29537

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ANALISIS DE CADENAS DE MARKOV POR COMPUTADORA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

ENRIQUE MIYOSHI YAMAMOTO ARAO

México, D. F. 1989

C O N T E N I D O

****

I N T R O D U C C I O N

El hombre, en su cotidiana actividad, enfrenta una variedad de fenómenos o situaciones que le resultan incomprensibles y cuyas consecuencias o resultados son inciertos. Sin embargo, siempre existe la necesidad de tomar decisiones concernientes a dichos fenómenos, por lo que en la mayoría de las ocasiones, las decisiones deben tomarse ante circunstancias inciertas. La Teoría de la Probabilidad surge con la necesidad de comprender este tipo de fenómenos y como alternativa a la imposibilidad de conocer y entender completamente su comportamiento.

Actualmente, la Teoría de la Probabilidad se enfoca al estudio de modelos matemáticos que representan fenómenos aleatorios. Desde el punto de vista práctico, pretende identificar la correspondencia entre una situación real en estudio, la cual está sujeta al azar, y un modelo matemático compuesto por una variable aleatoria y una función que representa la probabilidad de que esa variable asuma un determinado valor o se encuentre en un cierto intervalo (función de densidad o de distribución probabilística).

Sin embargo, el planteamiento anterior corresponde a un enfoque estático, bajo el cual no se contempla el comportamiento de una variable aleatoria a través del tiempo. Al incorporar el factor tiempo a este tipo de análisis, la Teoría de la Probabilidad cobra un caracter dinámico, que se traduce en los llamados Procesos Estocásticos. Este caracter dinámico no es generado exclusivamente por el parámetro tiempo, sino que existen otros factores que pueden propiciar esta índole cambiante en la Teoria de la Probabilidad.

Las Cadenas de Markov constituyen un tipo particular de proceso estocástico, y como tal su aplicación se enfoca básicamente al análisis de fenómenos dinámicos, es decir aquellos en los cuales el transcurrir del tiempo propicia una variación en las características de su comportamiento. Actualmente en un mundo cambiante de constante transformación, los fenómenos a los cuales se enfrenta el hombre moderno son en la gran mayoria de los casos, de caracter dinámico. Consecuentemente existe una gran cantidad de fenómenos o procesos que son suceptibles de ser analizados a través de Cadenas de Markov. Los sistemas de aprovechamientos hidráulicos, procesos de transmisión de caracteres hereditarios en el campo de la Genética, teoria de juegos, inventarios, etc. son algunos campos en los que los modelos de Cadenas de Markov tienen una gran aplicación.

Básicamente el estudio de Cadenas de Markov se centra en la matriz de probabilidades de transición, la cual está constituida por las probabilidades de transición existentes entre todos los posibles estados o situaciones en las que puede caer el fenómeno bajo estudio. La dimensión de la matriz de transición está dada en función del número de estados o resultados posibles, por lo que mientras mayor sea la cantidad de estados, mayor será la complejidad asociada al manejo de la matriz de transición correspondiente. Los cálculos que se realizan con las entradas de la matriz de transición son sencillos, aunque pueden llegar a ser muy numerosos, lo que ocasiona que el manejo de las Cadenas de Markov asociadas resulte un tanto complicado. Sin embargo, considerando las ventajas que nos proporciona el adelanto tecnológico de las computadoras, este problema de manipulación resulta insignificante, ya que el uso de un programa de cómputo nos permite realizar operaciones con matrices de una manera rápida y fácil, manteniendo además organizada nuestra información y los resultados obtenidos.

El presente trabajo tiene por objetivo mostrar el enorme potencial que las Cadenas de Markov tienen como herramientas de análisis, en el estudio de sistemas dinámicos reales, así como la estructura e implantación de un programa de cómputo que realice las tareas básicas relacionadas con el análisis de estas cadenas.

En el primer capítulo se define lo que es una cadena de Markov, se establecen algunos conceptos básicos acerca de ellas, y se destacan aspectos de importancia en su análisis.

El segundo capítulo se ocupa de presentar las principales estadísticas asociadas a una cadena de Markov, así como de mostrar un procedimiento mediante el cual pueden ser calculadas.

En el tercer capítulo se analiza la estructura de un programa de cómputo desarrollado para el análisis de cadenas de Markov, presentando la forma de operarlo.

El cuarto capítulo está constituido por ejemplos de aplicación a problemas con características reales.

En la parte final, se presentan las conclusiones derivadas en el desarrollo de este trabajo.

CAPITULO I

CONCEPTOS DE CADENAS DE MARKOV

Las Cadenas de Markov constituyen uno de los procesos estocásticos mas importantes y por consiguiente mas estudiados dentro del campo de la Probabilidad.

Las propiedades analiticas que presentan y las caracteristicas asintóticas de su comportamiento, han propiciado su utilización en el estudio de diversos fenómenos, sobre todo en aquellos que tienen un caracter dinámico, es decir donde el comportamiento de las variables de estudio a lo largo del tiempo es importante. Asi mismo la simplicidad de su interpretación y la aplicación que esta clase de procesos estccásticos ha encontrado en diversas ramas de la ciencia han ocasionado que las Cadenas de Markov cobren una mayor importancia como instrumentos de análisis en la toma de decisiones.

Dentro de los procesos markovianos exiten varios tipos, los que nos ocupan en el presente trabajo son aquellos que tienen un número finito de estados y cuyo parámetro del tiempo es medido en forma discreta.

El desarrollo de este primer capitulo es como sigue: en la primera sección del capitulo se define lo que es una Cadena de Markov y se establecen algunos conceptos de utilidad para su estudio, en la segunda sección se plantea el problema de la clasificación de estados de una cadena, en la siguiente sección se analiza el comportamiento de aquellos estados que son transitorios, las siguientes dos secciones se enfocan al estudio de estados recurrentes, a través del concepto de periodicidad y distribuciones limites; por último se incluyen algunos ejemplos de caracter ilustrativo.

1.1 CADENAS DE MARKOV SIMPLES

Las cadenas de Markov son utilizadas para representar sistemas dinámicos que cambian de manera probabilística en el tiempo. Debido a la naturaleza dinámica de este tipo de procesos, un aspecto que resulta necesario considerar al momento de su estudio es el concepto de estado del sistema; el cual se refiere a la información relevante del sistema en un instante de tiempo dado. Por ejemplo en un sistema de inventarios, el estado del sistema podría ser el nivel de inventario al final de un periodo de operación; en el caso de una presa, el estado del sistema puede representar el nivel de agua al inicio de un periodo de producción agrícola.

El estado de un sistema en el instante o periodo n se denota como $x(n)$ o bién x_n, por lo tanto nos interesa estudiar el comportamiento de los valores $\{ x(n) \}$ cuando el parámetro n varía. El conjunto de estados que puede tener un sistema en el transcurso del tiempo, es conocido como espacio de estados.

Las cadenas de Markov se pueden clasificar en base a diversas características, sin embargo las que consideraremos a lo largo del presente trabajo son aquellas cadenas cuyo espacio de estados es finito y en las cuales el parámetro del tiempo es de naturaleza discreta.

Consideremos un proceso estocástico $X=\{x(n) \mid n \in N\}$ donde los valores que puede tomar $x(n)$ pertenecen a un conjunto finito E (espacio de estados).

Definición.- Un proceso estocástico $X=\{ x(n) \mid n \in N \}$ es una cadena de Markov si cumple que:

$$P[x_n=i_n \mid x_{n-1}=i_{n-1}, x_{n-2}=i_{n-2},\ldots x_0=i_0] = P[x_n=i_n \mid x_{n-1}=i_{n-1}]$$

donde $i_n, i_{n-1},\ldots,i_0$ son elementos de E, en otras palabras, una cadena de Markov es una sucesión de variables aleatorias tal que en la etapa n-1, el evento $x(n)$ solo depende de $x(n-1)$ y la historia pasada $x(0), x(1), x(2),\ldots,x(n-2)$ es irrelevante.

Otra restricción que impondremos en el tipo de cadenas de Markov que consideraremos es que

$$P[x_n=j \mid x_{n-1}=i] = P[x_{n+k}=j \mid x_{n+k-1}=i]$$
$$\text{para } k = -(n-1),-(n-2),\ldots,-1,0,1,2,\ldots$$

es decir la probabilidad de transición es independiente de la etapa en la cual se localiza la cadena. Las cadenas de Markov que cumplen esta propiedad se dice que son homogéneas o estacionarias, pues las probabilidades de transición asociadas a ellas no dependen del tiempo. De esta manera la probabilidad de pasar del estado i al estado j en la siguiente etapa, se denota por p_{ij}.

Consideremos una cadena de Markov cuyo espacio de estados es el conjunto $E=\{1,2,3,4,\ldots,n\}$, esto es hay n diferentes estados, y suponga que existen n^2 probabilidades de transición p_{ij}, $i=1,2,\ldots,n$; $j=1,2,\ldots,n$. Una forma sencilla de guardar y manejar estos valores es a través de una matriz P, denominada matriz de transición, donde el elemento que se encuentra en el renglón i y en la columna j, representa la probabilidad de transición del estado i al estado j.

$$P = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix}$$

Definición.- Una matriz $P=[p_{ij}]$ de orden nxn se denomina matriz de transición si todas sus entradas son no_negativas, y la suma de los elementos de cada renglón es igual a 1. Especificamente satisface las siguientes propiedades:

a) $p_{ij} > 0 \quad i,j=1,2,\ldots,n$

b) $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1 \quad i=1,2,\ldots,n$

El teorema siguiente introduce la ecuación de Chapman_Kolmogorov la cual es de fundamental importancia para el estudio de los procesos Markovianos. Para cualquier par de enteros no-negativos m y n, la ecuación proporciona la probabilidad de que una cadena de Markov caiga en el estado j después de m+n pasos, dado que inicialmente se encuentra en el estado i.

Denotemos por $p_{ij}(n)$ la probabilidad de transición en n pasos del estado i al estado j, es decir $p_{ij}(n)$ representa la probabilidad de que después de n transiciones la cadena se encuentre en el estado j, dado que actualmente está en i.

Teorema.- (Ecuación de Chapman-Kolmogorov). Sean n y m enteros no-negativos i y j elementos del espacio de estados (E). Entonces :

$$p_{ij}(n+m) = \sum_{k \in E} p_{ik}(n)\, p_{kj}(m)$$

el lado izquierdo de la ecuación representa la probabilidad de ir del estado i al estado j en n+m pasos. Aqui están englobadas las probabilidades de todos los caminos posibles que inician en i y después de n+m pasos terminan en el estado j. El lado derecho de la igualdad considera este conjunto de caminos y lo particiona de acuerdo al estado donde se encuentra la cadena después de n pasos. Todos aquellos caminos que van de i a k en n pasos y depués de k a j en m pasos son englobados y la probabilidad de este grupo de caminos esta dada por $p_{ik}(n)p_{kj}(m)$. Ahora, si sumamos estas probabilidades sobre todos los estados de E, obtendremos la probabilidad de ir de i a j en n+m pasos.

La matriz $P=(p_{ij})$ representa las probabilidades de transición en 1 paso entre los diferentes estados, sin embargo la matriz P^2 también es una matriz de transición y representa las probabilidades de transición en dos pasos, ésto es fácil de comprobar utilizando la igualdad de Chapman_Kolmogorov presentada anteriormente; en general P^n representa las probabilidades de transición en n pasos.

1.2 CLASIFICACION DE ESTADOS.

Un primer paso en el análisis de una Cadena Markoviana, es el determinar las relaciones entre los diferentes estados existentes, por ejemplo, nos interesaría saber si dados dos estados cualesquiera existe la posibilidad de que la cadena visite uno a partir del otro, o bién si existen estados a los cuales la cadena siempre regresa, o por el contrario, si hay estados que no tienen esperanza de ser visitados una vez que la cadena los deja. Dependiendo de su comportamiento con relación a estos aspectos, los estados reciben diversas clasificaciones.

Sean dos estados i, j elementos de E, decimos que el estado j es accesible desde el estado i si existe algún entero $m > 0$ tal que $p_{ij}(m) > 0$, es decir si existe una probabilidad positiva de visitar el estado j a partir del estado i en algún paso m. Esta propiedad de accesibilidad no es simétrica, ya que si existe m tal que $p_{ij}(m) > 0$ esto no garantiza que exista un entero n tal que $p_{ji}(n) > 0$. Cuando dos estados i, j son accesibles mútuamente, se dice que se "comunican".

La propiedad de comunicación de dos estados de una cadena de Markov es una relación de equivalencia, ya que cumple con las propiedades siguientes:

a) $i \Longleftrightarrow i$

b) Si $i \Longleftrightarrow j$ entonces $j \Longleftrightarrow i$

c) Si $i \Longleftrightarrow j$ y además $j \Longleftrightarrow k$ entonces $i \Longleftrightarrow k$

la propiedad a) es llamada reflexividad y significa que el estado i debe estar relacionado con el mismo, es decir, que i se comunica con i, lo cuál es inmediato de comprobar. La propiedad b) llamada de simetría es también fácil de comprobar, ya que por definición, si i se comunica con j, entonces j se comunica con i. La propiedad c) llamada transitividad se puede comprobar utilizando la ecuación de Chapman-Kolmogorov .

Si i se comunica con j y además j se comunica con k esto significa que existen m y n no-negativos tales que

$$p_{ij}(m) > 0 \quad y \quad p_{jk}(n) > 0$$
$$p_{ij}(m)p_{jk}(n) > 0$$
$$p_{ik}(m+n) = \sum_{t \in E} p_{it}(m)p_{tk}(n) \geq p_{ij}(m)p_{jk}(n) > 0$$

por lo que existe $l=m+n$ no-negativo tal que $p_{ik}(l) > 0$.

Dado que la relación de comunicación es también de equivalencia, se induce una partición en el conjunto sobre el cuál actúa, por lo que el conjunto de estados queda dividido en subconjuntos ajenos que reciben el nombre de clases comunicantes.

Proposición.- El conjunto de estados de una cadena de Markov se dividen en clases comunicantes ajenas, es decir todos los estados pertenecientes a una misma clase están comunicados entre si, mientras que los estados que pertenecen a diferentes clases, no se comunican.

Prueba.- Sea $i \in E$ un estado, denotemos por C_i el conjunto de estados que se comunican con i, es decir C_i es una clase comunicante. Sea j un estado tal que $j \notin C_i$, y además j comunica con i. Como j se comunica con i, entonces se comunica con todos los estados de C_i, y de igual forma todos los elementos de C_i se comunican con j, esto significa que j pertenece a C_i, pero habiamos supuesto que $j \notin C_i$ lo cual es una contradicción. Entonces las intersecciones de las diferentes clases comunicantes son vacias y todo estado de la cadena pertenece a una y solo una clase comunicante.

Dependiendo de las caracteristicas de los estados que la conforman, una determinada clase puede clasificarse como cerrada o abierta. Una clase comunicante es cerrada si los estados que pertenecen a ella no pueden accesar estados que no pertenezcan a la misma clase comunicante. Una clase es abierta si los estados que pertenecen a ella pueden accesar estados que no pertenezcan a la misma clase comunicante.

Una clase cerrada se dice que es irreducible si todo subconjunto no-propio de esa clase no constituye por si mismo una clase cerrada. Cuando una cadena de Markov solo tiene una clase cerrada y está formada por todo el espacio de estados (E), se dice que esa cadena es irreducible.

Los estados que pertenecen a una clase cerrada, son llamados estados recurrentes, otra forma equivalente de definir un estado recurrente es la siguiente : un estado i elemento de E se dice que es recurrente si:

$$P[\text{ Saliendo de i, la cadena no vuelva jamás }]=0$$

De forma análoga, los estados que pertenecen a una clase abierta, son llamados estados transitorios y también se definen equivalentemente de la forma siguiente:

Un estado $i \in E$ se dice que es transitorio si

$$P[\text{ Saliendo de i, la cadena no vuelva jamás }]>0$$

Si una clase cerrada está formada por un solo estado, dicho estado es llamado absorbente. Cuando una clase abierta consta de un solo estado i, con probabilidad de transicion $P_{ii}(1)=0$, este estado es llamado estado sin retorno.

Si una cadena es irreducible, sabemos que existe una sola clase comunicante, y ésta es cerrada, además todos sus estados son recurrentes, desafortunadamente no todas las cadenas de Markov son irreducibles, por lo que es necesario establecer un procedimiento para determinar las clases comunicantes de una cadena, asi como el tipo al que pertenecen dichas clases.

Un procedimiento para la clasificación de estados, es a través de la utilización de algunos algoritmos de Teoría de Gráficas. Para este fin se consideran los estados como nodos en una gráfica y las probabilidades de transición entre estados se representan a través de arcos ponderados entre los nodos correspondientes. Una discusión mas detallada de estos procedimientos se incluye en el anexo A de este trabajo.

Es importante hacer notar que cualquier cadena de Markov tiene al menos una clase cerrada, ya que en caso de no existir subconjuntos no-propios de E que sean clases cerradas, entonces la cadena es irreducible y el espacio de estados E es una clase cerrada. En particular, no importa que la cadena parta inicialmente de una clase transitoria, siempre existe una probabilidad positiva de que ésta llegue a una clase cerrada en un número finito de pasos. Es decir, tarde o temprano el proceso abandona los estados transitorios y permanece en los estados de alguna clase cerrada.

1.3 ANALISIS DE ESTADOS TRANSITORIOS.

La identificación de las clases cerradas irreducibles existentes en una cadena, además de simplificar el problema de clasificación de estados, facilita el análisis del comportamiento de los estados transitorios.

Consideremos una cadena de Markov cuya matriz de transición es $P=(p_{ij})$; si intercambiamos el orden de las columnas y los renglones de tal forma que los estados que pertenecen a una misma clase cerrada queden agrupados; la nueva matriz de transición (P^*) asume una forma de bloque:

$$P^* = \begin{vmatrix} P_1 & 0 \\ R & Q \end{vmatrix}$$

donde P_1 es una matriz estocástica de orden $r \times r$ que representa la matriz de probabilidades de transición dentro de las clases cerradas (se supone que r estados pertenecen a clases cerradas). Q es una matriz subestocástica de orden $(n-r)\times(n-r)$, es decir, la suma de los elementos de al menos un renglón de Q es menor que uno, esta matriz representa las probabilidades de transición entre estados transitorios. R es una matriz de orden $(n-r)\times r$ que representa las probabilidades de transición de estados transitorios a estados recurrentes.

Considerando el espacio de estados E dividido en 2 subconjuntos ajenos $(T,\bar{T})$, donde uno de ellos contiene los estados transitorios (T) y el otro los recurrentes $(\bar{T})$, podemos analizar el comportamiento de la cadena considerando que el proceso puede iniciar ya sea en un estado recurrente o en uno transitorio.

Si la cadena inicia en un estado recurrente, el proceso nunca abandonará la clase cerrada a la que pertenece dicho estado, y cada uno de los estados de esa clase serán visitados un número infinito de veces.

Si la cadena inicia en un estado transitorio, el proceso, en un número finito de pasos llegará a un estado recurrente, y una vez allí permanecerá para siempre en la clase cerrada a la que pertenece dicho estado.

Ahora bién, sabemos que finalmente la cadena se estabilizará al caer en una clase cerrada, però como podemos saber si este paso se realizará en un plazo de tiempo corto o largo.

Que numero de pasos tardará la cadena en trasladarse de un estado i transitorio a un estado j recurrente? o bién cuantos pasos son necesarios antes de que la cadena caiga en una clase cerrada?, son algunas de las preguntas que nos interesaria poder contestar, para este fin es necesario analizar básicamente el comportamiento de la cadena cuando se encuentra en estados transitorios, ya que al llegar a un estado recurrente, el proceso tiende a estabilizarse, algunos resultados que son de gran utilidad para ésto, se señalan a continuación.

Considerando la representación en forma de bloque de la matriz de transición

$$P = \begin{vmatrix} P_1 & 0 \\ R & Q \end{vmatrix}$$

donde la matriz subestocástica Q representa las probabilidades de transición entre estados transitorios, definimos la matriz $M=[I-Q]^{-1}$ como la matriz fundamental de la cadena de Markov. Mas adelante se comprenderá la importancia de esta matriz.

Proposición.- La matriz $M=[I-Q]^{-1}$ existe y es igual a

$$\sum_{m=0}^{\infty} Q^m \geq 0$$

Consideremos $S = \sum_{m=0}^{\infty} Q^m = I+Q+Q^2+Q^3+\ldots$, admitiendo la siguiente convención $p_{ij}(0) = 1$ si $i=j$ y $p_{ij}(0) = 0$ si $i \neq j$; Q es una matriz de probabilidades de transición exclusivamente entre estados transitorios, de igual forma Q^2, solo que representa probabilidades de transición en dos pasos; en forma general Q^n representa probabilidades de transición entre estados transitorios en n pasos. Dado que los estados transitorios pertenecen a una clase abierta, solo serán visitados un número finito de veces; ésto significa que para cada estado j transitorio existe un entero n_j tal que $0 < n_j < \infty$ y $p_{ij}(n_j)=0$ para todo estado i elemento de E.

Como tenemos un número finito de estados transitorios, podemos encontrar un entero N que es el mayor de todas las n_j's, tal que $p_{ij}(N)=0$ $\forall$ $i,j \in T$. Ahora, como $N < \infty$ entonces

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}(n) = 0 \quad \forall\ i,j \in T$$

$$\text{Por otro lado : } \sum_{m=0}^{\infty} Q^m = \sum_{m=0}^{N} Q^m + \sum_{m=N+1}^{\infty} Q^m$$

$$= \sum_{m=0}^{N} Q^m + 0$$

por lo que $S = \sum_{m=0}^{\infty} Q^m$ converge.

