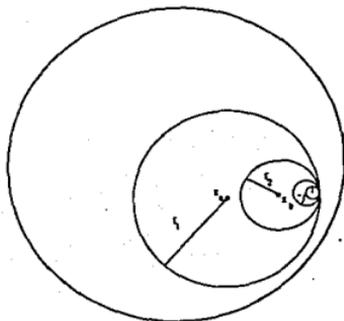


fig 13

Definición 2.9 Un espacio métrico (X, ρ) es llamado completo si y sólo si toda sucesión de Cauchy converge a un punto en X . Explícitamente, requerimos que si $\rho(x_n, x_m) \rightarrow 0$ cuando $n, m \rightarrow \infty$, entonces exista $x \in X$ tal que $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. \square

Los espacios \mathbb{R}^n , \mathcal{C} , $C[a, b]$, \mathbb{I}_p y \mathbb{I}_p son espacios métricos completos. Un ejemplo de un espacio métrico que no es completo es el espacio de números racionales con $\rho(x, y) = |x - y|$: por ejemplo, la sucesión 1.4, 1.41, 1.414 es una sucesión de Cauchy en \mathbb{Q} pero no es convergente en \mathbb{Q} debido a que $\sqrt{2}$ no es elemento de \mathbb{Q} . La verificación

de cuando un espacio métrico es completo es muy parecida en casi todos los espacios, por lo que sólo daremos la demostración de que \mathbb{R} es completo con su métrica usual.

Ejemplo 11 Sea x_1, x_2, x_3, \dots una sucesión en \mathbb{R} con la propiedad de que $|x_n - x_m|$ se aproxima a cero cuando m y n se incrementan. Entonces existe un número positivo N con $|x_n - x_m| < 1$ para $m, n > N$. Esto implica que toda la sucesión cae dentro del subconjunto de reales

$$\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\} \cup [x_n - 1, x_n + 1],$$

y así la sucesión está acotada; por el teorema de Bolzano-Weierstrass existe una subsucesión convergente $x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, \dots \rightarrow x$. Ahora bien,

$$0 \leq |x_n - x| \leq |x_n - x_{k_n}| + |x_{k_n} - x|,$$

con

$|x_n - x_{k_n}| \rightarrow 0$ pues $|x_n - x_m| \rightarrow 0$ para n y m suficientemente grandes; y

$|x_{k_n} - x| \rightarrow 0$ pues $x_{k_n} \rightarrow x$.

Así, $|x_n - x| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$; es decir $x_1, x_2, \dots \rightarrow x$. De esta forma la condición $|x_n - x_m| \rightarrow 0$ cuando $m, n \rightarrow \infty$ asegura la convergencia de la sucesión x_1, x_2, \dots en \mathbb{R} , y por tanto \mathbb{R} es completo. \square

2.4 ESPACIOS VECTORIALES NORMADOS

Para seguir avanzando en la dirección de dar una mayor aplicación a los resultados obtenidos en el cálculo tradicional, trataremos ahora con vectores, para poder usar métodos y conceptos tradicionales en espacios más generalizados como pueden ser el espacio de las funciones continuas en un cierto intervalo, o el espacio de polinomios de grado menor o igual a n , o también aplicaciones al cálculo de varias variables.

Un espacio vectorial envuelve ciertos elementos los cuales pueden ser referidos como vectores, y ciertas operaciones entre ellos, como la suma de vectores y la multiplicación por un escalar. Tomando la norma de un vector como la longitud del mismo, entonces los siguientes axiomas son muy razonables:

- N1) Para todo vector x , está asociado un número real $||x||$ denominado 'la norma de x ',
N2) $||x|| \geq 0$,
N3) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x=0$,
N4) Si k es cualquier número real $||kx|| = |k| ||x||$,
N5) $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Definición 2.10 A un espacio vectorial en el cual se ha definido una norma y el cual satisface los axiomas N1 a N5 se le denomina espacio vectorial normado.

Si tenemos un espacio vectorial normado V siempre puede definirse una métrica en él por

$$\rho(x,y) = ||x-y|| \text{ donde } x \text{ y } y \in V,$$

entonces podemos ver a un espacio vectorial normado como un espacio métrico particular, y por tanto, como un espacio topológico. De esta forma podemos extender todos los conceptos y resultados topológicos al espacio en cuestión. La función ρ se dice que es la métrica de V inducida por la norma en V .

Ejemplo 12 Si $p=(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, entonces $\|p\|$ corresponde en forma precisa a la "longitud" de la flecha (o vector) trazada del origen al punto p , como se ilustra en la figura 14. \square

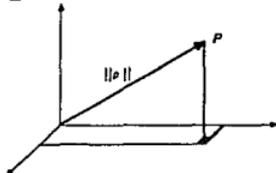


fig 14

Ejemplo 13 Recordando el ejemplo 6 de la sección 2.2 existen normas vectoriales muy usuales que son inducidas por las métricas de los espacios \mathbb{I}_p , esto es

$$\|v\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i| \quad \rightarrow \text{norma } \mathbb{I}_{\infty} \text{ o norma del supremo,}$$

$$\|v\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i| \quad \rightarrow \text{norma } \mathbb{I}_1 \text{ o norma del menor residual absoluto,}$$

$$\|v\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n (v_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \text{norma } \mathbb{I}_2 \text{ o norma de mínimos cuadrados o euclidiana.} \quad \square$$

En nuestra discusión de convergencia entenderíamos que una sucesión de vectores $\{v_k\}$ converge a un vector v^* cuando para una cierta norma

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k - v^*\| = 0;$$

desafortunadamente podría suceder que convergiéramos en una norma a v^* pero en otra norma no, es decir, dependería del criterio de convergencia. En particular, en \mathbb{R}^n no se tiene este problema debido al siguiente resultado, el cual no es verdadero en general para espacios infinito dimensionales.

Teorema 2.3 Sean $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ dos normas cualesquiera en \mathbb{R}^n . Entonces existen constantes α y β tal que

$$\alpha \|v\| \leq \|v\|' \leq \beta \|v\|$$

para cualquier vector $v \in \mathbb{R}^n$. Mas aún, si $\{v_k\}$ es cualquier sucesión en \mathbb{R}^n , entonces para $v^* \in \mathbb{R}^n$

$$\lim \|v_k - v^*\| = 0$$

si y sólo si para cada i , $1 \leq i \leq n$, la sucesión $(v_k)_i$ de las i -ésimas componentes de los vectores v_k convergen al i -ésimo componente $(v^*)_i$ de v^* . \square

Omitimos la prueba de este teorema debido a que no es parte central de nuestro estudio; no obstante damos el siguiente par de relaciones para ejemplificarlo:

$$\begin{aligned} \|v\|_1 &\geq \|v\|_2 \geq \dots \geq \|v\|_\infty, \\ \|v\|_1 &\leq n^{1/2} \|v\|_2 \leq \dots \leq n \|v\|_\infty. \end{aligned}$$

La conclusión importante del teorema 2.3 es que, en la implementación de algún algoritmo, la elección de la norma comunmente no afecta en forma seria el resultado, por lo que es usual que su selección esté basada en la conveniencia del problema particular. Ahora pasemos a mostrar uno de los principales espacios vectoriales normados en el cálculo tradicional.

Ejemplo 14 El espacio $C[a,b]$ de funciones continuas en el intervalo $[a,b]$, para el cual las operaciones vectoriales se definen como $f+g$ es la función continua definida en $[a,b]$ por $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, y $k(f)$ es la función definida en $[a,b]$ por $(kf)(x)=k(f(x))$. Además,

$$\|f\| = \max \{ |f(x)| : x \in [a,b] \} = \sup \{ |f(x)| : x \in [a,b] \}.$$

$C[a,b]$ es un espacio vectorial normado. Y, si en el definimos una métrica, digamos

$$\rho(f,g) = \|f - g\| = \max_{x \in [a,b]} \{ |f(x) - g(x)| \},$$

entonces podemos afirmar que $C[a,b]$ es un espacio vectorial métrico.

Para verificar los axiomas de espacio vectorial normado, analizamos el significado de la definición de la norma para este espacio. En este espacio decimos que la norma de una función es la longitud máxima que se aleja la imagen de f en $[a,b]$ de la función cero. Por tanto sabemos que la norma será siempre un valor al menos cero, cumpliendo nuestro axioma dos. Si tratamos con la función cero, no tenemos ningún problema de afirmar que su norma será cero, inversamente si el máximo valor absoluto de la imagen de una función es cero, esto quiere decir necesariamente que estamos tratando con la función cero. Verificamos N4 para $x \in [a,b]$:

$$||mf(x)|| = \max \{|mf(x)|\} = \max \{|m| |f(x)|\} = |m| \max \{|f(x)|\}$$

De esta forma sólo nos resta verificar el último axioma de un espacio vectorial normado. Sabemos que para toda $x \in [a,b]$, tenemos:

$$\begin{aligned} |f(x)+g(x)| &\leq |f(x)|+|g(x)| \\ &\leq \max |f(x)|+|g(x)| \\ &\leq \max |f(x)|+\max |g(x)|, \end{aligned}$$

de forma que

$$\begin{aligned} ||f+g|| &= \max |f(x)+g(x)| \\ &\leq \max |f(x)|+\max |g(x)| \\ &\leq ||f||+||g||. \end{aligned}$$

La demostración de que además contamos con un espacio métrico fué dada en el ejemplo 7 cuando utilizamos la métrica de Chebyshev. \square

Los espacios normados en los cuales toda sucesión de Cauchy es convergente son de interés particular en análisis; en tales espacios es posible identificar sucesiones convergentes sin conocer explícitamente sus límites. Como vimos en la definición 2.9, un espacio en el que toda sucesión de Cauchy tiene un límite (y por tanto convergente) se dice que es completo. Esto lo aplicamos en espacios vectoriales en la siguiente definición.

Definición 2.11 Un espacio vectorial normado X es completo si toda sucesión de Cauchy de X tiene un límite en X . Un espacio vectorial normado completo es llamado "espacio de Banach". \square

La principal ventaja de los espacios de Banach en problemas de optimización es que, cuando buscamos un vector óptimo que hace máxima una función objetivo dada, frecuentemente construimos una sucesión de vectores, donde cada uno es superior al precedente; el vector óptimo deseado es entonces el límite de la sucesión. Para que este esquema sea efectivo, debemos contar con una prueba de convergencia que pueda ser aplicada cuando el límite es desconocido. El criterio de Cauchy para convergencia nos provee de este requerimiento cuando el espacio es completo. Para clarificar mejor la idea de un espacio vectorial completo consideremos el siguiente ejemplo de un espacio vectorial normado incompleto.

Ejemplo 15 Sea X el espacio de funciones continuas en $[0,1]$ con la norma definida por $\|x\| = \int_0^1 |x(t)| dt$. Note que este espacio no es el espacio $C[0,1]$ puesto que su norma es diferente — sin embargo, puede verificarse fácilmente que también es un espacio vectorial normado. Mostraremos que X es incompleto. Definamos una sucesión de elementos en X por la ecuación

$$x_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ nt - \frac{n}{2} + 1 & \text{para } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{para } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Esta sucesión de funciones está ilustrada en la figura 15. Cada miembro de la sucesión es una función continua y por ende miembro de X . Asimismo, la sucesión es de Cauchy como es fácil verificar,

$$\|x_n - x_m\| = \frac{1}{2} |1/n - 1/m| \rightarrow 0.$$

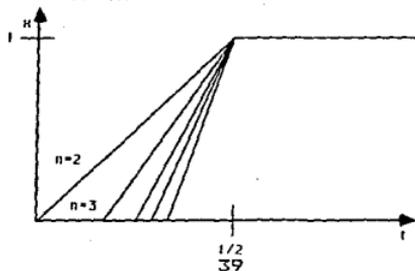


fig 15

Es obvio, sin embargo, que la función a la cual converge la sucesión no es continua, pues se trata de la función

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } t \geq \frac{1}{2} \end{cases} . \quad \square$$

Contrariamente a lo anterior consideremos el siguiente importante resultado.

Ejemplo 16 $C[0,1]$ es un espacio de Banach.

En el ejemplo 14 validamos este espacio como un espacio normado. Para probar que es completo, es tan sólo necesario demostrar que toda sucesión de Cauchy tiene un límite en el espacio. Suponemos que $\{x_n\}$ es cualquier sucesión de Cauchy en $C[0,1]$. Para cada $t \in [0,1]$ fija, $|x_n(t) - x_m(t)| \leq \|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ luego $\{x_n(t)\}$ es una sucesión de Cauchy de números reales. Sabemos del ejemplo 11 que el conjunto de los números reales es completo por lo que $x_n(t) \rightarrow x(t)$ y, por tanto, las funciones x_n convergen puntualmente a la función x .

Probamos ahora que esta convergencia punto a punto es uniforme en $C[0,1]$, es decir, que dada $\epsilon > 0$ existe un número N tal que $|x_n(t) - x(t)| < \epsilon$ para toda $t \in [0,1]$ y $n \geq N$. Dada $\epsilon > 0$, escogemos N de tal forma que $\|x_n - x_m\| < \epsilon/2$ para $n, m > N$; entonces para $n > N$,

$$\begin{aligned} |x_n(t) - x(t)| &\leq |x_n(t) - x_m(t)| + |x_m(t) - x(t)| \\ &\leq \|x_n - x_m\| + |x_m(t) - x(t)|. \end{aligned}$$

Escogiendo m suficientemente grande, cada término de la derecha puede hacerse más pequeño que $\epsilon/2$, de donde para toda t , $|x_n(t) - x(t)| < \epsilon$ para $n > N$. Debemos probar aún que la función x es continua y que la sucesión $\{x_n\}$ converge a x en la norma de $C[0,1]$. Para probar la continuidad de x , fijamos $\epsilon > 0$. Para todo δ, t y n ,

$$|x(t+\delta) - x(t)| \leq |x(t+\delta) - x_n(t+\delta)| + |x_n(t+\delta) - x(t)| + |x_n(t) - x(t)|.$$

Como $\{x_n\}$ converge en forma uniforme a x , n puede ser escogida para hacer que ambos, el primero y el último término sean menores que $\epsilon/3$ para todo δ . Como x_n es continuo, δ puede ser escogida para hacer el segundo término menor que $\epsilon/3$. Por lo tanto, x es continua. \square

En el siguiente capítulo tratamos con la forma de relacionar a los elementos de un espacio con otro, y algunas de las propiedades que nos permiten visualizar otro espacio cuyos elementos son precisamente las relaciones entre espacios, es decir un espacio de funciones.

OPERADORES LINEALES Y SUS NORMAS

3.1 INTRODUCCION

Ya hemos tratado con diferentes elementos del análisis funcional como lo son los espacios métricos, los espacios vectoriales y algunos conceptos topológicos importantes. Además, a lo largo de todo el estudio nos hemos encontrado con el concepto de función — en la mayor parte de los casos relacionando diferentes espacios con los números reales al definir métrica y norma.

Iniciaremos este capítulo proporcionando un concepto de función en donde los elementos de origen y destino provienen de cualquier conjunto; para ello rebautizaremos a las funciones como operadores, aunque también usaremos indistintamente los términos de transformaciones y aplicaciones para identificarlas. A continuación se dan ejemplos de operadores comunes y se trabaja con operadores lineales y el concepto de norma de un operador, también ejemplificándolos; finalizaremos esta primera parte dando el concepto de mapeo inverso, y algunos teoremas que tratan con mapeos inversos y la norma de operadores.

Como segundo apartado de este capítulo estudiaremos el principio de mapeos de contracción como aplicación de los operadores lineales, y en una tercera etapa se darán aplicaciones de este principio en la solución de sistemas de ecuaciones y, en la determinación de la existencia y unicidad de la solución de una ecuación integral.

3.2 OPERADORES LINEALES

Definición 3.1 Si tenemos 2 conjuntos cualesquiera X, Y definimos a O como el proceso que relaciona a cada elemento de X con un y sólo un elemento de Y ; a O se le denomina "operador de X en Y ".

Si O es un operador de X en Y y si $y \in Y$ es el elemento asociado al elemento $x \in X$, se escribe " $y=O(x)$ ", " $y=Ox$ " o, en forma simbólica,

$$x \xrightarrow{O} Y \quad ; \quad O: X \rightarrow Y. \quad \square$$

La definición de un operador así precisada implica que no puede existir ningún elemento del conjunto de origen (o dominio) que no esté relacionado con un elemento del conjunto de destino (o codominio). La figura 16 esquematiza el concepto de operador.

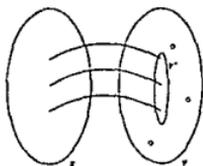


fig 16

Al conjunto $Y' \subset Y$ definido por $Y' = \{y \in Y \text{ tal que } y = Ox, x \in X\}$ se le denomina imagen de O .

Ejemplo 1 Si la imagen $O(x)$ del conjunto X tiene un solo elemento decimos que la función es constante sobre X . En este caso todos los elementos de X tienen la misma imagen para el operador O (fig 17). \square

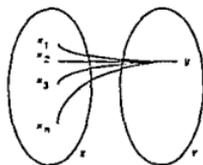


fig 17

Ejemplo 2 Al operador $I: X \rightarrow X$ que hace corresponder a todo elemento $x \in X$ el mismo elemento se denomina operador identidad; así $Ix=x$ para todo $x \in X$ (fig 18). \square

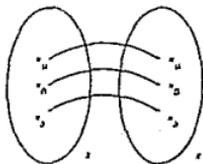


fig 18

En el cálculo tradicional, si nosotros queremos derivar algún polinomio, nos encontramos con la situación de tener que derivar términos tales como ax^n (con resultado $a(nx^{n-1})$).

La justificación formal del procedimiento de que se conserven las mismas constantes (y los mismos signos) después de aplicar la derivación descansa en 2 propiedades de la derivación: $D(u+v)=Du+Dv$, y $D(ku)=kDu$, donde D representa la operación de derivación, y k representa cualquier constante. Estas dos propiedades expresan el hecho de que D es un operador lineal — concepto que precisaremos a través de una definición más formal. Para ello consideraremos que los elementos de entrada al operador están dentro de algún espacio vectorial, es decir, que pueden ser referidos como vectores, y que además cumplen los axiomas de un espacio vectorial. De igual manera, las salidas del operador deben caer dentro de un espacio vectorial.

Definición 3.2 Si L es una función $X \rightarrow Y$, donde X y Y son espacios vectoriales, L es llamado un operador lineal si para cualesquiera vectores u, v en X , y para cualquier escalar k , tenemos $L(ku+v) = kL(u)+L(v)$ en Y . \square

Ejemplo 3 Sea el operador diferencia $T: f \rightarrow g$ donde $g(x)=f(x+h)-f(x)$.

Aquí, los elementos de entrada y salida del operador son funciones y se quiere probar que dadas dos funciones ϕ y γ , $T(k\phi(x)+\gamma(x)) = kT(\phi(x))+T(\gamma(x))$. Así,

$$\begin{aligned} T(k\phi(x)+\gamma(x)) &= k\phi(x+h)+\gamma(x+h) - (k\phi(x)+\gamma(x)) \\ &= k(\phi(x+h)-\phi(x)) + (\gamma(x+h)-\gamma(x)) \\ &= kT(\phi(x))+T(\gamma(x)). \end{aligned} \quad \square$$

Es fácil verificar que los operadores lineales $X \rightarrow Y$ forman un espacio vectorial, por lo que resulta interesante definir la norma de este particular tipo de vectores; esto lo haremos de tal forma, que la norma del vector — un operador lineal A — nos dé una cota para $\|Av\|$ en términos de $\|v\|$.

Definición 3.3 Si $A: X \rightarrow Y$ es un operador lineal, definimos $\|A\|$ como

$$\|A\| = \sup \{ \|Au\| \text{ tal que } \|u\| = 1 \}. \quad \square$$

La idea intuitiva de $\|A\|$ es medir el máximo "alargamiento" que el operador A puede producir en cualquier vector del espacio de entrada, de tal forma, que la magnitud de esta aplicación sea mayor que la de cualquier otra aplicación. Esto nos dice que la definición sería en forma precisa $\|A\| = \sup \{ \|Av\| / \|v\| : v \neq 0 \}$, pero la restricción de que el operador sea aplicado únicamente a vectores de magnitud unitaria es sólo para dar mayor simplicidad — tal restricción no afecta a la definición misma. En efecto, si $v \in X$, v puede escribirse de la forma $v = \lambda u$ con $\|u\| = 1$ (si $v \neq 0$, puede escogerse $\lambda = \|v\|$ y, si $v = 0$, entonces $\lambda = 0$). De este modo,

$$\|Av\| = \|A(\lambda u)\| = \|\lambda Au\| = |\lambda| \|Au\| \leq |\lambda| \|A\| = \|v\| \|A\|$$

Esta definición puede visualizarse como sigue: tórnense todos los puntos u de la esfera unitaria $S(0,1)$, aplíquese el operador A a cada uno y considérese la curva de superficie formada por todos los puntos Au . El radio r de la esfera más pequeña $S(0,r)$ que contiene a todos estos puntos es el valor de $\|A\|$.

Como vimos en el capítulo anterior al usar los espacios ℓ_p en el plano, $S(0,1)$ es un círculo cuando la métrica ℓ_2 es usada, un cuadrado con lados horizontales y verticales cuando la métrica ℓ_∞ es usada y un cuadrado como el anterior, pero girado 45° , si la métrica usada es ℓ_1 . Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4 Si aplicamos la transformación lineal $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

en cada una de las esferas unitarias de ℓ_1 , ℓ_2 y ℓ_∞ , observamos el siguiente efecto: En cada par de gráficas de la figura 19, la segunda

muestra las esferas que contienen a todos los puntos de salida de la transformación en cada espacio, es decir, muestran cómo la esfera unitaria se mapea al aplicar sobre ella la transformación A . Las líneas densas representan este mapeo; la norma de A está representada por la esfera que engloba cada uno de los mapeos, dibujada con líneas suaves. En (a) podemos observar cómo el rombo unitario de \mathbb{R}^2 se mapea a un paralelogramo; el rombo que envuelve a este paralelogramo representa a la esfera de radio $\|A\|$ en el espacio imagen. Algo similar ocurre con las gráficas (b) y (c). \square

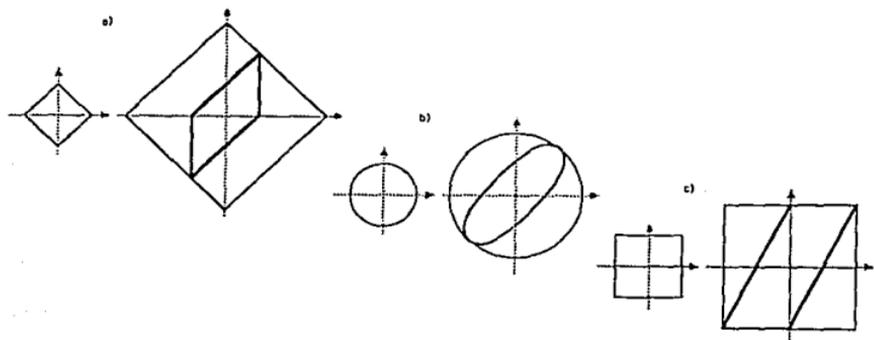


fig 19

Ahora bien, la norma de un mapeo puede ser infinita. Por ejemplo, si se considera el operador $D=d()/dx$ aplicado al espacio de polinomios definidos en el intervalo $[0,1]$, con la norma de $C[0,1]$, entonces $f(x)=x^n \Rightarrow Df(x)=f'(x)=nx^{n-1}$. Sobre $[0,1]$ ambas funciones toman su máximo en $x=1$: es decir $\|f\|=1$ y $\|Df\|=n$, lo cual implica que $\|Df\|/\|f\|=n$. Pero n puede ser arbitrariamente grande por lo que no existe cota para la norma de la transformación. Un operador con estas condiciones se dice que es no acotado. En lo que sigue centraremos nuestra atención en operadores lineales acotados, es decir, en operadores cuya norma es un número constante $k < \infty$.

