



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"COMPORTAMIENTO TERMICO DE UN
ESTANQUE SOLAR CON FLUJO DE
CALOR Y MASA HACIA
EL SUBSUELO"

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
F I S I C O
P R E S E N T A

JOSE HECTOR LLAMAS CHAVEZ

TESIS CON
FALTA DE ORIGEN

México, D. F. 1989



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

RESUMEN	3
1. INTRODUCCION.....	4
2. ESTANQUES SOLARES.....	7
3. ECUACIONES DEL ESTANQUE SOLAR.....	13
4. DEDUCCION DEL MODELO MATEMATICO.	
4.1. Movimiento de Humedad en Materiales Porosos Bajo un Gradiente de Temperatura.....	20
4.2. Transferencia Simultanea de Calor y Humedad en un Medio Poroso.....	30
4.3. Arcillas como Impermeabilizantes.....	41
4.4. Deducción del Modelo Matemático.....	51
5. SOLUCION DEL MODELO MATEMATICO.	
5.1. Solución de la Ecuación de un Estanque Solar con Flujo de Calor y Masa hacia un Medio Semi-infinito.....	55

5.2. Solución de la Ecuación de un Estanque Solar Impermeabilizado.....	63
5.3. Analisis Paramétrico de las Soluciones de las Ecuaciones.....	69
6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.	
6.1 Conclusiones.....	82
6.2. Recomendaciones.....	84
7. AGRADECIMIENTOS.....	85
REFERENCIAS.....	86
NOVENCLATURA.....	91
AFENDICE.....	95

RESUMEN

Se presenta una descripción de los estanques solares o lagos solares no convectivos, y se realiza el estudio del comportamiento que tiene el subsuelo de un estanque solar que está sometido al flujo de salmuera caliente proveniente del estanque.

Para la realización de dicha investigación, primero se hace un estudio detallado de los principios de flujo de calor y masa a través de un medio poroso. Como resultado del estudio se plantea el modelo matemático del flujo de salmuera caliente a través del subsuelo de un estanque solar.

El modelo matemático planteado es resuelto de acuerdo con varias simplificaciones y se comparan los resultados con datos experimentales de un dispositivo probado en una investigación paralela.

CAPITULO 1

INTRODUCCION

El encarecimiento de los combustibles fósiles y su inevitable agotamiento ha traído como consecuencia que gran parte de las naciones se preocupen en estudiar y desarrollar fuentes de energía no convencionales, tales como la geotérmica, la eólica y la solar. En particular el interés por esta última se ha incrementado debido a sus características no contaminantes y a su disponibilidad en la mayor parte del mundo. Así pues se han desarrollado diversos dispositivos para su captación y utilización. Se pueden mencionar entre ellos, el colector plano y el sistema de espejos, que tienen la limitación de requerir un sistema propio de captación y uno de almacenamiento, además de que para grandes áreas de captación se requiere del ensamblaje de muchas unidades pequeñas (ref 1).

Un concepto que evita principalmente estas limitaciones son los estanques solares no convectivos que captan y almacenan la energía en una sola unidad.

En el capítulo 2, se da una descripción de como está constituido un estanque solar de gradiente salino, indicando los gradientes de temperatura y salinidad que constituyen un aspecto más relevante.

En el capítulo 3 se deducen las principales ecuaciones que rigen a cada una de las zonas del estanque solar, a partir de la ecuación de conservación de la energía.

Por otro lado en lo que respecta a los estanques solares, un aspecto importante en su eficiencia son las pérdidas térmicas al subsuelo, ya que generalmente se construyen dentro de excavaciones terrestres. Por esto es importante analizar con cuidado la forma en que se impermeabiliza un estanque solar. El uso de impermeabilizantes tales como plásticos han sido probados para estanque solares artificiales pequeños; entre los impermeabilizantes plásticos más usados se encuentran el hypalon, XR - 5, EPDM (terpolimero de etileno-propileno), polietileno clorado, polietileno de alta densidad y algunos derivados del hule. El rompimiento de algunos de estos ferros ha ocurrido a lo largo del uso de los estanques solares, por lo que es importante estudiar otras sustancias como impermeabilizantes.

Con base en los estudios iniciados en la búsqueda de nuevas alternativas para impermeabilizar los estanques solares, en el capítulo 4 se realiza un estudio detallado de los procesos de transferencia de calor y humedad en un medio poroso, ya que se está probando como impermeabilizante a una arcilla (que es un cuerpo poroso). A partir de la ecuación de conservación de la energía se plantea la ecuación que describe los fenómenos de transferencia de calor y masa hacia el subsuelo del estanque solar.

En el capítulo 5 mediante una serie de simplificaciones, como por ejemplo considerar un medio semi-infinito, se resuelve la ecuación deducida en el capítulo anterior. En la solución se usa la técnica de transformada de Laplace.

También se resuelve la ecuación de transferencia de calor para un estanque solar que ha sido impermeabilizado con compuestos sintéticos tales como el hypalon. Después se hace un análisis paramétrico de las dos soluciones de las ecuaciones con el fin de poder comparar como son las pérdidas de calor a través de un estanque solar impermeabilizado con arcilla y otro impermeabilizado con compuesto sintético.

Por último en el capítulo 6 se mencionan las conclusiones y recomendaciones obtenidas a la luz del presente trabajo realizado.

CAPITULO 2

ESTANQUES SOLARES

Un estanque solar es un cuerpo sumergido aproximadamente de 1.5 a 3.0 m en la tierra y consta de tres regiones. La región más profunda es de un espesor aproximado de 1.0 m, siendo esta zona, una zona convectiva compuesta por una solución saturada de cloruro de sodio, además esta zona sirve como almacén térmico. En la parte intermedia, que tiene un espesor de aproximadamente 1.0 a 1.5 m, se localiza una región no convectiva, teniendo esta zona como función principal la de aislante térmico; esta zona posee un gradiente salino, de tal forma que su densidad aumenta con la profundidad y debido a este gradiente salino se forma un gradiente térmico y en consecuencia se da un aumento de la temperatura conforme a la profundidad, teniéndose temperaturas semejantes a la del medio ambiente en la región cercana a la superficie del lago o estanque solar (ref 3).

La última región que consta de algunos centímetros de espesor está formada por agua salina de muy baja concentración o agua pura, en esta capa existe convección y vaporización, la función principal de esta capa de agua es la de mantener el gradiente salino de la región no convectiva. Esta capa tiene que ser sustituida continuamente debido a la vaporización existente y además es necesario la eliminación de las sales que se difunden hacia esta región, para poder mantener el gradiente salino.

En los estanques solares se puede utilizar sal o salmuera natural. La sal se debe seleccionar para poderse manejar y que no contamine el medio ambiente, además debe ser barata y estar disponible en las cercanías del estanque solar.

Otra de las consideraciones que se debe tomar en cuenta es que la sal no reduzca la transmitancia óptica y que la solubilidad debe ser fuertemente dependiente de la temperatura y por otro lado su difusividad lo más baja posible.

Por ejemplo, el estanque solar ideal debería ser un lago funcionando con una solución saturada, teniendo un gradiente estable y sin difusión. Los cloruros de sodio y magnesio satisfacen estas condiciones. Otra de las recomendaciones que se harían es la de utilizar KNO_3 y NH_4NO_3 , las cuales cumplen con el criterio para un lago saturado, aunque son más costosas que el $NaCl$ o $MgCl_2$ (ref 5).

En los primeros experimentos con estanques solares se mostró (ref 5) que era factible obtener temperaturas del orden de $100^\circ C$ en el fondo, lo que implicó que se pudiera calentar fluidos de trabajo a temperaturas de 85 a $90^\circ C$, con salmuera. Si se aplica el concepto de eficiencia se observa que si la temperatura en la superficie es de $30^\circ C$ y se considera como sumidero de calor residual de la máquina térmica, entonces el estanque solar suministra una ΔT de 55 a $60^\circ C$. En este caso si se optimiza una diferencia de temperaturas de 45 a $50^\circ C$ que puede usar la máquina térmica, la eficiencia de Carnot es del 13% y podría obtenerse eficiencias reales del 5% .

La utilización de los estanques solares nos dan ventajas sobre los otros colectores, estas ventajas son la siguientes:

Para el almacenamiento térmico en el estanque solar no existen problemas, ya que su masa nos sirve como almacén intrínseco, por lo que entrega una carga térmica tanto en el transcurso del día como en la noche.

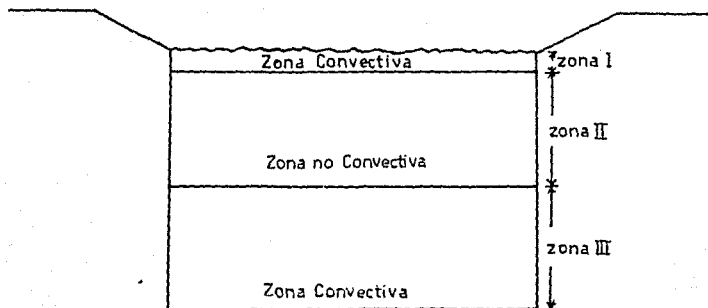


Fig.2.1. Corte transversal de un estanque solar.

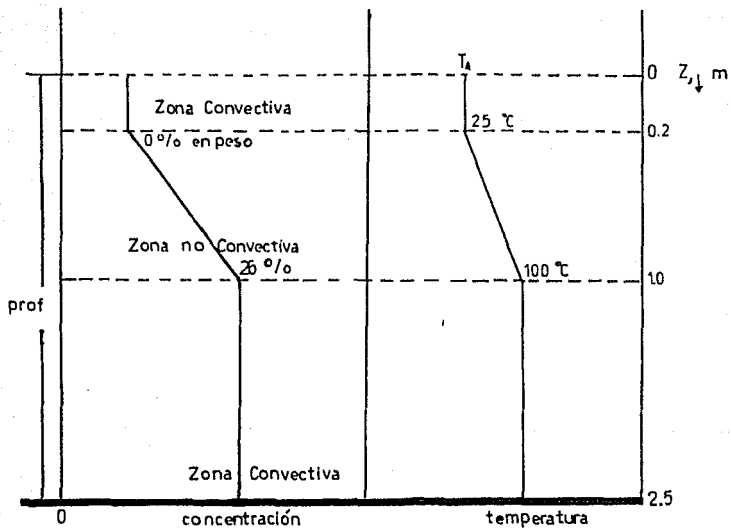


Fig.2.2. Perfil de concentración y temperatura.

Además en los días nublados o de poca insolación la masa en la región convectiva (III) mantiene la temperatura por espacio de varios días.

La utilización de los estanques solares, implica una gran área de captación, por lo tanto no es ningún problema la baja densidad de energía de la radiación solar. El depósito de basura y polvo no es ningún problema para los estanques solares como lo es en los espejos colectores ordinarios o de enfoque. Otra gran ventaja es el transporte de energía ya que es fácil si se usa el método de decantación. Otra ventaja es la de su construcción ya que es básicamente fácil porque se emplean técnicas ampliamente conocidas en la ingeniería civil. Claro que sería más factible si se cuenta con sal, agua y una fuente de bombeo para transportarla.

Para la impermeabilización del estanque, se emplean materiales que ya han sido probados ampliamente, como son plásticos, arcillas, concreto asfáltico, etc. dependiendo el uso de estos del tipo de suelo. De este modo es posible contar con una fuente barata de calor con temperaturas del orden de 90°C , es por esto que las calcrias son baratas, de manera que la conversión termodinámica a electricidad u otra aplicación son de tomarse en cuenta para países en vías de desarrollo (ref 6).

Por otro lado se tiene que los estanques solares también poseen algunas desventajas, como las siguientes: por ser un captador plano, su uso se reduce a lugares con latitud menor de 40° , la impermeabilización es costosa, se requiere de agua diluida o dulce para la capa superior, la radiación infrarroja no se aprovecha, ya que ésta es absorbida casi en su totalidad en las dos primeras capas, existe incertidumbre en el comportamiento ante fenómenos como vientos fuertes y microorganismos y la estabilidad del estanque es muy pobre debiéndose tomar medidas esporádicamente para restituir el gradiente térmico.

Los usos de los estanques solares son varios, aunque su aplicación esta centrada principalmente en la generación de energía eléctrica aprovechando el calor de la salmuera caliente en la vaporización de un fluido de bajo punto de ebullición. Los usos de los estanque solares son: calefacción, calentamiento de aire para secado, enfriamiento de aire, cocido de alimentos, refrigeración, desalación y recuperación y refinado de sales (ref7).

CAPITULO 3

ECUACIONES DEL ESTANQUE SOLAR (ref 8).

El modelo consiste en tres regiones como podrá observarse en la figura 3.1. La zona convectiva superior abarca de 0 a Z_1 ; la zona no convectiva cuenta con un espesor de Z_1 a Z_2 ; y la zona convectiva inferior está comprendida entre Z_2 y Z_3 .

De la ecuación de la energía deducimos la ecuación que describe al fenómeno, siendo esta:

$$\rho \frac{D u}{D t} = \nabla \cdot (K \nabla T) - P (\nabla \cdot \bar{v}) - \dot{q} \quad [3.1]$$

donde u es la energía interna.

K es la conductividad térmica de la solución salina.

P es la presión

\bar{v} es la velocidad.

\dot{q} es la disipación viscosa

$\frac{D}{D t}$ es la derivada material o sustancial

y es igual a:

$$\frac{D u}{D t} = \frac{\partial u}{\partial t} + v_x \frac{\partial u}{\partial x} + v_y \frac{\partial u}{\partial y} + v_z \frac{\partial u}{\partial z}$$

En la ecuación [3.1] se ha despreciado el calor radiado y se ha considerado que no hay generación interna de calor.