A fin de determinar el valor hacia el cual converge S, consideremos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
S &= I+Q+Q^2+Q^3+\dots \\
QS &= Q+Q^2+Q^3+Q^4+\dots \\
S-QS &= I+Q+Q^2+Q^3+\dots Q^N -(Q+Q^2+Q^3+\dots+Q^N+0) \\
S-QS &= I \\
[I-Q]S &= I \\
S &= [I-Q]^{-1}
\end{aligned}
$$

donde la inversa de [I-Q] existe, ya que S converge.

El elemento m_{ij} de la matriz fundamental M representa el número promedio de veces que la cadena visita el estado j, considerando que partió del estado i. Ahora bién, si consideramos $m_i = \sum_{k \in T} m_{ik}$, es decir m_i es la suma de los elementos del renglón correspondiente al estado i en la matriz M, estamos sumando el número promedio de veces que la cadena visita cualquier estado transitorio, suponiendo que partió del estado i, y como la cadena solo visita estados transitorios antes de caer en un estado recurrente, entonces m_i representa el número promedio de pasos que la cadena efectúa antes de caer en una clase cerrada; un análisis mas amplio del significado y utilidad de la matriz fundamental M se presenta en el capitulo siguiente.

1.4 PERIODICIDAD

Una vez que una cadena de Markov cae en una clase cerrada es imposible que salga de ella, esto significa que a partir de ese paso, los estados que pertenecen a esa clase cerrada serán visitados un número infinito de veces. Ahora bién, podemos esperar que exista una cierta regularidad en el número de pasos que la cadena efectúa, antes de regresar a un determinado estado, o por el contrario, la cadena puede regresar en cualquier etapa a un cierto estado?.

En el contexto cotidiano, el concepto de periodicidad es asociado a una clase de comportamiento en el que un hecho ocurre a intervalos regulares de tiempo o de espacio. Cuando hablamos de periodicidad en un marco referido a Cadenas de Markov, este concepto varía un poco.

Definición.- Un estado j se dice que tiene periodo d, si d es el máximo común divisor del conjunto:

$$Q_j = \{n | p_{jj}(n) > 0\}$$

Analizando la definición de periodicidad observamos que, si bien ésta se define en términos de intervalos de tiempo o de espacio, como pudiera ser el número de transiciones que efectúa la cadena, el concepto de periodicidad dentro del análisis de Cadenas de Markov difiere en cierta forma del concepto cotidiano, ya que la periodicidad dentro de Cadenas de Markov representa un intervalo de tiempo (número de transiciones), después del cual, existe la posibilidad de que el hecho vuelva a ocurrir, pero no hay una absoluta certeza de que ocurra.

El periodo de un estado esta relacionado con el número de transiciones que debe efectuar la cadena antes de que exista una probabilidad positiva de regresar a dicho estado. Esto significa que si un estado j, tiene periodo 3, y la cadena en el paso actual se encuentra en j, la cadena tendrá posibilidades de caer nuevamente en el estado j, solo en exactamente un número de pasos múltiplo de 3.

Cuando el periodo de un estado es igual a 1, se dice que dicho estado es aperiódico.

Teorema.- Todos los estados de una clase comunicante tienen el mismo periodo.

Prueba.- Sean i y j estados que pertenecen a una misma clase comunicante, y sea d_i el periodo de i, es decir d_i es el máximo común divisor de

$$Q_i = \{n | p_{ii}(n) > 0\}$$

Como i comunica con j existen m_1 y m_2 tales que

$$p_{ij}(m_2)>0;\ p_{ji}(m_1)>0$$

Entonces para cualquier $n \in Q_i$ se tiene que $p_{ii}(n)>0$.

Utilizando la igualdad de Chapman-Kolmogorov

$$p_{jj}(m_1+n+m_2) \geq p_{ji}(m_1)p_{ii}(n)p_{ij}(m_2) > 0$$

por lo que $m_1+n+m_2 \in Q_j$.

Por otro lado si $p_{ii}(n) > 0$ entonces $p_{ii}(2n) > 0$ y análogamente $p_{jj}(m_1+2n+m_2) > 0$ lo cual significa que m_1+2n+m_2 también es elemento de Q_j.

Sea d_j el periodo de j, entonces d_j divide a n, es decir a cualquier elemento de Q_i, pero como d_i es el máximo común divisor de Q_i, esto significa que $d_i \geq d_j$.

Procediendo de forma análoga para d_i podemos llegar a la conclusión de que $d_j \geq d_i$; por lo que $d_i = d_j$.

1.5 COMPORTAMIENTO DE CADENAS DE MARKOV A LARGO PLAZO

Probablemente uno de los aspectos más importantes de la teoría de Cadenas de Markov es el referente a la distribución de una cadena entre los diferentes estados de E después de un periodo largo de tiempo. En particular es interesante saber si la distribución asintóticamente será independiente del número de pasos, esto se refiere a si la distribución de x_n converge a una distribución límite cuando n tiende a infinito.

Esta distribución límite, cuando existe es llamada distribución de probabilidades estacionarias.

Como hemos visto en las secciones anteriores la cadena tarde o temprano visitará alguna clase cerrada de la cual no podrá salir nunca, por lo cual es lógico pensar intuitivamente que para un estado j transitorio:

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}(n) = 0 \quad \forall\, i \in E$$

Ya que las clases cerradas están constituidas por estados recurrentes, cuyo comportamiento asintótico puede ser estudiado en forma independiente del resto de los estados que no pertenecen a la misma clase, podemos enfocar nuestra atención sobre el comportamiento a largo plazo de las clases cerradas.

Definición.- Una cadena de Markov se dice que es regular si existe un entero positivo m tal que P^m es estrictamente positiva.

La característica de regularidad de una cadena, significa que después de un número suficientemente grande de transiciones, las probabilidades de transición entre cualquier par de estados son positivas.

El concepto de matriz regular es importante, ya que existen algunos resultados asociados a las matrices regulares, el principal de ellos se describe en el teorema que se enuncia a continuación.

Teorema.- Sea P matriz de transición de una cadena de Markov regular, entonces:

a) Existe un único vector $\pi_0 > 0$ tal que $\pi_0 P = \pi_0$

b) Dado un estado i cualesquiera y e_i un vector renglón cuyo i-ésimo elemento es igual a 1 y el resto son ceros, entonces

$$\pi_0 = \lim_{m \to \infty} e_i P^m$$

c) $P = \lim_{m\to\infty} P^m$ donde P es una matriz cuyos renglones son iguales a π_0.

El teorema anterior nos indica que para una cadena regular, el limite de P^m cuando $m\to\infty$ existe. Además los renglones de la matriz limite P son iguales, esto significa que las probabilidades de transición después de un número suficientemente grande de pasos son independientes del estado del cual parte la cadena.

Prueba.- El resultado a) es inmediato del Teorema de Frobenius-Perron, ya que en este caso el valor $\mu_0 = 1$ puesto que la suma de cada renglón de P es igual a 1.

Para probar los demás resultados consideremos μ cualquier otro vector caracteristico de P diferente de π_0, dicho vector es tal que $|\mu|<1$. Utilizando el Teorema de Jordan podemos escribir P como TJT^{-1} donde T es una matriz no singular y J es la matriz de Jordan, que podemos representar como:

$$J = \begin{vmatrix} 1 & & & & & \\ & J_1 & & & & \\ & & J_2 & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & J_p \end{vmatrix}$$

donde J_i es la forma de Jordan cuyo valor .caracteristico $|\mu_i| < 1 \quad i=1,2,\ldots,p$.

Por lo que $P^m = TJ^mT^{-1}$

$$\lim_{m\to\infty} P^m = T \begin{vmatrix} 1 & & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & & 0 \end{vmatrix} T^{-1} = P$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} e_i P &= \lim_{m\to\infty} e_i P^m \\ &= (\lim_{m\to\infty} e_i P^{m-1})P \\ &= (e_i P)P \end{aligned}$$

Por lo que $\pi_0 = e_i P$.

Ahora, como i fué escogido en forma arbitraria, esto significa que π_0 no depende del número de renglón i, por lo que todos los renglones de P son iguales a π_0.

Una vez establecida la importancia de la regularidad de una matriz, cabe preguntarnos por una forma de verificar a priori la regularidad de una cadena de Markov, pues bajo tales circunstancias, es posible garantizar la existencia de una distribución límite π_0, la cual puede ser calculada resolviendo el sistema de-equaciones $\pi_0 P = \pi_0$.

1.6 EJEMPLOS

Ejemplo 1.- Considérese el siguiente juego; se lanza una moneda cinco veces y el jugador gana dos monedas cuando cae "águila" y pierde dos monedas cuando cae "sol". Si consideramos x_n como la ganancia del jugador en la etapa n, x_n representa una cadena de Markov, donde el espacio de estados está formado por el siguiente conjunto

$$\{-10,-8,-6,-4,-2,0,2,4,6,8,10\}$$

la ganancia del jugador siempre será un múltiplo de 2, ya que en cada oportunidad gana o pierde 2 monedas.

Considerando que la moneda utilizada para el experimento es una moneda "honesta" y tiene la misma probabilidad de 0.5 de caer sol o águila, la matriz de probabilidades de transición sería de la siguiente forma:

	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10
-10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-8	.5	0	.5	0	0	0	0	0	0	0	0
-6	0	.5	0	.5	0	0	0	0	0	0	0
-4	0	0	.5	0	.5	0	0	0	0	0	0
-2	0	0	0	.5	0	.5	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	.5	0	.5	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	.5	0	.5	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	.5	0	.5	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	.5	0	.5	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	.5	0	.5
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Ejemplo 2.- Consideremos el caso de la transmisión de un determinado caracter hereditario en una población cerrada.

La sangre de un ser humano está constituida por glóbulos blancos y glóbulos rojos. Los glóbulos rojos son los encargados de transportar oxígeno, en ellos existe un pigmento proteínico llamado hemoglobina. En individuos normales existe la hemoglobina tipo A representada por un par de genes AA.

Cuando en la hemoglobina ocurren alteraciones genéticas se producen genes del tipo SS que cambian la estructura de los glóbulos rojos propiciando su detrucción, lo que trae como consecuencia una anemia.

Considerando una población cerrada que se genera a partir de dos individuos, podemos obtener seis posibles tipos de union diferentes, los cuales pueden producir tres tipos diferentes de genotipos (AA, SS, AS), en la siguiente tabla se muestran estos tipos de union y las probabilidades de cada genotipo:

		PROBABILIDADES DEL GENOTIPO HIJO	
TIPO DE UNION	AA	AS	SS
1 AA con SS	0	1	0
2 AA con AS	1/2	1/2	0
3 AS con AS	1/4	1/2	1/4
4 AS con SS	0	1/2	1/2
5 AA con AA	1	0	0
6 SS con SS	0	0	1

En cada tipo de unión siempre existen cuatro formas diferentes de combinacion de los genes, ya que cada individuo padre aporta un gen. Por ejemplo en el tipo de unión 3 las combinaciones que pueden obtenerse son AA, AS, SA y SS, por lo que:

P[AA] = 1/4
P[AS] = P[AS U SA] = 1/4 + 1/4 = 1/2
P[SS] = 1/4

Supóngase que tenemos una población en la que (como en algunos grupos aislados) se restringe la reproducción de la especie a efectuarse únicamente entre descendientes. Partiendo de un determinado tipo de unión, podemos obtener la probabilidad de todos los tipos de unión que se pueden producir en el siguiente paso, esto significa que podemos representar el comportamiento de esta población a través de una cadena Markoviana, en donde cada tipo de unión representa un posible estado.

Asi, por ejemplo si nos encontramos en el estado 3 es decir en el tipo de unión AS con AS, podemos calcular las probabilidades de que la siguiente unión sea del tipo 1 (AS con SS).

Para que la siguiente unión sea del tipo 1 es necesario que en la unión actual se produzcan individuos AA y SS, la probabilidad de que se produzca un individuo del genotipo AA a partir de la union tipo 3 es de 1/4, y la probabilidad de que se produzca un individuo del genotipo SS es también de 1/4, pero como la unión tipo 1 puede darse de dos formas distintas (i.e. AA con SS o bién SS con AA) la probabilidad p_{31} = 2 * (1/4 * 1/4) = 1/8.

Asi las probabilidades de transición en un paso son de la siguiente forma:

	1	2	3	4	5	6
1	0	0	1	0	0	0
2	0	1/2	1/4	0	1/4	0
3	1/8	1/4	1/4	1/4	1/16	1/16
4	0	0	1/4	1/2	0	1/4
5	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	1

En esta cadena existen 2 estados absorbentes estos son el 5 (AA con AA) y el 6 (SS con SS), esto significa que los descendientes alcanzarán tarde o temprano los genes tipo AA o SS. Todos los demás tipos de unión son transitorios.

CAPITULO 2

ESTADISTICAS BASICAS DE UNA CADENA DE MARKOV

En el capitulo anterior hemos analizado el problema de la clasificación de estados de una cadena de Markov, y hemos visto la manera en que esta clasificación es útil para el análisis de un proceso representado por una cadena de Markov. Sin embargo la representación de un sistema a través de una cadena de Markov no solo permite determinar que estados tienen caracter de recurrencia o de transitoriedad, sino que también nos proporciona una cantidad considerable de información adicional, acerca del comportamiento esperado del sistema en estudio.

Esta información adicional es proporcionada por diversas estadisticas que se encuentran asociadas a cualquier cadena de Markov.

A través de estas estadisticas podemos conocer por ejemplo el número de veces que en promedio el sistema representado visita un determinado estado, o el número de pasos que en promedio se necesitarán para que el sistema caiga en una clase cerrada de la cual no podrá salir jamás.

Información de este tipo, resulta de gran utilidad al momento de analizar el efecto que sobre el sistema en estudio, pudieran tener diferentes politicas de operación, lo cual nos proporciona criterios para poder evaluar en un momento dado, la bondad de una determinada politica en comparación a otra.

En este segundo capitulo analizaremos algunos de estos conceptos a los que hemos hecho referencia y que se encuentran asociados a una cadena de Markov. Para cada una de las estadisticas incluidas, se presenta una explicación lo mas clara posible acerca de su significado teórico, de igual forma, se ilustra una manera práctica de calcular dichas estadisticas, al final del capitulo se anexan algunos ejemplos que ilustran las estadisticas analizadas.

2.1 REPRESENTACION DE UNA CADENA DE MARKOV A TRAVES DE GRAFICAS.

En el análisis de las estadísticas asociadas a Cadenas de Markov, nos auxiliaremos de algunos conceptos de la Teoria de Gráficas, esto es debido a que existe una relación bastante estrecha entre una cadena de Markov y la representación de una gráfica, lo cual nos permite aprovechar los conceptos desarrollados en la Teoria de Gráficas, para analizar el comportamiento de una cadena de Markov. Concretamente una cadena de Markov puede representarse mediante una gráfica ponderada, en donde cada éstado de la cadena equivale a un vértice de la gráfica y las transiciones entre los estados se representan por medio de arcos entre los vértices correspondientes. El peso de un determinado arco equivale a la probabilidad de transición entre los estados representados por el vértice inicial y el vértice final de dicho arco.

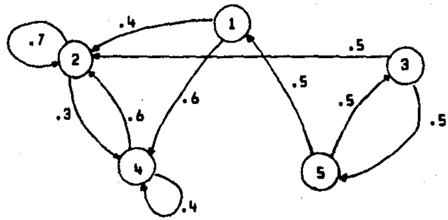
Si la matriz de transición de una cadena de Markov es de orden n, entonces existen n^2 transiciones, de las cuales algunas son transiciones posibles, tales que $p_{ij}(1) > 0$ y otras son transiciones imposibles de tal forma que $p_{ij}(1)=0$, cuando representamos una cadena de Markov por medio de una gráfica, solo es necesario señalar los arcos asociados a transiciones posibles.

A continuación se presenta un ejemplo a fin de ilustrar mejor esta equivalencia.

Considérese una cadena de Markov con espacio de estados {1,2,3,4,5} y cuya matriz de transición es:

	1	2	3	4	5
1	0	.4	0	.6	0
2	0	.7	0	.3	0
3	0	.5	0	0	.5
4	0	.6	0	.4	0
5	.5	0	.5	0	0

Como el espacio de estados tiene cardinalidad 5, la gráfica correspondiente tendrá 5 vértices, solo aquellas entradas de la matriz de transición que sean diferentes de cero tendrán representación como arcos en la gráfica; de esta forma la gráfica ponderada resulta de la siguiente manera:



.4
1
.7
2
.5
3
.5
.6
.5
.3
.6
.5
4
5
.4

2.2 PERIODO DE UNA CLASE CERRADA.

En la sección 4 del capítulo anterior definimos el periodo de un estado j como el máximo común divisor del conjunto $Q_j = \{ n \mid p_{jj}(n) > 0 \}$.

Como se ve, tratar de calcular la periodicidad de un estado j, apegándonos estrictamente a la definición anterior, resulta demasiado laborioso; ya que tendríamos que determinar para que valores enteros de n, la probabilidad de regresar al estado j en n pasos es diferente de cero; es decir, empezando con n=1, incrementar el valor de n, de uno en uno y probar para que n's, $p_{jj}(n)$ resulta diferente de cero, el problema es que este procedimiento nunca termina, ya que n puede ser incrementada sin ningún límite.

Sin embargo, como veremos a continuación existen formas alternativas de calcular la periodicidad de un estado.

Analizando la definición de periodicidad podemos observar que para fines de cálculo, es importante determinar el número de transiciones en las que la cadena, partiendo de un estado determinado puede regresar a dicho estado.

En la representación de cadenas de Markov a través de gráficas, este conjunto de transiciones, resulta ser un circuito, donde el vértice inicial es igual al vértice final, lo cual corresponde a la idea de que la cadena regresa al mismo estado del cual partió, y el número de transiciones necesarias para lograr ésto, es equivalente al número de arcos que componen el circuito correspondiente. Sin embargo el problema del cálculo persiste, ya que por más circuitos que logremos identificar nunca estaremos seguros de que no existe otro circuito cuyo número de arcos no hayamos considerado para el cálculo de la periodicidad, esto es debido a que en una gráfica conexa el número de circuitos no simples es infinito.

Como podemos observar, son los circuitos no simples los que originan las dificultades de cálculo; aunque afortunadamente podemos dejar de considerarlos, ya que no resultan significativos para el propósito de determinar la periodicidad de una clase cerrada, esto es debido a que el número de arcos que componen cualquier circuito no-simple es igual a la suma de la longuitud de los circuitos simples que forman parte de dicho circuito no_simple.

Consideremos un circuito C no-simple, que partiendo de un estado i regresa a éste y está formado por n_c arcos.

Como C es un circuito no-simple, esto significa que existe otro circuito A simple, que va de i a i, y que consta de n_a

arcos, con $n_a < n_c$. El circuito C no-simple, se genera a partir del circuito simple A, al cual se le han aumentado un determinado número de arcos, los cuales constituyen por si mismos otro circuito B, esto es debido a que el conjunto de arcos adicionales mencionados se separan del circuito original A y deben regresar a éste en el mismo estado, de esta forma el número de arcos totales del circuito C resulta ser la suma de las longitudes de los circuitos A y B.

Ahora bién si el circuito B resulta ser no-simple, entonces podemos encontrar, de igual forma en que lo hicimos para C, un circuito simple D a partir del cual se deriva B; este procedimiento podemos realizarlo tantas veces como sea necesario, hasta llegar a descomponer el circuito original C en únicamente circuitos simples, esto significa que el número de arcos del circuito no-simple C, es igual a la suma de las longuitudes de los circuitos simples que lo componen.

Tomando en consideración el resultado anterior, podemos dejar de considerar los circuitos no-simples, al momento de calcular la periodicidad de una clase cerrada, ya que si el número de arcos de un circuito no-simple es una combinación lineal del número de arcos, de varios circuitos simples, esto significa que si calculamos el periodo de una clase cerrada en base solamente al número de transiciones asociadas a longitudes de circuitos simples, el periodo obtenido de esta forma es también divisor del número de transiciones de cualquier circuito no-simple.

Sea n el número de arcos de un circuito no-simple C, esto significa que:

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k$$

donde n_1, n_2, $n_3, \dots, n_k$ son el número de arcos de los circuitos simples que componen C.

Y sea d el periodo de la clase cerrada en la que se localiza C, entonces

$$n = b_1 d + b_2 d + \dots + b_k d$$

con b_1, b_2, ... ,b_k enteros

$$n = d(b_1 + b_2 + \dots + b_k)$$

$$n = dB \qquad \text{con } B = b_1 + b_2 + \dots + b_k$$

esto significa que d es divisor de n, por lo que podemos dejar de considerar las longitudes de los circuitos no_simples para calcular la periodicidad.

El resultado anterior nos permite calcular la periodicidad, mediante un procedimiento finito, ya que lo que tenemos que hacer, es buscar los circuitos simples de una gráfica conexa y determinar el máximo común divisor de las longitudes de dichos circuitos.

En el anexo B se presenta un algoritmo para determinar las longitudes de los circuitos simples de una gráfica.