Recordando los espacios \mathbb{R}^n , denotamos a $\|A\|_p$ como

$$\|A\|_p = \max_{v \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{\|Av\|_p}{\|v\|_p} \right\} \quad (v \neq 0),$$

con algunos cálculos podemos encontrar los siguientes resultados:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \{ \|a_{.j}\|_1 \},$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\text{máximo valor característico de } A^T A},$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \{ \|a_i\|_1 \}$$

donde a_i denota el i -ésimo renglón, y $a_{.j}$ la j -ésima columna.

La demostración de estas propiedades se dan como ejemplo un poco más adelante — por ahora simplemente las aplicamos al ejemplo anterior.

Ejemplo 5 Sea A como en el ejemplo 4; verifique las siguientes relaciones

$$\|A\|_1 \geq \|A\|_2 \geq \|A\|_\infty \quad \text{y} \quad \|A\|_1 \leq n^{\frac{1}{2}} \|A\|_2 \leq n \|A\|_\infty.$$

Del ejemplo 4 tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$$

entonces

$$\|A\|_1 = \max \{ \|a_{.1}\|_1, \|a_{.2}\|_1 \} = \max \{ |1|+|0|, |1|+|2| \} = 3$$

$$\begin{aligned} \|A\|_2 &= \sqrt{\max_{\lambda} \{ |A^T A - \lambda I| = 0 \}} = \sqrt{\max_{\lambda} \{ \lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0 \}} \\ &= \left(\max \{ 3 + \sqrt{5}, 3 - \sqrt{5} \} \right)^{\frac{1}{2}} = (3 + \sqrt{5})^{\frac{1}{2}} \approx 2.29, \text{ y} \end{aligned}$$

$$\|A\|_\infty = \max \{ \|a_{1.}\|_1, \|a_{2.}\|_1 \} = \max \{ |1|+|1|, |0|+|2| \} = 2$$

Estos resultados se pueden observar fácilmente en la figura 19 donde podemos notar que $\|A\|_1 = 3$, que es la distancia del origen a dos de los vértices del paralelogramo imagen — los dos vértices sobre el

rombo correspondiente a la esfera de radio 3. El que $\|A\|_2=2.29$ puede observarse en el radio del círculo que contiene a la elipse, y la $\|A\|_\infty=2$ es la longitud del origen a cualquiera de los lados del cuadrado que contiene al paralelogramo imagen. Sustituyendo, tenemos:

$$\|A\|_1 = 3 \geq \|A\|_2 = 2.29 \geq \|A\|_\infty = 2$$

y

$$\|A\|_1 = 3 \leq \sqrt{n} \|A\|_2 = 3.24 \leq n \|A\|_\infty = 4. \quad \square$$

Como ya se observó antes, el conjunto de los operadores lineales entre espacios vectoriales fijos X y Y constituye también un espacio vectorial con las operaciones lineales usuales, por lo que se le pueden aplicar todas las definiciones y métodos definidos en tales espacios. Por ejemplo, podemos formar sucesiones y series infinitas de operadores lineales acotados y aplicarles pruebas de Cauchy para analizar su convergencia.

El símbolo $B(X, Y)$ es usado para definir el espacio de operadores lineales acotados entre el espacio vectorial X y el espacio vectorial Y . Una propiedad de B es que, si Y es completo, entonces $B(X, Y)$ también lo es. Esto quiere decir que si nosotros tenemos una sucesión de Cauchy de operadores, entonces su límite existirá y se encontrará en el espacio $B(X, Y)$ — siendo también, un operador lineal acotado. Lo anterior se puede resumir diciendo que, si Y es un espacio de Banach, $B(X, Y)$ también lo es. A continuación se darán las normas de algunos operadores importantes.

Ejemplo 6 Sea $\phi: I \rightarrow \mathbb{R}$, con $\phi(x)=w$. Para determinar la norma de ϕ necesitamos el máximo de $|w|$, donde

$$w = \sum_{r=1}^n a_r x_r \quad \text{y} \quad \|x\|_\infty = 1,$$

entonces

$$|w| = \left| \sum_{r=1}^n a_r x_r \right| \leq \sum_{r=1}^n |a_r| |x_r| \leq \sum_{r=1}^n |a_r|,$$

pues $|x_r| \leq 1$, por lo que para la función ϕ tenemos $\|\phi\|_\infty = \sum_{r=1}^n |a_r|$. \square

Ejemplo 7 Sea $\phi: f_\infty \rightarrow f_\infty$. Aquí $\phi: x \rightarrow w$ donde

$$w_r = \sum_{s=1}^n a_{rs} x_s \quad \text{para } r=1, 2, \dots, m,$$

aquí $\|w\| = \max |w_r|$. Así, $\|\phi\|_\infty = \max_r \sum_{s=1}^n |a_{rs}|$.

En particular, resulta que si $w_1 = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3$ y $w_2 = x_1 + 3x_2 - 6x_3$, el máximo valor de w_1 es 9 y el de w_2 es 10, obtenidos en los puntos $x=(1, -1, 1)$ y $x=(1, 1, -1)$ de la esfera $S(0, 1)$. Como el mayor de los dos es 10, $\|\phi\|_\infty = 10$. \square

Ejemplo 8 Sea $\phi: l_1 \rightarrow \mathbb{R}$. Como en el primer ejemplo, $w = \sum a_r x_r$, pero ahora $\sum |x_r| = 1$ es la condición. Aquí

$$\|\phi\|_1 = \max |a_r|.$$

Así, si $w = 3x_1 + 10x_2 + 2x_3$, el vector $x=(0, 1, 0)$ nos da el valor máximo para w , y si tenemos $w = 3x_1 - 10x_2 + 2x_3$, $w=10$ es obtenido en $x=(0, -1, 0)$ (en ambos casos se tiene $\sum |x_r| = 1$). En consecuencia, $\|\phi\|_1 = 10$. \square

Ejemplo 9 Sea $\phi: l_1 \rightarrow l_1$. Ahora deseamos maximizar

$$\sum |w_r| \quad \text{para } w_r = \sum a_{rs} x_s \quad \text{con } \sum |x_s| = 1.$$

Este ejemplo es probablemente menos fácil que los otros, analicemos un caso particular. Si consideramos a $w_1 = 7x_1 + 2x_2$ y $w_2 = -3x_1 + 6x_2$, $|w_1| + |w_2|$ no pueden exceder a cierto número, mostramos la forma en que puede ser encontrada esta cota:

$$\begin{aligned} |w_1| + |w_2| &= |7x_1 + 2x_2| + |-3x_1 + 6x_2| \\ &\leq |7x_1| + |2x_2| + |-3x_1| + |6x_2| \\ &= 7|x_1| + 2|x_2| + 3|x_1| + 6|x_2| \\ &= 10|x_1| + 8|x_2| \end{aligned}$$

Como $|x_1| + |x_2| = 1$, la expresión anterior no puede exceder de

10 (valor que se obtiene en $x_1=1$ y $x_2=0$; con $w_1=7$ y $w_2=-3$, obteniendo $|w_1|+|w_2|=10$).

El emplear notación matricial puede aclarar aún más la situación. Si $w=Ax$ con

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix},$$

el número 10 puede ser fácilmente obtenido al sumar el valor absoluto de los números por columna (10 para la primera columna y 8 para la segunda), y tomando el mayor de los dos valores.

La conclusión es que para $\phi: x \rightarrow w$ tenemos

$$\|\phi\|_1 = \max_s \sum_{r=1}^m |a_{rs}|. \quad \square$$

Ejemplo 10 Sea $\phi: C[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, una función continua en $[a,b]$ y sea

$$c = \int_a^b \phi(x) f(x) dx.$$

Obsérvese que hemos definido un operador de $T: f \rightarrow c$ que asocia a cada función $f \in C[a,b]$ un número real c (la función ϕ esta fija). La norma de $T: f \rightarrow c$ es:

$$\|T\| = \int_a^b |\phi(x)| dx.$$

En efecto, existen funciones f en la esfera unitaria de $C[a,b]$ con valores cercanos a 1 o a -1 como se quiera dependiendo del signo de $\phi(x)$. \square

Ejemplo 11 Considérense transformaciones de $C[a,b]$ en $C[a,b]$. Para $T: f \rightarrow g$ con $g(x) = \int_a^b K(x,y) f(y) dy$ se tiene

$$\|T\| = \sup_{a \leq x \leq b} \int_a^b |K(x,y)| dy. \quad \square$$

Adelantando un poco acerca de las aplicaciones de las normas de operadores, mencionamos que en análisis numérico muchos de los problemas toman la forma "encontrar un vector w para el cual $Aw=b$ donde A es un operador lineal y b es un vector conocido". Un caso muy familiar es aquél en que A es una matriz cuadrada $n \times n$. Si A tiene inversa, entonces sabemos que $w=A^{-1}b$. En general, surgen las interrogantes de qué quiere decir que A tenga inversa; de, si existe un error en la estimación de b , como afecta a la solución w ; de qué efecto tiene A en w si A es sólo una aproximación; y de qué sucede si existe error tanto en A como en b .

La figura 20 muestra las situaciones en las cuales existe y no existe la inversa de un operador. En la situación (a) existe una correspondencia uno a uno entre las entradas y salidas del operador. La inversa del operador A , $A^{-1}:v \rightarrow w$ se encuentra definida para cada salida v de A correspondiente a cada entrada w . En la situación (b), $Aw_2=Aw_3=v_2$ por lo que no podemos definir A^{-1} — debido a que no sabríamos a donde mapear v_2 al aplicar A^{-1} , si a w_2 o a w_3 . Si A es lineal, entonces en la situación (b) $A(w_2-w_3)=A(w_2)-A(w_3)=0$, pero como $w_2 \neq w_3$, la entrada $w_2-w_3 \neq 0$. Existe una prueba muy usada para operadores lineales: La inversa de un operador A existe si y sólo si $Aw=0$ no tiene otra solución w más que $w=0$. En (c) la situación es distinta, la correspondencia es uno a uno, excepto por la existencia de una salida potencial que no puede ser mapeada al espacio original. En tal situación sólo podemos definir la inversa para v_1 , v_2 y v_3 .

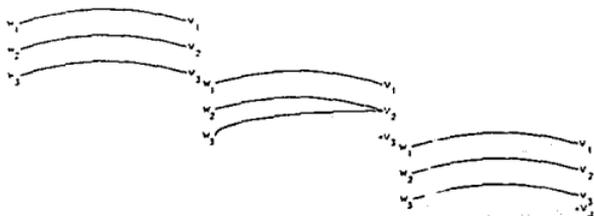


fig 20

A continuación se enunciarán algunos teoremas sobre normas de operadores que serán aplicados en capítulos posteriores; su demostración es omitida para dar mayor fluidez a la lectura y llegar más rápidamente a resultados prácticos.

Teorema 3.1 Si $T \in B(X, X)$ y $\|T\| < 1$, entonces $(I - T)^{-1}$ existe y está dada por la serie convergente $I + T + T^2 + \dots + T^n + \dots$.

Teorema 3.2 Si $\|T\| = k < 1$, entonces $S = (I - T)^{-1}$ existe y es un operador lineal acotado con $\|S\| \leq (1 - k)^{-1}$.

Teorema 3.3 Todo operador lineal acotado es continuo.

La inclusión de este último teorema se hace debido al resultado de que si tenemos la iteración $v_{n+1} = f(v_n)$ y este proceso hace que $v_n \rightarrow v$, entonces podemos estar seguros de que $v = f(v)$ si sabemos que f es continua.

El recíproco del último teorema también es verdadero. Si un operador lineal es continuo, entonces debe ser acotado.

3.3 EL PRINCIPIO DE MAPEOS DE CONTRACCION

A lo largo de la lectura del presente trabajo nos hemos percatado ya de la importancia del proceso de iteración. El método de iteración es frecuentemente usado para probar la existencia y unicidad de soluciones de problemas que envuelven ecuaciones algebraicas, diferenciales, integrales y de otros tipos. Con su ayuda podemos, a su vez, aproximarnos a tales soluciones. El método de iteración se ha manifestado como una muy importante herramienta del análisis funcional, y descansa en el principio de los mapeos de contracción. En el presente apartado analizaremos y ejemplificaremos algunos resultados de tal formulación.

Definición 3.3 En cualquier espacio métrico (X, ρ) , una contracción de (X, ρ) es un operador $f: X \rightarrow X$ con la propiedad de que, para algún número real positivo $k < 1$,

$$\rho(f(x), f(y)) \leq k \rho(x, y)$$

para todo $x, y \in X$.

□

En un sentido informal podemos decir que un mapeo f de un espacio X sobre si mismo es un mapeo de contracción si dados dos puntos cualesquiera x y y en el espacio de origen, la distancia entre ellos disminuirá al aplicarles el mapeo f : $\rho(x,y) > \rho(f(x),f(y))$ (fig 21).

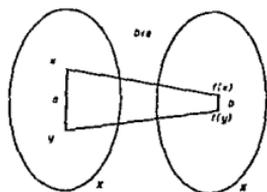


fig 21

Ejemplo 12 Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x) = f(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2} \cos x_2, \frac{1}{2} \sin x_1 + 1 \right);$$

utilizando la métrica usual ρ en \mathbb{R}^2 y las propiedades $|\cos x - \cos y| \leq |x-y|$ y $|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$ tenemos

$$\begin{aligned} \rho(f(x), f(y)) &= \rho(f(x_1, x_2), f(y_1, y_2)) \\ &= \rho\left(\left(\frac{1}{2} \cos x_2, \frac{1}{2} \sin x_1 + 1\right), \left(\frac{1}{2} \cos y_2, \frac{1}{2} \sin y_1 + 1\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} \left[(\cos x_2 - \cos y_2)^2 + (\sin x_1 - \sin y_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left[|\cos x_2 - \cos y_2|^2 + |\sin x_1 - \sin y_1|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{2} \left[|x_2 - y_2|^2 + |x_1 - y_1|^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \rho(x, y). \end{aligned}$$

Como $\rho(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{2} \rho(x, y)$ podemos afirmar entonces que f es una contracción de \mathbb{R}^2 . Numéricamente si $x=(0,0)$ y $y=(\pi/2,0)$ tenemos

$$\rho(x, y) = (|0 - \pi/2|^2 + |0 - 0|^2)^{\frac{1}{2}} = \pi/2, y$$

$$\rho(f(x), f(y)) = \rho(f(0,0), f(\pi/2,0)) = \rho\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right) = (|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}|^2 + |\frac{1}{2} - \frac{3}{2}|^2)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Puesto que $\pi/2 > 1$ entonces $\rho(f(x), f(y)) \leq k \rho(x, y)$ donde k es cualquier número entre 1 y $\pi/2$.

Podemos también, resolver el siguiente sistema de ecuaciones a partir de una aproximación inicial $x_0 = (0,0)$:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{2} \cos x_2 \\x_2 &= \frac{1}{2} \operatorname{sen} x_1 + 1.\end{aligned}\quad \square$$

La certeza de que encontraremos una solución a este problema esta basada en el siguiente teorema.

Teorema 3.4 Sea $f: X \rightarrow X$ una contracción del espacio métrico completo (X, ρ) . Entonces f tiene un único punto fijo $x=f(x)$; además, si x_0 es cualquier punto de X , entonces la sucesión

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots$$

converge al punto fijo .

Dem .- Sea x_0 cualquier punto en X y considérese, la sucesión $x_n = f(x_{n-1})$ para $n=0,1,2, \dots$. Probaremos que la sucesión $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ converge y que su límite es el único punto fijo en f .

Dada una sucesión en un espacio métrico completo el camino natural para probar la convergencia es por comparación con una sucesión de Cauchy. Calcular la distancia de x_n a x_m es un poco ambicioso, de forma que comenzaremos por considerar la distancia de x_n a x_{n+1} :

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x_{n+1}) &= \rho(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq k\rho(x_{n-1}, x_n) \\&= k\rho(f(x_{n-2}), f(x_{n-1})) \leq k^2\rho(x_{n-2}, x_{n-1}) \\&\dots \\&= k^{n-2}\rho(f(x_1), f(x_2)) \leq k^{n-1}\rho(x_1, x_2),\end{aligned}$$

es decir, $\rho(x_n, x_{n+1}) \leq k^{n-1}\rho(x_1, x_2) \leq k^n\rho(x_0, x_1)$. Además, como $0 \leq k < 1$, para una n muy grande la distancia entre x_n y x_{n+1} es muy pequeña. Ahora podemos fácilmente extender esto a la distancia de x_n a x_m para cualquier $m > n$:

$$\begin{aligned}
 \rho(x_n, x_m) &\leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_m) \\
 &\leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \rho(x_{n+2}, x_m) \\
 &\dots \\
 &\leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \rho(x_{n+2}, x_{n+3}) + \dots + \rho(x_{m-1}, x_m),
 \end{aligned}$$

como $\rho(x_n, x_{n+1}) \leq k^n \rho(x_0, x_1)$ entonces

$$\begin{aligned}
 \rho(x_n, x_m) &\leq k^n \rho(x_0, x_1) + k^{n+1} \rho(x_0, x_1) + \dots + k^{m-1} \rho(x_0, x_1) \\
 &= k^n (1+k+k^2+\dots+k^{m-n-1}) \rho(x_0, x_1) \\
 &= \frac{k^n (1-k^{m-n})}{1-k} \rho(x_0, x_1).
 \end{aligned}$$

Esta última expresión es una cota para la distancia entre x_n y x_m , y como $k < 1$ esta tiende a 0 cuando $n \rightarrow \infty$ y $m > n$, lo que quiere decir que la distancia $\rho(x_n, x_m) \rightarrow 0$, por lo que la sucesión generada por f es una sucesión de Cauchy en el espacio métrico. Además (X, ρ) es completo, por lo que existe un elemento $x \in X$ el cual es el límite de esta sucesión.

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Mostraremos ahora que $f(x) = x$. En efecto,

$$\begin{aligned}
 \rho(x_n, f(x)) &\leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, f(x)) = \rho(x, x_n) + \rho(f(x_{n-1}), f(x)) \\
 &\leq \rho(x, x_n) + k \rho(x, x_{n-1}),
 \end{aligned}$$

si $\epsilon > 0$ está dada en forma arbitraria y n es suficientemente grande, entonces

$$\rho(x, x_{n-1}) < \frac{\epsilon}{2k} \quad \text{y} \quad \rho(x, x_n) < \frac{\epsilon}{2},$$

de forma que $\rho(x, f(x)) < \epsilon$. Pero $\epsilon > 0$ fué arbitraria, por lo que la desigualdad se cumple si y sólo si $\rho(x, f(x)) = 0$, es decir, si y sólo si $f(x) = x$. Por último, supóngase que existen dos elementos $x, y \in X$ para los cuales $f(x) = x$ y $f(y) = y$; entonces $\rho(x, y) = \rho(f(x), f(y)) \leq k \rho(x, y)$, por lo que,

si $\rho(x,y) > 0$, se sigue que $1 \leq k$, lo cual es una contradicción a nuestra hipótesis de que ρ es un mapeo de contracción, de manera que podemos afirmar que el punto fijo es único. \square

Si tomamos el límite cuando m tiende a infinito en la ecuación

$$\rho(x_n, x_m) \leq \frac{k^n(1-k^{m-n})}{1-k} \rho(x_0, x_1),$$

obtenemos una estimación para el error en la n -ésima iteración, el cual estaría dado por

$$\rho(x_n, x) \leq \frac{k^n}{1-k} \rho(x_0, x_1).$$

Es importante hacer notar que podemos construir una sucesión $\{x_n\}$ como una aproximación que converge al punto fijo x , comenzando con un punto fijo arbitrario $x_0 \in X$. La velocidad con la cual la sucesión $\{x_n\}$ tiende a su límite depende exclusivamente de la elección del elemento inicial x_0 . Para hablar de mapeos de contracción en términos de vecindades tomaremos el siguiente esquema.

Proposición Sea una sucesión x_0, x_1, \dots donde $x_{n+1} = f(x_n)$ con $\rho(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq k\rho(x_n, x_{n+1})$; Si además se cumple para una vecindad $S(x_0, r)$ de un punto x_0 con que

$$\rho(x_0, x_1) < (1-k)r,$$

entonces la sucesión $\{x_n\}$ converge a la única solución x de la ecuación $x=f(x)$.

Dem. Para probar esto, mostraremos por inducción que todo x_n y x se encuentran dentro de $S(x_0, r)$. Supongase que los elementos x_j , $j=1, 2, \dots, n-1$, están en $S(x_0, r)$; entonces,

$$\rho(x_2, x_1) \leq k\rho(x_1, x_0) \leq k(1-k)r,$$

$$\rho(x_3, x_2) \leq k\rho(x_2, x_1) \leq k^2(1-k)r,$$

...

$$\rho(x_{n-1}, x_{n-2}) < k^{n-2}(1-k)r.$$

Debido a que

$$\rho(x_n, x_{n-1}) = \rho(f(x_{n-1}), f(x_{n-2})) \leq k^{n-1} (1-k)r \quad \text{y a que}$$
$$\rho(x_n, x_0) \leq \rho(x_1, x_0) + \rho(x_2, x_1) + \dots + \rho(x_n, x_{n-1}),$$

resulta que

$$\rho(x_n, x_0) \leq \sum_{j=1}^n k^{j-1} (1-k)r = (1-k^n)r < r,$$

por lo que x_n también está en $S(x, r)$.

Aplicando ahora el teorema, la sucesión x_n converge al único punto fijo $x=f(x)$, el que además, claramente está en la vecindad $S(x_0, r)$. La elección de x_0 y r es determinante para la convergencia al punto fijo — podríamos encontrarnos con una vecindad $S(x_0, r)$ en la que no se satisfaga la condición

$$\rho(x_0, x_1) < (1-k)r,$$

por lo que no podríamos asegurar la existencia de algún punto fijo en esta vecindad. \square

Para probar las ventajas que aporta el principio de mapeos de contracción al análisis funcional, ofrecemos primeramente algunos resultados de nuestro último ejemplo ($\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$), y luego se muestra su aplicación a la solución de sistemas de ecuaciones lineales; por último se lleva a cabo una aplicación al problema de existencia y unicidad de la solución de una ecuación integral.

Ejemplo 13 Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(z) = f(x, y) = \left(\frac{1}{2} \cos y, \frac{1}{2} \sin x + 1 \right);$$

como vimos en el ejemplo 12 al principio de esta sección $\rho(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{2} \rho(x, y)$ por lo que sabemos ya que f es una contracción de \mathbb{R}^2 . En estos términos y continuando con nuestro ejemplo, podemos afirmar sin temor a equivocarnos que el siguiente sistema de ecuaciones tendrá

solución:

$$x = \frac{1}{2} \cos y$$

$$y = \frac{1}{2} \sin x + 1.$$

La representación en el plano R^2 de estas curvas esta dada por la figura 22; claramente podemos observar que sí existe un punto (x,y) de intersección de las curvas, y lo que es más, este punto es único. Tomando como punto inicial $(0,0)$ y efectuando el proceso iterativo

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = \left(\frac{1}{2} \cos y_n, \frac{1}{2} \sin x_n + 1 \right),$$

obtenemos los siguientes resultados :

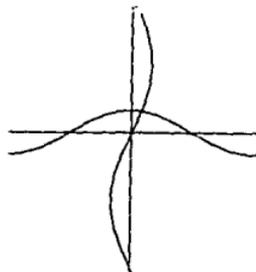


fig 22

| n | x | y |
|-------|----------|----------|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0.5 | 1 |
| 2 | 0.270151 | 1.239712 |
| 3 | 0.162533 | 1.113343 |
| 4 | 0.211773 | 1.080909 |
| 5 | 0.235262 | 1.105097 |
| 6 | 0.224523 | 1.116549 |
| 7 | 0.219392 | 1.111321 |
| 8 | 0.221738 | 1.108818 |
| 20*** | 0.222238 | 1.110207 |
| 40*** | 0.222238 | 1.110207 |

Asimismo podemos obtener una estimación del error para la n -ésima iteración puesto que

$$\rho(x_n, x) \leq \frac{k^n}{1-k}.$$

Así, si $n=40$, podemos dar una región en la cual, con certeza, se encontraría la solución del sistema. Como $k=\frac{1}{2}$, el error $\rho(x_n, x)$ en términos absolutos no excederá a

$$\frac{k^n}{1-k} = \frac{1}{2}^{n-1} = \frac{1}{2}^{39} = 1.82 E - 12.$$

□

3.3.1 SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES POR EL METODO DE MAPEOS DE CONTRACCION.

Si consideramos un espacio n -dimensional, con elementos $x = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ y $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$, y si además definimos $\rho(x, y) = \max |\zeta_i - \eta_i|$, fácilmente puede probarse que el espacio métrico (R^n, ρ) así obtenido es completo. En este espacio consideremos el operador $y = Ax + b$ determinado por las ecuaciones

$$\eta_i = \sum_j a_{ij} \zeta_j + b_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Para $y_1 = Ax_1 + b$, $y_2 = Ax_2 + b$ se tiene

$$\begin{aligned} \rho(y_1, y_2) &= \rho(Ax_1 + b, Ax_2 + b) = \max_i |\eta_i^{(1)} - \eta_i^{(2)}| \\ &= \max_i \left| \sum_j a_{ij} (\zeta_j^{(1)} - \zeta_j^{(2)}) \right| \leq \max_i \sum_j |a_{ij}| |\zeta_j^{(1)} - \zeta_j^{(2)}| \\ &\leq \max_j |\zeta_j^{(1)} - \zeta_j^{(2)}| \max_i \sum_j |a_{ij}| = \rho(x_1, x_2) \max_i \sum_j |a_{ij}|; \end{aligned}$$

si se supone que, para toda i ,

$$\sum_j |a_{ij}| \leq \alpha < 1,$$

entonces podemos visualizar la aplicabilidad del principio del mapeo de contracción y concluir que el operador A tiene exactamente un punto fijo. Lo anterior puede formalizarse en el siguiente teorema.

