2ej
4

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

AJUSTE EN EL ELIPSOIDE DE REDES GEODESICAS

T E S I S

Que para obtener el Título de:

INGENIERO TOPOGRAFO Y GEODESTA

P r e s e n t a

VICTOR MANUEL MAGAÑA GONZALEZ

México, D. F. 1989

I N D I C E

Pag.

Prólogo 6

Objetivos 7

TEMA I

Introducción 9

- Trilateración Geodésica
- Descripción de la Red
- Principios Relativos a los Levantamientos Geodésicos
- Observaciones Astronómicas
- Procedimientos Técnicos para la Obtención de Control Horizontal
- Procedimientos Técnicos para la Obtención de Control Vertical
- El Desarrollo del Cálculo de Ajuste
- Conceptos Modernos de la Teoría de Estimación Estadística
- Notación Matricial y los Conceptos de Algebra Lineal Moderna
- Computadoras Digitales Programables

TEMA II

Teoría de los Errores 27

- Introducción a la Teoría de los Errores
- Estimaciones de Precisión de las Observaciones
- Dispersión e Incertidumbre
- Postulado de Gauss
- Curva de la Probabilidad
- Deducción de la Ley del Error
- Discusión de la Curva $y = k\, e^{-h^2 x^2}$
- Errores Notables y sus Probabilidades
- Residuo
- Error Medio o Error Promedio de la Muestra
- Error más Probable
- Varianza y Desviación Estandard
- Medida de Dispersión de la Muestra
- Observaciones con Pesos o (Pesado)
- Ajustes de Observaciones por Mínimos Cuadrados usando Métodos Matriciales

- Ajuste usando Ecuaciones de Observación
- Ley de Propagación de Covarianzas
- Matriz de Varianzas y Covarianzas para la Solución dada por Ajuste Paramétrico

TEMA III

Modelos Matemáticos en el Elipsoide 59

- Notación
- Fórmulas para la Reducción de las Observaciones
- Reducción de las Direcciones Horizontales
- Reducción de Angulos Horizontales
- Reducción de Distancias Zenitales
- Reducción de Azimutes Astronómicos
- Reducción de Distancias Espaciales
- Problema Directo (Hasta 100 Km.)
- Problema Inverso
- Modelos Matemáticos de las Distancias
- Diferencial Aproximada
- Modelo Matemático de Direcciones
- Desarrollo del Modelo Matemático

TEMA IV

Cálculos Preliminares 89

- Red del Levantamiento Geodésico
- Distancias Crudas, Promedios y Temperaturas
- Corrección Metereológicas a las Distancias Medidas en Campo
- Cálculo de la Corrección de Distancias por Segunda Velocidad
- Nivelación Trigonométrica
- Correcciones Geométricas
- Angulos Horizontales y su Peso
- Cálculo de Coordenadas aproximadas por el Método Directo e Inverso
- Azimutes Directos e Inversos
- Distancias Medidas y Calculadas
- Direcciones Usadas para el Ajuste

TEMA V

Ajuste Paramétrico del Levantamiento Geodésico 130

- Matriz de Diseño
- Matriz de las Diferencias

- Matriz de Pesos
- Transpuesta de Matriz de Diseño y Matriz ($A^T PA$)
- Matriz Inversa $(A^T PA)^{-1}$, Correcciones, Desviación Estandard, Varianza y Residuos
- Coordenadas ya Corregidas

TEMA VI

Conclusiones 140

- Distribución X^2

Bibliografía 143

RECONOCIMIENTOS

Necesito hablar de como se inició este trabajo, claro esta darle el reconocimiento indiscutible al M.I. Raymundo Arvizu Díaz (Titular de las Prácticas de Geodesía I y II, de esta H. Facultad), quien me dió la oportunidad para dirigir mi tésis, así como proponerme este tema, orientándome en todos los aspectos teóricos que se me fueron presentando en el desarrollo de este trabajo.

Solicité a través de una carta firmada por el Ing. Arvizu, al Departamento de Cartografía y Geodesia de la Coordinación Ejecutiva de - Exploración de **PEMEX**, datos de campo para lograr un trabajo con aplicación directa a la realidad, sobre el tema de la Geodesia.

Así mismo agradezco profundamente por este conducto al Ing. Amadeo - Radillo Díaz, jefe de la Unidad Técnica de Geodesia del Departamento arriba descrito, quien me mostró en todo momento su confianza y apoyo al expresarle mi inquietud sobre la tésis, así como su colaboración - para lograr acceso a la información de campo necesaria para este trabajo.

T E M A R I O

I.- INTRODUCCION

II.- TEORIA DE LOS AJUSTES

III.- MODELOS MATEMATICOS EN EL ELIPSOIDE

IV.- CALCULOS PRELIMINARES

V.- AJUSTE PARAMETRICO DEL LEVANTAMIENTO GEODESICO

VI.- CONCLUSIONES

P R O L O G O

Para muchos de nosotros, la geodesia es un ámbito de estudio obscuro y prohibitivo, pero esta verdad no debe aterrorizarnos, realmente la geodesia no tiene nada nuevo, sino que es una simple aplicación muy especializada y con muchas facetas de los principios básicos de las - matemáticas y de la física, ciencia en las que ya estamos familiari - zados.

En la práctica la geodesia utiliza los principios de las matemáticas, de la astronomía y de la física aplicándolos dentro de los límites - de la tecnología y de la ingeniería moderna.

P R O L O G O

Para muchos de nosotros, la geodesia es un ámbito de estudio obscuro y prohibitivo, pero esta verdad no debe aterrorizarnos, realmente la geodesia no tiene nada nuevo, sino que es una simple aplicación muy especializada y con muchas facetas de los principios básicos de las matemáticas y de la física, ciencia en las que ya estamos familiarizados.

En la práctica la geodesia utiliza los principios de las matemáticas, de la astronomía y de la física aplicándolos dentro de los límites de la tecnología y de la ingeniería moderna.

O B J E T I V O S

Uno de los objetivos es mostrar en una forma condensada todos los conocimientos adquiridos en el transcurso de esta carrera con respecto a la Geodesia y sus ciencias anexas como: Ajustes, Teoría de los Errores aplicadas al ajuste de un levantamiento geodésico en el elipsoide.

Tomando en cuenta que no existen textos en español sobre la resolución de este tipo de problemas, se propone como un trabajo de consulta a manera que motive a toda persona relacionada a esta carrera a que se interese más por la Geodesia, ya que en México se le ha mostrado poco interés. Se espera que este trabajo sea de utilidad para otros trabajos relacionados a la Geodesia dentro de las dependencias gubernamentales.

Se quiere con esto enfatizar la importancia del área de la computación para este tipo de problemas geodésicos, ya que sin ésta, sería casi imposible obtener los cálculos matriciales y la inversión de matrices, para el mismo fin. Se espera se comprenda el objetivo perseguido y que se cuente con la aceptación de todos ustedes, los interesados, en este tipo de problemas.

TEMA I

I N T R O D U C C I O N

La finalidad de este trabajo es la presentación del cálculo del ajuste de un levantamiento geodésico, aplicando estrictamente las ecuaciones paramétricas y utilizando los modelos matemáticos y fórmulas necesarias para el cálculo de latitudes, longitudes y azimutes directos e inversos para formar las ecuaciones normales del ajuste.

El tema central, es el cálculo del levantamiento geodésico, donde se muestran los cálculos correspondientes para formar las matrices, las cuales se desarrollan con la aplicación de la computación para llevar a cabo el cálculo y ajustar el levantamiento geodésico.

Se puede mencionar que en México este tipo de trabajo es insipiente ya que instituciones públicas como **PEMEX** y **EL INEGI**, por mencionar algunas, son las que han desarrollado algunos trabajos de conocida importancia pública.

Si tomamos en cuenta que anteriormente este tipo de trabajos eran parte de estudios más avanzados, ahora la implantación en universidades constituye una necesidad debido al adelanto tecnológico existente. Como vemos esta ciencia y su aplicación en orden práctico nos es útil para otros trabajos base de cartografía y fotogrametría.

LA TRILATERACION GEODESICA: Durante un largo tiempo no fue posible desarrollarla por no contarse con las técnicas de instrumentación de campo y los modelos matemáticos de cálculo adecuados, hoy con las nuevas tecnologías ya podemos realizarlos.

El propósito de este trabajo es mostrar la ayuda que los instrumentos electrónicos de medición de distancias y las computadoras prestan al desarrollo de los trabajos geodésicos, así mismo exponer la bondad del método de cálculo y compensación por trilateración del cuadrilátero con diagonales.

DESCRIPCION DE LA RED: Está localizada al norte del país, en el estado de Chihuahua, esta red consta de dos vértices de llegada y dos de salida, estos son conocidos, tenemos como coordenadas por calcular o vértices desconocidos, cuatro.
Los vértices conocidos o fijos son: **Dos, Lamentos, Rayo y Goneño**; los desconocidos son: **Magdalena, 24, Venado y Lágrima.**

Se tienen distancias hasta de 70 km. en diagonales. Se obtuvieron trece distancias, 24 direcciones medidas, no se midieron azimutes; las distancias zenitales si fueron medidas, todas ida y vuelta.

Los instrumentos utilizados en el levantamiento geodésico de la red geométrica (cuadrilatero con diagonales), tres figuras la conforman. Fueron teodolitos T-2 con los que se midieron los ángulos horizontales (direcciones) y las distancias zenitales del levantamiento, en la medición de los lados (distancias) se ocupó el ELECTROTAPE DM20.

El programa de cálculo está elaborado para que a partir de cuatro posiciones geodésicas conocidas (dos de salida y dos de llegada) estos son los extremos de la red, y así obtener las cuatro estaciones geodésicas desconocidas para conformar la red geodésica.

PRINCIPIOS RELATIVOS A LOS LEVANTAMIENTOS GEODESICOS.

Uno de los propósitos de la Geodesia es el de determinar la posición precisa de puntos sobre la superficie de la tierra; los procedimientos seguidos para alcanzar tal propósito pueden agruparse como siguen:

1.- Observaciones astronómicas
2.- Procedimientos técnicos para la obtención del control horizontal
3.- Procedimientos técnicos para la obtención del control vertical

Ahora examinemos estos procedimientos para los métodos con los cuales podemos conectar puntos entre sí; en la superficie de la tierra y determinar el tamaño y forma de la tierra.

OBSERVACIONES ASTRONOMICAS

Excepto para levantamientos urbanos que son de limitado alcance, es necesario referirse a un sistema de medida horizontal vinculado a la tierra. Esta referencia puede obtenerse llevando a cabo observaciones astronómicas, para obtener coordenadas astronómicas, para ésto debemos contar con la observación de una latitud y una longitud astronómicas de un punto.

Además de un azimut o dirección a otro punto del levantamiento para proporcionarle un control direccional a la red general del trabajo.

Estas observaciones astronómicas proporcionan un método para la determinación de la desviación relativa de la vertical y así determinar la figura de la tierra.

Los puntos en donde se determina la latitud, longitud y azimut astronómicos son también llamados estaciones laplace. Es de interés advertir que las observaciones astronómicas proporcionan solamente relaciones angulares y en consecuencia, ellas pueden suministrar información con respecto a la forma de la tierra pero no con respecto a su dimensión.

PROCEDIMIENTOS TECNICOS PARA LA OBTENCION DE CONTROL HORIZONTAL.

La ciencia de la Geodesia implica, no solamente la determinación de la figura de la tierra, sino también la ejecución de medidas sobre la superficie terrestre , para establecer las relaciones de posición de los accidentes topográficos los cuales pueden estar referidos al plano, y los geodésicos para obtener la posición relativa de puntos a grandes - zonas geográficas, utilizamos levantamientos geodésicos requiriendo se tome en cuenta la curvatura terrestre.

La extensión del control horizontal puede llevarse a cabo por diversas maneras, pero el procedimiento básico es como sigue: Se comienza por un punto o puntos de posición conocida y desde ellos se miden distancias y ángulos a los nuevos puntos, cuyas posiciones se calculan por medio de los valores medidos. Los métodos más comunes incluyen poligonales, triangulaciones y trilateraciones.

PROCEDIMIENTOS TECNICOS PARA LA OBTENCION DE CONTROL VERTICAL.

También llamada Nivelación Geodésica, es por la cual se nos permite -

determinar las diferencias de nivel entre puntos de la superficie terrestre.

Los métodos e instrumentos son más precisos a los que se utilizan en la nivelación ordinaria, ésta nivelación se dispone perpendicularmente al geoide y la línea resultante seguirá la curvatura terrestre y por eso se le considera nivelación geodésica.

EL DESARROLLO DEL CALCULO DE AJUSTE

En el siglo XVII se vió nacer esta ciencia, fueron sus inventores simultáneos pero separadamente, los matemáticos Friederich Gauss (a la edad de 18 años) y Adrie Marie Legendre.

En el libro de Gauss "Theorica Matus Corporum Colesestium" publicada en 1809 se encuentra el párrafo siguiente:
"Si fueran absolutamente correctas las observaciones astronómicas y las diversas cantidades en las que se basan las determinaciones orbitales, también serían estrictamente exactos los parámetrosde una, dos, tres o cuatro observaciones (según las leyes de Keppler, para el movimiento, ciertamente), y por lo tanto, aunque se usaran observaciones diferentes, los valores de los parámetros derivados deberían confirmarse, pero no "corregirse". Dado que todas nuestras observaciones no son mas que aproximaciones de la verdad, lo mismo es válido para todos los cálculos que se hacen basados en estas observaciones. Por lo tanto el principal objetivo de todo el cálculo para cuantificar un fenómeno, debe aproximarse a la verdad tanto como sea posible, ésto puede lograrse combinando un número mayor de observaciones que las absolutamente necesarias para la determinación de los parámetros desconocidos.

El problema puede emprenderse adecuadamente solo cuando se ha ganado un conocimiento aproximado de las órbitas, el cual es corregido de modo tal que satisfaga todas las observaciones de la manera mas exacta posible."

De este párrafo de Gauss obtenemos los conceptos siguientes:
A).- Los modelos matemáticos pueden ser incompletos.

B).- Las mediciones físicas son inconsistentes

C).- Todo lo que puede esperarse de cálculos basados en mediciones inconsistentes, son estimaciones de la verdad.

D).- Las mediciones redundantes reducen el efecto de las inconsistencias medidas.

E).- Deberá usarse una aproximación inicial para obtener la estimación final.

F).- Esta aproximación inicial deberá corregirse de tal modo que minimice las insconsistencias entre las mediciones (por lo que - Gauss le llamó "El Método de Mínimos Cuadrados").

Aún cuando los conceptos fundamentales tienen cerca de 200 años, el hecho de que en estadística se manejen con frecuencia grandes cantidades de datos, solo fue posible su aplicación hasta el desarrollo ó advenimiento de:

I.- <u>Conceptos Modernos de la Teoría de Estimación Estadística.</u>

Se pensó mostrar en este inciso conceptos de la teoría de estimación estadística, pero, se podría recurrir a cierta repetición ya que en el capítulo dos se esta haciendo una conceptualización de cada una de las medidas estadísticas empleadas, y a la vez - ahí mismo se muestra la forma en la que van aplicadas al ajuste, para así posteriormente obtener los resultados deseados como conclusiones positivas.

Estos conceptos son: La Dispersión e Incertidumbre, Errores Notables y sus Probabilidades, Varianza, Desviación Estandar, Propagación de Covarianzas, Matriz de Covarianzas, Factor de Varianza a Priori y a Posteriori, Coeficientes de Pesos y Varianzas.

II.-Notación Matricial y los Conceptos de Algebra Lineal Moderna.

Debemos tener muy presente este subinciso ya que es la parte medular del cálculo a tratar en este trabajo por lo que se indicarán ciertas definiciones y métodos matriciales empleados.

MATRIZ.- Es un arreglo rectangular de elementos, donde cada uno de éstos puede ser un número real, un número complejo, un polinomio, una función, un operador, etc.

El orden de la matriz está dada por el número de renglones y columnas de la misma.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

orden $m \times n$
n columnas $a_{ij}, i=1,\ldots,n$
$j=1,\ldots,m$

MULTIPLICACION DE MATRICES.- Sea la matriz $A=(a_{ij})$ $(i=1,\ldots,m; j=1,\ldots n)$ orden $m \times n$ y $B=(b_{ij})$ donde $(i=1,\ldots,n)$ y $(j=1,\ldots,p)$ orden $n \times p$ dos matrices de orden $m \times n$ y $n \times p$ respectivamente el producto AB es una matriz. $C=(c_{ij})$ dond $i=1,\ldots,m$ y $j=1,\ldots,p$ orden $m \times p$ de orden $m \times p$ cuyos elementos están dados por $C_{ij}= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

Para multiplicarse matrices debe de ser, el número de columnas de la primera debe de ser igual al número de renglones de la segunda.

También para multiplicarse dos matrices deben ser conformables, es decir número de columnas igual al número de renglones.

La multiplicación de matrices no es conmutativa.

PARTICION DE MATRICES.

Hipermatriz.- Se llama hipermatriz a un arreglo rectangular de matrices, a los elementos de una hipermatriz se les llama submatrices.

Partición de una matriz A.- Se entiende por la formación de una hiper matriz agrupando los elementos de A es submatrices.

$$A = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix}$$

Hipermatriz

MATRIZ TRANSPUESTA Y PROPIEDADES, MATRICES SIMETRICAS Y ANTISIMETRICAS

Transpuesta de una matriz.- Sea A de orden m x n "se le llama transpuesta de A" y se representa por A^t, a la matriz de orden n x m cuyos renglones son las columnas de A y cuyas columnas son los renglones de A.

Propiedades de la matriz transpuesta.

1.- $(A^t)^t = A$

2.- $(\lambda A)^t = \lambda A^t$

3.- $(A + B)^t = A^t + B^t$

4.- $(AB)^t = B^t A^t$

Matriz Simétricas .- Son matrices cuadradas para las que $A=A^t$; es decir $a_{ij}= A_{ji}$ para $\forall$ i,j

Siempre será posible obtener una matriz simétrica mediante $S=A+A^t$

Matriz Ortogonal .- Una matriz cuadrada de órden y con elementos reales es ortogonal si : $AA^t = A^tA=In$

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ

Es una función mediante a la cual a toda matriz cuadrada A se le asigna un escalar bien definido y se representa por "det (A)"

REGLA DE SARRUS.- Para determinantes de SEGUNDO Y TERCER ORDEN

<u>Segundo orden</u>

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \text{det de } A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}\,a_{22}-a_{21}a_{12}$$

<u>Tercer orden</u>

Para obtener un valor de un determinante de tercer orden, a los pro - ductos de los elementos de la diagonal principal y paralelas se restan los productos de los elementos de la diagonal secundaria y paralelas.

$$\det A \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

METODO POR COFACTORES

Menor del elemento a_{ij} se le llama menor del elemento a_{ij} de un determinante de órden "n" al determinante de orden "n-1" que se obtiene al suprimir en el determinante original el renglón i y la columna j se representa por M_{ij}

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Se quitó el renglón a_{11} y la columna

$$M_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad ; \quad M_{23} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$M_{31} \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

MATRIZ INVERSA Y SUS PROPIEDADES

Matriz Inversa .- Es una matriz cuadrada A puede existir una matriz - cuadrada A^{-1} a la cual se le llama "Inversa de A", tal que $A^{-1}A = AA^{-1} = In$

"No todas las matrices cuadradas tienen inversa

Matrices Cuadradas A	No Singulares -- Existe Inversa
	Singulares -- No Existe Inversa

Propiedades .- Sean A y B No Singulares

a).- A^{-1} es única

b).- $(A^{-1})^{-1} = A$

c).- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

d).- Sea λ un escalar distinto de 0, entonces $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$ o $\lambda^{-1} A^{-1}$

Solamente se muestra este método para obtener la inversa de una matriz, pero también existen otros como el de transformaciones elementales.

CALCULO DE LA MATRIZ INVERSA A^{-1}, POR MEDIO DE LA ADJUNTA

Matriz adjunta .- Se llama matriz adjunta de la matriz cuadrada A, "adjA" a la matriz que se obtiene de sustituir cada elemento de A^T por su cofactor correspondiente

$A = (a_{ij})$

$A^t = (a_{ji})$

$\mathrm{Adj}\ A = (A_{ji})$

fórmula para obtener la inversa A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$$

Si el determinante de A=0 indica que no tiene inversa es decir es singular.