2.3 PROBABILIDADES DE PRIMERA VISITA EN EXACTAMENTE N PASOS.

Cuando hablamos de la probabilidad de transición $p_{ij}(n)$ de que una cadena de Markov visite un determinado estado j a partir de un estado i después de n pasos, estamos considerando la posibilidad de que la cadena en esos n pasos visite el estado j más de una vez. Si queremos referirnos al hecho de que la cadena parta del estado i y exactamente en el paso n caiga en el estado j, sin haber visitado dicho estado en ninguno de los n-1 pasos anteriores, debemos utilizar las probabilidades de primera visita en n pasos.

Denotemos por $f_{ij}(n)$ la probabilidad condicional de visitar un determinado estado j a partir de un estado i, en exactamente n transiciones y no antes:

$$f_{ij}(n) = P[\, x_n = j,\ x_{n-1} \neq j,\ x_{n-2} \neq j, \ldots,\ x_1 \neq j \mid x_0 = i \,]$$

En el caso de que n=1, $f_{ij}(1)$ es igual a la probabilidad de transición en un paso del estado i al j.

$$f_{ij}(1) = p_{ij}(1)$$

Si hacemos n=2, estamos hablando de la posibilidad de que después de 2 transiciones de haber partido de i nos encontremos en el estado j por primera vez, esto significa que en el paso 1 podemos visitar cualquier estado que no sea j, así :

$$f_{ij}(2) = \sum_{\forall k \neq j} p_{ik}(1)\, f_{kj}(1)$$

en general:

$$f_{ij}(n) \begin{cases} p_{ij}(1) & \text{si } n=1 \\ \sum\limits_{\forall k \neq j} p_{ik}(1)\, f_{kj}(n-1) & \text{si } n > 1 \end{cases} \qquad (2.3.1)$$

De esta forma, el cálculo de las probabilidades de primera visita en n pasos se realiza de manera recursiva, utilizando $f_{ij}(n-1)$ para poder calcular $f_{ij}(n)$.

Si utilizamos la notación matricial, el cálculo de estas probabilidades resulta mucho más sencillo. Denotemos por F(n) la matriz de probabilidades de primera visita en n pasos, donde la entrada f_{ij} representa la probabilidad de primera visita en n pasos del estado i al estado j. Para n=1 F(1) resulta ser la matriz de transición P(1). Para calcular F(n) basta con multiplicar la matriz de transición P(1) por la matriz $F^*(n-1)$ donde $F^*(n-1)$ es la matriz de probabilidades de primera visita en n-1 pasos, en la cual se han sustituido los elementos de la diagonal $f_{ii}(n-1)$ por ceros.

2.4 TIEMPOS MEDIOS DE OCUPACION.

Cuando analizamos el comportamiento de un sistema a través de un modelo de Cadenas de Markov, pueden existir ciertos estados hacia los cuales tengamos un especial interés por permanecer en ellos, o al contrario estados a los cuales desearíamos visitar el menor número de ocasiones posibles, por ejemplo, si estamos hablando de un sistema de riego, nuestro interés estaría enfocado hacia aquellos estados que representen niveles de almacenamiento de agua suficientes para cumplir nuestra demanda, y por el contrario, trataríamos de evitar en lo posible aquellos estados en los que no tuviesemos reservas posibles disponibles.

El concepto de tiempo medio de ocupación resulta de gran utilidad, si deseamos evaluar la efectividad de una cierta política de operación, basándonos en el número de veces que el sistema visita ciertos estados; ya que representa el número promedio de veces que un estado es visitado a lo largo de la vida de la cadena.

A continuación presentaremos de una manera mas formal el concepto de tiempo medio de ocupación.

Denotemos por $T_k(n)$ el tiempo de ocupación del estado k en n pasos, es decir $T_k(n)$ es el número de veces que la cadena visita el estado k durante n pasos.

Definamos una variable aleatoria $Z_k(n)$ que tenga valor 1 si la cadena visita el estado k en el paso n y 0 en caso contrario:

$$Z_k(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_n = k \\ 0 & \text{si } X_n \neq k \end{cases}$$

De esta forma el tiempo de ocupación del estado k en n pasos, dado que la cadena se encuentra en el estado j en el paso 0 resulta ser:

$$T_k(n) \mid x_0=j = \sum_{m=1}^{n} Z_k(m)$$

Ahora, si hacemos tender n hacia infinito, obtendremos el tiempo total de ocupación:

$$T_k(\infty) \mid x_0=j = \sum_{m=1}^{\infty} Z_k(m)$$

Este tiempo total de ocupación, resulta ser el número total de veces que la cadena visitó un determinado estado, pero por la forma en que definimos $Z_k(m)$, sería necesario analizar la cadena después de cada transición, para que posteriormente pudiésemos calcular este tiempo total de ocupación. Por esta razón esta estadística no resulta de utilidad.

En cambio si consideramos la esperanza de este tiempo total de ocupación, obtendremos el tiempo medio de ocupación:

$$E[T_k(\infty)|x_0=j] = E[\sum_{m=1}^{\infty} Z_k(m)]$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} E[Z_k(m)]$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} [1(p_{jk}(m))+0(1-p_{jk}(m))]$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} p_{jk}(m)$$

Denotemos el tiempo medio de ocupación de un estado k, dado que en el paso cero la cadena se encontraba en j, mediante r_{jk}.

Entonces r_{jk} representa el número promedio de veces que se espera que el estado k sea visitado, considerando que la cadena en el paso inicial x_0 se encontraba en j. De esta forma:

$$r_{jk} = \sum_{m=1}^{\infty} p_{jk}(m)$$

Como podemos ver el valor de r_{jk} depende entonces del estado en el que consideremos que se encuentra la cadena en el paso cero; y más aún, dependiendo del tipo de estado al que pertenezcan j y k, el valor de r_{jk} converge o diverge.

El conjunto E de estados posibles de una cadena puede dividirse en dos subconjuntos, estados transitorios y estados recurrentes, considerando esta clasificación tenemos 4 posibles casos para r_{jk}.

Caso 1) Tanto el estado j como el estado k son recurrentes.

En este caso pueden existir dos posibilidades:

1.1) Los estados j y k pertenecen a la misma clase de equivalencia, en cuyo caso la cadena visitará un número infinito de veces ambos estados, por lo que $\sum_{m=1}^{\infty} p_{jk}(m)$ no converge, pues siempre existirá un valor de m por muy grande que ésta sea para la cual $p_{jk}(m) > 0$, de esta forma $r_{jk}=\infty$.

1.2) Los estados j y k pertenecen a diferentes clases de equivalencia, en este caso, la cadena nunca podrá pasar del estado j al k ya que $p_{jk}(m)=0 \quad \forall\, m \in N$; por lo que $r_{jk}=0$.

Caso 2) El estado j es recurrente y el estado k es transitorio.

Para este caso r_{jk} resulta ser 0 ya que si la cadena se encuentra en un estado j recurrente, es imposible que en algún paso posterior llegue a visitar a un estado k transitorio.

Caso 3) Tanto el estado j como el estado k son transitorios.

Como hemos visto anteriormente, cuando la cadena parte de un estado transitorio, ésta puede visitar otros estados transitorios solo un número finito de veces, ya que tarde o temprano la cadena forzosamente caerá en un estado recurrente y ya no podrá regresar a los estados transitorios. Esto significa que r_{jk}, cuando j y k son transitorios, es diferente de ∞.

Para determinar la matriz de tiempos medios de ocupación entre estados transitorios consideremos lo siguiente:

Sea P(1) la matriz de probabilidades de transición de una cadena de Markov, si modificamos el orden en que aparecen las columnas y los renglones, de forma tal que primero queden los estados recurrentes y después los transitorios, la matriz P tendrá la siguiente forma:

$$P(1) = \begin{array}{c} T' \\ \\ T \end{array} \begin{vmatrix} R & 0 \\ & \\ R_1 & Q \end{vmatrix}$$

donde T es el subconjunto de estados transitorios, T' el subconjunto de estados recurrentes, R es la submatriz de transición entre estados recurrentes, R_1 representa las transiciones de estados transitorios a recurrentes y Q es la submatriz de transición entre estados exclusivamente transitorios.

De esta manera la matriz de transición en n pasos queda de la siguiente forma:

$$P(n) = \begin{vmatrix} R^n & 0 \\ & \\ R_n & Q^n \end{vmatrix}$$

donde la entrada i,j representa la probabilidad de transición del estado i al j en n pasos.

Consideremos la matriz R definida de la siguiente forma:

$$R = \sum_{m=1}^{\infty} P(m) = \begin{vmatrix} \sum_{m=1}^{\infty} R^m & 0 \\ \sum_{m=1}^{\infty} R_m & \sum_{m=1}^{\infty} Q^m \end{vmatrix}$$

Asi R resulta ser la matriz de tiempos medios de ocupación, ya que la entrada i,j de esta matriz, r_{ij}, es igual a

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_{ij}(m)$$

La submatriz S de tiempos medios de ocupación entre estados transitorios es igual a

$$\sum_{m=1}^{\infty} Q^m$$

Si admitimos la siguiente convención:

$$p_{ij}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

entonces podemos establecer que $S = \sum_{m=0}^{\infty} Q^m = I+Q+Q^2+Q^3 \ldots$

y como hemos visto en la sección 1.3, el valor de S converge a la matriz fundamental $[I-Q]^{-1}$.

Caso 4) El estado j es transitorio y el estado k es recurrente.

En este caso el tiempo medio de ocupación r_{jk} es infinito cuando el estado k es accesible desde el estado j, ya que una vez que la cadena visite el estado k recurrente éste será visitado un número infinito de ocasiones.

En caso de que k no sea accesible desde j el tiempo medio de ocupación valdrá cero ya que la cadena nunca podrá visitar el estado k.

Para determinar si un estado k es accesible a partir de j, podemos auxiliarnos de las probabilidades de primera visita, concepto que se discute en la siguiente sección.

2.5 PROBABILIDADES DE PRIMERA VISITA

En la sección 2.3 de este capítulo hablamos de las probabilidades de primera visita de un estado k a partir de otro j, pero con la restricción de que dicha primera visita se efectuara en exactamente n pasos.

Ahora bien, si eliminamos la restricción sobre el número de pasos, estaremos hablando de las probabilidades de primera visita. Es decir la probabilidad de que, considerando que la cadena se encuentra en el momento actual en el estado j, ésta visite el estado k en algún paso posterior, no importando el número de pasos necesarios.

Denotaremos estas probabilidades de la siguiente manera:

f_{jk} = Probabilidad de visitar el estado k en algún paso posterior, considerando que la cadena se encuentra actualmente en el estado j.

Antes de analizar la forma en que podemos calcular estas probabilidades veamos dos resultados que nos serán de utilidad para tal propósito.

Sean j,k dos estados cualesquiera, entonces:

$$f_{jk} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jk}(n) \qquad (2.5.1)$$

El resultado anterior es fácil de acèptar si consideramos que en las probabilidades de primera visita no tenemos restricción en cuanto al número de pasos en que la cadena debe visitar al estado k, por lo que si sumamos las probabilidades de primera visita en n pasos, variando n desde 1 hasta ∞, estamos tomando en cuenta, solamente el hecho de que la cadena visite el estado k, sin importar en que número de pasos lo haga.

Otro resultado que nos será de utilidad es el siguiente:

Dados dos estados j y k cualesquiera, y $n \geq 1$ entonces

$$p_{jk}(n) = \sum_{m=1}^{n} f_{jk}(m)\, p_{kk}(n-m) \qquad (2.5.2)$$

Analicemos el significado de este resultado.

El lado izquierdo de la igualdad representa la probabilidad de transición del estado j al estado k en n pasos, sin importar el número de ocasiones en que la cadena visite el estado k durante esos n pasos; el lado derecho de la igualdad nos muestra una sumatoria en la que cada elemento de la suma representa la probabilidad de que la cadena partiendo del estado j exactamente después de m pasos visite el estado k, sin importar el número de ocasiones que lo haga en los restantes m-n pasos; como la suma de las probabilidades se realiza variando el valor de m desde 1 hasta n, se cubren todas las posibles formas en que la cadena puede visitar el estado k en n pasos.

Al igual que los tiempos medios de ocupación, las probabilidades de primera visita f_{jk} dependen del tipo de estado al que pertenecen j y k. Consideremos la misma clasificación para los estados que en la sección anterior y analicemos cada uno de los cuatro casos resultantes.

Caso 1) Tanto el estado j como el estado k son recurrentes.

En este caso existen dos posibilidades:

1.1 Que el estado j y el estado k pertenezcan a la misma clase de equivalencia, y por lo tanto k es accesible desde j, pero como k es recurrente y j también, la cadena visitará un número infinito de veces ambos estados, por lo que $f_{jk}=1$, es decir existe la absoluta certeza de que la cadena partiendo del estado j visitará en algún paso posterior al estado k.

1.2 Que el estado j y el estado k pertenezcan a diferentes clases de equivalencia, de esta forma el estado k no es accesible desde el estado j, por lo que si la cadena se encuentra en el estado j en el paso 0, y j es recurrente, la cadena jamás abandonará la clase de equivalencia a la que pertenece j y por lo tanto nunca visitará el estado k, por lo que $f_{jk}=0$.

Caso 2) El estado j es recurrente y el estado k es transitorio.

Si la cadena se encuentra en el paso cero en un estado recurrente j, significa que se encuentra en una clase cerrada y no podrá abandonar jamás dicha clase, por lo que es imposible que visite cualquier estado que no pertenezca a dicha clase, en particular algún estado transitorio, por lo tanto f_{jk} en este caso vale 0.

Caso 3) Consideremos ahora el caso en que tanto j como k son estados transitorios.

Para esto utilizaremos los resultados que analizamos anteriormente:

$$p_{jk}(n) = \sum_{m=1}^{n} f_{jk}(m)\, p_{kk}(n-m)$$

sumando sobre n tenemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jk}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f_{jk}(m)\, p_{kk}(n-m)$$

intercambiando el orden de las sumatorias

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jk}(n) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{jk}(m)\, p_{kk}(n-m)$$

los elementos de la sumatoria cuando n es menor que m no tienen significado ya que las probabilidades de transición del estado k al estado k serían en un número de pasos negativos, por lo que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jk}(n) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} f_{jk}(m)\, p_{kk}(n-m)$$

haciendo $l = n-m$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jk}(n) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} f_{jk}(m)\, p_{kk}(l)$$

como $f_{jk}(m)$ no depende de l, podemos sacarlo de la sumatoria interior

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jk}(n) = \sum_{m=1}^{\infty} f_{jk}(m) \sum_{l=0}^{\infty} p_{kk}(l)$$

utilizando el primer resultado analizado en esta sección:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jk}(n) = f_{jk} \sum_{l=0}^{\infty} p_{kk}(l)$$

de la expresión anterior podemos despejar f_{jk}

$$f_{jk} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} p_{jk}(n)}{\sum_{l=0}^{\infty} p_{kk}(l)}$$

La expresión anterior no nos resultaría de mucha utilidad si pretendiéramos calcular las probabilidades de primera visita a través de ella, ya que las sumas son series infinitas, sin embargo es posible realizar ciertas simplificaciones que faciliten el cálculo.

Observemos que si j=k entonces:

$$f_{jk} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} p_{jk}(n)}{\sum_{l=0}^{\infty} p_{kk}(l)}$$

$$f_{jk} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} p_{jk}(n) + 1 - 1}{\sum_{l=0}^{\infty} p_{kk}(l)}$$

$$f_{jk} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} p_{jk}(n) - 1}{\sum_{l=0}^{\infty} p_{kk}(l)} \qquad \text{ya que } p_{jk}(0) = 1 \text{ si } j = k$$

$$f_{jk} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} p_{jk}(n)}{\sum_{l=0}^{\infty} p_{kk}(l)} - \frac{1}{\sum_{l=0}^{\infty} p_{kk}(l)}$$

$$f_{jk} = 1 - \frac{1}{\sum_{l=0}^{\infty} p_{kk}(l)}$$

Ahora bien, como $p_{jk}(0) = 0$ si $j \neq k$ entonces, utilizando la expresión del tiempo medio de ocupación mencionada en la sección anterior tenemos que:

$$fjk = \begin{cases} \dfrac{r_{jk}}{r_{kk}} & \text{si } j \neq k \\[2ex] 1 - \dfrac{1}{r_{kk}} & \text{si } j = k \end{cases}$$

Caso 4) Este último caso se presenta cuando el estado j es transitorio y el estado k es recurrente.

Partiendo de la expresión 2.5.1 tenemos que:

$$f_{jk} = f_{jk}(1) + \sum_{n=2}^{\infty} f_{jk}(n)$$

ahora utilizando la expresión encontrada para las probabilidades de primera visita en n pasos (2.3.1)

$$f_{jk} = p_{jk}(1) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\forall i \neq k} p_{ji}(1)\, f_{ik}(n-1)$$

$$f_{jk} = p_{jk}(1) + \sum_{\forall i \neq k} \left(p_{ji}(1) \sum_{n=2}^{\infty} f_{ik}(n-1) \right)$$

haciendo $l=n-1$

$$f_{jk} = p_{jk}(1) + \sum_{\forall i \neq k} \left(p_{ji}(1) \sum_{l=1}^{\infty} f_{ik}(l) \right)$$

utilizando nuevamente el resultado 2.5.1

$$f_{jk} = p_{jk}(1) + \sum_{\substack{\forall i \neq k \\ \in E}} p_{ji}(1)\, f_{ik}$$

considerando el conjunto de estados divididos en dos subconjuntos T y T' de estados transitorios y estados recurrentes respectivamente,

$$f_{jk} = p_{jk}(1) + \sum_{\forall i \in T} p_{ji}(1)\, f_{ik} + \sum_{\substack{\forall i \in T' \\ \neq k}} p_{ji}(1)\, f_{ik}$$

en el subconjunto de estados recurrentes existen estados que pertenecen a la misma clase de equivalencia de k, para los cuales $f_{ik}=1$, pero también existen estados que no pertenecen a la misma clase de equivalencia de k y para los cuales $f_{ik}=0$, de manera que:

$$f_{jk} = p_{jk}(1) + \sum_{\forall i \in T} p_{ji}(1)\, f_{ik} + \sum_{\substack{\forall i \in cl(k) \\ i \neq k}} p_{ji}(1)$$

$$f_{jk} = \sum_{\forall i \in T} p_{ji}(1)\, f_{ik} + \sum_{\forall i \in cl(k)} p_{ji}(1)$$

La expresión anterior representa un sistema de ecuaciones simultaneas donde las incógnitas son las f_{ik} $\forall i \in T$ y $k \in T'$, y donde $\sum\limits_{\forall i\, cl(k)} p_{ji}(1)$ $\forall j \in T$ representan los términos independientes.

A fin de simplificar el cálculo de las f_{jk}, observemos que los coeficientes de las variables f_{ik} son iguales para un estado j fijo y cualquier estado k recurrente, ya que dichos coeficientes no dependen del estado k. Consideremos la notación matricial del sistema de ecuaciones resultante; para esto supongamos $j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n$ estados transitorios y $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_m$ estados recurrentes:

$$
\begin{vmatrix} f_{j_1k_1} \ldots f_{j_1k_m} \\ f_{j_2k_1} \ldots f_{j_2k_m} \\ \vdots \qquad \vdots \\ f_{j_nk_1} \ldots f_{j_nk_m} \end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix} p_{j_1j_1} \ldots p_{j_1j_n} \\ p_{j_2j_1} \ldots p_{j_2j_n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ p_{j_nj_1} \ldots p_{j_nj_n} \end{vmatrix}
\begin{vmatrix} f_{j_1k_1} \ldots f_{j_1k_m} \\ f_{j_2k_1} \ldots f_{j_2k_m} \\ \vdots \qquad \vdots \\ f_{j_nk_1} \ldots f_{j_nk_m} \end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix} \sum\limits_{\forall i \in cl(k_1)} p_{j_1i} \ldots \sum\limits_{\forall i \in cl(k_m)} p_{j_1i} \\ \sum\limits_{\forall i \in cl(k_1)} p_{j_2i} \ldots \sum\limits_{\forall i \in cl(k_m)} p_{j_2i} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \sum\limits_{\forall i \in cl(k_1)} p_{j_ni} \ldots \sum\limits_{\forall i \in cl(k_m)} p_{j_ni} \end{vmatrix}
$$

$$F = Q\,F + S$$

donde F es la matriz de probabilidades de primera visita de estados transitorios a recurrentes y Q es la matriz de probabilidades de transición entre estados transitorios, de aquí podemos calcular la matriz F de la forma siguiente:

$$F = [I - Q]^{-1}\, S$$

donde $[I-Q]^{-1}$ es la matriz fundamental de tiempos medios de ocupación entre estados transitorios.

Finalmente observamos que el término independiente $\sum\limits_{\forall i \in cl(k)} p_{ji}$ es igual para todos aquellos estados k que pertenecen a la misma clase de equivalencia, por lo que basta con calcular las probabilidades de primera visita para un solo estado k de cada clase cerrada, ya que estas son iguales para todos los estados que pertenecen a una misma clase.

Esto resulta fácil de explicar si recordamos que k es un estado recurrente y por lo tanto una vez que la cadena visita cualquier estado de la clase de equivalencia de k, todos los estados pertenecientes a dicha clase son visitados un número infinito de ocasiones, por lo que resulta lógico esperar que las probabilidades de primera visita a partir de un determinado estado j sean iguales para todos esos estados.

2.6 TIEMPOS MEDIOS DE ABSORCION

Cuando el espacio de estados E de una cadena de Markov es finito, se tiene la absoluta certeza de que la cadena, independientemente del estado del cual parta, finalmente caerá en una clase cerrada de estados persistentes, de la cual ya no podrá salir jamás.