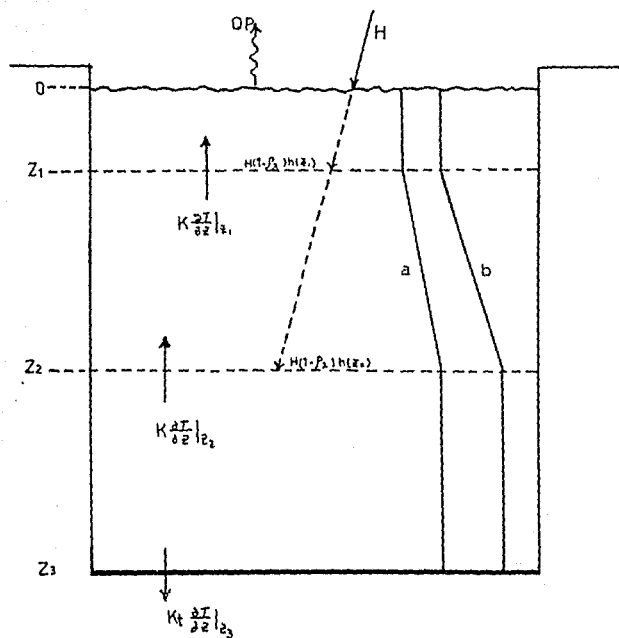


Fig.3.1. Modelo del estanque solar.

- a) Gradiente de temperatura.
- b) Gradiente de concentración.

El lado izquierdo de la ecuación [3.1] representa el cambio de energía interna (u) y el lado derecho representa las causas de dicho cambio.

Para un fluido y despreciando el cambio de energía irreversible por disipación viscosa, la ecuación [3.1] se transforma en:

$$\rho C_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (v \cdot \nabla) T \right] = \nabla \cdot (K \nabla T) \quad [3.2]$$

Si las dimensiones laterales del estanque solar son demasiado grandes con relación a su profundidad, la variación de la temperatura puede considerarse unidimensional, por lo que la ecuación [3.2] se transforma ahora en:

$$\rho C_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad [3.3]$$

Considerando que en el modelo las tres zonas se encuentran bien definidas y que existe continuidad de las propiedades, pueden plantearse una ecuación para cada región, siendo éstas ecuaciones las que se presentan a continuación.

En la región superior se tiene un fluido perfectamente mezclado, por lo que $T = T(z)$, es decir:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad \text{para } 0 < z < z_1$$

y la ecuación [3.3] puede integrarse de 0 a z_1

$$\int_0^{z_1} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dz = \int_0^{z_1} d \left(K \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

por lo tanto

$$\rho C_p z_1 \frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial T}{\partial z} \bigg|_{z_1} - K \frac{\partial T}{\partial z} \bigg|_{z=0}$$

puesto que se establece que no hay conducción a través de la superficie (ref 11), es decir:

$$\frac{\partial T}{\partial z} \bigg|_{z=0} = 0$$

por lo que se tiene que la ecuación para esta primera zona está definida como:

$$\rho C_p Z_1 \frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{Z_1} \quad [3.4]$$

Recurriendo a la figura 1, se hace un balance de energía en dicha zona para establecer las condiciones a la frontera, observándose que existe generación de energía por absorción de la radiación dada por $H(1 - \rho\lambda)(1 - h(Z_1))$ (ref 8) y pérdidas de la misma por evaporación y convección a la atmósfera (Q_p), por lo que la ecuación [3.4] queda como:

$$\rho C_p Z_1 \frac{\partial T}{\partial t} - K \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{Z_1} + Q_p - H(1-\rho\lambda)(1-h(Z_1)) = 0 \quad [3.5]$$

donde Q_p es la pérdida de calor a la atmósfera.

H es la radiación incidente.

$\rho\lambda$ es la reflejancia.

$h(z)$ es función de transmitancia de la radiación.

La zona intermedia (Z_1 a Z_2) puede considerarse como un sólido, es decir, sin flujo vertical ($V_z = 0$) y en ella la temperatura depende de la profundidad por lo que la ecuación [3.3] se convierte en:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K \frac{\partial T}{\partial z} \right] + Q(z, t) \quad [3.6]$$

donde $Q(z,t)$ representa una fuente interna de energía y es la radiación absorbida por el agua, siendo esta:

$$Q(z,t) = - \frac{\partial H(z,t)}{\partial z} = H(1 - \rho\lambda) \frac{dH(z)}{dz} \quad [3.7]$$

Para la zona inferior, donde se tiene un fluido perfectamente mezclado, se integra la ecuación [3.3] de igual manera que para la región superior, pero en este caso, ahora se integra de Z_1 a Z_2 , obteniéndose la siguiente ecuación:

$$\rho C_p (Z_2 - Z_1) \frac{\partial T}{\partial t} = K_i \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{Z_2} - K \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{Z_1} \quad [3.8]$$

en donde K_i es la conductividad térmica del suelo, debajo del estanque solar.

En esta región se absorbe la radiación remanente, es decir, $H(Z_2,t)$, y se tiene una extracción de energía $U(Z_2,t)$, por lo que la ecuación para esta zona es:

$$\rho C_p (Z_2 - Z_1) \frac{\partial T}{\partial t} + K \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{Z_2} - K_i \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{Z_1} -$$

$$- K(1 - \rho\lambda) h(Z_2) + U(Z_2,t) = 0 \quad [3.9]$$

Considerando K , ρ y C_p constantes e independientes de la temperatura y la concentración y consecuentemente independiente de la profundidad, la ecuación [3.6] adquiere la forma lineal:

$$\alpha_t \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\alpha_t}{K} Q(z,t) \quad [3.10]$$

donde α_t es la difusividad térmica, y $Q(z,t)$ representa la función de transmitancia que es la manera en que se absorbe la radiación en el agua. La ecuación se conoce en general como la ecuación de difusión de calor con generación de energía (en este caso igual a la función de transmitancia).

CAPITULO 4

DEDUCCION DEL MODELO MATEMATICO

4.1. Movimiento de humedad en materiales porosos bajo un gradiente de temperatura.

Empezamos mencionando que la transferencia de calor tiene lugar solamente en los poros que estan llenos de aire y el movimiento de liquido solamente en los poros que se encuentran llenos de agua, y la evaporación y condensación ocurre en la interfase agua-aire (ref 13).

Por otro lado, se tiene que la ecuación que describe la difusión de vapor, que es el flujo (o la densidad másica) de vapor, para aplicarse en medios porosos puede escribirse como:

$$\bar{q}_{vap} = - D_{atm} \nu \alpha a \nabla \rho \quad [4.1.1]$$

donde \bar{q}_{vap} es el vector de flujo en g/cm^2s

D_{atm} es la difusividad molecular de vapor de agua en el aire en cm^2/s

α es un factor de tortuosidad para la difusión de los gases, en un medio poroso, siendo menor que uno

a es el contenido volumétrico del aire del medio

ρ es la densidad de vapor de agua en g/cm^3

ν es el factor de flujo másico = $P / P - p$, introducido para permitir el flujo de vapor

Krischer y Rohnlalter establecen que D_{atm} debida a un

gradiente de temperatura, se puede representar por $4.42 \times 10^{-4} \times T^{2.3}/p$ en el rango de 20 a 70 °C, donde T es la temperatura absoluta en °K, y p la presión del gas, en mmHg.

Ahora, abordamos la transferencia de vapor: iniciando con la introducción de una relación termodinámica descrita por Edlefsen y Anderson (ref 14), para la densidad s vapor:

$$\rho = \rho_0 h \quad [4.1.2]$$

donde ρ_0 es la densidad de vapor de agua saturado, en g/cm³

h es la humedad relativa

La humedad relativa h se puede expresar según Edlefsen y Anderson como:

$$h = \exp (\Psi g / R T) \quad [4.1.3]$$

donde g es la aceleración de la gravedad en cm/s²

R constante del gas de vapor de agua, erg /g °C (= 4.615 x 10⁶)

T temperatura absoluta en °K.

Ψ es la presión de agua, en equilibrio termodinámico con el agua en el medio.

por lo tanto, se tiene que la ecuación [4.1.2] se puede expresar como:

$$\rho = \rho_0 h = \rho_0 \exp (\Psi g / R T) \quad [4.1.4]$$

Como Ψ depende de la humedad (θ) contenida en el medio y la temperatura T ,

Por otro lado se tiene que:

$$\nabla \rho = h \nabla \rho_0 + \rho_0 \nabla h \quad [4.1.5]$$

De la ecuación anterior mencionaremos que para valores bajos de humedad h , la adsorción física es dominante, mientras que para valores grandes de humedad la condensación capilar es el proceso importante, es decir:

para $h < 0.6$ se da la adsorción física

para $h > 0.6$ se da la condensación capilar

Por otro lado se tiene que la capilaridad depende de la tensión superficial σ , dinas / cm, por lo tanto en la región capilar Ψ es proporcional a σ y $\partial \Psi / \partial T$ es igual a (Ψ/σ) , $(d\Psi/dT)$. Sin embargo, dado que $h > 0.6$, la temperatura resultante en el efecto de h es tan pequeña que podemos asegurar que $\partial h / \partial T = 0$. Por lo tanto, podemos tomar $\partial h / \partial T = 0$ en el rango total de h .

Recurriendo a la ecuación [4.1.5], se observa que ρ_0 es función de la temperatura T y la humedad relativa es función de la humedad contenida θ , por lo que se tiene:

$$\nabla \rho = h \frac{d \rho_0}{d T} \nabla T + \rho_0 \frac{d h}{d \theta} \nabla \theta \quad [4.1.6]$$

Utilizando la ecuación [4.1.4] para evaluar $d h / d \theta$, obtenemos:

$$\nabla \rho = h \frac{d \rho_0}{d T} \nabla T + \frac{\epsilon \rho}{R T} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \nabla \theta \quad [4.1.7]$$

Sustituyendo la ecuación [4.1.7] en [4.1.1] obtenemos la ecuación :

$$\bar{q}_{\text{vapor}} \rho / \rho_w = -D_{\text{TVap}} \nabla T - D_{\theta \text{vapor}} \nabla \theta \quad [4.1.8]$$

donde ρ_w es la densidad de agua en g / cm^3

D_{TVap} es la difusividad de vapor térmica en $cm^2/s \text{ } ^\circ C$

$D_{\theta \text{vapor}}$ es la difusividad de vapor isotérmica en cm^2/s

De la ecuación [4.1.8] se observa que el flujo se puede separar en dos componentes, aquel debido al gradiente de temperatura y aquel debido al gradiente de humedad.

Por otro lado se tiene que D_{TVap} se puede representar como:

$$D_{\text{TVap}} = D_{\text{atm}} \nu \alpha a h \beta / \rho_w \quad [4.1.9]$$

donde β es $d \rho_0 / d T$ y su valor promedio es $1.05 \times 10^{-6} g/cm^3 \text{ } ^\circ C$

Una vez hecho el tratamiento del flujo de vapor bajo un gradiente de temperatura, se aborda la transferencia de líquido en un medio no saturado. Se tiene que el flujo de líquido también entra dentro del cuadro general del fenómeno suelo-agua. En esta sección se proporciona una teoría general del movimiento de líquido en un medio poroso bajo un gradiente de temperatura y humedad.

La ley de Darcy para la transferencia de líquido en un medio poroso no saturado se expresa como (ref 13):

$$\bar{q}_{11q} / \rho_w = K \nabla \phi \quad [4.1.10]$$

donde \bar{q}_{11q} es el vector de densidad de flujo de líquido

K es la conductividad hidráulica en cm/s

ϕ es el potencial total en cm

Si se considera a ϕ como presión y componentes gravitacionales, se tiene:

$$\phi = \Psi + Z \quad [4.1.11]$$

donde Z es la coordenada vertical, positiva hacia arriba.

Por otro lado se tiene que Ψ es determinada por capilaridad y

Ψ es proporcional a la tensión superficial, por lo que se tiene:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial T} = \frac{\Psi}{\sigma} \frac{d\sigma}{dT} = \gamma \Psi \quad [4.1.12]$$

Usando las ecuaciones [4.1.11] y [4.1.12] para sustituirlas en la ecuación [4.1.10], obtenemos:

$$\bar{q}_{liq} / \rho_{\omega} = -K \gamma \Psi \nabla T - K (\partial \Psi / \partial \theta) \nabla \theta - K i \quad [4.1.13]$$

donde i es el vector unitario en la dirección positiva hacia arriba. La ecuación anterior se puede escribir como:

$$\bar{q}_{liq} / \rho_{\omega} = -D_{tliq} \nabla T - D_{\theta liq} \nabla \theta - K i \quad [4.1.14]$$

donde D_{tliq} es la difusividad térmica de un líquido, la cual se puede escribir como $D_{tliq} = K \gamma \Psi$, γ es dependiente de la temperatura, pero se considera constante e igual a $-2.09 \times 10^{-3} \text{ } ^{\circ}\text{C}^{-1}$ en el rango de temperatura de 10 a 30 $^{\circ}\text{C}$.

De la ecuación [4.1.14] se observa que el flujo del líquido puede separarse en tres componentes: aquel debido al gradiente de temperatura, aquel debido al gradiente de humedad y aquel debido a la gravedad.

Usando el valor de D_{tliq} en el rango de temperatura mencionado, y los datos de K y Ψ para arcilla ligera YOLO (ref 15) se obtiene una relación para D_{tliq} en función de θ cuya gráfica se muestra en la figura 4.1.

Ahora nos enfocamos al análisis de la ecuación de transferencia de calor y humedad.