Cuando se va a calcular la adjunta, al obtener la transpuesta se cambia de signo alternadamente

Ejemplo:

Haciendo el cambio de signo

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad = \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

III.Computadoras Digitales Programables.

Este trabajo y tantos semejantes nunca se hubieran logrado con tanto - ahorro de tiempo sin la ayuda de las computadoras, este avance tecnológico, es una herramienta primordial para cálculos topográficos y principalmente para los trabajos geodésicos, ya que por medio del sistema matricial usando computadoras se hacen ajustes de redes relativamente - grandes (3 ó más figuras), no como se hacía anteriormente figura por figura.

El principal ahorro de tiempo y trabajo del empleo de la computadora es la inversión de matrices ya que si se invirtiera una matriz de 16x16 por cualquier método de cálculo manual, nos llevaríamos aproximadamente una sola persona, alrededor de seis meses, y con el uso de la computadora se reduce a segundos o minutos de proceso y todo debido a su velocidad extremadamente alta.

Esta velocidad tan extrema va acompañada de un nivel de confiabilidad igualmente alto. un computador prácticamente nunca comete un solo error los errores casi siempre provienen de un error de programación o de - trasmisión de datos.

Una experiencia que se tuvo aquí con respecto a este tipo de errores, fue en el momento que se le pidió a la máquina que calculara la inversa de la matriz, marcaba un error de falta de capacidad de cálculo en el tipo de almacenamiento, se pensó, en que el tipo de clave - (tiempo de cómputo) era muy pequeño o que no se usaba la doble precisión, que el programa estuviera mal planteado.

Lo que nunca sucedió fue encontrar el porqué del error; y lo que se hizo fue pensar que las cantidades que formaban la matriz eran muy grandes por lo que se decidió dividir la matriz por un factor y así fué como se obtuvo la inversión de la matriz, después se volvió a dividir para obtener el resultado exacto de la matriz inversa.

La computadora utilizada fue VAX/VMS VERSION TK DIGITAL EQUIPMENT - CORPORATION del Centro de Cálculo de la Facultad de Ingeniería.

Con el correr de los años, los matemáticos y científicos generalizaron y extendieron el método original de Gauss y Legendre y así encontramos entre otros, los métodos siguientes:

AUTOR	METODO	AÑO
Gauss-Legendre	Mínimos Cuadrados	1795
Kruger	Sumatoria de Ecuaciones Normales	1905
Tobey	Método Diferencial Mínimos Cuadrados	1930
Tienstra	Mínimos cuadrados en fases	1956
Kalman	Filtro de Calman	1960
Bayes	Filtro de Bayes	1964
Schim-Schmid	Secuencial	1965
Krarup-Moritz	Colocación	1965-1972

Todos de una manera o de otra se relacionan o fundamentan en el Método original de Gauss-Legendre.

T E M A II

TEORIA DE LOS ERRORES

INTRODUCCION.- Las mediciones de los distintos observables físicos con la máxima presición posible son de fundamentalísima importancia para las diferentes ramas de las ciencias físicas. Gracias a ellas y al empleo de las matemáticas a dichas ramas de las ciencias se les llama, con un poco de optimismo, ciencias exactas.

El resultado de una medición de una magnitud física es un número - que depende de:

a) Lo que se mide (la magnitud misma)
b) Del procedimiento de medida
c) El instrumento usado
d) El observador
e) El medio que rodea la ejecución de la medida (temperatura, tensión, carga eléctrica, velocidad con respecto al observador, humedad relativa a la aceleración de la gravedad, etc.

Para que el número atribuido a una cantidad física tenga sentido, debe ir acompañado, explícita o implícitamente, del procedimiento seguido y de las características de los instrumentos utilizados en la obtensión de dicho número.

El medir una determinada magnitud física con verdadera exactitud por rigurosas que sean las precauciones que se tomen, todo instrumento de medida permite efectuar lecturas dentro de los límites de apreciación del mismo y no es posible construir ningún aparato de medida que pueda efectuar mediciones con errores menores que un determinado valor.

De lo anterior se infiere que el proceso de medición de las distintas cantidades observables a lo mas que podemos aspirar es a determinar, de la mejor manera posible el valor más probable, a la mejor estimación que de dicha magnitud podemos hacer teniendo en cuenta el conjunto de resultados obtenidos y a cuantificar las precisiones o - sea los límites probables de error de dicho valor que podemos también determinar de las medidas correspondientes.

De lo expuesto precedentemente tenemos que, cada vez que se efectua el conjunto de operaciones requeridas para medir una determinada - magnitud, se obtendrá un número que solamenteen forma aproximada, representa la medida buscada, por lo tanto, cada resultado de una - medición está afectada por un cierto error.

La Teoría de los Errores estudia fundamentalmente el tratamiento matemático que debe efectuarse con los diferentes resultados obtenidos al medir una determinada magnitud, para determinar la mejor aproximación de la medida buscada y su límite probable de error.

Para hallar una buena estimación es necesario hacer múltiples medidas y de ellas deducir el valor mas probable. Debemos recalcar que cada una de las diferentes medidas de una determinada cantidad debe ser - efectuada en condiciones físicas similares, es decir por el mismo observador en igualdad de condiciones, utilizando los mismos instrumentos y procedimientos de medida, en caso contrario el conjunto que se obtenga no podrá ser considerado como una muestra representativa del universo de medidas correspondientes a la calidad física considerada.

El Proceso Inverso sería.- Fijando el intervalo de error probable de una cierta magnitud, determinar el número mínimo de mediciones para alcanzarlo dentro, por supuesto, de un margen de error, este problema es de fundamental importancia para la programación del trabajo.

ESTIMACIONES DE PRECISION DE LAS OBSERVACIONES

Es una regla bien establecida tanto en la investigación científica como en la práctica diaria, que la primera vez, que se hacen observaciones de una cantidad física el valor obtenido está lejos de ser el verdadero de tal cantidad física. A medida que las observaciones de la misma cantidad física son repetidas a la vez que se refina la técnica y el método para su obtención, los resultados en promedio se van aproximando gradual y asíntoticamente a lo que podemos aceptar con alguna confianza que es la estimación adecuada del valor verdadero de la cantidad física de interés. Para determinar la mejor estimación del valor verdadero, las observaciones son sometidas, a un proceso de correcciones. Este proceso de correcciones parte del hecho de que las observaciones de una misma cantidad física que tienen dispersión lo que motiva que nuestros resultados tengan cierta incertidumbre, es decir que "las observaciones no son todas iguales, los causantes de la dispersión se conocen en general como errores." En consecuencia un error está definido como la diferencia entre el valor observado o calculado y el valor verdadero.

Si se conoce la naturaleza de estos errores se puede intentar aplicar ciertas correciones para eliminarlos y reducir la incertidumbre entre los resultados.

Clasificación de los errores:

a).- Ilegítimos o Equivocaciones

b).- Sistemáticos o Instrumentales

c).- Accidentales, Aleatorios, Causados por el azar.

Dispersión e Incertidumbre

Se esta ya en posibilidad de indicar que el término error significa una desviación del resultado con respecto al valor verdadero. Normalmente no se conoce este valor verdadero, por lo que sólo se pueden tener estimaciones de los errores inherentes a las observaciones sin embargo, al principio se dijo que los errores son los causantes de la dispersión de las observaciones; ésta dispersión motiva que los resultados definitivos de campo o de cálculo se determinen con cierto grado de incertidumbre.

Este trabajo ignorará los problemas de los errores sistemáticos y se concentrará en el estudio de los errores accidentales, causantes de la incertidumbre en los resultados.

Se tratará de enfrentar el problema de extraer de observaciones y/o cálculos las estimaciones más razonables para los valores verdaderos de cantidades físicas de interés; las estimaciones para los errores accidentales, el efecto que estos errores tienen con los resultados considerados "definitivos".

En teoría de los errores no sólo se requiere la determinación exactos y precisos.... también es razonable, esperar que los resultados mas consistentes sean aquellos que provengan de observaciones con errores mínimos convenientemente compensados en todo el proceso requerido para la obtención de resultados; en consecuencia, el problema de ajuste de observaciones o de resultados será parte importante de estas notas.

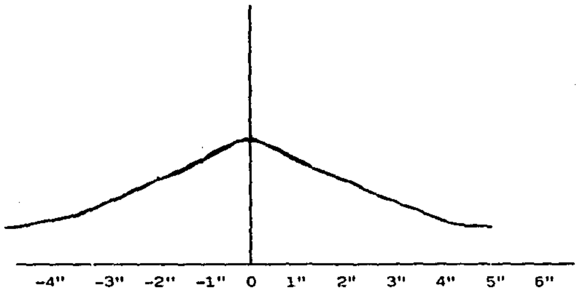
Postulado de Gauss

1).- Los pequeños errores son mas frecuentes que los errores mayores

2).- Los errores positivos y negativos de igual magnitud son igualmente probables

3).- Los errores muy grandes no se presentan

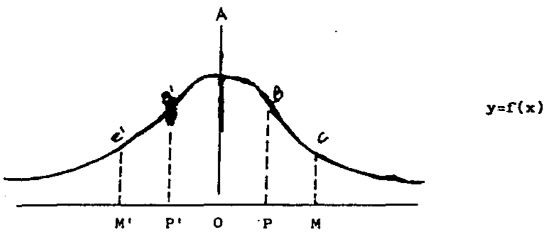
4).- Los errores son modificados por las circunstancias de otros mientras mejores sean los aparatos y mejor el ojo,etc.,Los resultados sean más precisos.



Curva de la Probabilidad

En observaciones precisas, la probabilidad de un pequeño error es mayor que la de uno grande. Los errores positivos y negativos son igualmente probables, y la probabilidad de los errores grandes es cero. Las palabras muy grandes sean algo bajas cuando se usan en forma general aunque en un caso particular el significado es claro, así como un teodolito de un segundo de aproximación, un error de 20" es muy grande, con un tránsito de un minuto de aproximación un error de 5', también sería muy grande. Realmente en cada clase de mediciones hay un límite "l" tal como los errores positivos están incluídos entre cero y más "l". Puesto que la probabilidad del error estará representado por una - ecuación **y= f(x)** y estará determinada si la forma de función de **x** se puede encontrar si, entonces **"y"** se toma como una ordenada y x como absisa.

Esta puede ser considerada como una ecuación de la curva la cual debe de ser de una forma tal que concuerde con los postulados antes establecidos; nominalmente su ordenada máxima OA debe corresponder al error cero, la curva debe de ser simétrica con respecto al eje "y" puesto - que los errores positivos y negativos de igual magnitud son igualmente probables; a medida que **x** aumenta numéricamente, el valor de "y" debe disminuir cuando "x" llega a ser muy grande y=O



La figura representa tal curva **OP** y **OM** siendo errores **PB** y **MC** sus respectivas probabilidades además, puesto que diferentes mediciones tienen diferentes grados de precisión, cada clase de observaciones tendrá una curva propia diferente de las demás. Esta curva se llama curva de la -

probabilidad, con objeto de determinar su ecuación, es necesario considerar que "y" es una función contínua de x, esto evidentemente, es lícito, puesto que a medida que aumenta la precisión de las observaciones los valores de x están mas cercanos entre sí. El requisito establecido por el tercer postulado que "y" debe de ser cero, para todos los valores de "x" mayores $\pm$ límite "l" aparentemente es un obstáculo ya que es imposible determinar una función contínua de "x" la cual sea cero para x = $\pm$ "l" ytambién sea cero para todos los valores de "x" de $\pm$ l hasta $\pm\infty$ pero puesto que el límite "l" nunca puede ser asignado con precisión lo mejor será extender el límite hasta - $\pm\infty$ y determinar la curva en una forma tal que el valor de "y" aunque no sea cero para valores grandes de "x" será tan pequeño que casi sea despreciable. La ecuación de la curva de la probabilidad será la expresión matemática de la ley de la probabilidad de los errores de una observación.

Deducción de la Ley del Error

Esta demostración de la Ley del Error (Ec. de la Curva de la Probabilidad) se debe a Gauss y está basada en el siguiente postulado debido al mismo matemático y que él dedujo de la experiencia.

El valor más probable de una cantidad, la cual ha sido obtenida por observación directa y repetida, es el promedio aritmético de todas las medidas. El promedio aritmético siempre ha sido aceptado y usado, como la mejor regla para cambiar observaciones directas de igual precisión en una sola. Esta aceptación universal puede considerarse como suficiente para justificar el postulado que da el valor más probable (**EL VALOR MAS PROBABLE DE UNA SERIE DE SUCESOS**). Es ese que tiene la máxima probabilidad matemática, pues como dijo Laplace: La teoría de la probabilidad no es nada, sino, sentido común reducido a cálculos. Si las observaciones se reducen a solo dos en número el promedio aritmético es indudablemente el valor más probable y para un número mayor, la humanidad, desde la mas remota antiguedad así lo ha considerado.

Se dice que los errores y su probabilidades correspondientes son independientes de los errores y probabilidades correspondientes de los otros errores.

Haciendo todos los cálculos de residuos, errores, sus derivadas y logaritmos a donde se llega a:

$$y = k\, e^{\frac{cx^2}{2}}$$

como no cumple con los postulados de Gauss que dice que al error grande probabilidad pequeña y viceversa.

La constante c debe ser esencialmente negativa puesto que la probabilidad "y" disminuye cuando x auamenta y finalmente sustituyendo $\frac{c}{2}=h^2$

tenemos $y= k\ e^{\frac{-cx^2}{2}} = \frac{k}{e^{\frac{cx^2}{2}}} \quad \therefore \quad \frac{c}{2} = h^2$

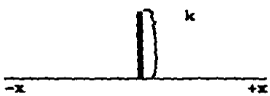
entonces:

$$y= k\ e^{-h^2x^2}$$

La cual en la curva de la probabilidad o sea la ecuación que expresa la Ley de la Probabilidad de los Errores de Observación.

Discusión de la Curva $y=k\ e^{-h^2x^2}$

Puesto que valores positivos, negativos de x que sean númericamente iguales dan valores iguales para "y", la curva es simétrica con respecto al eje de las y. El valor máximo de "y" es cuando x=0 esto es, y=k ;k por lo tanto, es probabilidad del error 0



$$y=k\ e^{-h^2x^2} = \frac{k}{e^{h^2x^2}}$$

El valor máximo de y=k

De otra manera derivando $\frac{dy}{dx} = -2h^2\ x\ k\ e^{-h^2x^2} = 0$

este puede ser cero

a medida que x aumenta el valor numérico; "y" disminuye y cuando $x=\infty$ $y=0$.

El valor de la primera derivada es $y = -2h^2\, x\, k\, e^{-hx^2} = 0$ la cual se reduce a cero cuando $x=0$ y cuando $x=\pm\infty$, lo cual indica que la curva en horizontal en el origen y en el infinito, esto es el eje de las x es una asintota haciendo la segunda derivada.

$$\frac{d^2y}{d\,x} = -2h^2\, k\, e^{-h^2x^2} + 4h^4x^2\, k\, e^{-h^2x^2}$$

sacando un elemento común

$$= -2h^2\, k\, e^{-h^2x^2}\ (1-2h^2x^2) = 0$$

$$1-2h^2x^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{2h^2} \quad \therefore \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}\ h}$$

esto nos da un punto de inflexión

Para determinar el valor del parámetro k partiendo de su deducción correspondiente entre derivadas e integrales tenemos su valor que es

$$k = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$$

en consecuencia la ecuación de la curva de la probabilidad será

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2x^2}$$

Ley del comportamiento de los errores accidentales.

El error medio cuadrático está en función de la determinación del parámetro h de una observación, todo ésto basado en integrales y tenemos como resultado

$$h = \frac{1}{\sqrt{2E}}$$

Donde E es el Error Medio Cuadrático

Errores Notables y sus Probabilidades

El Error 50% o Error Probable (e). Donde e=0.6745E. para un grupo de observaciones, el error probable o 50% es un error de tal medida, que hay tantos errores mayores, como errores menores que él.

En otras palabras para una sola observación, la probabilidad es un medio que el error sea mayor o menor que el error probable.

El Error 68% o Error Medio Cuadrático (E). También desviación estandar de la tabla de probabilidades se puede calcular la probabilidad del error medio cuadrático.

$$e = 0.6745\ E \quad \therefore\ E = \frac{e}{.6745} \quad \therefore\ \frac{x}{e} = \frac{\frac{e}{.6745}}{\frac{e}{1}} = \frac{e}{.6745e} = \frac{1}{0.6745}$$

$$= 1.4825 \qquad P = 6822$$

Esto significa que el área comprendida entre la curva de probabilidad el eje de las x y las coordenadas cuyas absisas son $\pm$ EMC, es aproximadamente 68%del área total. También significa que para cualquier observación única tenga un error menor que $\pm$ E

que el 68% de todos los errores se encuentran entre $\pm$ E.

El Error 90% ó E_{90} . Es este un error dentro del cual el 90% de los errores de un grupo de observaciones deberán teóricamente estar comprendidos. Es completamente popular para los topógrafos como un medio de expresar la precisión

$$\frac{x}{e} = 2.24 \qquad P = .90$$

$$x = 2.44\ e = 2.44(0.6745\ E) = 1.6457\ E$$

$$E_{90\%} = 1.6457\ E$$

Haciendo uso de la tabla de probabilidades podemos demostrar que – $E_{90\%} = 1.6457\ E$

<u>Error 95% ó E_{95}</u> . Es uno elegido como tolerancia en muchas ocasiones

$$\frac{x}{e} = 2.9 \quad P=0.95$$

$$x = 2.9\ e = 2.9(.6745) = 1.96\ E \quad \therefore \quad E_{95} = 1.96\ E$$

<u>Error 99.9% ó $E_{99.9}$</u> .Es el error que incluye casi todos los errores posibles a ese que 99.9% de probabilidad y que comprende a

$$\frac{x}{e} = 4.87 \quad P=.999$$

$$x = 4.87\ (.6745) = 3.29\ E$$

Desde luego este es el error máximo admisible. Así de errores que excedan de 3.29 E no se pueden aceptar y las observaciones correspondientes deben deshecharse.

RESIDUO.- El residuo (r_i) es toda desviación de una observación de la muestra (l_i), con respecto a la media de la muestra (M):

$r_i = l_i - M$

Como puede observarse los residuos se define en forma única y por lo tanto pueden considerarse como errores.
Los residuos con signo contrario se llaman correcciones puesto que - $M \doteq \mu$ entonces:
$r_i = l_i - M \doteq \delta i = x_i - \mu$ δi=Son las desviaciones.

Dado que las desviaciones (δi), son las mejores estimaciones para - los errores (E) entonces podemos afirmar que en la práctica los residuos (r_i), son las mejores estimaciones para los errores (E_i).

Error Medio o Error promedio de la Muestra. El error medio (E_M) de la muestra está dado por la suma de los valores absolutos de los residuos dividido entre el número de ellos menos uno.

$$E_M = \frac{1}{N-1} \sum_{i-1}^{N} \left[r_i\right] = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (l_i - M)$$

aquí también $E_M \doteq E$

Error más Probable.- El error mas probable (E_p) de las muestras es - aquel error para el cual

$$P \left(\left[r_i\right] < E_p \right) = P \left(\left[r_i\right] > E_p \right) = 0.50$$

Este error se puede obtener si se construye la función de probable dis tribución de los r_i de la muestra tomando aquel valor de r_i para el cual P (r_i)=0.50

Varianza y Desviación Estandard.- Un parámetro más fácil de usar analíticamente es más apropiado para medir la dispersión de las observaciones con respecto a la media, ésta es la desviación estandard (δ).

LA VARIANZA (δ^2) : Se define como el límite del promedio del cuadrado de las desviaciones con respecto a la media

$$\delta^2 = \lim_{N \to \infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \right) \mu^2$$

LA DESVIACION ESTANDARD (δ) : Es la raíz cuadrada de la varianza:
Es decir es la raíz media cuadrática de las observaciones esto es, la raíz cuadrada del promedio del cuadrado de las desviaciones.

De esto modo podemos afirmar que δ es una medida de la incertidumbre en el resultado debido a las fluctuaciones de las observaciones.