Antes de que la cadena caiga en algún estado recurrente o absorbente, visitará un determinado número de estados transitorios. Este número de pasos en que la cadena visita estados transitorios, es importante en algunas aplicaciones, ya que reperesenta el número de pasos que la cadena efectúa, antes de que su comportamiento se vuelva más estable o periódico.

El tiempo medio de absorción a_j representa el número esperado de pasos que una cadena de Markov debe efectuar antes de caer en un estado recurrente o absorbente, considerando que se encuentra en el estado j en el paso cero.

Al número de pasos totales que una cadena permanece visitando estados transitorios, después de partir del estado j y antes de que caiga en una clase cerrada, lo llamaremos tiempo antes de absorción y es equivalente a la suma de los tiempos de ocupación total de cada uno de los estados transitorios, considerando que la cadena se encuentra en j en el paso 0, utilizando la notación introducida en la sección 2.4 tenemos :

$$T_j' = \sum_{\forall k \in T} T_k(\infty) \mid x_0 = j \qquad \forall\, j \in T$$

De esta manera T_j' representa el tiempo antes de absorción, es decir la cadena es absorbida en el siguiente paso después de T_j' transiciones. Pero, ya que lo que deseamos es el tiempo medio de absorción, debemos sumar un paso al tiempo antes de absorción y calcular su esperanza:

$$E[T_j] = E[T_j' + 1] = E[T_j']+1 = E[\sum_{\forall k \in T} T_k(\infty) \mid x_0=j] + 1$$

$$= \sum_{\forall k \in T} E[T_k(\infty) \mid x_0=j]+ 1$$

utilizando la variable $Z_k(n)$ definida en la sección 2.4

$$E[T_j] = \sum_{\forall k \in T} [E[\sum^{\infty} Z_k(n)]] + 1$$

$$= \sum_{\forall k \in T} \sum_{n=1}^{\infty} E[Z_k(n)] + 1$$

$$= \sum_{\forall k \in T} \sum_{n=1}^{\infty} [1 * p_{jk}(n) + 0 * (1 - p_{jk}(n))]$$

$$= 1 + \sum_{\forall k \in T} \sum_{n=1}^{\infty} p_{jk}(n) \qquad (2.6.1)$$

$$= 1 + \sum_{\forall k \in T} \sum_{n=1}^{\infty} p_{jk}(n) + 1 - 1$$

como $p_{jk}(0) = 1$ cuando $j = k$ entonces:

$$= 1 + \sum_{\forall k \in T} \sum_{n=0}^{\infty} p_{jk}(n) - 1$$

$$= \sum_{\forall k \in T} \sum_{n=0}^{\infty} p_{jk}(n)$$

pero $r_{jk} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{jk}(n)$

$$E[T_j] = \sum_{\forall k \in T} r_{jk}$$

Así, si denotamos el tiempo medio de absorción de la cadena a partir del estado j por m_j, entonces:

$$m_j = \sum_{k \in T} r_{jk}$$

Esto significa que el tiempo medio de absorción a partir de j es igual a la suma de los tiempos medios de ocupación de todos los estados transitorios a partir del estado j, lo cual tiene mucho sentido ya que el tiempo medio de absorción, es precisamente el número esperado de ocasiones en que la cadena visita estados transitorios, antes de caer en algún estado recurrente o absorbente.

Como hemos visto, el concepto de tiempo medio de absorción m_j solo tiene sentido para j transitorio.

Si utilizamos notación matricial, para denotar los tiempos medios de ocupación, tendríamos un vector de tiempos medios de ocupación, donde cada una de las entradas de este vector es igual a la suma por renglones de los elementos del renglón correspondiente, de la matriz fundamental de tiempos medios de ocupación $M = [I - Q]^{-1}$.

Otra expresión equivalente para el tiempo medio de absorción es la siguiente:

$$m_j = 1 + \sum_{\forall i \in T} p_{ji}(1)\, m_i \qquad (2.6.2)$$

y puede ser obtenida fácilmente a partir de la expresión (2.6.1)

2.7 TIEMPOS MEDIOS DE PRIMER PASO Y DE RECURRENCIA

Una vez que una cadena de Markov visita un estado recurrente, es imposible que ésta abandonde la clase cerrada a la que pertenece dicho estado y a partir de ese momento, la cadena visitará un número infinito de ocasiones el resto de los estados pertenecientes a la misma clase cerrada.

Si deseamos medir de alguna manera el lapso de tiempo necesario para que la cadena visite un cierto estado a partir de otro en la misma clase cerrada, el concepto de tiempo medio de primer paso resulta de utilidad.

El tiempo medio de primer paso m_{jk} es el número esperado de pasos en que la cadena pasa del estado j al estado k. En el caso en que $j = k$, el tiempo medio de primer paso es llamado tiempo medio de recurrencia.

Estos conceptos solamente son aplicables a cadenas de Markov irreducibles, es decir aquellas que están constituidas por una sola clase cerrada, aunque en realidad toda clase cerrada puede ser considerada por si misma, una cadena irreducible. Así, los tiempos medios de primer paso y de recurrencia m_{jk} solo existen para j y k estados recurrentes, pertenecientes a la misma clase cerrada.

Consideremos la variable aleatoria n que representa el número de transiciones en que la cadena de Markov pasa del estado j al estado k (ambos recurrentes y pertenecientes a la misma clase cerrada), la probabilidad de que n tenga un determinado valor n_0 es igual a la probabilidad de primera visita de j a k en exactamente n_0 pasos.

$$P[n=n_0] = f_{jk}(n_0)$$

De esta forma la secuencia de probabilidades de primera visita $f_{jk}(n)$, n=1,2,... constituye la función de densidad probabilística de la variable aleatoria n y su esperanza representa precisamente el tiempo medio de primer paso del estado j al estado k.

$$m_{jk} = \sum_{n=1}^{\infty} n \, f_{jk}(n)$$

Para calcular los tiempos medios de primer paso podemos valernos del procedimiento utilizado para calcular los tiempos medios de absorción, aunque será necesario realizar algunas modificaciones, a fin de que el procedimiento se ajuste a nuestros propósitos.

Supongamos que deseamos calcular el tiempo medio de primer paso, del estado 1 al estado k (m_{1k}) con $1 \neq k$.

Sea $P=(p_{ij})$ la matriz de probabilidades de transición original; a partir de ésta obtendremos una nueva matriz $P'=(p_{ij}')$ donde:

$$p_{ij}' = \begin{cases} 1 & \text{si } i=k \text{ y } j=k \\ 0 & \text{si } i=k \text{ y } j\neq k \\ p_{ij} & \text{si } i\neq k \text{ y } j \text{ cualquiera} \end{cases}$$

De esta forma el estado k, que es el estado final para el cual deseamos calcular los tiempos medios de primer paso, se convierte en un estado absorbente. Las modificaciones anteriores no alteran el comportamiento de la cadena original sino hasta que la cadena ya ha visitado el estado k, por lo que, calcular el tiempo medio de primer paso del estado 1 al estado k en la cadena original, es equivalente a calcular el tiempo medio de absorción a partir del estado 1 en la cadena modificada. Por lo que, partiendo de la expresión 2.6.2 obtenemos la siguiente:

$$m_{1k} = 1 + \sum_{\forall i\neq k} p_{1i}(1)\, m_{ik}$$

El razonamiento anterior se ha realizado bajo la restricción de que $1\neq k$, veamos ahora como podemos determinar una expresión para los tiempos medios de recurrencia.

Cuando hablamos del tiempo medio de recurrencia del estado k, nos referimos al tiempo esperado en quê la cadena partiendo del estado k, regresa a éste. En este caso existen dos alternativas, que la cadena permanezca en el estado k en el primer paso, o que la cadena abandone el estado k en el primer paso, esto se refleja en el cálculo del tiempo medio de recurrencia de la siguiente manera:

$$m_{kk} = 1*p_{kk}(1) + \sum_{\forall i\neq k} p_{ki}(1)*(1 + m_{ik})$$

El primer elemento de la suma representa la alternativa de que la cadena permanezca en el estado k en el primer paso, el 1 representa el número de pasos involucrados, los cuales se multiplican por la probabilidad de que esto ocurra, para obtener el valor esperado. La sumatoria representa la alternativa de que la cadena abandone el estado k en el primer paso, y donde $1 + m_{ik}$ representa el número de pasos necesarios para que la cadena regrese al estado k después de haber visitado el estado i en el primer paso; y $p_{ki}(1)$ representa la probabilidad de que ésto ocurra.

Ahora simplificando la expresión anterior:

$$m_{kk} = p_{kk}(1) + \sum_{\forall i \neq k} p_{ki}(1) + p_{ki}(1)\, m$$

$$= p_{kk}(1) + \sum_{\forall i \neq k} p_{ki}(1) + \sum_{\forall i \neq k} p_{ki}(1)\, m_{ik}$$

$$m_{kk} = 1 + \sum_{\forall i \neq k} p_{ki}(1)\, m_{ik}$$

Dependiendo del valor del tiempo medio de recurrencia m_{kk}, se dice que un estado es recurrente positivo si su tiempo medio de recurrencia $m_{kk} < \infty$, y si m_{kk} es infinito, se dice que el estado k es recurrente nulo. Los estados recurrentes nulos solo existen en cadenas de Markov que tienen un nómero infinito de estados.

2.6 PROBABILIDADES ESTACIONARIAS

Cuando analizamos un sistema a través de un modelo de Cadenas de Markov, uno de los aspectos que probablemente tengan mayor importancia, es el referente al comportamiento de la cadena a largo plazo, ya que esta clase de información nos permite tener un panorama mas amplio sobre la tendencia general del sistema en estudio.

Como se distribuirá la cadena entre los diferentes estados del espacio de resultados ?, en particular, esta distribución será asintóticamente independiente de n, el número de transiciones realizadas ?. Las preguntas anteriores están dirigidas a determinar si la distribución de un cadena X_n converge a una distribución límite cuando n tiende a infinito. Esta distribución límite, cuando existe, es llamada distribución de probabilidades estacionarias de $\{X_n\}$. Veamos a continuación la manera de determinar dichas probabilidades estacionarias.

Específicamente, deseamos conocer el $\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n)$, para toda i, j en el espacio de estados.

Consideremos el caso en que j es un estado transitorio. Como habíamos visto anteriormente, una cadena de Markov después de un número finito de pasos, finalmente debe caer en un estado recurrente, perteneciente a alguna clase cerrada, de la cual no podrá salir nunca, por esta razón si j es un estado transitorio, $\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = 0$

Dado que todos los estados recurrentes pertenecen a alguna clase cerrada, y que una clase cerrada puede ser considerada por si misma como una cadena irreducible, analizaremos el comportamiento en el límite de una cadena dentro de una clase cerrada, de manera independiente del resto de los estados que no pertenecen a dicha clase cerrada.

Para determinar la distribución límite en el caso de una cadena irreducible (clase cerrada), utilizaremos el siguiente teorema, cuya demostración se presenta en el anexo C.

Teorema de Renovación.- Sean $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, $\{u_k\}$ sucesiones de números reales no-negativos con

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1 , \qquad \sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty \qquad y$$

con $\{u_k\}$ una sucesión acotada. Supongamos que el mcd de $\{k \mid a_k>0\}$ es igual a 1 y que se cumple la ecuación de renovación

$$u_n - \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\, u_k = b_n \qquad \text{para toda } n = 0,1,2,..$$

Entonces el límite u_n cuando n tiende a infinito existe:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \begin{cases} \dfrac{\sum_{k=0}^{\infty} b_k}{\sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k} & \text{si } \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k < \infty \\ 0 & \text{si } \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k = \infty \end{cases}$$

Utilizando el teorema de renovación demostraremos que si $P = (p_{ij})$ es la matriz de transición de una cadena de Markov irreducible y aperiódica, entonces para toda $i \in E$,

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} k\, f_{ii}(k)} & \text{si } \sum_{k=0}^{\infty} k\, f_{ii}(k) < \infty \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} k\, f_{jj}(k)} & \forall i \in E \text{ si } \sum_{k=0}^{\infty} k\, f_{jj}(k) < \infty \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para probar lo anterior, es necesario identificar las sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{u_n\}$ en términos de sucesiones relacionadas con Cadenas de Markov, además de verificar las hipótesis del teorema de renovación.

Sea i un estado arbitrario fijo, seleccionemos las sucesiones de la siguiente manera: $a_n = \{f_{ii}(n)\}$, $u_n = \{p_{ii}(n)\}$, $b_n = 0$ si $n \ge 1$ y $b_0 = 1$. Por hipótesis todos los estados son aperiódicos y recurrentes en particular el estado i lo es.

Como el estado i es aperiódico tenemos que el mcd de $\{ n \mid f_{ii}(n) > 0 \}$ es igual a 1, por otra parte, ya que $p_{ii}(n)$ es una probabilidad, tenemos que la sucesión $\{u_n\}$ está acotada; y por la forma en que se definió b_n,

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = 1 < \infty.$$

Además como i es un estado recurrente tenemos que $\sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}(n)$ es igual a 1.

En base a las sucesiones seleccionadas, la ecuación de renovación toma la siguiente forma:

$$p_{ii}(n) - \sum_{k=0}^{n} f_{ii}(k)\, p_{ii}(n-k) = 0$$

en el caso de que $n > 0$, cuando n vale 0 $p_{ii}(0) = 1$. Estas ecuaciones ya han sido establecidas anteriormente (secciones 2.4 y 2.5).

Como todas las hipótesis del teorema de renovación han sido comprobadas, podemos aplicarlo, obteniendo que :

$$\lim_{n \to \infty} p_{ii}(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} k\, f_{ii}(k)} & \text{cuando } \sum_{k=0}^{\infty} k\, f_{ii}(k) < \infty \\ 0 & \text{cuando } \sum_{k=0}^{\infty} k\, f_{ii}(k) = \infty \end{cases}$$

Ahora bién, notemos que el tiempo medio de recurrencia del estado i,

$$m_{ii} = \sum_{k=0}^{\infty} k\, f_{ii}(k)$$

por lo que el límite de la probabilidad de transición $p_{ii}(n)$ depende en forma recíproca del tiempo medio de recurrencia.

$$\lim_{n \to \infty} p_{ii}(n) = \frac{1}{m_{ii}} \qquad \text{si } m_{ii} < \infty$$

Analicemos ahora el valor del límite de $p_{ij}(n)$, cuando n tiende a infinito. En la sección 1.5 señalamos que cuando una cadena es regular, la matriz de probabilidades de transición límite tiene sus renglones iguales, esto significa que las probabilidades de transición límites p_{ij} son independientes del estado i del cual parte la cadena. Como estamos restringiendo nuestro análisis a una clase cerrada, en la cual siempre existe para todo par de estados un entero n tal que la probabilidad de transición entre esos dos estados en n pasos es mayor que 0, entonces podemos decir que:

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}(n) = \lim_{n \to \infty} p_{jj}(n) = \frac{1}{m_{jj}} \quad \text{si } m_{jj} < \infty \quad \forall i \in E$$

Hasta aquí hemos considerado que la clase cerrada a la que pertenecen los estados, es aperiódica, mas si consideramos que el periodo $d \neq 1$, surge cierta dificultad al tomar el límite de las probabilidades de transición $p_{ij}(n)$ cuando n tiende a infinito. Esta dificultad estriba en que, en ocasiones el límite existe y es diferente de cero solo para ciertos valores de n, especificamente cuando n es un múltiplo de d.

A continuación se enuncia un resultado que nos será de utilidad para determinar las probabilidades límite en el caso en que una clase cerrada no sea aperiódica.

El espacio de estados de una cadena irreducible con periodo d, puede ser particionado en d subconjuntos disjuntos (con intersección vacía) $D_0, D_1, D_2, \ldots D_{d-1}$, de forma tal que si la cadena se encuentra en algún estado de D_j, en el siguiente paso visitará algún estado de D_{j+1} para $j=0,1,2,\ldots,d-2$. Y cuando se encuentra en D_{d-1} la cadena regresará a algún estado de D_0.

Sea i un estado fijo en E, definamos D_m como

$$D_m = \{ j | p_{ij}(nd+m) > 0 \text{ para alguna } n \}.$$

Como la cadena es irreducible tenemos que:

$$\bigcup_{m=0}^{d-1} D_m = E$$

Para mostrar que los subconjuntos D_m's son disjuntos tomemos un estado j elemento de $D_{m_1} \cap D_{m_2}$ con $0 \leq m_1 < d$, $0 \leq m_2 < d$. Como $j \in D_{m_1}$, entonces existe n_1 tal que $p_{ij}(n_1d+mp_1) > 0$, también como la cadena es irreducible existe un entero k tal que $p_{ji}(k)>0$. Entonces:

$$p_{ii}(n_1d+m_1+k) \geq p_{ij}(n_1d+m_1)p_{ji}(k) > 0$$

De manera similar podemos llegar a la conclusión de que

$$p_{ii}(n_2d+m_2+k) \geq p_{ij}(n_2d+m_2)p_{ji}(k) > 0.$$

De aquí se sigue que m_1+k y m_2+k son múltiplos de d, es decir $m_1+k = r_1d$ y $m_2+k = r_2d$, con r_1 y r_2 enteros, por lo que $(m_1+k)-(m_2+k) = r_1d-r_2d$, esto implica que $m_1-m_2=(r_1-r_2)d$ pero como $0 \leq m_1 < d$ y $0 \leq m_2 < d$ tenemos que m_1-m_2 debe ser menor que d, por lo que m_1-m_2 es igual a cero, es decir $m_1 = m_2$. Esto significa que si D_{m_1} y D_{m_2} tienen un elemento en comun, entonces son iguales, por lo que los subconjuntos D_m's constituyen una partición de E; y por la forma en que construimos los subconjuntos D_m's la cadena se mueve de un subconjunto D_j a otro D_{j+1}, con lo cual queda demostrado el resultado enunciado.

Ahora bien, si P es una matriz estocástica de periodo d, utilizando el resultado anterior tenemos que $R = P^d$ mapea cada uno de los subconjuntos $D_m = \{ j \mid p_{ij}(nd+m) > 0$ con i un estado fijo y n un entero $\}$ en si mismo. De hecho si consideramos $R=(r_{ij})$ como una nueva matriz de transición, cada subconjunto D_m puede ser considerado como el espacio de estados de una cadena de Markov irreducible y aperiódica, por lo que, como veremos a continuación el limite de $r_{ij}(n)$ cuando n tiende a infinito, existe.

Sea P la matriz de transición de una cadena de Markov, irreducible, periódica, con periodo d. Denotemos $R = P^d$.

Como R constituye una matriz de transición para una cadena de Markov irreducible y aperiódica, sabemos que el limite de $r_{ij}(n)$ cuando n tiende a infinito, es el recíproco del tiempo medio de recurrencia v_{jj} considerando a R como la matriz de transición, es decir

$$v_{jj} = \sum_{k=1}^{\infty} k\, h_{jj}(k)$$

donde $h_{jj}(k)$ es la probabilidad de primera visita del estado j a si mismo en k pasos, utilizando la matriz de transición R. En general los tiempos medios de recurrencia v_{jj} difieren de los originales m_{jj}, ya que el hecho de utilizar R o P como la matriz de transición, afecta el número de pasos necesarios para que la cadena regrese a un determinado estado.

En particular si utilizamos a P como matriz de transición, es necesario efectuar d transiciones para que la cadena pase de un elemento de D_0 a otro de la misma clase o subconjunto, mientras que si R es utilizada como matriz de transición solo se requiere de un paso. Estas dos formas de medir las unidades de tiempo nos proporcionan valores diferentes para el tiempo medio de recurrencia.

$$\text{Ahora } v_{jj} = \sum_{k=1}^{\infty} k\, h_{jj}(k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, f_{jj}(dk) = 1/d \sum_{k=1}^{\infty} dk\, f_{jj}(dk)$$

así $v_{jj} = 1/d \sum_{n=1}^{\infty} n\, f_{jj}(n)$, ya que $f_{jj}(n)$ vale cero salvo en el caso de que n sea múltiplo de d $(n=dk)$.

Por lo que $v_{jj} = m_{jj}/d$, y como $\lim_{n \to \infty} r_{ij}(n)$ es igual al recíproco de v_{jj}, tenemos que $\lim_{n\to\infty} r_{ij}(n) = d/m_{jj}$, esto en caso de que tanto i como j pertenezcan a la misma clase D_m. Si i y j pertenecen a diferentes clases cerradas entonces el $\lim_{n\to\infty} r_{ij}(n)$ es igual a cero, ya que esto es equivalente a que i y j pertenezcan a diferentes clases cerradas con relación a R.

Como señalamos anteriormente, el hecho de utilizar a R como matriz de transición, ocasiona modificaciones en la manera de medir el número de pasos que efectúa la cadena, de esta manera, una transición en relación a la matriz R equivale a d pasos cuando se utiliza la matriz P, por lo que en el caso en que la clase cerrada a la que pertenecen i y j sea periódica con periodo d≠1, entonces

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \begin{cases} \dfrac{d}{m_{jj}} & \text{si n es múltiplo de d (n=kd)} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Consideremos por último el caso en que i es un estado transitorio y j es recurrente.

