3
2 y

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
"ACATLAN"

METODO DE LEVERRIER - FADDEEVA PARA SOLUCION ESPECTRAL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

LICENCIADO EN MATEMATICAS APLICADAS
Y COMPUTACION

P R E S E N T A :

LEON HERNANDEZ FRANCISCO

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

SANTA CRUZ ACATLAN, EDO. DE MEXICO 1989

Universidad Nacional Autónoma de México

UNAM

Biblioteca Central

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

INDICE

PAG.

INTRODUCCION

El presente trabajo de tesis, tiene por objetivo el estudio y desarrollo analítico del método de Leverrier-Faddeeva . Describir sus múltiples alcances , y contribuir con modificaciones de las que se desprende otro método para la obtención de los vectores característicos; asimismo desarrollar el algoritmo e implantar un sistema de procesamiento electrónico.

Actualmente, existen diversos métodos para el cálculo de vectores característicos, por citar algunos, están los métodos de Krylov, Samuelson, Danilevsky, aproximaciones sucesivas , entre otros[10]. De todos estos métodos , el común denominador es el gran número de operaciones que se requiren para el cálculo. Por ejemplo, el método de Krylov requiere $\frac{1}{3}(n^4+4n^3+2n^2-n-3)$ multiplicaciones y divisiones , en tanto que el método de Samuelson requiere : $n(n-1)^2 + \frac{1}{3}(n^4+4n^3+2n^2-n-3)$ multiplicaciones y divisiones . Por otra parte el método de Danilevsky disminuye sustancialmente el número de multiplicaciones y divisiones a : $(n-1)(n^2+n-1)$, empero tiene la desventaja de utilizar submatrices, cuyo número crece en función del orden (n) de la matriz que las origina, — resringiendo al método a un número finito de submatrices en una implantación con programación Fortran o bien a una complicada programación con asignación dinámica de memoria.

En cambio, el método de Leverrier-Faddeeva es una herramienta con grandes ventajas tanto para comprender el principio en que se basa , como para explicarlo y efectuar los cálculos en un número moderado de operaciones . Lo cual lo hace un método atractivo y fácil de implantar mediante algún lenguaje de programación .

Cabe también señalar que este método acepta cualquier tipo de matriz , lo que no es posible con otros métodos como Crout , Choleski , QL , QR , etc. , los cuales requieren que las matrices sean simétricas , tridiagonales , definidas positivas , respectivamente.

No se pretende poner en tela de juicio la efectividad de estos metodos; lo que se intenta en este trabajo es mostrar otro metodo tomando como punto de referencia el numero total de operaciones para calcular, por ejemplo, el polinomio caracteristico y la generalidad del metodo.

El metodo de Leverrier-Faddeeva es utilizado, basicamente, para calcular la funcion caracteristica obteniendo de manera alterna otros resultados , tales como : el determinante del sistema , la matriz adjunta , la matriz inversa (en caso de matrices no-singulares) , los cuales constituyen el alcance del metodo .

Por otro lado , el calculo de vectores caracteristicos, constituye el punto principal para la elaboracion de este trabajo, en el que me aboco extrictamente ; para -- hablar de las modificaciones del metodo de Leverrier-Faddeeva , mediante un analisis mas detallado , para calcular dichos vectores .

Del algoritmo que resulto del analisis desarrolle el correspondiente programa codificado en lenguaje Pascal . La implantacion del programa en lenguage Pascal -- resulta novedosa puesto que la mayoria de los algoritmos - para calcular valores y vectores caracteristicos - han sido implantados en lenguajes como Fortran[21] , Algol[24], Basic[25] . Ademas, contribuye con el fortalecimiento de programas existentes , para aplicaciones , en materias como metodos numericos.

En el capitulo 1 , menciono algunas definiciones , teoremas y propiedades del algebra elemental , lineal y matricial los cuales son de gran importancia para analizar y describir el metodo de Leverrier-Faddeeva , calcular el polinomio caracteristico , y perfeccionar el metodo para el calculo de los vectores caracteristicos . Al final del capitulo doy una clasificacion de algunos metodos para el calculo de dichos vectores, lo cual resulta conveniente para explicar el motivo que tiene el poder desarrollar un sistema en base a un sólo método, que cubra todas las particularidades de otros métodos.

En el capítulo II, explico más detalladamente el método de Leverrier-Faddeeva, el principio en que se basa y de las ventajas que esto reporta para el sistema que se pretende desarrollar . En cuanto al método de Newton-Raphson, lo uso como método auxiliar para calcular los valores característicos del polinomio característico. Y del correspondiente análisis , son desarrollados los repectivos algoritmos .

En el capítulo III , describo las ideas básicas que me llevan a concluir que el método, también, puede ser empleado para calcular los vectores característicos - conclución a la que también llegó Faddeeva , el cual no da una descripción muy detallada[10]-. Este capítulo resulta ser muy importante , pues considero que es la parte angular para desarrollar un sistema más sólido , que responda indistintamente a las particularidades de uno u otro problema , expresado a través de modelos matriciales de orden n .

En el capítulo IV , desarrollo , en base a los métodos planteados , el algoritmo y el programa para procesar sistemas de ecuaciones lineales , que proporcione los siguientes productos :

- Polinomio característico. $P(\lambda) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \dots + b_{n-1}\lambda + b_n$
- La matriz adjunta . $\Gamma(A)$
- El determinante del sistema . DET(A)
- La matriz inversa . A^{-1}
- La matriz unitaria ; producto de $A*A^{-1}$
- Los valores característicos . $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$
- Los vectores característicos. $V_1,V_2,\dots,V_n$

Finalmente , debido a la importancia y los resultados que se obtienen del método, se muestran algunas áreas del conocimiento (capítulo V) en donde se aplica el método, sin profundizar en el planteamiento de los ejemplos .

Se concluye con una breve discusión sobre las ventajas y desventajas del método y el logro que este representa en la solución espectral de problemas que lo requiren.

" IDEAS CLARAS ...
PARA EVOLUCIONAR "
F.L.H.

