



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

# Análisis Numérico del Problema de Kepler

T E S I S

Que para obtener el título de:

**MATEMATICO**

Presenta:

Jorge Luis Paulo Ramírez Alfonsín

Julio de 1989

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

	PAG.
INTRODUCCION	2
CAPITULO 1	3
FORMULACION DEL PROBLEMA	
CONSERVACION DEL MOMENTO ANGULAR	
PRIMERA LEY DE KEPLER	
PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS	
CAPITULO 2	26
DEFINICION DE SINGULARIDAD	
REGULARIZACION DE SUNDMAN	
REGULARIZACION DE LEVI-CIVITA	
OBSERVACIONES	
CAPITULO 3	36
EXPLICACION GENERAL DE LOS EJEMPLOS (PLANTEAMIENTO COMPUTACIONAL DE LOS PROBLEMAS)	
EJEMPLOS DEL PROBLEMA DE FUERZA CENTRAL	
EJEMPLOS DEL PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS	
EJEMPLOS DE SISTEMAS REGULARIZADOS PARA EL PROBLEMA DE FUERZA CENTRAL	
CONCLUSIONES	
APENDICE A	51
USO DEL PROGRAMA "MCELESTE"	

## INTRODUCCION

Un modelo dinámico de un fenómeno físico conservativo con simetrías es llamado consistente si el modelo conserva la energía, el momento angular, y el momento lineal.

El modelo dinámico de dos de los problemas mas sencillos de la mecánica celeste( problema de fuerza central y el problema de los dos cuerpos) es un modelo consistente. Afortunadamente existen métodos numéricos que los resuelven y conservan su consistencia.

Los modelos dinámicos de los dos anteriores problemas dependen de la ley universal gravitacional de Newton. Una de las propiedades de dicha ley universal como campo de fuerzas, es que la fuerza que actúa entre las partículas se aproxima al infinito cuando sus distancias se aproximan a cero (hay colisión). En dicha colisión la ecuación diferencial que describe el sistema tiene una singularidad.

En esta tesis procederemos a hacer un análisis numérico y gráfico tanto del problema de Kepler (problema de fuerza central) como del problema de los dos cuerpos. Para esto hemos diseñado el paquete MCeleste para la graficación de soluciones de ecuaciones diferenciales simples. Además tratamos los métodos clásicos de eliminación de singularidades (debidos a Sundman y a Levi Civita) y observamos las diferencias que se dan entre las soluciones del sistema original y las soluciones del sistema regularizado (sin singularidades).

## CAPITULO 1

### 1.1.- FORMULACION DEL PROBLEMA

### 1.2.- CONSERVACION DEL MOMENTO ANGULAR

#### 1.2.1 SEGUNDA LEY DE KEPLER

### 1.3.- CONSERVACION DE LA ENERGIA TOTAL

#### 1.3.1 POSIBLES MOVIMIENTOS PARA $h = 0$

### 1.4.- PRIMERA LEY DE KEPLER

#### 1.4.1 VECTOR EXCENTRICIDAD

#### 1.4.2 RELACION DE LA ENERGIA CON LOS MOVIMIENTOS

#### 1.4.3 RELACION DEL EJE MAYOR CON LA EXCENTRICIDAD

#### 1.4.4 TERCERA LEY DE KEPLER

### 1.5.- PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS

#### 1.5.1 EQUIVALENCIA CON EL PROBLEMA DE FUERZA CENTRAL

#### 1.5.2 METODO DE REDUCCION A COORDENADAS RELATIVAS

#### 1.5.3 METODO DE REDUCCION A COORDENADAS BARICENTRICAS

#### 1.5.4 RELACION DE LAS ENERGIAS TOTALES DE AMBOS CUERPOS

## 1.1 FORMULACION DEL PROBLEMA<sup>†</sup>

Describiremos el movimiento de una partícula de masa positiva en  $\mathbb{R}^3$ , sobre la cual es ejercida una fuerza radial ( a lo largo de una recta que une a la partícula con otro punto que lo llamaremos centro).

Sean

$\vec{r}(t)$  = la función de la posición de la partícula.

Intensidad de la fuerza =  $-m \frac{\vec{r}(t)}{r(t)} f(r)$

donde  $r(t) = |\vec{r}(t)|$

(la intensidad de la fuerza depende de la distancia entre el centro y la partícula y de la masa de la misma).

Tomando en cuenta que la segunda ley de Newton nos dice que la fuerza es igual a la masa por la aceleración (  $F = m a$  ), podemos establecer las ecuaciones diferenciales que gobiernan la evolución del sistema.

$$(1.1.1) \quad \dot{r} = v$$

$$\dot{\vec{v}} = -\frac{\vec{r}}{r} f(r)$$

$$\text{donde } f(r) = \mu r^{-p}$$

$\mu$  - constante positiva y

$p \in \mathbb{N}$

Este problema es llamado "Problema de Fuerza Central" y nos enfocaremos en el estudio de los vectores  $r(t)$  y  $v(t)$  que satisfacen simultáneamente el sistema (1.1.1) en un intervalo de tiempo.

## 1.2 CONSERVACION DEL MOMENTO ANGULAR

Consideremos el siguiente producto cruz.

$$(1.2.1) \quad \vec{r}(t) \times \dot{\vec{v}}(t) = \vec{c}(t)$$

<sup>†</sup> Para mayores detalles ver (1)

Calculemos la derivada de  $\vec{c}(t)$  esto es

$$\begin{aligned} \frac{d \vec{c}(t)}{dt} &= \dot{\vec{r}}(t) \times \vec{v}(t) + \vec{r}(t) \times \dot{\vec{v}}(t) \\ &= \vec{v}(t) \times \vec{v}(t) + \vec{r}(t) \times f(r) \frac{\vec{r}(t)}{r} \\ &= 0 + \vec{r}(t) \times \vec{r}(t) \frac{f(r)}{r} \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

por lo que  $\vec{c}(t)$  es una constante "para toda  $f(r)$ ". A esta propiedad se le llama "Conservación del momento angular" y a  $\vec{c}(t)$  el momento angular.

Analizaremos dos casos para  $\vec{c}(t)$

A)  $\vec{c}(t) \neq 0$

De (1.2.1) sabemos que  $\vec{c}(t) \cdot \vec{r}(t) = 0$  y como  $\vec{c}(t) \neq 0$  entonces  $\vec{r}(t)$  siempre es perpendicular a un vector fijo  $\vec{c}(t)$ , por lo que la partícula se mueve en un plano que pasa por el origen y el cual es perpendicular a  $\vec{c}(t)$ .

B)  $\vec{c}(t) = 0$

Aquí consideremos la siguiente derivada

$$\begin{aligned} (1.2.2) \quad \frac{d}{dt} \frac{\vec{r}(t)}{r} &= \frac{r \dot{\vec{r}} - \vec{r} \dot{r}}{r^2} = \frac{r \vec{v} - \vec{r} \dot{r}}{r^2} \\ &= \frac{\vec{v}}{r} - \frac{\dot{r} \vec{r}}{r^2} \end{aligned}$$

Usaremos el hecho que a partir de la fórmula  $\vec{r} \cdot \vec{r} = r^2$  se tiene que

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \cdot \vec{r}) = \frac{d}{dt} r^2 \Rightarrow \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = r \dot{r} \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{r} \vec{r}$$

en (1.2.2) tenemos

$$(1.2.3) \quad \frac{d}{dt} \frac{\vec{r}(t)}{r} = \frac{\vec{v}}{r} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v}) \vec{r}}{r^3} \text{ . Usando la siguiente fórmula}$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C})\vec{A} \quad \text{con } \vec{A} = \vec{v}, \vec{B} = \vec{r}, \vec{C} = \vec{r}$$

tenemos que

$$(\vec{v} \times \vec{r}) \times \vec{r} = (\vec{v} \times \vec{r}) \times \vec{r} + (\vec{r} \cdot \vec{r})\vec{v} \quad \text{y lo sustituimos en (1.2.3) obteniendo}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\vec{r}(t)}{r} &= \frac{\vec{v}}{r} - \frac{(\vec{v} \times \vec{r}) \times \vec{v}}{r^3} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r})\vec{v}}{r^3} \\ &= \frac{\vec{v}}{r} - \frac{(\vec{v} \times \vec{r}) \times \vec{v}}{r^3} - \frac{\vec{v}}{r^3} \quad \text{pero como} \end{aligned}$$

$$(\vec{v} \times \vec{r}) \times \vec{r} = \vec{c} = 0 \quad \text{tenemos que} \quad \frac{d}{dt} \frac{\vec{r}(t)}{r} = 0$$

Por lo que el vector  $\frac{\vec{r}(t)}{r}$  es constante y el movimiento se lleva a cabo a lo largo de una línea recta fija que pasa por el origen.

Una consecuencia que se obtiene cuando  $\vec{c}(t) \neq 0$  es que si introducimos coordenadas polares en el plano de movimiento con el centro en O,

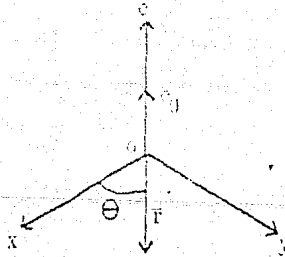


figura 1.1

tenemos

$$\vec{r}(t) = ( r \cos(\theta), r \sin(\theta), 0 )$$

$$\vec{v}(t) = ( \dot{r} \cos(\theta) - r \sin(\theta)(\dot{\theta}), \dot{r} \sin(\theta) + r \cos(\theta)(\dot{\theta}), 0 )$$

$$\vec{c}(t) = ( 0, 0, c_0 )$$



Calculamos  $\vec{c}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{v}(t)$

$$\vec{r} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r \cos \vartheta & r \sin \vartheta & 0 \\ r \dot{\cos} \vartheta - r \sin \vartheta \dot{\vartheta} & r \dot{\sin} \vartheta + r \cos \vartheta \dot{\vartheta} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{i}(0) - \mathbf{j}(0) + \mathbf{k} [r \dot{\cos} \vartheta (r \dot{\sin} \vartheta + r \cos \vartheta \dot{\vartheta}) - r \sin \vartheta (r \dot{\cos} \vartheta - r \sin \vartheta \dot{\vartheta})] \\ &= \mathbf{k} [r \dot{\cos} \vartheta r \dot{\sin} \vartheta + r^2 \dot{\cos} \vartheta \dot{\vartheta} - r \sin \vartheta r \dot{\cos} \vartheta + r^2 \sin \vartheta \dot{\vartheta}] \\ &= \mathbf{k} [r^2 \dot{\vartheta} (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta)] = \mathbf{k} (r^2 \dot{\vartheta}) = (0, 0, r^2 \dot{\vartheta}) \end{aligned}$$

Por lo que tenemos que  $c_0 = r^2 \dot{\vartheta}$  y calculando la razón del área barrida por el vector  $\vec{r}(t)$  desde 0, se tiene

$$(1.2.4) \quad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\vartheta} = \frac{1}{2} c_0$$

Integrando de ambos lados con respecto a  $t$ , tenemos

$$A = \frac{1}{2} c_0 t + k \quad \text{k-constante de integración}$$

Esto nos dice que el vector barre áreas iguales en tiempos iguales (Segunda ley de Kepler).

Con todo lo desarrollado anteriormente podemos analizar y demostrar resultados interesantes como el siguiente.

Dada una partícula en reposo que es atraída por un punto fijo (centro) con una fuerza positiva para  $0 < r < \infty$ , dicha partícula sufre una colisión con el centro de atracción en tiempo finito.