Para determinar el límite $p_{ij}(n)$ cuando n tiende a ∞ con i transitorio y j recurrente, partamos de la siguiente igualdad

$$p_{ij}(n) = \sum_{m=1}^{n} f_{ij}(m)\, p_{jj}(n-m)$$

Tomando límites de ambos lados de la igualdad

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} f_{ij}(m)\, p_{jj}(n-m)$$

Ahora como $\sum_{m=1}^{\infty} f_{ij}(m) = f_{ij} \le 1$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \sum_{m=1}^{\infty} f_{ij}(m) \lim_{n\to\infty} p_{jj}(n-m)$$

Pero como j es recurrente $\lim_{n\to\infty} p_{jj}(n) = 1/m_{jj}$ cuando j es aperiódico, por lo que

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = f_{ij} \frac{1}{m_{jj}} \qquad \text{con j aperiódico}$$

En el caso de que j tenga un periodo d ≠ 1 entonces

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}(n) = \frac{d}{m_{jj}}$$

con n = kd, y de igual forma

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}(n) = f_{ij} \frac{d}{m_{jj}} \qquad \text{con } n = kd$$

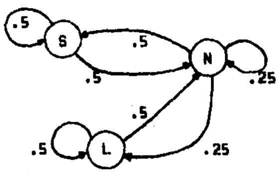
2.9 EJEMPLOS

El tiempo en cierta ciudad puede ser caracterizado como soleado (S), nublado (N), o lluvioso (L). Si el dia es soleado, existe la misma probabilidad de que el dia siguiente sea soleado o nublado. Si el dia es nublado, entonces hay un 50 % de probabilidades de que el siguiente dia sea soleado, un 25 % de probabilidades de que continue nublado y un 25 % de probabilidades de que llueva. Si el dia es lluvioso continuará nublado o lluvioso con una probabilidad igual para cada estado.

La matriz de transición asociada es:

	S	N	L
S	0.5	0.5	0
N	0.5	0.25	0.25
L	0	0.5	0.5

Si representamos esta situación a través de gráficas, la cadena de Markov asociada tendria la siguiente representación:



Para todo estado i en la cadena, la probabilidad $p_{ii}\neq 0$ lo cual significa que todos los estados son aperiódicos, es decir no existe un patrón de periodicidad regular con el cual se repita un determinado tipo de clima.

Por otro lado aplicando el algoritmo para determinar las clases de equivalencia tenemos que todos los estados pertenecen a una misma clase, la cual es cerrada; por lo que los tres estados son recurrentes.

	S	N	L	Γ[S]
S	1	1	0	0
N	1	1	1	1
L	0	1	1	2
Γ^{-}[S]	0	1	2	

$\Gamma[S] \cap \Gamma^{-}[S] = \{ N, S, L\}$

esto significa que dado un cierto tipo de clima, siempre existe la probabilidad de que este vuelva a repetirse.

Calculemos ahora las probabilidades de primera visita en n pasos para n = 1, 2, 3.

$$F(1)=\begin{vmatrix} .5 & .5 & 0 \\ .5 & .25 & .25 \\ 0 & .5 & .5 \end{vmatrix}$$

$$F(2)=\begin{vmatrix} .5 & .5 & 0 \\ .5 & .25 & .25 \\ 0 & .5 & .5 \end{vmatrix} X \begin{vmatrix} 0 & .5 & 0 \\ .5 & 0 & .25 \\ 0 & .5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} .25 & .25 & .125 \\ .125 & .375 & .0625 \\ .25 & .25 & .125 \end{vmatrix}$$

$$F(3)=\begin{vmatrix} .5 & .5 & 0 \\ .5 & .25 & .25 \\ 0 & .5 & .5 \end{vmatrix} X \begin{vmatrix} 0 & .25 & .125 \\ .125 & 0 & .0625 \\ .25 & .25 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} .0625 & .125 & .09375 \\ .09375 & .1875 & .078125 \\ .1875 & .125 & .03125 \end{vmatrix}$$

Debido a que los tres estados de la cadena pertenecen a una misma clase cerrada, los tiempos medios de ocupación para cualquier par de estados son infinitos, ya que la cadena visitará un número infinito de veces los tres estados. De igual manera las probabilidades de primera visita para todo par de estados serán iguales a 1, es decir dado cualquier tipo de clima, existe la absoluta certeza de que el tiempo en algún paso posterior podrá presentarse de cualquiera de los tres tipos, nublado, soleado o lluvioso, sin excluir alguno de ellos.

Como no existen estados transitorios no tiene sentido hablar de tiempos medios de absorción.

La matriz de tiempos medios de primer paso y de recurrencia es la siguiente:

	S	N	L
S	2.5	2	10
N	3	2.5	6
L	5	2	5

Esta matriz nos proporciona información interesante, como por ejemplo el hecho de que m_{SL}= 10 significa que una vez que el clima es soleado, es de esperarse que hasta después de transcurridos 10 dias el clima será lluvioso.

Por último el vector de probabilidades estacionarias es

[0.4 , 0.4 , 0.2], es decir, que si observamos el clima en un periodo bastante largo de tiempo, en el 40 % de los dias el clima será soleado, al igual que nublado, y solo en el 20 % de las ocasiones, este será lluvioso.

CAPITULO 3

EL PROGRAMA "MARKOV"

Actualmente las computadoras se han convertido en herramientas indispensables en cualquier centro de investigación, un gran número de empresas las utilizan para el manejo de sus procesos administrativos y en algunos hogares es un equipo de uso tan común como la televisión; esto como consecuencia de las grandes ventajas que proporciona su uso.

Esencialmente, la utilidad de las computadoras consiste en el procesamiento de información de manera rápida y eficaz.

Considerando que el análisis de una cadena de Markov supone una gran cantidad de cálculos numéricos, y dependiendo de la magnitud y complejidad del sistema estudiado, requiere de manejar un gran número de datos, resulta inmediato sugerir la utilización de un programa de cómputo como herramienta, para la realización de dicho análisis.

El objetivo de este capitulo es ilustrar la manera en que los algoritmos presentados en el capitulo anterior, se desarrollaron en un programa de computadora, facilitando asi el cálculo de las estadisticas necesarias para el análisis de Cadenas de Markov.

La primera sección de este capitulo, expone algunos aspectos generales sobre la operación y funcionamiento del programa "markov". En la siguiente sección se explica la estructura del programa a través de una descripción breve de cada una de las funciones que lo componen. La sección tres describe el procedimiento para alimentar de información al programa, indicando la forma en que son introducidos los datos. En la sección cuatro se detallan algunos aspectos de capacidad y limitaciones del programa. Finalmente la siguiente sección presenta algunos ejemplos ejecutados mediante este programa.

3.1 GENERALIDADES

Básicamente, el propósito fundamental del programa "markov" es el de calcular una serie de estadisticas que nos permitan analizar una cadena de Markov. Por lo que el desarrollo del programa se realizó en base a la idea de proporcionar al usuario un forma de introducir los datos (probabilidades de transición), una forma de calcular las estadisticas asociadas a esos datos, y de poder imprimir los resultados obtenidos en dichos cálculos.

Una de las caracteristicas consideradas al momento de desarrollar el programa, fué el grado de complejidad que presentaba la operación del mismo. A fin de que su operación fuera lo más facil posible, se diseñó el programa buscando que la comunicación que el usuario establece con el paquete se realizara a través de menus de opciones, de esta forma el usuario indica mediante el número de opción correspondiente la acción que desea ejecutar.

Mediante el programa es posible realizar el análisis de varias cadenas de Markov de manera simultanea, ya que nos permite seleccionar la matriz que deseamos utilizar para el cálculo de las estadisticas, de esta forma, antes de solicitar alguna estadistica, es necesario que previamente haya sido seleccionado el archivo de datos que contiene la matriz de probabilidades de transición, esto mediante la opción 1 del menú de "ESTADISTICAS BASICAS". En el cálculo de las estadísticas se utiliza la última matriz de transición seleccionada, esto significa que si deseamos calcular dos o más estadisticas para una misma matriz basta con seleccionarla una sola vez al principio, y mientras nosotros no abandonemos el módulo de "ESTADISTICAS BASICAS", esa matriz será utilizada para todos los cálculos, hasta que nosotros seleccionemos alguna otra, en cuyo caso las subsecuentes estadisticas que se calculen se realizarán en base a la nueva matriz seleccionada.

Otro aspecto importante de las caracteristicas de operación del programa, es el de la impresión de resultados. El tercer módulo del programa es el correspondiente a la impresión de resultados, y mediante esta opción nosotros podemos desplegar en pantalla o imprimir en papel los resultados calculados. Cada ocasión que se realiza el cálculo de alguna estadística se genera un archivo, con caracter temporal, donde se graban los resultados obtenidos, así en caso de que deseáramos una impresión en papel de los resultados obtenidos, con el propósito de analizarlos con mayor detenimiento, la podemos obtener mediante la opción de "IMPRESION DE RESULTADOS". Estos archivos temporales donde se graban los resultados calculados desaparecen al momento de terminar la ejecución del programa y salirnos del menú principal mediante la opción de FIN (9).

Al seleccionar la opción de "IMPRESION DE RESULTADOS", tenemos acceso a otro menú el cual nos da oportunidad de imprimir o desplegar en pantalla los archivos de resultados, en cualquiera de estas dos opciones el programa nos despliega una lista de archivos de resultados calculados, asi como de archivos de datos con matrices de probabilidades de transición existentes, para que nosotros seleccionemos el resultado a imprimir o desplegar.

Otra caracteristica importante del programa es el referente a la función utilizada para poder desplegar aquellas estadisticas que constituyen una matriz, como es el caso de las probabilidades estacionarias o de los tiempos medios de primer paso y de recurrencia. Estas estadisticas, dependiendo del número de estados que tenga la cadena, resultan demasiado grandes para poder ser desplegadas en su totalidad en la pantalla, por lo que es necesario desplegarlas página por página, para esto se utiliza una función que nos permite desplazarnos a lo largo de la matriz en cualquier dirección, y de esta forma poder visualizar la totalidad de ésta.

El desarrollo del programa "markov" se realizó en una computadora AT&T UNIX PC, este tipo de equipos utilizan como sistema operativo el UNIX, el cual tiene la caracteristica de ser un sistema operativo multiusuario, es decir, que permite a varios usuarios trabajar simultaneamente. En este sentido el programa aprovecha esta caracteristica del sistema operativo y permite que varios usuarios lo utilicen de manera simultanea.

EL programa debe ser instalado en el disco duro de la computadora, y todos los archivos de datos son creados en el mismo y permanecen en él hasta que son eliminados explicitamente por el usuario a travès de la opción de "BORRAR MATRIZ".

La programación se llevó a cabo a través de el lenguaje de programación "C", esto debido a que dicho lenguaje en la computadora AT&T, ofrece una serie de ventajas con respecto a otros lenguajes, en aspectos de velocidad y capacidad.

3.2 ESTRUCTURA DEL PROGRAMA

El programa "markov" está compuesto de tres módulos principales, el primero está relacionado con la captura y modificación de la matriz de probabilidades de transición, en el segundo se realiza el cálculo de las estadísticas básicas y el último tiene como función permitir la impresión de los resultados calculados.

Estos tres módulos están constituidos por un total de 30 funciones, las cuales de describen a continuación.

analis( ).- Función que maneja el menú "ESTADISTICAS BASICAS". Esta función despliega las opciones existentes y nos permite seleccionar alguna de ellas. Las opciones posibles son:

01 SELECCIONAR MATRIZ DE PROBABILIDADES DE TRANSICION
02 CLASIFICACION DE ESTADOS
03 PERIODICIDAD
04 PROBABILIDADES DE PRIMERA VISITA EN N PASOS
05 PROBABILIDADES DE TRANSICION EN N PASOS
06 PROBABILIDADES DE PRIMERA VISITA
07 TIEMPOS MEDIOS DE ABSORCION
08 TIEMPOS MEDIOS DE OCUPACION
09 TIEMPOS MEDIOS DE PRIMER PASO Y DE RECURRENCIA
10 MATRIZ DE PROBABILIDADES ESTACIONARIAS
99 SALIDA

Una vez que la opción deseada ha sido indicada, analis( ) llama a la función correspondiente.

archs( ).- Esta función maneja el menú correspondiente a la MATRIZ DE PROBABILIDADES DE TRANSICION. A través de ella podemos seleccionar alguna de las opciones siguientes :

1 CAPTURA DE LA MATRIZ
2 CONSULTA/MODIFICACION DE LA MATRIZ
3 BORRAR MATRIZ
9 SALIDA

Estas opciones, están relacionadas con la creación y modificación de los archivos donde se captura la matriz de probabilidades de transición.

borra( ).- El propósito de esta función es permitir borrar archivos de datos, es decir archivos donde se guardan los valores de las matrices de probabilidades de transición. Esta función elimina definitivamente del disco duro de la computadora el archivo indicado.

capturen( ).- En esta función se realiza la captura de un renglón de la matriz de probabilidades de transición, también se valida que las probabilidades tecleadas se encuentren en el intervalo [0,1], y además que la suma de los elementos de todo el renglón sea igual a 1. Una vez satisfechos estos criterios de validación se graba el renglón en el archivo correspondiente a la matriz indicada.

clasif( ).- Esta función efectúa la clasificación de los estados de la cadena de Markov asociada a la matriz de probabilidades de transicion seleccionada. Desde aqui se realiza la llamada a la funcion tmscu( ).

crmtx( ).- Esta función se utiliza para construir a partir del archivo de datos, una matriz con entradas booleanas, que refleje las transiciones posibles entre los estados de la cadena de Markov asociada al archivo de datos indicado.

deltmp( ).- Cada vez que se realiza el cálculo de una estadistica se genera un archivo donde se graban los resultados obtenidos. Mediante esta función se eliminan todos estos archivos de resultados temporales, con el fin de que éstos no permanezcan ocupando espacio, una vez que ya no son de utilidad.

desp( ).- El propósito de esta función es el de desplegar en pantalla un renglón del archivo que se le indique. En el programa se utiliza para listar los archivos de resultados calculados, dentro de la opcion de IMPRESION DE RESULTADOS, ya que en el archivo lista.mkv se genera un relación de todas las estadisticas calculadas, y esta función nos permite ver los resultados existentes para seleccionar aquel que deseamos imprimir.

dispren( ).- Mediante esta función se despliegan las probabilidades de transición de una matriz, especificamente la función despliega los elementos que corresponden a un determinado renglón de la matriz de transición. Esta función es utilizada en la opción de CONSULTA/MODIFICACION DE LA MATRIZ.

grbarch( ).- El objetivo de la función grbarch, es permitir la captura de las probabilidades de transición, para poder construir la matriz de transición, y crear un archivo donde se grabará la información capturada. Desde aqui se invoca la función capturen( ), tantas ocasiones como renglones tenga la matriz.

impre( ).- Esta función controla la opción de "IMPRESION DE RESULTADOS", las tareas especificas que realiza son: manejo del menú de la opción, generación de la lista de archivos de resultados calculados con el fin de permitir la selección de la estadistica a imprimir o desplegar, asi como mandar ejecutar el comando de impresión o desplegado sobre el archivo de resultados seleccionado.

inver( ).- Esta función tiene como propósito único el cálculo de la inversa de una matriz determinada, el metodo utilizado para la inversión de la matriz se basa en transformaciones elementales por renglones.

iqcal( ).- Utilizando esta función podemos calcular la matriz fundamental $M=[I-Q]^{-1}$, a su vez esta función hace uso del procedimiento anterior para calcular la inversa de una matriz.

lmat( ).- La función lmat( ), nos sirve para cargar la matriz de probabilidades de transición en memoria principal, y de esta forma, facilitar el manejo de la misma para las demás funciones. Es decir, esta función lee el archivo de datos donde se grabó la matriz de transición y genera con esta información una estructura en forma de matriz, que resulta mas fácil de manejar, que el archivo mismo.

menu( ).- Esta es la función principal, es decir aquella a partir de la cual son llamadas de manera directa o indirecta todas las demás, su propósito es el de desplegar y manejar el menú principal, que consta de las siguientes opciones:

1 MATRIZ DE PROBABILIDADES DE TRANSICION
2 ESTADISTICAS BASICAS
3 IMPRESION DE RESULTADOS
9 FIN

modif( ).- Mediante esta función se pueden realizar modificaciones y consultas a las probabilidades que componen la matriz de transición. Permite desplegar los valores que forman un determinado renglón de la matriz, y una vez mostrado, da opción a modificar dicho renglón, en cuyo caso será necesario capturar nuevamente todas las probabilidades que componen el renglón, tomando en consideración todas las validaciones que se contemplan en el momento de la captura de la matriz.

nproc( ).- Esta función regresa una cadena de caracteres que contiene el número de proceso que se le asignó al programa al momento de iniciar su ejecución, ésto se utiliza para identificar plenamente los archivos temporales y de resultados que genera el proceso, ya que esta cadena de caracteres forma parte del nombre con el que son identificados dichos archivos.

numreg( ).- El propósito de esta función es proporcionar el número de renglones que tiene un determinado archivo de datos, de esta forma podemos conocer el número de estados de la cadena asociada o bien la dimensión de la matriz de transición.

period( ).- Esta función realiza el cálculo de la periodicidad para cada uno de los estados de la cadena de Markov asociada a la matriz de transición indicada. Para poder realizar este cálculo, es necesario que los estados se encuentren previamente clasificados, por lo que antes de iniciar el cálculo de la periodicidad, es invocada la función clasif( ).

probest( ).- La función probest( ) tiene como objetivo el cálculo de la matriz de probabilidades estacionarias. Para esto se utilizan las funciones pvis( ), period( ), y tipas( ), ya que para el cálculo de las probabilidades límite se necesitan los tiempos medios de recurrencia, el periodo y las probabilidades de primera visita.

pvis( ).- Esta función tiene como propósito el calcular la matriz de probabilidades de primera visita, para esto requiere de la matriz fundamental $M=[I-Q]^{-1}$, por lo que llama a la función iqcal( ).

selec( ).- Esta función se encarga de seleccionar el archivo de datos que se utilizará posteriormente para el cálculo de las estadísticas básicas, verfica si el archivo seleccionado existe y notifica del resultado de la búsqueda, en caso de que el archivo no exista, no será posible calcular ninguna estadística hasta que se seleccione un archivo válido.

tipas( ).- Mediante esta función se realiza el cálculo de la matriz de tiempos medios de primer paso y de recurrencia, utilizando el mismo procedimiento que en el cálculo de los tiempos medios de absorción, solo que con las modificaciones señaladas en la sección 2.7.

tabsor( ).- El objetivo de esta función es calcular los tiempos medios de absorción. Ya que esta estadística solo tiene sentido para estados transitorios, la función verifica que existan estados transitorios en la cadena, en caso de no existir, despliega un mensaje indicándolo.

tmscu( ).- Esta función se utiliza para determinar las clases cerradas existentes y los correspondientes estados que pertenecen a ellas, mediante el algoritmo de Tomescu para determinar subconjuntos conexos en una gráfica.

tocup( ).- A través de esta función se determina la matriz de tiempos medios de ocupación, en el cálculo de esta estadística se requiere de la matriz fundamental $M=[I-Q]^{-1}$ y de las probabilidades de primera visita, por lo que desde aquí son llamadas las funciones iqcal( ) y pvis( ).

transn( ).- Esta función se utiliza para el cálculo de la matriz de probabilidades de transición en n pasos, que no es mas que la matriz de probabilidades de transición elevada a la n-ésima potencia, este procedimiento se realiza de manera recursiva, calculando la matriz P^n a partir de P^{n-1}.

visn( ).- Mediante esta función se determina la matriz de probabilidades de primera visita en n pasos, este cálculo se realiza al igual que la función anterior de manera recursiva, utilizando la matriz de probabilidades de primera visita en n-1 pasos para calcular la correspondiente en n pasos.

xmat( ).- Esta función realiza la multiplicación de dos matrices, verifica antes, que las dimensiones de las matrices a multiplicar permitan dicha producto, en caso contrario regresa un código de error (-1).

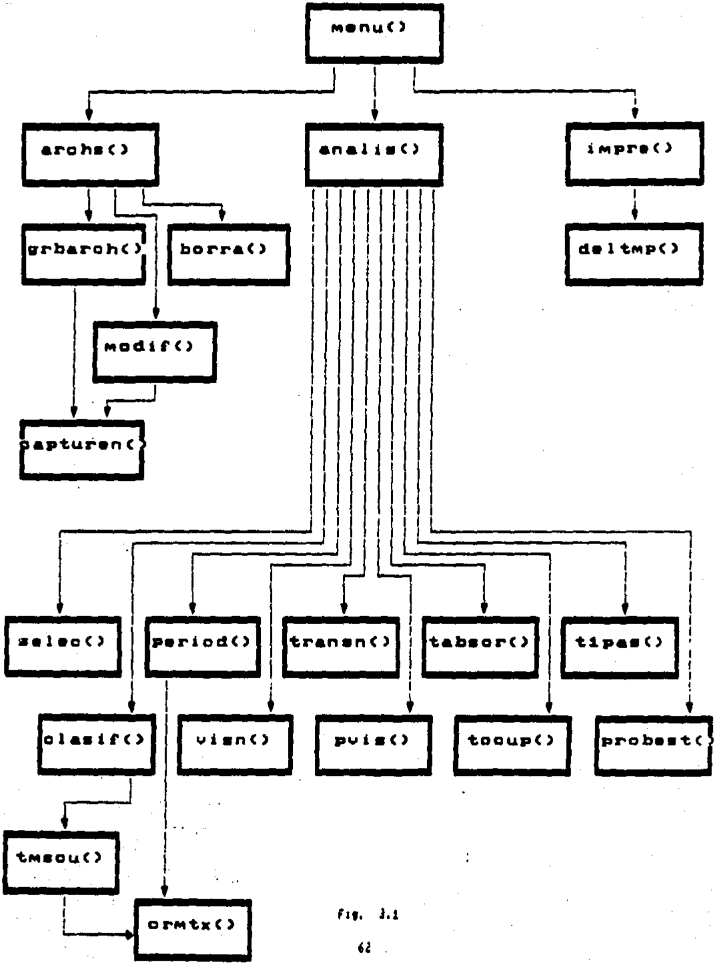

menu()
archs()
analis()
impre()
grbarch()
borra()
deltmp()
modif()
capturen()
selec()
period()
tranen()
tabsor()
tipas()
clasif()
visn()
pvis()
tocup()
probest()
tmsou()
ormtx()

Fig. 3.1

3.3 ENTRADA DE DATOS

Como señalamos en las secciones anteriores, el programa requiere de un archivo de datos donde se le indiquen las probabilidades de transición de la cadena a analizar. Estos archivos se graban en el disco duro de la computadora y permanecen alli hasta que son borrados por el usuario.