Primero veremos cual es el sistema de ecuaciones que describen la transferencia de calor y humedad bajo la combinación de gradientes de temperatura. Regresando a la ecuación [4.1.8], para la transferencia de calor, requerimos la interpretación de difusividades de [4.1.8] en términos de lo descrito anteriormente.

$$D_{\theta vap} = \frac{D_{air} \nu \alpha \rho_{lg}}{\rho_w R T} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad [4.1.15]$$

Ahora, usando las ecuaciones [4.1.13] y [4.1.14], que describen el movimiento de fase líquida y combinando la ecuación [4.1.13] con la ecuación [4.1.8], obtenemos;

$$q / \rho_w = - D_T \nabla T - D_{\theta} \nabla \theta - K_i \quad [4.1.16]$$

donde q es el flujo de densidad de agua en, $g/cm^2 s$

$$D_T = D_{tliq} + D_{trvap} \text{ (difusividad térmica de humedad) } \quad [4.1.17]$$

$$D_{\theta} = D_{\theta_{liq}} + D_{\theta_{va}} \quad [4.1.18]$$

D_T fue calcula para la arcilla ligera YOLO y mostrada en la figura 4.1. La relativa constancia de D_T sobre gran parte del rango de θ ha sido observado como una coincidencia debido al hecho de que en este caso el valor máximo de D_{Tliq} y D_{Tvap} son del mismo orden de magnitud. Esperamos de la textura ordinaria de suelos, que la arcilla ligera YOLO de el máximo valor de D_{Tliq} que excedera el máximo de D_{Tvap} y tienda a dominar la forma de D_T . Inversamente, nuestra expectativa es que D_{Tvap} deberá ser más importante en suelos de estructura fina y deberá determinar la forma de D_T y D_{θ} . D_{θ} , la difusividad isotérmica de humedad no se discute aquí.

Diferenciando la ecuación [4.1.16] y aplicando el principio de continuidad, se obtiene la ecuación diferencial general que describe el movimiento de humedad en materiales porosos bajo un gradiente combinado de temperatura y humedad; siendo dicha ecuación:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (D_T \nabla T) + \nabla \cdot (D_{\theta} \nabla \theta) + \frac{\partial K}{\partial Z} \quad [4.1.19]$$

La ecuación [4.1.19] depende, entre otras cosas, sobre la relación única de Ψ (θ). La existencia de histéresis en Ψ (θ) puede ocurrir si algunas partes del medio son ganancias de humedad y en otras son pérdidas, lo cual puede invalidar el uso de la ecuación [4.1.16].

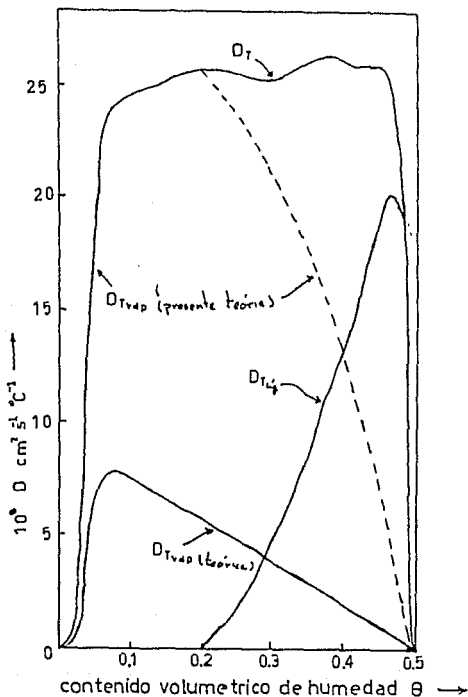


Fig 4.1. Difusividad térmica de vapor, $D_{T_{\text{vap}}}$, ambos según la teoría y el presente tratado; difusividad térmica de un líquido, $D_{T_{\text{liq}}}$; difusividad térmica de humedad, D_T , todas como funciones de contenido de humedad para arcilla ligera Yolo a 20 °C.

Se ha visto que las características significativas de la tierra, son las difusividades D_T y D_θ y la conductividad hidráulica. Cuando más detalle es requerido D_T y D_θ deberá ser dividido en otras componentes D_{Tliq} , D_{Tvap} , $D_{\theta liq}$ y $D_{\theta vap}$. Las dos difusividades líquidas tienden a ser más importantes en humedades mayores de 0.6, mientras que las dos difusividades de vapor son determinantes en humedades menores de 0.6.

Finalmente podemos escribir la ecuación de conducción de calor en el suelo (ref 13).

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) - L (D_{Evap} \nabla \theta) \quad [4.1.20]$$

donde C es la capacidad volumétrica de calor del suelo en cal / cm³ °C, λ es la conductividad térmica (incluyendo el efecto de destilación) en cal / s cm °C y L es el calor latente de vaporización de agua. La ecuación [4.1.20] es más general que la ecuación usual, el segundo término del lado derecho representa los efectos de destilación inducidos por el gradiente de humedad. Esto se nota de [4.1.19] y [4.1.20], ambas ecuaciones involucran θ y T, donde ambos gobiernan los campos simultáneos de calor y humedad del suelo.

4.2. Transferencia simultánea de calor y humedad en un medio poroso.

Transferencia de humedad (ref 16). Las ecuaciones para los flujos de densidad de líquido y vapor están dadas de acuerdo a Philip y de Vries (ref 1) como:

$$\bar{q}_{liq} / \rho_w = - D_{\theta L} \nabla \theta_L - D_{TL} \nabla T - K i \quad [4.2.1]$$

$$\bar{q}_{vap} / \rho_w = - D_{\theta v} \nabla \theta_L - D_{Tv} \nabla T \quad [4.2.2]$$

Combinando estas ecuaciones se deduce el flujo de densidad total de humedad, siendo este:

$$q / \rho_w = - D_{\theta} \nabla \theta_L - D_T \nabla T - K i$$

Esta es la ecuación [4.1.16] previamente descrita.

Aplicando el principio de continuidad a la ecuación diferencial anterior para θ_L , θ_v y θ se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} &= - \nabla \cdot (\bar{q}_{liq} / \rho_w) - E \\ &= - \nabla \cdot (D_{\theta L} \nabla \theta_L) + \nabla \cdot (D_{TL} \nabla T) + \frac{\partial K}{\partial z} - E \quad [4.2.3] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \theta_v}{\partial t} = -\nabla \cdot (\bar{q}_{lq} / \rho_w) + E$$

$$= \nabla \cdot (D_{\theta_v} \nabla \theta_L) + \nabla \cdot (D_{T_v} \nabla T) + E \quad [4.2.4]$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\nabla \cdot (\bar{q} / \rho_w)$$

$$= \nabla \cdot (D_{\theta} \nabla \theta_L) + \nabla \cdot (D_T \nabla T) + \frac{\partial K}{\partial t} \quad [4.2.5]$$

Se observa que las ecuaciones [4.2.1], [4.2.2], [4.2.3] y [4.2.5] son idénticas a las ecuaciones [4.1.14], [4.1.18], [4.1.16] y [4.1.19] respectivamente de la sección anterior con la excepción de que el último no se distinguía entre θ y θ_L . Por otro lado se tiene que la posibilidad de transferencia de agua líquida a la fase de vapor es reconocida por la introducción de un término de vaporización $\pm E$, en el lado derecho de las ecuaciones [4.2.3] y [3.2.4]. En el caso de condensación E es negativo.

Por otro lado supongamos que en cualquier instante el agua líquida está en equilibrio con vapor de agua. la relación entre θ_v y θ_L toma la forma:

$$\theta_v = (S - \theta_L) \bar{q}_{vap} / \rho_w = (S - \theta_L) \rho_0 h / \rho_w \quad [4.2.6]$$

donde S es la porosidad.

Por lo tanto:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \left[\frac{(S - \theta_L) \rho_w \beta h}{\rho_w H T} \frac{\partial Y}{\partial \theta_L} - \frac{\rho_{vap}}{\rho_w} \right]$$

$$+ \frac{(S - \theta_L) h \beta}{\rho_w} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$= \left[\frac{D_{vap}}{\alpha \nu D_{eff}} - \frac{\rho_{vap}}{\rho_w} \right] \frac{\partial \theta_L}{\partial \theta}$$

$$+ \frac{(S - \theta_L) h \beta}{\rho_w} \frac{\partial T}{\partial t} \quad [4.2.7]$$

El lado derecho de [4.2.7] ha sido ignorado el término $\partial h / \partial T$. Philip y de Vries argumentaron (ref 18) que este término es ignorado en comparación con el segundo término del lado derecho de [4.2.7], entonces, el valor de θ sigue inmediatamente de la ecuación [4.2.6] y [4.2.7]. Sustituyendo en [4.2.6] se llega a la siguiente ecuación en θ_L y T .

$$\left[1 - \frac{D_{Rw}}{\alpha \nu D_{eff}} - \frac{\rho_{vap}}{\rho_w} \right] \frac{\partial \theta_L}{\partial t} + \frac{(S - \theta_L) h \beta}{\rho_w} \frac{\partial T}{\partial t} =$$

$$= \nabla \cdot (D_B \nabla \theta_L) + \nabla \cdot (D_T \nabla T) + \frac{\partial K}{\partial t} \quad [4.2.8]$$

Transferencia de calor. El flujo de densidad de calor puede ser expresado de la siguiente forma (ref 15):

$$\begin{aligned} \bar{q}_h = & -\lambda^* \nabla T + L_0 q_v + C_p (T - T_0) \bar{q}_{vap} + \\ & + C_l (T - T_0) \bar{q}_{liq} \end{aligned} \quad [4.2.9]$$

donde el primer término del lado derecho representa la contribución de calor. λ^* es la conductividad térmica del medio poroso donde no ocurra movimiento de humedad, el segundo término representa la transferencia de calor latente por movimiento de vapor, el tercero y cuarto término representa la transferencia de calor sensible en forma de vapor y líquido, donde L_0 es el calor de vaporización a T_0 , una temperatura arbitraria de referencia.

Por otro lado se tiene que el calor por unidad de volumen es (ref 15):

$$\begin{aligned} C_d (T - T_0) + L_0 \rho_L \theta_v + C_p \rho_L (T - T_0) + \\ + C_L \rho_L \theta_L (T - T_0) - \rho_L \int_0^{\theta_L} W \theta_L \end{aligned} \quad [4.2.10]$$

De acuerdo a la teoría termodinámica [Edeffsen y Anderson, (ref 17)]

$$W = R T^2 \partial \ln h / \partial T = -g (\Psi - T \partial \Psi / \partial T) \quad [4.2.11]$$

Aplicando el principio de conservación de la energía se tiene:

$$C \frac{\partial T}{\partial t} + L_0 \rho_L \frac{\partial \theta_v}{\partial t} + C_p \rho_L (T - T_0) + C_L \rho_L (T - T_0) \frac{\partial \theta_L}{\partial t}$$

$$- \rho_L W \frac{\partial \theta_L}{\partial t} = - \nabla \cdot \bar{q}_h$$

$$= \nabla \cdot (\lambda^* \nabla T) - L_0 \nabla \cdot \bar{q}_v - C_p (\bar{q}_v \nabla T) - C_p (T - T_0) \nabla \cdot \bar{q}_L -$$

$$- C_L (T - T_0) \nabla \cdot \bar{q}_L \quad [4.2.12]$$

Usando [4.2.4] y [4.2.5] y la relación (ref 15).

$$L(T) = L_0 - (C_L - C_p) (T - T_0) \quad [4.2.13]$$

esto se reduce a:

$$C \frac{\partial T}{\partial t} - \rho_L W \frac{\partial \theta_L}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda^* \nabla T) - C_p (\bar{q}_v \nabla T) -$$

$$- L \rho_L \nabla \cdot \bar{q}_L - C_L (\bar{q}_L \nabla T) \quad [4.2.14]$$

donde la temperatura de referencia ya no aparece.

Combinando las ecuaciones [4.2.1], [4.2.2], [4.2.3], [4.2.9], [4.2.11] y [4.2.14] obtenemos:

$$\begin{aligned}
 & [C + L (S - \theta_L) h \beta] \frac{\partial T}{\partial t} + \left[\frac{L \rho_L D_{\theta v}}{\nu \alpha D_{\text{alm}}} - L \rho_V + \rho_L \right] j^{-1} \\
 & \left[\Psi - T \frac{\partial T}{\partial t} \right] \frac{\partial \theta_L}{\partial t} \\
 & = \nabla \cdot [(\lambda + L \rho_L D_{TV}) \nabla T] + L \rho_L \nabla \cdot (D_{\theta v} \nabla \theta_L) + \rho_L C_p \\
 & [(D_{\theta v} \nabla \theta_L + D_{TV} \nabla T) \nabla T] + \rho_L C_L [(D_{\theta L} \nabla \theta_L + D_{TL} \\
 & \nabla T + K \bar{K}) \nabla T] \quad [4.2.15]
 \end{aligned}$$

donde el tercer término del lado derecho representa la transferencia de calor sensible por movimiento de vapor, y es usualmente ignorado.

En el presente tratado se ha asumido que todos los procesos de calor tienen lugar uniformemente a través de los medios porosos, y las fuentes y sumideros de calor son distribuidos uniformemente. La aseveración anterior está implícita en la estructura aditiva del lado derecho de [4.2.9]. Sin embargo, la transferencia de calor tiene lugar solamente en los poros que están llenos de aire, el movimiento de líquido ocurre solamente en los poros llenos de agua y la evaporación y condensación ocurren en la interfase agua-aire.