DEMOSTRACION:

Dadas las condiciones iniciales  $v(0) = 0$  y  $r(0) = r_0$  tenemos que el movimiento es una recta que une al centro con la partícula (ya que  $v(t) \times r(t) = c$  y si  $v(0) = 0 \Rightarrow c = 0$ ) por lo que el movimiento es colineal. De la ecuación

$$(1.2.5) \quad \dot{v} = - \frac{\bar{F}(t)}{r(t)} f(r)$$

como  $r(0) = r_0$  tenemos que si  $\bar{x}(t) = \bar{r}(t)$ ,  $x(0) = d$ .



figura 1.2

entonces  $\dot{v} = -f(r)$  pues  $\frac{\bar{x}(t)}{x(t)} = 1$ . Si integramos ambos lados de la ecuación (1.2.5) con respecto a  $t$

$$\int_0^t \dot{v} dt = \int_0^t -f(x) dt \Rightarrow v(t) - v(0) = -\int_0^t f(x) dt. \text{ Pero } v(0) = 0,$$

pero  $v(t) = \int_0^t -f(x) dt$  y como  $f(x)$  es estrictamente positiva i.e.

$f(x(t)) > 0$  entonces  $\int_0^t f(x) dt$  es creciente pues vamos sumando factores positivos. Por lo tanto  $v(t)$  es decreciente y negativa. Ahora bien, como  $x(t) = v(t)$ ,

$$\int_0^t x(t) dt = \int_0^t v(t) dt, \text{ por lo que } x(t) - x(0) = \int_0^t v(t) dt$$

Como  $x(0) = d$ ,  $x(t) = \int_0^t v dt + d$

Como  $v(t)$  es decreciente entonces

$\int_0^t v dt$  no esta acotada por lo que para un  $t_k$

$\int_0^{t_k} v dt = d$ . Asi que  $x(t_k) = \int_0^{t_k} v dt + d = 0$ , que nos dice que para algun  $t_k$  finito existe el choque entre la partícula y el centro.

### 1.3 CONSERVACION DE ENERGIA TOTAL

Tomemos el producto punto de  $v$  con cada uno de los lados de la segunda ecuacion de 1.1.1

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} &= -f(r) r^{-1} (\vec{r} \cdot \dot{\vec{v}}) \\ &= -f(r) r^{-1} (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) \quad \text{Como } \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = r \dot{r} \\ &= -f(r) r^{-1} (r \dot{r}) = -f(r) \frac{dr}{dt} \end{aligned}$$

Integrando ambos lados  $\int_{t_0}^t \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} = \int_{t_0}^t -f(r) \frac{dr}{dt}$

$$\frac{1}{2} v^2 \Big|_{t_0}^t = f_1(r(t)) \Big|_{t_0}^t \quad \text{donde } f_1'(r) = -f(r)$$

$$\frac{1}{2} v^2(t) - \frac{1}{2} v^2(t_0) = f_1(r(t)) - f_1(r(t_0))$$

$$\frac{1}{2} v^2(t) - f_1(r(t)) = \frac{1}{2} v^2(t_0) - f_1(r(t_0)) = h \quad h - \text{constante}$$

donde:

$$i) -m f_1(r) = \text{Energía potencial ( U )}$$

$$\text{ii) } \frac{1}{2} v^2 m = \text{Energía cinética ( T )}$$

$$\text{iii) } h_0 = h m = \text{Energía total del sistema}$$

$T = U + h$  se conoce como "Principio de Conservación de Energía" que en el caso newtoniano  $f(r) = \mu m r^{-2}$ ,  $f_1 = \mu m r^{-1}$

$$(1.3.1) \quad \frac{1}{2} m v^2 - \frac{\mu m}{r} = h_0$$

de la cual podemos deducir que:

1)  $r(t)$  es constante  $\Leftrightarrow v(t)$  es constante

2)

a) Si  $\bar{r}(t)$  es creciente  $\Rightarrow \bar{v}(t)$  es decreciente

b) Si  $\bar{r}(t)$  es decreciente  $\Rightarrow \bar{v}(t)$  es creciente

Ahora busquemos todos los posibles movimientos para  $h = 0$  y  $r > 0$  para el caso newtoniano en el problema colineal.

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{\mu m}{r} = h_0 \Rightarrow r^2 \dot{r} = 2\mu \Rightarrow \dot{r} r^{1/2} = \sqrt{2\mu}$$

e integrando ambos lados con respecto a  $t$

$$\frac{2}{3} r^{3/2} = \sqrt{2\mu} t + \alpha \Rightarrow r(t) = \left\{ \frac{3}{2} (\sqrt{2\mu} t + \alpha) \right\}^{2/3}$$

donde la constante  $\alpha$  la podemos determinar sabiendo la posición inicial de la masa.

Observemos que si derivamos a  $r$  con respecto a  $t$ :

$$\dot{r}(t) = (2/3 (\sqrt{2\mu} t + \alpha))^{-1/3} (3/2 \sqrt{2\mu})$$

$t_0 = \frac{-\alpha}{\sqrt{2\mu}}$  es una singularidad de  $r(t)$  ya que su

derivada no esta definida ahi.

Veamos la gráfica de la velocidad con respecto a t

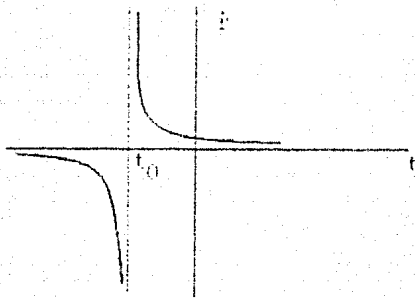


figura 1.3

(el comportamiento de la velocidad con respecto al tiempo).

Ahora veamos la curva que obtenemos en el espacio fase

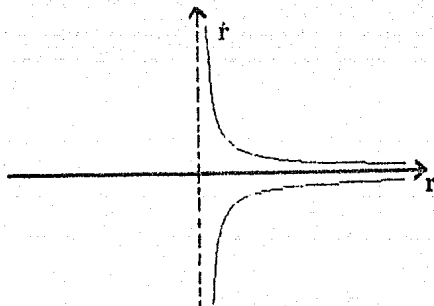


figura 1.4

Por último , mediante de un breve análisis de la ecuación

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{\mu m}{r} = h_0$$

nos revela la siguiente familia de

curvas en el espacio fase.

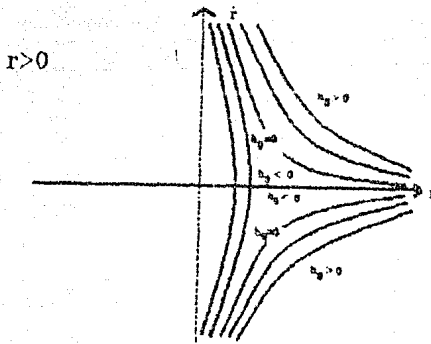


Figura 1.5

En base a lo anterior podemos concluir que si  $f(r) = -\mu r^{-p}$ ,  $p > 1$  y  $p \in \mathbb{Z}^+$  y si la partícula se mueve con energía negativa entonces no se puede ir infinitamente lejos del origen pues consideremos la

igualdad  $\frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r^{p-1}} = h_0$ . Si suponemos que si se puede

mover infinitamente lejos del origen tendríamos que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{-\mu}{r^{p-1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} v^2(t) = h_0 \quad !$$

porque el lado izquierdo de la ultima igualdad es siempre positiva y  $h_0$  es negativa por hipótesis.

#### 1.4 PRIMERA LEY DE KEPLER

Suponiendo la ley gravitacional de Newton tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$(1.4.1) \quad \ddot{\vec{r}} = -\vec{v}$$

$$\dot{\vec{v}} = -\mu r^{-3} \vec{r}$$

a partir de estas dos ultimas ecuaciones haremos un análisis para llegar a la conclusión de que la partícula se mueve en una sección cónica (primera ley de Kepler).

Primeramente multipliquemos (1.2.3) por  $-\mu$  de ambos lados

$$-\mu \frac{d}{dt} \frac{\vec{r}(t)}{r} = \frac{\vec{c} \times \vec{r}}{r^3} \quad (-\mu) = \vec{c} \times (-\mu \vec{r} r^{-3})$$

y deacuerdo a la segunda ecuación del sistema (1.4.1)

$$-\mu \frac{d}{dt} \frac{\vec{r}(t)}{r} = \dot{\vec{v}} \times \vec{c} \quad , \text{ integramos ambos lados}$$

$$\mu \int \frac{d}{dt} \frac{\vec{r}(t)}{r} = \int \dot{\vec{v}} \times \vec{c} \quad \text{o bien}$$

$$(1.4.2) \quad \mu \left\{ \frac{\vec{r}(t)}{r} + \vec{e} \right\} = \vec{v} \times \vec{c}$$

donde  $\vec{e}$  es una constante de integración que llamaremos vector de excentricidad.

Como  $\vec{r} \cdot \vec{c} = 0$  entonces de la anterior igualdad tenemos que  $\vec{e} \cdot \vec{c} = 0$  y si  $\vec{c} \neq 0$  entonces  $\vec{e} \perp \vec{c}$  que nos dice que  $\vec{e}$  esta en el plano de

movimiento. Si  $\vec{c} = 0$  ,  $\frac{\vec{r}}{r} = -\vec{e}$  que nos dice que  $\vec{e}$  esta a lo

largo de la linea de movimiento.

Si  $c \neq 0$  encontremos lo que  $\vec{e}$  significa geometricamente . Para esto tomemos el producto punto de ambos lados de (1.4.2) con  $\vec{r}$

$$-\mu \{ \vec{e} \cdot \vec{r} + r \} = \vec{r} \cdot \vec{v} \times \vec{c} = \vec{r} \times \vec{v} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{c} = c^2 \text{ por lo que llegamos a}$$

$$(1.4.3) \quad \vec{e} \cdot \vec{r} + r = \frac{c^2}{\mu}$$

Analicemos dos posibles casos:

CASO 1 : ( $\bar{e} = 0$ )

De la igualdad (1.4.3) se tiene que  $r = \frac{c^2}{\mu}$  esto es que  $r$  es una constante por lo que el movimiento es circular, mas aun podemos encontrar la velocidad para este caso como sigue:

De la fórmula  $(\bar{a} \cdot \bar{b})^2 + (\bar{a} \times \bar{b})^2 = a^2 b^2$  poniendo  $\bar{a} = \bar{v}$  y  $\bar{b} = \bar{r}$

$$(\bar{v} \cdot \bar{r})^2 + (\bar{v} \times \bar{r})^2 = r^2 v^2, \quad (\bar{v} \cdot \bar{r})^2 + \bar{c}^2 = r^2 v^2, \quad (\bar{r} \cdot \bar{r})^2 + \bar{c}^2 = r^2 v^2$$

pero como  $\bar{r} \cdot \bar{r} = r^2$  entonces  $r^2 + \bar{c}^2 = r^2 v^2$  y como  $\dot{r} = 0$  pues

$$r \text{ es constante } \bar{c}^2 = \bar{c}^2 = r^2 v^2 \rightarrow rv = c \rightarrow v = \frac{c}{r} = \frac{c}{\frac{c^2}{\mu}} = \frac{\mu}{c}$$

y además podemos decir que en este caso la energía es negativa, pues

$$h = \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{c^2} - \frac{\mu}{c^2} = \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{c^2} - \frac{\mu^2}{c^2} = -\frac{1}{2} \frac{\mu^2}{c^2} < 0;$$

CASO 2 : ( $\bar{e} \neq 0$ )

En este caso introduzcamos el vector  $\bar{e}$  como lo muestra la siguiente figura,