La creación de estos archivos de datos se realiza a través de la opción "CREAR MATRIZ" (1) del menu de "MATRIZ DE PROBABILIDADES DE TRANSICION". Al seleccionar dicha opción el programa nos solicitará el nombre que queremos asignarle a la matriz que vamos a capturar, mediante el mensaje "NOMBRE DE LA MATRIZ DE PROBABILIDADES DE TRANSICION", después del cual deberemos teclear el nombre que deseamos asignarle a la matriz, seguido de un <Return>.

En seguida el programa preguntará el número de estados de la cadena, desplegándonos el mensaje "DIMENSION DE LA MATRIZ DE PROBABILIDADES :". Al igual que en la pregunta anterior debemos teclear un <Return> después de indicar el número de renglones de la matriz de probabilidades de transición.

A continuación el programa empezará a solicitar las probabilidades de transición por renglones; desplegando el número de renglón en turno y la entrada de la matriz que se está capturando. Para cada entrada deberemos teclear la probabilidad asociada seguida de <Return>, y el programa nos desplegará del lado derecho de la pantalla la suma de las probabilidades acumuladas para ese renglón, esto con el propósito de que el usuario detecte los casos en que la suma de las probabilidades de un renglón no sea igual a 1, sin embargo el programa verifica esto y en caso de que suceda despliega el siguiente mensaje "ERROR; LA SUMA DE LAS PROBABILIDADES NO ES IGUAL A 1. INTENTE DE NUEVO", y nos solicita teclear de nuevo las probabilidades correspondientes a ese renglón. En caso de que alguna probabilidad tecleada sea mayor que uno desplegará también un mensaje de error "VALOR NO VALIDO; INTENTE DE NUEVO", y nos solicitará nuevamente la probabilidad de transición. Este procedimiento de captura de un renglón lo realiza un número veces igual al número de estados que le indicamos tenia la cadena.

3.4 ASPECTOS DE CAPACIDAD

Cuando se desarrolla un programa de cómputo, cuyo propósito es el de realizar cálculos matemáticos en base a algún algoritmo, frecuéntemente es necesario establecer restricciones en el programa, sobre algunos aspectos de capacidad que conceptualmente no existen en el algoritmo, pero que son necesarias para la instrumentación de dicho algoritmo en un programa de cómputo. En el desarrollo del programa "markov" fué necesario establecer limitaciones respecto a la dimensión de las matrices de probabilidades de transición que se manejaban, este limite fué fijado en 40 estados.

Respecto a la precisión utilizada en las variables de punto flotante correspondientes a las probabilidades de transición, ésta es de 7 digitos, es decir que solo se consideran hasta 7 cifras significativas después del punto decimal, por ejemplo, al capturar probabilidades de transición y verificar si la suma por renglones es igual a 1, en realidad esta validación se efectúa preguntando si la diferencia entre la suma de probabilidades y 1 es menor que 0.0000001 .

El número de archivos de datos que pueden guardarse no tiene restricción por parte del programa, está fijada por el espacio libre en el disco duro de la computadora utilizada.

Los nombres de los archivos de datos pueden ser de hasta 10 caracteres, y pueden contener letras, números y el caracter "_" (guión bajo).

3.5 EJEMPLOS

Con el propósito de ilustrar la operación y funcionamiento del programa, consideremos la cadena de Markov asociada a la siguiente matriz de probabilidades de transición.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0.2	0.4	0	0.1	0.3	0	0	0	0
2	0	0	0	0.2	0	0	0	0.8	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
4	0.5	0	0	0	0	0	0.5	0	0	0
5	0	0	0	0	0.2	0	0	0.8	0	0
6	0.7	0	0.3	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
8	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
10	0	0	0.1	0	0	0	0.9	0	0	0

Analizaremos con ayuda del programa desarrollado las estadísticas básicas correspondientes a esta cadena.

Al iniciar la operación del programa se despliega una primer pantalla que presenta las opciones correspondientes al menú principal. La primera opción llamada "MATRIZ DE PROBABILIDADES DE TRANSICION" nos permite introducir los datos correspondientes a las probabilidades de transición, este paso es indispensable, es decir para poder trabajar con alguna cadena, es necesario que previamente introduzcamos la matriz de probabilidades de transición asociada. Esta operación se realiza en una sola ocasión y no es necesario repetirla para cada sesión, ya que el archivo que contiene las probabilidades de transición permanece grabado en el disco duro de la computadora.

C A D E N A S   D E   M A R K O V

M E N U   P R I N C I P A L

[1] MATRIZ DE PROBABILIDADES DE TRANSICION

[2] ESTADISTICAS BASICAS

[3] IMPRESION DE RESULTADOS

[9] FIN

OPCION :

Fig. 3.2

NOMBRE DE LA MATRIZ DE
PROBABILIDADES DE TRANSICION : EJEMPLO

DIMENSION DE LA MATRIZ DE PROBABILIDAES: 10

RENGLON 1

REN 1 ,COL 1 :

Fig. 3.3

Una vez que hemos alimentado los datos correspondientes a la matriz de probabilidades de transición, ya sea en una sesión anterior o en la misma sesión en la cual estamos trabajando, estamos en posibilidad de solicitar las estadísticas correspondientes. Esto se realiza a través de la opción 2 del menú principal "ESTADISTICAS BASICAS", la cual nos despliega un nuevo menú (fig. 3.4) mostrándonos las diferentes estadísticas que podemos solicitar.

[01] SELECCIONAR MATRIZ DE PROBABILIDAES DE TRANSICION
[02] CLASIFICACION DE ESTADOS
[03] PERIODICIDAD
[04] PROBABILIDADES DE PRIMERA VISITA EN N PASOS
[05] PROBABILIDADES DE TRANSICION EN N PASOS
[06] PROBABILIDADES DE PRIMERA VISITA
[07] TIEMPOS MEDIOS DE ABSORCION
[08] TIEMPOS MEDIOS DE OCUPACION
[09] TIEMPOS MEDIOS DE PRIMER PASO Y DE RECURRENCIA
[10] MATRIZ DE PROBABILIDADES ESTACIONARIAS
[99] SALIDA

OPCION :

Fig. 3.4

Antes de solicitar cualquier estadística es necesario seleccionar la matriz de transición con la que vamos a trabajar, esto es, indicarle al programa que datos debe utilizar para sus cálculos, esto se realiza por medio de la opción "01 SELECCIONAR MATRIZ DE PROBABILIDADES DE TRANSICION", una vez que se ha seleccionado una matriz, esta permanece como la matriz de datos a utilizar hasta que seleccionemos alguna otra, o bién abandonemos el menú de "ESTADISTICAS BASICAS".

TECLEE EL NOMBRE DE LA MATRIZ DE
PROBABILIDADES DE TRANSICION : EJEMPLO

LA MATRIZ EJEMPLO HA SIDO SELECCIONADA EXITOSAMENTE

Fig. 3.5

Después de seleccionada la matriz de transición podemos solicitar las estadísticas asociadas a ella. La opción "02 CLASIFICACION DE ESTADOS", nos muestra información acerca de las características de cada uno de los estados de la cadena, como son: el tipo de estado que es (transitorio, recurrente, absorbente o sin retorno), la clase comunicante a la que pertenece, el nivel de acceso de esa clase y el tipo de clase a la que pertenece.

C L A S I F I C A C I O N   D E   E S T A D O S

ESTADO	TIPO EDO.	CLASE	NIVEL	TIPO CLASE
1	TRANSITORIO	1	2	ABIERTA
2	TRANSITORIO	1	2	ABIERTA
3	RECURRENTE	2	1	CERRADA
4	TRANSITORIO	1	2	ABIERTA
5	RECURRENTE	3	1	CERRADA
6	TRANSITORIO	1	2	ABIERTA
7	RECURRENTE	2	1	CERRADA
8	RECURRENTE	3	1	CERRADA
9	RECURRENTE	2	1	CERRADA
10	RECURRENTE	2	1	CERRADA

SON TODOS LOS ESTADOS; TECLEE <RETURN> PARA CONTINUAR

Fig. 3.6

La opción "03 PERIODICIDAD" nos proporciona información sobre la periodicidad de los estados de la cadena, señalando si estos son transitorios, aperiódicos o bién el número de periodo que tienen.

P E R I O D I C I D A D   D E   L O S   E S T A D O S

ESTADO	PERIODICIDAD
1	TRANSITORIO
2	TRANSITORIO
3	2
4	TRANSITORIO
5	APERIODICO
6	TRANSITORIO
7	2
8	APERIODICO
9	2
10	2

SON TODOS LOS ESTADOS; TECLEE <RETURN> PARA CONTINUAR

Fig. 3.7

La opción "04 PROBABILIDADES DE PRIMERA VISITA EN N PASOS", nos permite calcular las probabilidades de primera visita en un número determinado de pasos o transiciones. Para el ejemplo presentado, estas se calcularon para 10 transiciones (Figs. 3.8 y 3.9), en la parte inferior de la pantalla aparecen los comandos que nos permiten desplazarnos a lo largo de la matriz, para poder visualizarla de manera completa.

PROBABILIDADES DE PRIMERA VISITA EN N PASOS   N = 10

	1	2	3	4	5	6	7
1	0.0000000	0.0000000	0.0005581	0.0000778	0.0004982	0.0000024	0.0019800
2	0.0000000	0.0000000	0.0074868	0.0000000	0.0001689	0.0000000	0.0007497
3	0.0000000	0.0000000	0.0729000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
4	0.0000000	0.0001945	0.0016015	0.0000000	0.0000827	0.0000000	0.0024068
5	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
6	0.0000000	0.0002723	0.0022421	0.0000000	0.0012358	0.0000000	0.0033695
7	0.0000000	0.0000000	0.0656100	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
8	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
9	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
10	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

COMANDO: [A] Arriba [B] Abajo [>] Derecha
[<] Izquierda [I] Pag.Inicial [F] Fin

Fig. 3.8

PROBABILIDADES DE PRIMERA VISITA EN N PASOS   N = 10

	8	9	10
1	0.0006133	0.0032031	0.0040136
2	0.0002639	0.0006840	0.0020322
3	0.0000000	0.0000000	0.0000000
4	0.0004260	0.0374339	0.0037405
5	0.0000004	0.0000000	0.0000000
6	0.0005976	0.0013775	0.0052479
7	0.0000000	0.0000000	0.0000000
8	0.0000020	0.0000000	0.0000000
9	0.0000000	0.0729000	0.0000000
10	0.0000000	0.0656100	0.0000000

COMANDO: [A] Arriba [B] Abajo [>] Derecha
[<] Izquierda [I] Pag.Inicial [F] Fin

Fig. 3.9

De igual forma la opción "05 PROBABILIDADES DE TRANSICION EN N PASOS" nos muestra la matriz de probabilidades de transición en un cierto número de pasos.

PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN EN N PASOS N = 10

	1	2	3	4	5	6	7
1	0.0005143	0.0001498	0.0110940	0.0000079	0.1500144	0.0002247	0.1153011
2	0.0002197	0.0000529	0.0103658	0.0000386	0.5181940	0.0000794	0.1023067
3	0.0000000	0.0000000	0.0909000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.9090999
4	0.0003744	0.0002197	0.0246535	0.0000529	0.1110313	0.0003295	0.2425727
5	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.6032775	0.0000000	0.0000000
6	0.0005242	0.0003076	0.0345149	0.0000741	0.1565638	0.0004613	0.3396010
7	0.0000000	0.0000000	0.0909100	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.9090899
8	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4959033	0.0000000	0.0000000
9	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
10	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

COMANDO: >   [A] Arriba   [B] Abajo   [>] Derecha
[<] Izquierda   [I] Pag.Inicial   [F] Fin

Fig. 3.10

PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN EN N PASOS N = 10

	8	9	10
1	0.1792015	0.0493071	0.4051454
2	0.3154200	0.0051240	0.0401902
3	0.0000000	0.0000000	0.0000000
4	0.0566035	0.0510209	0.5115334
5	0.3967226	0.0000000	0.0000000
6	0.0792449	0.0362305	0.3524769
7	0.0000000	0.0000000	0.0000000
8	0.5040960	0.0000000	0.0000000
9	0.0000000	0.0909000	0.9090999
10	0.0000000	0.0909100	0.9090899

COMANDO: F   [A] Arriba   [B] Abajo   [>] Derecha
[<] Izquierda   [I] Pag.Inicial   [F] Fin

Fig. 3.11

La opción "06 PROBABILIDADES DE PRIMERA VISITA" realiza el cálculo de la matriz de probabilidades de primera visita.

PROBABILIDADES DE PRIMERA VISITA

	1	2	3	4	5	6	7
1	0.2300000	0.2531646	0.6623377	0.0506329	0.3376623	0.3061225	0.6623377
2	0.1000000	0.0253165	0.1662338	0.2000000	0.0337663	0.0306122	0.1662338
3	0.0000000	0.0000000	1.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	1.0000000
4	0.5000000	0.1265823	0.8311689	0.0253165	0.1688312	0.1530612	0.8311689
5	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	1.0000000	0.0000000	0.0000000
6	0.7000000	0.1772152	0.7636364	0.0354430	0.2363636	0.2142857	0.7636364
7	0.0000000	0.0000000	1.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	1.0000000
8	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	1.0000000	0.0000000	0.0000000
9	0.0000000	0.0000000	1.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	1.0000000
10	0.0000000	0.0000000	1.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	1.0000000

COMANDO: [A] Arriba [B] Abajo [>] Derecha
[<] Izquierda [I] Pag.Inicial [F] Fin

Fig. 3.12

PROBABILIDADES DE PRIMERA VISITA

	8	9	10
1	0.3376623	0.6623377	0.6623377
2	0.0337663	0.1662338	0.1662338
3	0.0000000	1.0000000	1.0000000
4	0.1688312	0.8311689	0.8311689
5	1.0000000	0.0000000	0.0000000
6	0.2363636	0.7636364	0.7636364
7	0.0000000	1.0000000	1.0000000
8	1.0000000	0.0000000	0.0000000
9	0.0000000	1.0000000	1.0000000
10	0.0000000	1.0000000	1.0000000

COMANDO: [A] Arriba [B] Abajo [>] Derecha
[<] Izquierda [I] Pag.Inicial [F] Fin

Fig. 3.13

La opción siguiente "TIEMPOS MEDIOS DE ABSORCION", nos despliega los tiempos medios de absorción de la cadena, considerando que parte de cada uno de los estados transitorios, en caso de que no existan estados transitorios esta estadística no puede calcularse y el programa despliega un mensaje indicándolo.

TIEMPOS MEDIOS DE ABSORCION

ESTADO ORIGEN	TIEMPO MEDIO DE ABSORCION
1	2.000000
2	1.400000
4	2.000000
6	2.400000

SON TODOS LOS ESTADOS; TECLEE (RETURN) PARA CONTINUAR

Fig. 3.14

La opción "06 TIEMPOS MEDIOS DE OCUPACION" nos permite calcular la matriz de tiempos medios de ocupación, en las entradas donde este valor es ∞, aparece la palabra "INFINITO".

TIEMPOS MEDIOS DE OCUPACION

	1	2	3	4	5	6	7
1	1.2987013	0.2597403	INFINITO	0.0519481	INFINITO	0.3896104	INFINITO
2	0.1298701	1.0259740	INFINITO	0.2051948	INFINITO	0.0389610	INFINITO
3	0.0000000	0.0000000	INFINITO	0.0000000	0.0000000	0.0000000	INFINITO
4	0.6493506	0.1298701	INFINITO	1.0259740	INFINITO	0.1948052	INFINITO
5	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	INFINITO	0.0000000	0.0000000
6	0.9090909	0.1818182	INFINITO	0.0363636	INFINITO	1.2727273	INFINITO
7	0.0000000	0.0000000	INFINITO	0.0000000	0.0000000	0.0000000	INFINITO
8	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	INFINITO	0.0000000	0.0000000
9	0.0000000	0.0000000	INFINITO	0.0000000	0.0000000	0.0000000	INFINITO
10	0.0000000	0.0000000	INFINITO	0.0000000	0.0000000	0.0000000	INFINITO

COMANDO: > [A] Arriba [B] Abajo [>] Derecha
[<] Izquierda [I] Pag.Inicial [F] Fin

Fig. 3.15

TIEMPOS MEDIOS DE OCUPACION

	8	9	10
1	INFINITO	INFINITO	INFINITO
2	INFINITO	INFINITO	INFINITO
3	0.0000000	INFINITO	INFINITO
4	INFINITO	INFINITO	INFINITO
5	INFINITO	0.0000000	0.0000000
6	INFINITO	INFINITO	INFINITO
7	0.0000000	INFINITO	INFINITO
8	INFINITO	0.0000000	0.0000000
9	0.0000000	INFINITO	INFINITO
10	0.0000000	INFINITO	INFINITO

COMANDO: [A] Arriba [B] Abajo [>] Derecha
> [<] Izquierda [I] Pag.Inicial [F] Fin

Fig. 3.16

La opción "09 TIEMPOS MEDIOS DE PRIMER PASO Y DE RECURRENCIA" nos muestra la matriz de tiempos medios de primer paso y de recurrencia, estas estadisticas solo se calculan para aquellos estados que pertenecen a una misma clase cerrada, para el resto de las combinaciones este valor es cero.

TIEMPOS MEDIOS DE PRIMER PASO Y DE RECURRENCIA

	1	2	3	4	5	6	7
1	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
3	0.0000000	0.0000000	21.999996	0.0000000	0.0000000	0.0000000	2.0000000
4	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
5	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	1.0000001	0.0000000	0.0000000
6	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
7	0.0000000	0.0000000	19.999996	0.0000000	0.0000000	0.0000000	2.2000000
8	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	1.0000000	0.0000000	0.0000000
9	0.0000000	0.0000000	20.999996	0.0000000	0.0000000	0.0000000	1.0000000
10	0.0000000	0.0000000	10.999996	0.0000000	0.0000000	0.0000000	1.2000000

COMANDO: **[A] Arriba** **[B] Abajo** **[>] Derecha**
[<] Izquierda **[I] Pag.Inicial** **[F] Fin**

Fig. 3.17

TIEMPOS MEDIOS DE PRIMER PASO Y DE RECURRENCIA

	8	9	10
1	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	0.0000000	0.0000000	0.0000000
3	0.0000000	1.0000000	3.0000000
4	0.0000000	0.0000000	0.0000000
5	1.2500000	0.0000000	0.0000000
6	0.0000000	0.0000000	0.0000000
7	0.0000000	20.999996	1.0000000
8	2.2500000	0.0000000	0.0000000
9	0.0000000	21.999996	2.0000000
10	0.0000000	19.999996	2.2000000

COMANDO: [A] Arriba [B] Abajo [>] Derecha
[<] Izquierda [I] Pag.Inicial [F] Fin

Fig. 3.18

Por último la opción "10 MATRIZ DE PROBABILIDADES ESTACIONARIAS" realiza el cálculo de las probabilidades estacionarias. Para aquellos estados que tienen periodicidad diferente de 1 y cuya probabilidad estacionaria depende del periodo, las probabilidades correspondientes aparecen desplegadas en atributo "video inverso" (reverse).