" DIVIDE Y VENCERAS"

A.a.

CAPITULO I

CONCEPTOS GENERALES

CONCEPTOS GENERALES

El objetivo de este capítulo es presentar algunos conceptos básicos del álgebra elemental , álgebra lineal y álgebra matricial , que serán utilizados en los capítulos subsecuentes .

1.1 SISTEMAS ALGEBRAICOS . [2]

Definición (Grupo).- Un grupo G es un sistema algebraico con una operación binaria , la cual cumple con :

- Asociatividad : $(xy)z = x(yz)$ para todo $x,y,z \in S$
- Existe el elemento de identidad $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ para toda $x \in S$
- Existe el elemento inverso tal que : $x^{-1}x = x \cdot x^{-1} = 1$.

Definición (Campo).- Un campo es un sistema F de elementos , cerrados bajo dos únicas operaciones binarias , definidas por la suma y producto , tal que :

i) bajo la suma , F es un grupo conmutativo cuyo elemento de identidad es el 0 ;

ii) bajo la multiplicación , los elementos diferentes de cero forman un grupo conmutativo.

iii) para ambas operaciones , las leyes de distributividad contienen :

$$a(b+c) = ab + ac$$

Definicion (Anillo) .- Es un sistema algebraico $A = \langle S , + , \bullet \rangle$ con dos operaciones (+ y •) si :

i) Es un grupo abeliano bajo la + ;

ii) Es un monoide abeliano bajo • , tal que se verifican las siguientes propiedades :

a.- CERRADURA	$(a + b) \in S$; $(a \bullet b) \in S$.
b.- ASOCIATIVA	$(a + b) + c = a + (b + c)$;
	$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$
c.- EXISTENCIA DEL ELEMENTO IDENTIDAD	$a + 0 = 0 + a = a$; $a \bullet 1 = 1 \bullet a = a$
d.- EXISTENCIA DEL ELEMENTO INVERSO	$a + (-a) = (-a) + a = 0$; $a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = 1$
e.- CONMUTATIVIDAD	$a + b = b + a$, $a \bullet b = b \bullet a$

iii) Y satisface la ley de :

- DISTRIBUTIVIDAD	$a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$

I.2 ESPACIOS VECTORIALES. [11]

Definicion (Vector) .- Un vector es un segmento rectilineo orientado y caracterizado por el modulo , direccion , sentido y punto de aplicacion .

El modulo corresponde a la longitud del segmento, y la direccion es la recta a la que pertenece. El sentido, queda determinado en funcion del punto de inicio y el punto final . Por ultimo, el punto de aplicacion es el punto de origen.

Definicion (Espacio Vectorial). Un espacio vectorial lineal U de dimension M , definido sobre un campo F, es una coleccion de elementos llamados vectores , tal que dos vectores X y $Y \in U$ determinan un vector $X + Y$ como suma , y que cualquier vector $X \in U$ y cualquier escalar $c \in F$ determinan un producto escalar $c * X \in U$, y cumple con las propiedades de campo .

SUBESPACIOS.- Un subconjunto W del espacio vectorial V con operaciones de suma y producto por un escalar forma un subespacio vectorial si :

a).- Y_1 y Y_2 pertenecen a W , entonces , la suma tambien pertenece a W .

b).- Para toda Y que pertenece a W y c pertenesca a F , entonces , $c*Y$ pertenece a W .

Es decir , cumple con la propiedad de la cerradura bajo las operaciones de suma y producto escalar .

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA DE VECTORES.

Definicion (Combinacion lineal).- Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ pertenecen a W y son n-vectores , entonces , el vector : $c_1*X_1+c_2*X_2+ \ldots +c_n*X_n$ se le llama combinacion lineal de los vectores $X_1, X_2, \ldots, X_n$ con los coeficientes o escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n \in F$.

Si al menos uno de los escalares c_i , es distinto de cero , tal combinacion se dice que no es trivial , y que la totalidad de estas combinaciones genera el propio subespacio de W .

Definicion (Independencia lineal).- Un conjunto de vectores X_i es linealmente independiente (sobre F) si y solo si : $c_i*X_i=0$, entonces ,

$c_i = 0$ para toda i .

En caso contrario se dice que son linealmente dependientes .

Definicion (Bases).- Un conjunto $B=\langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle$ de vectores de un conjunto C , se dice que es una base del conjunto C , si B es linealmente independiente y si cualquier vector C puede expresarse como combinacion lineal de los vectores B .

De lo anterior se considera que la dimension de un espacio vectorial U es el numero de vectores linealmente independientes siendo N la dimension del EV .

a).- N vectores x_i , linealmente independientes constituyen una base en U^N .

b).- Si U^K es un subespacio de U^N , entonces :

la $\dim U^K \leq \dim U^N$ y

si $\dim U^K = \dim U^N$ entonces $K = N$

Definicion (Producto interno).- Sean $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_N \rangle$ y

$Y = \langle y_1, y_2, \dots, y_N \rangle$ vectores, entonces

se define el producto interno de dos vectores X y Y, que pertenecen a U, como :

$$X \cdot Y = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_N \cdot y_N$$

Definicion (Espacio euclideano) .- un espacio vectorial euclideano (EU) se define como un espacio vectorial , en donde está definido el producto interno y cumple con :

$$1.- \quad X + Y = \langle x_1 + y_1 , x_2 + y_2 , \dots , x_N + y_N \rangle$$

$$2.- \quad X \cdot Y = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_N \cdot y_N$$

respectivamente.

1.3 MATRICES Y DETERMINATES.

Se llama matriz renglon al vector dispuesto horizontalmente :

$$A_i = [a_{11} , a_{12} , \dots , a_{1N}] \cdot$$

Y la matriz columna es el vector ordenado verticalmente :

$$\begin{bmatrix} a_{1J} \\ a_{2J} \\ \dots \\ a_{NJ} \end{bmatrix}$$

Definición (Matriz).- Una matriz se define como un arreglo de vectores, de m-vectores renglón y n-vectores columna :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

De aquí en adelante , toda matriz será denotada por una letra mayúscula : A , y los elementos que contenga , serán referenciados por una letra minúscula subindizada a_{ij} para indicar en qué renglón y columna se encuentra tal elemento .