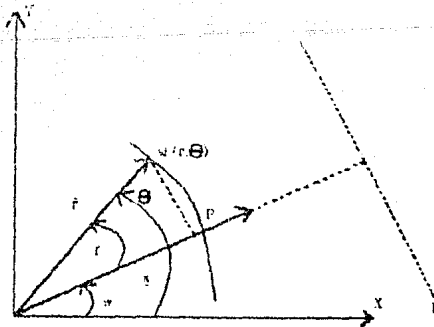


figura 1.6



donde Q es la posición de la partícula. Ahora lo que haremos es usar al vector  $\bar{e}$  como eje de coordenadas y representar a la partícula con respecto a  $(r, f)$  donde  $f = \vartheta - w$  (este ángulo es llamado "la anomalía verdadera"). En efecto, tenemos

$\bar{e} \cdot \bar{r} = e r \cos(f)$ , que sustituido en la ecuación 1.4.3, nos da

$$e r \cos(f) = \frac{c^2}{\mu} - r \Rightarrow r = \frac{c^2}{\mu} - e r \cos(f)$$

$$(1.4.4) \quad r = e \left( \frac{c^2}{\mu e} - r \cos(f) \right).$$

Consideremos una línea L a una distancia  $\frac{c^2}{\mu e}$  de O, perpendicular y del lado de dirección de  $\bar{e}$ . La ecuación (1.4.4) lo que nos dice es que la distancia de una partícula de O a Q es e veces la distancia desde Q a L,

$$d(Q, L) = \left( \frac{c^2}{\mu e} - r \cos(f) \right)$$

Así que la ecuación (1.4.4) no es más que una representación de una cónica en coordenadas polares, más reconocible en la forma:

$$r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 - e \cos(f)}$$

(Como comentario diremos que el punto P es llamado "Pericentro"). Ahora bien a partir de que  $r^2 \dot{\vartheta} = c$ ,  $c \neq 0$ ,  $\dot{\vartheta} > 0$  y como  $\dot{\vartheta} - \dot{f} = w$  con w-constante se obtiene  $\dot{\vartheta} = \dot{f}$  y se concluye que  $f > 0$  (f es estrictamente creciente) por lo que podemos deducir que en una órbita cónica la partícula pasa a lo más en una vez en cada punto hasta posiblemente completar el periodo de la vuelta, si es una curva cerrada.

Haremos un razonamiento que nos llevara a la conclusión que de acuerdo con el valor de la energía que tenga el sistema podemos concluir en que tipo de cónica se lleva a cabo el movimiento de la partícula. Para esto a partir de la igualdad (1.4.2) tomamos el producto punto de cada lado consigo mismo, i.e.

$$\mu \left( \vec{e} + \frac{\vec{r}}{r} \right) \cdot \mu \left( \vec{e} + \frac{\vec{r}}{r} \right) = (\vec{v} \times \vec{c}) \cdot (\vec{v} \times \vec{c})$$

$$\mu^2 \left( e^2 + 1 + \frac{2}{r} \vec{e} \cdot \vec{r} \right) = v^2 c^2, \quad \text{porque } \vec{v} \perp \vec{c} \text{ De (1.4.3) y (1.3.1)}$$

con  $m = 1$ , tenemos que :

$$\mu^2 \left( e^2 + 1 + \frac{2}{r} \left( \frac{1}{\mu} c^2 - r \right) \right) = c^2 \left( 2h_0 + \frac{2\mu}{r} \right).$$

Reduciendo terminos tenemos

$$\mu^2 (e^2 - 1) = 2h_0 c^2 \quad \text{entonces si } c \neq 0$$

- i)  $e > 1 \Leftrightarrow h_0 > 0$  (Una rama de la hipérbola)
- ii)  $e = 1 \Leftrightarrow h_0 = 0$  (Parábola)
- iii)  $e < 1 \Leftrightarrow h_0 < 0$  (Elipse)

Ahora encontraremos una expresión con la cual podamos encontrar los elementos de la cónica correspondiente a partir de la excentricidad (vector  $\vec{e}$ ). Para esto hacemos lo siguiente.

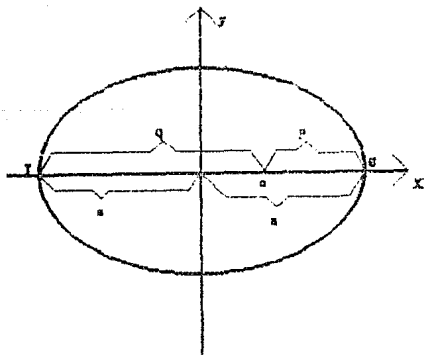


figura 1.7

Sabemos que  $Q + P = 2a$ , (longitud del eje mayor) siendo  $n$  el centro de la fuerza situado en un foco de la elipse. Si consideramos que la partícula inicialmente está en  $s$ ,  $f$  es igual a cero (recordamos que  $f$  es el ángulo que se forma entre la recta que une el centro de fuerza  $n$  con la posición de la partícula y el eje  $x$ ). Entonces de la fórmula 1.4.4,

$$\text{se tiene que } p = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + e}$$

Ahora si consideramos que la partícula está en  $t$ , el valor de  $f$  sería  $\pi$ , en cuyo caso

$$q = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 - e} . \quad \text{Pero como } p + q = 2a \text{ tenemos}$$

$$\frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + e} + \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 - e} = 2a , \quad \frac{-\frac{c^2}{\mu}e + \frac{c^2}{\mu} + \frac{c^2}{\mu} + \frac{c^2}{\mu}e}{1 - e^2} = 2a$$

$$\frac{2 \frac{c^2}{\mu}}{1 - e^2} = 2a , \quad \frac{c^2}{\mu} = a(1 - e^2) , \quad c^2 = \mu a (1 - e^2) \quad (1.4.5)$$

Ejemplo:

Dadas las condiciones iniciales  $\mu = 1$ ,  $\vec{r}_0 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{v}_0 = (0, \sqrt{3/2}, 0)$ , encontrar los elementos de la órbita que describe la partícula.

De la ecuación (1.4.2) tenemos

$$\vec{e} = \frac{1}{\mu} (\vec{v}(t) \times \vec{c}(t)) - \frac{\vec{r}(t)}{r}$$

Calculamos

$$\vec{c}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{v}(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3/2} & 0 \end{vmatrix}$$

$= \mathbf{i}(0) - \mathbf{j}(0) + \mathbf{k}(\sqrt{3/2}) = (0, 0, \sqrt{3/2})$ , como  $\vec{c}(t) \neq 0$  el movimiento es en un plano.

$$\vec{v}(t) \times \vec{c}(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \sqrt{3/2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3/2} \end{vmatrix} = \mathbf{i}(3/2) - \mathbf{j}(0) + \mathbf{k}(0) = (3/2, 0, 0)$$

$e = (3/2, 0, 0) - (1, 0, 0) = (1/2, 0, 0) < 1$  por lo que la conica es una elipse.

De la fórmula  $\mu a |e^2 - 1| = c^2$  obtenemos el valor de  $a$  (semieje mayor)

$$a = \frac{c^2}{|e^2 - 1|\mu} = \frac{3/2}{1(3/4)} = 2. \text{ De la fórmula } r = \frac{c^2/\mu}{1 + e \cos(f)}$$

con  $\cos(f) = 1$  (que es cuando la partícula esta mas cercana del centro de fuerza ( $F_1$ ) que es un foco), se tiene que:

$$r = \frac{3/2}{1 + 1/2} = 1 \text{ esto es } (1, 0, 0)$$

Si queremos saber el semieje menor  $b$ , lo podemos calcular por medio de las ecuaciones correspondientes a una elipse, al igual que si queremos encontrar le otro foco ( $F_2$ ).

Dibujemos la trayectoria que describe la partícula en este caso.

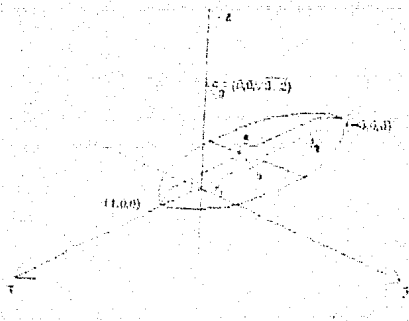


figura 1.8

Para finalizar esta sección demos demos la tercera ley de Kepler para  $0 < e < 1$ .

Como sabemos el área de una elipse está dada por  $\pi a^2 (1-e^2)^{1/2}$ .

A partir de la ecuación (1.2.4) se tiene que

$$A = 1/2 ct + k, \quad k\text{-constante}$$

Como nosotros queremos conocer el periodo  $p$  (que es el tiempo que tarda la partícula en barrer el área una vez), entonces igualamos el área total de la elipse con la última igualdad

$$(1.4.6) \quad \pi a^2 (1-e^2)^{1/2} = 1/2 cp$$

De la igualdad (1.4.5) se tiene que

$$|1-e^2| = \frac{c^2}{\mu a} \quad \text{o bien que} \quad (1-e^2)^{1/2} = \frac{c}{\sqrt{\mu} \sqrt{a}}$$

Sustituyendo en 1.4.6

$$p = \frac{2\pi a^2 \left\{ \frac{c}{\sqrt{\mu} \sqrt{a}} \right\}}{c} = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \quad \text{o bien}$$

$$p^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\mu}$$

que nos dice que el cuadrado del periodo es proporcional al cubo de su semieje mayor.

### 1.5. PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS

En esta sección consideremos dos partículas cuyas masas son  $m_1$  y  $m_2$  y cuyos vectores de posición con respecto a un punto fijo en el espacio son  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  y denotaremos como  $r$  a la distancia entre ellas,  $r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ . Entonces de acuerdo a la ley universal de Newton, las fuerzas de atracción entre las partículas es

$$f = G m_1 m_2 r^{-2} \quad G - \text{Constante Universal}$$

Las ecuaciones diferenciales quedan como

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \left( \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{r} \right),$$

1.5.1

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \left( \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{r} \right).$$

Se puede resolver este problema reduciendolo al problema de fuerza central por dos metodos diferentes llamados

"Reducción a coordenadas relativas" y "Reducción a coordenadas baricentricas".

Primeramente se atacara el problema con el método de reducción a coordenadas relativas. Para esto dividamos la primera ecuación del sistema 1.5.1 entre  $m_1$  y la segunda entre  $m_2$ , y se resta la primera de la segunda, esto es,

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= \frac{\ddot{\vec{r}}_2}{m_2} - \frac{\ddot{\vec{r}}_1}{m_1} = \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{r} \frac{G m_1}{r^2} - \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{r} \frac{G m_2}{r^2} \\ &= \frac{\vec{r}_1}{r} \left( \frac{G m_1}{r^2} + \frac{G m_2}{r^2} \right) - \frac{\vec{r}_2}{r} \left( \frac{G m_1}{r^2} + \frac{G m_2}{r^2} \right) \\ &= \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{r} \left( \frac{G (m_1 + m_2)}{r^2} \right) = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{r} \left( \frac{-G (m_1 + m_2)}{r^2} \right) \end{aligned}$$

y como  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  que nos indica el movimiento de  $r_2$  visto desde

$\vec{r}_1$ , queda que

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \mu \quad \text{donde } \mu = G (m_1 + m_2)$$

En este caso una vez determinada la solución  $r(t)$  de la última ecuación para condiciones iniciales dadas  $r(0)$  y  $\dot{r}(0)$  entonces podemos conocer los segundos miembros del sistema (1.5.1). Mediante dos integraciones de la primera ecuación del sistema 1.5.1 se obtendría  $\vec{r}_1(t)$ , y de la igualdad  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  se obtendría  $\vec{r}_2$  y así quedaría resuelto el problema (además de poder aplicar toda la teoría anterior pues este es el problema de fuerza central con una  $\mu$  especial).