X = Valor verdadero de una observación
X_i = Cualquier valor de una observación
μ = Media

Medida de Dispersión en la Muestra:
Existen diversos parámetros para estimar la dispersión de las observaciones con respecto a la media de una muestra de observaciones:Las más comunes son:

VARIANZA DE LA MUESTRA.- La varianza de la muestra S^2 esta definida por el número real dado por:

$$S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (l_i - M)^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} r_i^{\,2}$$

Donde (N-1) son los grados de libertad que quedan después de determinar M con N observaciones. Esto se puede demostrar objetivamente, sí reconocemos que si se tuviera una muestra de una sola observación la media de tal muestra sería la misma observación así mismo el correspondiente valor de S^2 sería igual a cero. En consecuencia, en la práctica se requiere un número de dos observaciones para que S^2 pueda ser determinada.
Obviamente por lo dicho en el postulado básico tenemos que: $\delta^2 = S^2$; las cuales son varianza poblacional y muestral respectivamente.

DESVIACION ESTANDARD DE LA MUESTRA.- La desviación estandard, de las observaciones con respecto a la muestra, S será la raíz cuadrada de S^2 esto es:

$$S = \pm \sqrt{S^2} = \delta$$

Puede demostrarse que la desviación estandard de la muestra, el error medio y el error más probable quedarán en la siguiente relación:

$$S = 1.25 \ E_M = 1.5 \ E_P \qquad \text{ó bien} \qquad E_M = 0.805 \ ; \quad E_P = 0.675$$

E_P = Error más Probable

E_M = Error Medio

OBSERVACIONES CON PESOS O (PESADO)

El peso de una observación i (se define por)

$$\frac{P_o}{P_i} = \frac{\delta_i^2}{\delta_o^2}$$

donde P_o es el peso de una observación típica, frecuentemente es conveniente escoger $P_o=1$; δ_i^2 es la varianza de la observación típica es el caso de que $P_o=1$, entonces δ_o^2 se convierte en la varianza de un- peso unitario.

δ_i^2 es la varianza de una observación independiente en el caso de - que se haya escogido un peso unitario para una observación típico, el peso para otra observación i, será $P_i = \delta_o^2 \frac{1}{\delta_i^2}$

de la relación se deduce que puede ser escrito como se muestra

$$P = \delta_o^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\delta_1^2} & & \\ & \frac{1}{\delta_2^2} & 0 \\ 0 & & \frac{1}{\delta_i^2} \end{bmatrix}$$

en notación matricial $P = K \; \Sigma_L^{-1}$

Debido a que las observaciones son consideradas como no-correlacionadas. La matriz ΣL de varianza-covarianza de las cantidades observadas es una diagonal, aP se le denomina como la matriz de pesos en forma más general la inversa de una matriz varianza-covarianza multiplicada por un escalar arbitrario es una matriz de pesos, en la literatura usada δi se refiere usualmente a la desviación estandard (o error standard) correspondiente a una observación individual.

Para calcular el peso de las distancias medidas en el levantamiento, fue calculado mediante la siguiente fórmula:

$$\delta S^2 = a^2 + b^2 + S^2$$

donde:

a = 0.03 m

b = 8 PPM

S = distancia inclinada en metros.

AJUSTES DE OBSERVACIONES POR MINIMOS CUADRADOS USANDO METODOS MATRICIALES .

$$a_1x + b_1y + c_1z - M_1=V_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z - M_2=V_2$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_nx \quad b_ny \quad c_nz - M_n=V_n$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}$$

$$AX - L = V$$

La Expresión Matricial para el principio de los Mínimos Cuadrados cuando todas las ecuaciones de observación son de Peso Unitario.

$$V^T\ V=\text{Mínimo} \qquad (1)$$

$$\begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \cdots & V_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = V_1^2 + V_2^2 + \ldots V_n^2 = \text{Mínimo}$$

cuando las observaciones son de pesos diferentes dicha expresión toma la forma:

$$V^T PV = \text{mínimo} \qquad (2)$$

Los pesos es una matriz diagonal o sea un vector

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 \end{bmatrix}$$

$$V^T PV = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \cdots & V_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & P_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \\ V_n \end{bmatrix}$$

$$X^2 = V^T V = P_1 V_1^{\;2} + P_2 V_2^{\;2} + \cdots + P_n V_n^{\;2} = \text{mínimo}$$

En las expresiones 1 y 2, V es el vector columna de n residuos con dimensión nx1, V^T es la transpuesta de V, con dimensiones 1xn, y P es una matriz cuadrada diagonal, la cual está integrada por los pesos, con dimensiones nxn siendo n el número de observaciones o mediciones.

AJUSTE USANDO ECUACIONES DE OBSERVACION

Antes de todo debemos desarrollar el algebra matricial necesaria para la resolución de este problema.

La expresión matricial para un conjunto de ecuaciones de observación está dada como sigue:

si hay n observaciones y u parámetros desconocidos o incognitas entonces:

$$V = AX - L \quad (3)$$

en la cual V es el vector columna de los residos (n), con dimensiones nx1 ; X es el vector columna de los parámetros desconocidos con dimensiones ux1 ; A es la matriz de los coeficientes, de dimensiones nxu y N es el vector columna de los términos constantes de dimensiones nx1.

En la ecuación (3) los coeficientes de los residuos se suponen que todos son unitarios. Este es el caso general en el ajuste de medidas geodésicas generales por medio de ecuaciones de observación, tomando el caso general de observaciones con pesos diferentes, el valor V de la ecuación (3) se sustituye en la ecuación (2) lo que se traduce en:

$$V = AX - L \quad (3)$$

$$V^T PV = \text{mínimo} \quad (2)$$

$$u = (AX-L)^T \quad P(AX-L) = \text{mínimo} \quad (4)$$

$$u = (A^T X^T - L^T) \quad P(AX-L) = \text{mínimo} \quad (5)$$

$$= (A^T X^T P - L^T P) \ (AX-L) = \text{mínimo}$$

$$= X^T A^T PAX - L^T PAX - X^T A^T PL + L^T PL = \text{mínimo}$$

$$P = P^T$$

$$L^T PAX = X^T A^T PL$$

$$u = X^T A^T PAX - 2X^T A^T PL + L^T PL = \text{mínimo}$$

$$\frac{du}{dx} = 2A^T PAX - 2A^T PL = 0$$

$$(A^T PA)\ X = + A^T PL$$

$$X = + \frac{A^T PL}{A^T PA}$$

$$X = + (A^T PA)^{-1} \quad (A^T PL)$$

Se obtiene el vector de incógnitas corregido

$$\hat{X} = X^o + x$$

Los residuos

$$\hat{V} = Ax - L$$

y las observaciones compensadas

$$\hat{L} = L + \hat{V}$$

LEY DE PROPAGACION DE COVARIANZAS

Las cantidades derivadas de un mismo conjunto de observaciones se correlacionan entre sí.

Para conocer estas correlaciones las cantidades derivadas no deben calcularse en forma independiente sino obtenerse simultáneamente por lo que X se convierte en el vector de incognitas $(X_1, X_2, \ldots X_m)$ denominado también muestra múltiple derivada en contraposición al vector de observaciones (observables) L, integrado por las observaciones $(l_1, l_2, \ldots l_m)$ que se conoce como la muestra múltiple original.

En este punto no es difícil imaginar que el vector X tiene también asociada una matriz de varianzas y covarianzas X.Con el propósito de facilitar su derivación convengamos en que X está integrado por las cantidades X_1, X_2 relacionadas explícita y linealmente con las observaciones l_1, l_2; con desviaciones estandard Sl_1, Sl_2 y covarianza Sl_1, Sl_2 es decir:

$$X_1 = b_{11}\ l_1 + b_{12}\ l_2$$

$$X_2 = b_{21}\ l_1 + b_{22}\ l_2$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$$

esto es:

$X = B\ L$ modelo lineal

donde B es conocida como matriz coeficiente o matriz de diseño

En este caso general m incognitas y n observaciones tenemos:

$$X_1 = f_1\ (l_1,\ l_2,\ \dots\ l_n)$$

$$X_2 = f_2\ (l_1, l_2,\ \dots\ l_n)$$

$$\vdots$$

$$X_n = f_m\ (l_1,\ l_2,\ \dots\ l_n)\ ;$$

n = Número de observaciones

m = Número de incógnitas

matricialmente las ecuaciones anteriores nos quedan

$$X = F\ (L)$$

donde F simboliza a los modelos matemáticos que dan las relaciones funcionales entre el vector de incógnitas X y el vector de observaciones L

$$\underset{mx_1}{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} \quad ; \quad \underset{mx_1}{F} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} \quad ; \quad \underset{nx_1}{L} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}$$

El vector de observables L al estar considerado como muestra múltiple tiene asociada una matriz de varianzas y covarianzas ΣL con elementos tal como se indican a continuación

$$\underset{n \times n}{\Sigma L} = \begin{bmatrix} s^2 l_1 & s\ l_1 l_2 & s\ l_1 l_3 & \dots & s\ l_1 l_n \\ s\ l_2 l_1 & s^2 l_2 & s\ l_2 l_3 & \dots & s l_2 l_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ s\ l_n l_1 & s\ l_n l_2 & s\ l_n l_3 & \dots & s^2 l_n \end{bmatrix}$$

En la que las covarianzas $Sl_i l_j$ serán cero si las observaciones fueran realizadas independientemente.

El problema que se revuelve es el de transformar estadísticamente - una muestra primaria L a otra X y asociada a L tenemos ΣL que debe transformarse a ΣL, esta transformación se lleva a cabo:

$$\Sigma X = B \, \Sigma L \, B^T$$

donde:

ΣX es la matriz de varianzas y covarianzas para el vector X

ΣL es la matriz de varianzas y covarianzas para el vector L

B es la matriz de diseño

B^T es la matriz transpuesta de B

La expresión anterior se conoce como la Ley de Propagación de Varianzas y Covarianzas de la matriz ΣL

a) Esta ley puede ser aplicada cuando se tienen modelos matemáticos explícitos del tipo:

$$X = F(L)$$

b) En modelos matemáticos lineales, los elementos de la matriz B están dados por los coeficientes de las observaciones de las ecuaciones de las incognitas

c) En modelos matemáticos no lineales los elementos de la matriz B estan dados por los valores obtenidos para las derivadas correspondientes:

$$B=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial l_1} & \frac{\partial f_1}{\partial l_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial l_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial l_1} & \frac{\partial f_2}{\partial l_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial l_n} \\ \frac{\partial f_m}{\partial l_1} & \frac{\partial f_m}{\partial l_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial l_n} \end{bmatrix}$$

d) La matriz ΣX proviene de ΣL y contiene las varianzas y covarianzas de X_1 , X_2 consideradas como "observaciones" que simboliza por $\Sigma\bar{X}$ la matriz que provenga de $\Sigma\bar{L}$ y que contienen las varianzas y covarianzas de las medias de las observaciones.

MATRIZ DE VARIANZAS Y COVARIANZAS PARA LA SOLUCION DADA POR AJUSTE PARAMETRICO

Como ya se ha dicho, la solución para el ajuste paramétrico está dada en general por la ecuación

$$\hat{X} = (A^T PA)^{-1} \quad A^T P\bar{L} = N^{-1} \quad A^T P\bar{L}$$

si ahora se indica por:

$$B = N^{-1} A^T P$$

y se tiene que:

$$\hat{X} = B\,\bar{L}$$

La matriz de varianzas y covarianzas $\Sigma\hat{X}$ para el vector $\Sigma\hat{X}$ se obtiene fácilmente aplicando la ley de varianzas y covarianzas.

$$\Sigma\hat{X} = B \; \Sigma\bar{L}^{-1} \; B^T$$

recordando la matriz de pesos P se define como inversamente propornal a la matriz de varianzas de los valores mas probables de las observaciones.

$$P = K \; \Sigma\bar{L}^{-1} \qquad \text{donde} \quad K = \delta_o^2 \quad y \qquad \delta_o^2 = 1$$

entonces:

$$\Sigma\bar{L} = KP^{-1}$$

sustituyendo:

$$\Sigma\hat{X} = (N^{-1} \; A^T \; P) \; (K \; P^{-1}) \; (N^{-1} \; A^T \; P)^T$$

puesto que P, N son matrices simétricas, entonces:

$$P = P^T \; : \; N = N^T \; ; \quad (N^{-1})^T = N^{-1}$$

con lo que:

$$X = K \; N^{-1} \; A^T \; PP^{-1} \; P \; A \; N^{-1}$$

$$= K \; N^{-1} \; (A^T \; P \; A) \; N^{-1}$$

$$= K \; N^{-1} \; N \; N^{-1}$$

$$= K \; N^{-1}$$

$$\hat{X} = K \; N^{-1}$$

donde $N = (A^T \; P \; A)^{-1}$

$A =$ Matriz de coeficientes ó bien $\Sigma\hat{X} = K \; (A^T \; P \; A)^{-1}$

Volviendo a sustituir:

$$P = K\ \Sigma \bar{L}^{-1}$$

tenemos:

$$\Sigma \hat{X} = K\ (A^T\ K\ \Sigma \bar{L}^{-1}\ A)^{-1}$$

$$\hat{X} = K\ \frac{1}{K}\ (A^T\ \Sigma \bar{L}^{-1}\ A) \qquad \text{donde} \quad K = \delta_o^2 \quad \text{a posteriori}$$

$$\Sigma \hat{X} = A^T\ \Sigma \bar{L}^{-1}\ A$$

Con lo que se demuestra que $\Sigma \hat{X}$ no depende del factor K

El problema es que no se conoce el valor correcto de los elementos de la matriz $\Sigma \bar{L}$ .La mayoría de las veces solo se conocen los valores relativos de las varianzas y covarianzas de las observaciones que se integran en la matriz $\Sigma \bar{L}$ a través del factor de escala.

Esto significa que conocemos los valores númericos de $K \Sigma \bar{L}$ ó de la matriz de pesos $P = K\ \Sigma \bar{L}^{-1}$ pero sin conocer el valor de K por lo tanto, la expresión anterior para $\Sigma \hat{X}$ no puede emplearse.

Para obtener una estimación $\hat{K}$ del factor K, se asume que las observaciones solo tienen errores accidentales con lo que la forma cuadrática para los residuos pueden expresarse en función de :

$$\hat{V}^T\ P\ \hat{V} = (\ n-u)\ \hat{K}$$

esto es:

$$\hat{K} = \frac{\hat{V}^T\ \ P\ \hat{V}}{(n-u)}$$

donde (n–u) es el número de observaciones redundantes o grados libertad que se tienen para realizar el ajuste.

Este valor debe ser mayor de cero si se desea un ajuste por Mínimos Cuadrados.

Usualmente a K se le conoce como el factor de varianzas a priori y $\hat{K}$ es el factor de varianza a posteriori consecuentemente, $\hat{K}$ puede usarse para dar una estimación de $\Sigma\hat{X}$

La matriz de varianzas y covarianzas, $\Sigma\hat{X}$ estimada para $\hat{X}$ se obtiene - ahora de :

$$\hat{\Sigma}\hat{X} = \hat{K} \quad N^{-1}$$

sustituyendo:

$$\hat{\Sigma}\hat{X} = \left(\frac{\hat{V}^T \; P \; \hat{V}}{(n-u)}\right) \; (A^T \; P \; A)^{-1}$$

aquí también se puede observar que el valor de ΣX no depende de K

Así mismo, sí $\hat{X}$ se usa en subsecuentes ajustes como "observaciones" se debe tener en cuenta sus respectivos pesos como sabemos, la matriz de pesos de un vector de observaciones debe ser proporcional a la inversa de su matriz de varianzas y covarianzas.

En consecuencia, la matriz de ecuaciones normales N puede usarse inmediatamente como la matriz de pesos de $\hat{X}$ ya que su inversa N^{-1} es proporcionar a $\Sigma\hat{X}$ por esta razón N^{-1} es conocida como matriz de coeficientes de pesos y la matriz cuadrada de sus elementos diagonales como coeficientes de pesos.

Los elementos del vector $\hat{X}$ se consideran no correlacionadas cuando sea diagonal la matriz N porotra parte de la expresión

$$P_1 . \; S_1{}^2 = P_2 . \; S_2{}^2 = P_3{}^2 = . \; . \; . = 1.S_o{}^2 = K$$

se deduce que K puede ser considerada como S_o^2 conocida como la varianza de peso unitario. En tal caso $K = S_o^2$ ó bien $K = \delta_o^2$

La varianza de peso unitario estimada será entonces:

$$\hat{K} = \hat{S}_o^{\,2} = \frac{\hat{V}^T \; P \; \hat{V}}{(n-u)} \quad \text{ó bien} \quad K = \hat{\delta}_o^{\,2}$$

La estimada desviación estandar de peso unitario será:

$$\hat{\delta}_2 = \hat{S}_o = \sqrt{\hat{K}} = \sqrt{\left(\frac{V^T \; P \; V}{n-u}\right)}$$

La relación $\delta_o / \hat{\delta}_o$ debe ser muy aproximada a 1 para que las varianzas y covarianzas de $\Sigma \bar{L}$ se consideran correctas.

Sí $\delta_o / \hat{\delta}_o > 1$ se dice que $\Sigma \bar{L}$ tiene valores pesimísticos.
Sí $\delta_o / \hat{\delta}_o < 1$ se dice que $\Sigma \bar{L}$ tiene valores optimísticos.

finalmente es conveniente indicar que en muchas literaturas es costumbre simbolizar $Q = N^{-1}$

por lo que: $\Sigma \hat{X} = \delta_o^{\,2} \cdot Q$ ó bien $\Sigma \hat{X} = \hat{\delta}_o \; Q$

TEMA III

MODELOS MATEMATICOS EN EL ELIPSOIDE

Nos podremos preguntar porqué en este capítulo mencionamos los modelos matemáticos, pues esto tiene como explicación que los modelos matemáticos tienen una relación directa entre las cantidades observadas y la información estadística que se nos da en las cantidades observadas.

Tenemos lo que son las cantidades convencionales o las de campo, como son: Las distancias, ángulos interiores horizontales y ángulos verticales (para la obtención de las elevaciones), así como la determinación de las ecuaciones de incógnitas.

La información estadística es todo aquello que se nos relaciona con todas las medidas de dispersión, como por ejemplo: La desviación estandar (ΣL)

Estos modelos matemáticos son ecuaciones no lineales las cuales para ser usadas en geodesia se tienen que linealizar por medio de las ecuaciones de Taylor, ya que son tratadas en forma rigurosa en el elipsoíde. Aquí no se muestran las derivadas para la linealización, solamente se muestran las ecuaciones ya linealizadas.

Por otra parte las fórmulas nos sirven para resolver problemas como para la determinación de latitud, longitud y azimutes aproximados los cuales nos sirven para que en función de las ecuaciones linealizadas podamos resolver el ajuste riguroso en el elipsoide.

N O T A C I O N

La notación será mostrada aquí por conveniencia

a, b= Semieje mayor y semieje menor respectivamente, en el elipsoide de referencia de Clarke 1866

a= 6,378206.4 m.

b= 6,356583.8 m.

e = Primera exentricidad del elipsoide de referencia

$e^2 = (a^2 - b^2) \;/\; a^2$

φ_i , λ_i = Coordenadas elipsoidales de un punto i

φ_m , λ_m = Coordenadas elipsoidales promedio de dos puntos i y j

$$\varphi_m = \frac{i + j}{2} \qquad ; \lambda_m = \frac{i + j}{2}$$

r_{ij}= Distancia espacial observada entre dos puntos i y j corregida por retracción y aplicadas ya las correcciones instrumentales.

S_{ij} = Distancia entre dos puntos i y j en la superficie del elipsoide de referencia

d_{ij} = Dirección horizontal observada en el terreno para los puntos i y el punto j

α_{ij} = Azimut geodésico en el elipsoide para el punto i y el punto j

$\mathcal{A}_{ij}$ = Azimut astronómico para puntos i y j en el terreno

R_α = Radio de curvatura de Euler en el azimut α_{ij}

$$R\alpha_{ij} = \frac{M_i \quad N_i}{M_i \operatorname{sen}^2 \alpha_{ij} + N_i \cos^2 \alpha_{ij}} \tag{3-1}$$

M_i = Radio de curvatura en el elipsoide y el plano meridiano en el punto i

$$M_i = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_i)^{3/2}} \tag{3-2}$$

M_m = Radio de curvatura promedio del meridiano

$$M_m = (M_i + M_j) / 2 \tag{3-3}$$

N_m = Radio de curvatura promedio del primer vertical

$$N_m = \frac{N_i + N_j}{2} \tag{3-4}$$

$'_{ij}$ = Distancia zenital observada en el terreno para puntos en el terreno i y j corregidos por refracción y correcciones de instrumental .

h_i = Altura del terreno de un punto i sobre el elipsoide de referencia midiéndolo a lo largo del elipsoide normal.