Teorema 3.5 Si para una matriz $A = (a_{ij})$, la condición $\sum_j |a_{ij}| \leq \alpha < 1$ se cumple para toda $i = 1, 2, \dots, n$, entonces el sistema de ecuaciones

$$\zeta_i - \sum_j a_{ij} \zeta_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

tiene exactamente una solución $x = (\zeta_1^*, \zeta_2^*, \zeta_n^*)$ para cualquier vector arbitrario $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$; además podemos encontrar esta solución aplicando el método de iteración comenzando con un vector arbitrario $x_0 = (\zeta_1^0, \zeta_2^0, \dots, \zeta_n^0)$. Si

$$x_1 = Ax_0, \quad x_2 = Ax_1, \quad \dots, \quad x_p = Ax_{p-1} \quad \text{y} \quad x_p = (\zeta_1^{(p)}, \zeta_2^{(p)}, \dots, \zeta_n^{(p)}),$$

entonces $x = \lim x_n$, es decir, $\zeta_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_i^{(n)}$, por lo que obtenemos

$$\max_i (|\zeta_i^{(p)} - \zeta_i|) = \rho(x_p, x) \leq \frac{\alpha^p}{1-\alpha} \rho(x_0, Ax_0).$$

La condición $\alpha < 1$ es suficiente para obtener la convergencia de aproximaciones iteradas. \square

Ejemplo 14 Esté la matriz de factores A de factores dada por

$$A = \begin{pmatrix} .0020 & .0478 & .0177 & .0157 & .0491 \\ .0085 & .0563 & .0223 & .0262 & .0602 \\ .0432 & .0170 & .0118 & .0530 & .0445 \\ .0137 & .0340 & .0458 & .0105 & .0537 \\ .0628 & .0543 & .0556 & .0144 & .0406 \end{pmatrix},$$

sea b el vector dado por $b = (5, 9, -12, 37, 4)$, y considérese una ecuación de la forma

$$y = Ax + b$$

en la que buscamos obtener el valor x^* en el cual se satisface que $x=y$; es decir, deseamos resolver la ecuación $x=Ax+b$ donde A y b están definidas.

Para poder resolver esta ecuación con la ayuda del concepto de mapeo de contracción debemos probar que

$$\max_i \sum_j |a_{ij}| \leq \alpha < 1$$

que en este caso es equivalente a verificar que

$$\max\{0.1323, 0.1735, 0.1695, 0.1577, 0.2277\} = 0.2277 \leq \alpha < 1.$$

Así, podemos tomar a α como cualquier número entre 0.2277 y 1, y podemos afirmar que A es un mapeo de contracción. De esta forma podemos utilizar el proceso iterativo

$$x_{n+1} = Ax_n + b$$

para dar solución a nuestro problema . Si iniciamos con $x_0 = 0$ tenemos los siguientes resultados:

| n | x_{1n} | x_{2n} | x_{3n} | x_{4n} | x_{5n} |
|-----|----------|----------|-----------|----------|----------|
| 1 | 5.00000 | 9.00000 | -12.00000 | 37.00000 | 4.00000 |
| 2 | 6.00510 | 10.49180 | -9.63360 | 37.42820 | 4.83070 |
| 3 | 6.16781 | 10.69853 | -9.47723 | 37.65018 | 4.14629 |
| 4 | 6.19976 | 10.73964 | -9.43904 | 37.68587 | 4.19243 |
| 5 | 6.20530 | 10.74680 | -9.43256 | 37.69231 | 4.20119 |
| 6 | 6.20630 | 10.74809 | -9.43139 | 37.69347 | 4.20273 |
| 7 | 6.20648 | 10.74832 | -9.43119 | 37.69367 | 4.20301 |
| 8 | 6.20651 | 10.74837 | -9.43115 | 37.69371 | 4.20306 |
| 9 | 6.20651 | 10.74837 | -9.43114 | 37.69372 | 4.20307 |
| 10 | 6.20652 | 10.74837 | -9.43114 | 37.69372 | 4.20307 |

De este modo, puede tomarse $x^*=(6.20652, 10.74837, -9.43114, 37.69372, 4.20307)$; para comprobarlo podemos evaluar la expresión

$$x^* - A x^*,$$

la cual resulta ser b .

□

3.3.2 EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCION DE UNA ECUACION INTEGRAL .

Sea la función $k(s,t)$ definida y medible en $a \leq s \leq b$ y $a \leq t \leq b$; supongamos que además

$$\int_a^b \int_a^b k^2(s,t) ds dt < \infty ,$$

y que sea $f(s) \in L_2(a,b)$. Entonces la ecuación integral

$$x(s) = f(s) + \lambda \int_a^b k(s,t) x(t) dt$$

tiene para todo valor suficientemente pequeño del parámetro λ exactamente una solución $x(s) \in L_2(a,b)$, como se demuestra a continuación.

Veremos primero que el operador

$$A(x) = f(s) + \lambda \int_a^b k(s,t) x(t) dt$$

transforma a toda función $x(t) \in L_2(a,b)$ en una función que también pertenece a este espacio. Si $f(s) \in L_2(a,b)$, es suficiente demostrar que el operador

$$A_0(x) = \int_a^b k(s,t) x(t) dt$$

transforma toda función $x(t) \in L_2(a,b)$ en una función de $L_2(a,b)$. Sea

$$y(s) = \int_a^b k(s,t) x(t) dt,$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz (Hoelder con $k=2$), resulta que

$$y^2(s) = \left[\int_a^b k(s,t) x(t) dt \right]^2 \leq \int_a^b k^2(s,t) dt \int_a^b x^2(t) dt.$$

Además $\int_a^b |x(t)| dt$ es una constante y , por hipótesis,

$$\int_a^b k^2(s,t) dt$$

es una función integrable de s . Así, $y^2(s)$ es también integrable en s — es decir, $y=A_0x$ también pertenece a $L_2(a,b)$. De hecho,

$$\int_a^b y^2(s) ds \leq \int_a^b \int_a^b k^2(s,t) ds dt \int_a^b x^2(t) dt.$$

Ahora, examinaremos cuando el operador A de $L_2(a,b) \rightarrow L_2(a,b)$ es un mapeo de contracción. Estimando $\rho(A(x), A(z))$ tenemos

$$\rho(A(x), A(z)) = \left[\int_a^b \left[\lambda \int_a^b k(s,t) x(t) dt - \lambda \int_a^b k(s,t) z(t) dt \right]^2 ds \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
&= |\lambda| \left(\int_a^b \left[\int_a^b k(s,t) [x(t)-z(t)] dt \right]^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq |\lambda| \left(\int_a^b \int_a^b k^2(s,t) ds dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b [x(t)-z(t)]^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= |\lambda| \left(\int_a^b \int_a^b k^2(s,t) ds dt \right)^{\frac{1}{2}} \rho(x,z).
\end{aligned}$$

Si $|\lambda| < \left(\int_a^b \int_a^b k^2(s,t) ds dt \right)^{-\frac{1}{2}}$,

podemos aplicar el principio de mapeo de contracción. La existencia y la unicidad de la solución depende de si los valores λ satisfacen la desigualdad anterior.

DIFERENCIACION E INTEGRACION

4.1 INTRODUCCION

En el presente capítulo examinaremos como la diferenciación, elemento clásico de cálculo, puede ser expresada en términos de un operador lineal actuando no sólo con elementos de una variable sino en términos de espacios de vectores, en la búsqueda de proveer ideas clásicas con un mayor horizonte de aplicación.

Debido a la naturaleza de nuestro estudio, la principal aplicación que veremos es la de utilizar la derivada f' para dar información acerca de la iteración $x_{n+1} = f(x_n)$, analizando su convergencia en términos de que f' sea un mapeo de contracción. De esta forma, iniciamos la primera parte examinando la derivada de funciones de variable real en un sentido conceptual y esquemático, para luego dar una generalización de esta idea a cualquier espacio vectorial, ejemplificándolo en 2 dimensiones; finalizamos esta sección dando ejemplos de la obtención de la derivada en otros espacios vectoriales.

En el siguiente apartado se generaliza el teorema del valor medio del cálculo tradicional y se hace un análisis de la derivada como un mapeo de contracción, dando ejemplos para su mayor comprensión.

En una tercera etapa se hace un examen de las ideas generales de las series de Taylor en espacios de Banach, aprovechando estas para demostrar que el proceso de Newton es de segundo orden. Se concluye el capítulo proporcionando los rudimentos de la integración generalizada en el sentido del análisis funcional— conceptos necesarios para lograr un mayor entendimiento de la aportación de Kantorovich al método de Newton.

4.2 DIFERENCIACION GENERALIZADA

Bajo el enfoque geométrico elemental la diferenciación nos permite

encontrar la tangente a una curva en un punto dado. Si hacemos una gráfica (fig 23), dibujando una curva con una tangente a la misma, existe una considerable extensión en donde el ojo no puede distinguir entre la curva y la tangente; diciéndolo de otro modo, sobre un intervalo la tangente proporciona una excelente aproximación a la curva. Si (x, y) es un punto de la tangente a la gráfica $y=f(x)$ en el punto (x_0, y_0) , entonces $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

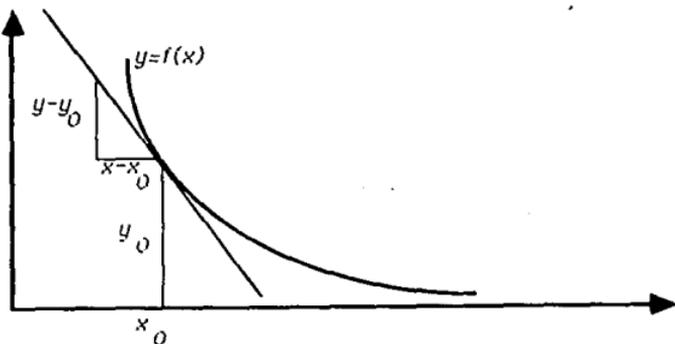


fig 23

Ahora bien, el mapeo $x - x_0 \rightarrow y - y_0$ es una función lineal, por lo que el problema de diferenciación es equivalente al problema de encontrar una función lineal que relacione el cambio en la entrada con un cambio aproximado en la salida, dando una buena aproximación cuando los cambios son pequeños. Al asociar los términos de "función lineal" con operadores en que tienen como dominio e imagen a cualquier espacio de Banach, necesitamos sólo dar un esclarecimiento de qué entendemos por una buena aproximación; en este punto el cálculo tradicional sugiere que es lo que debiera hacerse. Por ejemplo, cuando $f(x) = x^3$ tenemos

$$f(x_0+h) - f(x_0) = (x_0+h)^3 - x_0^3 = 3hx_0^2 + 3h^2x_0 + h^3.$$

Si h es, digamos, del orden de 10^{-6} , entonces todos los términos en h con potencias mayores a 1 son demasiado pequeños para ser tomados en cuenta, de esta manera podemos escribir

$$f(x_0+h) - f(x) = 3hx_0^2 + \dots,$$

donde los puntos suspensivos representan los términos que son pequeños comparados con h . Si usamos $e(h)$ para representar los términos

omitidos (e de error), una definición formal es que si $f(x_0+h) - f(x_0) = mh + e(h)$, donde $e(h)/h \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$, entonces $f'(x_0)$ existe y tiene el valor de m .

Para dar un pequeño paso en la dirección de generalizar este resultado mostremos la situación en que tratamos con funciones de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^2 . Consideremos por ejemplo la función que manda el vector $u(x,y)$ a $v(p,q)$ en donde

$$p = xy \quad y \quad q = x^2 + y^2;$$

cundo (x,y) cambia a $(x+a,y+b)$ los cambios en p y q son

$$\Delta p = (x+a)(y+b) - xy = ay + bx + ab, \quad y$$

$$\Delta q = (x+a)^2 + (y+b)^2 - (x^2 + y^2) = 2ax + 2by + a^2 + b^2;$$

los términos a^2 , ab , y b^2 , al ser a y b muy pequeños, se convierten en cantidades despreciables, por lo que podemos escribir en términos matriciales

$$\begin{bmatrix} \Delta p \\ \Delta q \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

El vector $h=(a,b)$ en esta ecuación representa el cambio en la entrada, y el cambio aproximado de salida está dado por Mh , donde M es la matriz 2×2 de la ecuación anterior. El error en el presente ejemplo se representa por

$$e(h) = \begin{bmatrix} \Delta p \\ \Delta q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab \\ a^2 + b^2 \end{bmatrix}.$$

En esta situación, no podemos mantener nuestra condición de que $e(h)/h \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$, debido a que no tenemos definida la división entre vectores. Sin embargo, no estamos interesados en la dirección de los mismos sino en su magnitud, pues buscamos que su tamaño sea despreciable comparado con el de h . Así, la condición

$$\|e(h)\|/\|h\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \|h\| \rightarrow 0$$

es más adecuada, y es todo lo que necesitamos.

De esta forma, estamos listos para reformular nuestra definición de diferenciación de modo que trabaje igualmente bien para cualquier operador $f: X \rightarrow Y$ donde X y Y son espacios de Banach arbitrarios.

Definición 4.1 Si $f(u_0+h)-f(u_0)=Mh+e(h)$ donde M es un operador lineal acotado, y $\|e(h)\|/\|h\| \rightarrow 0$ cuando $\|h\| \rightarrow 0$, la función es llamada "Fréchet-diferenciable" en el punto u_0 y definimos como operador diferencial de f en u_0 al operador M , $F'(u_0)=M$.

El término "Fréchet-diferenciable" es usado porque esta definición es debida a Maurice Fréchet, quien la publicó en 1925. Requerir que M sea acotada es semejante requerir que el número $m=F'(x_0)$ en el cálculo elemental sea finito. La conveniencia de este requerimiento puede ser vista desde nuestro anterior tratamiento del el proceso de iteración, donde la condición $|F'(x)| \leq k$ fue usada. En la situación más general esto es reemplazado por $\|F'(x)\| \leq k$, que es una desigualdad que puede ser satisfecha si $F'(x)$ es acotado.

Ejemplo 1 Consideremos el mapeo $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ utilizado en la discusión anterior para mostrar la idea de la derivada: $F'(u)$ debe ser una matriz M y no un número real. Por cada cambio en el vector de entrada se produce un cambio en el vector de salida. Tenemos como una aproximación que

$$\Delta w \approx F'(u) \Delta u,$$

donde $F'(u)$ debe de ser un operador capaz de cambiar al vector Δu en un vector aproximado al vector Δw . La multiplicación por un número no puede hacer esto, pues dejaría al vector invariante en su dirección. La multiplicación por una matriz puede, en cambio, tanto variar la magnitud como la dirección de un vector. Así, no es del todo sorprendente que $F'(u)$ tenga que ser una transformación matricial. En este caso, la transformación esta determinada por la matriz

$$\begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{pmatrix}.$$

□

En general, el operador $F'(u)$ es definido por un límite en el que $\Delta u \rightarrow 0$, por lo que la ecuación $\Delta w \approx F'(u)\Delta u$ será sólo una aproximación. Sin embargo, con funciones cuadráticas es posible obtener un resultado preciso. En el cálculo tradicional, si $g(x) = ax^2 + bx + c$, entonces

$$g(x+h) - g(x) = a(2x+h) + b = g'(x + \frac{h}{2}),$$

que es exactamente igual a la derivada en el punto medio del intervalo en cuestión. La función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que hemos venido considerando es una función cuadrática por lo que para ella podemos esperar un comportamiento análogo.

Si del ejemplo anterior calculamos el valor $F'(1, 1.75)$ encontramos que

$$\begin{bmatrix} 2 & 3.5 \\ 1.75 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.75 \\ 0.5 \end{bmatrix},$$

dividiendo entre el tiempo correspondiente Δt , con intervalos más cortos, serían obtenidas mejores estimaciones y podríamos esperar que la aproximación $\Delta w \approx F'(u)\Delta u$ estaría en el límite, concluyendo con que

$$\frac{dw}{dt} = F'(u) \frac{du}{dt}.$$

En otras palabras, $F'(u)$ es el operador que transforma la velocidad del vector de entrada en la velocidad del vector de salida. Este resultado es verdadero para funciones $f: X \rightarrow Y$ con X, Y espacios de Banach arbitrarios; además, es fácil probar de la definición de derivada que

$$\Delta w = M \Delta u + e(\Delta u) \Rightarrow \frac{\Delta w}{\Delta t} = M \frac{\Delta u}{\Delta t} + e\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right).$$

Si u tiene una velocidad dada por

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{du}{dt} \quad \text{cuando } \Delta t \rightarrow 0,$$

podemos demostrar que $\|e(\Delta u)/\Delta t\| \rightarrow 0$ usando el hecho de que $\|e(\Delta u)\|/\|\Delta t\| \rightarrow 0$ y el que $\|\Delta u\|/\|\Delta t\|$ tiende a un límite finito cuando $\Delta t \rightarrow 0$.

Ejemplo 2 Sea la función $f: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, $y \rightarrow z$ definida por

$$z(x) = b - y(x) + axy^2(x) + a \int_0^x y^2(s) ds,$$

con $a > 0$, $b > 0$ y $0 \leq x \leq 1$. Como vemos, los elementos son ahora funciones por lo que el incremento h en la entrada será una función con norma pequeña:

$$\begin{aligned} f(y+h) - f(y) &= b - (y+h)(x) + ax(y+h)^2(x) + a \int_0^x (y+h)^2(s) ds + \\ &\quad - \left[b - y(x) + axy^2(x) + a \int_0^x y^2(s) ds \right], \\ &= -h(x) + 2axy(x)h(x) + 2a \int_0^x y(s)h(s) ds + h^2(x) + 2a \int_0^x h^2(s) ds; \end{aligned}$$

en este caso, el operador diferencial $M = f'(y)$ está representado por

$$M = (2axy(x) - 1)[...] + 2a \int_0^x y(s)[...] ds$$

donde los corchetes representan la función de entrada del operador, que en este caso sería $h(x)$, y el error $e(h)$ se representa por

$$e(h) = h^2(x) + 2a \int_0^x h^2(s) ds.$$

Claramente $\|e(h)\| / \|h\| \rightarrow 0$ cuando $\|h\| \rightarrow 0$.

4.3 GENERALIZACION DEL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

En el cálculo de una variable el teorema de valor medio enuncia que, si $f'(x)$ existe para $b \leq x \leq c$, entonces para alguna X entre b y c , $f(c) - f(b) = f'(X)(c-b)$. Esto quiere decir que la tangente a la gráfica de f en algún punto Z es paralela a la cuerda BC en la figura 24a). Pero si el segmento BC tiene la ecuación $y=mx+b$ y definimos $\phi(x)=f(x)-mx-k$, entonces si $\phi'(x)=0$ en el intervalo se tiene, $0=\phi'(x)=f'(x)-m$, y así $f'(x)=m$, la pendiente de la cuerda BC . La prueba del teorema consiste, pues, en mostrar que $\phi'(x)=0$ en algún punto entre b y c . Sabemos que $\phi(b)=\phi(c)=0$, pues la gráfica de f interseca a la cuerda BC en los extremos B y C ; el teorema de Rolle asegura que $\phi'(X)=0$ para alguna X entre b y c , como se indica en la figura 24b), que era el resultado deseado.

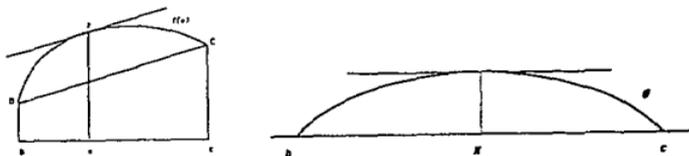


fig 24

Sin embargo, el teorema de Rolle no tiene contraparte en análisis funcional. Por ejemplo, si ϕ mapea $t \rightarrow (x, y)$ con $x=t-t^2$, $y=t-t^5$, entonces $\phi'(t)=(1-2t, 1-5t^4)$, $\phi(0)=(0,0)$ y $\phi(1)=(0,0)$, pero no existe T con $0 < T < 1$ tal que $\phi'(T)=0$.

Afortunadamente no necesitamos el teorema en su forma tradicional. Supóngase, por ejemplo, que tenemos la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, con $w=f(u)$ y que sabemos que, en alguna región $\|f'(u)\| \leq k$. Esto quiere decir que la matriz $f'(u)$, al actuar en un vector, incrementa su longitud en a lo más k veces. Asimismo, sabemos que cuando $w=f(u)$ y u se mueve en algún intervalo, $f'(u)$ mapea la velocidad du/dt a la velocidad dw/dt . Pero si en este intervalo $\|f'(u)\| \leq k$, entonces en cualquier momento la velocidad de w no será más de k veces la velocidad de u . Así, si u viaja de u_1 a u_2 y $w_1=f(u_1)$, $w_2=f(u_2)$, el hecho de que la velocidad de dw/dt de w , nunca exceda a k veces la velocidad de du/dt de u , implica que en término de distancias:

$$\|w_2 - w_1\| \leq k \|u_2 - u_1\|.$$

Este hecho es cierto para mapeos $f: X \rightarrow Y$ con X y Y espacios de Banach arbitrarios. Podemos establecer formalmente lo anterior en el siguiente teorema, cuya demostración aparece en diferentes textos de análisis funcional.

Teorema 4.1 Sea Y un espacio de Banach y f una función $f: Y \rightarrow Y$. Si en alguna región convexa de Y , f está definida con $\|f'(u)\| \leq k$ para cada punto u en la región, entonces para cualesquiera dos puntos u_1, u_2 de la región se cumple que

$$\|f(u_2) - f(u_1)\| \leq k \|u_2 - u_1\|. \quad \square$$

Si una sucesión está definida por la iteración $u_{n+1} = f(u_n)$ podemos aplicar el teorema 4.1 para establecer su convergencia. Para ver esto observemos el siguiente análisis del valor de $\|f'(x)\|$ con números.

Si a es un punto fijo del mapeo derivable f , $f(a) = a$, si tomamos $x = a + h$, donde h es pequeña, entonces $f(x) = f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$; parece plausible que si $|f'(a)| < 1$, entonces $f(x)$ se encontrará más cerca de a de lo que x estaba, esto lo podemos ver en la figura 25a) donde $f(a+h) - a < h$, mientras que si $|f'(a)| > 1$, $f(x)$ se encontrará más alejado, observando este hecho en la figura 25b) en que $f(a+h) - a > h$. Así, podemos utilizar a $|f'(a)|$ como medio para clasificar los puntos fijos dentro de tipos atractivos o tipos repulsivos.