Una excepción será hecha para la destilación de vapor debida a gradientes de temperatura en los poros llenos de aire. Krischer y Rohalter mostraron que esto lleva a un aparente incremento en la conductividad térmica de los poros que están llenos de aire. Esta teoría fue incorporada por de Vries en un método para calcular la conductividad térmica de un medio poroso. En dicho método la conductividad de los poros llenos de aire se expresa como:

$$\lambda_a + \lambda_v = \lambda_a + h \bar{D} / \beta D_{at} \quad [4.2.16]$$

y las condiciones usuales a la frontera de conductividades y flujo de calor en las interfaces son usadas, siendo estas:

$$Z = 0, T = T_0 \quad \text{ó} \quad -\lambda_a \partial T_0 / \partial z = 0$$

$$Z = L, T = T_1 \quad \text{ó} \quad Q = h (T_1 - T_0)$$

Como una alternativa a la formulación dada anteriormente podemos reemplazar la expresión $\lambda^* + L \rho_w D_T$ en el primer término del lado derecho de [4.2.16] por λ , esta es la conductividad aparente (se notará que $\lambda \neq \lambda^* + L \rho_w D_{TV}$ por que el flujo de calor en las diferentes partes del medio no son aditivas). Esto nos lleva a revisar de las ecuaciones [4.2.9] y [4.2.15]

$$\bar{q}_h = -(\lambda - L \rho_w D_{TV}) \nabla T + L \bar{q}_{vap} + C_L (T - T_0) \bar{q} \quad [4.2.17]$$

y (con la omisión del término con C_p)

$$\begin{aligned}
& [C + L (S - \theta_L) h \beta] \frac{\partial T}{\partial t} + \left[\frac{L \rho_w D_{Bv}}{\alpha \nu D_{atm}} - L \rho_v + \right. \\
& \left. + \rho_w j^{-1} g (\Psi - T \frac{\partial T}{\partial t}) \right] \frac{\partial T}{\partial t} = \\
& = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + L \rho_w \nabla \cdot (D_{Bv} \nabla \theta_L) + \rho_w C_p [(D_{BL} \nabla \theta_L + \\
& \quad + D_{TL} \nabla T + K \bar{k}) \nabla T] \quad [4.2.18]
\end{aligned}$$

En la ecuación [4.2.17] haciendo uso de [4.2.13] se puede eliminar $L\theta$ en la ecuación [4.2.17] asumiendo que los términos de calor son aditivos. Podría aparecer el término particular asignado a la destilación de vapor debido a los gradientes de temperatura. Sin embargo, este término representa generalmente la más importante contribución de movimiento de humedad. De ahí que los incrementos de conductividad de las partes de baja conductividad del sistema (parte gaseosa) están contribuyendo a la conductividad total en el medio poroso.

El segundo término del lado derecho de [4.2.18] también eleva la difusión de vapor, esté a su vez baja la influencia de gradiente de humedad. De ahí que el correspondiente flujo de calor no es proporcional a ∇T , esto no puede incorporarse en λ de la misma forma como el término $\nabla \cdot (L \rho_w D_{Tv} \nabla T)$.

Las ecuaciones [4.2.8] y [4.2.15] ó [4.2.18] gobiernan la transferencia simultánea de humedad y calor en medios porosos.

La ecuación [4.2.15] o [4.2.16] reemplazan la ecuación de Fourier de conducción de calor, éstas son más generales que [4.1.20]. La ecuación [4.2.16] se reduce cuando la transferencia de calor por movimiento es ignorada y $W = \frac{\partial \theta_v}{\partial t} = 0$.

La generación de calor debida al movimiento viscoso del liquido ha sido ignorado. Esto da un término adicional $\overline{g}_L^2 / (\rho_w K)$ en el lado derecho de [4.2.15] y [4.2.16]. La ecuación [4.2.8] es más general que [4.1.13]. Notándose que los coeficientes en estas ecuaciones son funciones de las variables θ_L y T . Todas dependen fuertemente de θ_L . Su variación con T es menos importante excepto para D_{θ_v} y D_{θ_T} las cuales crecen rápidamente con incrementos de temperatura.

Valores de difusión para arcilla ligera YOLO fueron calculados por Philip y de Vries, estos están basados sobre medidas de Ψ y K hechas por Moore. Philip extrapoló las curvas de K y Ψ en el límite inferior del rango de humedad.

Si guiendo con las ecuaciones de verdadero equilibrio en el suelo, se requiere que el potencial total ($= \Psi + Z$) y la temperatura sean constantes. En un estado de no-equilibrio habrá siempre una interacción en la transferencia de calor y humedad siempre que el gradiente de temperatura sea cero.

Puede chequearse fácilmente que para estos procesos, tales como la infiltración de agua en exceso sobre la superficie del suelo

y el movimiento de agua y la evaporación lleva a la erosión del suelo en razón del orden de 10^{-6} g/cm²s o más, el término dominante en el lado derecho de [4.2.8] es $\partial \theta_L / \partial t$, donde el término $\nabla \cdot (D_T \nabla T)$ es pequeño en comparación con los otros términos. Estos procesos pueden ser vistos como isotérmicos con un buen grado de aproximación. Cuando \bar{q}_m es del orden de 10^7 g/cm²s o menos movimiento de humedad debido al gradiente de temperatura no es ignorado.

Simultáneamente en suelos bajo condiciones naturales, los términos dominantes en [4.2.18] son comúnmente $C \partial T / \partial t$ y $\nabla \cdot (\lambda \nabla T)$.

La humedad y el gradiente de temperatura pueden ser resueltos de las ecuaciones [4.2.2], [4.1.16] y [4.2.17]. Para el caso vertical se encuentra:

$$\frac{\partial \theta_L}{\partial z} = \frac{\bar{q}_h D_T - K \lambda - \bar{q} C_L (T - T_0) D_T - \bar{q} \lambda / \rho_w}{\lambda D_\theta - L \rho_w D_{\theta v} D_T} \quad [4.2.19]$$

$$\frac{d T}{d z} = - \frac{\bar{q}_h D_\theta - K L \rho_w D_{\theta v} - \bar{q} C_L (T - T_0) D_\theta \bar{q} L D_{\theta v}}{\lambda D_\theta - L \rho_w D_{\theta v} D_T} \quad [4.2.20]$$

Ecuaciones similares para el caso horizontal son obtenidas al sustituir X por Z ó X por Y . En la formulación alternativa sustituyendo $\lambda^* + L \rho_w D_{T v}$ por λ .

En experimentos de conductividad térmica la muestra de suelo es usualmente rodeada por superficies sólidas y en este caso $\bar{q} = 0$ en el estado fijo. Para el caso horizontal [4.2.19] y [4.2.20] se reducen a:

$$\frac{d \theta_L}{d X} = \frac{\bar{q}_h D_B}{\lambda D_\theta - L \rho_L D_{\theta v} D_T} \quad [4.2.21]$$

$$\frac{d T}{d X} = - \frac{\bar{q}_h D_\theta}{\lambda D_B - \rho_v L D_{Gv} D_T} \quad [4.2.22]$$

La conductividad térmica aparente encontrada en un experimento de este tipo es por consiguiente $\lambda - L \rho_L D_{\theta v} D_T / D_\theta$ o $\lambda + L \rho_L (D_{Tv} D_{\theta L} - D_{\theta v} D_{Tv}) / D_B$ en la formulación alternativa.

4.3. Arcillas como impermeabilizantes (ref 18).

Se considera que un suelo está formado de arcilla si las partículas que lo forman son del orden de 2 μ m o menores, siendo las tres principales clases de arcilla minerales: caolinita, montmorillonita e illita.

Las propiedades de la arcilla dependen de su contenido de agua, por ejemplo, si hay un elevado contenido de agua, esto nos dice que corresponde una distancia promedio alta entre las partículas (es decir, a una distancia mayor a 1 μ m) y a una menor cohesión de las partículas vecinas.

El contenido de humedad en el que el suelo cambia su comportamiento de líquido a sólido plástico se conoce como límite líquido (L.L.). El límite entre su comportamiento plástico y su falla quebradiza se le conoce como límite plástico (L.P.).

Se tiene que el índice de plasticidad es igual al límite líquido menos el límite plástico, es decir, se define como (ref 18):

$$I.P. = L.L. - L.P. \quad [4.3.1]$$

El grado de saturación de un suelo es la medida de la cantidad de espacios vacíos que se pueden llenar de agua, por ejemplo, si solo existe aire en el suelo, entonces, este se considera seco, sin embargo si solo existe agua, el suelo se dice que está saturado, por otro lado tenemos que si existe tanto agua como aire, entonces, se dice que el suelo está parcialmente saturado.

El contenido de humedad o contenido de agua es, el peso del agua entre el peso del suelo, es decir:

$$W = \frac{W_w}{W_s} \quad [4.3.2]$$

donde W_w es el peso del agua

W_s es el peso del suelo

Preparación de arcilla para el recubrimiento del subsuelo del estanque solar.

Para obtener una máxima uniformidad en la humedad de la arcilla se necesita añadir agua para lograr la humedad requerida.

Si se toma como muestra 100 kg de arcilla con su humedad natural (cuya humedad natural es del orden del 14 %), entonces de acuerdo a la ecuación [4.3.2] y haciendo la consideración que el peso total W_t es:

$$W_t = W_w + W_s \quad [4.3.3]$$

si W_o es la humedad inicial, W_{to} es el peso inicial, entonces:

$$W_{to} = W_s (1 - W_o)$$

$$W_s = \frac{W_{to}}{1 - W_o} \quad [4.3.4]$$

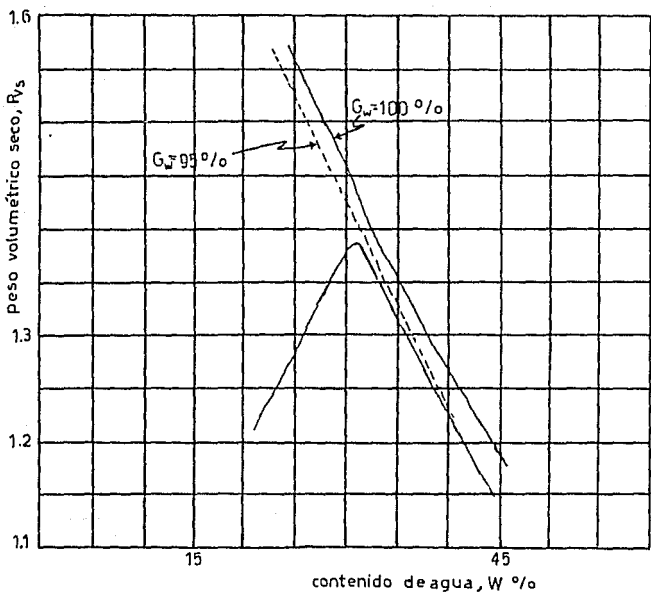


Fig.4.2. Gráfica de conteúdo de água para impermeabilizar: 36%

y si el peso final de arcilla compactada (de acuerdo al método utilizado en el I.I.U.N.A.M) (ref 6) es W_u , entonces,

$$W_u = W_a (1 + W_d) \quad [4.3.5]$$

Por lo tanto, la cantidad de agua que se necesita agregar para lograr 36 % de humedad es:

$$\Delta W_w = W_u - W_a$$

$$W_a = \frac{100}{1.24} = 87.72 \text{ kg}$$

$$W_u = 87.72 \times 1.36 = 119.3 \text{ kg}$$

$$\Delta W_w = 119.3 - 100 = 19.3 \text{ kg} = 19.3 \text{ litros}$$

El 36 % se obtuvo al observar la gráfica de la fig 4.2 de contenido de agua W contra el peso volumétrico seco, ya que aunque el máximo que se observa es 31 % se recomienda por experiencia estar arriba del máximo por alrededor de un 5 % . Cabe mencionar que esta humedad es constante en la arcilla que se utiliza en el subsuelo del estanque solar.

Medidas de conductividad térmica y permeabilidad vertical a 50 °C y 60 °C de un prototipo de estanque solar.

Aplicando la ley de Fourier se estima la conductividad térmica, siendo esta ley:

$$q = K A \frac{\Delta T}{\Delta X} \quad [4.3.6]$$

donde q es la cantidad de calor transferido por unidad de tiempo

K es la conductividad térmica

ΔT es el gradiente de temperatura

ΔX es la distancia a la que se mide ΔT

A es el área

Con la ley de Darcy se calcula la permeabilidad vertical, siendo esta:

$$Q = X i A \quad [4.3.7]$$

donde i es el gradiente hidráulico

X es el coeficiente de permeabilidad vertical

Q es la pérdida por filtración

Para llevar acabo las medidas de todo lo mencionado anteriormente, se utilizo el dispositivo que se construyó en el I.I.U.N.A.M. tal dispositivo mostrado en la figura 4.3. es una fosa séptica de asbesto que se implemento en la siguiente forma:

- a) Se forró interiormente la fosa con fibra de vidrio para impermeabilizarlo.
- b) En la parte más baja se pusieron 10 cm de granzon seguidos por 20 cm de arena; sobre está se colocaron 20 cm de arcilla compactada con una humedad de 36 % .

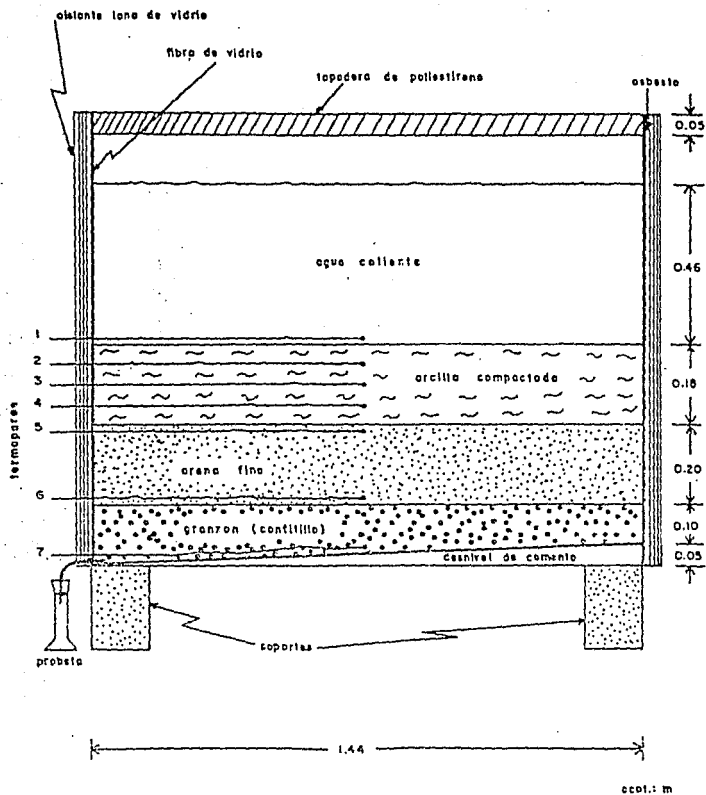


Fig.4.3. Modelo de laboratorio.