MATRIZ DE PROBABILIDADES ESTACIONARIAS

	1	2	3	4	5	6	7
1	0.0000000	0.0000000	[redacted]	0.0000000	0.1875902	0.0000000	[redacted]
2	0.0000000	0.0000000	[redacted]	0.0000000	0.4632035	0.0000000	[redacted]
3	0.0000000	0.0000000	[redacted]	0.0000000	0.0000000	0.0000000	[redacted]
4	0.0000000	0.0000000	[redacted]	0.0000000	0.0937951	0.0000000	[redacted]
5	0.0000000	0.0000000	[redacted]	0.0000000	0.5555555	0.0000000	[redacted]
6	0.0000000	0.0000000	[redacted]	0.0000000	0.1313131	0.0000000	[redacted]
7	0.0000000	0.0000000	[redacted]	0.0000000	0.0000000	0.0000000	[redacted]
8	0.0000000	0.0000000	[redacted]	0.0000000	0.5555555	0.0000000	[redacted]
9	0.0000000	0.0000000	[redacted]	0.0000000	0.0000000	0.0000000	[redacted]
10	0.0000000	0.0000000	[redacted]	0.0000000	0.0000000	0.0000000	[redacted]

COMANDO: [A] Arriba [B] Abajo [>] Derecha
[<] Izquierda [I] Pag.Inicial [F] Fin

Fig. 3.19

MATRIZ DE PROBABILIDADES ESTACIONARIAS

	8	9	10
1	0.1500722	[redacted]	[redacted]
2	0.3705628	[redacted]	[redacted]
3	0.0000000	[redacted]	[redacted]
4	0.0750361	[redacted]	[redacted]
5	0.4444444	[redacted]	[redacted]
6	0.1050505	[redacted]	[redacted]
7	0.0000000	[redacted]	[redacted]
8	0.4444444	[redacted]	[redacted]
9	0.0000000	[redacted]	[redacted]
10	0.0000000	[redacted]	[redacted]

COMANDO: [A] Arriba [B] Abajo [>] Derecha
[<] Izquierda [I] Pag.Inicial [F] Fin

Fig. 3.20

CAPITULO 4

EJEMPLOS DE APLICACION

4.1 APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS

Consideremos un sistema de aprovechamientos hidráulicos que consta de un vaso y un distrito de riego y cuyo propósito es el de proporcionar agua en dicha zona de riego. Supongamos que se desea evaluar una determinada politica de asignación de agua basándonos en la maximización de los beneficios netos esperados de la producción agricola, tomando en cuenta el caracter estocástico de los escurrimientos al vaso en cada periodo.

Una politica de asignación de agua consiste en la especificación del volumen de agua que se promete durante un periodo de acuerdo al nivel de almacenamiento del vaso al inicio de ese periodo.

Existen diversos factores que afectan los beneficios que se obtienen de la producción agricola en el distrito de riego, por lo que son los que determinan la politica de asignación de agua. El primer aspecto está relacionado con las caracteristicas del vaso y la manera probabilistica con que llegan los escurrimientos al mismo. Especificamente la capacidad del vaso y la función de distribución de los escurrimientos al vaso. El segundo aspecto está relacionado con el uso del agua reflejado en el hecho de que cada volumen prometido de agua en un ciclo de producción agricola permitirá obtener un beneficio económico que es cuantificable. Un último aspecto es el relacionado con las penalizaciones que deben considerarse al operar un sistema de aprovechamientos hidráulicos, una de ellas es la debida al control de avenidas, esto es, cada volumen derramado de agua tiene un costo, ya que ese volumen podria ser usado en la producción agricola o bien causa daños materiales al ser derramado. La otra penalización es la debida al déficit en la entrega de agua, esto es la diferencia entre el volumen de agua prometido y el volumen real entregado.

Supongamos que cada periodo la cantidad total de agua que entra al vaso producto de los escurrimientos, es una cantidad aleatoria que denotaremos por Q, y cuya función de distribución está dada por la siguiente tabla:

Q	0	1/4	1/2	3/4	1
P(Q)	1/8	2/8	3/8	1/8	1/8

donde P(Q) es la probabilidad asociada a un volumen de escurrimiento Q. Consideremos que la capacidad del vaso es igual a 1 y la politica de asignación que se sigue es la siguiente:

S	0	1/4	1/2	3/4	1
W	1/4	1/4	1/2	3/4	3/4

donde S es el nivel de almacenamiento al principio del año y W el volumen de agua prometido.

La siguiente tabla nos muestra los beneficios obtenidos de asignar un volumen de agua X, estos beneficios se denotan por B(X).

X	0	1/4	1/2	3/4	1
B(X)	0	2	7/2	9/2	5

Los beneficios anteriores son los obtenidos al asignar al distrito de riego un volumen determinado de agua, sin importar si dicho volumen es realmente entregado o no, ya que las desviaciones producto de las diferencias entre los volúmenes entregado y asignado se consideran en las penalizaciones siguientes:

X - X'	0	1/4	1/2	3/4	1
T(X - X')	0	-4	-7	-9	-10

donde X es el volumen de agua prometido y X' el entregado y la penalización debida al déficit X - X' es T(X - X').

Mientras que las penalizaciones por derramar un volumen de agua Z estan dadas por:

Z	0	1/4	1/2	3/4	1
D(Z)	0	-3/2	-4	-4	-4

Podemos identificar los cinco diferentes niveles de almacenamiento con los estados de la cadena de Markov asociada, asi el estado 1 corresponde a un nivel de almacenamiento 0, mientras que el estado 5 se asocia a un nivel de almacenamiento 1.

La matriz de probabilidades de transición se obtiene usando la función de distribución de los escurrimientos al vaso y la correspondiente politica de asignación de agua.

La entrada P_{11} de la matriz de probabilidades de transición representa la probabilidad de que la presa se encuentre vacia (estado 1) al final del periodo, considerando que al principio del periodo se encontraba vacia. De acuerdo a la politica de asignación esto ocurrirá en el caso de que los escurrimientos al vaso sean menores o iguales a 1/4, ya que esa es la cantidad de agua prometida por lo que:

$$P_{11} = P[Q \leq 1/4] = P[Q = 0] + P[Q = 1/4] = 1/8 + 2/8 = 3/8.$$

De manera análoga podemos determinar el resto de las probabilidades, cuyo cálculo se presenta a continuación:

P_{12} = Probabilidad de que la presa se encuentre a 1/4 de su capacidad al final del periodo, dado que al iniciar el mismo, estaba vacia.

$= P[Q = 1/2] = 3/8.$

P_{13} = Probabilidad de que la presa se encuentre a una capacidad de 1/2 de su nivel máximo, dado que al inicio del periodo se encontraba vacia.

$= P[Q = 3/4] = 1/8.$

P_{14} = Probabilidad de que al finalizar el periodo el nivel de la presa esté a 3/4 de su capacidad, dado que al iniciar estaba vacia.

$= P[Q = 1] = 1/8.$

P_{15} = Probabilidad de que al finalizar el periodo el nivel de la presa se encuentre en 1, dado que al iniciar estaba vacia. Esta probabilidad es igual a 0 ya que se necesitaria que el nivel de los escurrimientos al vaso fueran de 1 1/4 lo cual no es posible.

$= 0.$

P_{21} = Probabilidad de que al finalizar el periodo la presa se encuentre vacia, dado que al iniciar el periodo se encontraba a 1/4 de su capacidad.

$= P[Q = 0] = 1/8.$

P_{22} = Probabilidad de que al finalizar el periodo la presa se encuentre a 1/4 de su capacidad, dado que al iniciar estaba en 1/4.

$= P[Q = 1/4] = 2/8.$

P_{23} = Probabilidad de que al finalizar el periodo la presa se encuentre a la mitad de su capacidad, dado que al iniciar, su nivel era de 1/4.

$= P[Q = 1/2] = 3/8.$

P_{24} = Probabilidad de que al finalizar el periodo la presa se encuentre a 3/4 de su capacidad, dado que al iniciar, su nivel era de 1/4.

$= P[Q = 3/4] = 1/8.$

P_{25} = Probabilidad de que al finalizar el periodo la presa se encuentre llena, dado que al iniciar, su nivel era de 1/4.

$= P[Q = 1] = 1/8.$

P_{31} = Probabilidad de que al finalizar el periodo la presa se encuentre vacia, dado que al inicio del periodo se encontraba su nivel en 1/2.

$= P[Q = 0] = 1/8.$

P_{32} = Probabilidad de que al finalizar el periodo la presa se encuentre a 1/4 de su capacidad, dado que al inicio del periodo se encontraba su nivel en 1/2.

$= P[Q = 1/4] = 2/8.$

P_{33} = Probabilidad de que al término del periodo la presa se encuentre a 1/2 de su capacidad, considerando que al iniciar el periodo se encontraba también a 1/2.

$= P[Q = 1/2] = 3/8.$

P_{34} = Probabilidad de que al término del periodo la presa se encuentre a 3/4 de su capacidad, considerando que al inicio su nivel era de 1/2.

$= P[Q = 3/4] = 1/8.$

P_{35} = Probabilidad de que al término del periodo la presa se encuentre llena, dado que al inicio su nivel era de 1/2.

$= P[Q = 1] = 1/8.$

P_{41} = Probabilidad de que al finalizar el periodo la presa se encuentre vacia, dado que al inicio del mismo, se encontraba a 3/4 de su capacidad.

$= P[Q = 0] = 1/8.$

P_{42} = Probabilidad de que al finalizar el periodo la presa se encuentre a 1/4 de su capacidad, considerando que al inicio su nivel era de 3/4.

$= P[Q = 1/4] = 2/8.$

P_{43} = Probabilidad de que al terminar el periodo el nivel de la presa sea de 1/2, dado que al iniciar, éste era de 3/4.

$= P[Q = 1/2] = 3/8.$

P_{44} = Probabilidad de que al término del periodo el nivel de la presa sea de 3/4, dado que al inicio era de 3/4.

$= P[Q = 3/4] = 1/8.$

P_{45} = Probabilidad de que al finalizar el periodo la presa se encuentre llena, considerando que al principio del mismo su nivel era de 3/4.

$= P[Q = 1] = 1/8.$

P_{51} = Probabilidad de que al terminar el periodo la presa se encuentre vacia, dado que al iniciar se encontraba a su máxima capacidad. Esta probabilidad es igual a 0 ya que para que esto suceda seria necesario que la cantidad de agua prometida fuese de 1, lo cual no ocurre en ningún caso.

$= 0.$

P_{52} = Probabilidad de que al finalizar el periodo el nivel de agua almacenada sea de 1/4, considerando que al iniciar la presa estaba llena.

$= P[Q = 0] = 1/8.$

P_{53} = Probabilidad de que al término del periodo el nivel de agua almacenada fuese de 1/2, dado que al iniciar el mismo la presa estaba llena.

$= P[Q = 1/4] = 2/8.$

P_{54} = Probabilidad de que al final del periodo la presa se encuentre a 3/4 de su capacidad, considerando que al inicio se encontraba llena.

$= P[Q = 1/2] = 3/8.$

P_{55} = Probabilidad de que al terminar el periodo la presa se encuentre llena, considerando que al iniciar el mismo se encontraba también llena.

$= P[Q \geq 3/4] = P[Q = 3/4]+P[Q = 1] = 1/8+1/8 = 2/8.$

De esta manera la matriz de probabilidades de transición quedaria de la siguiente manera:

	1	2	3	4	5
1	3/8	3/8	1/8	1/8	0
2	1/8	2/8	3/8	1/8	1/8
3	1/8	2/8	3/8	1/8	1/8
4	1/8	2/8	3/8	1/8	1/8
5	0	1/8	2/8	3/8	2/8

Para poder evaluar la politica de asignación, calculemos b_{ij} el beneficio neto esperado al pasar del estado i al estado j.

$b_{11} = (2 - 4)(1/8) + 2(2/8) = 2/8.$
$b_{12} = 2(3/8) = 6/8.$
$b_{13} = 2(1/8) = 2/8.$
$b_{14} = 2(1/8) = 2/8.$
$b_{15} = 0.$
$b_{21} = 2(2/8) = 4/8.$
$b_{22} = 2(2/8) = 4/8.$
$b_{23} = 2(3/8) = 6/8.$
$b_{24} = 2(1/8) = 2/8.$
$b_{25} = 2(1/8) = 2/8.$
$b_{31} = (7/2)(1/8) = 7/16.$
$b_{32} = (7/2)(2/8) = 7/8.$
$b_{33} = (7/2)(3/8) = 21/16.$
$b_{34} = (7/2)(1/8) = 7/16.$
$b_{35} = (7/2)(1/8) = 7/16.$
$b_{41} = (9/2)(1/8) = 9/16.$
$b_{42} = (9/2)(2/8) = 9/8.$
$b_{43} = (9/2)(3/8) = 27/16.$
$b_{44} = (9/2)(1/8) = 9/16.$
$b_{45} = (9/2)(1/8) = 9/16.$
$b_{51} = (9/2)(0) = 0.$
$b_{52} = (9/2)(1/8) = 9/16.$
$b_{53} = (9/2)(2/8) = 9/8.$
$b_{54} = (9/2)(3/8) = 27/16.$
$b_{55} = (9/2)(1/8) + (-6/2)(1/8) = 3/16.$

$B_1 = 12/8.$
$B_2 = 18/8.$
$B_3 = 28/8.$
$B_4 = 31/8.$
$B_5 = 57/16.$

Donde B_i representa el beneficio esperado en el siguiente periodo, considerando que el nivel de la presa es el correspondiente al estado i. Esto significa que el beneficio esperado es mayor cuando la presa se encuentra en el estado 4, es decir a 3/4 de su capacidad.

Mediante los beneficios esperados podemos evaluar diferentes políticas de asignación, considerando el valor presente de los beneficios esperados durante varios periodos, de esta manera será posible comparar dos o mas políticas diferentes y en base a los beneficios esperados determinar cual es mas conveniente.

La matriz de tiempos medios de primer paso y de recurrencia es:

	1	2	3	4	5
1	6.83	3.18	4.07	6.74	11.20
2	9.33	3.95	3.09	6.43	9.60
3	9.33	3.95	3.09	6.43	9.60
4	9.33	3.95	3.09	6.43	9.60
5	10.66	4.62	3.39	4.54	8.20

la cual nos muestra el número de periodos que en promedio transcurren para que la presa pase de un estado a otro, por ejemplo la entrada t_{51} = 10.66, esto significa que cada vez que la presa este llena (estado 5), transcurrirán en promedio 11 periodos para que ésta quede vacía (edo. 1).

Por último el vector de probabilidades estacionarias es :

[0.1463414, 0.2530488, 0.3231707, 0.1554878, 0.1219512]

y cuya interpretación es la siguiente:

Un 14.6 % de los periodos la presa estará vacía, en el 25.3 % de los periodos la presa se encontrará a 1/4 de su capacidad, en el 32.3 % de los periodos la presa se encontrará a 1/2 de su capacidad, en el 15.6 % de los periodos la presa se encontrará a 3/4 de su capacidad, y en el 12.2 % de los periodos la presa se encontrará llena.

4.2 SISTEMA DE COMPUTO

Consideremos un sistema de cómputo, el cual almacena información y tiene una capacidad finita de 50 MBytes. A lo largo de una semana de operación, el sistema recibe determinadas cantidades de información generada por los usuarios, dicha información es almacenada en el sistema. Los volúmenes de información que se reciben tienen un caracter aleatorio, y su función de densidad está dada por:

v	0	5	10	15	20	25	30
P(v)	0.05	0.1	0.1	0.1	0.3	0.2	0.15

donde v representa el volumen de información recibido para almacenamiento y P(v) la probabilidad asociada a ese volumen.

Como la capacidad del sistema es limitada, la información no puede permanecer para siempre almacenada, por lo que cuando el sistema empieza a saturarse, es necesario liberar espacio, y trasladar la información hacia dispositivos de almacenamiento externo. Esto se realiza bajo la politica (s,S), lo que significa que cuando el volumen de información almacenado sea mayor o igual a S, se respalda información en cantidades necesarias para que dicho volumen disminuya a s. Consideremos en este caso que la politica a utilizar es (30,35).

Consideremos 11 diferentes estados del sistema, asociados a volúmenes de información almacenada:

Estado	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Volumen de inf. almacenada	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

Para construir la matriz de probabilidades de transición utilizaremos la función de densidad del volumen de información recibido y la politica de administración del sistema:

$p_{11} = P[v=0] = .05$
$p_{12} = P[v=5] = .1$
$p_{13} = P[v=10] = .1$
$p_{14} = P[v=15] = .1$
$p_{15} = P[v=20] = .3$
$p_{16} = P[v=25] = .2$
$p_{17} = P[v=30] = .15$
$p_{18} = p_{19} = p_{1,10} = p_{1,11} = 0$

$p_{21} = 0$
$p_{22} = P[v=0] = .05$
$p_{23} = P[v=5] = .1$
$p_{24} = P[v=10] = .1$
$p_{25} = P[v=15] = .1$
$p_{26} = P[v=20] = .3$
$p_{27} = P[v=25] = .2$
$p_{28} = P[v=30] = .15$
$p_{29} = p_{2,10} = p_{2,11} = 0$

$p_{31} = p_{32} = 0$
$p_{33} = P[v=0] = .05$
$p_{34} = P[v=5] = .1$
$p_{35} = P[v=10] = .1$
$p_{36} = P[v=15] = .1$
$p_{37} = P[v=20] = .3$
$p_{38} = P[v=25] = .2$
$p_{39} = P[v=30] = .15$
$p_{3,10} = p_{3,11} = 0$

$p_{41}=p_{42}=p_{43}=0$
$p_{44}=P[v=0]=.05$
$p_{45}=P[v=5]=.1$
$p_{46}=P[v=10]=.1$
$p_{47}=P[v=15]=.1$
$p_{48}=P[v=20]=.3$
$p_{49}=P[v=25]=.2$
$p_{4\,10}=P[v=30]=.15$
$p_{4\,11}=0$

$p_{51}=p_{52}=p_{53}=p_{54}=0$
$p_{55}=P[v=0]=.05$
$p_{56}=P[v=5]=.1$
$p_{57}=P[v=10]=.1$
$p_{58}=P[v=15]=.1$
$p_{59}=P[v=20]=.3$
$p_{5\,10}=P[v=25]=.2$
$p_{5\,11}=P[v=30]=.15$

$p_{61}=p_{62}=p_{63}=p_{64}=p_{65}=0$
$p_{66}=P[v=0]=.05$
$p_{67}=P[v=5]=.1$
$p_{68}=P[v=10]=.1$
$p_{69}=P[v=15]=.1$
$p_{6\,10}=P[v=20]=.3$
$p_{6\,11}=P[v\geq 25]=.35$

$p_{71}=p_{72}=p_{73}=p_{74}=p_{75}=p_{76}=0$
$p_{77}=P[v=0]=.05$
$p_{78}=P[v=5]=.1$
$p_{79}=P[v=10]=.1$
$p_{7\,10}=P[v=15]=.1$
$p_{7\,11}=P[v\geq 20]=.65$

las probabilidades de transición para los estados 8, 9, 10 y 11 son iguales a las que se tienen para el estado 7, de esta manera la matriz de probabilidades de transición asume la siguiente forma:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	.05	.1	.1	.1	.3	.2	.15	0	0	0	0
2	0	.05	.1	.1	.1	.3	.2	.15	0	0	0
3	0	0	.05	.1	.1	.1	.3	.2	.15	0	0
4	0	0	0	.05	.1	.1	.1	.3	.2	.15	0
5	0	0	0	0	.05	.1	.1	.1	.3	.2	.15
6	0	0	0	0	0	.05	.1	.1	.1	.3	.35
7	0	0	0	0	0	0	.05	.1	.1	.1	.65
8	0	0	0	0	0	0	.05	.1	.1	.1	.65
9	0	0	0	0	0	0	.05	.1	.1	.1	.65
10	0	0	0	0	0	0	.05	.1	.1	.1	.65
11	0	0	0	0	0	0	.05	.1	.1	.1	.65

La clasificación de estados nos muestra que los estados 1, 2, 3, 4, 5 y 6 son estados transitorios, mientras que los estados 7, 8, 9, 10 y 11 son estados recurrentes y pertenecen a una misma clase cerrada, por otro lado, los tiempos medios de absorción son:

Estado	1	2	3	4	5	6
Tiempo med. de absor.	2.12	1.79	1.42	1.29	1.16	1.05

Esto significa que después de 2 semanas de operación del sistema, existe una alta probabilidad de que el sistema se encuentre en niveles de saturación muy altos (estados 7, 8, 9, 10 y 11) y que una vez que el volumen de información almacenado sea mayor o igual a 30, esta cantidad de espacio ocupado no disminuirá nunca, es decir el volumen de espacio ocupado ocilará entre 30 y 50 desde ese momento en adelante.

Los tiempos medios de primer paso y de recurrencia son:

	7	8	9	10	11
7	20	10	10	10	1.54
8	20	10	10	10	1.54
9	20	10	10	10	1.54
10	20	10	10	10	1.54
11	20	10	10	10	1.54

Como podemos ver, los tiempos medios de primer paso y de recurrencia, son iguales para un determinado estado, sin importar el estado desde donde el sistema parte. La interpretación de estos valores es la siguiente:

Independientemente del estado en el que se encuentre el sistema transcurren en promedio 20 semanas para que el nivel de volumen ocupado sea de 30; 10 semanas para que el volumen sea de 35, 40 y 45; y de 2 semanas para que el espacio ocupado sea la totalidad de la capacidad del sistema.

Por último el vector de probabilidades estacionarias es:

(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.05, 0.1, 0.1, 0.1, 0.65)

lo que significa que aproximadamente :

en el 5 % de las ocasiones el volumen ocupado es de 30 MB,
en el 10 % de las ocasiones el volumen ocupado es de 35 MB,
en el 10 % de las ocasiones el volumen ocupado es de 40 MB,
en el 10 % de las ocasiones el volumen ocupado es de 45 MB,
en el 65 % de las ocasiones el volumen ocupado es de 50 MB.

C O N C L U S I O N E S

Existen en la vida real un gran número de sistemas y situaciones que cumplen con las características de un modelo de cadenas de Markov, por lo que su utilidad es muy amplia.

Las Cadenas de Markov son un modelo probabilístico que proporciona información a través de una serie de estadísticas asociadas y cuya interpretación es bastante sencilla.

El análisis de Cadenas de Markov finitas con parámetro discreto involucra una gran cantidad de cálculos y operaciones matriciales, que requieren de un esfuerzo considerable, no tanto por su complejidad sino por su cantidad. El utilizar una computadora para realizar todos estos cálculos hasta cierto punto tediosos, nos proporciona una serie de ventajas que propician un aumento en la efectividad de las Cadenas de Markov como herramientas de análisis.