NOMENCLATURA DE MATRICES[2]

- Matrices cuadradas .- Una matriz cuadrada es aquella que posee n-vectores renglón y n-vectores columna , y los elementos a_{ij} con $i = j$ forman una diagonal principal. Sólo estas matrices tienen asociado un escalar llamado determinante , y se denomina matriz no singular cuando el determinante asociado a ella es distinto de cero.

- Matriz triangular superior . Es una matriz cuadrada , la cual se caracteriza por que sus elementos a_{ij} son iguales a cero cuando $i>j$, y cuando $i\leq j$ dichos elementos son distintos de cero.

- Matriz triangular inferior .- Es una matriz cuadrada , la cual se caracteriza por que sus elementos a_{ij} son cero cuando $i<j$, y cuando $i\geq j$ dichos elementos son distintos de cero.

- Matriz triangular diagonal .- Es una matriz cuadrada cuyos únicos elementos distintos de cero , se localizan en la diagonal principal . Es decir , si i = j , entonces a_{ij} es distinto de cero .

- Matriz triangular escalar .- Es una matriz diagonal especial , si todos los elementos de la diagonal principal son iguales .

- Matriz simétrica .- Una matriz es simétrica si los elementos simétricamente colocados respecto a la diagonal principal son iguales. Es decir, $a_{ij}=a_{ji}$ para toda i,j .

- Matriz antisimétrica.- Una matriz cuadrada es antisimétrica si para todo i,j se tiene que $a_{ij}= -a_{ji}$ y todos los elementos de la diagonal principal son iguales a cero.

- Matriz nula .- Es una matriz cuyos elementos son iguales a cero , y se denota por **O** . Dicha matriz puede ser rectangular o cuadrada y representa al elemento identidad en la suma de matrices.

- Submatriz .- Una submatriz esta formada por n - k renglones y m - p columnas . Es decir , sólo se toman algunos renglones y columnas .

- Rango de matrices . El rango r de una matriz de orden (n,m) esta determinado por el orden de la mayor submatriz no singular que se pueda obtener de la matriz **A** .

El rango indica el número de vectores renglones y/o columnas linealmente independientes.

Si una matriz cuadrada **A** de orden (n) , y el rango coincide con el orden entonces , los vectores que la forman son linealmente independientes . Pero si el rango es menor que el orden , entonces , esto indica que existe dependencia lineal entre los vectores que la forman .

PROPIEDADES ELEMENTALES DE LAS MATRICES.

A).- Propiedades de la suma de matrices y producto por un escalar.

Sean A y B matrices de orden (n) , definidas sobre en un campo F , que cumplen con las siguientes propiedades :

1.-CERRADURA : SI A y B son matrices , entonces , $A+B \in F$.

2.-ASOCIATIVIDAD: $(A+B)+C = A+(B+C)$

3.-CONMUTATIVIDAD: $A+B = B+A$

4.-ELEMENTO IDENTIDAD: $A+O = O+A = A$

5.-LA CERRADURA : Si $c \in F$ y A es una matriz , entonces :
$c \cdot A \in F$.

6.-ASOCIATIVIDAD DE ESCALARES : $c \cdot (b \cdot A) = (c \cdot b) \cdot A$

7.-DISTRIBUTIVIDAD DEL PRODUCTO POR UN ESCALAR SOBRE LA SUMA DE MATRICES :
$c \cdot (A+B) = c \cdot A + c \cdot B$

8.-DISTRIBUTIVIDAD RESPECTO AL PRODUCTO DE ESCALARES :
$(c+b) \cdot A = c \cdot A + b \cdot A$

9.-ELEMENTO IDENTIDAD DEL PRODUCTO : sea I una matriz de identidad definida sobre un campo F , entonces $I \cdot A = A$.

B).- Propiedades del producto de matrices.

1.- En general no es conmutativo $A \cdot B$ es diferente de $B \cdot A$.

2.- Es asociativo $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

3.- Es distributivo $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$.

4.- Existe el elemento neutro:

- la matriz de identidad I de orden (n,n).

  si A es una matriz de orden (n,n) , se cumple que $A \cdot I = I \cdot A = A$.

  si A es una matriz de orden (m,n) , se cumple que $A \cdot I = A$, pero $I \cdot A$ no esta definido .

C.- Propiedades de la transposición de matrices:

1.- $(A^T)^T = A$

2.- $(c \cdot A)^T = c \cdot A^T$

3.- $(A+B)^T = A^T + B^T$

4.- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

D.- POTENCIA DE UNA MATRIZ.- La potencia de una matriz es el resultado de multiplicar una matriz por si misma n-veces: $A^n = A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$

Respecto a las potencias naturales de una matriz debe tenerse en cuenta los siguientes puntos : i) $A^0 = I$; ii) una matriz periódica de período n cumple que : $A^n = A$.

E.- Si A y B son dos matrices cuadradas no singulares de orden (n) , tal que el producto $A \cdot B = B \cdot A = I$, se dice que B es la inversa A y se escribe A^{-1} .

Propiedades de la matriz inversa.

1.- A^{-1} es única.

2.- $(A^{-1})^{-1} = A$

3.- Sea B matriz no singular : $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

4.- Sea $c \in F$ y c es diferente de cero : $(c \cdot A)^{-1} = \frac{1}{c} \cdot A^{-1}$

5.- Sea A matriz no singular : $A \cdot A^{-1} = A^{-1} A = I$

F.- Porpiedades de equivalencia para inversión de matrices.

1.- Transformaciones por operaciones elementales[9] :

2.- Cálculo de la adjunta.

Para el pirmer caso , tales operaciones elementales pueden efectuarse tanto en vectores renglón como en vectores columna . Para ello se distinguen 3 tipos de operaciones :

a.- Intercambio de renglones .

b.- Producto de un escalar α , diferente de cero , por un renglón i .

c.- Suma de renglones .