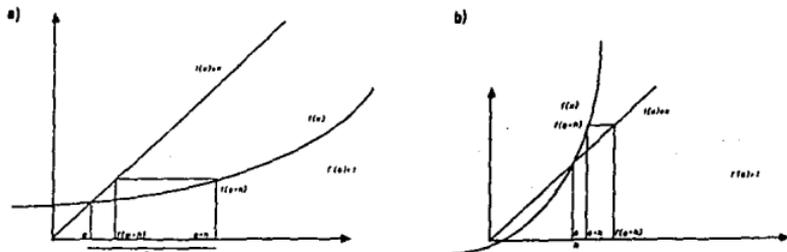


fig 25

De esta forma, si en una cierta región tenemos $\|f'(u)\| \leq k < 1$, entonces $f: Y \rightarrow Y$ será un operador de contracción para los puntos definidos en esta región. Así, si tenemos una sucesión $\{u_n\}$ en la que todos los puntos cumplen con $\|f'(u_n)\| < 1$, entonces la sucesión ciertamente convergerá en la región.

Para ello, necesitamos checar que la secuencia se mantiene dentro de esta región cuando la iteración se efectúa. Al obtener la cadena de puntos u_1, u_2, u_3, \dots , sabemos que la longitud de cada eslabon es a lo más k veces tan larga como la del eslabón previo. Es decir, que la longitud total de la cadena no puede exceder a

$$\|u_1 - u_0\| (1 + k + k^2 + k^3 + \dots) = \frac{\|u_1 - u_0\|}{1 - k}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \|u_2 - u_1\| &= \|f(u_1) - f(u_0)\| \leq k \|u_1 - u_0\|, \\ \|u_3 - u_2\| &= \|f(u_2) - f(u_1)\| \leq k \|u_2 - u_1\| \leq k^2 \|u_1 - u_0\|, \\ &\dots \\ \|u_{n+1} - u_n\| &= \|f(u_n) - f(u_{n-1})\| \leq k^n \|u_1 - u_0\|, \end{aligned}$$

de donde resulta que la longitud de la cadena es a lo más

$$\begin{aligned} \sum \|u_i - u_{i-1}\| &= \|u_1 - u_0\| (1 + k + k^2 + k^3 + \dots), \\ &= \|u_1 - u_0\| / (1 - k), \quad \text{pues } |k| < 1. \end{aligned}$$

De este modo, todos los puntos se encontrarán dentro de la bola cerrada $\bar{B}(u_0, r)$ con

$$r = \frac{\|u_1 - u_0\|}{1 - k}.$$

Lo anterior lo resumimos en el siguiente teorema.

Teorema 4.2 Si la bola cerrada $\bar{B}(u_0, r)$ está contenida en una región donde $\|f'(u)\| \leq k < 1$ donde $r = \|f(u_0) - u_0\| / (1 - k)$, entonces la iteración $u_{n+1} = f(u_n)$, a partir de u_0 convergerá a un punto fijo en esta bola. \square

Sabemos que la convergencia dependerá de si f es una función continua pero, en análisis funcional, como en el cálculo tradicional, una función diferenciable es necesariamente continua. Esto permite que el punto límite de la iteración especificada en el teorema 4.2 cumpla con la ecuación $u=f(u)$. En el siguiente ejemplo se observan los anteriores razonamientos.

Ejemplo 3 Deseamos resolver la ecuación

$$x = e^x - 1.1 .$$

Si $f(x)=e^x-1.1$, $|f'(x)| < 0.8$ para $x < -0.2232$; si se toma la iteración

$$x_{n+1} = f(x_n) = e^{x_n} - 1.1$$

iniciando el proceso con $x_0 = -0.6$ encontramos que $x_1 = -0.551188$, por lo que

$$\frac{|x_1 - x_0|}{1 - 0.8} < \frac{0.05}{0.2} = 0.25 .$$

Ahora, 0.25 es un número mucho menor que la distancia entre $x_0 = -0.6$ y el límite 0.2232 de la región en la cual $|f'(x)| < 0.8$. Así, esta última condición se mantendrá a lo largo de la iteración. Por otro lado, podemos estimar el número de iteraciones que es requerido para resolver la ecuación dada con una precisión prefijada. La longitud de la cadena que viene después de x_n no excede de

$$|x_1 - x_0| (k^n + k^{n+1} + \dots) = k^n \frac{|x_1 - x_0|}{1 - k} ,$$

por lo que es menor que $(0.8)^n (0.25)$. Esto proporciona una cota máxima estimada para la distancia de x_n al punto límite, cota que puede determinarse antes de que siquiera x_2 haya sido calculada. \square

4.4 SERIES DE TAYLOR

Una de las aplicaciones importantes del uso de la derivada es la reexpresión de una función en término de sus derivadas sucesivas. Nuestro propósito es el de extender este concepto a cualquier espacio vectorial.

La serie de Taylor para una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, toma la forma

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + (1/2!)f''(x)h^2 + \dots + (1/n!)f^{(n)}(x)h^n + \dots$$

Para la generalización de este resultado claramente encontramos el problema de que h es un vector para el cual no tienen sentido las expresiones h^n . Para solucionar este problema recordemos que, cuando f es una función vector \rightarrow vector, f' representa un operador matricial en el que tiene como objeto de entrada a un vector, y a otro vector como salida. Así, si usamos las derivadas sucesivas para el mismo tipo de función, $f^{(n)}(v)$ requerirá de n vectores como entrada, resultando un solo vector de salida. Esto es, en el caso de $f''(v)h^2$, debemos pensar en términos de $(f''(v) \cdot h) \cdot h$, que escribiremos simplemente $f''(v) \cdot h \cdot h$. Ilustramos esto con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4 Consideremos la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(x,y) = 3x^2 + 4xy + 5y^2$ y $h = (a,b)$. Por el procedimiento de la sección anterior escribimos

$$f(x+a, y+b) - f(x,y) = (6x+4y, 4x+10y) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \dots$$

con la regla usual de multiplicación renglón-columna. Podemos imaginar a $f'(x,y)$ como el vector renglón $(6x+4y, 4x+10y)$. Si ahora (x,y) cambia a $(x+a, y+b)$, entonces la derivada $f'(x,y)$ cambia por $(6a+4b, 4a+10b)$ pues $f'(x+a, y+b) = (6x+6a+4y+4b, 4x+4a+10y+10b)$ de esta forma podemos escribir

$$f''(x,y) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = [(6,4), (4,10)] \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Entonces, si queremos obtener el segundo término de la serie de Taylor escribimos

$$\begin{aligned} (1/2!)f''(x,y)h^2 &= (1/2) \left[[(6,4), (4,10)] \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (1/2)(6a+4b, 4a+10b) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= (1/2)(6a^2+4ab+4ab+10b^2) = 3a^2+4ab+5b^2; \end{aligned}$$

como este término es una constante, entonces $f^{(n)}(x,y) = 0$ para $n > 2$, de forma que la serie se reduce a

$$\begin{aligned}
 f(x+a, y+b) &= f(x, y) + f'(x, y)(a, b) + (1/2)f''(x, y)(a, b)(a, b) \\
 &= 3x^2 + 4xy + 5y^2 + (6x+4y)a + (4x+10y)b + 3a^2 + 4ab + 5b^2.
 \end{aligned}$$

Igualdad que puede verificarse directamente. □

Una aplicación del uso de la serie de Taylor en procesos iterativos surge en la definición del orden de un proceso iterativo. Si tenemos el proceso

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

y x_n se aproxima a una solución s de $x=g(x)$ ($s=g(s)$), entonces

$$x_n = s + e_n \quad (e_n \text{ es el error de } x_n).$$

Si g es derivable varias veces, por la fórmula de Taylor tenemos

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} = g(x_n) &= g(s+e_n) = g(s) + g'(s)(x_n-s) + (1/2)g''(s)(x_n-s)^2 + \dots = \\
 &= g(s) + g'(s)e_n + (1/2)g''(s)e_n^2 + \dots
 \end{aligned}$$

Al exponente de e_n en el primer término diferente de cero después de $g(s)$ se le llama **orden** del proceso de iteración definido por g . Ahora,

$$\left. \begin{aligned}
 x_{n+1} - g(s) &= x_{n+1} - s = e_{n+1} \\
 x_{n+1} - g(s) &= g'(s)e_n + (1/2)g''(s)e_n^2 + \dots
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow e_{n+1} = g'(s)e_n + (1/2)g''(s)e_n^2 \dots$$

Si el proceso converge, e_n será pequeño para n grande lo que implica que e_{n+1} será en general n más pequeño (especialmente si el orden de convergencia es grande). Así el orden resulta ser una medida para la velocidad de convergencia.

Ejemplo 5 La iteración de Newton es de segundo orden.

Queremos encontrar una raíz s de $f(x)=0$ mediante el proceso

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (\text{en el límite, } s = s - \frac{f(s)}{f'(s)} = g(s));$$

ya que $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, tenemos

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f''(x) - f(x)f'''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2};$$

valuando en la raíz $x=s$,

$$g'(s) = \frac{f(s)f''(s)}{(f'(s))^2}.$$

Como $f(s)=0$ entonces $g'(s)=0$, por lo tanto, concluimos que el proceso de Newton-Raphson es de al menos segundo orden.

Pudiendo ser de mayor orden observemos si existe la nulidad en la segunda derivada

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \Rightarrow$$

$$g''(x) = \frac{(f'(x))^2[f(x)f'''(x) + f''(x)f'(x)] - 2f(x)f''(x)[f'(x)]^2}{[f'(x)]^4};$$

valuando en $x=s$ y utilizando $f(s)=0$ tenemos

$$g''(s) = \frac{(f'(s))^2[f''(s)f'(s)]}{[f'(s)]^4} = \frac{f''(s)}{f'(s)} \neq 0.$$

Ahora, como en general $g''(s) \neq 0$ el proceso de N-R es de segundo orden. \square

Uno de los primeras aplicaciones significativas del análisis funcional al cálculo numérico fué la generalización de Kantorovich en 1948, del método de N-R para la solución de ecuaciones; en su trabajo, Kantorovich no sólo mostró esta generalización, sino que además, dió una elegante prueba para su convergencia y para estimar su tasa de convergencia. El construyó una cierta iteración de tipo tradicional ($\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) y mostró que la iteración generalizada se comporta tan bien, o mejor que esta iteración.

Para justificar el método de Kantorovich es necesario usar la idea de integración en espacios de Banach; así, antes de tratar con su trabajo describiremos rápidamente los principales conceptos de integración

generalizada, obteniendo resultados similares a los del cálculo (pero debemos insistir en la nueva riqueza, y sus complicaciones, de las herramientas utilizadas).

4.5 INTEGRACION GENERALIZADA

En la idea clásica de integración, la integral está definida como el límite de una suma. Para definir $\int_a^b f(x)dx$ cortamos el intervalo $[a,b]$ en un número de pequeños subintervalos y consideramos $\sum f(x)\Delta x$, donde x representa algún valor escogido en el intervalo de longitud Δx . Si f es continua en el intervalo finito $[a,b]$, entonces $\sum f(x)\Delta x$ tiende a un límite, sin importar como los valores de x sean escogidos dentro de los subintervalos, cuando el número de éstos tiende a infinito y sus longitudes tienden a cero.

Para analizar la forma que tomaría la generalización de este concepto nótese que, en la discusión anterior, Δx es una diferencia, $x_{n+1} - x_n$, por lo que parece que la generalización requiere que la substracción sea posible. Esto sugiere que reemplacemos a x por v , un elemento de un espacio vectorial. Ahora, si $\sum f(v)\Delta v$ va a tener significado, cada uno de los términos $f(v)\Delta v$ debe de ser capaz de ser añadido; esto sugiere que estos términos también deban ser elementos de un espacio vectorial. Queda aún el problema de que debe de ser $f(v)$: $f(v)$ no puede ser del mismo espacio que Δv pues en general no existe forma de multiplicar dos vectores de algún espacio vectorial dado. De seguro $f(v)$ podría ser simplemente un número real, pero esto difícilmente sería una generalización. De nuestro trabajo de diferenciación sabemos que existen ecuaciones del tipo $w=M\Delta v+\dots$, donde M se especificó como una matriz, o más generalmente como un operador lineal. Como la integración es más o menos la inversa de la diferenciación, esto sugiere que tomemos a $f(v)$ como un operador lineal.

Ya que desarrollar formalmente el cálculo integral en espacios de Banach excede a los propósitos de este trabajo, consideraremos un ejemplo muy simple e introduciremos las principales ideas de la integración generalizada a través de él. Supongamos que $v=(x,y)$ y

$$f(v) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 3+2y \end{pmatrix}.$$

Sea $(\Delta X, \Delta Y) = f(v)\Delta v$. Entonces

$$\begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 3+2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}, \quad (1)$$

Como trayectoria de integración (para el lector familiarizado con la integral de línea los conceptos manejados aquí no resultarán sorprendentes), tomemos el segmento de línea de $(0,0)$ a $(7,1)$. Como una cruda aproximación a la integración dividimos esta trayectoria en 10 piezas iguales, y en $f(v)$ tomamos a v como el punto medio del trozo en cuestión. Todos estos intervalos son iguales, $\Delta x=0.7$ y $\Delta y=0.1$ para cada intervalo.

El punto medio del primer intervalo es $(0.35, 0.05)$, de modo que la contribución a la suma $f(v)\Delta v$ del primer intervalo es

$$\begin{pmatrix} 0.35 & 0.05 \\ 1 & 3.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 1.01 \end{pmatrix}$$

De la misma forma obtenemos un vector $f(v)\Delta v$ de cada uno de los otros 9 intervalos, y tenemos la siguiente tabla de las 10 contribuciones:

| ΔX | ΔY | X | Y |
|------------|------------|-------|-------|
| 0.25 | 1.01 | 0.25 | 1.01 |
| 0.75 | 1.03 | 1.00 | 2.04 |
| 1.25 | 1.05 | 2.25 | 3.09 |
| 1.75 | 1.07 | 4.00 | 4.16 |
| 2.25 | 1.09 | 6.25 | 5.25 |
| 2.75 | 1.11 | 9.00 | 6.36 |
| 3.25 | 1.13 | 12.25 | 7.49 |
| 3.75 | 1.15 | 16.00 | 8.64 |
| 4.25 | 1.17 | 20.25 | 9.81 |
| 4.75 | 1.19 | 25.00 | 11.00 |

Las primeras dos columnas, encabezadas por ΔX y ΔY , muestran las contribuciones individuales. Las últimas dos, encabezadas por X y Y , muestran como las coordenadas de $\Sigma f(v)\Delta v$ crecen conforme la suma se acumula. La entrada final $(25, 11)$ proporciona un estimado del valor de $\int f(v)\Delta v$, obtenido de la trayectoria directa de $(0,0)$ a $(7,1)$. Para obtener una mejor aproximación de la integral podemos tomar intervalos más pequeños, pero el número de cálculos sería mayor. En su lugar podemos aplicar la maquinaria desarrollada en el cálculo para este problema de dos dimensiones. Si escribimos $x=7t$ y $y=t$, entonces cuando t viaja de 0 a 1 , el punto (x,y) viajará de $(0,0)$ a $(7,1)$. Por otro lado, de la ecuación matricial (1), sabemos que $\Delta X=x\Delta x+y\Delta y$, y por sustitución encontramos que $\Delta X=(7t)(7\Delta t)+(t)(\Delta t)=50t\Delta t$, con lo que $X=\int_0^1 50t\Delta t$, que es una aproximación a $\int_0^1 50t dt=25$. Similarmente encontramos que $Y=11$. Estos valores corresponden exactamente con nuestros estimados por el método aritmético: este hecho es resultado de que en nuestro ejemplo la matriz envuelve sólo expresiones de primer grado en x y y , pero en general esto no se espera que suceda.

El esquema usado anteriormente, para el cual una integral a lo largo de una línea (o curva) fué cambiada por una integral con respecto al tiempo t , no se restringe a problemas finito dimensionales. Si un vector v podemos hacerlo viajar a lo largo de un camino prescrito mediante $v=v(t)$, donde t viaja de a a b , y si la derivada $v'(t)$ existe y es continua para estos valores de t , entonces puede probarse que

$$\int f(v)dv = \int_a^b f(v)v'(t)dt.$$

En nuestro trabajo posterior en el método de N-R, necesitaremos este resultado sólo en el caso más simple, cuando v viaja a lo largo del segmento de línea de $v(a)$ a $v(b)$. Si suponemos que esto lo hace con velocidad constante, entonces $v'(t)=[v(b)-v(a)]/[b-a]$.

Otro resultado familiar subsiste en esta situación,

$$\int \phi'(v)dv = \phi(v_1) - \phi(v_0);$$

la integral en este caso viaja a lo largo de la línea que une a v_0 con v_1 . Se supone que $\phi'(v)$ está definida para cada v en este segmento de línea y que ϕ y ϕ' son continuas.

También de tipo familiar es el hecho de que si $v(t)$ depende continuamente del tiempo y

$$\phi(T) = \int_0^T v(t) dt,$$

entonces $\phi'(T) = v(T)$.

Existen tres desigualdades frecuentemente usadas que pueden ser recordadas fácilmente con ayuda de este esquema de integración.

1.- Si un punto se mueve con una velocidad $v(t)$ entre $t=a$ y algún instante posterior $t=b$, la distancia entre este final y la posición inicial está dada por $|\int_a^b v(t) dt|$. Supongamos que deseamos hacer esta distancia tan larga como sea posible, sujetos a que la velocidad $||v(t)||$ esté prescrita para cada instante. Es decir, nosotros controlamos la dirección de movimiento pero no la magnitud de la velocidad. Claramente recorreremos una distancia mayor si viajamos siempre en la misma dirección en cuyo caso, la distancia cubierta será $\int_a^b ||v(t)|| dt$. La desigualdad que expresa que esta distancia no puede ser excedida es

$$\left| \int_a^b v(t) dt \right| \leq \int_a^b ||v(t)|| dt. \quad (2)$$

2.- Si aplicamos la desigualdad anterior a $\int_a^b f(w)w'(t) dt$ tenemos

$$\left| \int_a^b f(w)w'(t) dt \right| \leq \int_a^b ||f(w)w'(t)|| dt.$$

Considerando ahora que el operador $f(w)$ actúa sobre el vector $w'(t)$, por definición de norma de operador tenemos que

$$||f(w)w'(t)|| \leq ||f(w)|| ||w'(t)||,$$

y así,

$$\left| \int_a^b f(w)w'(t) dt \right| \leq \int_a^b ||f(w)|| ||w'(t)|| dt. \quad (3)$$

3.- Finalmente, sabemos que

$$\phi(w_1) - \phi(w_0) = \int \phi'(w) dw = \int_a^b \phi'(w) w'(t) dt,$$

donde $w_0 = w(a)$ y $w_1 = w(b)$. Aplicando la desigualdad (3) con $f(w) = \phi'(w)$ tenemos

$$|\phi(w_1) - \phi(w_0)| \leq \int_a^b |\phi'(w)| |w'(t)| dt. \quad (4)$$

EL METODO DE NEWTON-RAPHSON GENERALIZADO

5.1 INTRODUCCION

Al inicio del estudio se examinó una forma itcrativa de aproximación al número irracional $\sqrt{2}$ como una aplicación del método de Newton-Raphson en \mathbb{R} . En aquel primer capítulo se consideró la posibilidad de obtener por el mismo método, soluciones a diversos tipos de ecuaciones — numéricas o funcionales. A lo largo de los capítulos subsecuentes nos concentramos en mostrar resultados importantes del cálculo elemental que podían ser aplicados a objetos de mayor generalidad, como los espacios vectoriales; de esta forma llegamos a la parte central de nuestro estudio.

La generalización del método de N-R se manifiesta como una importante aplicación del análisis funcional, ya que mediante su uso podemos hallar raíces de ecuaciones en cualquier espacio de Banach. El método fué desarrollado para ecuaciones en números reales durante el siglo XVII por Newton y Raphson.

El capítulo se divide en 3 secciones. La primera se inicia recordando el planteamiento del método del primer capítulo, y luego aplicamos conceptos y resultados tratados a lo largo del estudio tales como espacios de Banach, norma de operadores, diferenciación y mapeo inverso, para presentar la generalización del método de N-R; sin pérdida de generalidad, al método se le dá una pequeña simplificación para ahorrar cálculos, lo que inmediatamente se ejemplifica al tratar una ecuación diferencial.

En la segunda sección se ejemplifica la prueba de Kantorovich para validar la convergencia del proceso; la justificación teórica de esta prueba se presenta en el apéndice tanto para el método de N-R como la del método simplificado. Por último, se da una serie de ejemplos en los que podemos observar propiedades importantes y la forma de aplicar el método en diversos espacios vectoriales.

5.2 EL METODO DE NEWTON-RAPHSON

Recordemos el planteamiento dado en el primer capítulo, en él encontramos que para obtener una solución x^* a la ecuación $x=f(x)$ o lo que es lo mismo $g(x)=0$ en el que $g(x)=x-f(x)$, podíamos tomar el proceso iterativo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}, \quad n=0,1,2,\dots$$

Como vimos en el ejemplo 5 del capítulo anterior, el proceso es de segundo orden con convergencia cuadrática por lo que el proceso converge muy rápidamente; como muestra observamos en la sección 1.4 un proceso en el que $F'(x^*)=0$, lo que hacía que la convergencia de x_n a x^* fuera muy rápida. El proceso se ejemplifica en la figura 26,

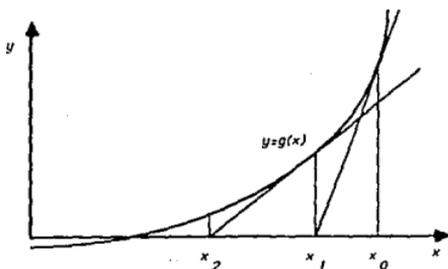


fig 26

en la figura tenemos que la tangente a $y=g(x)$, en el punto x_0 se representa por la regla

$$y - g(x_0) = (x - x_0) g'(x_0);$$

si encontramos la intersección de esta recta con el eje de las x 's ($y=0$ y $x=x_1$), obtenemos a x_1 en función de x_0 ,

$$x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)};$$

de igual forma a x_2 en función de x_1 , y así logramos el proceso

iterativo de solución para x^* . El método se generaliza inmediatamente a espacios de Banach. Si X es cualquier espacio de Banach y la función $g: X \rightarrow X$ es diferenciable, entonces

$$g(x_0+h) = g(x_0) + g'(x_0)h + \dots$$

Si olvidamos los puntos suspensivos podemos encontrar una analogía a la ecuación $y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0)$. Tomando $g(x_0+h) = 0$ tenemos $g(x_0) + g'(x_0)h = 0$, de donde $h = -[g'(x_0)]^{-1}g(x_0)$ por lo que

$$x_1 = x_0 + h = x_0 - [g'(x_0)]^{-1}g(x_0).$$

Repetiendo el mismo procedimiento n veces tenemos

$$x_{n+1} = x_n - [g'(x_n)]^{-1}g(x_n)$$

obteniendo así la generalización del método de Newton-Raphson.

Cuando trabajamos en el cálculo elemental, nuestras funciones tienen la forma $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y tenemos una idea del monto de cálculos que tendremos que hacer para iterar la función definida y obtener x_n de x_{n-1} , para lograrlo debemos encontrar $g'(x_n)$, y dividir $g(x_n)$ entre $g'(x_n)$. En el caso de la generalización a vectores, el proceso se dificulta al tratar de obtener $[g'(x_n)]^{-1}$ debido a que g bien puede ser una matriz o un operador integral para los cuales no sea tan fácil obtener su inversa, y esto se tendría que calcular para cada iteración. Este panorama nos muestra un proceso muy laborioso y poco recomendable para encontrar soluciones a ecuaciones de diferentes elementos a los de función de variable real; por esta razón, es frecuente usar un procedimiento modificado, que nos ahorra en forma considerable el trabajo.