ξ = Deflexión de la componente vertical en el plano meridiano en un punto i .

η_i = Deflexión de la componente vertical en el primer plano vertical en el punto i .

β_{ijk} = Angulo horizontal en el terreno en un punto j para un punto i y un punto k.

$\mathfrak{z}_{ij}$ = Distancia zenital corregida por la deflexión de la deflexión en el terreno.

$(\ )^{\theta}$ = Notación de una cantidad elipsoidal.

$(\ )^{a}$ = Una cantidad aproximada.

H_j = Alturas ortrométricas de un punto j en el terreno (altura de un punto sobre el geroide)

N_j^{*} = Altura geoidal del punto j (separación entre el geoide y el -- elipsoide de referencia

FORMULAS PARA LA REDUCCION DE LAS OBSERVACIONES

En la examinación de varias reducciones de fórmulas se verá que los términos de corrección son algunas veces funciones de las posiciones para ser resuelta la cantidad que va a ser corregida.

Si la posición del punto es requerido para ser resuelto entonces las coordenadas pueden ser calculadas usando las fórmulas.

$$\varphi_j^{a} = \varphi_i + \frac{r_{ij}\cos(A_{ij})}{M_i} \qquad (3\text{-}5a)$$

Coordenadas Aproximadas

$$\varphi_m^{a} = \frac{\varphi_i + \varphi_j^{a}}{2} \qquad (3\text{-}5b)$$

$$\lambda_j^{a} = \lambda_i + \frac{r_{ij}\ \operatorname{sen}(A_{ij})}{N_m \cos\varphi_m} \qquad (3\text{-}5c)$$

Las componentes de deflexión para el control horizontal de los puntos pueden ser dados mostrando las coordenadas redefinidas.

El significado para calcular ξ_i y η_i, para cualquier punto nuevo en lo marítimo, estará disponible por Surveys and Mapping división of L.R.I.S..

Las elevaciones de los puntos antes mencionados en el elipsóide deben ser medidos si es posible y pueden ser obtenidos por la suma de alturas ortrométicas y alturas geoidales.

$$h_j = H_j + N_j^{*}$$

Aunque nosotros estamos trabajando ahora en dos dimensiones de la superficie elipsoidal, las alturas de los puntos son necesarios para la reducción de varias cantidades observadas en la superficie elipsoidal.

La altura H_j es la altura ortométrica.

La altura N_j^*, para conocer el control de los puntos se debe de dar mostrando las coordenadas redefinidas.

Así mismo como ξ_j y η_i para métodos de cálculo N_j^* puede estar disponible solo para puntos marítimos.

Teniendo reducidas las observaciones, los cálculos de posición directa e inversa pueden ser hechos en la superficie del elipse usando las fórmulas de Puissan't o de Gauss (o cualquier otra fórmula equivalente) esta disponible para la realización del problema directo de nuevas coordenadas para el segundo punto.

Estos pueden ahora ser usados en la reducción de la fórmula para obtener correcciones más precisas. Esto es más esencial cuando la diferencia de la altura elipsoidal de dos puntos es muy grande.

La propagación del error a través de la reducción de la fórmula, están formulados asumiendo que la estimación del segundo punto es de 1'' de su valor final o aproximadamente 30 metros.

Las coordenadas obtenidas de la solución del problema directo pueden ser probadas contra las estimaciones usadas en la reducción de la fórmula.

REDUCCION DE LAS DIRECCIONES HORIZONTALES

La dirección horizontal es reducida desde el terreno al elipsoide por (Krakiwsty y Thomson, 1974)

$$d_{ij}^{\theta} = d_{ij} \left(\frac{h_j}{M_m} \; e^2 \operatorname{sen} \alpha_{ij} \; \cos \alpha_{ij} \; \cos^2 \varphi_j \right) -$$

$$- \frac{(e^2 \; S^2_{ij} \cos^2 \varphi_m \; \operatorname{sen} \; 2\alpha_{ij})}{12 \; N_m^{\;2}}$$

$$- ([\xi_i \; \operatorname{sen}\alpha_{ij} - \eta_i \; \cos \alpha_{ij}] \; \cot Z_{ij}^{o} \;) \qquad (3.6)$$

donde:

$$N_m = \frac{N_i + N_j^{a}}{2} \; , \qquad (3.7)$$

$$M_m = \frac{M_i + M_j^{a}}{2} \; , \qquad (3.8)$$

$$\varphi_m = \frac{\varphi_i + \varphi_j^{a}}{2} \; , \qquad (3.9)$$

y N_j^{a} y M_j^{a} están evaluadas en φ_j^{a} y $\alpha_{ij} = A_{ij}$ en la primera aproximación.

REDUCCION DE ANGULOS HORIZONTALES

Entonces un ángulo horizontal es en realidad compuesto por dos direcciones, nosotros reducimos esto desde el terreno hacia el elipsoide aplicando dos veces la ecuación (3-5a), esto produce:

$$\beta^{\Theta}_{jik} = \beta_{jik} + \left(\frac{h_j}{Mm_{ij}} e^2 \operatorname{sen}\alpha_{ij} \cos^2\varphi_j\right)$$

$$+ \left(\frac{h_k}{Mm_{ij}} e^2 \operatorname{sen}\alpha_{ik} \cos^2\varphi_k\right)$$

$$+ \left(\frac{e^2 S^2_{ij} \cos^2 \varphi m_{ij} \operatorname{sen} 2\alpha_{ij}}{12 N^2 m_{ij}}\right)$$

$$-\left(\frac{e^2 S_{ik} \varphi m_{ik} \operatorname{sen} 2\alpha_{ik}}{12 N^2 m_{ik}}\right)$$

$$+ \left([\xi_i \operatorname{sen}\alpha_{ij} - \eta_i \cos\alpha_{ij}] \cot z_{ij}\right)$$

$$- \left([\xi_i \operatorname{sen}\alpha_{ik} - \eta_i \cos\alpha_{ik}] \cot z_{ik}\right) \qquad (3\text{-}10)$$

REDUCCION DE DISTANCIAS ZENITALES

Las distancias zenitales en el terreno son reducidas hacia el terreno del elipsoide (Krakiwsky y Thomson,1974)

$$z_{ij} = z_{ij} + (\xi_i \cos \alpha_{ij} + \eta_i \operatorname{sen} \alpha_{ij}) \qquad (3\text{-}11)$$

REDUCCION DE AZIMUTES ASTRONOMICOS

Los azimutes astronómicos observados es mejor reducirlos desde el terreno al elipsoide en una serie de pasos del mismo tipo, primero:

$$\alpha'_{ij} = A_{ij} - \eta_i \operatorname{tag} \varphi_i \ ; \qquad (3\text{-}12)$$

enseguida:

$$\alpha''_{ij} = \alpha'_{ij} - ([\xi_i \operatorname{sen} \alpha'_{ij} - \eta_i \cos \alpha'_{ij}] \cot z_{ij}) \qquad (3\text{-}13)$$

donde z_{ij} esta corregida y descrita en la sección arriba mencionada

La siguiente reducción es:

$$\dddot{\alpha}_{ij} = \ddot{\alpha}_{ij} + \left(\frac{h_j}{M_m} e^2 \ \text{sen}\ \alpha''_{ij} \ \cos \alpha''_{ij} \ \cos^2 \varphi_j\right) \tag{3-14}$$

y finalmente y usando S_{ij} es calculado por la ecuación (3-17)

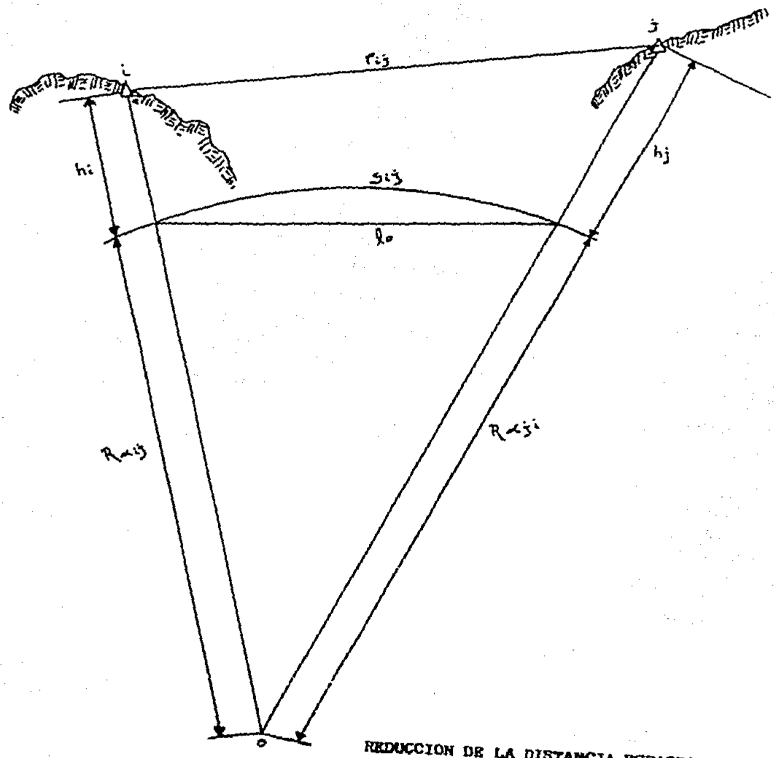
$$\alpha_{ij} = \alpha'''_{ij} - \left(\frac{e^2 \ S^2_{ij} \ \cos^2 \varphi_m \ \ \text{sen} \ 2\ \alpha'''_{ij}}{12\ N^2_m}\right) \tag{3-15}$$

donde α_{ij} es el asimut geodésico deseado

REDUCCION DE DISTANCIAS ESPACIALES

La distancia espacial en el terreno, r_{ij} , entre dos puntos i y j (véase fig. 3-1) es reducida desde el terreno hasta el elipsoide siendo el mismo tipo.

(Krakiwsky y Thomson, 1974)



REDUCCION DE LA DISTANCIA ESPACIAL

Fig. 3-1

Calculando

$$l_o = \left[\frac{(r_{ij})^2 - \Delta h^2}{(1 - \frac{h_i}{R})\ (1 + \frac{h_j}{R})} \right]^{1/2} \tag{3-16}$$

entonces la distancia elipsoidal es dada por:

$$S_{ij} = 2\,R\ \text{sen}^{-1}\left(\frac{l_o}{2R}\right) \tag{3-17}$$

Donde: $\Delta h = h_j - h_i$

$$y:\ R = \frac{R\alpha_{ij} + R\alpha_{ji}}{2}$$

lo cual:

$$R\alpha_{ij} = \frac{M_i\ N_i}{M_i\ \text{sen}^2\alpha_{ij} + N_i\ \cos^2\alpha_{ij}}$$

$$y:\ R\alpha_{ji} = \frac{M_j\ N_j}{M_j\ \text{sen}^2\alpha_{ji} + N_i\ \cos^2\alpha_{ij}}$$

$$y:\ R\alpha_{ij} = \frac{M_j\ N_j}{M_j\ \text{sen}^2\alpha_{ji} + N_j\ \cos^2\alpha_{ji}}$$

PROBLEMA DIRECTO (HASTA 100 KM.)

El problema directo es: dadas las cantidades geodésicas $\varphi_i, \lambda_i, S_{ij}, \alpha_{ij}$ calcula las coordenadas geodésicas φ_j, λ_j. La solución para φ_j es iterativa y el resultado es: (Krakiwsky y Thomson, 1974).

$$\Delta\varphi_k = \left[\frac{S_{ij}}{N_i} \cos_{ij} - \frac{S_{ij}^2}{2N_i^2} \operatorname{tg}\varphi_i \operatorname{sen}^2\alpha_{ij} - \frac{S_{ij}^3}{6N_i^3} \cos\alpha_{ij} \operatorname{sen}^2\alpha_{ij} \left(1 + 3 \operatorname{tg}^2\varphi_i\right) \right], \qquad (3\text{-}18)$$

entonces:

$$\Delta\varphi_{k+1} = \left[\frac{S_{ij} \cos\alpha_{ij}}{M_i} - \frac{S_{ij}^2 \operatorname{tg}\varphi_i \operatorname{sen}^2\alpha_{ij}}{2 M_i N_i} - \frac{S_{ij}^3 \cos\alpha_{ij} \operatorname{sen}^2\alpha_{ij} \left(1 + 3 \operatorname{tg}^2\varphi_i\right)}{6M_i N_i^2} \right]$$

$$\left[1 \quad \frac{3 e^2 \operatorname{sen}\varphi_i \cos\varphi_i}{2\left(1-e^2 \operatorname{sen}^2\varphi_i\right)} \cdot \Delta\varphi_k \right] \qquad (3\text{-}19)$$

Donde la letra k es un contador de interación finalmente.

$$\varphi_j = \varphi_i + \Delta\varphi_{k+1} \qquad (3\text{-}20)$$

Examinandose la ecuación (3-19) puede verse esta $\Delta \varphi$ es función de $\Delta \varphi$ y por lo tanto es necesaria la iteración

Para poder realizar esto, la solución $\Delta \varphi_{k+1}$ es sustituida por $\Delta \varphi_k$ y se obtiene $\Delta \varphi_{k+2}$.

Este proceso es repetitivo hasta que la diferencia entre los valores sucesivos $\Delta \varphi$ sean menores que 1×10^{-9} radianes.

Ahora:

$$\Delta \lambda = \left(\frac{S_{ij}}{N_j} \operatorname{sen} \alpha_{ij} \sec \varphi_j \left(1 - \frac{S_{ij}^2}{6N_j^2} \left(1 - \operatorname{sen}^2 \alpha_{ij} \sec^2 \varphi_j \right) \right) \right) \tag{3-21}$$

$$\lambda_j = \lambda_i + \Delta \lambda \tag{3-22}$$

Como siguiente paso uno puede calcular el azimut inverso.

Primer cálculo:

$$\Delta \alpha = \left(\Delta \lambda \operatorname{sen} \varphi_m \sec \left(\frac{\Delta \varphi}{2}\right) + \frac{\Delta \lambda^3}{12} \left(\operatorname{sen} \varphi_m \sec \frac{\Delta \varphi}{2} - \operatorname{sen}^3 \varphi_m \sec^3 \left(\frac{\Delta \varphi}{2}\right) \right) \right) \tag{3-23}$$

entonces:

$$\alpha_{ji} = \alpha_{ij} + \Delta \alpha + 180^\circ \tag{3-24}$$

PROBLEMA INVERSO

El problema inverso de Puissant's es dado por φ_i, λ_i de un punto i y φ_j, λ_j del punto j, calculemos las cantidades S_{ij}, α_{ij} y α_{ji}, el proceso de solución se muestra a continuación.

(Krakiwsky y Thomson, 1974)

<u>Primer Cálculo:</u>

$$\alpha_{ijk} = T_E^{-1} \left[\frac{\dfrac{\dfrac{\Delta\lambda\ N_j}{\operatorname{Sec}\varphi_j}}{\Delta\varphi M_i}}{\left(1 - \dfrac{3e^2 \operatorname{sen}\varphi_i \cos\varphi_i\ \varphi}{2(1-e^2 \operatorname{sen}^2\varphi_i)}\right)} \right] \qquad (3\text{-}25)$$

$$\text{y: } S_{ijk} = \frac{\Delta\lambda\ N_j}{\operatorname{Sec}\varphi_j \ \operatorname{sen}\alpha_{ijk}} \qquad (3\text{-}26)$$

$$\text{ó: } S_{ijk} = \frac{\Delta\varphi}{\cos\alpha_{ijk}} \left[\frac{M_i}{\left(1 - \dfrac{3e^2 \operatorname{sen}\varphi_i \cos\varphi_i \Delta\varphi}{2(1-e^2 \operatorname{sen}^2\varphi_i)}\right)} \right] \qquad (3\text{-}27)$$

cuando:

$$\Delta\varphi = \varphi_j - \varphi_i \ ,$$

y

$$\Delta\lambda = \lambda_j - \lambda_i$$

Los siguientes nuevos valores de α_{ij} y S_{ij} es como sigue:

calculando :

$$T_I = \frac{\Delta\lambda\, N_j}{\mathrm{Sec}\ \varphi_j} + \frac{(S_{ijk})^3}{6\ N_j^2}\ \mathrm{sen}\ \alpha_{ijk}$$

$$- \frac{S_{ijk}}{6\ N_j^2}\ \mathrm{Sen}^3\ \alpha_{ijk}\ \sec^2\varphi_j \ , \qquad (3-28)$$

y :

$$T_2 = \Delta\varphi \left[\frac{M_i}{\left(1 - \frac{3\ e^2\ \mathrm{sen}\ \varphi_i\ \cos\ \varphi_i}{2\ (1-e^2\ \mathrm{sen}^2\varphi_i)} \cdot \Delta\varphi\right)} \right] + \frac{(S_{ijk})^2\ \mathrm{tg}\ \varphi_i\ \mathrm{sen}^2\alpha_{ijk}}{2N_i} +$$

$$+ \frac{(S_{ijk})^3\ \cos\ \alpha_{ijk}\ \mathrm{sen}^2\alpha_{ijk}\ (1 + 3\ \mathrm{tg}^2\varphi_i)}{6\ N_i^2} \qquad (3-29)$$

Ahora:

$$\alpha_{ij_{k+1}} = T_g^{-1} \left(\frac{T_I}{T_2}\right) . \qquad (3\text{-}30)$$

y:

$$S_{ij_{k+1}} = \frac{T_I}{\operatorname{Sen} \alpha_{ij_k}} \qquad (3\text{-}31)$$

o:

$$S_{ij_{k+1}} + 1 = \frac{T_2}{\operatorname{Cos} \alpha_{ij_k}} \qquad (3\text{-}32)$$

Obsérvese que el nuevo azimut $\alpha_{ij_{k+1}}$ (ecuación 3-31) es usada en (3-31) ó (3-32). Usando ahora los nuevos valores de $S_{ij_{k+1}}$ y $\alpha_{ij_{k+1}}$

Nosotros podemos de nuevo calcular valores actuales repitiendo las ecuaciones (3-28), (3-29), (3-30), (3-31) ó (3-32) este proceso contínuo de iteración hasta que los cambios de α y S son despreciables hasta - -- ($\Delta\alpha_{ij} \leq 1\text{x}10^{-9}$ Rad) en α_{ij} y S_{ij}, una vez obtenido un valor final para el azimut directo y el azimut inverso, se calcula utilizando las ecuaciones (3-23) , (3-24), esto completa el problema inverso usando la fórmula de Puissant's.

MODELOS MATEMATICOS DE LAS DISTANCIAS

En esta sección nosotros desarrollaremos los modelos relacionados a las distancias y coordenadas. Las coordenadas son las latitudes y longitudes geodésicas referidas al elipsoide de referencia.

Estas distancias medias observadas pueden ser reducidas en la superficie del elipsoide antes de que puedan ser ajustadas, nótese que esto es digno de atención, si la distancia geodésica entre dos puntos en el elipsoide pueden ser expresada en forma cerrada, estando en función de las coordenadas, entonces esto puede ser simple en materia de linealización para - obtener la forma lineal necesitada para el ajuste. Solamente después del problema inverso, en el elipsoide no tiene que resolverse en una solución en forma cerrada. Dos aproximaciones son dadas abajo. La primera es basada en una expresión diferencial y es lineal, mientras que la segunda - empieza con una expresión no-lineal.