1.3.1 TEOREMA.- Si una secuencia de operaciones elmentales, en los renglones, transforman a A en I , la misma secuencia transforma a I en A^{-1} .

1.3.2 TEOREMA.- Si una secuencia finita de operaciones elementales , en los renglones , transforma a A en I , y construimos la supermatriz $\langle A , I \rangle$, la misma secuencia transforma a dicha matriz en $\langle I , A^{-1} \rangle$.

De acuerdo a estos teoremas, se tiene que mediante operaciones elementales se puede calcular A^{-1} , siempre y cuando el rango de A sea igual al orden de la misma matriz, indicando asi que es una matriz no singular , con n-vectores linealmente independientes.

Definición (Determinante).- El determinante es una función cuyo dominio es el conjunto de las matrices cuadradas y su imagen esta en los reales y se define como :

$$DET(A) = a_{11}*c_{1J} + a_{12}*c_{12} + \ldots + a_{1N}*c_{1N}$$

$$= \Sigma sig\ \sigma \prod_{i=1}^{n} a_{iJ}^{(i)}$$

Donde el cofactor de a_{iJ} es $-1^{(i+J)} M_{iJ}$, denotado como c_{iJ} y ;

M_{iJ} es el determinate de la matriz que queda de eliminar el renglón y columna donde se encuentra el elemento a_{iJ} .

ADJUNTA E INVERSA DE UNA MATRIZ.[12]

Definición (Matriz adjunta).- Sea A una matriz de orden (n) , a_{ij} elemento de A definidos en un campo F . Sea c_{ij} el cofactor del elemento a_{ij} y C la matriz de cofactores de A , y sea C^T la matriz transpuesta de C , la cual recibirá el nombre ADJUNTA DE A denotada por $\Gamma\langle A\rangle$.

1.3.4 TEOREMA.- Si el $DET\langle A\rangle \cdot I=\Gamma\langle A\rangle \cdot A$ y

si el $DET\langle A\rangle$ es diferente de cero , entonces :

$$A^{-1} = \frac{1}{DET\langle A\rangle}\cdot\Gamma\langle A\rangle \quad .$$

De aquí que el producto $A\cdot\Gamma\langle A\rangle$ es una matriz diagonal con los elementos diagonales iguales al determinante de A .

En otras palabras se debe verificar que : $A\cdot\Gamma\langle A\rangle = DET\langle A\rangle\cdot I$. Donde el elemento del k-ésimo renglón y j-ésima columna del producto :

$$D=A\cdot C^T \text{ o bien}$$

$$d_{ij}=\sum_{i=1}^{n} a_{ki}\cdot c^{T}_{ij} =\sum_{i=1}^{n} a_{ki}\cdot c^{T}_{ji}$$

es igual a cero si k es diferente de j , e igual al $DET\langle A\rangle$ si k=j . En forma semejante , el elemento en el j-ésimo renglón y k-ésima columna del producto :

$$D=C^T\cdot A \text{ o bien}$$

$$d_{ij}=\sum_{i=1}^{n} c^{T}_{ji}\cdot a_{ij} =\sum_{i=1}^{n} c^{T}_{ij}\cdot a_{ik}$$

el cual es , también , igual a cero cuando j es diferente de k e igual al $DET\langle A\rangle$ si j es igual a k .

De esta forma se concluye que si el $DET\langle A\rangle$ es diferente de cero , entonces:

$$A^{-1} = \frac{1}{DET\langle A\rangle}\cdot\Gamma\langle A\rangle \quad .$$

TRAZA DE MATRICES .[1]

Definición (Traza).- La suma de las raíces de $P(\lambda)$ se llama TRAZA DE A y se designa como : $TR(A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$

Definición .- el producto de las raíces del polinomio característico de A es igual al determinante de A : $\lambda_1 * \lambda_2 * \ldots * \lambda_N = DET(A)$

La traza de A es , también , igual a la suma de los elementos diagonales de A :

$$TR(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$

PROPIEDADES DE LA TRAZA DE A .

1.- $TR(A+B)=TR(A)+TR(B)$
2.- $TR(c*A) = c*TR(A)$
3.- $TR(A*B) = TR(B*A)$
4.- $TR(A^T) = TR(A)$

I.4 PROPIEDADES ESPECTRALES DE MATRICES[2]

Las propiedades espectrales de matrices de orden (n), se distinguen tres fundamentalmente : polinomio , valores y vectores característicos los cuales son descritos a — continuación y se constituyen como un elemento importante en este trabajo de tesis.

I.4.1 TEOREMA .- El escalar λ es un valor característico de la matriz A si y sólo si : $(A - \lambda I)$ es una matriz singular , es decir : si $DET(A-\lambda I)=0$.

El determinante , no es más que un polinomio de grado n en λ , llamado POLINOMIO CARACTERISTICO DE A , cuyas raíces proporcionan los parámetros λ buscados . La sustitución de los valores característicos (raíces) en el sistema : $(A-\lambda I)X=0$, permite calcular los vectores característicos.

Definición (vector característico).- Es un vector diferente de cero, tal que, al aplicarle la transformación : $T: U \longrightarrow U$ es igual a λX , donde λ es un escalar llamado valor característico de la transformación T , tal que : $XT = \lambda X$, para para algún vector X diferente de cero . Un vector o valor característico de una matriz cuadrada A es correspondiente a un vector (del conjunto de vectores) :

$$X=(x_1,x_2,\ldots,x_n) \text{ tal que } A\cdot X = \lambda\cdot X \quad .$$

Y al conjunto de todos los valores característicos de T es llamado ESPECTRO.

Un valor característico , recibe el apelativo de degenerado si corresponde a una raíz múltiple del polinomio característico . A la multiplicidad de esta raíz se le designa como orden de degeneración del valor característico correspondiente .

Una matriz cuyo espectro no sea degenerado se llama estructura simple . De acuerdo a lo anterior , las características de una matriz , esta puede clasificarse en :

1) Definidas positivas, siempre y cuando la parte real de la raíz sea mayor a cero.