Si, en el caso $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, en lugar de usar las tangentes en los puntos sucesivos, x_n , usamos líneas paralelas a la tangente inicial (fig 27), resultaría el esquema $x_{n+1} = x_n - [g'(x_0)]^{-1}g(x_n)$.

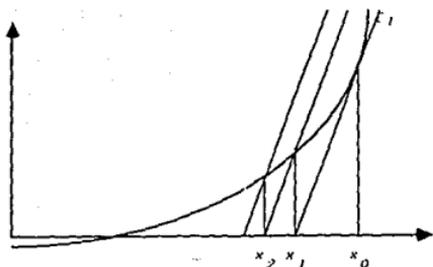


fig 27

En efecto, la tangente inicial tiene la ecuación $y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0)$, y su intersección x_1 con el eje de las x 's es

$$x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Para encontrar x_2 tomamos la ecuación de l_2

$$y - g(x_1) = g'(x_0)(x - x_1),$$

cuya intersección x_2 con el eje x es

$$x_2 = x_1 - \frac{g(x_1)}{g'(x_0)},$$

en donde x_2 está en función de x_1 y de una función en x_0 . En general, al escribir x_{n+1} en función de x_n tenemos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_0)}.$$

Nótese que el denominador permanece constante en el proceso. Generalizando el resultado anterior para nuestro método de N-R en espacios de Banach, se obtiene el proceso

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_0)]^{-1} f(x_n) \quad (1)$$

$$n=0, 1, 2, \dots,$$

que requiere el cómputo de un solo operador inverso. Para ilustrar el método damos el siguiente ejemplo detallado.

Ejemplo 1 Deseamos resolver el problema de valor inicial

$$y' + y^2 = (x+1)^{-2}, \quad y(0)=1, \quad x \geq 0. \quad (2)$$

Para encontrar una aproximación a la solución y^* del problema de valor inicial obtendremos una secuencia de aproximaciones y_0, y_1, y_2, \dots , en la que y_{n+1} se encontrará más cercana a la solución y^* que y_n en el sentido de que $||y_{n+1} - y^*|| \leq ||y_n - y^*||$. Por lo pronto, en este ejemplo nos limitaremos a obtener un esquema del método de N-R modificado para el problema de valor inicial propuesto.

Tomaremos como aproximación inicial de la solución a la función que hubiera satisfecho la ecuación anterior si el lado derecho de la misma hubiera sido 0 en lugar de $(x+1)^{-2}$; es decir, tomaremos como primera aproximación la solución a la ecuación homogénea de primer orden

$$y' + y^2 = 0, \quad y(0)=1$$

Claramente, la función que buscamos es $y_0(x) = (x+1)^{-1}$, porque

$$y_0' + y_0^2 = -(x+1)^{-2} + (x+1)^{-2} = 0.$$

Si tomamos cualquier función diferenciable $y=y(x)$ en la ecuación inicial, los lados de la ecuación diferirán por un error

$$e(x) = y'(x) + [y(x)]^2 - (x+1)^{-2}.$$

Nuestra meta es encontrar una función y que haga este error desaparecer para todo $x \geq 0$. Así, si $f(y)=e$, queremos resolver $f(y)=0$.

Utilizaremos el método de N-R modificado, explicándolo en este contexto más general y presentando una justificación de la prueba de Kantorovich para sucesiones convergentes en un espacio de Banach. Esta prueba asegura la convergencia de la aplicación del método. Presentamos el método por pasos.

1.- Inicialmente buscamos $F'(y)$. Desde luego, esto no es tan fácil como en el cálculo elemental, pues f es un operador entre espacios de funciones. Para determinar $F'(y)$, nótese que, si cambiamos a la función y por la función $y+h$, el error cambiaría a $\hat{e}(x)=e(x)+k(x)+\dots$, donde

$$\hat{e}(x) = (y+h)'(x) + [(y+h)(x)]^2 - (x+1)^2 = e(x) + h'(x) + 2y(x)h(x) + h^2(x).$$

Aquí, en $k(x)$ se agrupan los términos lineales en h , por lo que $k(x)=h'(x)+2y(x)h(x)$. Como $y(0)=1$, se requiere que $(y+h)(0)=y(0)+h(0)=1$, que obliga a que $h(0)=0$. Desde luego, h debe ser una función diferenciable. Ahora, $F'(y)$ es la función que, para y fija, asocia h con k . Valuando $F'(y)$ en $y_0(x)=(x+1)^{-1}$, obtenemos la función $F'(y_0):h \rightarrow k$ definida por

$$k(x) = h'(x) + [2h(x)(x+1)^{-1}]. \quad (3)$$

2.- Necesitamos ahora determinar el operador inverso $[F'(y_0)]^{-1}$. La ecuación diferencial (3) se puede resolver fácilmente convirtiéndola en una ecuación diferencial exacta, lo que se logra multiplicando por $(x+1)^2$ ambos lados de la ecuación, de forma que podemos integrar explícitamente de 0 a x y usando el hecho de que $h(0)=0$ tenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^x k(s)(s+1)^2 ds &= \int_0^x \frac{d}{ds} (h(s)(s+1)^2) ds, \\ &= h(x)(x+1)^2. \end{aligned}$$

Así, despejando $h(x)$ tenemos la función $k \rightarrow h$ que necesitamos como $[F'(y_0)]^{-1}$,

$$h(x) = (x+1)^{-2} \int_0^x (s+1)^2 k(s) ds. \quad (4)$$

3.- Consideremos ahora la iteración

$$y_{n+1} = y_n - [F'(y_n)]^{-1} F(y_n)$$

de la ecuación (4) vemos que $[F'(y_0)]^{-1}: k \rightarrow h$ es el operador

$$(x+1)^{-2} \int_0^x (s+1)^2 [\quad] ds$$

para el cual $k(s)$ es la función de entrada y $h(x)$ es la función de salida del operador al aplicar el método de N-R modificado, la expresión de entrada $F(y_n)$ tiene que ser insertada en el espacio entre los corchetes. Como $f(y) = e$, la expresión que necesitamos es

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n - (x+1)^{-2} \int_0^x (s+1)^2 e_n(s) ds \\ &= y_n - (x+1)^{-2} \int_0^x (s+1)^2 [y_n'(s) + y_n^2(2) - (s+1)^{-2}] ds, \end{aligned}$$

separando la integral en tres términos e integrando el primero de ellos por partes, resulta que

$$y_{n+1} = (x+1)^{-2} \left(y_n(0) + \int_0^x 2(s+1)y_n(s) ds - \int_0^x (s+1)^2 y_n^2(s) ds + x \right),$$

finalmente, simplificando

$$y_{n+1} = (x+1)^{-1} + (x+1)^{-2} \int_0^x [2(s+1)y_n(s) - (s+1)^2 y_n^2(s)] ds. \quad (5)$$

Esta es la fórmula de iteración que muestra como obtener y_{n+1} de y_n . Denotamos en adelante a y_{n+1} por $S(y_n)$. Obsérvese que $[f(y_0)]^{-1}: h \rightarrow k$ es un operador lineal, y S no lo es.

4.- Llevando a cabo los cálculos indicados, y tomando el valor inicial y_0 como $(x+1)^{-1}$, tenemos los resultados iniciales del proceso de N-R modificado:

$$y_0(x) = (x+1)^{-1},$$

$$y_1(x) = (x+1)^{-1} + x(x+1)^{-2},$$

$$y_2(x) = (x+1)^{-1} + 2(x+1)^{-2} \ln(x+1) - x(x+1)^{-3}, \dots$$

Después de estas primeras aproximaciones el cálculo para las siguientes expresiones viene a ser mucho más complicado (obsérvese la existencia del logaritmo en y_2), por lo que sería más conveniente usar integración numérica de aquí en adelante.

5.3 LA PRUEBA DE KANTOROVICH

La seguridad de que el proceso definido por la iteración de N-R modificada, $y_{n+1} = S(y_n)$ converge a una solución viene dada por la prueba de Kantorovich, esta prueba se basa en la búsqueda de otro proceso iterativo $\phi(t)$ de dominio e imagen reales cuyo comportamiento es inferior o igual al de $S(y)$ en cuanto a la rapidez de su convergencia (de tal forma que, si el proceso en $S(y)$ no converge, tampoco lo hará el proceso en $\phi(t)$). Para ello consideramos un proceso iterativo $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \rightarrow \phi(t)$ es decir, $t_{n+1} = \phi(t_n)$ con $t_0 = 0$, $t_n \geq 0$, y las siguientes propiedades:

(a) El primer "salto" para y no es más largo que el primer salto para t ,

$$\|y_1(x) - y_0(x)\| \leq |t_1 - t_0| = |t_1| = t_1;$$

nótese que $|t_{n+1} - t_n| = t_{n+1} - t_n$, pues en el proceso $\phi(t)$ los números t_n irán incrementándose.

(b) $y_{n+1} = S(y_n)$ es al menos tan bien comportada como la iteración $t_{n+1} = \phi(t_n)$, en el sentido de que $\|y_{n+1} - y_n\|$, la longitud del n -ésimo eslabón de la cadena de puntos de y , nunca excederá a $|t_{n+1} - t_n|$, la longitud del eslabón correspondiente en la cadena de números reales t ; es decir,

$$\|S(y_n) - y_n\| \leq \phi(t_n) - t_n.$$

La condición (b) puede interpretarse en términos de la longitud total de la cadena, es decir, $||y-y_0|| \leq t$ implica que $||S'(y)|| \leq \phi'(t)$.

La comparación con la iteración $t \rightarrow \phi(t)$ sólo será útil si esta última iteración converge. Así, supondremos que existe ϕ' , por lo que ϕ debe ser continua, de tal forma que la iteración convergerá a una solución $t=\phi(t)$ que llamaremos a esta solución T . Supondremos también que ϕ está definida en un intervalo que incluye a $[0, t]$. Como nuestro propósito es obtener $||S'(y)|| \leq \phi'(t)$, debemos tomar $\phi'(t) \geq 0$, de modo que ϕ será una función creciente.

La figura 28 muestra una situación típica; en ella, la gráfica de $z=\phi(t)$ cruza la gráfica de $z=t$ donde $t=T$. Es claro que los números $0, t_1, t_2, \dots$ forman una sucesión creciente y que tal sucesión converge a T .

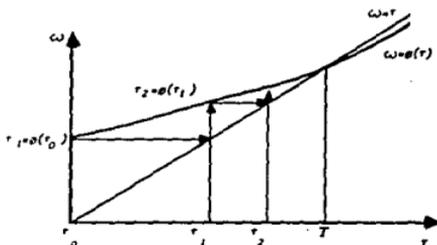


fig 28

Es importante justificar la proposición de que cada eslabón de la cadena y_0, y_1, y_2, \dots no es más grande que el correspondiente eslabón de la cadena $0, t_1, t_2, \dots$. La restricción (a) establece que el primer eslabón en la cadena de y 's no es más grande que el primer eslabón de la cadena de t 's, de tal forma que nada necesitamos probar para estos primeros eslabones.

Para los segundos eslabones queremos probar que $||y_2 - y_1|| \leq |t_2 - t_1|$. Como $y_2 = S(y_1) = S(S(y_0))$, tenemos $||y_2 - y_1|| = ||S(y_1) - S(y_0)||$, el cual puede ser estimado en términos de $||S'(y)||$. Si nosotros arrancamos de un punto y_0 en un tiempo $t=0$ y viajamos a lo largo de una recta, con velocidad constante, para llegar a un punto y_1 en un tiempo $t=t_1$, esta velocidad será $||y'(t)|| = ||y_1 - y_0|| / t_1$; pero, por la hipótesis (a), $||y_1 - y_0|| \leq t_1$, lo cual muestra que $||y'(t)|| \leq 1$ — la rapidez de movimiento nunca excede de 1. Por lo tanto, en cualquier tiempo t en el

intervalo $[0, t_1]$, la distancia de entre y y el punto de partida y_0 no puede excederse del tiempo t , $||y - y_0|| \leq t$; y por la condición (b) tenemos que $||S'(y)|| \leq \phi'(t)$. Con ayuda de resultados obtenidos en la sección de integración generalizada tenemos

$$||S(y_1) - S(y_0)|| = \left| \int_0^{t_1} S'(y) y'(t) dt \right| \leq \int_0^{t_1} ||S'(y)|| ||y'(t)|| dt \\ \leq \int_0^{t_1} \phi'(t) dt,$$

en donde empleamos tanto el que $||S'(y)|| \leq \phi'(t)$ como el que $||y'(t)|| \leq 1$. Finalmente obtenemos

$$||y_2 - y_1|| = ||S(y_1) - S(y_0)|| \leq \int_0^{t_1} \phi'(t) dt = \phi(t_1) - \phi(t_0) = t_2 - t_1.$$

Así, comenzando con $||y_2 - y_1||$ logramos obtener $t_2 - t_1$. Para los terceros eslabones procederemos similarmente. Como $||y_3 - y_2|| = ||S(y_2) - S(y_1)||$, arrancamos del punto y_1 para continuar el viaje, moviéndonos con velocidad constante desde y_1 en t_1 hasta y_2 en t_2 . Hemos probado que la longitud del eslabón es menor que $t_2 - t_1$, así que la rapidez no vuelve a exceder a 1. En consecuencia, entre el tiempo $t=0$ y $t=t_2$, el punto y se ha movido con una rapidez de a lo más 1, por lo que la distancia recorrida desde el punto inicial no excede a t . Por la estipulación (b), la condición $||y - y_0|| \leq t$ es satisfecha, y entonces concluimos que $||S'(y)|| \leq \phi'(t)$ aún es válido. Por el mismo tipo de argumento resulta entonces que $||y_3 - y_2|| \leq t_3 - t_2$.

Es claro que esta construcción puede ser continuada en forma indefinida, que la rapidez de y nunca excederá la unidad, y que el resultado para cada paso es base para obtener el siguiente. La exactitud de la prueba puede ser establecida por inducción matemática. La información acerca de la cadena y_0, y_1, y_2, \dots así obtenida nos permite concluir que la iteración converge a un límite y .

Claramente la prueba sólo puede ser aplicada después de que una función particular ϕ haya sido construida; para ayudarnos en mostrar la aplicación de la prueba volveremos a nuestro ejemplo del problema de

valor inicial de la sección anterior. De los resultados obtenidos para este ejemplo, al utilizar las aproximaciones $y_0(x)$ y $y_1(x)$ tenemos

$$y_1(x) - y_0(x) = x(x+1)^{-2}.$$

Esta función se incrementa hasta $x=1$ después comienza a decrecer. Si nos limitamos al intervalo $[0, a]$ para x , con $0 < a \leq 1$, entonces

$$||y_1 - y_0|| = a(a+1)^{-2}$$

en la norma usual para $C[0, a]$. La condición (a) requiere que $||y_1 - y_0|| \leq \phi(0)$ y satisfacemos esto sencillamente al escoger

$$\phi(0) = a(a+1)^{-2}.$$

La condición (b) envuelve $S'(y)$, la cual debe ser computada. Para el operador S definido por la ecuación (5) (ignorando el subíndice n en tal ecuación debido a que necesitamos $S(y)$ y no $S(y_n)$), se tiene que

$$S(y+h) = (x+1)^{-1} + (x+1)^{-2} \int_0^x [2(s+1)(y+h)(s) - (s+1)^2(y+h)^2(s)] ds,$$

$$S(y) = (x+1)^{-1} + (x+1)^{-2} \int_0^x [2(s+1)y(s) - (s+1)^2y^2(s)] ds,$$

$$S(y+h) - S(y) = (x+1)^{-2} \int_0^x [2(s+1)h(s) - 2(s+1)^2y(s)h(s) + h^2(s)] ds,$$

si el incremento h a la función y es pequeño, podemos aproximar el impacto en S por

$$S(y+h) - S(y) \approx S'(y)h(x) = (x+1)^{-2} \int_0^x [2(s+1) - 2(s+1)^2y(s)] h(s) ds,$$

y escogiendo a h como una función unitaria — con norma 1, podemos establecer una cota para la magnitud de este operador diferencial:

$$||S'(y)|| = \sup_{0 \leq x \leq a} \left\{ (x+1)^{-2} \int_0^x |2(s+1) - 2(s+1)^2y(s)| ds \right\}.$$

Como no sabemos qué función representa y , parece imposible a primera instancia encontrar la norma del operador y no es claro qué es lo que deberíamos hacer para continuar. La clave se encuentra en la proposición (b): tenemos el problema de encontrar ϕ tal que $\|y - y_0\| \leq t \Rightarrow \|S'(y)\| \leq \phi'(t)$.

Ahora, $y_0(s) = (1+s)^{-1}$, por lo que $\|y - y_0\| \leq t$ quiere decir

$$|(s+1)^{-1} - y(s)| \leq t;$$

multiplicando ambos lados por $2(s+1)^2$ resulta que

$$|2(s+1) - 2(s+1)^2 y(s)| \leq 2t(s+1)^2,$$

desigualdad en la que observamos el integrando de la ecuación (5). En consecuencia, cuando $\|y - y_0\| \leq t$ tenemos

$$\|S'(y)\| \leq \sup_{0 \leq x \leq a} \left\{ (x+1)^{-2} \int_0^x 2t(s+1)^2 ds \right\};$$

como

$$\int_0^x (s+1)^2 ds = [(x+1)^3 - 1] / 3 < (x+1)^3 / 3,$$

encontramos que $\|S'(y)\| \leq \sup_{0 \leq x \leq a} \{2t(x+1)/3\} = 2t(a+1)/3$, por lo que si tomamos $\phi'(t) = 2t(a+1)/3$ aseguraremos que la condición (b) será satisfecha.

Así, la siguiente función reúne ambas condiciones:

$$\phi(t) = \frac{a}{(a+1)^2} + \frac{a+1}{3} t^2.$$

Iniciando con $t_0=0$ vemos que la iteración $t \rightarrow \phi(t)$ convergerá rápidamente. Sabemos que la iteración $y_n \rightarrow S(y_n)$ lo hará al menos tan bien. Sin embargo nuestra información funciona para un intervalo muy corto — solamente para $[0, a]$. Con valores de a más grandes nosotros sabremos que pasará para un intervalo mayor, pero la tasa de convergencia sería menor. Debemos recordar que nuestro análisis está basado en la hipótesis de que $a \leq 1$. Para $a > 1$ habríamos tenido que considerar la función:

$$\phi(t) = 0.25 + [t^2 (a+1)/3].$$

Existe una barrera natural en nuestra investigación en $a=2$. Si $a > 2$ la ecuación $t=\phi(t)$ no tiene raíces reales y la iteración $t_n \rightarrow \phi(t_n)$ no puede converger. Esto no prueba que la iteración $y_n = S(y_n)$ diverja para $x > 2$; meramente quiere decir que nuestro presente método para probar la convergencia se evapora.

5.4 OTROS EJEMPLOS

A continuación expondremos algunos ejercicios que pueden ayudarnos a dominar mejor el método, analizando en ellos algunos resultados importantes que ayudan a la simplificación del mismo.

Ejemplo 2 Encontrar el operador S correspondiente a la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \rightarrow (f_1(x,y), f_2(x,y))$ con el valor inicial $(0.1, -0.6)$, donde

$$(f_1(x,y), f_2(x,y)) = (xy + 0.07, x^2 + y^2 - 0.41).$$

Determinése una función $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que permita examinar la convergencia del proceso de N-R.

Tenemos

$$f(x,y) = (xy + 0.07, x^2 + y^2 - 0.41),$$

$$F(x,y) = J_f(x,y) = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial x & \partial f_1 / \partial y \\ \partial f_2 / \partial x & \partial f_2 / \partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{bmatrix},$$

$$[F(x,y)]^{-1} = \frac{1}{2(y^2 - x^2)} \begin{bmatrix} 2y & -x \\ -2x & y \end{bmatrix},$$

$$[F(x_0, y_0)]^{-1} = -\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix},$$

y se requiere encontrar $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = (0,0)$ por el método modificado de N-R — véase ejemplo 4 del capítulo 1. El operador

$S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ proviene de la ecuación

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n, y_n) - [f'(x_0, y_0)]^{-1} f(x_n, y_n),$$

de modo que

$$S(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xy + 0.07 \\ x^2 + y^2 - 0.41 \end{pmatrix}.$$

De aquí resulta que

$$S'(x, y) = I + \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En este ejemplo convenimos usar la norma infinito $\|\cdot\|_\infty$ al evaluar el término $\|S'(x+x_0, y+y_0)\|$, esto lo hacemos para acotar la norma en un valor no muy grande, recuerde que $\|\cdot\|_1 \geq \|\cdot\|_2 \geq \dots \geq \|\cdot\|_\infty$ (ejemplo 5, capítulo 3); para la prueba, el lector puede usar la norma que mejor se acomode a su problema particular. Así,

$$S'(x+0.1, y-0.6) = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2x+12y & 12x+2y \\ 12x+2y & 2x+12y \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} \|S'(x+0.1, y-0.6)\|_\infty &= \frac{1}{7} \sup \{ |2x+12y+12x+2y|, |12x+2y+2x+12y| \} \\ &= \frac{1}{7} |2x+12y+12x+2y| = \frac{1}{7} |14x+14y| \\ &\leq 2(|x|+|y|) \leq 2(t+t) = 4t = \phi'(t), \end{aligned}$$

siempre que $|x| \leq t$ y $|y| \leq t$. Ahora bien, de la primera iteración con S obtenemos

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) = S(x_0, y_0) = S(0.1, -0.6) &= \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.6 \end{pmatrix} + \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (0.1)(-0.6) + 0.07 \\ (0.1)^2 + (-0.6)^2 - 0.41 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.11143 \\ -0.63143 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

por lo que la longitud de la primer eslabón de la cadena para S cumple

$$\begin{aligned} ||(x_0, y_0) - (x_1, y_1)|| &= ||(0.1, -0.6) - (0.11143, -0.63143)||_{\infty} \\ &= \sup \{0.01143, 0.03143\} \leq 0.0315, \end{aligned}$$

y así podemos afirmar que la iteración para $\phi(t)$ con $t_0=0$ que sirve de "cota pesimista" para la iteración de S puede estar dada por

$$\phi(t) = .0315 + \int_0^t 4s \, ds = 0.0315 + 2t^2.$$

Si comparamos este método con el empleado en el ejemplo 4 del capítulo 1 podemos observar fácilmente que el método de N-R modificado es más eficiente para encontrar una buena aproximación a la solución en cuanto a su rapidez de convergencia. A continuación mostramos los resultados de ambas iteraciones, iniciando con $(x_0, y_0) = (x_0, v_0) = (0.1, -0.6)$:

$$\text{iteración 1} \longrightarrow (x_{n+1}, v_{n+1}) = \begin{pmatrix} x_n v_n + x_n + 0.07 \\ x_n^2 + v_n^2 + v_n - 0.41 \end{pmatrix},$$

$$\text{iteración 2} \longrightarrow (x_{n+1}, y_{n+1}) = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n + y_n + 0.07 \\ x_n^2 + y_n^2 - 0.41 \end{pmatrix};$$

| n | iteración 1 | | iteración 2 | |
|----|-------------|-----------|-------------|-----------|
| | x_n | v_n | x_n | y_n |
| 0 | 0.1 | -0.6 | 0.1 | -0.6 |
| 1 | 0.11 | -0.64 | 0.111429 | -0.631429 |
| 2 | 0.1096 | -0.6283 | 0.110973 | -0.630573 |
| 3 | 0.110738 | -0.631527 | 0.111004 | -0.630620 |
| 4 | 0.110804 | -0.630438 | 0.111002 | -0.630617 |
| 5 | 0.110949 | -0.630708 | 0.111002 | -0.630618 |
| 6 | 0.110973 | -0.630606 | 0.111002 | -0.630618 |
| 7 | 0.110993 | -0.630627 | | |
| 8 | 0.110998 | -0.630617 | | |
| 9 | 0.111001 | -0.630619 | | |
| 10 | 0.111002 | -0.630618 | | |
| 11 | 0.111002 | -0.630618 | | |

Observando los últimos renglones de cada tabla es claro que la iteración 2 converge más rápidamente. \square

Ejemplo 3 Para $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $(x, y) \rightarrow (x^2 + y^2 - 200, y^3 + xy - x^3)$ y el valor inicial $(x_0, y_0) = (10, 10)$, demostrar que $[f'(x_0, y_0)]^{-1} = N$, donde

$$N = \frac{1}{12000} \begin{pmatrix} 310 & -20 \\ 290 & 20 \end{pmatrix}.$$

Encuentre una función $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que permita evaluar la convergencia de N-R.