DIFERENCIAL APROXIMADA

El modelo matemático, para la base unitaria de una distancia y dos puntos de coordenadas, es escrito simbólicamente así:

$$_{ij} = S\ (\varphi_i\ ,\ \lambda_i\ ,\ \varphi_j\ ,\ \lambda_j\ )\ -\ S_{ij}\ = 0 \qquad (3\text{-}33)$$

Donde los primeros términos son una función no-lineal de las distancias o en función de las coordenadas, mientras tanto, los segundos términos están valuados por la distancia. Este modelo no-lineal es aproximado por la serie de Taylor. La ecuación resultante es:

$$F_{ij} = F_{ij}^{o} + dF_{ij} \qquad y \qquad (3\text{-}34)$$

$$= \left\{ S\,(\varphi_i^o,\ {}_i^o, \varphi_j^o, \lambda_j^o) \ - S_{ij} \right\} + dS\,(\varphi_i^o,\ {}_i^o, \varphi_j^o, \lambda_j^o) -$$

$$- VS_{ij} + \ldots = 0 \qquad (3\text{-}35)$$

Los dos términos entre paréntesis representan el punto de expansión. Es decir, que los valores de la distancia están basados en los valores aproximados de las coordenadas, menos el valor observado de la distancia.

El tercer término es el cambio de diferencial en la distancia debido al cambio diferencial en las coordenadas y es descrito por la diferencial total. (Helment, 1880, P.282 ; Toby, 1928, P.55)

$$dS = \frac{\partial S}{\partial \varphi_i} d\varphi_i + \frac{\partial S}{\partial \lambda_i} d\lambda_i + \frac{\partial S}{\partial \varphi_j} d\varphi_j + \frac{\partial S}{\partial \lambda_j} d\lambda_j \qquad (3\text{-}36)$$

de donde:

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi_i} = - M_i \cos \alpha_{ij} \qquad (3\text{-}37)$$

$$\frac{\partial s}{\partial \lambda_i} = - N_j \;\; \mathrm{sen}\, \alpha_{ji} \;\; \cos \varphi_j \tag{3-38}$$

$$\frac{\partial s}{\partial \varphi_j} = - N_j \;\; \cos \alpha_{ji} \tag{3-39}$$

$$\frac{\partial s}{\partial \lambda_j} = N_j \;\; \mathrm{sen}\, \alpha_{ji} \;\; \cos \varphi_j \tag{3-40}$$

M y **N** son el radio de curvatura del elipsoide en el meridiano y la dirección del primer vertical, respectivamente y α es el azimut geodésico, VS_{ij} es la correción de la distancia observada, sustituyendo las expresiones anteriores nosotros obtenemos una expresión, ahora siendo la ecuación de observación.

$$VS_{ij} = - \frac{M_i \cos \alpha_{ij}}{\rho''} \, d\varphi_i'' - \frac{N_j \,\mathrm{sen}\, \alpha_{ij} \;\cos \varphi_j}{\rho''} \, d\lambda_i'' - \frac{M_j \cos \alpha_{ji}}{\rho''}$$

$$d\varphi_j + \frac{M_j \;\mathrm{sen}\, \alpha_{ji} \cos \varphi_j}{\rho''} \, d\lambda_j'' + (S^o_{ij} - S_{ij}) \; , \tag{3-41}$$

$$= a_{ij} \;\; d\varphi_i'' + b_{ij} \, d\lambda_i'' + c_{ij} \;\; d\varphi_j'' + d_{ij} \;\; d\lambda_j'' \;\; + S_{ij} - S_{ij} \tag{3-42}$$

Esto es esencial para el método usado en Gals (Mc.lellan, et,al,1970) con la excepción de la unidad y la combinación de los pesos.

Nótese que cada término de arriba tiene unidades en metros, esto se va llevando a cabo combinando las unidades de las correciones de las coordenadas de radianes (2-36) a segundos de arco y las unidades de los coeficientes de metros a metros divididos por segundos de arco (ρ= 206264.6).

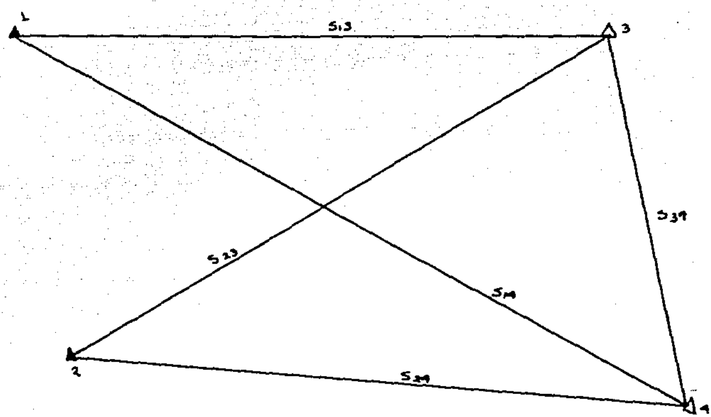
Las varianzas usadas para la determinación de los pesos para las distancias observadas son dadas en metros cuadrados.

La importancia de estar combinando las unidades es equivalente llegar a hacerse cuando se muestra combinando información de distancias y direcciones en el ajuste . Es muy importante notar que S^{o} es una distancia aproximada, en el sentido de que esto es calculable para coordenadas aproximadas y el cálculo de estos valores es indispensable hacerlo usando cualquier de menor precisión por ejemplo: a uno-diez de la división normal de la distancia observada. En otras palabras, la ecuación de los errores calculados pueden ser insignificantes en comparación de los errores observados.

Esto implica el uso de problemas exactos de algaritmos inversos tal como el método de Bessel. Nosotros ahora extenderemos la linealización del Método Matemático a muchas distancias entre una y varias estaciones, la ecuación de observación ecpresada en matriz , es:

$$\underset{(nxu)}{A}\ \underset{(ux1)}{X} - \underset{(nx1)}{W} = \underset{(nxn)}{V} \quad , \quad P = \sigma_o^{2} \Sigma^{-1}$$

Donde n es el número total de distancias observadas y u el total de número de coordenadas de estaciones desconocidas. $\sigma_o{}^{2}$ es el factor de varianza apriori y Σ la matriz de varianzas y covarianzas para las distancias observadas.



▲ Estación Fija

△ Estación Vacia

fig. 3-2 : Cuadrilátero con dos puntos fijos

Por ejemplo, un cuadrilátero con dos puntos fijos y todas las distancias observadas, haciendo el seguimiento de la ecuación de observación en forma de matriz.

$$\begin{bmatrix} a_{13} & b_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{14} & d_{14} \\ a_{23} & b_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{24} & d_{24} \\ a_{34} & b_{34} & c_{34} & d_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varphi_3 \\ d\lambda_3 \\ d\varphi_4 \\ \\ d\lambda_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S^o_{13} - S_{13} \\ S^o_{14} - S_{14} \\ S^o_{23} - S_{23} \\ S^o_{24} - S_{24} \\ S^o_{34} - S_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{14} \\ v_{23} \\ v_{24} \\ v_{34} \end{bmatrix}$$

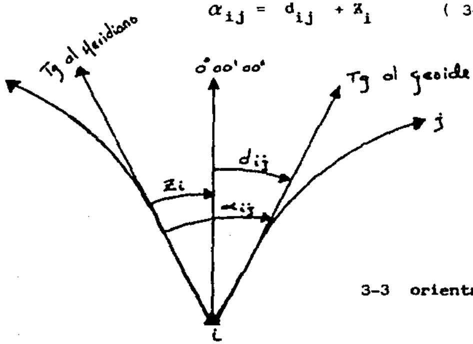
$$P = \sigma_o^2 \begin{bmatrix} \sigma_{13}^{\ 2} & & & & \\ & \sigma_{14}^{\ 2} & & & \\ & & \sigma_{23}^{\ 2} & & \\ & & & \sigma_{24}^{\ 2} & \\ & & & & \sigma_{34} \end{bmatrix}^{-1}$$

MODELO MATEMATICO DE DIRECCIONES

Las direcciones observadas son relativas desde que el valor de una dirección de un punto a otro, es una complementación arbitraria y dependiendo de la dirección "cero" del círculo horizontal suponiendo cuando el instrumento está disponible. La localización del cero relativo a la dirección norte es un parámetro desconocido estorboso y puede ser determinado por el ajuste junto con las coordenadas desconocidas. La información apreciada de las direcciones resultantes de las observaciones - del teodolito está contenido en los números (usualmente más de uno) visando desde un punto dado a otro punto, esta dirección es asumida para ser referida a la superficie del elipsoide.

La relación entre un azimut α_{ij} y una nueva dirección d_{ij} es dado por la dirección desconocida Z_i es decir

$$\alpha_{ij} = d_{ij} + Z_i \qquad (3\text{-}42a)$$



3-3 orientación desconocida.

DESARROLLO DEL MODELO MATEMATICO

El modelo matemático para observaciones de direcciones seguido desde el modelo matemático del azimut $F_{ij} = \alpha(\varphi_i, \lambda_j, \varphi_j, \lambda_i) - \alpha_{ij} = 0$ (Tobey,1928) sustituyendo por (3-42a) por el azimut, es decir:

$$F_{ij} = \alpha(\varphi_i, \lambda_i, \varphi_j, \lambda_j) - (d_{ij} + Z_i) = 0 \qquad (3\text{-}43)$$

donde la orientación desconocida Z_i, uniendo las coordenadas, sus cantidades

$$F_{ij} = \left\{ \alpha(\varphi_i^o, \lambda_i^o, \varphi_j^o, \lambda_j^*) - Z_i^o - d_{ij} \right\} + d\alpha - 1 \quad d_Z - Vd_{ij} + \ldots = 0 \qquad (3\text{-}44)$$

donde pueden usarse todas las cantidades previamente definidas excepto para Z_i^o el cual es un valor aproximado para la orientación desconocida. Esto es usualmente obtenido por la dirección diferenciando de una estación vista con el azimut de la misma línea calculada para las coordenadas.

Varias estimaciones en cada estación pueden ser obtenidas con la media existente de los valores aproximados, sin embargo, solo un valor es usado necesariamente.

Dando la ecuación de observaciones para direcciones, es decir:

$$v''d_{ij} = \frac{M_i \ \text{sen}\ \alpha_{ij}}{S_{ij}}\, d\varphi_i - \frac{N_j \ \cos\alpha_{ji} \ \cos\varphi_j}{S_{ij}}\, d\lambda_i +$$

$$+ \frac{M_j \ \text{sen}\ \alpha_{ij}}{S_{ij}}\, d\varphi_j'' + \frac{N_j \ \cos\alpha_{ji} \ \cos\varphi_j}{S_{ij}}\, d\lambda_j'' -$$

$$1\, dZ_i'' + (\alpha^o_{ij} - d_{ij} - Z^o_i)'' , \qquad (3\text{-}45)$$

$$v''d_{ij} = e_{ij}\ d\varphi_i'' + f_{ij}\ d\lambda_i'' + g_{ij}\ d\varphi_j'' + (-f_{ij})\, d\lambda_j'' -$$

$$- 1\, dZ_i'' + (\alpha^o_{ij} - d_{ij} - Z^o_i)'' \qquad (3\text{-}46)$$

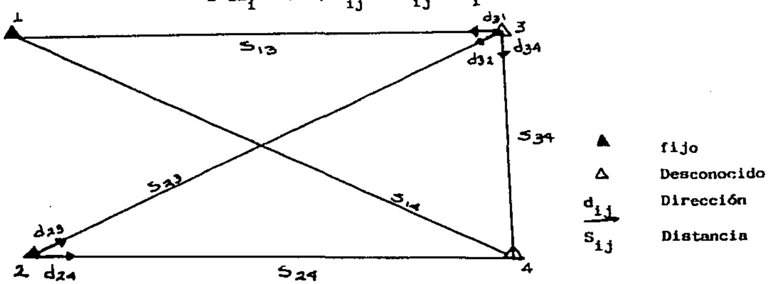


fig. 3-4 :Observación de Direcciones y Distancias

Ahora nosotros aplicaremos el modelo matemático de direcciones en el cuadrilátero mostrado en la fig. (3-3), donde todas las distancias fueron observadas a más de tres direcciones a la estación 3 y 2 a la estación 2. La forma matricial de la ecuación de observación es:

$$\underset{11.6}{A}\ \underset{6\times1}{X} - \underset{11\times1}{W} = \underset{11\times1}{V}\ ,\quad \underset{11\times11}{P}$$

$$\begin{bmatrix} c_{13} & d_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{14} & d_{14} & 0 & 0 \\ c_{23} & d_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{24} & d_{24} & 0 & 0 \\ a_{34} & b_{34} & c_{34} & d_{34} & 0 & 0 \\ \hdashline e_{31} & f_{31} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ e_{32} & f_{32} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ e_{34} & f_{34} & g_{34} & -f_{34} & 0 & -1 \\ g_{23} & -f_{23} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & g_{24} & -f_{24} & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varphi_3 \\ d\lambda_3 \\ d\varphi_4 \\ d\lambda_4 \\ \\ \\ dZ_2 \\ dZ_3 \\ \\ \\ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S^o_{13} - S_{13} \\ S^o_{14} - S_{14} \\ S^o_{23} - S_{23} \\ S^o_{24} - S_{24} \\ S^o_{34} - S_{34} \\ {}^{o}_{31} - d_{31} - z^o_3 \\ {}^{o}_{32} - d_{32} - z^o_3 \\ {}^{o}_{34} - d_{34} - z^o_3 \\ {}^{o}_{23} - d_{23} - z^o_2 \\ {}^{o}_{24} - d_{24} - z^o_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{14} \\ v_{23} \\ v_{23} \\ v_{34} \\ v_{31} \\ v_{32} \\ v_{34} \\ v_{23} \\ v_{24} \end{bmatrix}$$

$$\underset{11x11}{P} = \sigma_o^2 \begin{bmatrix} \Sigma_{5,5}^{-1} & 0 \\ 0 & \Sigma_{5,5}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{5,5} = \begin{bmatrix} \sigma_{31}^2 & & & & \\ & \sigma_{32}^2 & & & \\ & & \sigma_{34}^2 & & \\ & & & \sigma_{23}^2 & \\ & & & & \sigma_{24}^2 \end{bmatrix}$$

Note que la matriz de varianzas y covarianzas para las distancias ya fueron definidas, mientras la nueva matriz (5x5) pertenece a las de observación de direcciones.

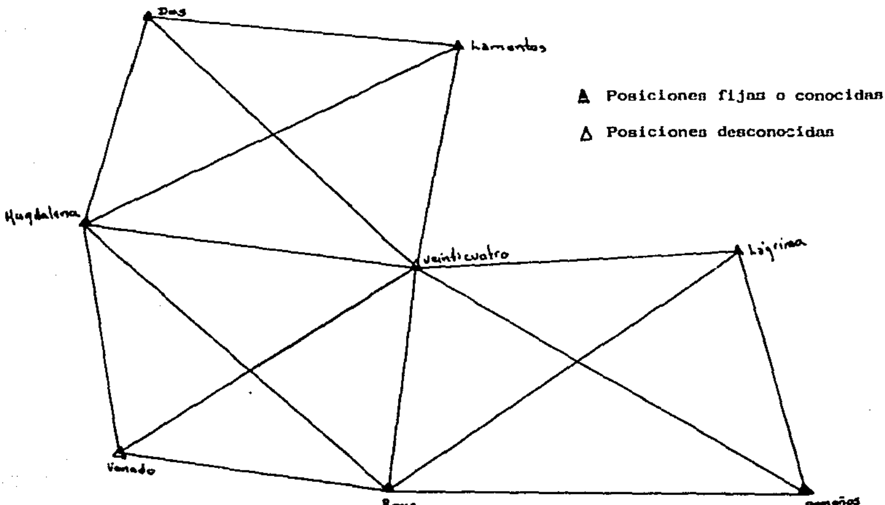
Esto es una matriz incorrecta cuando todas las direcciones en todos los puntos tienen que ser observados.

T E M A IV

CALCULOS PRELIMINARES

RED DEL LEVANTAMIENTO GEODESICO

Se optó por cambiar los nombres de las estaciones de la red a forma numérica, para facilitar las notaciones en los cálculos mostrados en este capítulo



Dos	**= 1**		**Lágrima**	**= 5**
Lamentos	**= 2**		**Venado**	**= 6**
Magdalena	**= 3**		**Rayo**	**= 7**
Veinticuatro	**= 4**		**Gomeños**	**= 8**

La red consta de los siguientes datos:

4 Vértices Conocidos

Vértice Dos

Vértice Lamentos

Vértice Rayo

Vértice Gomenos

4 Vértices Desconocidos

Vértice Magdalena

Vértice Venado

Vértice Veinticuatro

Vértice Lágrima

Distancias

13 Distancias Medidas

Angulos Horizontales

24 Angulos Internos Medidos

No se observaron Azimuts

Se Midieron todas las Distancias Zenitales.

DISTANCIAS CRUDAS PROMEDIOS Y TEMPERATURAS

			$^\circ t$	$^\circ t'$	P
Dos-Magdalena	=	28763.863	14.972	7.472	603.504 mm.
Dos-Lamentos	=	30317.809	6.003	0.847	599.694 mm.
Dos-24	=	46757.795	8.419	1.664	602.996 mm.
Lamentos-Magdalena	=	47497.227	8.158	1.142	611.124 mm.
Lamentos-24	=	32082.225	6.942	0.797	609.092 mm.
Magdalena-24	=	42865.221	6.607	2.487	619.760 mm.
Magdalena-Rayo	=	68325.6375	26.354	10.278	617.855 mm.
Magdalena-Venado	=	44507.631	21.631	7.150	627.380 mm.
24-Venado	=	50339.412	22.186	12.603	623.570 mm.
24-Rayo	=	45546.038	22.376	8.600	613.918 mm.
Venado-Rayo	=	36812.741	29.233	11.596	620.268 mm.
24-Lágrima	=	49054.312	16.004	4.767	606.552 mm.
24-Gomeño	=	76418.455	23.819	7.986	601.345 mm.
Rayo-Lágrima	=	64158.288	18.507	6.736	609.600 mm.
Rayo-Gomeño	=	67926.262	24.744	12.430	603.335 mm.
Gomeño-Lágrima	=	37161.430	24.894	10.761	602.869 mm.

En primera instancia se obtuvieron los datos de campo para el cálculo, los cuales ya se mostraron.

a).- Todos los ángulos horizontales con un total de dieciseis observaciones cada uno. (Así fueron medidos en campo)

b).- Distancias Crudas ida y vuelta, aquí se sacó un promedio para cada distancia por lado, éstas acompañadas de sus temperaturas seca y humeda así como su presión, sus unidades son °C y mm Hg respectivamente.

CORRECCION METEREOLOGICAS A LAS DISTANCIAS MEDIDAS EN CAMPO

Mostrando el procedimiento de cálculo de las correcciones metereológicas para cada distancia, solamente el cálculo de la primera distancia está paso a paso.

$$\text{Correción a las Distancias} = \frac{np}{na} D$$

$np = \dfrac{V_o}{V} =$ Indice de refracción en el aire ordinario y es igual a 1.00032

$na =$ Indice de refracción al medir

$D =$ Distancia Medida

$$na = 1 + \left[\frac{103.46}{T} p + \frac{490814.24}{T^2} e \right] 10^{-6}$$

T = Temperatura absoluta 273.15 + t

t = Temperatura del termómetro seco

t' = Temperatura del termómetro húmedo

p = Presión en mm Hg

e = Tensión del vapor de agua en las condiciones de la medida.

e' = Tensión del vapor de agua en el aire saturado a la misma temperatura

$$e = e' + d\,e$$

$$de = -0.00066\ (1 + 0.00115\ t')\ p\ (t - t')$$

$$a = \frac{7.5\ t'}{237.3 + t}$$

$$e' = 4.58 \times 10^{a}$$

Entrando al cálculo de la primera distancia

Dos Magdalena (1 – 3)

$$de = -0.00066 \left[1 + 0.00115\ (7.472) \right] 603.504\ (14.972 - 7.472) = -3.0130$$

$$a = \frac{7.5\ (7.472)}{237.3 + (14.972)} = 0.2221$$

$$e' = 4.58 \times 10^{0.2221} = 7.62547$$

$$T = 273.15 + 14.972 = 288.1220$$

$$na = 1 + \left[\frac{103.46}{288.1220} (603.504) + \frac{490814.24}{(288.1220)^2} (4.62547) \right] 10^{-6} = 1.0002$$

$$1\text{-}3 \text{ Correción} = \frac{1.00032}{1.0002} \; 28763.863 = 28766.02639$$

Las siguientes distancias quedan como sigue, esto es ya corregidas:

1 - 2 =	30320.2318	m.
1 - 4 =	46761.68116	m.
2 - 3 =	47501.11886	m.
2 - 4 =	32084.79496	m.
3 - 4 =	42868.09405	m.
3 - 7 =	68331.8904	m.
3 - 6 =	44511.68398	m.
4 - 6 =	50342.55728	m.
4 - 7 =	45550.12109	m.
6 - 7 =	36816.1301	m.
4 - 5 =	49058.455	m.
4 - 8 =	76426.17682	m.
7 - 5 =	64163.9793	m.
7 - 8 =	67931.56786	m.
8 - 5 =	37164.72377	m.