2) Definidas no negativas, cuando la parte real de la raíz sea mayor o igual a cero.

3) Definidas negativas y no positivas , es decir, tengan propiedades opuestas a las

anteriores.

4) No definidas , si no clasifican en los apartados anteriores .

Si se estudia , para el conjunto de valores caracteristicos : $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ de una matriz A de orden n , la resolucion de los sistemas homogeneos : $\langle A-\lambda_i I\rangle X_i=0$ que proporcionan los vectores propios , pueden distinguirse los siguientes casos :

a).- El valor caracteristico no es degenerado . Es decir , la determinacion de los elementos X exige la busqueda de n-incognitas ; ya que A es de orden n y el $DET\langle A-\lambda I\rangle=0$ y la condicion para determinar X_i en funcion de un parametro es : $RAN\langle A-\lambda I\rangle=n-1$.

En caso de que no se cumpla esta condicion , el vector X no podra determinarse debidamente.

b).- El valor caracteristico degenerado de orden $m \leq n$. Ya que debe encontrarse m-vectores linealmente independientes como minimo para completar la base caracteristica , seran necesarios m-parametros , es decir :

$$RAN\langle A-\lambda I\rangle=n-m$$

En caso contrario no podra ser completada la base caracteristica.

c).- Los valores caracteristicos de una matriz simetrica son todos numeros reales.

d).- Los valores caracteristicos de matrices unitarias son todos iguales a |1| .

e).- Si A es una matriz antisimetrica, entonces, todos los valores caracteristicos son imaginarios puros.

f).- Sea A una matriz de orden n , α un escalar, y $\langle A-\lambda I\rangle X=0$. Los valores carateristicos de la matriz αA son $\alpha\lambda$ y los vectores permanecen invariantes, en decir : $\alpha\langle AX\rangle=\langle\alpha A\rangle X=\alpha\langle\lambda X\rangle=\langle\alpha\lambda\rangle X$

g).- Del punto anterior se desprende la idea de que los vectores característicos quedan indefinidos en un factor escalar multiplicativo. Sea α un escalar diferente de cero, del inciso f se tiene :

$$\alpha(AX) = (\alpha\lambda)X$$

o bien ,

$$\alpha(AX) = \lambda(\alpha X)$$

La indeterminación del factor α puede omitirse si se normalizan siempre los vectores característicos.

h).- Sea A una matriz de orden y λ_i su espectro. Supóngase que A sea de estructura simple y el conjunto de dichos vectores característicos es linealmente independiente , entonces , dicho conjunto de vectores recibe el nombre de BASE CARACTERISTICA.

i).- Los vectores característicos asociados a los valores característicos degenerados , generan un subespacio vectorial de dimensión igual al orden de degeneración, por consecuencia existirá una infinita agrupación de conjuntos de vectores característicos asociados . Véase el inciso a .

j).- En caso de ser posible de encontrar la base característica, las ecuaciones $(A-\lambda_i I)X_i$ son equivalentes a la ecuación matricial en forma compacta $AX=X\Delta$, donde : $X=(x_1, \ldots, x_n)$ es la matriz base característica y $\Delta=\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la matriz diagonal con los valores característicos sobre la diagonal principal. Y como las x_i son linealmente independientes, la matriz X es no-singular, y en consecuencia : $X^{-1}AX=\Delta$.

En este caso se dice que la matriz A es diagonalizable. Y podrá decirse que A es equivalente a una matriz diagonal, en relación a su base característica.

k).- Del inciso anterior se obtiene una propiedad muy importante sobre las matrices diagonizables, pues, permite el cálculo de potencias de matrices, esto es :

si

$$AX = X\Delta$$

se tiene que

$$A = X\Delta X^{-1}$$

y puesto que

$$A^{p}X = X\Delta^{p}$$

resulta que :

$$A^{p} = X\Delta^{p}X^{-1}$$

donde la matriz diagonal Δ contiene los valores característicos λ_i elevados a la potencia p .

Las propiedades de los valores característicos descritas hasta aquí, constituyen un elemento importante, pues, de éstas puede hacerse una interpretación más clara de los resultados obtenidos mediante la implantación del sistema de procesamiento electrónico. Por ejemplo, el factor escalar es tomado en cuenta en el problema de procesos estocásticos al efectuar la normalización sobre los elementos del correspondiente vector característico , de tal forma que la suma de sus elementos sea igual a 1; en otros problemas el cálculo de la base característica estará correctamente determinada si se cumple con el inciso a, o en su defecto los resultados quedarán justificados según los incisos h, i.

Por otra parte, aunque existen otros métodos para calcular las potencias de matrices, el método resulta adecuado para calcular los elementos que intervienen en la propiedad del inciso k (implantación que no contempla el sistema de procesamiento electrónico).

Por último, el tener en cuenta el tipo de valores característicos (reales o imaginarios puros) puede facilitar su iterpretación en problemas ecológicos.

Teoricamente , los valores característicos de A se pueden obtener encontrando las n-raíces del polinomio característico y posteriormente , resolviendo el sistema lineal asociado : $(A-\lambda_i I)X=\theta$, se determinan los vectores característicos correspondientes .

En cuanto al cálculo del polinomio característico , este se obtiene mediante la aplicación del teorema de Cayley-Hamilton , el cual resulta muy importante para la descripción del método de Leverrier-Faddeeva. Ademas, de la validez general del teorema depende la validez general del método de Leverrier-Faddeeva .

1.5.2 TEOREMA DE CAYLEY-HAMILTON .

La idea de MATRIZ nació hacia la mitad del siglo XIX . En 1850 , Sylvester (matemático inglés) había denominado MATRICES a las tablas de constantes o funciones, mas tarde en 1853 William Rowan H. en un artículo "linear and vector functions" dio diversas propiedades de las formas lineales y utilizó el concepto de matriz . En 1858 , Arthur Cayley dio en un artículo "Memorie on the Theory of Matrix " las bases modernas del cálculo matricial , y enunciando así un teorema que lleva su nombre :

Teorema de Cayley-Hamilton .-

Toda matriz cuadrada es una raíz de su propia ecuación característica.