- c) Encima de la capa de arcilla se puso una capa de 10 cm de arena fina para que sirviera como lastre y evitar con ella posibles daños o deformaciones en la arcilla.
- d) En la parte superior, inicialmente se mantuvo agua caliente a una temperatura constante. Esta agua se pudo mantener a esta temperatura por medio de una resistencia eléctrica; se le conecta un wattímetro para conocer la cantidad de calor que se le está suministrando.
- e) Se colocaron termopares (cobre-constantan), distribuidos en forma conveniente a diferentes alturas del prototipo.
- f) Se tapó el estanque con una capa de poliestireno, además se aislaron los lados y la parte superior del estanque.
- g) Se colocó un recipiente cerrado a la salida del estanque para coleccionar y medir los efluentes captados con ciertos lapsos de tiempo.

Para calcular la conductividad térmica a 50 °C se tiene que la ecuación [4.3.6] nos dice que:

$$K = \frac{q \Delta X}{A \Delta T} \quad [4.3.8]$$

donde, los datos que a continuación se dan fueron calculados del prototipo del estanque solar.

$$\Delta X = 0.2 \text{ m}$$

$\Delta T = 4.81 \text{ }^{\circ}\text{C}$, gradiente de temperatura en la arcilla.

$$A = 1.6286 \text{ m}^2$$

$$t = 12805 \text{ min}$$

y kWh consumidos = $92.1 - 78.7 = 13.4 \text{ kWh}$

por lo tanto,

$$q = \frac{13400 \text{ watt-h}}{213.41666 \text{ h}} = 62.788 \text{ watt}$$

por lo tanto,

$$K = \frac{(62.788)(0.2)}{(1.6286)(4.81)} = 1.607 \text{ W / m}^{\circ}\text{C}$$

Para el cálculo de la permeabilidad vertical tenemos:

$$K = \frac{Q}{i A} \quad [4.3.9]$$

donde K es el coeficiente de permeabilidad vertical en m/s.

Q es la pérdida por filtración en m^3/s

i el gradiente hidráulico

A el Área en m^2

por lo tanto:

$$i = \frac{84}{34}$$

$$Q = \frac{\Sigma \text{pérdidas}}{t} = 9.0264 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$X = 2.2433 \times 10^{-9} \text{ m/s}$$

Ahora se calcula la conductividad térmica y permeabilidad vertical con salmuera saturada caliente a 10°C , que es el caso de nuestro objetivo, por tal motivo se tiene que los siguientes cálculos son los que se toman en cuenta para la planteación del modelo matemático.

Cálculos de conductividad térmica de la arcilla bajo el efecto de salmuera caliente a 10°C .

$$t = 624.9393 \text{ h}$$

$$kWh = 32.1 \text{ kWh}$$

$$q = 11.4396 \text{ watts}$$

$$K = 1.26 \text{ W/m }^{\circ}\text{C}$$

$$\Delta T = 5.19^{\circ}\text{C}$$

$$Q = 1.9992 \times 10^{-8} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$X = 1.4726 \times 10^{-7} \text{ cm/s}$$

Propiedades térmicas de arcillas.

Conductividad térmica. Tenemos que la conductividad térmica es la velocidad a la cual la cantidad de calor q es transferida a en un suelo, dependiendo del gradiente de temperatura dT/dx existente y de un coeficiente de conductividad térmica de un cierto suelo, todo lo mencionado se expresa como:

$$q = K \frac{dT}{dx} \quad [4.3.10]$$

Difusividad térmica. La difusividad térmica es una propiedad que indica la facultad con la cual un material experimenta un cambio de temperatura, siendo esta:

$$\alpha = \frac{K}{C_p \rho} \quad [4.3.11]$$

donde K es el coeficiente de conductividad térmica en, cal/m h °C

C_p es la capacidad calorífica del suelo en, cal/g °C

ρ es la densidad del suelo en, g/m³

Se tiene que en suelos, la difusividad térmica disminuye al aumentar la humedad, por que el producto C_pρ aumenta más rápidamente que la conductividad térmica, pero en nuestro caso se tiene que la humedad es constante, por lo tanto C_pρ es mantiene constante.

4.4 Deducción del modelo matemático.

De la sección 3.3 se tiene que para arcillas usadas en el prototipo de estanque solar implementado en el I.I., se calculó experimentalmente un contenido de humedad constante, siendo este contenido del orden de 36 % del volumen total y se encontró que para dicha humedad es calculado el flujo de salmuera, siendo dicha velocidad de 1.5×10^{-7} cm/s. por otro lado se tiene que la sección 4.1 y 4.2 para ser más precisos de las ecuaciones [4.1.19] y [4.1.20] y las similares de la sección 3.2 se tiene que la ecuación [3.1.20] se reduce a:

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \quad [4.4.1]$$

La ecuación anterior se obtuvo de la ecuación [4.1.20]. ya que en el prototipo del estanque se encontró que la humedad es constante, por lo que el segundo miembro de la ecuación [4.1.20] se reduce a cero, ya que $\theta =$ constante. Por lo que se podrá observar que la ecuación anterior es la ecuación que describe la difusión de calor, por lo que concluye que dicha ecuación no describe nuestro fenómeno ya que se necesita una ecuación en la cual este incluido tanto el término de difusión como un término que nos asocie el flujo de salmuera caliente.

Para la deducción de dicha ecuación, una vez que no se llegó a acoplar la ecuación [4.4.1] a nuestro fenómeno. empezamos analizando la siguiente ecuación de balance de energía (ref 19).

$$C_{pp} \frac{D T}{D t} = p \nabla \cdot \mathbf{V} + K \nabla^2 T - \nabla \cdot \mathbf{q}_r + q''' + \dot{\Phi} \quad [4.4.2]$$

donde \mathbf{q}_r es el vector de radiación

$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ porque el volumen es constante

$q_r = 0$; $q''' = 0$ y $\dot{\Phi} = 0$.

haciendo estas consideraciones, la ecuación anterior se transforma en:

$$C_{pp} \frac{D T}{D t} = \nabla \cdot (K \nabla T) \quad [4.4.3]$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{D}{D t} &= \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + w \frac{\partial}{\partial y} + \\ &+ v \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \quad [4.4.4]$$

entonces, sustituyendo la ecuación anterior en [4.4.3] tenemos:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial y} + v \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha^2 \nabla^2 T \quad [4.4.5]$$

Por las consideraciones hechas en el capítulo 3 la ecuación anterior se transforma en:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha^2 \nabla^2 T - v \frac{\partial T}{\partial z} \quad [4.4.6]$$

Cabe mencionar que el segundo y el tercer término de [4.4.5] son cero porque solo se toman las componentes en la dirección z.

Entonces, se tiene que la ecuación [4.4.6] es la ecuación buscada para la descripción de nuestro fenómeno.

Ahora se plantea la ecuación diferencial parcial [4.4.6] con las respectivas restricciones, como condición inicial y condición de frontera, es decir:

Ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - v \frac{\partial T}{\partial z} \quad [4.4.7]$$

Condición de frontera

$$T(0, t) = T_1$$

Condición inicial

$$T(z, 0) = T_0$$

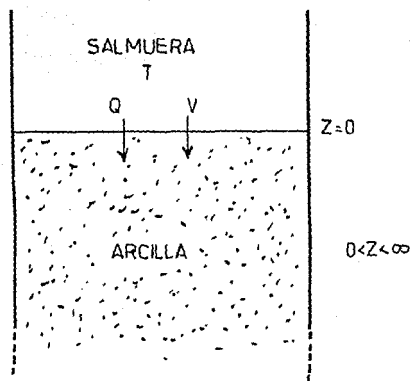


Fig.4.4. Corte trasversal del subsuelo de un estanque solar, donde Q es el flujo de calor, V es la velocidad de flujo de la salmuera, $Z = 0$ es la frontera de la arcilla-salmuera.

CAPITULO 5 SOLUCION DEL MODELO MATEMATICO

5.1. Solución de la ecuación de un estanque solar con flujo de calor y masa hacia un medio semi-infinito.

Una vez planteada la ecuación [4.4.7] en el capítulo anterior, ahora se resolverá analíticamente.

Para la solución de la ecuación de un estanque solar con flujo de calor y masa hacia un medio semi-infinito (a través del subsuelo), se toma en consideración que existe una temperatura T_1 del estanque solar (que es salmuera caliente que se mantiene a una temperatura T_1), como se muestra en la figura 1, y debajo de éste un gradiente de temperatura en una capa semi-infinita de arcilla, la cual se selecciona de acuerdo al estudio previo (ref 22). Otra consideración que se hace, es que se toma como origen (frontera) la zona donde tiene contacto la arcilla con la salmuera , aceptando como eje positivo hacia abajo de la arcilla como se ilustra en la figura 4.4.

Por lo anterior, se tiene que la ecuación que se resuelve para el estanque solar con flujo de calor y masa hacia un medio semi-infinito (a través del subsuelo) es la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} - V \frac{\partial T}{\partial Z} \quad [5.1.1]$$

donde $\alpha^2 = \frac{k}{\rho c_p}$ difusividad térmica: siendo ρ la densidad de la arcilla y c_p la capacidad calorífica de la misma.

T es la temperatura.

Z la profundidad en la arcilla, a la cual se calcula T .

La solución de la ecuación diferencial parcial [5.1.1] tiene que satisfacer la siguiente condición de frontera y condición inicial.

Condición de frontera

$$T(0, t) = T_1 \quad [5.1.2]$$

Condición inicial

$$T(Z, 0) = T_0 \quad [5.1.3]$$

Para la solución de la ecuación diferencial parcial [5.1.1] que satisface las condiciones [5.1.2] y [5.1.3], se propone el siguiente cambio:

Sea

$$T = u + T_1$$

entonces, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} \quad [5.1.4] \\ \frac{\partial T}{\partial Z} &= \frac{\partial u}{\partial Z} \end{aligned}$$

Por lo tanto, sustituimos en la ecuación [5.1.1],
 obteniéndose:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \bar{v} \frac{\partial u}{\partial z} \quad [5.1.5]$$

Transformándose la condición de frontera, en una condición homogénea, siendo esta:

$$u(0, t) = 0 \quad [5.1.6]$$

y la condición inicial se transforma en:

$$u(2, 0) = T_0 - T_1 = T_2 \quad [5.1.7]$$

Ahora, proponemos la siguiente transformación (ref 23)

Sea

$$u = e^{vz/2\alpha^2 - v^2 t/4\alpha^2} \omega = e^{vz/2\alpha^2} e^{-v^2 t/4\alpha^2} \omega \quad [5.1.8]$$

Aplicando la transformación anterior a la ecuación diferencial [5.1.5] y las condiciones [5.1.6] y [5.1.7],
 obteniéndose:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial \omega}{\partial z^2} \quad [5.1.9]$$

que satisface la siguiente condición de frontera y condición inicial:

Condición de frontera

$$\omega(0, t) = 0 \quad [5.1.10]$$

Condición inicial

$$\omega(2, 0) = T_2 e^{-vz/2\alpha^2} \quad [5.1.11]$$

Tomando transformada de Laplace, encontramos que las ecuaciones [5.1.3], [5.1.10] se transforman en (ref 24).

Ecuación diferencial

$$s W - T_2 e^{-vz/2\alpha^2} = \alpha^2 \frac{d W^2}{d z^2} \quad [5.1.12]$$

Condición de frontera

$$W(0, s) = 0 \quad [5.1.13]$$

Resolviendo [5.1.12] encontramos que la solución de dicha ecuación es (ref 25):

$$W = C_1 e^{z\sqrt{s}/\alpha} + C_2 e^{-z\sqrt{s}/\alpha} - T_2 \frac{1}{\frac{v^2}{4\alpha^2} z^2 - s} e^{-vz/2\alpha^2} \quad [5.1.14]$$

dónde $C_1 = 0$ para que W resulte acotada cuando z tiende al infinito y tendremos entonces que:

$$W = C_2 e^{-z\sqrt{s}/\alpha} - T_2 \frac{1}{\frac{v^2}{4\alpha^2} z^2 - s} e^{-vz/2\alpha^2} \quad [5.1.15]$$

Por la ecuación [5.1.13] tenemos que:

$$C_2 = T_2 \frac{1}{\frac{v^2}{4\alpha^2} z^2 - s} e^{-vz/2\alpha^2} \quad [5.1.16]$$

Entonces, sustituyendo [5.1.16] en [5.1.15] obtenemos:

$$W = T_2 \frac{1}{\frac{v^2}{4\alpha^2} - S} e^{-z\sqrt{S}/\alpha} e^{-vz/2\alpha^2} -$$

$$T_2 \frac{1}{\frac{v^2}{4\alpha^2} - S} e^{-vz/2\alpha^2} \quad [5.1.17]$$

$$\text{Sea: } a^2 = \frac{v^2}{4\alpha^2}, \quad a = \frac{v}{2\alpha}, \quad \frac{a}{\alpha} = \frac{v}{2\alpha^2}, \quad x = \frac{z}{\alpha}$$

entonces

$$W = T_2 \left[e^{-ax} \frac{1}{a^2 - S} e^{-x\sqrt{S}} - \frac{1}{a^2 - S} e^{-x\sqrt{S}} \right]$$

$$W = T_2 \left[\frac{1}{S - a^2} e^{-ax} - e^{-ax} \frac{1}{S - a^2} e^{-x\sqrt{S}} \right] \quad [5.1.18]$$