Ahora ataquemos el mismo problema por medio de el otro procedimiento. Para esto definamos primero el centro de masas de las dos partículas como:

$$1.5.2 \quad \vec{r}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

que se encontrara como en la siguiente figura

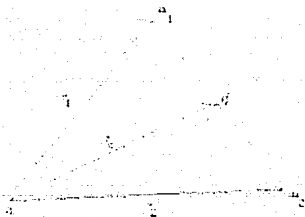


figura 1.9

Si se suman las dos ecuaciones de 1.5.1 se obtiene

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0 \quad \text{por lo que por 1.5.2 } \ddot{\vec{r}}_c = 0. \quad \text{Entonces } m_2 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 = \vec{l}$$

donde  $\vec{l}$  vector tridimensional constante. Se tiene que

$(m_1 + m_2) \dot{\bar{r}}_c = \bar{l}$  lo cual integramos con respecto a  $t$

$(m_1 + m_2) \dot{\bar{r}}_c = t\bar{l} + \bar{b}$ , donde  $\bar{b} \in \mathbb{R}^3$ . Observemos que  $\bar{l}$  y  $\bar{b}$  son determinadas por las condiciones iniciales

Lo que dice la ultima ecuacion es que el centro de masas se mueve con una velocidad uniforme en una recta.

Ahora bien, con las constantes  $\bar{l}$  y  $\bar{b}$  tenemos ya seis de las doce constantes de movimiento existentes en el sistema 1.5.1 (pues en el sistema 1.5.1 hay dos ecuaciones vectoriales que se convierten en seis ecuaciones escalares. Como cada ecuación es de segundo orden hay doce constantes de movimiento).

Como comentario diremos que debido a las constantes de movimiento se dice que este prolema es integrable, donde las integrales son la energia y el momento angular (que hacen que baje la dimensión del problema).

Para encontrar las otras seis faltantes movemos el origen  $O$  al centro de masas, esto es

$$\bar{r}'_1 = \bar{r}_1 - \bar{r}_c$$

$\bar{r}'_2 = \bar{r}_2 - \bar{r}_c$  donde  $\bar{r}'_1$  y  $\bar{r}'_2$  denota la posición de la masa  $m_1$  y  $m_2$  como se puede observar en la siguiente figura

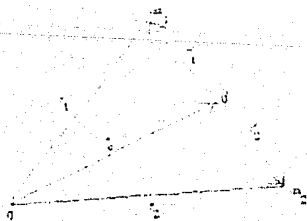


figura 1.10



Esto último lo podemos hacer porque como  $\ddot{r}_2 = 0$ , las segundas derivadas la transformación no alteran las ecuaciones originales. En efecto,

a partir de que  $\bar{r} = \bar{r}'_2 - \bar{r}'_1$  y como  $m_1 \ddot{\bar{r}}_1 = m_1 \ddot{\bar{r}}'_1$ ,  $m_2 \ddot{\bar{r}}_2 = m_2 \ddot{\bar{r}}'_2$  se obtiene

$$m_1 \ddot{\bar{r}}'_1 = \frac{G m_1 m_2}{r^3} (\bar{r}'_2 - \bar{r}'_1)$$

Como  $m_1 \bar{r}'_1 + m_2 \bar{r}'_2 = 0$ , podemos eliminar a  $\bar{r}'_2$  de la anterior ecuación, por lo que

$$1.5.3 \quad m_1 \ddot{\bar{r}}'_1 = -G m_1 m_2 \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \frac{\bar{r}'_1}{r^3}$$

Como

$$\bar{r} = \frac{M}{m_2} \bar{r}'_1 = \frac{M}{m_1} \bar{r}'_2 \quad \text{donde } M = m_1 + m_2,$$

se puede escribir la última ecuación de la siguiente forma

$$1.5.4 \quad m_1 \ddot{\bar{r}}'_1 = -G \left( \frac{m_2^3}{M^2} \right) \frac{\bar{r}'_1}{r_1'^3} \quad \text{y de forma análoga}$$

$$m_1 \ddot{\bar{r}}'_2 = -G \left( \frac{m_1^3}{M^2} \right) \frac{\bar{r}'_2}{r_2'^3}$$

De esto último ya se puede resolver cada una de ellas pues son de la forma del problema de fuerza central con  $\mu_1$  y  $\mu_2$  especiales. Así podemos encontrar las seis constantes restantes ( que son llamadas los elementos de cada órbita relativa al centro de masas).

Lo que nos dicen las ecuaciones 1.5.4 es que tanto  $\bar{r}'_1$  y  $\bar{r}'_2$  se mueven con respecto al centro de masas como si una fuerza de atracción existiera en dicho centro.

Si continuamos con la suposición que el origen se encuentra fijo en el centro de masas, se encuentra que

$$h_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \mu \frac{m_1 m_2^3}{M^2 r_1'} = T_1^* - U_1^* \quad \text{energía del primer cuerpo}$$

$$h_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \mu \frac{m_2 m_1^3}{M^2 r_2'} = T_2^* - U_2^* \quad \text{energía del segundo cuerpo}$$

energía total  $h = h_1 + h_2 = T + U$  donde

$$T = T_1^* + T_2^* = \frac{1}{2} (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) \quad \text{y}$$

$$\begin{aligned} U &= U_1^* + U_2^* = \frac{\mu m_1 m_2^3}{M^2 r_1'} + \frac{\mu m_1 m_2^3}{M^2 r_2'} \\ &= \frac{\mu}{M^2} \left( \frac{m_1 m_2^3}{r_1'} + \frac{m_1 m_2^3}{r_2'} \right) \\ &= \frac{\mu m_1 m_2}{M^2} \left( \frac{m_2^2}{r_1'} + \frac{m_1^2}{r_2'} \right) = \frac{\mu m_1 m_2}{M^2} \left( \frac{r_1' m_2^2 + r_2' m_1^2}{r_1' r_2'} \right) \end{aligned}$$

pero por 1.5.3

$$\begin{aligned} U &= \frac{\mu m_1 m_2}{M^2} \left( \frac{r_2' m_2^2 + r_1' m_1^2}{\frac{r_1' r_2' m_1 m_2}{M}} \right) = \frac{\mu}{r'} \left( \frac{r_2' m_2^2 + r_1' m_1^2}{r} \right) \\ &= \frac{\mu}{r} \left( \frac{r_2' m_2 m_2 + r_1' m_1 m_1}{r} \right) = \frac{\mu}{r} \left( \frac{r_1' m_1 (m_2 + m_1)}{r} \right) \\ &= \frac{\mu}{r} \left( \frac{r_1' m_1 M}{r_1' \frac{M}{m_2}} \right) = \frac{\mu}{r} m_1 m_2 \end{aligned}$$

además se puede agregar que como

$$\frac{U_1^*}{U_2^*} = \frac{\mu m_1 m_2^3 M^2 r_1}{\mu m_2 m_1^3 M^2 r_2} = \frac{m_2^2 r_1}{m_1^2 r_2} = \frac{m_2^2 r_2}{m_1^2 r_1} = \frac{r_2 m_2 m_2}{r_1 m_1 m_1}$$

y como  $r_2 m_2 = r_1 m_1$  se tiene que  $U_1^* m_1 = U_2^* m_2$  (1.5.4)

y por otro lado

$$\frac{T_1^*}{T_2^*} = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2}{\frac{1}{2} m_2 v_2^2} = \frac{m_1}{m_2} \left( \frac{\frac{m_2^2}{m_1^2} v_2^2}{v_2^2} \right) = \frac{m_2^2}{m_1^2} = \frac{m_2}{m_1} \text{ por lo que}$$

$T_1^* m_1 = T_2^* m_2$  que sumándola con 1.5.4 se tiene

$m_1 (U_1^* + T_1^*) = m_2 (U_2^* + T_2^*)$  o bien  $m_1 h_1 = m_2 h_2$  por lo que

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{U_1^*}{U_2^*} = \frac{T_1^*}{T_2^*}$$

es decir la razón de las diferentes energías ( potencial , cinética y total) de cada cuerpo es constante.

## CAPITULO 2

### 2.1.-DEFINICION DE REGULARIDAD

2.1.1 REGULARIDAD DE UN SISTEMA

2.1.2 REGULARIDAD DE SOLUCIONES

2.1.3 SINGULARIDADES

### 2.2.-REGULARIZACION DE SUNDMAN

2.2.1 TIEMPO FICTICIO

### 2.3.-REGULARIZACION DE LEVI-CIVITA

### 2.4.-OBSERVACIONES

2.4.1 CASOS ESPECIALES

2.4.2 VENTAJAS DE LA REGULARIZACION

## 2.1 DEFINICION DE REGULARIDAD

En este capítulo daremos algunas técnicas de regularización que son muy utilizadas en la Mecánica Celeste, para esto daremos primeramente algunas definiciones para precisar ideas.

Una colisión es una posición de las partículas de la forma

$$x_1 = x_2.$$

Si la posición inicial en el problema no es una colisión, entonces los teoremas de ecuaciones diferenciales ordinarias nos aseguran la existencia de una solución  $x(t)$  de un intervalo  $[0, b)$ . Si  $b < \infty$  (finita) decimos que la solución tiene una singularidad en  $b$ . Este es el caso en el que realmente estamos interesados por el resultado que se demostró en el capítulo I acerca de la colisión que se daba en tiempo finito entre una partícula que iniciaba en reposo y el centro de atracción.

El problema a tratar es que cuando necesitamos calcular una solución ya sea por métodos analíticos o numéricos, tanto las singularidades de la ecuaciones como de la soluciones presentan obstáculos para ese cálculo, por lo que se tienen que eliminar de alguna forma. En el caso en el que las singularidades sean una minoría, de alguna forma existe la posibilidad al menos en principio de, aislarlas. Sin embargo, esto no resuelve el problema ya que podemos estar interesados en estudiar el problema con singularidades (para obtener una imagen total de las soluciones).

## 2.2 REGULARIZACION DE SUNDMAN †

Comenzaremos por estudiar el método de regularización de Sundman para el problema de fuerza central ( que también nos servirá para el problema de los dos cuerpos en el plano por la equivalencia de dichos problemas que se demostró en el capítulo 1).

† Las secciones 2.2 y 2.3 se basaron fuertemente en [1]

La idea a seguir será la de compensar el crecimiento infinito de la velocidad en la colisión, multiplicando  $r$  por un factor escalar adecuado que se anule en la colisión. Dicho factor será la distancia al origen  $r$ , por lo que si multiplicamos a la ecuación de la energía (con la fuerza de Newton) por  $r^2$ , se tiene que

$$2.2.1 \quad \frac{1}{2} r^2 \dot{r}^2 - \mu r = h r^2$$

Si introducimos una nueva variable temporal  $s$  forma que la velocidad con respecto a esta nueva variable (llamada "tiempo ficticio") sea

$$\frac{dr}{ds} = \frac{r}{k} \frac{dr}{dt} \quad k \text{ constante que nos permite normalizar,}$$

se tiene que la ecuación 2.2.1 se convierte en

$$2.2.2 \quad \frac{1}{2} k^2 r'^2 - \mu r = h r^2$$

(de aquí en adelante la prima denotará la derivada con respecto a la variable  $s$ ).