Sea A una matriz de orden (n) , y

$$F(\lambda)= DET(A-\lambda I)= \lambda^N + c_{N-1}\lambda^{N-1} + c_{N-2}\lambda^{N-2} +\ldots+ c_1\lambda + c_0$$

con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots ,\lambda_N$ raíces de la función $F(\lambda)$, al sustituir λ por A se tiene:

$$F(A)=A^N + c_{N-1}A^{N-1} + c_{N-2}A^{N-2} +\ldots+ c_1A + c_0 I = \theta$$

DEMOSTRACION

Aplicando el teorema I.3.4 , se tiene :

$$DET(A)\cdot I = A\cdot\Gamma(A)$$

aplicando esta formula y reemplazando A por $(A-\lambda I)$ (matriz caracteristica) se tiene : $DET(A-\lambda I)\cdot I = (A-\lambda I)\cdot\Gamma(A-\lambda I)$.

Y la funcion del polinomio caracteristico se convierte en

$$(A-\lambda I)\cdot\Gamma(A-\lambda I) = F(\lambda)\cdot I$$

donde las entradas de la matriz $(A-\lambda I)$ son polinomios lineales en λ , cuyo grado es cuando mas n-1 . Cada elemento en la adjunta de $(A-\lambda I)$ es un cofactor tal que esta adjunta puede escribirse como una suma de n-matrices . Cada termino involucra una potencia de λ .

Es decir , la adjunta de $(A-\lambda I)$ puede escribirse como :

$$\Gamma(A-\lambda I) = \sum_{k=0}^{n-1}\lambda^{k} B_{k}$$

donde cada coeficiente B_k es una matriz de orden n , con elementos escalares .

Aplicando esto a la ecuacion , se tiene :

$$(A-\lambda I)\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^{k} B_{k} = F(\lambda)\, I$$

que se puede poner en la forma :

$$(A-\lambda I)\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^{k} B_{k} = \sum_{k=0}^{n} c_{k}\lambda^{k} I$$

desarrollando :

$$A\lambda^{0}B_{0} + A\lambda B_{1} + A\lambda^{2}B_{2} + \dots + A\lambda^{N-1}B_{N-1} - \lambda B_{0} - \lambda^{2}B_{1} - \lambda^{3}B_{2} - \dots - \lambda^{N}B_{N-1} =$$

$$C\lambda^{0}I + C_{1}\lambda I + C_{2}\lambda^{2}I + \dots + C_{N-1}\lambda^{N-1}I + \lambda^{N}I$$

agrupando por sumas :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^{k} A B_{k} - \sum_{k=0}^{n-1}\lambda^{k+1} B_{k} = \lambda^{N} I + \sum_{k=0}^{n-1} c_{k}\lambda^{k} I$$

separando términos con λ^n y λ^0 :

$$-\lambda^n B_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1}\lambda^k (A B_k - B_{k-1}) + A B_0 = \lambda^n I + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \lambda^k I + c_0 I$$

después , igualando los términos de igual potencia en λ :

$-\lambda^n B_{n-1} = \lambda^n I$, $\lambda(A B_1 - B_0) = c_1 \lambda I$,

$\lambda^2 (A B_2 - B_1) = c_2 \lambda^2 I$, ..., $\lambda^{n-1}(A B_{n-1} - B_{n-2}) = c_{n-1}\lambda^{n-1} I$,

$A B_0 = c_0 I$

sustituyendo en cada λ por la matriz A , se obtiene :

$-A^n B_{n-1} = A^n I$,

$A(A B_1 - B_0) = c_1 A I$,

$A^2 (A B_2 - B_1) = c_2 A^2 I$, ...,

$A^{n-1}(A B_{n-1} - B_{n-2}) = c_{n-1} A^{n-1} I$,

$A B_0 = c_0 I$

simplificando :

$-A^n B_{n-1} = A^n$,

$A^2 B_1 - A B_0 = c_1 A$,

$A^3 B_2 - A^2 B_1 = c_2 A^2$, ...,

$A^n B_{n-1} - A^{n-1} B_{n-2} = c_{n-1} A^{n-1}$,

$A B_0 = c_0 I$

sumando los resultados :

$$-A^n B_{n-1} + \sum_{k=2}^{n} A^k B_{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} A^k B_{k-1} + A B_0 = \sum_{k=1}^{n-1} c_k A^k + A^n + c_0 I$$

completando términos :

$$-A^n B_{n-1} + A^n B_{n-1} + \sum_{k=2}^{n-1} A^k B_{k-1} - A B_0 - \sum_{k=2}^{n-1} A^k B_{k-1} - A B_0 = \sum_{k=1}^{n-1} c_k A^k + A^n + c_0 I$$

simplificando términos : $\quad 0 = A^n + \sum_{k=1}^{n-1} c_k A^k + c_0 I$

LO CUAL DEMUESTRA EL TEOREMA .

1.6. BREVE DISCUCION DE METODOS PARA LA SOLUCION DEL PROBLEMA ESPECTRAL.

Algunos métodos enfocados a la solución de problemas de valores y vectores característicos, atienden ciertas particularidades, p.e., en problemas discretos de equilibrio dinámico, los cuales son expresados mediante modelos matriciales de tipo simétrico.

Algunos métodos más comunes, son :

- Método cíclico de Jacobi;
- Método de aproxonaciones sucesivas;
- Método de Krylov;
- Método de Danilevsky;
- Método de Rustishauser;
- Método de Hausholder y algoritmo QL ;
- Método de Samuelson;

Sin embargo, existen otros problemas planteados a través de modelos matriciales que no clasifican dentro de matrices simétricas y que requieren algoritmos especiales o bien transformación a matriz simétrica. Lo que implica una labor que puede ser complicada y extensa si se realiza manualmente o requiere de un gran esfuerzo de programación.