Se usó la fórmula citada en el primer cálculo ya que el tipo de levantamiento no ameritaba que se calculara con otras fórmulas como las que se citan en el capítulo 3

CALCULO DE LA CORRECION DE DISTANCIAS POR SEGUNDA VELOCIDAD

Esta corrección se hace para que la distancia medida en forma de curva nos quede en forma inclinada (esta corrección se indica en las correcciones geométricas).

Pero para el fin de obtener las cotas de los vértices desconocidos, es necesario hacer primero cota corrección con respecto a las cotas de los vértices conocidos y para esto tenemos que calcular un radio medio de Gauss para toda la red geodésica, este lo obtendremos en función de las coordenadas de los vértices conocidos, los cuales son:

$\varphi_1 = 30^\circ\ 39'\ 06\overset{''}{.}818$ $\qquad$ $\varphi_2 = 30^\circ\ 34'\ 39\overset{''}{.}553$

$\lambda_1 = 106^\circ\ 06'\ 47\overset{''}{.}526$ $\qquad$ $\lambda_2 = 105^\circ\ 48'\ 32\overset{''}{.}284$

$H_1 = 2154.21$ MSNMM $\qquad$ $H_2 = 1976.06$ MSNMM

$\varphi_7 = 29^\circ\ 53'\ 15\overset{''}{.}678$ $\qquad$ $\varphi_8 = 29^\circ\ 51'\ 32\overset{''}{.}150$

$\lambda_7 = 105^\circ\ 56'\ 43\overset{''}{.}601$ $\qquad$ $\lambda_8 = 105^\circ\ 14'\ 35\overset{''}{.}870$

$H_7 = 1952.82$ MSNMM $\qquad$ $H_8 = 2216.90$ MSNMM

Calculando los radios para las latitudes conocidas y después sacando un radio promedio

Datos :

$a = 6378206.4$

$b = 6356583.8$

$$(1-e^2) = \frac{b^2}{a^2} = 0.993231342$$

$e^2 = 0.006768658$

$$Rm = \frac{a\ (1 - e^2)}{(1-e^2\ sen^2\varphi)^{3/2}}$$

Obteniendo los siguientes resultados:

$Rm_1 = 6351789.094$ m

$Rm_2 = 6351715.720$ m

$Rm_7 = 6351038.937$ m

$Rm_8 = 6351010.932$ m

Calculando ahora N, tenemos :

$$N = \frac{a}{(1-e^2\ sen^2\varphi)^{1/2}}$$

Obteniendo los siguientes resultados

N_1 = 6383824.374 m.

N_2 = 6383799.791 m.

N_7 = 6383573.050 m.

N_8 = 6383563.670 m.

Ahora se calculará el radio medio de Gauss para cada estación

$$\rho = \sqrt{N \quad Rm}$$

Obteniendo los valores siguientes:

ρ_1 = 6367786.589 m.

ρ_2 = 6367737.549 m.

ρ_7 = 6367285.214 m.

ρ_8 = 6367266.497 m.

De estos resultados tomaremos un promedio para obtener un radio de Gauss promedio para toda la red geodésica y nos da:

$$\rho_{\text{promedio}} = 6367518.963 \text{ m.}$$

Procedemos a calcular la corrección de la segunda velocidad para cada una de las distancias, empleando la siguiente fórmula:

$$Ss = Sm - \frac{(1 - k)^2}{24 \quad R_T^2} \quad Sm^3$$

$$R_T = \rho \text{ Promedio}$$

Tomando los datos siguientes:

a).- Cada una de las distancias corregidas por los efectos metereológicos

b).- Radio promedio de Gauss

c).- El valor de k para aparatos electromagnéticos = 0.25

Usando los datos anteriores y la fórmula antes mencionada se obtuvieron las distancias correctas.

1 - 3 =	28766.01263	m.
1 - 2 =	30320.21569	m.
1 - 4 =	46761.62205	m.
2 - 3 =	47501.05690	m.
2 - 4 =	32084.77587	m.
3 - 4 =	42868.04851	m.
3 - 7 =	68331.70597	m.
3 - 6 =	44511.63300	m.
4 - 6 =	50342.48353	m.
4 - 7 =	45550.06646	m.
6 - 7 =	36816.10125	m.
4 - 5 =	49058.74344	m.
4 - 8 =	76425.91877	m.
7 - 5 =	64163.82660	m.
7 - 8 =	67931.38665	m.
8 - 5 =	37164.69410	m.

(Distancias corregidas por segunda velocidad)

NIVELACION TRIGONOMETRICA

Esta nivelación es con observaciones simultáneas y recíprocas.

A , B : Vértices Verdadero

A' , B' : Vértices Aparentes

a , b : Superficie del Nivel del Mar

Z , Z' : Distancias Zenitales Verdaderas

z , z' : Distancias Zenitales Observadas

r , r' : Angulos de Refracción

H : Altitud del Vértice A

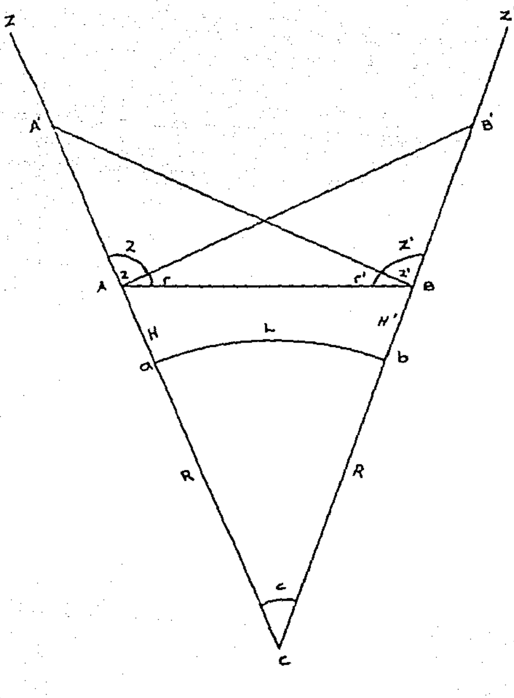
H' : Altitud por determinar

L : Distancia entre a y b

C : Centro de la Tierra

$\measuredangle C$: Angulo en el Centro de la Esfera Osculadora

R : Radio Medio Terrestre


Z
Z'
A'
B'
Z
Z'
z
z'
A
r
r'
B
H
H'
L
a
b
R
R
c
C

FORMULA UTILIZADA PARA LA NIVELACION TRIGONOMETRICA

$$H' = H + Tg\ 1/2\ (Z' - Z)\ L\ \left(\frac{H}{2R} + \frac{H'}{2R} + 1 + \frac{L^2}{12R^2}\right)$$

$$\therefore$$

$$H' = H + L\ tg\ 1/2\ (Z' - Z)\ \left(1 + \frac{L^2}{12R^2} + \frac{H + H'}{2R}\right)$$

Como se encuentra H' en el segundo miembro se calcula primero H', despreciando el término $\frac{H + H'}{2R}$ para obtener un primer valor H', el cual se sustituye en el término $\frac{H + H'}{2R}$ para el cálculo definitivo de H'

En lugar de la diferencia de distancias zenitales verdaderas, $Z' - Z$, se puede emplear la diferencia de las distancias zenitales observadas, $z' - z$ por haberse hecho observaciones simultáneas, ya que en este caso:

$$r = r' \quad y \quad Z' - Z = z' - z$$

Nota:

Hay que tomar en cuenta la altura del instrumento y la de la señal

DATOS PARA EL CALCULO

H = Estación Conocida

z', z = Distancias Zenitales Simultáneas

L = Distancia entre Estaciones Corregida por segunda Velocidad

R = Radio Medio de la Triangulación 6367518.963 m.

De 1 a 3

$H_1 = 2154.21$ MSNMM

$z_1 = 90^\circ \; 59' \; 04''.39$

$z_3 = 89^\circ \; 14' \; 39''.00$

$L_{1-3} = 28766.01263$ m.

$Rm = 6367518.963$ m.

$i = 1.27$ m.

$s = 1.47$ m.

Resultado de la Primera Iteración

$H_1' = 1717.284590$ m.

Resultado Final

$H' = 1717.1518 + 1.27 - 1.47 =$ <u>1716.9518 MSNMM</u>

Como existieron variaciones entre los valores obtenidos para cada estación en la Nivelación Trigonométrica, se tomaron los promedios de estos cálculos.

Esto fue debido a que se obtuvo un radio de Gauss para toda la Triangulación.

Mostrando Resultados

H_1 = 2154.21 NMM

H_2 = 1976.06 NMM

H_7 = 1952.82 NMM

H_8 = 2216.90 NMM

Valores Resultantes Promedio

H_3 = 1716.17 NMM

H_4 = 1879.64 NMM

H_6 = 1625.86 NMM

H_5 = 1979.32 NMM

CORRECCIONES GEOMETRICAS

Haciendo las correcciones geométricas para transformar la distancia inclinada o horizontal, corrección de distancia horizontal a cuerda y por último, la correción para transformar la cuerda en curvatura de la tierra, por lo tanto tenemos:

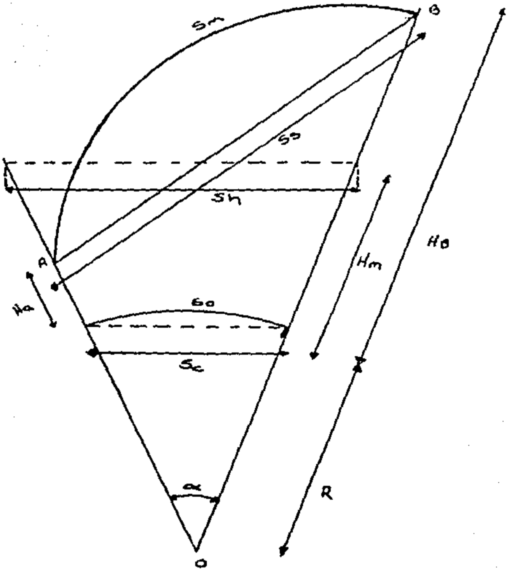
Sa = Corrección de Segunda Velocidad

Sh = Corrección para hacer horizontal la distancia inclinada

Sc = Corrección de distancia horizontal a cuerda

So = Corrección para transformar la cuerda en arco (curvatura Terrestre)

$$So = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{Sm - \frac{(1 - k)\ Sm^3}{24\ R^2}}_{Sa} - \left(\frac{\Delta H^2}{2\ Sa} + \frac{\Delta H^4}{8\ Sa^3}\right)}_{Sh} - \frac{Sh\ \ Hm}{R + Hm}}_{Sc} + \frac{Sc^3}{24\ \ R^2}}_{So}$$


B
Sm
Ss
Sh
A
Ha
Hm
HB
So
Sc
α
R
O

En este trabajo se aplicó esta fórmula, pero también se puede aplicar la fórmula (3 - 19), todo ésto de acuerdo a la calidad del levantamiento geodésico.

Tomando en cuenta que los términos:

$$Sm - \frac{(1-k)^2 \; Sm^3}{24 \; R^2}$$; ya los calculamos, entonces lo tomaremos

como valor conocido (tomándolo como dato) para el cálculo de las correcciones resultantes agrupadas en la fórmula general.

Datos:

El valor de Ss

H B = Altitud de un Vértice
H A = Altitud de otro Vértice
ΔH = Diferencia de Altitudes de los dos Vértices en Turno
Hm = Promedio de Altitudes de los dos Vértices

Sustituyendo estos valores para cada distancia en la fórmula general arrojó los resultados siguientes:

So_{1-3} = 28752.00124

So_{1-2} = 30309.04493

So_{1-4} = 46744.10219

$So_{2-3} = 474484.7607$

$So_{2-4} = 32074.46992$

$So_{3-4} = 42855.722$

$So_{3-7} = 68311.94469$

$So_{3-6} = 44499.31497$

$So_{4-6} = 50326.119$

$So_{6-7} = 36804.360$

$So_{4-7} = 45536.403$

$So_{4-5} = 49043.905$

$So_{4-8} = 76401.061$

$So_{7-5} = 64144.290$

$So_{7-8} = 67908.964$

$So_{8-5} = 37159.363$

Ya teniendo las distancias corregidas tanto por efectos metereológicos, como geométricamente se procedió a efectuar el cálculo de los pesos para las distancias por medio de la siguiente fórmula:

$$\sigma_s^2 = a^2 + b^2 s^2$$

Donde:

$a = 0.03$ m.

$b = 0.000008$ ó 8 PPM

S = longitud ya corregida en m.

Donde:

$$P = \frac{1}{\sigma_s^2}$$

Por lo tanto tenemos de 1 - 3

$$\sigma_s^2 = 0.0009 + 0.05290 = 0.053807365$$

$$P = \frac{1}{0.053807365} = 18.5848$$

$P_{1-3} = 18.58$

$P_{1-2} = 16.75$

$P_{1-4} = 7.11$

$P_{2-3} = 6.89$

$P_{2-4} = 14.98$

$P_{3-4} = 8.44$

$P_{3-7} = 3.34$

$P_{3-6} = 7.84$

$P_{4-6} = 6.14$

$P_{6-7} = 11.42$

$P_{4-7} = 7.49$

$P_{4-5} = 6.46$

$P_{4-8} = 2.67$

$P_{7-5} = 3.79$

$P_{7-8} = 3.78$

$P_{8-5} = 11.21$

ANGULOS HORIZONTALES Y SU PESO

Como se indican todas las repeticiones de los ángulos interiores, solamente se mostrará el valor mas probable, el error medio cuadrático, su varianza y su peso para cada ánguio observado.

Tomando estas fórmulas:

$$VMP = \frac{M_1 + M_2 + M_3 + \dots M_n}{n} \quad ; \quad EMC = \sqrt{\frac{\sum v^2}{n-1}}$$

$$\sigma_i^2 = (EMC)^2 \quad ; \quad P = \frac{\sigma_o^2}{\sigma_i^2} \quad \text{donde:}$$

$\sigma_o^2 = 1$ que es el factor de varianza a priori

– 4 – 7 – 5

VMP = 49° 36' 20".406

σ_i^2 = 0.527292

P = 1.90

– 5 – 7 – 8

VMP = 32° 30' 50"

σ_i^2 = 0.770[illegible]5

P = 1.298

$-5-4-8$

VMP $= 23^{\circ}\ 41'\ 47''.86$

$\sigma_i^2 = 4.725227$

$P = 0.211630$

$-7-8-4$

VMP $= 36^{\circ}\ 11'\ 09''.459$

$\sigma_i^2 = 1.0007$

$P = 0.9933$

$-4-8-5$

VMP $= 32^{\circ}\ 02'\ 31''.352$

$\sigma_i^2 = 0.9420$

$P = 1.0616$

$-8-4-7$

VMP $= 61^{\circ}\ 41'\ 51''.294$

$\sigma_i^2 = 12.6059$

$P = 0.0793$

$-7-4-6$

VMP $= 44^{\circ}\ 48'\ 27''.10$

$\sigma_i^2 = 8.30025$

$P = 0.1204$

$-6-4-3$

VMP $= 56^{\circ}\ 22'\ 00.480$

$\sigma_i^2 = 5.4824$

$P = 0.1824$

$-3-6-4$

VMP $= 53^{\circ}\ 18'\ 26''.30$

$\sigma_i^2 = 0.80693$

P $= 1.2393$

$-4-6-7$

VMP $= 60^{\circ}\ 40'\ 59''.808$

$\sigma_i^2 = 1.4121$

P $= 0.7081$

$-4-3-7$

VMP $= 40^{\circ}\ 50'\ 27''$

$\sigma_i^2 = 1.86397$

P $= 0.5365$

$-7-3-6$

VMP $= 29^{\circ}\ 29'\ 15''.1067$

$\sigma_i^2 = 3.2274$

P $= 0.3098$

$-2-1-4$

VMP $= 42^{\circ}\ 55'\ 20''$

$\sigma_i^2 = 2.629$

P $= 0.3804$

$-4-1-3$

VMP $= 64^{\circ}\ 04'\ 25''.0110$

$\sigma_i^2 = 4.8628$

P $= 0.2056$

$- 1 - 3 - 2$

VMP $= 37^{\circ}\ 37'\ 07''.878$

$\sigma_i^2 = 2.1099$

P $= 0.4740$

$- 2 - 3 - 4$

VMP $= 41^{\circ}\ 11'\ 33''.922$

$\sigma_i^2 = 1.61459$

P $= 0.6194$

$- 7 - 5 - 4$

VMP $= 45^{\circ}\ 00'\ 06''.397$

$\sigma_i^2 = 0.0987$

P $= 10.1276$

$- 8 - 5 - 7$

VMP $= 79^{\circ}\ 15'\ 33''239$

$\sigma_i^2 = 8.8135$

P $= 0.1135$

$- 6 - 7 - 3$

VMP $= 36^{\circ}\ 31'\ 22''.363$

$\sigma_i^2 = 0.7645$

P $= 1.9238$

$- 3 - 7 - 4$

VMP $= 37^{\circ}\ 59'\ 10''.\ 6958$

$\sigma_i^2 = 0.5198$

P $= 1.9238$

$-3-4-1$

VMP $= 37^{\circ}\ 06'\ 56''.7055$

$\sigma_i^2 = 3.1928$

P $= 0.3132$

$-1-4-2$

VMP $= 40^{\circ}\ 03'\ 20''.0802$

$\sigma_i^2 = 14.8442$

P $= 0.0674$

$-4-2-3$

VMP $= 61^{\circ}\ 38'\ 14''.1518$

$\sigma_i^2 = 4.0472$

P $= 0.2471$

$-3-2-1$

VMP $= 35^{\circ}\ 23'\ 06''.683$

$\sigma_i^2 = 3.24999$

P $= 0.3077$

CALCULO DE COORDENADAS APROXIMADAS POR EL METODO DIRECTO E INVERSO

Partiendo de las coordenadas fijas:

	φ	λ
1 -	$30^\circ\ 39'\ 06''.818$	$106^\circ\ 06'\ 47''.526$
2 -	$30^\circ\ 34'\ 39''.553$	$105^\circ\ 48'\ 32''.284$
7 -	$29^\circ\ 53'\ 15''.678$	$105^\circ\ 56'\ 43''.601$
8 -	$29^\circ\ 51'\ 32''.150$	$105^\circ\ 14'\ 35''.870$

Haciendo el cálculo de los azimutes de partida por la fórmula de Puissant's para el Método Inverso (3-25) a (3-32), dadas φ_i, λ_i, φ_j, λ_j obtuvimos un azimut directo y otro inverso de partida y otro de llegada, los cuales son:

De 1 a 2

$285^\circ\ 40'\ 38''.88$ D

$105^\circ\ 49'\ 56''.647$ I

De 7 a 8

$272^\circ\ 30'\ 55''.971$ D

$92^\circ\ 51'\ 54''.993$ I

Con estos azimutes y los ángulos horizontales internos propagué los azimutes para las demás líneas, tanto directos como inversos.

Para calcular las coordenadas aproximadas por medio del método directo utilizando la fórmula de Puissant's (3-18) a (3-24) los resultados fueron como sigue, tomando como datos: Distancia, Azimut, Latitud conocida y Longitud conocida.