Claramente,

$$f'(x, y) = J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y-3x^2 & 3y^2+x \end{pmatrix},$$

$$f'(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 20 & 20 \\ -290 & 310 \end{pmatrix} \quad y$$

$$[f'(x_0, y_0)]^{-1} = \frac{1}{12000} \begin{pmatrix} 310 & -20 \\ 290 & 20 \end{pmatrix} = N.$$

Para calcular $S'(x, y)$ tenemos, por definición de S ,

$$S(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - N \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 200 \\ y^3 + xy - x^3 \end{pmatrix},$$

con lo que

$$S'(x, y) = I - N \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y-3x^2 & 3y^2+x \end{pmatrix}.$$

Si valuamos el operador $S'(x, y)$ en el punto inicial (x_0, y_0) tenemos

$$S'(x_0, y_0) = I - N \begin{pmatrix} 20 & 20 \\ -290 & 310 \end{pmatrix} = I - I = 0;$$

este resultado no es sorprendente pues, de la ecuación (5), $S(x, y) = (x, y) - [f'(x_0, y_0)]^{-1} f(x, y)$, por lo que $S'(x, y) = I - [f'(x_0, y_0)]^{-1} f'(x, y)$, y entonces

$$S'(x_0, y_0) = I - [f'(x_0, y_0)]^{-1} f'(x_0, y_0) = I - I = 0.$$

En este caso

$$\begin{aligned} S'(x+x_0, y+y_0) &= I - N \begin{pmatrix} 2(x+10) & 2(y+10) \\ (y+10) - 3(x+10)^2 & 3(y+10)^2 + (x+10) \end{pmatrix} \\ &= -N \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -3x^2 - 60x + y & 3y^2 + 60y + x \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{600} \begin{pmatrix} 3x^2 + 91x - y & -3y^2 - x + 29y \\ -3x^2 - 31x + y & 3y^2 + x + 89y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

cuya magnitud satisface

$$\begin{aligned} \|S'(x+x_0, y+y_0)\| &= \frac{1}{600} \max \begin{pmatrix} |3x^2 + 91x - y| + |-3y^2 + 29y - x| \\ |-3x^2 - 31x + y| + |3y^2 + 89y + x| \end{pmatrix} \\ &\leq \frac{1}{600} \max \begin{pmatrix} 3t^2 + 91t + t + 3t^2 + 29t - t, \\ 3t^2 + 31t + t + 3t^2 + 89t + t \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{600} (6t^2 + 122t) \leq \frac{1}{100} t^2 + \frac{1}{3} t, \end{aligned}$$

por lo que puede escogerse $\phi(t) = t^2/100 + t/3$. Ahora bien, $(x_0, y_0) = (10, 10)$ y $(x_1, y_1) = S(x_0, y_0) = (10 + 1/6, 10 - 1/6)$; por lo tanto,

$$\|(x_0, y_0) - (x_1, y_1)\|_\infty = 1/6$$

y una función adecuada para la prueba de Kantorovich es

$$\phi(t) = \frac{1}{6} + \int_0^t \left(\frac{s^2}{100} + \frac{s}{3} \right) ds = \frac{t^3}{300} + \frac{t^2 + 1}{6}. \quad \square$$

Ejemplo 4 Supóngase que la función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se encuentra definida por $f(v) = Mv + g(v)$ con matriz constante M , que la ecuación $f(v) = 0$ es resuelta por el método de N-R con el vector inicial v_0 , y que $g'(v_0) = 0$. Pruebe que S es la función $v \rightarrow -M^{-1}g(v)$.

Aquí,

$$f(v) = Mv + g(v),$$

$$F'(v) = M + g'(v),$$

$$F'(v_0) = M + g'(v_0) = M + 0 = M, \text{ y}$$

$$[F'(v_0)]^{-1} = M^{-1};$$

así,

$$S(v) = v - M^{-1}(Mv + g(v)) = v - M^{-1}Mv - M^{-1}g(v) = v - v - M^{-1}g(v) = -M^{-1}g(v).$$

En particular para la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $(x, y) \rightarrow (-37x + 9y + x^5 + y^5 + 25, 4x - 28y + x^3y^3 + 18)$, con $v_0 = (x_0, y_0) = (0, 0)$, se tiene

$$M = \begin{bmatrix} -37 & 9 \\ 4 & -28 \end{bmatrix}, \quad g(v) = \begin{bmatrix} x^5 + y^5 + 25 \\ x^3y^3 + 18 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad g'(v) = \begin{bmatrix} 5x^4 & 5y^4 \\ 3x^2y^3 & 3x^3y^2 \end{bmatrix}.$$

De esta forma, S es la función de I_∞ en I_∞ dada por

$$S(x, y) = \frac{1}{1000} \begin{bmatrix} 28 & 9 \\ 4 & 37 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^5 + y^5 + 25 \\ x^3y^3 + 18 \end{bmatrix};$$

nuevamente hemos escogido la norma $\|\cdot\|$ para el análisis de convergencia. Derivando $S^3(x, y)$ es el operador de I_∞ cuya matriz es

$$\begin{aligned} S^3(x, y) &= \frac{1}{1000} \begin{bmatrix} 28 & 9 \\ 4 & 37 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5x^4 & 5y^4 \\ 3x^2y^3 & 3x^3y^2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{1000} \begin{bmatrix} 140x^4 + 27x^2y^3 & 140y^4 + 27x^3y^2 \\ 20x^4 + 111x^2y^3 & 20y^4 + 111x^3y^2 \end{bmatrix}, \text{ y} \end{aligned}$$

$$\|S'(x,y)\|_{\infty} = \sup \left\{ \left\| \frac{1}{1000} \begin{pmatrix} 140x^4+27x^2y^3 & 140y^4+27x^3y^2 \\ 20x^4+111x^2y^3 & 20y^4+111x^3y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \right\},$$

donde $\|(w_1, w_2)\|_{\infty} = 1$; recordando que $\|\cdot\|_{\infty}$ se determina por el valor máximo de la suma del valor absoluto de las columnas, se tiene

$$\|S'(x,y)\| = \frac{1}{1000} \max \left\{ |140x^4+27x^2y^3| + |140y^4+27x^3y^2|, |20x^4+111x^2y^3| + |20y^4+111x^3y^2| \right\},$$

tomando a $t = \max\{|x|, |y|\}$ resulta que

$$\begin{aligned} \|S'(x,y)\| &\leq .001 \max\{140t^4+27t^5+140t^4+27t^5, 20t^4+111t^5+20t^4+111t^5\} \\ &= .001 \max\{280t^4+54t^5, 40t^4+222t^5\}. \end{aligned}$$

Si se toma el coeficiente mayor en cada potencia de t para garantizar la desigualdad tenemos entonces que

$$\|S'(x,y)\| \leq 0.28t^4 + 0.222t^5 = \phi^*(t).$$

Por otro lado,

$$v_1 = S(v_0) = S(0,0) = \frac{1}{1000} \begin{pmatrix} 28 & 9 \\ 4 & 37 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.862 \\ 0.777 \end{pmatrix},$$

por lo que $\|v_1 - v_0\| = 0.862 = \phi(0)$. Finalmente, obtenemos la función de Kantorovich

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \phi(0) + \int_0^t \phi^*(s) ds = 0.862 + \int_0^t (0.28s^4 + 0.222s^5) ds = \\ &= 0.862 + 0.056t^5 + 0.37t^6. \end{aligned} \quad \square$$

Ejemplo 5 La función $S: C[0, a] \rightarrow C[0, a]$ donde $a > 0$ está definida por $y \rightarrow z$ con

$$z(x) = \int_0^x (y(v) + v)^2 dv.$$

Demuestre que, para $y_0(x) = 0$, el comportamiento de la iteración S puede ser estimado por medio de la comparación con la función

$$\phi(t) = \frac{1}{3}a^3 + a^2t + at^2.$$

Inicialmente tenemos

$$z(x) = \int_0^x (y(v) + v)^2 dv;$$

si $y \rightarrow z$ y $y+h \rightarrow \hat{z}$, entonces

$$\begin{aligned} \hat{z}(x) &= \int_0^x ((y+h)(v) + v)^2 dv = \int_0^x (y^2(v) + 2y(v)h(v) + h^2(v) + 2y(v)v + 2h(v)v + v^2) dv \\ &= \int_0^x (y(v) + v)^2 dv + 2 \int_0^x h(v) (y(v) + v) dv + \int_0^x h^2(v) dv \\ &= z(x) + k(x) + \text{términos no lineales en } h. \end{aligned}$$

Aquí $k(x) = (S'(y)h)(x)$. Si tomamos $\|h(v)\| \leq 1$,

$$\begin{aligned} \|S'(y)h\| &= \|k\| = \sup_{0 \leq x \leq a} |k(x)| = \sup_{0 \leq x \leq a} \left| 2 \int_0^x (y(v) + v)h(v) dv \right| \\ &\leq 2 \sup_{0 \leq x \leq a} \int_0^x |y(v) + v| |h(v)| dv \leq 2 \sup_{0 \leq x \leq a} \int_0^x |y(v) + v| dv \\ &\leq 2 \sup_{0 \leq x \leq a} \left[\int_0^x |y(v)| dv + \int_0^x |v| dv \right] \\ &\leq 2 \sup_{0 \leq x \leq a} \int_0^x |y(v)| dv + 2 \sup_{0 \leq x \leq a} \int_0^x |v| dv. \end{aligned}$$

Entonces

$$||S'(y)|| = \sup \left\{ ||S'(y) \cdot h||, ||h|| \leq 1 \right\} \leq 2 \sup \int_0^x |y(v)| dv + 2 \sup \int_0^x |v| dv,$$

pues cada $||S'(y) \cdot h||$ considerada es menor o igual que esta cota.

Ahora bien, requerimos que $|y(s) - y_0(s)| \leq t$; como $y_0 = 0$, esto quiere decir que $|y(s)| \leq t$, y tenemos que

$$||S'(y)|| \leq 2 \sup_{0 \leq x \leq a} \int_0^x t dv + 2 \sup_{0 \leq x \leq a} \int_0^x v dv = 2 \sup_{0 \leq x \leq a} tx + \sup_{0 \leq x \leq a} x^2 = 2at + a^2 = \phi'(t).$$

De esta forma podemos encontrar la función ϕ que sirve para definir el proceso $t_{n+1} = \phi(t_n)$ usado para probar la convergencia de S . Así,

$$\begin{aligned} \phi(t) &= ||y_1 - y_0|| + \int_0^t \phi'(s) ds = ||S(y_0) - y_0|| + \int_0^t (2as + a^2) ds \\ &= \sup_{0 \leq x \leq a} \int_0^x s^2 ds + at^2 + a^2t = at^2 + a^2t + a^3/3. \end{aligned}$$

Podemos demostrar que la iteración S aquí considerada, surge naturalmente del proceso de N-R para resolver la ecuación diferencial

$$f(u) = \frac{du}{dx} - (x+u)^2 = 0$$

con las condiciones $u(0) = 0$ y $u_0(x) = -x$. En este caso, $e = u' - (x+u)^2$ y, si u cambia a $u+h$, $e(x)$ cambia a $\hat{e}(x) = e(x) + k(x)$, en donde

$$\begin{aligned} \hat{e} &= (u+h)' - (x+u+h)^2 = u' + h' - (x^2 + 2xu + 2xh + u^2 + h^2 + 2uh) \\ &= u' - (x+u)^2 + h' - (2(x+u)h + h^2) = e(x) + k(x), \end{aligned}$$

luego $k(x) = h'(x) - 2(x+u(x))h(x) + \dots$, en donde los puntos suspensivos representan una cantidad despreciable cuando $h(x)$ es una función que toma valores pequeños. Como $F'(u_0)$ es el operador que transforma h en k , $[F'(u_0)]^{-1}$ es el operador que regresa k a h :

$$h(x) = \int_0^x k(t) dt = [F'(u_0)]^{-1}(k).$$

De esta forma, el método de N-R origina la función recursiva

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= u_n(x) - [F'(u_0)]^{-1}f(u_n) = u_n(x) - [F'(u_0)]^{-1} \cdot \left\{ \frac{du_n(x)}{dx} - (x+u_n(x))^2 \right\} \\ &= u_n(x) - \int_0^x \left[(du_n(s)/ds) - (s+u_n(s))^2 \right] ds \\ &= u_n(x) - u_n(x) + u_n(0) + \int_0^x (s+u_n(s))^2 ds = u_n(0) + \int_0^x (s+u_n(s))^2 ds. \end{aligned}$$

Puede verificarse que $u_n(0)=0$, $n=0,1,2, \dots$. En efecto,

$$u_0(x) = -x \Rightarrow u_0(0) = 0,$$

$$u_1(x) = u_0(x) + \int_0^x (s+u_0(s))^2 ds \Rightarrow u_1(0) = u_0(0) + \int_0^0 (s+u_0(s))^2 ds = u_0(0) = 0,$$

$$u_2(x) = u_1(x) + \int_0^x (s+u_1(s))^2 ds \Rightarrow u_2(0) = u_1(0) + \int_0^0 (s+u_1(s))^2 ds = u_1(0) = 0,$$

...

En consecuencia,

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= u_n(0) + \int_0^x (s+u_n(s))^2 ds = 0 + \int_0^x (s+u_n(s))^2 ds \\ &= \int_0^x (y(t)+t)^2 dt, \text{ con } y(t) = u_n(t), \end{aligned}$$

así se ve claramente que la iteración corresponde al mapeo S definido originalmente. Por último, obsérvese que la función iterada $u_1(x)$ es precisamente la función $y_0(x)=0$.

$$u_1(x) = \int_0^x (u_0(t)+t)^2 dt = \int_0^x (-t+t)^2 dt = 0 = y_0(x). \quad \square$$

Ejemplo 6 Considérese la función $f:C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ que mapea $y \rightarrow z$ mediante la regla

$$z(x) = b - y(x) + axy^2(x) + a \int_1^x y(t)^2 dt, \text{ con } a, b > 0.$$

Para $y_0(x)=0$, encontraremos primero la función S del esquema iterativo de N-R que resuelve $f(y)=0$. La inversa de $f'(y_0)$, por lo general difícil de encontrar, aquí es evidente.

Si $y \rightarrow y+h$ entonces $z \rightarrow z+k$, donde k está determinada por

$$\begin{aligned} k(x) &= f(y+h) - f(y) \\ &= -h(x) + 2axy(x)h(x) + 2a \int_1^x y(t)h(t) dt + \text{términos no lineales en } h. \end{aligned}$$

Si $y_0(x)=0$ entonces $h(x) \approx -k(x)$, por lo que se nos reduce en forma considerable la función derivada inversa en el punto inicial; si $f'(y_0)$ es el operador que manda h a $-k$, $[f'(y_0)]^{-1}$ es el operador que manda k a $-h$, de modo que

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n - [f'(y_0)]^{-1}f(y_n) = y_n + f(y_n) = y_n + b - y_n + axy_n^2 + a \int_1^x y_n^2(t) dt \\ &= b + axy_n^2 + a \int_1^x y_n^2(t) dt. \end{aligned}$$

En vista de que $y_{n+1} = S(y_n)$, resulta que

$$S(y) = b + axy^2(x) + a \int_1^x y^2(t) dt.$$

Es fácil demostrar que $(S'(y)h) \cdot (x) = 2axy(x)h(x) + 2a \int_1^x y(t)h(t) dt$ por lo que procedemos a buscar la $\phi(t)$ correspondiente en la prueba de la convergencia de S . Tenemos

$$||y - y_0|| = ||y - 0|| = ||y(s)|| \leq t,$$

por otro lado

$$\begin{aligned} ||S'(y)|| &= ||2axy(x) + 2a \int_1^x y(s) ds|| \leq 2a ||xt + \int_1^x t ds|| \\ &= 2at \sup_{0 \leq x \leq 1} \{ |2x-1| \} = 2at = \phi'(t), \end{aligned}$$

de modo que, $\phi(t) = at^2 + ||y_1(s)|| = at^2 + b$.

Llevando a cabo ambas iteraciones S y ϕ para $n=0, 1, 2$, se obtienen:

$$\begin{array}{ll} y_0(x) = 0 & t_0 = 0 \\ y_1(x) = b & t_1 = \phi(t_0) = \phi(0) = b \\ y_2(x) = b + ab^2(2x-1) & t_2 = \phi(t_1) = \phi(b) = b + ab^2 \end{array}$$

Claramente podemos ver cómo de eslabón a eslabón la longitud de éstos en la cadena generada por S es a lo más la longitud de los generados por ϕ , esto es, $||y_{n+1} - y_n|| \leq t_{n+1} - t_n$:

$$||y_1 - y_0|| = ||y_1|| = b = t_1 - t_0$$

$$||y_2 - y_1|| = ||ab^2(2x-1)|| = \sup_{0 \leq x \leq 1} \{ |ab^2(2x-1)| \} = ab^2 = t_2 - t_1. \quad \square$$

Ejemplo 7 Demostrar que si $f(y) = Ly - g(y)$ donde L es un operador lineal y $g'(y_0) = 0$ entonces $S(y) = L^{-1}[g(y)]$.

De hecho, si y cambia a $y+h$ entonces $f(y)$ cambiará a $f(y)+k(y)$ donde $k(y)$ estará dada por

$$k(y) = f(y+h) - f(y) = L(y+h) - g(y+h) - L(y) + g(y) = L(h) - (g(y+h) - g(y));$$

aquí la expresión $(g(y+h) - g(y))$ puede ser expandida en $g'(y)h +$ algo no lineal en h y, como al evaluar en $y=y_0$, $g'(y_0) = 0$, resulta que $k(y_0) = L(h) + \dots$. Así

$$h(x) \simeq L^{-1}(k(y_0)) \cdot (x).$$

Esta expresión define $[f(y_0)]^{-1}: k \rightarrow h$, con la que

$$\begin{aligned} S(y) &= y - [F'(y_0)]^{-1} f(y) \\ &= y - L^{-1}[Ly - g(y)] = L^{-1}[g(y)]. \end{aligned}$$

En este mismo ejemplo podemos ver que, si

$$h(x) + \int_0^x h(s) ds = k(x)$$

entonces $L=I+M$ en donde I es el operador idéntico y M denota a la integral; claramente L es un operador lineal. Además, es evidente que $h'(x)+h(x)=k'(x)$; la solución de esta ecuación diferencial lineal de primer orden en $h(x)$ es

$$h(x) = h(0)e^{-x} + e^{-x} \int_0^x e^s k'(s) ds.$$

Integrando por partes el segundo término de esta expresión, y tomando en cuenta que $h(0)=k(0)$, entonces

$$h(x) = k(x) - e^{-x} \int_0^x e^s k(s) ds.$$

Defínase $f: C[0, c] \rightarrow C[0, c]$ como el mapeo $y \rightarrow z$ determinado por

$$z(x) = y(x) + \int_0^x y(s) ds - ay^2(x) - b,$$

donde las constantes a, b y c son positivas. Con la ayuda de los resultados anteriores podemos encontrar la función de iteración S para resolver la ecuación $f(y)=0$, teniendo como valor inicial $y_0(x)=0$.

Empleando la notación introducida anteriormente,

$$L(y) = y(x) + \int_0^x y(s) ds, \quad g(y) = ay^2(x) + b \quad \text{y} \quad g'(0)=0,$$

por lo que, como antes obtenemos

$$z(x) = f(y) = L(y) - g(y) \quad \text{y} \quad S(y) = L^{-1}g(y).$$

Para obtener L^{-1} aplicamos el resultado alcanzado en este ejemplo, que nos lleva a

$$S(y) = g(y) - e^{-x} \int_0^x e^s g(s) ds = ay^2(x) + b - e^{-x} \int_0^x e^s (ay^2(s) + b) ds .$$

Así,

$$S'(y) = 2ay(x)h(x) - 2ae^{-x} \int_0^x e^s y(s)h(s) ds .$$

Finalmente, determinamos una función ϕ que pueda ser utilizada en la prueba de la convergencia del proceso inducido por S :

$$||S'(y)|| \leq 2at - 2ae^{-x}t \int_0^x e^s ds = 2ate^{-x} \leq 2at = \phi'(t) ,$$

$$\phi(t) = at^2 + ||y_1 - y_0|| = at^2 + ||e^{-x}b|| = at^2 + b .$$

La función $\phi(t)$ obtenida en este caso coincide con la función del ejemplo anterior.

DIFICULTADES EN LA APLICACION DE LOS METODOS

6.1 INTRODUCCION

Como último capítulo mostramos algunas de las más serias dificultades con que nos enfrentamos al aplicar el método de N-R generalizado o la prueba de Kantorovich a problemas prácticos. Examinaremos estas dificultades al explorar dos problemas concretos: el primero se presenta dentro de la economía descriptiva en la búsqueda de un modelo que describa la función de producción en una economía determinada; el otro problema surge en la ciencia actuarial dentro de lo que se conoce como teoría del riesgo. En ambos casos se describe el contexto de los problemas y se explican las variables de los modelos considerados antes de proceder a la aplicación de los algoritmos numéricos estudiados en esta tesis.

6.2 UNA APLICACION DEL METODO DE NEWTON-RAPHSON GENERALIZADO EN LA TEORIA MACROECONOMICA.

6.2.1 FUNCIONES DE PRODUCCION CON ELASTICIDAD VARIABLE DE SUSTITUCION

Sabemos que en una economía capitalista (de libre mercado) el comportamiento de los precios que rigen dentro de la misma está gobernado por las leyes de oferta y demanda, leyes que son fundamentales debido a que afectan casi todas las operaciones comerciales. Analizando la oferta en una forma agregada, es decir, la cantidad total de bienes y servicios que las empresas en conjunto producen y ofrecen al nivel de precios corriente, vemos que la variable fundamental es la capacidad de producción. Por esto, es importante encontrar una función que explique cómo los principales factores productivos, especialmente el capital y el trabajo, intervienen para explicar en forma agregada el fenómeno de producción.

Las funciones de producción han sido sujetas a una crítica que

cuestiona su validez; sin embargo, junto con otras relaciones, ellas han permitido hacer predicciones del comportamiento de las economías capitalistas y dar recomendaciones dentro de la política económica.

Una de las aportaciones más significativas a la teoría de funciones de producción fue dada por C. Dagum, quien parte de los supuestos neoclásicos de que las empresas buscan la maximización de sus utilidades y de que existe competencia perfecta tanto en el mercado de producto final como en el de factores. Debe señalarse que Dagum trata con un bien que representa a todos los bienes de la economía.

Una simplificación de esta aportación se hace al suponer que la función de producción tiene la característica de ser homogénea y de grado unitario (una función se dice que es homogénea de grado r si la multiplicación de cada una de sus variables independientes por una constante k altera el valor de la función por el factor k^r : $f(kx_1, kx_2, \dots, kx_n) = k^r f(x_1, x_2, \dots, x_n)$). Por lo tanto, a un incremento de igual proporción en el capital y en el trabajo, corresponde un incremento de la producción en la misma proporción. Basándonos en este esquema, se plantea un modelo para estimar esta función de modo que tenga una elasticidad variable de sustitución entre las fuentes de capital y de trabajo.