Atendiendo a la naturaleza de los métodos, estos pueden clasificarse dentro de dos categorías :

- Métodos Directos ;
- Métodos iterativos;

Los métodos directos se distinguen por resolverse en un número fijo de pasos, sujetos solamente a errores de redondeo. En tanto los métodos iterativos, son aquellos que se aproximan a la solución, en base a una serie de repeticiones, de la misma regla analítica, sobre los resultados de una repetición anterior [4].

En la categoría de métodos directos , se encuentran :

- Método de Krylov;
- Método de Danilevsky;
- Método de Samuelson.

En la categoría de métodos iterativos :

- Método cíclico de Jacobi;
- Método de aproximaciones sucesivas ;
- Método de Rustishauser;
- Método de Hausholder y algoritmo QL .

Es importante hacer esta distinción , pues de ello depende minimizar el efecto de error de redondeo y el número total de operaciones en los cálculos efectuados . Por otra parte, el número de operaciones se ve incrementado al tener conexión directa con el método de Gauss-Jordan para inversión de matrices , el cual es utilizado en algunos casos para calcular el polinomio característico o bien para calcular el vector característico asociado al menor valor característco[17] (método de Jacobi y aproximaciones sucesivas, respectivamente).

En base a estas consideraciones , creo conveniente proponer un método que elimine todos estos inconvenientes y que además tenga un alto grado de eficiencia para no perder la posibilidad de sistematización . Por esto mismo propongo el método de Leverrier-Faddeeva, para resolver el problema de valores y vectores característicos en función del polinomio característico, que también proporciona de manera alterna otros resultados muy interesantes como : el determinante de la matriz , la matriz adjunta y/o inversa .

CAPITULO II

DESCRIPCION ANALITICA DEL METODO DE LEVERRIER-FADDEEVA

"LA DIVERSIDAD DE IDEAS ...
ENRIQUECE EL CONOCIMIENTO"
F.L.H

"NADA ES ABSOLUTO , TODO ES RELATIVO".
ALBERT EINSTEIN.

"TODO APRENDIZAJE ES
CONOCIMIENTO , Y POR ENDE , ES BUENO".
D.A.R.Y.L.

DESCRIPCION ANALITICA DEL METODO DE LEVERRIER-FADDEEVA

Calcular los valores y vectores característicos resulta , con frecuencia , una labor rutinaria considerable. Tan solo el calcular el determinante y obtener la ecuación característica pueda ser un problema complicado , según el número de variables que intervengan .

De acuerdo a estas apreciaciones , es conveniente proporcionar métodos adecuados para no perder la posibilidad de sistematización , comprensión y objetividad . Es por ello que, en este capítulo describo y analizo el principio en que se basa el método de LEVERRIER-FADDEEVA , desarrollado por el astrónomo fancés Urbano Juan José Le Verrier (1811-1877) en 1841[10].

II.1 METODO DE LEVERRIER-FADDEEVA.[10]

Dicho método , aunque requiere de gran cantidad de operaciones , es completamente general a particularidades de una u otra matriz y sirve especialmente para el cálculo del polinomio característico .

II.1.1 PLANTEAMIENTO DEL METODO DE LE VERRIER.

Sea : $P(\lambda) = -1^{N}\,[\lambda^{N} - b_1\lambda^{N-1} - b_2\lambda^{N-2} - \dots - b_N]$

el polinomio característico de la matriz A de orden (n) y $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ las raíces entre las cuales puede haber raíces iguales .

Por otra parte, la aplicación de la fórmula de Newton :

$$K b_K = S_K - b_1 S_{K-1} - b_2 S_{K-2} - \dots - b_{K-1} S_1$$

pueden ser caculados los coeficientes b_I . Y para cacular tales coeficientes se utiliza la relación : $b_1 = S_1$

$$b_2 = \frac{S_2 - S_1 b_1}{2} \quad , \quad b_3 = \frac{S_3 - S_2 b_1 - S_1 b_2}{3} , \dots ,$$

$$b_K = \frac{S_K - S_{K-1} b_1 - \dots - S_1 b_{K-1}}{K}$$

Tambien se tiene que el termino independiente b_N corresponde con el k-esimo termino de la formula de Newton . Mas aun , el termino independiente del polinomio es igual al determinate del sistema , y a su vez el determinante se calcula como :

$$b_N = -1^N(\lambda_1 * \lambda_2 * \ldots * \lambda_N)$$

es decir , el producto de las raices del polinomio caracteristico de A es igual al determinante de A .

Teniendo en cuenta esto , el concepto de TRAZA de una matriz, sera de gran utilidad debido a que la suma de las raices de $P(\lambda)$ es igual a la suma de los elementos de la diagonal principal de la matriz .

En otras palabras , se tiene que si el coeficiente del termino λ^{N-1} viene dado por :

$$TR(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

esto suguiere que :

$$TR(A^K) = \sum_{k=1}^{n} \lambda^K = S_K$$

es decir , la suma de valores caracteristicos elevados a la K potencia es igual a la traza de A elevada a la K potencia .

Por ejemplo :

Sea A una matriz de orden (2) , cuyos elementos son :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

su correspondiente polinomio caracteristico se calculara como :

$$P(\lambda) = -1^2(\lambda^2 - b_1\lambda - b_2)$$

asi :

$$b_1 = S_1 \ ,$$

$$b_2 = \frac{S_2 - S_1 b_1}{2}$$

Lo que se pretende , es encontrar los coeficientes b_n en función de los valores característicos λ , que también se desconocen . Es por ello que se propone calcular la TRAZA de cada potencia de A .

$$S_1 = TR(A) = \sum_{i=1}^{2} a_{ii} = 3+3=6$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{bmatrix}$$

$$S_2 = TR(A^2) = 13+13=26$$

sustituyendo las trazas :

$$b_1 = 6$$
$$b_2 = \frac{26-6(6)}{2} = -5$$

y sustituyendo en la función del polinomio característico:

$$P(\lambda) = 1(\lambda^2 - 6\lambda + 5) = \lambda^2 - 6\lambda + 5$$

resolviendo , para encontrar las raíces del polinomio característico :

$$\lambda_1 = 5 \quad , \quad \lambda_2 = 1$$

aplicando la ecuación : $\sum_{k=1}^{n} \lambda^k = S_k$

se tiene : $S_1 = 5+1=6$

$S_2 = 5^2+1^2=26$

lo cual muestra que $S_k = TR(A^k)$

En resumen , el cómputo se concreta a cálculos sucesivos de las potencias de A , y después se calculan sus trazas para aplicarlas en el sistema recurrente , propuesto por NEWTON , y obtener el correspondiente polinomio característico .