3 - 1

$$\left.\begin{array}{ll} 28752.00124 & \text{Dist.}_1 \\ 32^\circ\ 40'\ 23''.891 & AZ_1 \\ 30^\circ\ 39'\ 06''.818 & \varphi_1 \\ 106^\circ\ 06'\ 47''.526 & \lambda_2 \end{array}\right\} \quad \textbf{Datos}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 212^\circ\ 35'\ 28''.301 & AZ_3 \\ 30^\circ\ 26'\ 00''.5078 & \varphi_3 \\ 106^\circ\ 16'\ 29''.19 & \lambda_3 \end{array}\right\} \quad \textbf{Coordenadas aproximadas}$$

4 - 3

$$\left.\begin{array}{ll} 42855.71928 & \text{Dist.}_3 \\ 291^\circ\ 24'\ 10''.098 & AZ_3 \\ 30^\circ\ 26'\ 00''.5078 & \varphi_3 \\ 106^\circ\ 16'\ 29''.19 & \lambda_3 \end{array}\right\} \quad \textbf{Datos}$$

$$\left.\begin{array}{rl} 111^\circ\ 36'\ 44''.88 & AZ_4 \\ 30^\circ\ 17'\ 30''.2593 & \varphi_4 \\ 105^\circ\ 51'\ 36''.113 & \lambda_4 \end{array}\right\} \quad \text{Coordenadas aproximadas}$$

6 – 4

$$\left.\begin{array}{rl} 50326.11877 & \text{Dist.}_4 \\ 55^\circ\ 14'\ 44''.322 & AZ_4 \\ 30^\circ\ 17'\ 30''.2593 & \varphi_4 \\ 106^\circ\ 51'\ 36''.113 & \lambda_4 \end{array}\right\} \quad \text{Datos}$$

$$\left.\begin{array}{rl} 235^\circ\ 01'\ 48''.938 & AZ_6 \\ 30^\circ\ 01'\ 56''.0333 & \varphi_6 \\ 106^\circ\ 17'\ 19''.321 & \lambda_6 \end{array}\right\} \quad \text{Coordenadas aproximadas}$$

2 – 4

$$\left.\begin{array}{rl} 32074.46992 & \text{Dist.}_4 \\ 188^\circ\ 47'\ 01''.59 & AZ_4 \\ 30^\circ\ 17'\ 30''.2593 & \varphi_4 \\ 105^\circ\ 51'\ 36''.113 & \lambda_4 \end{array}\right\} \quad \text{Datos}$$

$$\left.\begin{array}{rl} 8^\circ\ 48'\ 34''.70451 & AZ_2 \\ 30^\circ\ 34'\ 39''.6127 & \varphi_2 \\ 105^\circ\ 48'\ 32''.295 & \lambda_2 \end{array}\right\} \quad \text{Coordenadas aproximadas}$$

5 — 4

49043.90456	Dist.$_4$	Datos
$285^\circ\ 02'\ 33''.936$	Az_4	
$30^\circ\ 17'\ 30''.2593$	φ_4	
$105^\circ\ 51'\ 36''.113$	λ_4	

$105^\circ\ 17'\ 25''.324$	Az_5	Coordenadas aproximadas
$30^\circ\ 10'\ 33''.463$	φ_5	
$105^\circ\ 22'\ 05''.903$	λ_5	

Las coordenadas aproximadas obtenidas son las siguientes:

	φ	λ
3	$30^\circ\ 26'\ 00''.5078$	$106^\circ\ 16'\ 29''.19$
4	$30^\circ\ 17'\ 30''.2593$	$105^\circ\ 51'\ 36''.113$
6	$30^\circ\ 01'\ 56''.0333$	$106^\circ\ 17'\ 19''.321$
5	$30^\circ\ 10'\ 33''.463$	$105^\circ\ 22'\ 05''.903$

Por el método directo

METODO INVERSO

Ahora ya teniendo las coordenadas fijas y las coordenadas aproximadas y aplicando la fórmula de Puissant's (3-25) a (3-32) se calcularon las distancias y los azimutes, los cuales me serviran para posteriormente usarlos como datos en el cálculo de las diferenciales tanto de distancias como de direcciones.

Las distancias calculadas van a ser usadas posteriormente para obtener el valor o diferencia entre la distancia calculada y la medida, pero ésto se verá posteriormente con lo que respecta a los azimutes. Como no se midieron azimutes en el campo, estos azimutes calculados son los más cercanos a la realidad, por lo que se ha decidido utilizarlos para los cálculos posteriores, arriba mencionados.

AZIMUTES DIRECTOS E INVERSOS

Est.	P.V.		
3	4	291° 24' 10".043	111° 36' 44".75
3	2	250° 12' 45".853	70° 26' 57".0885
4	6	55° 14' 44".5665	235° 01' 49".185
6	3	181° 43' 21".80	1° 43' 47".04217
4	5	285° 02' 47".346	105° 17' 38".701
3	1	212° 35' 28".528	32° 40' 24".1189
1	4	328° 35' 51".22	148° 43' 33".413
3	7	332° 14' 44".842	152° 24' 40".518
6	7	295° 43' 16".158	115° 53' 33".27
4	2	188° 47' 05".332	8° 48' 38".45188
4	7	10° 26' 17".8716	190° 23' 43".71
4	8	308° 44' 34".66	129° 03' 07".317
5	7	60° 17' 18".2109	239° 59' 58".359
5	8	341° 01' 41".254	161° 05' 26".389

Todos estos azimutes son calculados y son los que tomaremos en cierto caso como observados al ser empleados en los calculos posteriores.

DISTANCIAS MEDIDAS Y CALCULADAS

Est.	P.V.	D.M.	D.C.	Dif.
1	3	28752.001	28752.0175	0.01628
1	4	46744.10219	46744.991	-0.8881
3	2	47484.7607	47486.04405	1.28335
4	2	32074.46992	32072.649	-1.7706
3	4	42855.719	42855.682	-0.03776
3	7	68311.945	68314.220	2.2751
3	6	44499.315	44498.939	-0.37603
4	6	50326.119	50326.119	0.00039
6	7	36804.3597	36803.988	-0.372
4	7	45536.403	45539.528	3.124
4	5	49043.905	49043.073	-0.83155
4	8	76401.06117	76403.48053	2.4194
5	8	37150.363	37154.199	3.8367

Mostrando numericamente el término (α_{ij} - d_{ij} $-Z_i$) del Modelo Matemático Linealizado para direcciones tenemos:

Dirección fija 1 - 2

1 - 2 =	$285^\circ\ 40'\ 38''.88$	$-$	0	$-$	$285^\circ\ 40'\ 38''.88$	=	$0''$
1 - 4 =	$328^\circ\ 35'\ 51''.22$	$-$	$42^\circ\ 55'\ 20''$	$-$	$285^\circ\ 40'\ 38''.88$	=	$-7''.656$
1 - 3 =	$32^\circ\ 40'\ 24''.1189$	$-$	$106^\circ\ 59'\ 45''.006$	$-$	$285^\circ\ 40'\ 38''.88$	=	$0''.228$

Dirección fija 3 - 2

3 - 1 =	$212^\circ\ 35'\ 28''.528$	$-$	0	$-$	$212^\circ\ 35'\ 28''.528$	=	$0''$
3 - 2 =	$250^\circ\ 12'\ 45''.853$	$-$	$37^\circ\ 37'\ 07''.88$	$-$	$212^\circ\ 35'\ 28''.528$	=	$9''.438$
3 - 4 =	$291^\circ\ 24'\ 10''.043$	$-$	$78^\circ\ 48'\ 41''.80$	$-$	$212^\circ\ 35'\ 28''.528$	=	$-0''.282$
3 - 7 =	$332^\circ\ 14'\ 44''.842$	$-$	$119^\circ\ 39'\ 08''.79$	$-$	$212^\circ\ 35'\ 28''.528$	=	$7''.518$
3 - 6 =	$1^\circ\ 43'\ 47''.04217$	$-$	$149^\circ\ 08'\ 23''.90$	$-$	$212^\circ\ 35'\ 28''.528$	=	$-5''.382$

Dirección fija 7 - 6

7 - 6 =	$115^\circ\ 53'\ 33''.27$	$-$	0	$-$	$115^\circ\ 53'\ 33''.27$	=	$0''$
7 - 3 =	$152^\circ\ 24'\ 40''.518$	$-$	$36^\circ\ 31'\ 22''.36$	$-$	$115^\circ\ 53'\ 33''.27$	=	$-15''.108$
7 - 4 =	$190^\circ\ 23'\ 43''.71$	$-$	$74^\circ\ 30'\ 33''.05$	$-$	$115^\circ\ 53'\ 33''.27$	=	$-22''.608$
7 - 5 =	$239^\circ\ 59'\ 58''.359$	$-$	$124^\circ\ 06'\ 53''.46$	$-$	$115^\circ\ 53'\ 33''.27$	=	$-28''.368$
7 - 8 =	$272^\circ\ 30'\ 55''.971$	$-$	$156^\circ\ 37'\ 43''.45$	$-$	$115^\circ\ 53'\ 33''.27$	=	$-20''.742$

Dirección fija 4 - 5

$4-5 = 285^\circ\ 02'\ 47''.346 - 0 - 285^\circ\ 02'\ 47''.346 = 0''$

$4-8 = 308^\circ\ 44'\ 34''.66 - 23^\circ\ 41'\ 47''.86 - 285^\circ\ 02'\ 47''.346 = -0''.540$

$4-7 = 10^\circ\ 26'\ 17''.8716 - 85^\circ\ 23'\ 39''.14 - 285^\circ\ 02'\ 47''.346 = -8''.61$

$4-6 = 55^\circ\ 14'\ 44''.5665 - 130^\circ\ 12'\ 06''.24 - 285^\circ\ 02'\ 47''.346 = -9''.018$

$4-3 = 111^\circ\ 36'\ 44''.75 - 186^\circ\ 34'\ 06''.71 - 285^\circ\ 02'\ 47''.346 = -9''.306$

$4-1 = 148^\circ\ 43'\ 33''.413 - 223^\circ\ 41'\ 03''.42 - 285^\circ\ 02'\ 47''.346 = -17''.352$

$4-2 = 188^\circ\ 47'\ 05''.332 - 263^\circ\ 44'\ 23''.50 - 285^\circ\ 02'\ 47''.346 = -5''.508$

Estación fija 8 - 7

$8-7 = 92^\circ\ 51'\ 54''.9933 - 0 - 92^\circ\ 51'\ 54''.9933 = 0''$

$8-4 = 129^\circ\ 03'\ 07''.317 - 36^\circ\ 11'\ 09''.46 - 92^\circ\ 51'\ 54''.9933 = 2''.862$

$8-5 = 161^\circ\ 05'\ 26''.389 - 68^\circ\ 13'\ 40''.806 - 92^\circ\ 51'\ 54''.9933 = -9''.402$

Estación fija 5 - 8

$5-8 = 341^\circ\ 01'\ 41''.254 - 0 - 341^\circ\ 01'\ 41''.254 = 0$

$5-7 = 60^\circ\ 17'\ 18''.2109 - 79^\circ\ 15'\ 33''.24 - 341^\circ\ 01'\ 41''.254 = 3''.714$

$5-4 = 105^\circ\ 17'\ 38''.701 - 124^\circ\ 15'\ 39''.630 - 341^\circ\ 01'\ 41''.254 = 17''.814$

Estación fija 2 - 4

$2 - 4 = 8^{\circ}\ 48'\ 38''.45188 - 0 - 8^{\circ}\ 48'\ 38''.45188 = 0''$

$2 - 3 = 70^{\circ}\ 26'\ 57''.0885 - 61^{\circ}\ 38'\ 14''.15 - 8^{\circ}\ 48'\ 38''.45188 = 4''.482$

$2 - 1 = 105^{\circ}\ 49'\ 56''.647 - 97^{\circ}\ 01'\ 20''.83 - 8^{\circ}\ 48'\ 38''.45188 = -2''.628$

Estación fija 6 - 3

$6 - 3 = 181^{\circ}\ 43'\ 21''.80 - 0 - 181^{\circ}\ 43'\ 21''.80 = 0$

$6 - 4 = 235^{\circ}\ 01'\ 49''.185 - 53^{\circ}\ 18'\ 24''.48 - 181^{\circ}\ 43'\ 21''.80 = 2''.904$

$6 - 7 = 295^{\circ}\ 43'\ 16''.158 - 113^{\circ}\ 59'\ 24''.29 - 181^{\circ}\ 43'\ 21''.8= = 30''.066$

DIRECCIONES USADAS PARA EL AJUSTE

1	2	0° 00' 00"
	4	42° 55' 20"
	3	106° 59' 45".006
3	1	0° 00' 00"
	2	37° 37' 07".88
	4	78° 48' 41".80
	7	119° 39' 08".79
	6	149° 08' 23".90
7	6	0° 00' 00"
	3	36° 31' 22".36
	4	74° 30' 33".05
	5	124° 06' 53".46
	8	156° 37' 43".45
4	5	0° 00' 00"
	8	23° 41' 47".86
	7	85° 23' 39".14
	6	130° 12' 06".24
	3	186° 34' 06".71

	1	223° 41' 03".42
	2	263° 44' 23".50
8	7	0° 00' 00"
	4	36° 11' 09".46
	5	68° 13' 40".81
5	8	0° 00' 00"
	7	79° 15' 33".24
	4	124° 15' 39".630
2	4	0° 00' 00"
	3	61° 38' 14".15
	1	97° 01' 20".83
6	3	0° 00' 00"
	4	53° 18' 24".48
	7	113° 59' 24".29

TEMA 5

AJUSTE PARAMETRICO DEL LEVANTAMIENTO GEODESICO

Mostrando numéricamente los valores de los coeficientes del Modelo Matemático linealizado de las distancias (3 - 41) tenemos:

$$
\begin{aligned}
Vs\ 1-3 &= 0d\varphi_1 + 0d\lambda_1 + 25.9444\ d\varphi_3 - 14.3737\ d\lambda_3 + 0.01628\\
Vs\ 1-4 &= 0d\varphi_1 + 0d\lambda_1 + 26.3183\ d\varphi_4 + 13.8731\ d\lambda_4 - 0.8888\\
Vs\ 3-2 &= 10.4244\ d\varphi_3 - 25.1095\ d\lambda_3 + 0d\varphi_2 + 0d\lambda_2 + 1.2834\\
Vs\ 4-2 &= 30.4314\ d\varphi_4 - 4.0813\ d\lambda_4 + 0d\varphi_2 + 0d\lambda_2 - 1.7706\\
Vs\ 3-4 &= -11.2372\ d\varphi_3 - 24.8448\ d\lambda_3 + 11.3417\ d\varphi_4 + 24.8448\ d\lambda_4 - 0.0378\\
Vs\ 3-6 &= -30.7793\ d\varphi_3 + 0.8055\ d\lambda_3 + 30.7775\ d\varphi_6 - 0.8055\ d\lambda_3 - 0.3760\\
Vs\ 4-6 &= -17.5536\ d\varphi_4 + 21.9562\ d\lambda_4 + 17.6479\ d\varphi_6 - 21.9562\ d\lambda_6 + 0.00039\\
Vs\ 6-7 &= -13.3632\ d\varphi_6 - 24.1388\ d\lambda_6 + 0d\varphi_7 + 0d\lambda_7 - 0.3720\\
Vs\ 4-7 &= -30.2830\ d\varphi_4 + 4.8417\ d\lambda_4 + 0d\varphi_7 + 0d\lambda_7 + 3.1243\\
Vs\ 4-5 &= -\ 7.9938\ d\varphi_4 - 25.8073\ d\lambda_4 + 8.1221\ d\varphi_5 + 25.8073\ d\lambda_5 - 0.8316\\
Vs\ 4-8 &= -19.2709\ d\varphi_4 - 20.8433\ d\lambda_4 + 0d\varphi_8 + 0d\lambda_8 + 2.4194\\
Vs\ 5-8 &= -29.1194\ d\varphi_5 - 8.6981\ d\lambda_5 + 0d\varphi_8 + 0d\lambda_8 + 3.8366\\
Vs\ 3-7 &= -27.2506\ d\varphi_3 - 12.4267\ d\lambda_3 + 0d\varphi_7 + 0d\lambda_7 + 2.2751
\end{aligned}
$$

Enseguida se muestra numéricamente los valores de los coeficientes del Modelo Matemático Linealizado de las direcciones (3 - 45) ; tenemos:

$$V_{d\,1-4} = 0d\varphi_1 + 0d\lambda_1 + 70.5380\,d\varphi_4 - 100.7867\,d\lambda_4 - dZ_1 - 7.656$$

$$V_{d\,1-3} = 0d\varphi_1 + 0d\lambda_1 - 118.9909\,d\varphi_3 - 161.2920\,d\lambda_3 - 1dZ_1 + 0.228$$

$$V_{d\,3-1} = -118.9909\,d\varphi_3 - 160.7838\,d\lambda_3 + 0d\varphi_1 + 0d\lambda_1 - 1dZ_3 + 0$$

$$V_{d\,3-6} = 4.3084\,d\varphi_3 + 124.1386\,d\lambda_3 - 4.2907\,d\varphi_6 - 124.1386\,d\lambda_6 - 1dZ_3 - 5.382$$

$$V_{d\,3-2} = -125.8625\,d\varphi_3 - 38.7328\,d\lambda_3 + 0d\varphi_2 + 0d\lambda_2 - 1dZ_3 + 9.438$$

$$V_{d\,3-4} = -137.9876\,d\varphi_3 + 47.3743\,d\lambda_3 + 137.7857\,d\varphi_4 - 47.3743\,d\lambda_4 - 1dZ_3 - 0.282$$

$$V_{d\,3-7} = -43.2984\,d\varphi_3 + 71.8069\,d\lambda_3 + 0d\varphi_7 + 0d\lambda_7 - 1dZ_3 + 7.518$$

$$V_{d\,7-6} = 0d\varphi_7 + 0d\lambda_7 - 155.4676\,d\varphi_6 + 65.1687\,d\lambda_6 - 1dZ_7 + 0$$

$$V_{d\,7-3} = 0d\varphi_7 + 0d\lambda_7 - 43.2984\,d\varphi_3 + 71.3045\,d\lambda_3 - 1dZ_7 - 15.108$$

$$V_{d\,7-4} = 0d\varphi_7 + 0d\lambda_7 + 25.2706\,d\varphi_4 + 119.0455\,d\lambda_4 - 1dZ_7 - 22.608$$

$$V_{d\,7-5} = 0d\varphi_7 + 0d\lambda_7 + 85.9986\,d\varphi_5 + 42.6414\,d\lambda_5 - 1dZ_7 - 28.368$$

$$V_{d\,4-5} = -125.0651\,d\varphi_4 + 29.6807\,d\lambda_4 + 124.9164\,d\varphi_5 - 29.6807\,d\lambda_5 - 1dZ_4 + 0$$

$$V_{d\,4-8} = -64.8404\,d\varphi_4 + 45.6529\,d\lambda_4 + 0d\varphi_8 + 0d\lambda_8 - 1dZ_4 - 0.540$$

$$V_{d\,4-7} = 25.2706\,d\varphi_4 + 119.5469\,d\lambda_4 + 0d\varphi_7 + 0d\lambda_7 - 1dZ_4 - 8.61$$

$$V_{d\,4-6} = 103.6910\,d\varphi_4 + 62.9399\,d\lambda_4 - 103.4157\,d\varphi_6 - 62.9399\,d\lambda_6 - 1dZ_4 - 9.018$$

$$V_{d\,4-3} = 137.7857\,d\varphi_4 - 46.8689\,d\lambda_4 - 137.9876\,d\varphi_3 + 46.8689\,d\lambda_3 - 1dZ_4 - 9.306$$

$$V_{d\,4-1} = 70.5380\,d\varphi_4 - 100.2795\,d\lambda_4 + 0d\varphi_1 + 0d\lambda_1 - 1dZ_4 - 17.352$$

$$V_{d\,4-2} = -30.2426\,d\varphi_4 - 169.3315\,d\lambda_4 + 0d\varphi_2 + 0d\lambda_2 - 1dZ_4 - 5.508$$

$$V_{d\,8-4} = 0d\varphi_8 + 0d\lambda_8 - 64.8404\,d\varphi_4 + 45.1518\,d\lambda_4 - 1dZ_8 + 2.862$$

$$V_{d\,8-5} = 0d\varphi_8 + 0d\lambda_8 - 136.6708\,d\varphi_5 + 91.8513\,d\lambda_5 - 1dZ_8 - 9.402$$

$$V_{d\,5-8} = -136.6708\,d\varphi_5 + 125.5269\,d\lambda_5 + 0d\varphi_8 + 0d\lambda_8 - 1dZ_5 + 0$$

$$V_{d\,5-7} = 80.3686\,d\varphi_5 + 71.8019\,d\lambda_5 + 0d\varphi_7 + 0d\lambda_7 - 1dZ_5 + 3.714$$

$$V_{d\,5-4} = 129.0552\,d\varphi_5 + 26.9284\,d\lambda_5 - 125.9489\,d\varphi_4 - 26.9284\,d\lambda_4 - 1dZ_5 + 17.814$$

$$V_{d\,2-4} = 0d\varphi_2 + 0d\lambda_2 + 34.7048\,d\varphi_4 - 174.1807\,d\lambda_4 - 1dZ_2 + 0$$

$$V_{d\,2-3} = 0d\varphi_2 + 0d\lambda_2 - 94.8983\,d\varphi_3 - 84.1224\,d\lambda_3 - 1dZ_2 + 4.482$$

$$V_{d\,6-3} \;\; 40.4157\,d\varphi_6 - 127.3280\,d\lambda_6 + 3.8776\,d\varphi_3 + 127.3280\,d\lambda_3 - 1dZ_6 + 0$$

$$V_{d\,6-4} = -65.9908\,d\varphi_6 - 72.8969\,d\lambda_6 - 96.2831\,d\varphi_4 + 72.8969\,d\lambda_4 - 1dZ_6 + 2.904$$

$$V_{d\,6-7} = -172.1763\,d\varphi_6 + 38.2146\,d\lambda_6 + 0d\varphi_7 + 0d\lambda_7 - 1dZ_6 + 30.066$$