Si derivamos la ecuación 2.2.2 con respecto a  $s$  y dividimos entre  $r'$  tenemos,

$$2.2.3 \quad k^2 r'' - 2hr - \mu = 0$$

Una posible solución de la anterior ecuación es

$$r = -\frac{\mu}{2h} \quad \text{o bien} \quad r' = 0, \quad \text{que implica por unicidad que } r'(s) = 0 \\ \forall s \in \mathbb{R} \quad (\text{soluciones circulares}).$$

A continuación analizaremos 3 distintos casos (de acuerdo al signo de la energía) donde nuestras condiciones iniciales serán tales que la nueva velocidad se anule, esto es  $r(0) = r_0$ ,  $r'(0) = 0$  (por lo que  $r \frac{dr}{dt} = 0$  como  $r(0) \neq 0 \Rightarrow \frac{dr}{dt} = 0$  que nos dice que la velocidad original se anula).

CASO A: ( $h = 0$ )

Tomemos a  $k^2 = \mu$ . La ecuación 2.2.2 se convierte en  $r'' = 1$ , y si

tomamos en cuenta las condiciones iniciales tenemos que

$$2.2.4 \quad r(s) = \frac{s^2}{2} + r_0$$

Por otra parte se tiene que

$$\frac{dr}{ds} = \frac{r}{k} \frac{dr}{dt} ; \quad dt = r ds$$

o bien que

$$t - t_0 = \frac{1}{k} \int_0^s r ds = \frac{s^3}{3k} + \frac{r_0 s}{k} \quad \text{o lo que es lo mismo}$$

$$2.2.5 \quad t(s) = \frac{s^3}{3k} + \frac{r_0 s}{k} + t_0.$$

Sin pérdida de generalidad hagamos a  $t_0 = 0$  y analicemos dos casos

a)  $r_0 > 0$ .

De la ecuación 2.2.4 tenemos que

$$t'(s) = \frac{1}{k} \left( \frac{s^2}{2} + r_0 \right) + \frac{s}{k} \left( \frac{s}{3} \right) = \frac{s^2}{2k} + \frac{r_0}{k} + \frac{s^2}{3k} > 0$$

para toda  $s$  en  $\mathbb{R}$ . Entonces  $t(s)$  es un difeomorfismo y las ecuaciones 2.2.4 y 2.2.5 nos dan implícitamente a  $r$  como función regular de  $t$ . En la solución no hay colisión porque  $r_0(s) > 0$  para toda  $s$  en  $\mathbb{R}$

Figura 2.1

b)  $r_0 = 0$

en este caso las ecuaciones 2.2.4 y 2.2.5 se convierten en

$$r(s) = r(s(t)) = r((6kt)^{1/3}) = \frac{(6k)^{2/3} t^{2/3}}{2^{1/3}}$$

que corresponden a las soluciones con colisión. Como  $k^2 = \mu$  llegamos a la ecuación que se había obtenido anteriormente en el capítulo I (cuando se analizó el caso Newtoniano con  $h = 0$  y  $r > 0$  a partir de la ecuación 1.3.1.)

La última ecuación tiene una singularidad exactamente cuando ocurre colisión en  $t = s = 0$ . Esto era de esperarse pues si tomamos en cuenta las condiciones iniciales  $r = r' = 0$  sabemos por la igualdad

$$\bar{e} \bar{r} + r = \frac{c^2}{\mu}, \quad \text{que el movimiento es lineal.}$$

Así que se obtiene la siguiente gráfica.

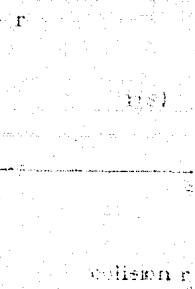


figura 2.2

CASO B: ( $h > 0$ )

En este caso tomemos  $k^2 = \frac{h}{z}$ . De la ecuación 2.2.3 se tiene que

$$\frac{h}{z} r'' - 2hr - \mu = 0 \quad \text{o bien}$$

$$r'' - 4r = \frac{2\mu}{h} = \frac{\mu}{\frac{h}{z}} = \frac{\mu}{k^2}$$

Si consideramos las condiciones iniciales llegamos a las siguientes soluciones



$$r(s) - r_0 = \frac{\mu}{4k^2} (\cosh 2s - 1) = \frac{\mu}{2k^2} \sinh^2 s$$

$$t(s) - t_0 = \frac{\mu}{2k^3} (\sinh 2s - 2s) + r_0 \frac{s}{k}$$

Si ponemos  $r_0 = t_0 = 0$ , las anteriores ecuaciones corresponden a soluciones con colisión

CASO C: ( $h < 0$ )

En este caso hacemos  $k^2 = \frac{\mu}{2}$  y la ecuación 2.2.2 se convierte en

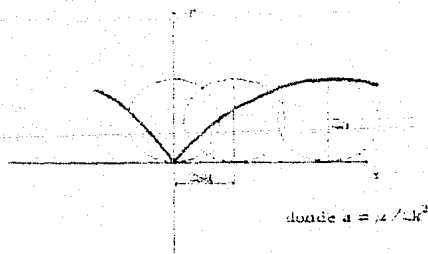
$$r'' + 4r = \frac{\mu}{k^2}$$

Si volvemos a considerar las condiciones iniciales tenemos las siguientes soluciones

$$r(s) - r_0 = -\frac{\mu}{4k^2} (1 - \cos 2s) = \frac{\mu}{2k^2} \sin^2 s$$

$$t(s) - t_0 = \frac{\mu}{2k^3} (2s - \sin 2s) + r_0 \frac{s}{k}$$

y si hacemos  $r_0 = 0$  y  $t_0 = 0$  tenemos la siguiente figura.



Un cicloide generado por un círculo de radio  $a$  que se desliza sobre el eje  $s$

figura 2.9

Observación:

En cualquiera de los tres casos anteriores si  $c = 0$  se tiene de la igualdad  $c = r^2 \dot{\vartheta}$  que  $\dot{\vartheta} = 0$ , por lo que  $\vartheta = p$  ( $p = \text{constante}$ ). Esto nos dice que el ángulo es siempre el mismo (movimiento colineal). Si  $e = 0$  entonces  $r = r_0$  y nuevamente por la igualdad  $c = r^2 \dot{\vartheta}$  se tiene que

$$\dot{\vartheta} = \frac{tc}{r_0^2} + \dot{\vartheta}_0 \text{ define un movimiento circular uniforme.}$$

Por último dibujamos el espacio fase de este problema con las variables de Sundman.

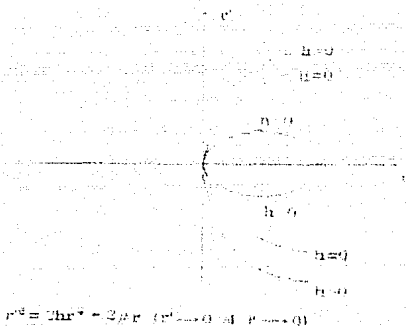


Figura 2.4

Observemos que las soluciones se pueden pensar como rebote elástico con el origen.

### 2.3 REGULARIZACION DE LEVI-CIVITA

En este segundo método que describiremos a continuación, utilizaremos nuevamente el tiempo ficticio que definimos en la anterior sección i.e.

anterior seccion i.e.

$$\frac{dr}{ds} = \frac{r}{k} \frac{dr}{dt} \quad \text{con la diferencia que ahora } r = \varepsilon^2$$

( $\varepsilon$  nueva variable), Si analizamos el caso  $c = 0$  ( caso colineal ) como

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \frac{k}{r} \quad \text{y} \quad \frac{dr}{ds} = 2\varepsilon\varepsilon', \text{ se tiene que}$$

$$\frac{dr}{dr} = \frac{2\varepsilon\varepsilon'k}{\varepsilon^2} = \frac{2\varepsilon'k}{\varepsilon}.$$

Por lo que la ecuacion de la energía se transforma en

$$\frac{2\varepsilon'^2 k^2}{\varepsilon^2} \varepsilon^4 + \mu \varepsilon^2 = h\varepsilon^4 \quad \text{o bien}$$

$$2.3.1 \quad 2k^2\varepsilon'^2 - \mu = h\varepsilon^2$$

Si le sacamos la derivada con respecto a  $\varepsilon$  y dividimos entre  $\varepsilon'$  se obtiene que

$$2.3.2 \quad k\varepsilon'' - \frac{h}{2}\varepsilon = 0$$

(que corresponde a un oscilador armónico si  $h < 0$ )

Analicemos el caso de  $h = 0$  y  $k^2 = \mu$ . La ecuación 2.3.2 se convierte en  $\varepsilon'' = 0$ , cuya solución es  $\varepsilon = a (s - s_0)$ . Si lo sustituimos en la ecuacion 2.3.1, se tiene que

$$2\mu a^2 = \mu \quad \Rightarrow \quad a = \pm 1/\sqrt{2} \quad \text{y así obtenemos}$$

$$r = \varepsilon^2 = \frac{1}{2} (s - s_0)^2 \quad \text{Mas aun como}$$

$$dt = \frac{\varepsilon^2}{k} ds, \quad t - t_0 = \frac{1}{k} \int_{s_0}^s (s - s_0)^2 ds = \frac{1}{3k} (s - s_0)^3 \Big|_{s_0}^s$$

O bien  $t = \frac{1}{3k} (s - s_0)^3$  con  $t_0 = 0$ , sin pérdida de generalidad que es lo que se había obtenido en el caso A con  $r(s_0) = 0$

La gráfica de  $\varepsilon(s)$  con la condición inicial  $s_0 = 0$  es la siguiente.

figura 2.5

Si la comparamos con  $r(s)$  en las variables de Sundman tendremos alguna idea de como se van acercando las nuevas variables al origen con respecto al tiempo  $s$ .

Daremos a continuacion el espacio fase en las variables de Levi-Civita como en el metodo anterior. Todos son obtenidos dibujando curvas de nivel de las diferentes ecuaciones de energias para diversos valores de  $h$ .

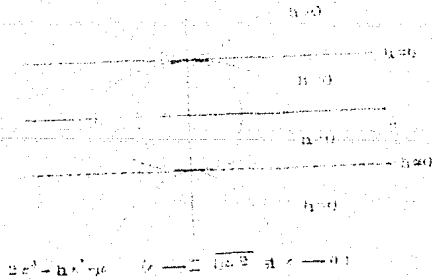


figura 2.6

Como comentario diremos que existe una formulacion de este tipo de regularizacion que se aplica directamente al problema de fuerza central en el plano aprovechando la estructura multiplicativa de los numeros complejos. Identificando  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$  se introduce una nueva coordenada  $z \in \mathbb{C}$  donde  $x = z^2$  y se reescriben las ecuaciones de la energia en terminos de este cambio )

#### 2.4 OBSERVACIONES

Primeramente observemos que las soluciones tanto en las variables de Sundman como en las de Levi-Civita son validos solo para  $h$  fija, como se considero en este capitulo. Esto explica el paso de diversas soluciones por un mismo punto ( el origen y  $(0, \pm \sqrt{\mu/2})$  respectivamente) sin que sea el punto de equilibrio para las ecuaciones diferenciales.

Tambien observemos que las ecuaciones de energia tienen sentido si  $\mu < 0$  y tomando  $h > 0$  que corresponde a un problema de fuerza central repulsivo.

Por ultimo diremos que las transformaciones de coordenadas de Sundman o Levi-Civita nos permiten por un lado representar parametricamente las soluciones (como en los casos A , B y C) Ademas, las ecuaciones diferenciales transformadas con  $\mu < 0$  son regulares, lo cual es ventajoso desde el punto de vista numerico.