Por una parte el hecho de realizar los cálculos a través de un programa de computadora nos proporciona mayor confiabilidad en dichos cálculos, además de permitirnos canalizar nuestras energías en la interpretación de las estadísticas calculadas en vez de consumirlas en la realización de cálculos mecánicos.

En ocasiones en que debemos comparar varias políticas de operación y cada una de estas políticas genera una matriz de transición diferente, la labor de cálculo se multiplica, por lo que la utilización de una computadora para llevar a cabo estos cálculos resulta en un ahorro significativo de tiempo y esfuerzo.

A N E X O S

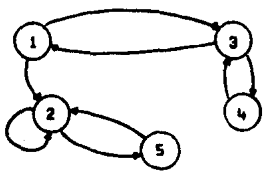
ANEXO A

METODO DE DESCOMPOSICION DE UNA GRAFICA EN SUBGRAFICAS CONEXAS MAXIMAS

Sea $\Gamma^+(x)$ el conjunto de sucesores de x, es decir aquellos vértices que pueden alcanzarse desde x con caminos de longuitud cualquiera; y sea $\Gamma^-(x)$ el conjunto de predecesores de x (conjunto de vértices desde los cuales podemos llegar a x sin importar la longuitud del camino utilizado), el conjunto $C(x)=\Gamma^+(x) \cap \Gamma^-(x)$ constituye una subgráfica conexa es decir una clase comunicante.

Un método para identificar las clases comunicantes de un cadena, consiste en tomar un vértice cualquiera x y calcular $\Gamma^+(x)$ y $\Gamma^-(x)$ y a partir de estos C(x) con lo cual obtenemos la clase comunicante de x. A continuación suprimimos los vértices que correspondan a dicha clase y repetimos el mismo procedimiento para otro vértice de los restantes, asi hasta completar todos los vértices.

Para ilustrar este método consideremos la siguiente gráfica:



Construyamos la matriz booleana, donde indicaremos los arcos posibles con un 1.

	1	2	3	4	5	$\Gamma^+(1)$
1	0	1	1	0	0	0
2	0	1	0	0	1	1
3	1	0	0	1	0	1
4	0	0	1	0	0	2
5	0	1	0	0	0	2
$\Gamma^-(1)$	0		1	2		

Tomemos el vértice 1, para calcular $\Gamma^+(1)$ analizamos la matriz por renglones, marcando con 0 el vértice analizado, después con 1 los vértices que pueden ser alcanzados desde el vértice 1 con caminos de longuitud igual a 1; de igual manera estos vértices marcados, deben analizarse y marcar aquellos que puedan alcanzarse con caminos de longuitud 1, con etiqueta igual a la del vértice analizado + 1. Así hasta que ningún vértice pueda ser etiquetado, en caso de que algún vértice ya este etiquetado, se respeta la etiqueta original.

Para calcular $\Gamma^{-}(1)$ procedemos de igual forma, pero analizando la matriz por columnas, es decir etiquetando predecesores.

Así $\Gamma^{+}(1) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $\Gamma^{-}(1) = \{1, 3, 4\}$, por lo que $C(1) = \{1, 3, 4\}$. Eliminando estos vértices de la matriz tenemos:

	2	5	$\Gamma^{+}(2)$
2	1	1	0
5	1	0	1
$\Gamma^{-}(2)$	0	1	

Tomemos ahora el vértice 2 y de igual manera $\Gamma^{+}(2)=\{2,5\}$ y $\Gamma^{-}(2)=\{2,5\}$, por lo que $C(2)=\{2,5\}$.

Tenemos entonces dos clases comunicantes :

$C_1 = \{1, 3, 4\}$ y $C_2 = \{2, 5\}$.

METODO PARA LA DETERMINACION DE LOS NIVELES DE CLASE DE UNA GRAFICA

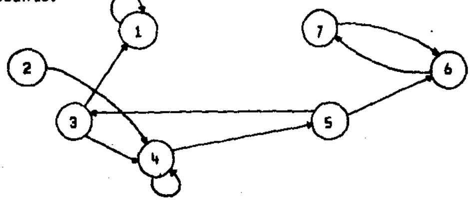
Este método nos permite determinar el orden en que una cadena recorre las diferentes clases comunicantes. Para poder utilizarlo, es necesario determinar primero las clases de equivalencia, después construimos la matriz booleana asociada, pero considerando a las clases de equivalencia como si fueran vértices.

Formamos un vector V_0 en el que aparece la suma de los elementos de los renglones de la matriz, los elementos del vector V_0 que son iguales a cero representan las clases que pertenecen al nivel más inferior N_0, es decir que a partir de dicha clase no existe otra clase que sea su sucesora.

Supongamos que C_i y C_j pertenecen a N_0, entonces calculamos la suma de los elementos de los renglones de la matriz, pero sin tomar en consideración las columnas correspondientes a C_i y C_j, al vector resultante lo restamos a V_0 para obtener V_1, las entradas correspondientes a las clases ya ordenadas no son consideradas. Los elementos de V_1 que son iguales a 0 constituyen el siguiente nivel N_1, es decir, aquellas clases cuyas sucesoras son los elementos de N_0. Este procedimiento se repite hasta agotar todas las clases. De esta forma las clases que tengan un nivel N_0 constituyen las clases cerradas, ya que no tienen sucesoras y por lo tanto una vez que la cadena cae en dicha clase permenece en ella para siempre.

A continuación se ilustra el método descrito con un ejemplo.

Consideremos la cadena representada por la gráfica siguiente:



Aplicando el primer método presentado en este anexo, tenemos que existen cuatro clases comunicantes:

C_1 = {1}
C_2 = {3, 4, 5}
C_3 = {6, 7}
C_4 = {2}

Consideremos cada clase como si fuese un vértice y formemos la matriz booleana correspondiente.

	C_1	C_2	C_3	C_4	V_0
C_1	0	0	0	0	0
C_2	1	0	1	0	2
C_3	0	0	0	0	0
C_4	0	1	0	0	1

Las clases C_1 y C_3 pertenecen al nivel N_0. La nueva matriz a considerar es :

	C_2	C_4	V_1
C_1	0	0	X
C_2	0	0	0
C_3	0	0	X
C_4	1	0	1

El siguiente nivel N_1 esta constituido por la clase C_2.

	C_4	V_2
C_1	0	X
C_2	0	X
C_3	0	X
C_4	0	0

Por último el nivel N_2 esta formado por la clase C_4.

De esta forma hemos ordenado las clases comunicantes, obteniendo que las clase C_1 y C_3 son clases cerradas y las clases C_2 y C_4 son clases abiertas.

ANEXO B

ALGORITMO PARA DETERMINAR LOS CIRCUITOS SIMPLES DE LONGUITUD NO NULA A PARTIR DE UN DETERMINADO VERTICE.

1) Hacer $C = Ca = 1$.

2) Elegir un vértice cualquiera s, etiquetar dicho vértice con etiqueta temporal $[p=0]_C$.

3) Hacer $Va = s$.

4) Etiquetar los restantes vértices con etiqueta temporal $[p=\infty]_C$.

5) Tomar el primer vértice V_i, en $\Gamma^+(Va)$ que no tenga etiqueta permanente $[\ ]_{Ca}$, y etiquetar temporalmente con $[p=\min\{[p(V_i)]_{Ca}, [p(Va)]_{Ca}+1\}]_{Ca}$; si no existe dicho vértice ir al paso 9.

6) Para cada uno de los restantes vértices V_i en $\Gamma^+(Va)$ que no tengan etiqueta permanente $[\ ]_{Ca}$, hacer :

6.1) $C = C + 1$.

6.2) Etiquetar todos los vértices con etiqueta temporal $[p=\infty]_C$.

6.3) Etiquetar permanentemente, vértices antecesores con etiquetas $[\ ]_{Ca}$, a partir de Va hasta llegar al vértice con etiqueta $[1]_{Ca}$ o $[0]_{Ca}$; con etiquetas $[p]_C$, donde p es la etiqueta de $[p]_{Ca}$.

6.4) Si V_i no tiene etiqueta permanente $[\ ]_C$, etiquetar temporalmente con $[p=\min\{[p(Vi)]_C, [p(Va)]_{Ca}+1\}]$.

7) Hacer permanente la etiqueta $[\ ]_{Ca}$ de Va.

8) Cambiar las etiquetas $[0]_C$ de s por temporales $[p=\infty]_C$.

9) Tomar cualquier vértice V_i adyacente a Va, con alguna etiqueta temporal $[p]_{Ca}$, con $p \neq \infty$, y hacemos $Va = V_i$, en caso de no existir dicho vértice, buscar algún vértice con etiqueta temporal $[p]_C$, con $C \neq Ca$ y $p \neq \infty$, y hacer $Ca=C$; si no existe ningún vértice que cumpla con esto terminar.

10) Ejecutar pasos 5, 6 y 7.

11) Si alguno de los vértices etiquetados en los pasos 5 y 6 es s, hacer permanente dicha etiqueta y eliminar todas las etiquetas temporales $[\infty]_{Ci}$ con Ci = la etiqueta permanente de s.

12) Ejecutar paso 9.

13) Ir al paso 10.

ANEXO C

Lemma.- Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ enteros positivos con máximo común divisor igual a 1. Entonces existe un entero N tal que si $m \geq N$, entonces m puede ser expresado como una combinación lineal positiva de los elementos a_i. Esto es

$m = \sum_{i=1}^{n} b_i a_i$ donde b_i son enteros no-negativos.

Prueba.- Si el m.c.d. de $\{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}$ es igual a 1, entonces existen enteros k_j tales que:

$$1 = \sum_{j=1}^{n} k_j a_j.$$

Sea $s = \sum_{i=1}^{n} a_i$, cualquier entero positivo puede ser escrito de manera única como $m = qs + r$ donde q y r son entaros y $0 \leq r \leq s$. Entonces :

$$m = q \sum_{i=1}^{n} a_i + r \sum_{i=1}^{n} k_i a_i = \sum_{i=1}^{n} (q+rk_i)a_i$$

por lo que basta escoger m lo suficientemente grande para que $q \geq s|k_i|$ para toda $i = 1,2,\ldots,n$. Entonces todos los coeficientes $q+rk_i$ serán no-negativos.

Teorema de Renovación .- Sean $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, $\{u_k\}$ sucesiones de números reales no-negativos con $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$ y con $\{u_k\}$ una sucesión acotada. Supongamos que el m.c.d. de $\{k / a_k > 0\}$ es igual a 1 y que se cumple la ecuación de renovación:

$$u_n - \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} u_k = b_n \text{ para toda } n=0,1,2,\ldots$$

Entonces el límite de u_n cuando n tiende a infinito existe:

$$
\lim_{n\to\infty} u_n = \begin{cases} \dfrac{\sum_{k=0}^{\infty} b_k}{\sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k} & \text{si } \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k < \infty \\[2ex] 0 & \text{si } \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k = \infty \end{cases}
$$

Prueba.- El supuesto de que el mcd de $\{k | a_k \; 0\} = 1$ es muy importante, para la demostración del teorema asumiremos que $a_1 = 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$.

Sea $\mu = \overline{\lim}\, u_n$ cuando $n \to \infty$, por hipótesis μ es finito. Seleccionemos una subsucesión n_j tal que el lim cuando $j \to \infty$ de $u_{n_j} = \mu$. Mostraremos que lim cuando $j \to \infty$ de $u_{n_j-2} = \mu$ utilizando la condición de que $a_2 > 0$. Supongamos que es falso que lim cuando $j \to \infty$ de $u_{n_j-2} = \mu$. Entonces existe $\mu' < \mu$ tal que $u_{n_j-2} < \mu$ para un número infinito de valores de j. Sea $\epsilon = a_2(\mu - \mu')/4$ y $M = \sup\{u_n\}$.

Tomemos N tal que $\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k \leq \epsilon/M$. Ahora escojamos j lo suficientemente grande para que $n_j \geq N$, $u_{n_j} > \mu - \epsilon$, $u_{n_j-2} < \mu' < \mu$, $b_{n_j} < \epsilon$ y $u_n < \mu + \epsilon$, para todos los valores de $n \geq n_j - N$. Esto es posible ya que M y ϵ son fijos. Por lo que usando el hecho de que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$, existe una N tal que $\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k < \epsilon/M$.
Dejemos fijo dicho valor de N. Como $u_{n_j} \to \mu$ cuando $j \to \infty$, existe J_1 tal que $\mu - \epsilon < u_{n_j} < \mu + \epsilon$ para toda $j \geq J_1$. De hecho, ya que μ es el limite superior de la sucesión original $\{u_n\}$, todos los términos de $\{u_n\}$ permanecen por debajo de $\mu + \epsilon$ a partir de un cierto momento. Esto es, existe J_2 tal que $u_{n_j-N} < \mu + \epsilon$ para toda $j \geq J_2$. También ya que
$\sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$, existe J_3 tal que $b_{n_j} < \epsilon$ para todas las $j \geq J_3$.
Sea $J = \max(J_1, J_2, J_3)$. Para un número infinito de valores de j tenemos que $u_{n_j-2} < \mu'$ fijemos ese valor de j^* que sea mayor que J. Para esta j^* la condición anterior se satisface.

Asi

$$
u_{n_{j^*}} = \sum_{k=0}^{n_{j^*}} a_k\, u_{n_{j^*}-k} + b_{n_{j^*}} < \sum_{k=0}^{N} a_k\, u_{n_{j^*}-k} + \sum_{k=N+1}^{n_{j^*}} a_k\, u_{n_{j^*}-k} + \epsilon
$$

$$< \sum_{k=0}^{N} a_k u_{n_j-k} + M \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k + \epsilon$$

$$< \sum_{k=0}^{N} a_k u_{n_j-k} + 2\epsilon < (a_0+a_1+a_2+\dots+a_N)(\mu+\epsilon) + a_m \mu' + 2\epsilon$$

$$\leq (1-a_m)(\mu + \epsilon) + a_m \mu' + 2\epsilon < \mu - (\mu - \mu')a_m + 3\epsilon = \mu - \epsilon$$

Esto contradice una desigualdad anterior, por lo que debe ser cierto que $\lim u_{n_j-m} = \mu$ cuando $j \to \infty$. Utilizando el hecho de que $a_n > 0$ es posible mostrar mediante el mismo procedimiento que $\lim u_{n_j-n} = \mu$ cuando $j \to \infty$. Ahora partiendo de que lim cuando $j \to \infty$ de $u_{n_j-m} = \mu$ y repitiendo el argumento utilizado anteriormente tenemos que $\lim u_{n_j-m-m} = \mu$ cuando $j \to \infty$. Continuando con este procedimiento obtenemos que lim cuando $j \to \infty$ de $u_{n_j-am-bn} = \mu$ para cualquier a y b enteros positivos. Por el lemma anterior sabemos que existe un entero N^* tal que lim cuando $j \to \infty$ de $u_{n_j-m} = \mu$ para $m > N^*$ (De hecho si $a_m > 0$ y $a_n > 0$ entonces $N^*=1$). En cualquier caso supongamos que N^* es el menor entero que cumple esta propiedad. Queremos mostrar que $\lim u_{n_j-d} = \mu$ cuando $j \to \infty$ para todos los enteros positivos d, lo que significa que $N^*=0$.

Si $N^* > 0$ entonces por definición de N^*, lim cuando j tiende a ∞ de $u_{n_j-N^*} \neq \mu$. Sin embargo, consideremos

$$u_{n_j-N^*} = \sum_{k=0}^{n_j-N^*} a_k u_{n_j-N^*} + b_{n_j-N^*}$$

esto puede reescribirse de la siguiente manera

$$(1-a_0)u_{n_j-N^*} = \sum_{k=0}^{n_j-N^*-1} a_{k+1} u_{n_j-N^*-(k+1)} + b_{n_j-N^*}$$

y ya que $\sum_{k=0}^{n_j-N^*-1} a_{k+1}$ tiende a $1-a_0$ cuando $j \to \infty$ y $u_{n_j-N^*-(k+1)}$ tiende a μ para toda k cuando $j \to \infty$ y b_{n_j-N} tiende a 0 cuando $j \to \infty$, tenemos que

$$\sum_{k=0}^{n_j-N^*-1} a_{k+1} u_{n_j-N^*-(k+1)} \longrightarrow \mu(1 - a_0)$$

Así $(1 - a_0)\lim_{j \to \infty} u_{n_j-N^*} = (1 - a_0)\mu$ y ya que $a_0 < 1$ tenemos que $\lim u_{n_j-N^*} = \mu$ cuando $j \to \infty$. Esta contradicción implica que $\lim_{j \to \infty} u_{n_j-d} = \mu$ para toda $d \geq 0$.

En este punto podríamos decir que el límite de la sucesión original u_n es μ. Sin embargo, esto no se sigue del hecho que lim cuando $j \to \infty$ $u_{n_j-d} = \mu$ para toda $d \geq 0$. Para ver esto consideremos el siguiente ejemplo. Sea $w_n = 1$ si $k^2-k<n\leq k^2$ para algún entero k, y $w_0 = 0$ en otro caso. La subsucesión w_{n^2} converge a 1. De hecho w_{n^2-d} converge a 1 para todo $d \geq 0$. Sin embargo w_{n^2+1} converge a 0 por lo que lim cuando $n \to \infty$ de w_n no existe. Observando este ejemplo nos daremos cuenta de que no podemos concluir que el lim cuando $n \to \infty$ de u_n existe.

Sea $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$ se sigue que

$$\sum_{k=0}^{\infty} r_k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{j-1} a_j = \sum_{j=1}^{\infty} j\, a_j$$

por lo que la hipótesis que involucra $\sum_{j=1}^{\infty} j\, a_j$ será dada en términos de r_k. El intercambio de las series esta justificado ya que todos los términos son no-negativos. Por construcción tenemos que $a_n = r_{n-1} - r_n$ para $n \geq 1$ y

como $u_n - \sum_{k=0}^{n} a_k u_{n-k} = b_n$ tenemos que:

$$u_n - a_0 u_n - \sum_{k=1}^{n} (r_{k-1} - r_k) u_{n-k} = b_n$$

y de aquí se sigue que

$$r_0 u_n + r_1 u_{n-1} + \dots + r_n u_0 = r_0 u_{n-1} + r_1 u_{n-2} + \dots + r_{n-1} u_0 + b_n$$

Hagamos $A_n = r_0 u_n + \dots + r_n u_0$ y la ecuación anterior puede reescribirse como

$$A_n = A_{n-1} + b_n \text{ donde } A_0 = r_0 u_0 = (1 - a_0) u_0 = b_0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones resultante, tenemos que $A_n = \sum_{i=0}^{n} b_i$. Para una N fija menor que n tenemos que

$$r_0 u_{n_j} + r_1 u_{n_j-1} + \dots + r_N u_{n_j-N} \leq A_{n_j} = \sum_{n=0}^{n_j} b_n$$

Dejando que $j \to \infty$ tenemos que $(r_0+r_1+\dots+r_N)\, \mu \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, por lo que $\mu \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n \,/\, \sum_{k=0}^{N} r_k$.

Así, si $\sum_{k=0}^{\infty} r_k = \infty$ entonces μ debe ser 0.

Si $\sum_{k=0}^{\infty} r_k < \infty$, entonces sea $v = \lim_{n\to\infty} u_n$. De igual manera, seleccionamos una subsucesión n_k tal que $\lim_{k\to\infty} u_{n_k} = v$ y mostramos que $\lim_{k\to\infty} u_{n_k-d} = v$ para toda $d \geq 0$.

Definimos $g(N) = \sum_{n=N+1}^{\infty} r_n$ por lo que $\lim_{N\to\infty} g(N)=0$. Ahora

$$\sum_{n=0}^{n_k} b_n \leq r_0 u_{n_k} + r_1 u_{n_k-1} + \dots + r_N u_{n_k-N} + M\, g(N)$$

donde M es el supremo de los u_n . Dejando que $k\to\infty$ tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=0}^{N} r_n v + M\, g(N)$$

ahora dejemos que $N\to\infty$ y tenemos que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} r_n v$ por lo que

$$v \geq \frac{\sum_{n=0}^{\infty} b_n}{\sum_{n=0}^{\infty} r_n}$$

combinando este resultado con el resultado anterior tenemos que $v \geq \mu$ por lo que $v = \mu$. Así :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} b_n}{\sum_{n=0}^{\infty} r_n}.$$

B I B L I O G R A F I A

Hiller Frederick S. & Lieberman Gerald J.
"Introduction to Operations Research" 1980 3a. Edicion
Holden-Day Inc.

Cristofides Nicos
"Graph Theory, an Algorithmic Approach" 1975
Academic Press

Isaacson Dean L. & Madsen Richard W.
"Markov Chains Theory and Applications" 1976
John Wiley & Sons

Fierro Leobardo
"Aplicación de Teoría de Gráficas a Cadenas Markovianas"
Tesis 1980 D.E.P.F.I. UNAM

Jie Zhang
"Cadenas de Decisión Markovianas con Costos Especiales"
Tesis 1986 D.E.P.F.I. UNAM

Hernandez Ayuso Maria del Carmen
"Análisis de Redes"
Apuntes de Clase Fac. de Ciencias UNAM

Kernighan Brian W. & Ritchie Dennis M.
"El Lenguaje de Programación C" 1985
Prentice Hall Hispanoamericana

Parsons Robert
"Statistical Analysis, a Decision-Making Approach" 1978
Harper & Row Publishers