Específicamente, sean

| | |
|----------------------------------|-----------------------------------------------------|
| Y | : ingreso nacional; |
| L | : empleo (horas-hombre o número de trabajadores); |
| C | : capital; |
| $c = C / L$ | : capital por hora de trabajo o por hombre ocupado; |
| w | : tasa de salarios; |
| μ | : participación del trabajo en el ingreso nacional; |
| $Y = F(C, L)$ | : función de producción homogénea de grado uno; |
| $y = f(c) = F(C, L) / L$ | : productividad media del trabajo; |
| $F'(c) = f'$ | : productividad marginal del capital; |
| $f'(c) - cf''(c) = f - cf''$ | : productividad marginal del trabajo; |
| $\alpha, \beta, \lambda, \delta$ | : parámetros dados, con $\lambda > 0$. |

La participación del trabajo en el ingreso nacional se puede escribir como

$$\mu(y) = \frac{wL}{Y} = \frac{w(y)}{y}, \quad (1)$$

por lo que

$$w(y) = y\mu(y) \quad y \quad \frac{dw}{dy} = y \frac{d\mu}{dy} + \mu(y). \quad (2)$$

Por otro lado, la productividad marginal del trabajo se puede expresar como

$$y - c \frac{dy}{dc}$$

es decir, es la productividad media del trabajo menos lo que contribuye el capital. Dado que la productividad marginal del trabajo debe ser igual a la tasa de salarios, resulta que

$$w(y) = y - c \frac{dy}{dc}. \quad (3)$$

De (1) y (3) tenemos que

$$\mu(y) = 1 - \frac{c}{y} \frac{dy}{dc} \quad (4)$$

y por lo tanto,

$$\frac{dy}{dc} = \frac{y}{c} (1 - \mu(y)). \quad (5)$$

Al obtener la solución para y en esta ecuación diferencial, de (2) vemos que la elasticidad de sustitución tomaría la siguiente forma:

$$\sigma = \frac{(w/dw)}{(y/dy)} = \frac{w}{y} \frac{dy}{dw} = \frac{y\mu(y)}{y} \frac{dy}{dw} = \mu(y) \frac{dy}{dw}; \quad (6)$$

así, con ayuda de la segunda relación en (2) se tiene que

$$\sigma = \frac{\mu(y)}{\mu(y) + y\mu'(y)} = \frac{1}{1 + y(\mu'(y)/\mu(y))}, \quad (7)$$

expresión en que claramente σ se presenta en una forma variable.

Dagum propone la siguiente estimación de la participación del trabajo en el ingreso nacional:

$$\mu(y) = \alpha + \frac{\beta}{1 + \lambda y^{-\delta}}, \quad \lambda > 0. \quad (8)$$

De (5) y (8) se deduce la ecuación diferencial con elasticidad variable de sustitución

$$\frac{dy}{dc} = \frac{y}{c} \left[1 - \alpha - \frac{\beta}{1 + \lambda y} \delta \right]. \quad (9)$$

6.2.2 ESQUEMA DE LA RESOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL

En la ecuación (9) no fácilmente puede determinarse la forma de la productividad media del trabajo representada por la función y , de forma que aplicaremos el método N-R generalizado para obtener una aproximación a la solución y^* de esta ecuación diferencial. Recordando el método, definimos el proceso

$$y_{n+1} = y_n - [g'(y_0)]^{-1} g(y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (10)$$

de esta forma, nos concentramos primero en obtener el operador diferencial $g'(y_0)$. Defínase el error $e(c)$ por

$$e(c) = \frac{dy}{dc} + \frac{y}{c} \left[\left(\alpha + \frac{\beta}{1 + \lambda y} \delta \right) - 1 \right],$$

y sea

$$L(y) = \left[\alpha + \frac{\beta}{1 + \lambda y} \delta \right] - 1;$$

entonces, tenemos que el error se representa por

$$e(c) = \frac{dy}{dc} + \frac{y}{c} L(y).$$

Siguiendo el mismo procedimiento utilizado en los ejemplos del Capítulo 5, analizamos qué le pasa al error $e(c)$ si nuestra función y cambia a una función $y+h$.

Si $y \rightarrow y+h$, entonces $e(c) \rightarrow e(c) + \psi(c)$, donde

$$e(c) + \psi(c) = \frac{d(y+h)}{dc} + \frac{y+h}{c} L(y+h);$$

restando $e(c)$ de ambos lados,

$$\begin{aligned}
 \psi(c) &= \frac{dh}{dc} + \frac{y+h}{c} L(y+h) - \frac{y}{c} L(y) = \frac{dh}{dc} + \frac{y}{c} [L(y+h) - L(y)] + \frac{h}{c} L(y+h) \\
 &= \frac{dh}{dc} + \frac{y}{c} \left[\frac{\beta}{1+\lambda(y+h)^{-\delta}} - \frac{\beta}{1+\lambda y^{-\delta}} \right] + \frac{h}{c} \left[\alpha + \frac{\beta}{1+\lambda(y+h)^{-\delta}} - 1 \right] \\
 &= \frac{dh}{dc} + \frac{(\alpha-1)}{c} h + \frac{\beta}{c} \left[\frac{y+h}{1+\lambda(y+h)^{-\delta}} - \frac{y}{1+\lambda y^{-\delta}} \right]. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Los primeros dos términos de la expresión (11) son evidentemente lineales en h , pero no se ve con claridad que le sucede a nuestro tercer término cuando h es pequeña; obsérvese, sin embargo, que este término tiende a 0 cuando $h \rightarrow 0$. Para identificar cual es la componente lineal de este tercer término definimos la función

$$\Phi(h) = \frac{\beta}{c} \left[\frac{y+h}{1+\lambda(y+h)^{-\delta}} - \frac{y}{1+\lambda y^{-\delta}} \right],$$

que reescribimos a través de su serie de Maclaurin

$$\Phi(h) = \Phi(0) + \frac{\Phi'(0)h}{1!} + \frac{\Phi''(0)h^2}{2!} + \dots;$$

si h es muy pequeña, tenemos una aproximación para $\Phi(h)$ como $\Phi(h) \approx \Phi(0) + \Phi'(0)h$. Aquí

$$\Phi(0) = 0,$$

$$\Phi'(h) = \frac{\beta}{c} \left[\frac{(1+\lambda(y+h)^{-\delta})^{-1} - (y+h)(-\lambda\delta)(y+h)^{-\delta-1}}{(1+\lambda(y+h)^{-\delta})^2} \right] \quad y$$

$$\Phi'(0) = \frac{\beta}{c} \frac{(1+\lambda y^{-\delta}(1+\delta))}{(1+\lambda y^{-\delta})^2},$$

de modo que

$$\Phi(h) \approx \frac{h\beta}{c} \frac{(1+\lambda y^{-\delta}(1+\delta))}{(1+\lambda y^{-\delta})^2}.$$

Así, $\psi(c)$ puede aproximarse por

$$\psi(c) \approx \frac{dh}{dc} + \frac{h}{c} \left[\alpha - 1 + \beta \left[\frac{1+\lambda y^{-\delta}(1+\delta)}{(1+\lambda y^{-\delta})^2} \right] \right] = k(c).$$

Al evaluar esta expresión en una aproximación y_0 a la ecuación diferencial (9) obtenemos el operador $g'(y_0):h \rightarrow k$; si definimos

$$M(y) = \alpha - 1 + \beta \frac{1 + \lambda y^{-\delta}(1+\delta)}{(1 + \lambda y^{-\delta})^2},$$

resulta que

$$k(c) = \frac{dh}{dc} + \frac{h}{c} M(y_0). \quad (12)$$

Como nuestra intención es obtener $[g'(y_0)]^{-1}$ para nuestra iteración (10), necesitamos despejar $h(c)$ en términos de $M(y_0)$ y $k(c)$, lo que se logra resolviendo la ecuación diferencial de primer orden (12) en el intervalo $[0, c]$ en términos de $h(c)$; el resultado es

$$h(c) = c^{-M(y_0)} \int_0^c s^{M(y_0)} k(s) ds.$$

En esta expresión k representa la función de entrada del operador $[g'(y_0)]^{-1}(k)$, por lo que el proceso de N-R para aproximar una solución de (9) estaría definido por

$$y_{m+1}(c) = y_m(c) - c^{-M(y_0)} \int_0^c s^{M(y_0)} (y'_m(s) + y_m(s)L(y_m(s))/s) ds \quad (13)$$

para $m=0, 1, 2, \dots$, donde y_0 trabaja como una primera aproximación a la solución y los operadores L y M están definidos como

$$L(y) = \left[\alpha + \frac{\beta}{1 + \lambda y^{-\delta}} \right] - 1, \quad y \quad M(y) = \alpha - 1 + \frac{\beta(1 + \lambda y^{-\delta}(1+\delta))}{(1 + \lambda y^{-\delta})^2}.$$

Como observamos, aún no hemos definido la aproximación inicial y_0 y nuestro siguiente objetivo sería tomar como y_0 a una función cercana a la solución y^* ; lamentablemente no sabemos nada acerca de qué tipo de función representa y^* . Si tomamos $y_0 = p$ donde p es cualquier constante, el proceso tomaría la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 y_0 &= p, \\
 y_1 &= y_0 \left[1 - \frac{L(y_0)}{M(y_0)} \right], \\
 y_2 &= y_1 \left[1 - \frac{L(y_1)}{M(y_1)} \right], \\
 &\dots \\
 y_{m+1} &= y_m \left[1 - \frac{L(y_m)}{M(y_m)} \right]. \tag{14}
 \end{aligned}$$

Analizando la expresión (14) podemos notar que si alguna $L(y_m)=0$, el proceso se vuelve estacionario esa iteración, $y_{m+1} = y_m (1-0) = y_m$; en particular, si $L(y_0)=0$, toda la sucesión repetirá el valor y_0 . Ahora, $L(y_0)=0$ si y sólo si

$$y_0 - \left(\frac{\lambda}{\left[\frac{\beta}{1-\alpha} \right] - 1} \right)^{1/\delta};$$

fácilmente puede comprobarse que y_0 es efectivamente una solución de la ecuación diferencial (9).

Si se toma una aproximación inicial y_0 con otra forma, el problema analítico de cálculo iterativo fácilmente se hace inmanejable. Por ejemplo, si iniciamos con una primera aproximación y_0 del tipo Cobb-Douglas con nivel de trabajo unitario, es decir, si $y_0 = Ac^{1-a}$, entonces por (13) tenemos

$$y_1 = Ac^{1-a} - c^{-M(Ac^{1-a})} \int_0^c M(As^{1-a}) As^{-a} (1-a+L(As^{1-a})) ds. \tag{15}$$

La complejidad de esta expresión obliga a utilizar métodos numéricos para su evaluación y no nos permite aplicar la prueba de Kantorovich. Para reducir un poco esta complejidad hacemos una pequeña simplificación.

Recordemos que en la expresión (11) el tercer término tendía a cero cuando h era pequeña, por lo que, si lo despreciamos, tenemos como aproximación para ψ a la expresión

$$\frac{dh}{dc} + \frac{\alpha-1}{c} h = k(c);$$

resolviendo esta ecuación diferencial para h se tiene que

$$h(c) = c^{1-\alpha} \int_0^c s^{\alpha-1} k(s) ds,$$

con lo que nuestro proceso iterativo ahora tiene la forma

$$y_{m+1} = y_m - c^{1-\alpha} \int_0^c s^{\alpha-1} (y'_m(s) + y_m(s)L(y_m(s))/s) ds. \quad (16)$$

Así, con $y_0 = Ac^{1-\alpha}$,

$$\begin{aligned} y_1 &= Ac^{1-\alpha} - c^{1-\alpha} \int_0^c s^{\alpha-1} \left(A(1-\alpha)s^{-\alpha} + As^{-\alpha}L(y_0(s)) \right) ds \\ &= -\beta c^{1-\alpha} \int_0^c \frac{s^{\alpha-1}}{1+\lambda(As^{1-\alpha})^{-\delta}} ds \end{aligned}$$

Claramente esta expresión es mucho más simple que la expresión (15), sin embargo, en la obtención de las siguientes aproximaciones (y_2, y_3, \dots), las expresiones se vuelven intratables; además, su manejo analítico sigue siendo muy complejo para poder proceder con la validación de la convergencia del proceso (16). Si intentáramos usar integración numérica, tampoco podríamos avanzar fácilmente debido a la existencia del término $y'_m(s)$ en (16).

En el siguiente apartado se considera un problema en el que salvamos algunas de estas dificultades, pero nos enfrentamos a ciertas otras que deben ser tomadas en cuenta.

6.3 EL METODO DE NEWTON-RAPHSON GENERALIZADO Y LA PRUEBA DE KANTOROVICH EN UN PROBLEMA ACTUARIAL

6.3.1 EL COEFICIENTE DE AJUSTE EN LA TEORIA DE LA RUINA

Consideremos una compañía de seguros cuyas reservas al tiempo $t \geq 0$ son denotadas por R_t . Sea $R_0 = x$ la reserva inicial, supuestamente conocida y no negativa. Dado que las reservas en el futuro son desconocidas, la sucesión $\{R_t\}$ es tratada como un proceso estocástico

continuo en el tiempo. Específicamente convengamos en que

$$R_t = x + ct - S_t.$$

Aquí c es alguna constante y puede ser interpretada como la prima recibida continuamente por unidad de tiempo; entonces ct es el total de primas recibidas en $[0, t]$. Por otro lado, S_t se entiende como la reclamación agregada en $[0, t]$ y está compuesta por

$$S_t = X_{t,1} + X_{t,2} + \dots + X_{t,N_t},$$

donde N_t proviene de un proceso de conteo y representa el número esperado de reclamaciones por unidad de tiempo y las $X_{t,i}$, constituyen una serie de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (independientes también del proceso $\{N_t\}$), que representan el monto de la i -ésima reclamación en el tiempo t . Se da por hecho que $S_t = 0$ si $N_t = 0$. En el caso más simple se supone que N_t se encuentra distribuida como un proceso de Poisson con parámetro $\lambda > 0$ con lo que decimos que S_t es un proceso compuesto de Poisson. Para esquematizar un poco el comportamiento de $\{R_t\}$ se muestra la figura 29.

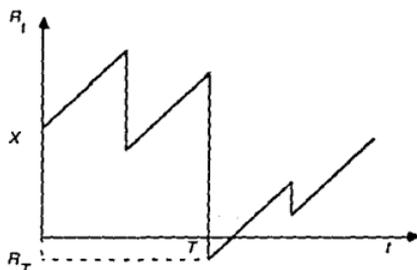


fig 29

La seguridad de la operación implica que

$$c > \lambda p_1,$$

donde p_1 denota el tamaño de la reclamación media; esto quiere decir

que las primas recibidas por unidad de tiempo exceden al valor esperado de las reclamaciones por unidad de tiempo. Así,

$$\Lambda = \frac{c}{\lambda p_1} - 1$$

debe de ser positivo.

Lo que nos concierne es el evento de que la ruina nunca ocurra, es decir, que R_t no sea negativa para alguna t .

Sea $\zeta(x)$ la probabilidad de que no ocurra la ruina, considerada en función de la reserva inicial x . Para determinarla procedemos como sigue:

Suponemos que la primera reclamación ocurre en el instante τ y tiene magnitud y (en nuestro ejemplo el tiempo del primer reclamo se distribuye exponencialmente con parámetro α y el monto de reclamación tiene una distribución $f(y)$). Para que la ruina no ocurra es necesario que $y \leq x + c\tau$ y que para toda $t > \tau$ los futuros incrementos en las reclamaciones y_t no excedan a $x - y + c\tau$. Estos incrementos son independientes de la reclamación más reciente y tienen como probabilidad $\zeta(x - y + c\tau)$. Sumando sobre todos los posibles valores de τ y de y tenemos

$$\zeta(x) = E_t[E_y[\zeta(x - y + c\tau)]] = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{x - y + c\tau} \zeta(x - y + c\tau) f(y) dy dt.$$

En efecto,

$\zeta(x - y + c\tau)$ es la probabilidad de que no exista la ruina después del primer reclamo, habiendo iniciado con una reserva de $\$x$ y pagado, en este primer reclamo $\$y$,

$E_y[\zeta(x - y + c\tau)]$ es la probabilidad esperada de que no exista ruina después del primer reclamo habiendo iniciado con una reserva de $\$x$, y

$E_t[E_y[\zeta(x - y + c\tau)]]$ es la probabilidad de que no exista ruina habiendo iniciado con una reserva de $\$x$.

Por otra parte, analicemos la ecuación

$$\lambda + cr = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{ry} dP(y); \quad (17)$$

puede pensarse que esta expresión define una función implícita de r , donde el lado izquierdo es una función lineal en r y en el lado derecho se encuentra una función estrictamente convexa de r . La convexidad estricta de esta función se deriva fácilmente de la convexidad estricta de la función exponencial: si

$$f(v) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{vy} dP(y) \quad y \quad 0 < \mu < 1,$$

entonces

$$\begin{aligned} f(\mu v_1 + (1-\mu)v_2) &= \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\mu v_1 + (1-\mu)v_2)y} dP(y) \\ &< \lambda \int_{-\infty}^{\infty} [\mu e^{v_1 y} + (1-\mu)e^{v_2 y}] dP(y) \\ &= \mu \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{v_1 y} dP(y) + (1-\mu) \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{v_2 y} dP(y) \\ &= \mu f(v_1) + (1-\mu)f(v_2). \end{aligned}$$

Así, las soluciones r de la ecuación (17) son los puntos de intersección de una recta y una función estrictamente convexa de r ; es evidente entonces que el número de soluciones puede ser 0, 1 ó 2, un ejemplo de esto se muestra en la figura 30.

Demostremos a continuación que la ecuación (17) tiene exactamente dos soluciones. De hecho, una solución trivial es $r=0$:

$$\lambda + c(0) = \lambda = \lambda(1) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} dP(y) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{0y} dP(y).$$

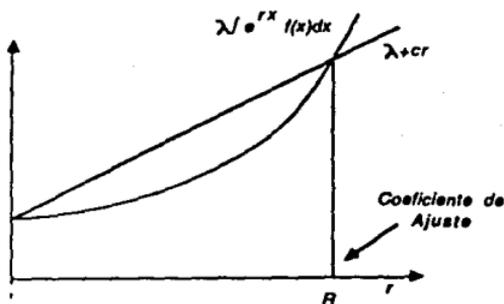


fig 30

Ahora, el que $c > \lambda p_1$ quiere decir que la derivada de la expresión del lado izquierdo, c , excede a la derivada de la expresión del lado derecho en $r=0$: en efecto, si

$$f(r) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{ry} dP(y),$$

entonces

$$\begin{aligned} f'(r) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(r+h) - f(r)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{(r+h)y} dP(y) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{ry} dP(y)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{(r+h)y} - e^{ry}}{h} \right] dP(y) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(r+h)y} - e^{ry}}{h} \right] dP(y) \\ &= \lambda \int_{-\infty}^{\infty} y e^{ry} dP(y), \end{aligned}$$

en donde el intercambio de los signos de límite e integral es directo; así,

$$f'(0) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} y dP(y) = \lambda E[y] = \lambda p_1$$

y la desigualdad $c > \lambda p_1$ muestra lo afirmado.

Ahora bien, si una recta en r y una función estrictamente convexa en r se intersecan en $r=0$ y cumplen que la derivada de la recta excede a la derivada de la función convexa en $r=0$, entonces debe existir otro punto de intersección $R>0$ de sus gráficas (tanto la recta como la función están definidas para todo $r>0$ y ambas tienden a $+\infty$ cuando r tiende a $+\infty$).

R es llamado *coeficiente de ajuste* y juega un papel importante dentro de la teoría de la ruina por el hecho de que se cumple la desigualdad

$$\psi(x) = 1 - \zeta(x) \leq e^{-Rx} \quad (18)$$

para todo x (para una demostración de esta desigualdad véase Gerber, página 78).

6.3.2 DETERMINACION DEL COEFICIENTE DE AJUSTE

Como segunda aplicación del método de N-R modificado procedemos a obtener una aproximación para el coeficiente de ajuste de la ecuación (17). Podemos definir el error por

$$c(r) = \lambda + cr - \lambda \int_{D_f} e^{rx} f(x) dx,$$

con lo cual

$$e(r+h) - e(r) \approx h e'(r) = h \left[c - \lambda \int_{D_f} x e^{rx} f(x) dx \right] = k(r).$$

Desde luego, a este mismo resultado se llega buscando los términos lineales en

$$\begin{aligned} e(r+h) - e(r) &= ch - \lambda \int_{D_f} e^{(r+h)x} f(x) dx + \lambda \int_{D_f} e^{rx} f(x) dx \\ &= ch - \lambda \int_{D_f} e^{rx} (1 + hx + 1! + h^2 x^2 / 2! + \dots) f(x) dx + \lambda \int_{D_f} e^{rx} f(x) dx. \end{aligned}$$

Lo anterior implica que el operador $[g'(r_0)]^{-1}: k \rightarrow h$ estaría definido por

$$h(r) = \frac{k(r)}{c - \lambda \int_{D_f} x e^{r_0 x} f(x) dx},$$

obteniéndose el proceso iterativo

$$r_{n+1} = S(r_n) = r_n - \frac{\lambda + cr_n - \lambda \int_{D_f} e^{r_n x} f(x) dx}{c - \lambda \int_{D_f} x e^{r_0 x} f(x) dx}; \quad (19)$$

si derivamos $S(r)$ tenemos que

$$S'(r) = 1 - \frac{c - \lambda \int_{D_f} x e^{rx} f(x) dx}{c - \lambda \int_{D_f} x e^{r_0 x} f(x) dx}, \quad (20)$$

con lo que $S'(r_0) = 0$ (recuerde este resultado del ejercicio 3 del Capítulo 5).

Siguiendo con el esquema acostumbrado nos proponemos dar una cota en función de t , $\phi'(t)$, para $S'(r)$. Ahora,

$$||S'(r)|| = |S'(r)| = \left| 1 - \frac{c - \lambda \int_{D_f} x e^{rx} f(x) dx}{c - \lambda \int_{D_f} x e^{r_0 x} f(x) dx} \right|;$$

si definimos

$$M = \left| c - \lambda \int_{D_f} x e^{r_0 x} f(x) dx \right|$$

entonces, dado que $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} |S'(r)| &= \frac{\lambda}{M} \left| \int_{D_f} x f(x) e^{r_0 x} [e^{(r-r_0)x} - 1] dx \right| \\ &\leq \frac{\lambda}{M} \int_{D_f} |x f(x) e^{r_0 x}| |e^{(r-r_0)x} - 1| dx, \end{aligned}$$

y,

$$|S'(r)| \leq \frac{\lambda}{M} \int_{D_f} x f(x) e^{r_0 x} |e^{(r-r_0)x} - 1| dx.$$

dado que $x, f(x)$ y $e^{r_0 x}$ son números no negativos. Tomando en cuenta que en la prueba de Kantorovich la longitud de la cadena total de S no excede a la de ϕ , $|r-r_0| < t$, se tiene

$$|e^{(r-r_0)x} - 1| < e^{tx},$$

y resulta que

$$|S'(t)| \leq \frac{\lambda}{M} \int_{D_f} x f(x) e^{(t+r_0)x} dx = \phi'(t).$$

Con esta elección de $\phi'(t)$ obtenemos el proceso $\phi(t)$ que nos ayuda a probar la convergencia de (19):

$$\phi(t) = |r_1 - r_0| + \frac{\lambda}{M} \int_0^t \int_{D_f} x f(x) e^{(s+r_0)x} dx ds. \quad (21)$$

Con esto hemos obtenido un proceso iterativo $\phi(t)$ cuya convergencia probaría la de la sucesión $S(r_n)$; sin embargo, dado que estamos aún en el caso general en el que la función de densidad de probabilidad $f(x)$ no se ha especificado, la utilidad de esta $\phi(t)$ "general" todavía no se ha establecido. A continuación analizamos un caso particular en el que la distribución del monto de reclamaciones es realista en el sentido de que se supone muchas reclamaciones de montos "pequeños" y pocas reclamaciones "grandes".