## CAPITULO 3

3.1 EXPLICACION GENERAL DE LOS PLANTEAMIENTOS DE LOS PROBLEMAS

3.2 EJEMPLOS DE PROBLEMA DE FUERZA CENTRAL

3.2.1 UNA Y DOS CONDICIONES INICIALES

3.3 EJEMPLOS DEL PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS

3.4 EJEMPLOS DE SISTEMAS REGULARIZADOS PARA EL PROBLEMA DE FUERZA CENTRAL

3.4.1 REGULARIZACION DE SUNDMAN

3.4.2 REGULARIZACION DE LEVI-CIVITA

3.5 CONCLUSIONES

### 3.1 EXPLICACION GENERAL DE LOS PLANTEAMIENTOS DE LOS PROBLEMAS

En las siguientes secciones damos varios ejemplos de diferentes problemas. Aunque hay una gran variedad de ellos, nos enfocaremos al planteamiento de problemas que hemos venido analizando a través de la tesis. Daremos la descripción numérica y gráfica por computadora que se obtiene a través del paquete MCeleste, que fue uno de los objetivos de esta tesis.

La selección de los problemas fue lo más variado posible para poder dar una amplia visión de lo que ocurre en cada uno de ellos. Es necesario mencionar que la escala que aparece en cada uno de los espacios de configuraciones es de diez unidades entre línea y línea. Además diremos que lo que habíamos estado denotando como  $\mu$  en los anteriores capítulos de ahora lo llamaremos "a" para finalidad de un buen funcionamiento del paquete.†

En cada uno de los ejemplos que se dan a continuación se dará el sistema de ecuaciones diferenciales que lo modela, sus condiciones iniciales, su espacio de configuración, y el método de integración que lo resolvió, las condiciones iniciales se denotarán como :

a = Constante de la fuerza de atracción. ( $\mu$ )

r1 = Posición de la primera partícula.

r2 = Posición de la segunda partícula.

v1 = Velocidad de la primera partícula.

v2 = Velocidad de la segunda partícula.

dt = Incremento de tiempo.

ti = tiempo inicial.

tf1 = Tiempo final de la primera partícula.

tf2 = Tiempo final de la segunda partícula.

### 3.2 EJEMPLOS DE PROBLEMA DE FUERZA CENTRAL

En esta sección daremos algunos ejemplos del problema de fuerza central. El sistema de ecuaciones planteado para este problema (utilizando la ley gravitacional de Newton  $-\frac{1}{r^2}$ ) es el que sigue:

† Para mayores detalles ver Apendice A

$$\frac{dx}{dt} = u$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{-a*x}{|r|^3}$$

$$\frac{dy}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-a*y}{|r|^3}$$

$$\frac{dz}{dt} = w$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{-a*z}{|r|^3}$$

donde  $|r|$  es la distancia de la partícula al centro de fuerza (origen)

Como se puede observar el planteamiento se hizo para que la resolución sea coordinada a coordinada.

### Ejemplo 2.1

Condiciones Iniciales

$$a = 1$$

$$dt = 0.1$$

$$r1 = (1, 0, 0)$$

$$ti = 0$$

$$v1 = (0, \sqrt{a/z}, 0)$$

$$tf1 = 4.94$$

Método : Runge-Kutta ( de orden cuatro)

### Ejemplo 2.2

Condiciones Iniciales

$$a = 5000$$

$$dt = 0.01$$

$$r1 = (75, 12, 20)$$

$$ti = 0$$

$$v1 = (5, 1, 4)$$

$$tf1 = 37.80$$

Método : Leap-Frog

### Ejemplo 2.3

Condiciones Iniciales

$$a = 5000$$

$$dt = 0.1$$

$$r1 = (75, 12, 20)$$

$$ti = 0$$

$$v1 = (5, 1, 4)$$

$$tf1 = 29.91$$

Método : Leap-Frog



### Ejemplo 2.4

#### Condiciones Iniciales

$$a = 400$$

$$r1 = (75, 12, 20)$$

$$v1 = (5, 1, 4)$$

Método : Leap-Frog

$$dt = 0.1$$

$$t1 = 0$$

$$tf1 = 10.02$$

### Ejemplo 2.5

#### Condiciones Iniciales

$$a = 5000$$

$$r1 = (100, 0, 20)$$

$$v1 = (0, 5, 0)$$

Método : Euler

$$dt = 0.1$$

$$t1 = 0$$

$$tf1 = 48.37$$

Hay que notar que no se cierra el periodo como debería, por ser un método de baja precisión.