Calculando la transformada inversa de Laplace, obtenemos (ref 2B):

$$\begin{aligned} \omega = T_2 \left[e^{-ax} e^{a^2 t} \right] - \frac{T_2}{2} e^{-ax} e^{a^2 t} \left[e^{-ax} \text{ERFC} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} - a\sqrt{t} \right) \right] \\ - \frac{T_2}{2} e^{-ax} e^{a^2 t} \left[e^{ax} \text{ERFC} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} + a\sqrt{t} \right) \right] \quad [5.1.19] \end{aligned}$$

Sustituyendo a^2 , a , z/α y x en la ecuación anterior, obtenemos la solución general de la ecuación [5.1.9]:

$$\begin{aligned}
 u &= T_2 e^{v^2 t / 4\alpha^2} e^{-vz/2\alpha^2} - \frac{T_2}{2} \left[e^{-vz/2\alpha^2} e^{vz t / 4\alpha^2} e^{-vz/2\alpha^2} \right. \\
 &\quad \text{ERFC} \left(\frac{z}{2\alpha\sqrt{t}} - \frac{v\sqrt{t}}{2\alpha} \right) \left. - \frac{T_2}{2} \left[e^{-vz/2\alpha^2} e^{v^2 t / 4\alpha^2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. e^{vz/4\alpha^2} \text{ERFC} \left(\frac{z}{2\alpha\sqrt{t}} + \frac{v\sqrt{t}}{2\alpha} \right) \right] \right] \quad [5.1.20]
 \end{aligned}$$

En el apéndice se da la demostración de que la ecuación [5.1.20] es la solución general de la ecuación diferencial [5.1.9]

Sustituyendo la ecuación [5.1.20] en la ecuación [5.1.8], para esta forma obtener la solución general de la ecuación diferencial parcial [5.1.5], obtenemos:

$$\begin{aligned}
 u &= T_2 e^{v^2 t / 4\alpha^2} e^{-vz/2\alpha^2} e^{-v^2 t / 4\alpha^2} - \frac{T_2}{2} \left[e^{-vz/2\alpha^2} e^{-v^2 t / 4\alpha^2} \right. \\
 &\quad \left. e^{vz/2\alpha^2} e^{-vz/4\alpha^2} \text{ERFC} \left(\frac{z}{2\alpha\sqrt{t}} - \frac{v\sqrt{t}}{2\alpha} \right) \right] - \frac{T_2}{2} \left[e^{-vz/2\alpha^2} \right. \\
 &\quad \left. e^{v^2 t / 2\alpha^2} e^{vz/2\alpha^2} e^{vz/2\alpha^2} e^{vz/2\alpha^2} e^{-v^2 t / 4\alpha^2} \right. \\
 &\quad \left. \text{ERFC} \left(\frac{z}{2\alpha\sqrt{t}} - \frac{v\sqrt{t}}{2\alpha} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Simplificando, obtenemos la solución general de la ecuación diferencial parcial [5.1.5], la cual es:

$$u = T_2 - \frac{T_2}{2} e^{-vz/2\alpha^2} \operatorname{ERFC} \left(\frac{z}{2\alpha\sqrt{t}} - \frac{v\sqrt{t}}{2\alpha} \right) - \frac{T_2}{2} e^{vz/2\alpha^2} \operatorname{ERFC} \left(\frac{z}{2\alpha\sqrt{t}} + \frac{v\sqrt{t}}{2\alpha} \right) \quad [5.1.21]$$

Al igual que la solución exterior en el apéndice se da una comprobación de la ecuación [5.1.21].

Una vez obtenida la solución general de la ecuación diferencial parcial [5.1.3], ahora sustituimos en la ecuación [4.1.21], $T = u + T_1$ y $T_2 = T_0 - T_1$, obteniéndose:

$$T = T_0 - T_1 - \frac{(T_0 - T_1)}{2} e^{-vz/2\alpha^2} \operatorname{ERFC} \left(\frac{z}{2\alpha\sqrt{t}} - \frac{v\sqrt{t}}{2\alpha} \right) -$$

$$\frac{(T_0 - T_1)}{2} e^{vz/2\alpha^2} \operatorname{ERFC} \left(\frac{z}{2\alpha\sqrt{t}} + \frac{v\sqrt{t}}{2\alpha} \right) - T_1$$

$$T = T_0 - \frac{(T_0 - T_1)}{2} \left[e^{-vz/2\alpha^2} \operatorname{ERFC} \left(\frac{z}{2\alpha\sqrt{t}} - \frac{v\sqrt{t}}{2\alpha} \right) -$$

$$e^{vz/2\alpha^2} \operatorname{ERFC} \left(\frac{z}{2\alpha\sqrt{t}} + \frac{v\sqrt{t}}{2\alpha} \right) \right] \quad [5.1.22]$$

Siendo la ecuación anterior la solución general de la ecuación diferencial parcial [5.1.1], que satisface la condición de frontera [5.1.2] y la condición inicial [5.1.3]. por lo tanto, aseguramos que para una temperatura T_0 y T_1 determinadas, con la ecuación anterior se determina la temperatura que se tendrá a una cierta profundidad (Z) en la arcilla, en distintos tiempos. Cálculos de estas aseraciones se presentan más adelante .

5.2. Solución de la ecuación de un estanque solar impermeabilizado.

En esta sección ahora resolvemos la ecuación diferencial parcial que describe la difusión de calor a través de un estanque solar impermeabilizado (ref 34), como se muestra en la figura 5.1. Se tiene que dicho impermeabilizante como su nombre lo dice, solo permite el flujo de calor hacia el subsuelo, siendo el flujo de salmuera nulo.

La ecuación diferencial parcial para el estanque solar impermeabilizante es la siguiente:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad [5.2.1]$$

donde las variables tienen los mismos significados dados en la sección anteriormente.

La ecuación diferencial parcial [5.2.1] debe satisfacer la siguiente condición de frontera y condición inicial:

Condición de frontera

$$T (0, t) = T_s \quad [5.2.2]$$

Condición inicial

$$T (z, 0) = T_o \quad [5.2.3]$$

Ahora, al igual que en el inciso anterior, proponemos el siguiente cambio.

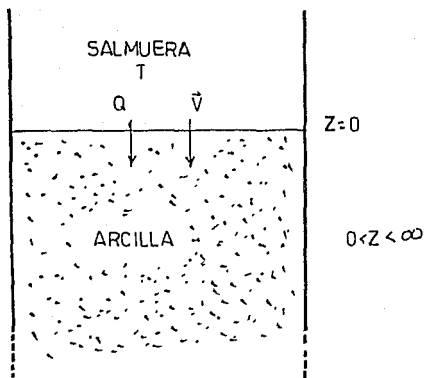


Fig. 5.1. Corte transversal del subsuelo de un estanque solar que ha sido impermeabilizado con aislante sintético.

Sea

$$T = u + T_1 \quad [5.2.4]$$

entonces, tenemos:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

y

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad [5.2.5]$$

Sustituyendo [5.2.5] en la ecuación diferencial [5.2.1],
obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad [5.2.6]$$

Transformándose las ecuaciones [5.2.2] y [5.2.3] en:

Condición de frontera

$$u (0, T) = 0 \quad [5.2.7]$$

Condición inicial

$$u (Z, 0) = T_0 - T_1 = T_2 \quad [5.2.8]$$

Aplicando transformada de Laplace a las ecuaciones [5.2.5]

y [5.2.6], obtenemos (ref 35):

Ecuación diferencial

$$S U - T_2 = \alpha^2 \frac{d^2 U}{dz^2}$$

$$\frac{d^2 U}{dz^2} - \frac{S}{a^2} U = - \frac{T_2}{a^2} \quad [5.2.8]$$

Condición de frontera

$$U (0, t) = 0 \quad [5.2.9]$$

Una vez que se ha aplicado la transformada de Laplace, ahora se obtiene la solución general de la ecuación diferencial parcial [5.2.8] (ref 35).

$$U = C_1 e^{z\sqrt{S}/a} + C_2 e^{-z\sqrt{S}/a} + \frac{T_2}{S} \quad [5.2.11]$$

donde $C_1 = 0$, para que U resulte acotada cuando z tienda al infinito, lo cual implica que la ecuación anterior es ahora :

$$U = C_2 e^{-z\sqrt{S}/a} + \frac{T_2}{S} \quad [5.2.12]$$

De la ecuación [5.2.11] se tiene que:

$$C_2 = \frac{T_2}{S}$$

Sustituyendo C_2 en la ecuación [5.2.12], se obtiene:

$$U = \frac{T_2}{S} [1 - e^{-z\sqrt{S}/\alpha}]$$

$$U = T_2 \left[\frac{1}{S} - \frac{1}{S} e^{-z\sqrt{S}/\alpha} \right] \quad [5.2.13]$$

En el apéndice se da una comprobación de la ecuación anterior.

Ahora, calculando la transformada inversa de Laplace (ref 37) para la ecuación [5.2.13], obtenemos:

$$u = T_2 \left[1 - \operatorname{ERFC} \left(\frac{z}{2 \alpha \sqrt{t}} \right) \right] \quad [5.2.14]$$

Siendo la ecuación anterior la solución general de la ecuación diferencial parcial [5.2.1] que nos describe el fenómeno de transferencia de calor a través del impermeabilizante del estanque solar.

Aplicando la propiedad (ref 38):

$$\operatorname{ERFC} (x) = 1 - \operatorname{ERF} (x)$$

la ecuación [5.2.14] es ahora :

$$u = T_2 \left\{ 1 - \left[1 - \operatorname{ERF} \left(\frac{z}{2 \alpha \sqrt{t}} \right) \right] \right\} \quad [5.2.15]$$

$$u = T_2 \operatorname{ERF} \left(\frac{z}{2 \alpha \sqrt{t}} \right)$$

Sustituyendo $T_2 = T_0 - T_1$ y $T = u - T_1$ se obtiene:

$$T = (T_o - T_i) \operatorname{ERF} \left(\frac{Z}{2 \sqrt{\alpha \tau}} \right) + T_i \quad [5.2.16]$$

Siendo la ecuación anterior la solución general de la ecuación diferencial parcial [5.2.1].

5.3 Analisis paramétrico de las soluciones de las ecuaciones.

El analisis paramétrico consiste en la variación de los parámetros que se hayan en la solución de las ecuaciones de transferencia de calor y masa ([5.1.22] y [5.2.16]) para determinar algunas propiedades de interés . En este caso interesa la temperatura.

Para la primera parte de este analisis paramétrico, primero se toma la solución de la ecuación [5.1.1], representada por la ecuación [5.1.22]: en dicha ecuación como se observa, la temperatura en la arcilla depende de T_0 , T_1 , el tiempo (t), profundidad (z), la permeabilidad vertical (v), y la difusividad térmica (α^2); se toman constantes la permeabilidad vertical, la difusividad, T_0 y T_1 , entonces varían la profundidad y el tiempo, para 10, 100, 1000, 5000 y 10000 días.

Entonces, para el cálculo de la temperatura en el subsuelo de un estanque solar que ha sido impermeabilizado con arcilla, se tiene :

$$T_0 = 17 \text{ }^\circ\text{C} \text{ (temperatura inicial de la arcilla)}$$

$$T_1 = 50 \text{ }^\circ\text{C} \text{ (temperatura de la salmuera: constante)}$$

$$\alpha^2 = 2.359 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{día} \text{ (difusividad térmica)}$$

$$v = 1.270 \times 10^{-4} \text{ m/día} \text{ (permeabilidad vertical)}$$

donde el valor de v y α^2 se tomarán del capítulo anterior, siendo v el mismo valor de la permeabilidad vertical, denotado en dicho capítulo por X , por lo que $X = v$.

Los resultados de esta primera parte del análisis paramétrico se pueden observar en las tablas y graficas que se presentan más adelante.

En la segunda parte de este análisis, se calculará la temperatura que existirá en la arcilla de un estanque solar impermeabilizado con aislante sintético, y debajo de este se coloca arcilla impermeabilizante, dicho estanque no permito que exista flujo de salmuera a través de este. Entonces, se tiene que debido al aislante se tendrá una caída en la temperatura, siendo esta caída muy pequeña, ya que ahora la difusividad térmica es del orden de $4.744 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{dia}$, dicha caída se calcula con la ecuación [5.2.16]. Una vez que se ha determinado la caída de la temperatura en la parte inferior del aislante, se procede a calcular la temperatura que se tendrá en el subsuelo, si debajo del aislante se ha colocado arcilla, claro que en esta arcilla ya no existe flujo de salmuera, con lo cual solamente se tiene el

Entonces, se tiene:

$$T_0 = 17^\circ\text{C}$$

$$T_1 = 10^\circ\text{C}$$

$$\alpha^2 = 4.744 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{dia} \text{ (del aislante)}$$

$$\alpha^2 = 2.359 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{dia} \text{ (de la arcilla)}$$

Los resultados obtenidos se presentan en las siguientes tablas y graficas. En las graficas se tiene que las curvas de arcilla, es la variación de la temperatura con la profundidad, para un tiempo constante, mientras que las curvas correspondientes a aislante sintético, son la variación de la temperatura en el subsuelo de un estanque solar que ha sido impermeabilizado con aislante sintético.