Supóngase que $f(x)$ se distribuye exponencialmente con parámetro α , es decir,

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x} I[0, \infty);$$

de (19) encontramos que, si $\alpha > r_n$, entonces

$$r_{n+1} = S(r_n) = r_n - \frac{\lambda + cr_n - \alpha \lambda \int_0^{\infty} e^{(r_n - \alpha)x} dx}{c - \alpha \lambda \int_0^{\infty} x e^{(r_0 - \alpha)x} dx} = r_n - \frac{\lambda + cr_n + \frac{\alpha \lambda}{r_n - \alpha}}{c - \frac{\alpha \lambda}{(r_0 - \alpha)^2}}$$

$$= \lambda r_n \left(\frac{\alpha(r_n - \alpha) + (r_0 - \alpha)^2}{(r_n - \alpha)(\alpha\lambda - c(r_0 - \alpha)^2)} \right) = \frac{\lambda r_n}{(r_n - \alpha)(\alpha\lambda - c(r_0 - \alpha)^2)} \left(r_0 + \alpha(r_n - 2r_0) \right) \quad (22)$$

Con esto obtenemos el esquema de Newton-Raphson para aproximarnos a la solución de (17). Este esquema es de variable real y por ello pueden obtenerse los resultados de la iteración mediante una computadora; esto puede hacer innecesario el establecer el esquema de Kantorovich para comprobar la convergencia, máxime que este esquema también sería de variable real. Sin embargo, con fines didácticos mostramos la obtención del proceso de Kantorovich $t_{n+1} = \phi(t_n)$ con $t_0 = 0$.

De (20) tenemos que, para $\alpha > r$ y $\alpha > r_0$,

$$\begin{aligned} |S'(r)| &= \left| 1 - \frac{c - \alpha\lambda \int_0^\infty x e^{(r-\alpha)x} dx}{c - \alpha\lambda \int_0^\infty x e^{(r_0-\alpha)x} dx} \right| = \left| 1 - \frac{c - \frac{\alpha\lambda}{(r-\alpha)^2}}{c - \frac{\alpha\lambda}{(r_0-\alpha)^2}} \right| \\ &= \left| \frac{\alpha\lambda(r-r_0)(2\alpha-r-r_0)}{(c(r_0-\alpha)^2 - \alpha\lambda)(r-\alpha)^2} \right| = \frac{\alpha\lambda|r-r_0|(2\alpha-r-r_0)}{|c(r_0-\alpha)^2 - \alpha\lambda|(\alpha-r)^2}, \end{aligned}$$

dado que $\alpha > 0$ y $\lambda > 0$.

La validez de esta expresión para $|S'(r)|$ y, de hecho, el que el proceso iterativo tenga sentido, depende de las condiciones $\alpha > r$ y $\alpha > r_0$. Obsérvese que, dado que α es un parámetro positivo conocido, la segunda condición no ofrece problema alguno: basta con escoger r_0 en el intervalo $]0, \alpha[$ (si $r_0 = 0$ la iteración no saldrá de esta raíz, como se ve en la ecuación (22); por otro lado, se escoge $r_0 > 0$ pues se sabe que la raíz buscada R es positiva).

Por lo tanto, nuestro trabajo depende esencialmente de la condición $\alpha - r > 0$, condición cuya presencia no se ha garantizado y que, de violarse detendría el proceso iterativo. En todo caso, si el proceso se comportara de modo que $\alpha - r > \epsilon > 0$ para alguna ϵ y todo valor de r , entonces podemos acotar la magnitud de $S'(r)$ para $|r - r_0| \leq t$. En efecto, si $|r - r_0| \leq t$, entonces también $2\alpha - r - r_0 \leq t + 2(\alpha - r_0)$; así,

$$|S'(r)| = \frac{\alpha\lambda|r-r_0|(2\alpha-r-r_0)}{|c(r_0-\alpha)^2-\alpha\lambda|(r-r_0)^2} \leq \frac{\alpha\lambda t(t+2(\alpha-r_0))}{\epsilon^2|c(\alpha-r_0)^2-\alpha\lambda|} = \phi'(t),$$

en donde hemos acotado superiormente el numerador e inferiormente al denominador de $|S'(r)|$, con $\phi'(t)$.

En estas condiciones se tiene que

$$\phi(t) = |r_1-r_0| + \int_0^t \phi'(q) dq,$$

donde de (19)

$$|r_1-r_0| = \frac{r_0(\alpha-r_0)|c(\alpha-r_0)-\lambda|}{|c(\alpha-r_0)^2-\alpha\lambda|},$$

y, así

$$\begin{aligned} \phi(t) &= |r_1-r_0| + \frac{\alpha\lambda}{\epsilon^2|c(\alpha-r_0)^2-\alpha\lambda|} \int_0^t s^2 + 2(\alpha-r_0) ds \\ &= |r_1-r_0| + \frac{\alpha\lambda}{\epsilon^2|c(\alpha-r_0)^2-\alpha\lambda|} \left[\frac{t^3}{3} + (\alpha-r_0)t^2 \right] \\ &= \frac{1}{|c(\alpha-r_0)^2-\alpha\lambda|} \left\{ \frac{\alpha\lambda}{3\epsilon^2} t^3 + \frac{\alpha\lambda(\alpha-r_0)}{\epsilon^2} t^2 + r_0(\alpha-r_0)|c(\alpha-r_0)-\lambda| \right\} \quad (23) \end{aligned}$$

es nuestro esquema de Kantorovich para probar la convergencia de (22).

Claramente este resultado dista mucho del que pudiera ser obtenido de (21),

$$\phi(t) = \frac{(\alpha-r_0)}{|c(\alpha-r_0)^2-\alpha\lambda|} \left[r_0|c(\alpha-r_0)-\lambda| + \frac{\alpha\lambda t}{\alpha-r_0 t} \right],$$

esto es por el hecho de que cuando particularizamos a una función determinada, tenemos más elementos para conocer el comportamiento de la expresión (20) y, por lo mismo, para acotarla. Otro punto que debemos de destacar es que, aunque posiblemente no era necesario exponer la función de Kantorovich para este problema particular, podemos encontrarnos con situaciones en el que el método de N-R quiera aplicarse a problemas que no son de variable real, en los que sí puede convenir contar con la prueba de Kantorovich.

A continuación mostramos un ejemplo numérico para ilustrar mejor las ideas tratadas en esta sección.

6.3.3 CASO NUMERICO.

Para ejemplificar los resultados obtenidos mostramos en forma numérica la obtención de la probabilidad de ruina y el proceso de Kantorovich para validar este resultado.

Suponemos que una compañía de seguros parte de una reseva de 28mM\$ y que su departamento de análisis le pronostica una reclamación media de 4.8M\$ con un número promedio de reclamaciones de 53.67 (54 Siniestros). Además, se espera que ingresen a la compañía 1,100M\$ por concepto de primas, mismas que se acumulan a la reserva formada.

Con este panorama, se pretende conocer cual es la probabilidad de que sus reservas lleguen a desaparecer en algún tiempo no determinado.

El esquema anterior nos dice :

| | |
|----------------------------------------------------------|-----------|
| Reserva Inicial: | 28 mM\$ |
| Reclamación Media: | 4.8 M\$ |
| Incremento mensual de la Reserva por concepto de Primas: | 1,100 M\$ |
| Número Promedio de Reclamaciones Mensuales: | 53.67 |

Suponiendo que el tiempo entre cada reclamación se distribuye exponencialmente con parámetro α entonces la esperanza de estas está dada por

$$\alpha = (4.8)^{-1}.$$

Tomando en cuenta que nuestra aproximación inicial al factor de ajuste debe ser menor que α tomamos

$$r_0 = .8 \quad \alpha = 1/6,$$

y, llevando a cabo el proceso (22) tenemos con una aproximación de 10^{-7} un proceso convergente al coeficiente de ajuste deseado desde la décima iteración; estos resultados se pueden observar en la siguiente tabla:

| r | r_n | t_n | t_n |
|-----|-----------|-----------|-----------|
| 0 | 0.1566667 | 0.0000000 | 0.0000000 |
| 1 | 0.1607990 | 0.0058677 | 0.0058677 |
| 2 | 0.1599255 | 0.0141039 | 0.0069997 |
| 3 | 0.1595669 | 0.0315804 | 0.0074926 |
| 4 | 0.1595448 | 0.1632018 | 0.0077365 |
| 5 | 0.1595583 | 0.0616094 | 0.0078637 |
| 6 | 0.1595496 | 0.0241088 | 0.0079319 |
| 7 | 0.1595468 | 0.0125505 | 0.0079690 |
| 8 | 0.1595459 | 0.0057644 | 0.0079892 |
| 9 | 0.1595456 | 0.0002393 | 0.0080004 |
| 10 | 0.1595455 | 0.0055807 | 0.0080065 |
| 11 | 0.1595455 | 0.0136389 | 0.0080099 |
| 12 | 0.1595455 | 0.0303201 | 0.0080117 |
| 13 | 0.1595455 | 0.1401444 | 0.0080128 |
| 14 | 0.1595455 | 0.0656431 | 0.0080133 |
| 15 | 0.1595455 | 0.0248709 | 0.0080136 |
| 16 | 0.1595455 | 0.0129150 | 0.0080138 |
| 17 | 0.1595455 | 0.0060223 | 0.0080139 |
| 18 | 0.1595455 | 0.0004780 | 0.0080140 |
| 19 | 0.1595455 | 0.0052977 | 0.0080140 |
| 20 | 0.1595455 | 0.0131873 | 0.0080140 |
| 21 | 0.1595455 | 0.0291357 | 0.0080140 |
| 22 | 0.1595455 | 0.1227029 | 0.0080140 |
| 23 | 0.1595455 | 0.0702191 | 0.0080140 |
| 24 | 0.1595455 | 0.0256688 | 0.0080140 |
| 25 | 0.1595455 | 0.0132879 | 0.0080140 |

Las dos últimas columnas presentan la aplicación de los procesos $\phi(t)$ dado por (23) y $\hat{\phi}(t)$ definido por la expresión (24). Aquí podemos observar que el proceso $\hat{\phi}(t)$ obtenido por el hecho de conocer de antemano la distribución del monto de reclamaciones, puede ser utilizado para mostrar la convergencia de (22); en este caso se escogió un $\epsilon=0.04$ para asegurar su convergencia. Así, con el valor del coeficiente de ajuste ya encontrado con un valor de 0.15954545 podemos calcular el nivel de reservas inicial mínimo para diferentes niveles de probabilidad de ruina, esto es:

| x (M\$) | Probabilidad de Ruina (%) |
|-----------|---------------------------|
| 18,777 | 05 |
| 14,432 | 10 |
| 11,891 | 15 |
| 10,088 | 20 |
| 8,689 | 25 |
| 7,546 | 30 |
| 6,580 | 35 |
| 5,743 | 40 |
| 5,005 | 45 |
| 4,345 | 50 |
| 3,747 | 55 |
| 3,202 | 60 |
| 2,700 | 65 |
| 2,236 | 70 |
| 1,803 | 75 |
| 1,399 | 80 |
| 1,019 | 85 |
| 660 | 90 |
| 321 | 95 |
| 0 | 100 |

En particular, como esta compañía tiene una reserva inicial de 28mM\$ su probabilidad de ruina es

$$\psi(x) = \psi(28) \leq e^{-Rx} = e^{-0.15954545(28)} < 1.15\%.$$

ALGUNAS CONSIDERACIONES FINALES

A lo largo de esta tesis hemos visto como el Análisis Funcional nos proporciona gran economía de pensamiento y una sólida estructura organizada para atacar diversos problemas. Esto no resulta particularmente sorprendente si se considera que esta disciplina conjunta importantes conceptos del análisis matemático, del álgebra lineal y de la geometría; sin embargo, debería observarse que la gran aplicabilidad del análisis funcional parece derivarse no sólo de que este se origina en la abstracción de ciertas ideas, sino que se ha desarrollado en gran parte alrededor de conceptos evidentemente geométricos. Es de esta manera como el análisis funcional, además de haberse convertido en una poderosa herramienta del análisis moderno, ofrece métodos generales realmente aplicables en diferentes espacios.

Entre las principales temas del análisis matemático que hemos estudiado desde el punto de vista del análisis funcional se encuentran los relativos a conceptos como los de límites, continuidad, convergencia, diferenciación e integración, estudiados en esta tesis en formas generalizadas. Con base en ellos, hemos analizado la extensión del método de Newton-Raphson para encontrar aproximaciones a la solución de ecuaciones en diferentes espacios. De hecho, en los primeros capítulos se ha buscado un equilibrio entre el desarrollo de diferentes conceptos del análisis funcional y los tópicos pertinentes al estudio del método de N-R generalizado, examinándose este posteriormente con bastante detalle.

Ahora bien, como se vió en el último capítulo, también hemos encontrado grandes dificultades al aplicar la generalización del método a problemas prácticos de diversos campos. Entre estas, las siguientes son de particular importancia:

1) Cuando nos encontramos con ecuaciones aparentemente insolubles por métodos tradicionales para las que la utilización del método generalizado de N-R podría parecer como conveniente, nos enfrentamos con problemas difíciles de resolver tales como el de la obtención del operador diferencial y, peor aún, el de determinar su operador inverso.

2) Aún resolviendo las dificultades mencionadas en el punto anterior, al tratar de encontrar la función de Kantorovich de validación de convergencia, las expresiones pueden volverse demasiado complejas

para ser tratadas analíticamente.

No obstante, dado que las ideas del análisis funcional son muy prometedoras y que ya han dado lugar a esquemas para resolver numéricamente problemas complejos, no parece aventurado el afirmar que el subsecuente desarrollo de esta disciplina tendrá cada vez mayor impacto en el análisis numérico. Es muy posible, dada la importancia del método de N-R para proporcionar soluciones de ecuaciones dadas, que futuros resultados en análisis funcional se dirijan a resolver las dificultades arriba mencionadas.

APENDICE

EL TEOREMA DE KANTOROVICH PARA EL METODO DE NEWTON.

Si tenemos un sistema de ecuaciones de la forma $F(x)=0$, donde F es en general un mapeo de un espacio de Banach X a otro espacio de Banach Y , el operador diferencial de Fréchet $F'(x_0)$ donde $x_0 \in X$ es el mapeo lineal de X en Y definido por la relación

$$\lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \frac{\|F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) - F'(x_0)(\Delta x)\|}{\|\Delta x\|} = 0.$$

En lo que sigue se supondrá que F está definido y tiene un diferencial de Fréchet en cada punto de un conjunto convexo abierto $D_0 \subset X$.

Ap.1) Teorema de Kantorovich. Suponga que $[F'(x_0)]^{-1}$ existe para alguna $x_0 \in D_0$ y que

- (i) $\|[F'(x_0)]^{-1}\| \leq B$,
 - (ii) $\|[F'(x_0)]^{-1}F(x_0)\| \leq \eta$,
 - (iii) $\|F'(x) - F'(y)\| \leq K\|x - y\|$, para todo x, y en D_0 ,
- con $h = BK\eta \leq \frac{1}{2}$.

Sea

$$\Omega_* = \{x \mid \|x - x_0\| \leq t^*\}, \text{ donde } t^* = \left[\frac{(1 - (1 - 2h))^{\frac{1}{2}}}{h} \right] \eta,$$

y suponga que $\Omega_* \subset D_0$. Entonces la sucesión definida por la iteración de Newton

$$x_{k+1} = x_k - [F'(x_k)]^{-1}F(x_k)$$

se mantiene en Ω_* y converge a un punto $x^* \in \Omega_*$ que satisface $F(x^*)=0$. Además,

$$\|x^* - x_k\| \leq \frac{\eta}{h} \left[\frac{(1-(1-2h)^{\frac{1}{2}})^{2^k}}{2^k} \right], k = 0, 1, 2, \dots$$

Demostración. Sean

$$p(t) = \frac{h}{2\eta} t^2 - t + \eta, \quad s(t) = t - \frac{p(t)}{p'(t)}, \quad \text{y } t_{k+1} = s(t_k)$$

y sea $t_0=0$. Entonces $p(t)+p'(t)[s(t)-t]=0$, claramente, para $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} t_{k+1} - t_k &= -[p'(t_k)]^{-1} p(t_k) = -[p'(t_k)]^{-1} [p(t_k) - p(t_{k-1}) - p'(t_{k-1})(t_k - t_{k-1})], \\ &= \frac{((h/\eta)t_k - 1)^{-1} (h/\eta) (t_k - t_{k-1})^2}{(\eta - ht_k)}, \end{aligned}$$

reordenando, tenemos

$$t_{k+1} - t_k = \frac{h}{2} \frac{(t_k - t_{k-1})^2}{(\eta - ht_k)}. \quad (1)$$

Por el teorema de valor medio tenemos que $\|F(x) - F(y) - F'(y)(x-y)\| \leq K/(2\|x-y\|^2)$ para todo x y y en D_0 . Si x esté en el interior de Ω_* , entonces $\|x-x_0\| < t^* \leq (BK)^{-1}$, y así

$$\|F'(x) - F'(x_0)\| \leq K\|x-x_0\| < Kt^* < B^{-1};$$

además, por el teorema de Banach, $[F'(x)]^{-1}$ existe con

$$\|[F'(x)]^{-1}\| \leq \frac{B}{1-BK\|x-x_0\|}.$$

Si añadimos que $N(x) = x - F'(x)]^{-1} F(x)$ está en el interior de Ω_* , entonces $F(x) + F'(x) \cdot (N(x) - x) = 0$, y

$$\begin{aligned} \|N(N(x)) - N(x)\| &= \|F'(N(x))^{-1} F(N(x))\| \\ &\leq \frac{B\|F(N(x)) - F(x) - F'(x)(N(x) - x)\|}{1 - BK\|x_0 - N(x)\|} \\ &\leq \frac{h\|x - N(x)\|^2}{2[\eta - h\|x_0 - N(x)\|]} \end{aligned} \quad (2)$$

Claramente $s'(t) > 0$ para $0 \leq t < t^*$, así $t_k \rightarrow t^*$. Ahora si x_n existe y $\|x_n - x_{n-1}\| \leq t_n - t_{n-1}$ para $n \leq k$, como es verdad para $k=1$, entonces

$$\|x_k - x_0\| \leq t_k - t_0 < t^*,$$

así x_k está en el interior de Ω_* . Evaluando (2) en $x = x_{k-1}$ y usando (1), tenemos $\|x_{k+1} - x_k\| \leq t_{k+1} - t_k$ para todo k . Esto permite que $\|x_{k+m} - x_k\| \leq t_{k+m} - t_k$ para k y m , enteros positivos arbitrarios. Aquí, $\{x_k\}$ es una sucesión de Cauchy y debe entonces converger a $x^* \in \Omega_*$, con $\|x^* - x_k\| \leq t^* - t_k$. Que $F(x^*) = 0$ se da debido a la continuidad de F y F' en x^* .

Multiplicando (1) por h vemos que si $ht_k - ht_{k-1}$ y ht_k (como funciones de h) se incrementan con h , como es verdad para $k=1$, entonces $ht_{k+1} - ht_k$ y más aún, ht_{k+1} se incrementa con h . Cuando $h = \frac{1}{2}$

$$\eta = ht_k = \eta/2^k,$$

así $1/(\eta - ht_k) \leq 2^k/\eta$. Tenemos ahora

$$t^* - t_{k+1} = \frac{h(t^* - t_k)^2}{2(\eta - ht_k)} \leq \frac{h}{\eta} (t^* - t_k)^2 2^{k-1}.$$

De esta manera,

$$t^* - t_{k+1} \leq \frac{\eta}{h} \frac{[\alpha(h)]^{2^{k+1}}}{2^{k+1}} \quad \text{siempre y cuando} \quad t^* - t_k \leq \frac{\eta}{h} \frac{[\alpha(h)]^{2^k}}{2^k}.$$

de este modo $t^* - t_0 = (\eta/h)(1 - (1-2h)^{\frac{1}{2}})$, por lo que $\alpha(h) = 1 - (1-2h)^{\frac{1}{2}}$ proporciona el error estimado óptimo para el método. \square

Ap.2) Teorema de Kantorovich para el método de Newton modificado.

Bajo las mismas condiciones del teorema anterior pero con $h < \frac{1}{2}$ entonces la iteración $x_{k+1} = x_k - [F'(x_0)]^{-1} F(x_k)$ está definida para toda k , para cualquier $x_0 \in \Omega_{t^*}$, y converge a una raíz $x^* \in \Omega_{t^*}$. Más aún, $F(x) = 0$ tiene una raíz única en Ω_{t^*} . Además

$$\|x_k - x^*\| \leq 2(\eta/h)[1 - (1-2h)]^{k+1}; \quad k=1, 2, \dots$$

Demostración. Sea $M(x) = x - [F'(x_0)]^{-1}F(x)$ entonces $M'(x) = I - [F'(x_0)]^{-1}F'(x)$, así

$$\begin{aligned} \|M(x) - M(x_0)\| &= \left\| \int_0^1 [I - [F'(x_0)]^{-1}F'(x_0 + t(x-x_0))](x-x_0) dt \right\| \\ &= \left\| \int_0^1 [F'(x_0)]^{-1}[F'(x_0) - F'(x_0 + t(x-x_0))](x-x_0) dt \right\| \\ &= \left\| \int_0^1 tBK \|x-x_0\| (x-x_0) dt \right\| \\ &= BK \|x-x_0\|^2 \int_0^1 t dt = BK \|x-x_0\|^2 / 2. \end{aligned}$$

Si $\|x-x_0\| \leq t^*$ entonces $\|M(x) - M(x_0)\| \leq BKt^{*2} / 2 = ht^{*2} / 2\eta$ pero $ht^{*2} / 2\eta - t^* + \eta = 0$ por lo que

$$\|M(x) - M(x_0)\| \leq t^* + \eta, \quad \|x-x_0\| \leq t^*, \quad (3)$$

Ahora $\|M(x_0) - x_0\| = \|[F'(x_0)]^{-1}F(x_0)\| \leq \eta$, sumando a esto la expresión (3) y usando la desigualdad del triángulo obtenemos

$$\|M(x) - x_0\| \leq t^*, \quad \|x-x_0\| \leq t^*.$$

De aquí que M mapea a Ω_{t^*} en sí mismo. Mas aún, si $x, y \in \Omega_{t^*}$ sabemos que

$$\begin{aligned} M(x) - M(y) &= \left\| \int_0^1 M'(x+t(y-x))(y-x) dt \right\| \\ &\leq Bkt^* \|y-x\| \\ &= (t^*h/k) \|y-x\| = (1 - (1-2h)^{\frac{1}{2}}) \|y-x\| \end{aligned}$$

puesto que $t^* = (h/\eta) [1 - (1-2h)^{\frac{1}{2}}]$. Además, $[1 - (1-2h)^{\frac{1}{2}}] < 1$ por lo que M es una contracción en Ω_{t^*} y, comenzando en cualquier punto de Ω_{t^*} , las aproximaciones sucesivas $\{x_k\}$ ($k=1, 2, \dots$) convergen a una solución x^* de $F(x) = 0$ única en Ω_{t^*} , y

$$\|x_k - x^*\| \leq 2(\eta/h) [1 - (1-2h)^{\frac{1}{2}}]^{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

donde $\|x^* - x_0\| \leq 2t^*$. □

BIBLIOGRAFIA SELECCIONADA

- Braun, Martin, Springer-Verlag 1975.
Differential Equations and Their Applications.
- Bryant, Victor, Cambridge International Students, Cambridge, 1985.
Metric Spaces - Iteration and Application.
- Dennis, J.E., Prentice-Hall Series in Computational Mathematics, 1983.
Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations.
- Gerber, Hans U., University of Pennsylvania, Filadelfia, 1979.
A Mathematical Introduction to Risk Theory.
- Kantorovich and Akilov, Pergamon 1964.
Functional Analysis in Normed Spaces.
- Luenberger, David C. John Wiley & Sons, Inc. Nueva York, 1969.
Optimization by Vector Space Methods.
- Maddox, I.J. Cambridge University Press, 1970.
Elements of Functional Analysis.
- Sawyer, W.W. Clarendon Press, Oxford, 1978.
A First Look at Numerical Functional Analysis.

ARTICULOS

- Reyes, O. Pedro A, Boletín N° 67, Instituto Mexicano de Planeación y Operación de Sistemas, México D.F., 1982.
Una Función de Producción para la Economía Mexicana (Enfoque Teórico Empírico).



IMPRESO EN MEXICO – PRINTED IN MEXICO
T E S I S C E N T R O

San Borja No. 1003, esq. Heriberto Frías, Col. del Valle

559 - 32 - 26

559 - 73 - 53