### Problema de fuerza central con dos condiciones iniciales

#### Ejemplo 2.6

#### Condiciones Iniciales

$$a = 4500$$

$$r1 = (0, 120, 37)$$

$$v1 = (3, 0, 0)$$

Método : Haun

$$r2 = (20, 170, 0)$$

$$v1 = (0, 0, 0)$$

$$dt = 0.1$$

$$t1 = 0$$

$$tf1 = 182.15$$

$$tf2 = 78.62$$

### Ejemplo 2.7

#### Condiciones Iniciales

$$a = 5000$$

$$r1 = (100, 0, 10)$$

$$v1 = (1, 5, 0)$$

Método : Runge-Kutta

$$r2 = (50, 0, 0)$$

$$v2 = (0, 2, 0)$$

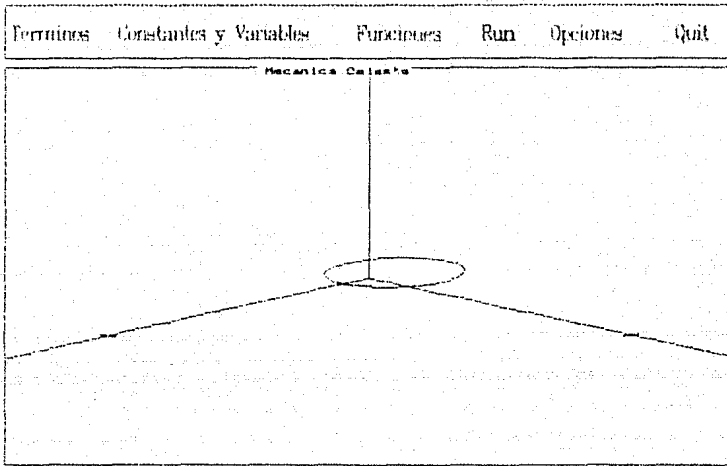
$$dt = 0.1$$

$$t1 = 0$$

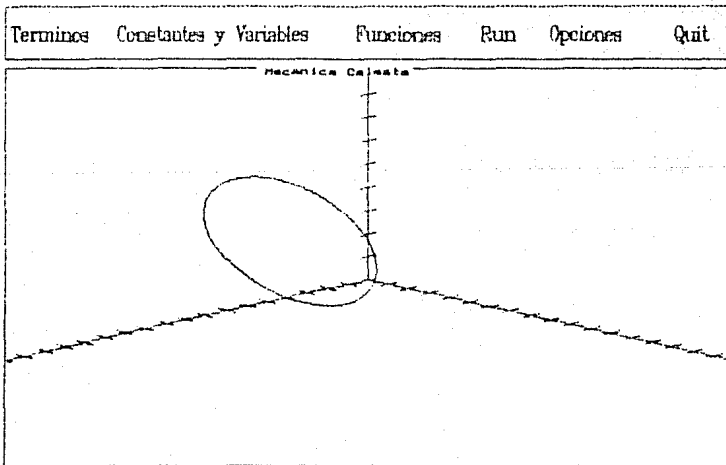
$$tf1 = 51.22$$

$$tf2 = 21.78$$

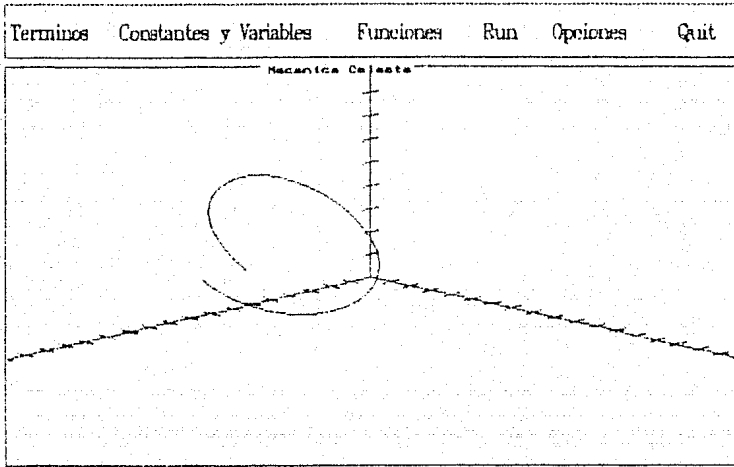
Ejemplo 2.1



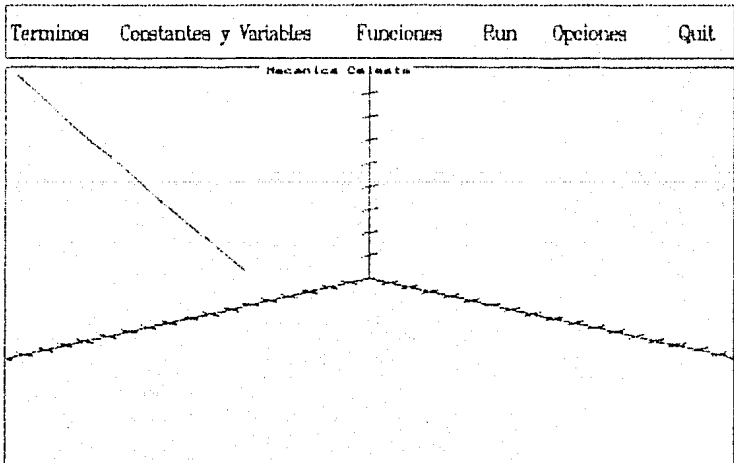
Ejemplo 2.2



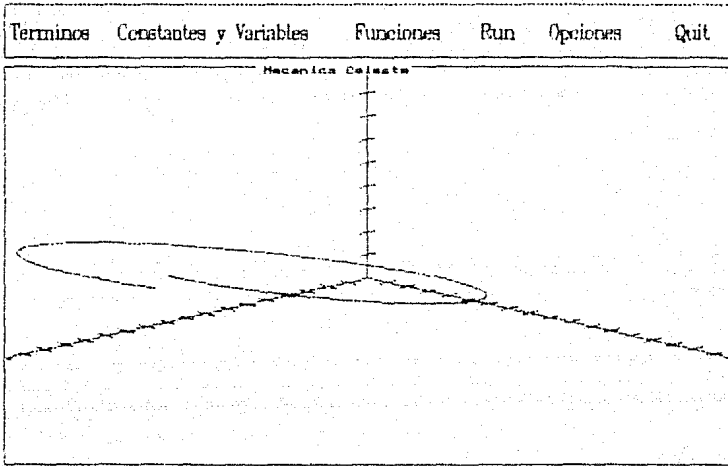
Ejemplo 2.3



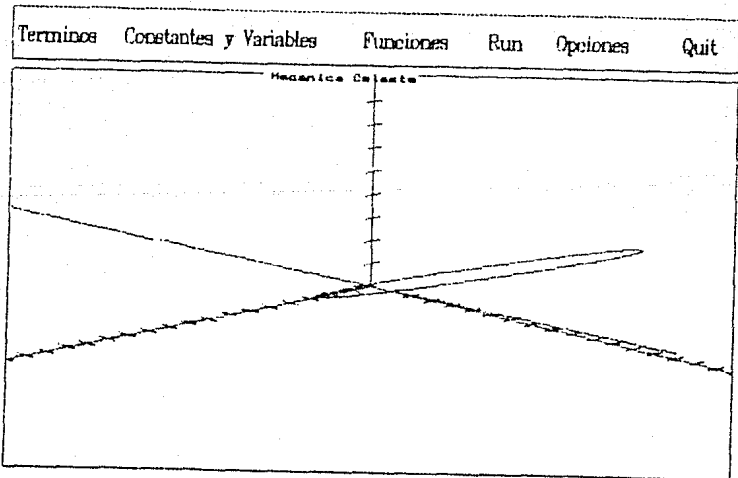
Ejemplo 2.4



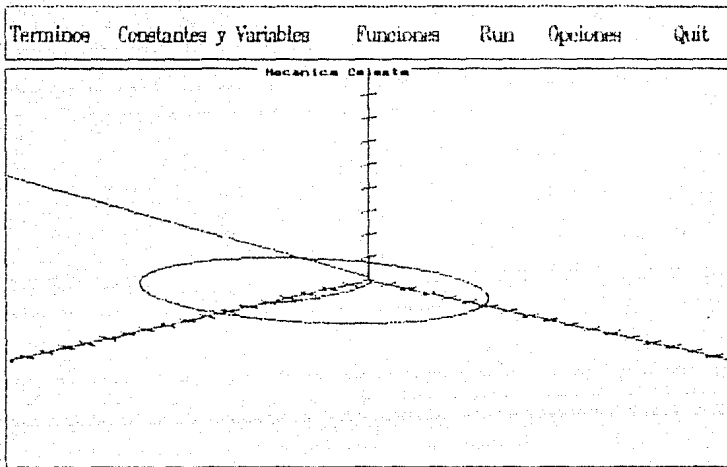
Ejemplo 2.5



Ejemplo 2.6



### Ejemplo 2.7



### 3.3 EJEMPLOS DEL PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS

El sistema que se utilizó en este problema fue el siguiente

$$\frac{dx}{dt} = u \qquad \frac{du}{dt} = \frac{-a*(x-A)}{D^2 * (\text{sqrt}((x-A)^2 + (y-B)^2 + (z-C)^2))^{3/2}}$$

$$\frac{dy}{dt} = v \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{-a*(y-B)}{D^2 * (\text{sqrt}((x-A)^2 + (y-B)^2 + (z-C)^2))^{3/2}}$$

$$\frac{dz}{dt} = w \qquad \frac{dw}{dt} = \frac{-a*(z-C)}{D^2 * (\text{sqrt}((x-A)^2 + (y-B)^2 + (z-C)^2))^{3/2}}$$

donde A,B,C y D son funciones que se definieron en el paquete como

$$A = \frac{b*x + c*p}{D} \qquad \text{centro de masa en la coordenada X}$$

$$B = \frac{b*y + c*p}{D} \qquad \text{centro de masa en la coordenada Y}$$

$$C = \frac{b*z + c*g}{D} \quad \text{centro de masa en la coordenada Z}$$

$D = b + c$ , en donde  $b$  y  $c$  son constantes del paquete cuyos valores corresponden a las masas de los dos cuerpos respectivamente,  $b = m_1$ ,  $c = m_2$  (para mas detalles ver apendice A).

Como se puede apreciar, el método de resolución a dicho problema es de Reducción a coordenadas baricentricas (Capitulo 1), por lo que las condiciones iniciales de ambos cuerpos estan con respecto al origen (pues se toma el centro de masas como el origen)

### Ejemplo 3.1

Condiciones Iniciales

$$a = 10000$$

$$dt = 0.1$$

$$r1 = (100, 0, 0)$$

$$r2 = (-100, 0, 0)$$

$$t1 = 0$$

$$v1 = (0, 8, 0)$$

$$v2 = (0, -8, 0)$$

$$tf1 = 93.47$$

Método: Runge-Kutta

$$tf2 = 93.47$$

Notemos que es un problema simétrico con respecto al origen sobre el plano XY.

### Ejemplo 3.2

Condiciones Iniciales

$$a = 10000$$

$$dt = 0.1$$

$$r1 = (150, 0, 0)$$

$$r2 = (-50, 0, 0)$$

$$t1 = 0$$

$$v1 = (1, 7, 0)$$

$$v2 = (0, -8, 0)$$

$$tf1 = 17.32$$

Método: Leap\_Frog.

$$tf2 = 48.51$$

### Ejemplo 3.3

Condiciones Iniciales

$$a = 15000$$

$$dt = 0.1$$

$$r1 = (35, 50, 50)$$

$$r2 = (-120, 0, -14)$$

$$t1 = 0$$

$$v1 = (1, 1, \sqrt{2})$$

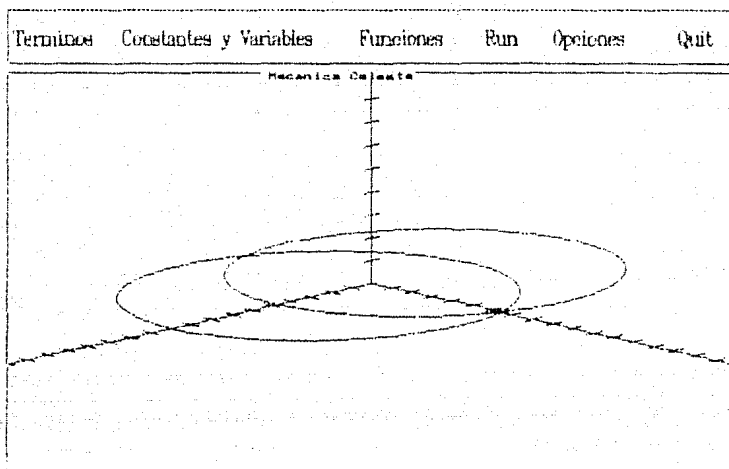
$$v2 = (0, 0, 1)$$

$$tf1 = 8.97$$

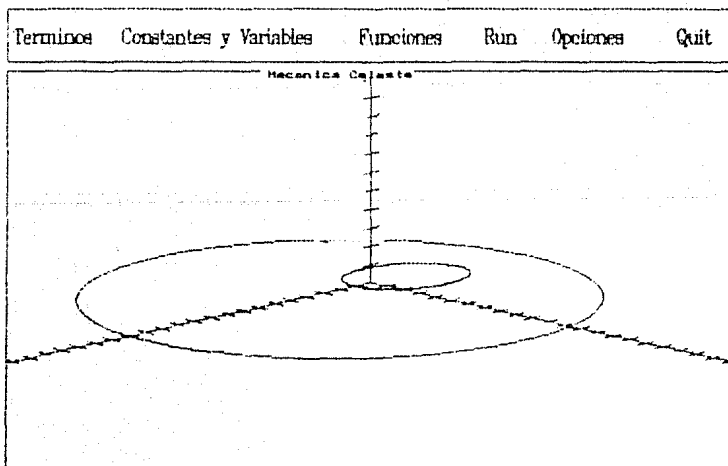
Método: Leap\_Frog.

$$tf2 = 17.04$$

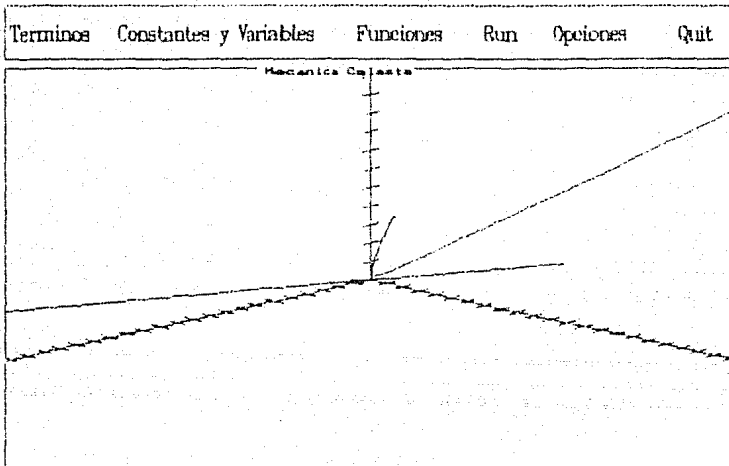
Ejemplo 3.1



Ejemplo 3.2



### Ejemplo 3.3



### 3.4 EJEMPLOS DE SISTEMAS REGULARIZADOS PARA EL PROBLEMA DE FUERZA CENTRAL

En cada uno de los ejemplos a continuación se utilizó el mismo sistema de ecuaciones diferenciales que en el problema de fuerza central. La diferencia es que a determinada distancia del origen cambian sus ecuaciones (dadas en el capítulo 2) y continua la resolución de dicho sistema con las nuevas variables regulariza.

#### Ejemplo 4.1

Condiciones Iniciales

$$a = 65432$$

$$r1 = (140, 180, 30)$$

$$v1 = (0, 0, 0)$$

$$dt = 0.1$$

$$t1 = 0$$

$$tfl = 108.62$$

Método: Runge-Kutta

Regularización : Sundman

#### Ejemplo 4.2

Condiciones Iniciales



$a = 7000$

$dt = 0.1$

$r1 = (-89, -78, -12)$

$t1 = 0$

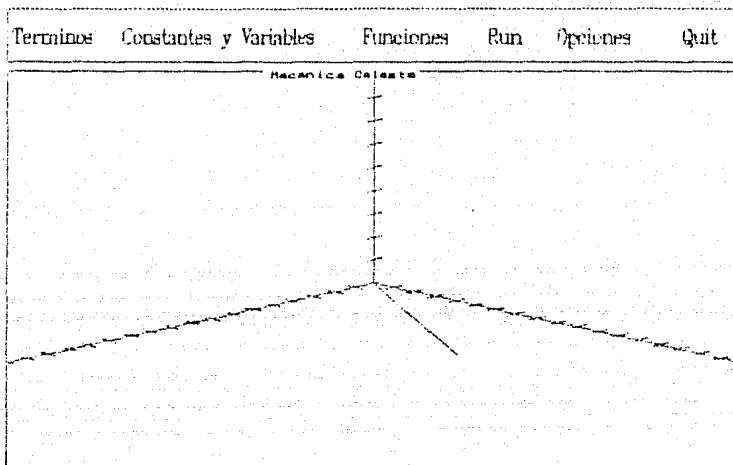
$v1 = (0, 0, 0)$

$tf = 34.49$

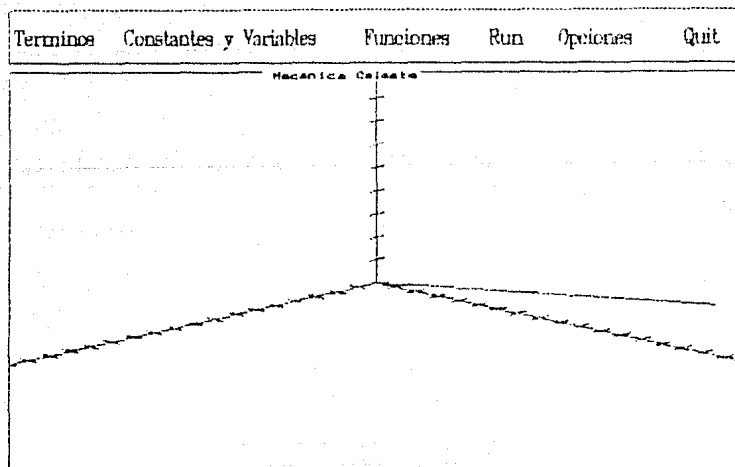
Metodo: Runge-Kutta

Regularizacion : Levi-Civita

Ejemplo 4.1



Ejemplo 4.2



### 3.5 CONCLUSIONES

Algunos aspectos interesantes que quisiera mencionar son que el paquete MCeleste no solamente nos da las trayectorias que sigue una partícula bajo la acción de una fuerza. Nos ayuda a estudiar otros aspectos interesantes como por ejemplo la estabilidad de una órbita, la variación de la trayectoria de la partícula al variar la  $\mu$  (  $a$  en el paquete), poder verificar la tercera ley de Kepler, probar con acciones de fuerzas diferentes a las de Newton. Nos da la posibilidad también de cambiar el método de regularización entre los que se propusieron en esta tesis. Además podemos tener algunas alternantes a los problemas originales como el problema anisotrópico de Kepler i.e. alterar por medio de una constante cada una de las coordenadas o estudiar la trayectoria que describe la partícula o poder aplicarlo el problema restringido de tres cuerpos en coordenadas sinodicas (giratorias). Como se puede apreciar hay mucho trabajo por hacer. Esta tesis sirve como un primer paso para el desarrollo de un paquete mas fuerte. Posibles pasos a seguirse en un futuro serían el ampliar el número de ecuaciones diferenciales de primer orden (que consiste de seis actualmente), la implementación de algunos otros métodos numéricos de resolución del sistema de ecuaciones, y poder graficar mas de dos partículas a la vez, También posiblemente implementar algunas técnicas de coloración para que el movimiento en tercera dimensión de la partícula de sensación de profundidad.