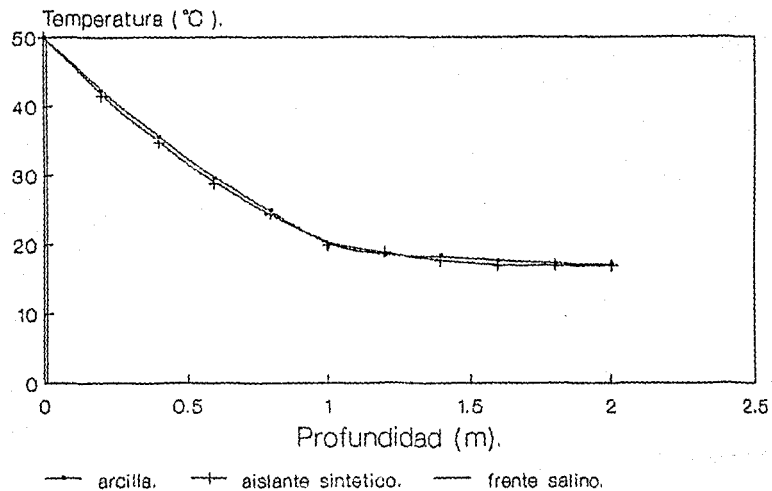
De los resultados se puede observar que la variación de la temperatura en la arcilla en comparación con la arcilla que se encuentra en la parte inferior del aislante casi es la misma.

En las gráficas, la línea perpendicular a la profundidad representa el frente salino, dándose éste solamente en la arcilla del estanque solar que ha sido impermeabilizado precisamente con arcilla.

Tabla I

profundidad (m)	temperatura calculada con la ecuación [5.2.16] (°C)	temperatura calculada con la ecuación [5.1.22] (°C)
0.2	41.551	42.293
0.4	34.803	35.546
0.6	28.215	29.558
0.8	24.320	25.033
1.0	19.930	19.526
1.2	18.220	18.423
1.4	17.632	18.377
1.6	17.009	17.643

tabla 1. Cálculo de la temperatura para un tiempo constante de 10 días

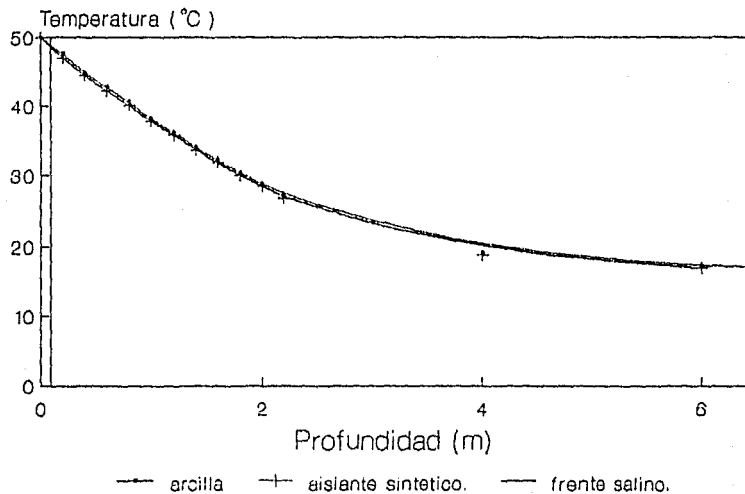


gráfica 1. Variación de la temperatura en el subsuelo, para un tiempo constante de 10 días.

Tabla II

Profundidad (m)	temperatura calculada con la ecuación [5.2.16] (°C)	temperatura calculada con la ecuación [5.1.22] (°C)
0.2	46.926	47.581
0.4	44.449	44.817
0.6	42.279	42.823
0.8	40.161	40.620
1.0	37.772	38.145
1.2	35.819	36.180
1.4	33.638	34.003
1.6	31.878	32.244
1.8	29.962	30.327
2.0	28.441	28.811
2.2	26.811	27.293
4.0	18.806	19.175
6.0	17.000	17.192

tabla 2. cálculo de la temperatura para un tiempo constante de 100 días.

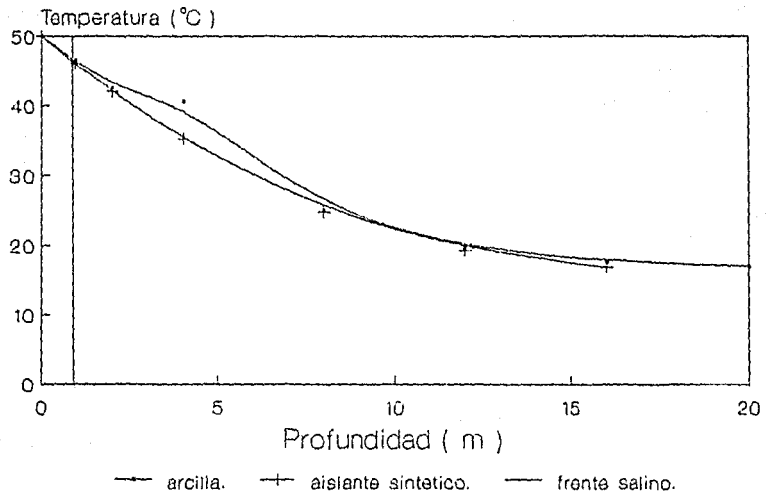


gráfica 2: Variación de la temperatura en el subsuelo, para un tiempo constante de 100 días.

Tabla III

profundidad (m)	temperatura calculada con la ecuación [5.2.16] ($^{\circ}\text{C}$)	temperatura calculada con la ecuación [5.1.22] ($^{\circ}\text{C}$)
1.0	45.983	46.451
2.0	42.003	42.432
4.0	35.251	35.501
8.0	24.824	24.986
12.0	19.232	19.645
16.0	17.009	17.656

tabla 3. Cálculo de la temperatura para un tiempo constante de 1000 días.



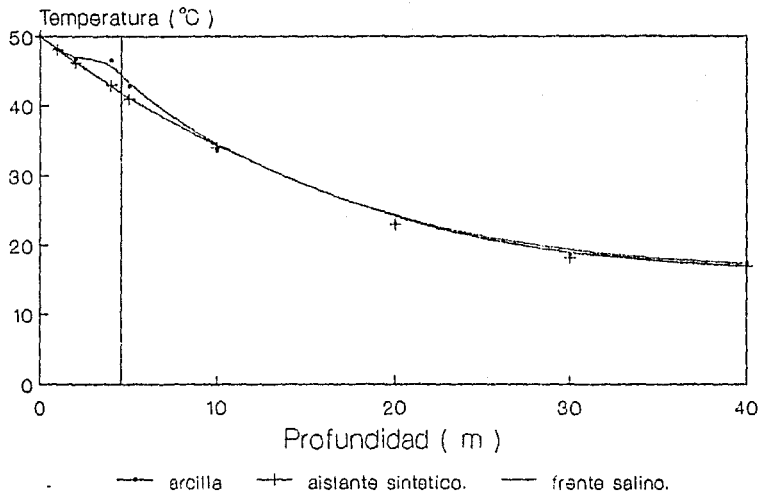
gráfica 3: Variación de la temperatura en el subsuelo, para un tiempo constante de 1000 días.

Tabla IV

profundid (m)	temperatura calculada con la ecuación [5.2.16] (°C)	temperatura calculada con la ecuación [5.1.22] (°C)
1.0	48.140	48.086
2.0	46.170	46.696
4.0	42.960	46.553
5.0	41.009	42.819
10.0	34.067	33.717
20.0	23.109	23.206
30.0	18.120	18.623
40.0	17.306	17.310

tabla 4. cálculo de la temperatura para un tiempo constante
de 5000 días.

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

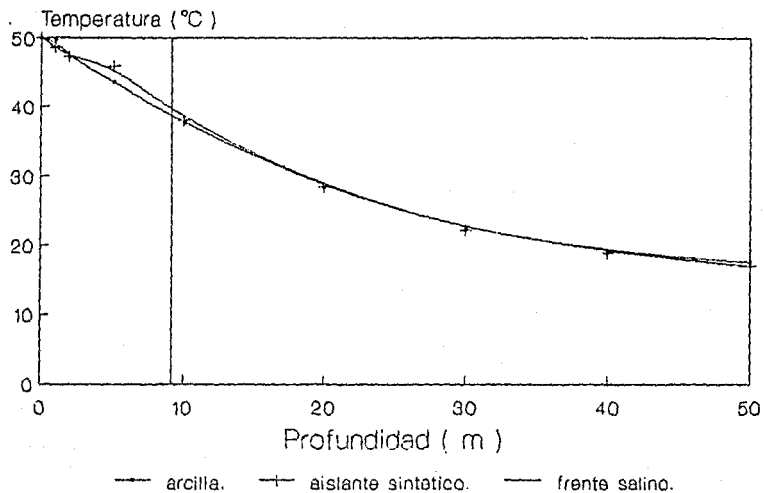


gráfica 4: Variación de la temperatura en el subsuelo, para un tiempo constante de 5000 días.

Tabla V

profundidad (m)	temperatura calculada con la ecuación [5.2.16] (°C)	temperatura calculada con la ecuación [5.1.22] (°C)
1.0	48.201	48.784
2.0	47.291	47.231
5.0	45.893	43.528
10.0	38.019	37.503
20.0	28.469	28.301
30.0	22.291	22.268
40.0	18.986	19.041
50.0	17.109	17.651

tabla 5. cálculo de la temperatura para un tiempo constante de 10000 días.



gráfica 5: Variación de la temperatura en el subsuelo, para un tiempo constante de 10000 días.

CAPITULO 6

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1 CONCLUSIONES.

Desde el punto de vista térmico la ecuación encontrada en el capítulo 4, es decir, la ecuación que nos describe el fenómeno de conducción de calor en un suelo bajo un gradiente de temperatura y humedad en un medio poroso, no se pudo aplicar al fenómeno de conducción de calor con flujo de masa hacia el subsuelo de un estanque solar, esto se debió a que en dicha ecuación está incluido un gradiente de humedad, por tal motivo no se aplica ya que en el modelo experimental que se realiza paralelamente a esta investigación, se encontró que la humedad contenida en el subsuelo del prototipo de estanque solar (implementado en el I.I.U.N.A.M) es constante.

Como caso similar, se tiene que la ecuación [4.2.22] tampoco se pudo aplicar a nuestro dispositivo, ya que al igual que la ecuación [4.1.29] se tiene incluido un gradiente de humedad.

Para fines prácticos, se tiene que para poder llegar a la ecuación que nos describe el fenómeno del comportamiento térmico de un estanque solar con flujo de calor y salmuera a través del subsuelo de un estanque solar, se toma la ecuación de conservación de la energía [4.4.2], y bajo ciertas consideraciones como volumen y presión constante, desprecio del calor radiado, no hay generación interna de calor y conducción de calor en una dirección, nos lleva a la deducción de la ecuación de la conducción de calor con convección, que es la ecuación [4.4.7] que mejor se adapta a nuestro dispositivo.

Al resolver la ecuación de conducción de calor con convección, que es el caso de que se utilizara arcilla en lugar de aislante sintético como impermeabilizante en el sub suelo de un estanque solar, y la ecuación de conducción de calor, que es el caso en el que se usa aislante sintético como impermeabilizante, en el cual aparentemente no existe flujo de salmuera a través de este impermeabilizante, se encontró que los resultados obtenidos de dichas soluciones muestran muy poca discrepancia, con lo cual se puede asegurar que para fines prácticos se puede sustituir el aislante sintético por arcilla para la impermeabilización de estanques solares. Esto se da porque en los resultados obtenidos de la investigación experimental muestran que el coeficiente de permeabilidad vertical en la arcilla es muy pequeño, siendo este del orden de 2.3×10^{-9} m / s .

6.2 RECOMENDACIONES.

- a) Tratar de experimentar con distintas arcillas y ver cual se adapta mejor para fines prácticos y económicos.
- b) Para poder encontrar una mejor aproximación de los resultados obtenidos, con los resultados de la experimentación se recomienda medir por otros métodos la conductividad térmica de la arcilla, ya que se midió usando los métodos tradicionales, como es de considerar a la arcilla como un cuerpo sólido continuo.
- c) Otra recomendación es de tener una cuantificación del coeficiente de permeabilidad vertical para periodos largos, ya que se encontró una permeabilidad muy baja, entonces es recomendable verificar si este valor no cambia para periodos muy grandes.
- d) Tratar de resolver la ecuación por métodos numéricos, para con esta solución poder checar los datos obtenidos con la solución analítica.

7. AGRADECIMIENTOS

Mi más sincero agradecimiento al INSTITUTO DE INGENIERIA de la UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO y al personal que ahí labora, por haberme dado las facilidades para poder desarrollar este trabajo de tesis.

De manera muy especial quiero expresar un agradecimiento al M en I. FELIPE MUNOS GUTIERREZ no solo por la dirección de este trabajo sino por su incondicional apoyo, compañerismo y apreciable amistad.

Asimismo, deseo expresar mi agradecimiento por sus valiosas observaciones a los siguientes catastráticos:

M en C. AUGUSTO MANUEL CARRERA.
Dr. MARCO ANTONIO MARTINEZ NEGRETE.
M en C. ALEJANDRO SALCIDO GONZALEZ.
Dr. ANSEL MANZUR GUZMAN.

También, deseo expresar mi más sincero agradecimiento a ANA CRISTINA y LUIS GERARDO por su valiosa ayuda, tanto en las traducciones como en la realización de este trabajo de tesis y por sus valiosos comentarios que contribuyeron al enriquecimiento de este trabajo.

REFERENCIAS

- 1) Almanza, E. Muñoz, F. y Lara, J. " Estanques Solares " publicación de las series del Instituto de Ingeniería, U.N.A.M., No 476, 1984.
- 2) Fernandez, J.L. " Introducción al Estudio de los Sistemas Solares Activos " publicación de las series del Instituto de Ingeniería, U.N.A.M., No D-26, 1987.
- 3) Rabl, A and Nielsen, C.E. Solar pond for space heating , Solar Energy 17, 1, 1975.
- 4) Weinberger, M. The physics of de solar pond. Solar Energy 8, 2, 1975.
- 5) Hull, J.R and Nielsen, C.E " Solar Ponds ". Reviews of renewable Energy Resources, vol 3. Wiley Eastern, Ltd, India, 1986.
- 6) Almanza, R. Martínez, A y Segura, G. Determinación de conductividades térmicas de arcillas con salinidades de diferente concentración. Mediciones a largo plazo de las permeabilidades en el prototipo de laboratorio. Informe interno del Instituto de Ingeniería, U.N.A.M., 1983.
- 7) Tabor, H. " Solar ponds " Solar Energy 7, 189, 1963.
- 8) Lara, J " Modelo Teórico de un Estanque Solar no Convectivo Aplicable a la Republica Mexicana " Tesis Profesional, Facultad de Química, U.N.A.M., 1983.