DESARROLLANDO EL AJUSTE POR MEDIO DE LA FORMULA

$X = (A^T PA)^{-1} \; (A^T PL)$, TENEMOS:

AJUSTE MATRICIAL DE VALORES DE OBSERVACION

METODO DE DIRECCIONES

MATRIZ DE DISENO

```
25.9444 -14.4737 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 26.3183 13.8731 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
10.4244 -25.1095 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 30.4314 -4.08132 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
-11.2372 -24.8448 11.3417 24.8448 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
-30.7793 .805487 0 0 0 0 30.7775 -.805487 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 -17.5536 21.9562 0 0 17.6479 -21.9562 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 -13.3632 -24.1388 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 -30.283 4.84166 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 -7.99385 -25.8073 8.12214 25.8073 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 -19.2709 -20.8433 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 -29.1194 -8.69812 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 -27.2506 -12.4267 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 0 70.5378 -100.787 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0
-118.991 -161.292 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0
-118.991 -160.784 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0
4.30843 124.139 0 0 0 0 -4.2907 -124.139 0 0 -1 0 0 0 0 0
-125.863 -38.7328 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0
-137.988 47.3743 137.786 -47.374 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0
-43.2984 71.8069 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 -155.468 65.1686 0 0 0 0 0 0 -1 0
-43.2984 71.3045 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0
0 0 25.2706 119.046 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0
0 0 0 0 85.9986 42.6414 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0
0 0 -126.065 29.6807 124.916 -29.6807 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0
0 0 -64.8404 45.6529 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0
0 0 25.2706 118.547 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0
0 0 103.691 62.9349 0 0 -103.416 -62.9399 0 0 0 -1 0 0 0 0
-137.988 46.8689 137.786 -46.8689 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0
0 0 70.5379 -100.28 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0
0 0 -30.2426 -168.311 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0
0 0 -64.8404 45.1517 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1
0 0 0 0 -136.671 91.8512 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1
0 0 0 0 -136.671 125.527 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0
0 0 0 0 80.3686 71.8019 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0
0 0 -125.949 -26.9284 129.055 26.9284 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0
0 0 34.7048 -174.181 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0
-94.8983 -84.1225 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0
3.87765 127.328 0 0 0 0 40.4157 -127.328 0 0 0 0 0 -1 0 0
0 0 -96.2831 72.8969 0 0 -65.9908 -72.8969 0 0 0 0 0 -1 0 0
0 0 0 0 0 0 -172.176 38.2146 0 0 0 0 0 -1 0 0
```

MATRIZ DE LAS DIFERENCIAS (VALORES CALCULADOS MENOS LOS OBSERVADOS)

```
 .01628
-.88881
 1.28335
-3.7706
-.03776
-.37603
 .00039
-.372
 3.12434
-.83155
 2.41936
 3.83663
 2.27506
-7.656
 .228
 0
-5.382
 9.438
-.282
 7.518
 0.
-15.108
-22.608
-28.368
 0
-.54
-8.61
-9.018
-9.306
-17.352
-5.508
 2.862
-9.402
 0.
 3.714
 17.814
 0.
 4.482
 0.
 2.804
 10.066
```

MATRIZ DE PESOS

18.58	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	7.11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	6.88	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	14.98	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	8.44	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	7.84	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	6.14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	11.42	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	7.48	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	6.46	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.67	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	11.21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.206	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.474	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.474	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.619	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.536	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.308	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.308	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.924	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.211	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.211	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.079	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.182	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.313	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.067	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.993	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.061	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.113	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.113	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.128	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.247	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.247	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.234	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.239	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.70[illegible]	

TRANSPUESTA DE LA MATRIZ DE DISENO

```
 25.9444  0  10.4244  0 -11.2372 -30.7793  0  0  0  0  0  0 -27.2506  0 -118.991 -118.991  4.30843 -125.863 -137.988 -43.2984  0
-43.2984  0  0  0  0  0  0 -137.988  0  0  0  0  0  0  0  0 -94.8981  3.87705  0  0
-14.3737  0 -25.1105  0 -24.8448  .805487  0  0  0  0  0  0 -12.4217  0 -161.292 -160.784  124.139 -36.7328  47.3743  71.8069  0
 71.3045  0  0  0  0  0  0  36.8669  0  0  0  0  0  0  0  0 -84.1225  127.328  0  0
 0  26.3183  0  30.4314  11.3417  0 -17.5536  0 -30.283 -7.92389 -14.2709  0  0  70.5379  0  0  0  0  137.786  0  0  0 -25.2706  0

-125.065 -64.8404  25.7206  103.691  137.786  70.5379 -30.2426 -64.8404  0  0  0 -125.949  34.7048  0  0 -96.2831  0
 0  13.8731  0 -4.08132  24.8448  0  21.9562  0  4.84168 -25.8073 -20.8433  0  0 -100.787  0  0  0  0 -47.374  0  0  0  119.046  0
 29.6807  45.6529  114.517  62.9349 -46.8689 -100.28 -169.311  45.1517  0  0  0 -26.9284 -174.161  0  0  72.8469  0
 0  0  0  0  0  0  0  0  0  8.12214  0 -24.1194  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  85.9986  124.916  0  0  0  0  0  0  0 -136.671
-136.671  80.4646  124.055  0  0  0  0  0
 0  0  0  0  0  0  0  0  0  25.8073  0 -8.69812  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  42.6414 -29.6807  0  0  0  0  0  0  0  91.8512
 125.527  71.8019  26.9284  0  0  0  0  0
 0  0  0  0  0  30.7775  17.6479 -13.3632  0  0  0  0  0  0  0  0 -4.2907  0  0  0 -155.468  0  0  0  0  0  0 -103.416  0  0  0  0
 0  0  0  0  0  0  40.1157 -65.9908 -172.176
 0  0  0  0  0 -.805487 -21.9562 -24.1388  0  0  0  0  0  0  0  0 -124.139  0  0  0  65.1686  0  0  0  0  0  0 -62.4399  0  0  0  0
 0  0  0  0  0  0 -127.428 -72.8969  38.2146
 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0 -1 -1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0 -1 -1  0  0  0
 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0 -1 -1 -1 -1 -1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0 -1 -1 -1  0  0  0  0  0
 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0 -1 -1 -1
 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0 -1 -1 -1 -1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0 -1 -1  0  0  0  0  0  0  0  0
```

MATRIZ F

62323.4	1765.43	-16304.9	2867.16	0	0	-7240.13	-631.302	24.5121	23.4399	222.96	25.1136	0	-4.80441	56.6343	0
1765.43	71433.2	2837.62	-6998.73	0	0	6357.26	-26256.5	33.2262	20.7783	-22.8978	-8.53014	0	-157.759	-93.2663	0
-16304.9	2837.62	73500.8	-14992.8	-5796.36	-983.586	4683.48	10279.5	-26.8044	-8.57209	-85.2895	-19.4964	16.1215	119.295	-48.6206	64.3865
2867.16	-6998.73	-14992.8	71834.9	-1016.61	-4581.16	-4362.19	-10019.3	38.2991	43.0227	29.3245	18.3706	3.44684	-90.3193	-229.044	-44.8356
0	0	-5796.36	-1016.61	52066.8	-3782.27	0	0	0	0	0	-26.3573	-10.1569	0	-163.397	145.008
0	0	-983.586	-4581.16	-3782.27	20198.4	0	0	0	0	0	6.26263	-25.745	0	-81.0187	-97.4541
-7240.13	6357.26	4683.48	-4362.19	0	0	72691.4	-16221.9	0	0	1.71628	12.4099	0	153.588	203.352	0
-631.302	-26256.5	10279.5	-10019.3	0	0	-16221.9	49518.9	0	0	49.6556	7.55279	0	221.023	-85.2405	0
24.5121	33.2262	-26.8044	38.2991	0	0	0	0	.586	0	0	0	0	0	0	0
23.4399	20.7783	-8.57209	43.0227	0	0	0	0	0	.494	0	0	0	0	0	0
222.96	-22.8978	-85.2395	29.3245	0	0	1.71628	49.6556	0	0	2.503	0	0	0	0	0
25.1138	-8.53014	-19.4964	18.3706	-26.3573	6.26263	12.4099	7.55279	0	0	0	1.183	0	0	0	0
0	0	16.1215	3.44684	-10.1569	-25.745	0	0	0	0	0	0	.354	0	0	0
-4.80441	-157.759	119.295	-90.3193	0	0	153.588	221.023	0	0	0	0	0	3.186	0	0
56.6343	-93.2663	-49.6206	-229.044	-163.397	-81.0187	203.352	-85.2405	0	0	0	0	0	0	6.44	0
0	0	64.3865	-44.8356	145.008	-97.4541	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.054

MATRIZ INVERSA

```
 .292346E-04 -.138823E-05  .249466E-05  .564063E-06 -.168114E-05 -.245361E-05  .918364E-05  .974916E-05 -.107149E-02 -.133634E-02
-.274155E-02 -.782967E-03 -.341223E-03 -.121738E-02 -.473525E-03 -.604819E-04
-.138823E-05  .278848E-01 -.293725E-05  .149701E-04  .371244E-05  .165012E-04 -.507966E-05  .145259E-04 -.263575E-02 -.246172E-02
-.181407E-03 -.944381E-04  .129459E-02  .11502E-02  .158075E-02  .939675E-03
 .249466E-05 -.293725E-05  .185462E-04  .130407E-05  .559174E-05 -.371935E-05 -.794072E-06 -.308034E-05  .829471E-03  .218168E-03
 .438155E-03  .385685E-03 -.967364E-03 -.547322E-03  .202189E-03 -.112413E-02
 .564063E-06  .149701E-04  .130407E-05  .315066E-04  .513423E-05  .263275E-04 -.4347E-05  .127398E-04 -.287192E-02 -.337773E-02
-.487741E-03 -.432516E-03  .169584E-02  .912223E-03  .210962E-02  .153353E-02
-.168114E-05  .371244E-05  .559174E-05  .513423E-05  .304056E-04  .294651E-05 -.464728E-05  .757425E-06 -.219957E-03 -.426494E-03
 .30226E-03  .780647E-03  .782032E-03  .288955E-03  .125867E-02 -.206998E-02
-.245361E-05  .165012E-04 -.371935E-05  .263275E-04  .294651E-05  .103604E-03 -.784124E-05  .123018E-04 -.27239E-02 -.293506E-02
-.304339E-03 -.776166E-03  .753227E-02  .122359E-02  .295741E-02  .539885E-02
 .918364E-05 -.507966E-05 -.794072E-06 -.4347E-05 -.464728E-05 -.784124E-05  .292183E-04  .193114E-04  .151653E-03  .142705E-03
-.124379E-02 -.000669 -.625112E-03 -.30794E-02 -.119849E-02 -.113945E-03
 .974916E-05  .145259E-04 -.308034E-05  .127398E-04  .757425E-06  .123018E-04  .193114E-04  .581687E-04 -.220495E-02 -.223653E-02
-.215698E-02 -.973031E-03  .932628E-03 -.375582E-02  .888602E-03  .904847E-03
-.107149E-02 -.263575E-02  .829471E-03 -.287192E-02 -.219957E-03 -.27239E-02  .151653E-03 -.220495E-02  2.12639  .426215  .176983
 .840154E-01 -.214213 -.969489E-01 -.19845 -.202396
-.133634E-02 -.246172E-02  .218168E-03 -.337773E-02 -.426494E-03 -.293506E-02  .142705E-03 -.223653E-02  .426215  2.4892  .187795
 .854839E-01 -.202739 -.795586E-01 -.224239 -.189717
-.274155E-02 -.181407E-03  .438155E-03 -.487741E-03  .30226E-03 -.304339E-03 -.124379E-02 -.215698E-02  .176983  .187795  .706358
 .106852 -.286659E-01  .166246  .220082E-01 -.06016
-.782967E-03 -.944381E-04  .385685E-03 -.432516E-03  .780647E-03 -.776166E-03 -.000669 -.973031E-03  .840154E-01  .854839E-01
 .106852  .909065 -.475479E-01  .671932E-01  .113094E-01 -.113564
-.341223E-03  .129459E-02 -.967364E-03  .169584E-02  .782032E-03  .753227E-02 -.625112E-03  .932628E-03 -.214213 -.202739
-.286659E-01 -.475479E-01  3.42263  .113321  .221445  .469508
-.121738E-02  .11502E-02 -.547322E-03  .912223E-03  .288955E-03  .122359E-02 -.30794E-02 -.375582E-02 -.969489E-01 -.795586E-01
 .166246  .671932E-01  .113321  .824348  .125924  .747243E-01
-.473525E-03  .158075E-02  .202189E-03  .210962E-02  .125867E-02  .295741E-02 -.119849E-02  .888602E-03 -.19845 -.224239
 .220082E-01  .113094E-01  .221445  .125924  .37764  .911703E-01
-.604819E-04  .939675E-03 -.112413E-02  .153353E-02 -.206998E-02  .539885E-02 -.113945E-03  .904847E-03 -.202396 -.189717 -.06016
-.113564  .469508  .747243E-01  .911703E-01  .957858
```

CORRECCIONES DESV. ESTANDAR

```
X  * -0.029  +  0.021
Y  *  0.011  +  0.020
X  * -0.060  +  0.017

Y  * -0.022  +  0.022
X  * -0.046  +  0.021
Y  * -0.143  +  0.039
X  * -0.072  +  0.021
Y  *  0.075  +  0.029
Z  *  4.217  +  5.638
Z  * -0.387  +  6.100
Z  * -2.971  +  3.249
Z  *  7.978  +  3.686
Z  *-16.385  +  7.153
Z  * -7.449  +  3.510
Z  * 17.664  +  2.376
Z  *  1.378  +  3.784
```

VARIANZA = 3.866254

RESIDUOS (V)

-.913125	-.991791	-1.86103	.04302	-1.13094	-.990015	-2.35986	-.478347	-1.42251
-2.1723	-.80502	-1.24516	-1.61001	1.46331	-2.6993	4.72199	.555374	-3.19315
.634426	-2.49912	-1.56879	-.514125	.789636	.634311	-2.7349	-4.57778	-3.53298
-3.83009	-1.30732	7.38679	3.0979	-1.36852	1.28081	4.84293	-1.2921	-3.13471
2.20161	-2.20161	-3.76204	7.95759	-7.34221				

OBTENIENDO LAS COORDENADAS YA CORREGIDAS

$$\hat{x} = x^{o} + x$$

3	=	$30^{\circ}\ 26\ 00''.5078$	$-$	0.029	=	$30^{\circ}\ 26'\ 00''.4740$
3	=	$106^{\circ}\ 76'\ 29''.19$	$+$	0.011	=	$106^{\circ}\ 16'\ 29''.196$
4	=	$30^{\circ}\ 17'\ 30''.2593$	$-$	0.060	=	$30^{\circ}\ 17'\ 30''.192$
4	=	$105^{\circ}\ 51'\ 36''.113$	$-$	0.022	=	$105^{\circ}\ 51'\ 36''.090$
5	=	$30^{\circ}\ 10'\ 33''.463$	$-$	0.046	=	$30^{\circ}\ 10'\ 33''.414$
5	=	$105^{\circ}\ 22'\ 05''.903$	$-$	0.143	=	$105^{\circ}\ 22'\ 05''.754$
6	=	$30^{\circ}\ 01'\ 56''.0333$	$-$	0.072	=	$30^{\circ}\ 01'\ 55''.956$
6	=	$106^{\circ}\ 17'\ 19''.321$	$+$	0.075	=	$106^{\circ}\ 17'\ 19''.392$

T E M A 6

C O N C L U S I O N E S

Por medio de la distribución χ^2 se hace la prueba de hipótesis del factor de varianza a priori

$$\frac{\hat{V}^T P \hat{V}}{X^2 P_2} \leq \sigma_o^2 \leq \frac{\hat{V}^T P \hat{V}}{X^2 P_1}$$

Los límites de este intervalo se evalúan de:

a) El número de grados de libertad v

b) Valor calculado del factor de varianza estimado $\hat{\sigma}_o^2$ (aposteriori)

c) Valores tabulados de $X^2 P_1$ y $X^2 P_2$, correspondiendo a los grados de libertad v, y las probabilidades $(\frac{1-\alpha}{2})$ % y $(\frac{1+\alpha}{2})$ %

Las siguientes estimaciones a priori dadas para este ajuste son:

$\sigma_o^2 = 1$

$\sigma_{dir} = 2''.1302089$

$\sigma_{dis} = 0.016386$ m.

Las otras características de este ajuste son:

n° de Incógnitas = u = 16

n° de Observaciones = n = 41

Grados de Libertad = n − u = 25

y 4 puntos fijos

Del ajuste se obtuvieron los siguientes resultados

$\hat{\sigma}_o^2 = 3.866254$

v = 25

$\hat{\sigma}_o^2 = \frac{\hat{V}^T \ P \ \hat{V}}{v}$; obteniendo $\hat{V}^T \ P \ \hat{V}$ tenemos $\hat{\sigma}_o^2 \cdot v = \hat{V}^T \ P \ \hat{V}$

$$(3.866254) (25) = 96.65635$$

$$\hat{V}^T \ P \ \hat{V} = 96.65635$$

Los valores tabulados para χ^2 al ser usados en el intervalo de confianza

$x^2 \ P_1 = x^2 \ (25) \ , \ 0.025 = 13.1$

$x^2 \ P_2 = x^2 \ (25) \ , \ 0.975 = 40.6$

y los límites del intervalo de confianza para σ_o^2 son :

$$2.3807 \leq \sigma_o^2 \leq 7.3783$$

entonces la prueba falla para $\sigma_o^2 = 1$

La razón por la cual la prueba falla puede ser alguna de las siguientes :

a) Presencia de errores sistemáticos en las observaciones

b) Separación de la normalidad en las observaciones

c) Valor impropio de las varianzas de las observaciones

d) Modelo Matemático Inadecuado

Los resultados están dados al 38% de probabilidad, esto es porque esta representado en dos dimensiones, según Krakiwsky (1973) estos resultados de este ajuste, están relacionados con la matriz de varianzas-covarianzas del vector solución $\hat{X}$, estadísticamente la probabilidad del 38% para transformarla al 95% se emplea la siguiente fórmula:

$\sqrt{2 \ F_{2} \ , \ v, \alpha} = 2.45$ que es el factor deseado

B I B L I O G R A F I A

- Geodesia
  Autor: Wolfang Torge

- Cálculo de Ajustes en Ingeniería Topográfica
  Autor: Ing. Rafael Sosa Torres

- Apuntes Universitarios sobre Principios Matriciales

- Apuntes Universitarios sobre Teoría de los Errores

- Apuntes Universitarios sobre Ajustes

- Apuntes Universitarios sobre Geodesia Geométrica I y II

- Publiaciones Editadas en el Canada sobre Triangulaciones, Trilateraciones e Información Estadística
  Propiedad: M.I. Raymundo Arvizu Díaz