Hablaremos un poco mas de las bondades que ofrece el paquete MCeleste (ver apéndice), como por ejemplo, en la opción de funciones se pueden definir funciones especiales como la energía del sistema y se puede verificar através de múltiples ejemplos, su consistencia através de la integración del sistema de ecuaciones que se plantea para el problema de fuerza central, mas aún, se puede verificar las relaciones de energías que se dan en el problema de los dos cuerpos (ver final del capítulo 1). Por otro lado, los métodos de integración de ecuaciones que ofrece el paquete MCeleste, nos da la oportunidad de escoger la mejor opción según la necesidad del problema que se este planteando, (si queremos mucha precisión a costa de mayor tiempo o viceversa), o tal vez empezar con un

método de integración y posteriormente cambiarlo .

Una observación de suma importancia es que si comparamos la gráfica que se obtuvo en el ejemplo que se resolvió analíticamente en el capítulo 1, es exactamente igual a la gráfica que se obtuvo en el ejemplo 2.1 del capítulo 3 que se obtiene por medio del paquete MCeleste, (tratándose del mismo problema), que quiere decir que dicho paquete se ejecuta perfectamente bien.

Por último platicaremos un poco mas sobre la metodología que se siguió para el caso en el que existiera la opción de regularización. En el paquete MCeleste existe una función especial (llamada R1 para la primera partícula y R2 para la segunda), que están inicializadas con la función distancia de la partícula al origen (obviamente puede ser cambiada por el usuario), la cual nos indica el momento en el que se tenga que hacer el cambio de las ecuaciones originales a las ecuaciones regularizadas, esto de acuerdo al valor que tenga la constante "epsilon" (dicha constante esta dentro del paquete y puede ser alterado su valor por el usuario y nos indica el radio alrededor de la singularidad en el cual las ecuaciones originales cambien a las regularizadas), es decir mientras que la evaluación de la función R1 o R2 sea mayor que dicha constante el sistema continua normal, pero si la evaluación de la función es menor a epsilon entonces se realiza dicho cambio de ecuaciones, las ecuaciones regularizadas estan previamente calculadas ( ver capítulo 2) e integradas al código del paquete explícitamente, por lo cual, cuando se realiza el cambio de ecuaciones, simplemente se asignan las nuevas ecuaciones al sistema, y el integrador numerico del programa se encarga de resolverlo y continuar graficando la partícula através de la singularidad.

De acuerdo a las igualdades que se obtuvieron en el capítulo 2 el incremento de tiempo en las nuevas variables regularizadas esta dada por  $ds = \frac{dt}{r}$  ( r posición de la partícula), que en principio nos gustaría que fuera un incremento de tiempo pequeno,

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

por lo que inicialmente no nos serviría regularizar en una posición cercana de colisión, porque en dicho caso nuestro  $ds$  sería un incremento de paso muy grande, así que en principio nuestra constante epsilon no podría ser muy pequeña.

Pero ¿Qué pasa si el método que utilizamos en las ecuaciones regularizadas es de orden alto y lento (Runge Kutta por ejemplo)?, entonces no nos preocuparíamos demasiado por que el incremento  $ds$  sea muy pequeño, pero por otro lado ¿Qué pasa si utilizamos un método sumamente rápido y poco preciso (Euler por ejemplo) manteniendo el incremento  $ds$  pequeño?, entonces tendríamos una solución altamente precisa y sumamente rápida.

Planteado lo anterior se puede observar existe gran relación entre la constante epsilon, la función  $R1$ , el método que se utiliza y el orden del error, pero ¿Cuál sería la epsilon ideal para el incremento  $ds$ ?, ¿Cuál sería el método mas conveniente a utilizar en las ecuaciones regularizadas? con ¿cuál  $dt$ ?, ¿las funciones  $R1$  y  $R2$  son las adecuadas? o ¿posiblemente será mejor que dependan de la velocidad? o ¿de ambas? .

Las últimas preguntas planteadas nos llevan a una de las partes mas importantes que se pueden ir probando con el paquete MCeleste y que posiblemente, se pueda continuar estudiando en un futuro, hasta encontrar la forma y el momento "óptimo" de hacer el cambio de ecuaciones.

## APENDICE A

En este apéndice daremos una explicación del uso del paquete MCeleste que se realizó como parte del proyecto de investigación de esta tesis.

El paquete MCeleste es un programa de graficación de hasta seis ecuaciones diferenciales de primer orden, que principalmente esta enfocado a resolver problemas de mecánica celeste.

Dicho paquete se puede manejar por medio de un menú principal y varios submenús o bien de modo alternante se puede manejar en forma de ordenes que se listan a continuación.

```
<ctrl>-e  editar funciones Especiales
<ctrl>-s  editar Sistema de ecuaciones diferenciales
<ctrl>-d  editar el incremento de tiempo Dt
<ctrl>-c  editar la proyección
<ctrl>-v  editar las Variables del sistema
<ctrl>-n  editar las constantes
<ctrl>-h  Help
<ctrl>-r  poner la particula en movimiento (Run)
<ctrl>-i  ReInicializar el programa
<ctrl>-b  regresar a condiciones iniciales
```

Este paquete cuenta con 5 diferentes métodos numéricos para resolver el sistema de ecuaciones tales como lo son Runge-Kutta (de orden cuatro), Euler, Euler Modificado, Leap-Frog, y Heun, cuenta además con dos métodos de regularización tales como el método de Sundman y el de Levi-Civita (para el problema de fuerza central).

El paquete cuenta con un editor de líneas para poder editar las diferentes opciones que se dan, como son: el dar el sistema de ecuaciones, el incremento  $dt$ , los valores de las condiciones iniciales, etc.

También cuenta con un procedimiento para checar que las expresiones de entrada estén bien formadas sintacticamente, De lo contrario manda un mensaje de error diciendo el error sintactico de la expresión. El paquete cuenta con varias opciones importantes que pueden ser utilizadas tales como:

Constantes (a,b,c,g).- Son constantes que el usuario les puede asignar un valor para usarlas en otras definiciones del paquete. ( la constante g se inicializa con un valor de 9.81, que de igual forma se puede redefinir y utilizarla).

Número de condiciones.- Da la opción al usuario de poder dar una o dos condiciones iniciales que serán evaluadas, las condiciones iniciales están denotadas como  $x_{10}, y_{10}, z_{10}$  (posición),  $u_{10}, v_{10}, w_{10}$  (velocidad) para la primera partícula y  $x_{20}, \dots, w_{20}$  para la segunda.

Funciones Especiales(K,L,M,N,O,P) y

funciones auxiliares(A,B,C,D,E,F).- Son funciones que están o pueden ser definidas de acuerdo a las necesidades del problema, tales funciones podrían ser el momento angular, la energía potencial, energía cinética, energía total del sistema (esta última particular es útil para ver si a lo largo de la trayectoria de la partícula permanece constante como se demostró en el capítulo I).

R1,R2.- Son funciones que son utilizadas para saber el tiempo desde el cual se empieza a regularizar las ecuaciones del sistema (esto último en caso de estar prendida la opción de regularización del sistema) R1 es la función para la primera condición inicial y R2 para la segunda. Este cambio de la regularización depende de la constante "epsilon". Mientras la evaluación de la función permanezca mayor

que la anterior constante, el sistema continua de la forma en que empezó hasta que la evaluación de la función sea menor que epsilon, que es el momento de realizar el cambio de ecuaciones del sistema (capitulo II).

Escala.- Esta constante sirve para ver la graficación de la partícula desde un punto mas cercano o lejano del origen (entre mas chico sea su valor se aleja mas del origen y entre mas grande, mas cerca del origen).

Proyecciones (P,V).- Toda la graficación que se realiza en este paquete esta hecha en base a tecnicas de proyeccion y rotaciones de puntos en el espacio. El punto desde le cual estamos observando (V) el movimiento de la partícula esta inicializado en 10000 sobre el eje x, dichas observaciones las hacemos atravez de un plano de proyección (P) que esta a una distancia de 7500 del origen sobre el eje x. Estas constantes pueden ser modificadas por el usuario de acuerdo a las necesidades del problema.

En este momento cabe mencionar que los ejes coordenados estan puestos de la siguiente forma:

cuyas lineas de separacion de cada eje tienen una distancia entre si de 10 unidades.

Además el paquete Mceleste cuenta con las siguientes opciones:

<ctrl>-r Poner ejes  
 <ctrl>-l Limpiar pantalla  
 <ctrl>-y cambiar color de la trayectoria  
 <ctrl>-o quitar ejes  
 <ctrl>-h o F1 Help  
 <ctrl>-f Regularización de la primera partícula  
 <ctrl>-k Regularización de la segunda partícula  
 <ctrl>-x Control Dt para velocidades altas de la primera partícula  
 <ctrl>-g Control Dt para velocidades altas de la segunda partícula

Las dos últimas opciones ponen el incremento de tiempo dt en términos del vector velocidad de tal forma que si la partícula tiene una velocidad muy alta y esta prendida la opción el incremento se vuelve de paso muy lento ( se crea un tiempo ficticio  $ds = \frac{dt}{|v|^2}$  donde v es la velocidad de la partícula). Para

regresar al dt normal basta con seleccionar nuevamente la misma opción.



## REFERENCIAS

- [1] H.Pollard, Mathematical Introduction to Celestial Mechanics, Prentice Hall International, 1966.
- [2] E.L.Stiefel y G.Scheifale, Linear and Regular Celestial Mechanics, Springer\_Verlag. 1971.
- [3] S.W.McCuskey, Introduction to Celestial Mechanics, Addison-Wesley, 1963.
- [4] V.Szebehely, Theory of orbits, the restricted problem of three bodies, Academic Press Inc., 1967
- [5] E.T.Benedikt, Collision trayectories in the three-body problem, J.Astronaut.Sci. 6, 17,(1959).
- [6] T.Levi-Civita, Sur la regularisation du probleme des trois corps, Acta Math 42 (1919) 99-144.
- [7] K.F. Sundman, Memoire sur le probleme des trois corps, Acta Math. 36,105 (1913).
- [8] A.Wintner. Analytical Foundations of Celestial Mechanics, Princeton Univ. Press.,Princeton,New Jersey, 1941.
- [9] Lacomba Ernesto. Movimientos con Singularidades o Escapes en Mecanica Celeste, Publicaciones Internas U.A.M.Iztapalapa, Mayo 1984.