- 9) Bird, R.B. Stewart, E. and Lightfoot, E.N. " Transport Phenomena " John Wiley and Sons Inc. N.Y. 1959.
- 10) Geankoplis, Ch. J., " Procesos de Transporte y Operaciones Unitarias " CECSA, Mexico 1982.
- 11) Carslaw, H.S. and Jaeger, J.A. " Conduction of Heat in Solids " p 18, Oxford University press. 1959.
- 12) Manrique, J.A. " Energia Solar ", Harla, Mexico 1984.
- 13) Philip, J.R. and de Vries, D.A., Moisture movement in porous materials under temperature gradients, Transactions, American Geophysical Union 38, pp 222-233. EUA 1957.
- 14) Edlefsen, N.E. and Anderson, A.B.C., The thermodynamics of soil moisture. Hilgardia, 18, p 260. 1943.
- 15) Philip, J.R. and de Vries, D.A. Moisture movement in porous material under temperature gradient, Transaction American Geophysical Union, 38, p 225. 1957.
- 16) De Vries, D.A. Simultaneous transfer of heat and moisture in porous media. Transactions, American Geophysical Union 39, pp 909-916. 1958.
- 17) Edlefsen, N.E. and Anderson, A.B.C. The thermodynamics of soil moisture. Hilgardia, 18, pp 235-238. 1943.

- 12) Almanza, R., Martínez, A. y Segura, G. Determinación de conductividades térmicas de arcillas con salinidades de diferente concentración. Medición a largo plazo de las permeabilidades en el prototipo de laboratorio, informe interno del Instituto de Ingeniería, U.N.A.M., pp 18-113 1987.
- 19) McCormack, P. D. and Lawrence, C., "Physical Fluid Dynamics " 110-116. Academic Press, N.Y., 1961.
- 20) Zemansky, M. W. and Dittman, R. H., " Heat and Thermodynamics " International Student N.Y., 1981.
- 21) Edwardt, O. and Young, R. L. " Elements of Thermodynamics and heat transfer", McGraw-Hill Book Company Inc. N.Y., 1960.
- 22) Almanza, R., Propiedades térmicas de impermeabilizantes para estanques solares, publicación interna del Instituto de Ingeniería, U.N.A.M., oct 1985
- 23) Farlow, S. J., "Partial Differential Equations for Scientist and engineers". John Wiley and Sons. N.Y., 1982.
- 24) Murray, R. S., "Trasformadas de Laplace" McGraw-Hill, México, 1961
- 25) Ayres, F., " Ecuaciones diferenciales " McGraw-Hill, México. 1985

- 26) Elsgoliz,L." Ecuaciones Diferenciales y Calculo Variacional ". Mir tercera edición Moscú, 1983.
- 27) Weinberger,H.F.. "Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales", Reverte-S.A Barcelona, 1980.
- 28) Duikow,A.V.. " Analytical Heat Diffusion Theory " Academic Press,pp 662-663. N.Y. 1960
- 29) Gódnov,S.K.. " Ecuaciones de la Física Matemática ". Ed.Mir Moscú, 1978
- 30) Tijonov,A.V y Samarsky,A.. " Ecuaciones de la Física Matemática ". Ed.Mir Moscú, 1960.
- 31) Eorp,P.W. and McGregor,J.L.. " Elementary Differential Equations ". Holden-Day San Francisco, Ca, 1966
- 32) Esteman,H.. " Partial Differential Equations of Mathematical Physics ". Dover N.Y, 1944.
- 33) Sommerfeld,A.. "Partial differential equations in physics " Academic Press N.Y, 1978.
- 34) McAdams,Y.H.. " Heat Transmission ".McGraw-Hill N.Y,1954.
- 35) Esheddon,I., "Elements of Partial Differential Equations", McGraw-Hill Book Company N.Y, 1967.
- 36) Irving,J. and Mulliner,N.. "Mathematics in Physics and Engineering", Academic Press sixth edition N.Y, 1967.

37) Courant, R and Hilbert, D., "Methods Mathematical Physics",
vol II Interscience Publishers N.Y. 1967.

38) Eudakh, B.M and Fomi, S.V., " Multiple integrals field theory
and series ", Ed Mir Moscow, 1980.

NOMENCLATURA

- a volumen de aire contenido, cm^3 de aire / cm^3 .
- C_p calor específico de vapor de agua a presión constante, $\text{cal g}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.
- C_L calor específico de agua líquida, $\text{cal g}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.
- C capacidad calorífica
- C_d capacidad calorífica volumétrica de mediciones porosas secas, $\text{cal cm}^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.
- D_{atm} coeficiente de difusión molecular de vapor de agua en aire, $\text{cm}^2 \text{ seg}^{-1}$ ($= 4.42 \times 10^{-4} T^{2.9} / P$)
- $D_T = D_{TL} + D_{TU}$ difusividad térmica húmeda, $\text{cm} \text{ seg}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$
- $D_{TL} = K \gamma \psi$ difusividad térmica líquida, $\text{cm}^2 \text{ seg}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$
- $D_{TU} = f D_{\text{atm}} \nu \beta h (\nabla T)_a / \rho_L \nabla T$ (con $f = s$ para $\theta_L \leq \theta_{LK}$, $f = a + a \theta_L / (s - \theta_{LK})$ para $\theta_L > \theta_{LK}$)
difusividad gaseosa térmica $\text{cm}^2 \text{ seg}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.
- $D_\theta = D_{\theta L} + D_{\theta u}$ difusividad húmeda isotérmica, $\text{cm}^2 \text{ seg}^{-1}$
- $D_\theta = K \partial \psi / \partial \theta_L$ difusividad líquida isotérmica, $\text{cm}^2 \text{ seg}^{-1}$.
- $D_{\theta u} = \alpha a D_{\text{atm}} \nu g \rho_v (\partial \psi / \partial \theta_L) / \rho R T$ difusividad de vapor isotérmica, $\text{cm}^2 \text{ seg}^{-1}$.
- E razón de vaporización, seg^{-1} .
- g aceleración de la gravedad, $\text{cm} \text{ seg}^{-2}$.

- h humedad relativa.
- j equivalente mecánico del calor erg cal⁻¹ ($= 4.18 \times 10^{-7}$)
- \hat{k} vector unitario en dirección vertical.
- K conductividad hidráulica no saturada. cm seg⁻¹
- L calor de vaporización. cal g⁻¹ ($= 555$ a 20°C)
- L₀ calor de vaporización a T₀ (temperatura de referencia). cal g⁻¹
- p presión parcial de vapor de agua. mm Hg.
- P presión total del gas. mm Hg.
- q_h flujo de calor. cal cm⁻² seg⁻¹.
- q_L flujo líquido. g cm⁻² seg⁻¹.
- q_m = q_l + q_v flujo de humedad. g cm⁻² seg⁻¹.
- q_v flujo de vapor. g cm⁻² seg⁻¹.
- R constante del gas de vapor de agua. erg g⁻¹ °C⁻¹
($= 4.615 \times 10^6$).
- S porosidad. cm³ cm⁻³.
- t tiempo. seg.
- T temperatura absoluta. °K.

- T_0 temperatura arbitraria de referencia, $^{\circ}\text{K}$.
- W diferencia de calor de humedecimiento, cal g^{-1} .
- x coordenada horizontal, cm .
- z coordenada vertical, (positiva hacia arriba y negativa hacia abajo), cm ó m .
- α factor de tortuosidad para la difusión de gases en sólidos (≈ 0.67)
- $\beta = d\rho_0/dt$, $\text{g cm}^{-3} \text{ } ^{\circ}\text{C}^{-1}$ ($\approx 1.05 \times 10^{-6}$ a $20 \text{ } ^{\circ}\text{C}$)
- γ coeficiente de tensión superficial de agua, $^{\circ}\text{C}$ ($\approx -2.09 \times 10^{-3}$ a $20 \text{ } ^{\circ}\text{C}$)
- $\theta = \theta_L + \theta_v$ humedad volumétrica total, cm^3
- θ_L contenido volumétrico líquido, cm^3/cm^3
- θ_v contenido volumétrico de vapor, cm^3 de agua precipitada / cm^3
- λ conductividad térmica, $\text{cal cm}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ } ^{\circ}\text{C}^{-1}$
- λ_a conductividad térmica del aire, $\text{cal / cm s } ^{\circ}\text{C}$
- λ^* conductividad térmica hipotética de medios porosos húmedos excluyendo vapor en movimiento, $\text{cal / cm s } ^{\circ}\text{C}$

$\nu = P / (P - p)$ factor de flujo de masa.

ρ_v densidad de vapor de agua. g / cm³

ρ_0 densidad de vapor de agua saturada. g/cm³

ρ_l densidad de agua líquida. g/cm³

ψ presión de agua. con presión atmosférica como dato. cm

$(\nabla T)_a$ promedio de gradiente de temperatura con poros llenos de aire. °C / cm

P presión total del aire húmedo adentro del cuerpo poroso. Pa.

p presión parcial del vapor adentro del cuerpo poroso. Pa.

APENDICE

Comprobación de la ecuación [5.1.20].

Para comprobar que la ecuación [5.1.20] es la solución de la ecuación diferencial [5.1.9] tiene que cumplir que al sustituir la ecuación [5.1.20] en la ecuación [5.1.10] debe cumplirse la igualdad.

Comprobación:

$$\begin{aligned}\omega(0, t) &= 0 = T_2 e^{v^2 l / 4 \alpha^2} - 1/2 e^{v^2 l / 4 \alpha^2} \operatorname{erfc}\left(\frac{-v \sqrt{t}}{2 \alpha}\right) \\ &\quad - 1/2 T_2 e^{v^2 l / 4 \alpha^2} \operatorname{erfc}\left(\frac{v \sqrt{t}}{2 \alpha}\right) \\ &= T_2 e^{v^2 l / 4 \alpha^2} - 1/2 e^{v^2 l / 4 \alpha^2} \left(1 - \operatorname{erf}\left(-\frac{v \sqrt{t}}{2 \alpha}\right)\right) - \\ &\quad - 1/2 e^{v^2 l / 4 \alpha^2} \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{v \sqrt{t}}{2 \alpha}\right)\right) \\ &= T_2 e^{v^2 l / 4 \alpha^2} - 1/2 T_2 e^{v^2 l / 4 \alpha^2} - 1/2 e^{v^2 l / 4 \alpha^2} \operatorname{erf}\left(\frac{-v \sqrt{t}}{2 \alpha}\right) \\ &\quad - 1/2 T_2 e^{v^2 l / 4 \alpha^2} + 1/2 T_2 e^{v^2 l / 4 \alpha^2} \operatorname{erf}\left(\frac{v \sqrt{t}}{2 \alpha}\right) \\ &= T_2 e^{v^2 l / 4 \alpha^2} - T_2 e^{v^2 l / 4 \alpha^2} - T_2 / 2 e^{v^2 l / 4 \alpha^2} \operatorname{erf}\left(\frac{v \sqrt{t}}{2 \alpha}\right) + \\ &\quad T_2 / 2 e^{v^2 l / 4 \alpha^2} \operatorname{erf}\left(\frac{v \sqrt{t}}{2 \alpha}\right) = 0\end{aligned}$$

ya que $\operatorname{erf}(-X) = -\operatorname{erf}(X)$.

Comprobación de la ecuación [5.1.21].

Para comprobar que la ecuación [5.1.21] es la solución de la ecuación [5.1.5] tiene que cumplir que al sustituir la ecuación [5.1.21] en la ecuación [5.1.7] debe cumplirse la igualdad.

Comprobación:

$$\begin{aligned}u(0,t) &= 0 = T_2 - T_2/2 \operatorname{erfc}\left(-\frac{y\sqrt{t}}{2\alpha}\right) - T_2/2 \operatorname{erfc}\left(\frac{y\sqrt{t}}{2\alpha}\right) \\&= T_2 - T_2/2 \left(1 - \operatorname{erf}\left(-\frac{y\sqrt{t}}{2\alpha}\right)\right) - T_2/2 \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{y\sqrt{t}}{2\alpha}\right)\right) \\&= T_2 - T_2/2 - T_2/2 - \operatorname{erf}\left(\frac{y\sqrt{t}}{2\alpha}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{y\sqrt{t}}{2\alpha}\right) = 0\end{aligned}$$

Comprobación de la ecuación [5.1.22].

Para comprobar que la ecuación [5.1.22] es la solución de la ecuación [5.1.8] tiene que cumplir que al sustituir la ecuación [5.1.22] en la ecuación [5.1.3] debe cumplirse la igualdad.

Comprobación:

$$\begin{aligned}T(0,t) &= T_1 = T_0 - 1/2 (T_0 - T_1) \operatorname{erfc}\left(-\frac{y\sqrt{t}}{2\alpha}\right) - \\&\quad - 1/2 (T_0 - T_1) \operatorname{erfc}\left(\frac{y\sqrt{t}}{2\alpha}\right) \\&= T_0 - 1/2 (T_0 - T_1) - 1/2 (T_0 - T_1) - 1/2 (T_0 - T_1) \operatorname{erf}\left(\frac{y\sqrt{t}}{2\alpha}\right) \\&\quad - 1/2 (T_0 - T_1) \operatorname{erf}\left(\frac{y\sqrt{t}}{2\alpha}\right) \\&= T_0 - T_0 + T_1 = T_1\end{aligned}$$