Calcular las n potencias de A , para obtener sus trazas , requiere un gran número de operaciones y esto hace al método de Leverrier más laborioso que otros métodos . El número de multiplicaciones necesarias para completar el cálculo es igual a :

$$\frac{(n-1)(2n^3-2n^2+n+2)}{2}$$

Sin embargo , la generalidad del método es la ventaja más fuerte ante otros.

Esta misma apreciación , probablemente fué considerada por D. K. Faddeeva (matemático contemporáneo) para proponer modificacinnes al método de Leverrier , el cual resume y simplifica el cálculo de los coeficientes del polinomio característico , y aún más , permite calcular la matriz inversa y los vectores característicos de la matriz .

II.1.2 MODIFICACIONES PROPUESTAS POR D. K. FADDEEVA.

La maestra Faddeeva, propone que, en lugar de calcular la secuencia de potencias de A, se cálcule la secuencia $A_1, A_2, \ldots, A_N$, construida de la siguiente forma :

$$A_1 = A \quad , \quad q_1 = TR(A_1) \quad ; \quad B_1 = A - q_1 I \quad ,$$

$$A_2 = AB_1 \quad , \quad q_2 = \frac{TR(A_2)}{2} \quad , \quad B_2 = A_2 - q_N I \quad ,$$

$$\ldots$$

$$A_N = AB_{N-1} \quad , \quad q_N = \frac{TR(A_N)}{N} \quad , \quad B_N = A_N - q_N I$$

Tal secuencia de fórmulas recurrentes son el resultado de :

$$b_1 = q_1 = TR(A_1)/1$$

$$b_2 = q_2 = TR(A_2)/2$$

$$\ldots$$

$$b_N = q_N = TR(A_N)/N$$

La siguiente demostración da una idea de la relación que guardan dichas fórmulas:

Sea $b_1 = S_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = TR(A)$;

$S_N = TR(A^N)$;

$A_1 = A$; $q_1 = TR(A_1)$; $B_1 = A_1 - q_1 I$;

se pretende demostrar que $b_N = q_N = \frac{1}{n} TR(A_N)$

es decir : $\frac{1}{n}(S_N - S_{N-1}b_1 - S_{N-2}b_2 - \ldots - S_1 b_{N-1}) = \frac{1}{n} TR(A_N)$ (1)

utilizando las relaciones :

$S_N = TR(A^N) =$, $S_{N-1} = TR(A^{N-1})$, ... , $S_1 = TR(A)$

sustituyendo esto en la fórmula (1) :

$$\frac{1}{n}(TR(A^N) - TR(A^{N-1})b_1 - TR(A^{N-2})b_2 - \ldots - TR(A)b_{N-1}) = \frac{1}{n} TR(A_N)$$

ahora , desarrollando para el segundo miembro de la ecuación :

primero:

$A_1 = A$; $q_1 = TR(A)$; $B_1 = A_1 - q_1 I$;

$A_2 = AB_1$

$$q_2 = \frac{1}{2} TR(A_2) = \frac{1}{2} TR(A(A_1 - q_1 I))$$
$$= \frac{1}{2} TR(A^2) - \frac{1}{2} TR(q_1 A)$$

$B_2 = A_2 - q_2 I$

$A_3 = AB_2$

$$q_3 = \frac{1}{3} TR(A_3) = \frac{1}{3} TR(AB_2) = \frac{1}{3} TR(A(A_2 - q_2 I)) =$$
$$= \frac{1}{3} TR(A(AB_1 - q_2 I))$$
$$= \frac{1}{3} TR(A(A(A_1 - q_1 I) - q_2 I))$$
$$= \frac{1}{3} TR(A^3 - q_1 A^2 - q_1 A)$$

$B_3 = A_3 - a_3 I$

$A_4 = A B_3$

- - -

$a_N = \frac{1}{n} TR(A_N) = \frac{1}{n} TR(A^N - a_1 A^{N-1} - \ldots - a_{N-2} A^2 - a_{N-1} A)$

$n a_N = TR(A_N) = TR(A^N) - TR(a_1 A^{N-1}) - \ldots - TR(a_{N-2} A^2) - TR(a_{N-1} A)$ (2)

Por otra parte , se tiene :

$n b_N = TR(A^N) = TR(A^N) - TR(A^{N-1}) b_1 - \ldots - TR(A^2) b_{N-2} - TR(A) b_{N-1}$ (3)

igualando términos de las ecuaciones (2) y (3) :

$TR(A^N) = TR(A^N)$

$-TR(a_1 A^{N-1}) = -TR(A^{N-1}) b_1$

- - -

$-TR(a_{N-2} A^2) = -TR(A^2) b_{N-2}$

$-TR(a_{N-1} A) = -TR(A) b_{N-1}$

utilizando la propiedad asociativa de escalares :

$TR(A^N) = TR(A^N)$

$-a_1 TR(A^{N-1}) = -TR(A^{N-1}) b_1$

- - -

$-a_{N-2} TR(A^2) = -TR(A^2) b_{N-2}$

$-a_{N-1} TR(A) = -TR(A) b_{N-1}$

despejando para los términos en b y a :

$1 = 1$, $a_1 = b_1$, ... , $a_{N-2} = b_{N-2}$, $a_{N-1} = b_{N-1}$

lo que demuestra que la secuencia es válida y por lo tanto :

$$b_N = a_N = TR(A_N)/n$$

II.1.3 RESULTADOS SECUNDARIOS DEL METODO DE LEVERRIER-FADDEEVA.

Tambien es importante hacer notar que $B_N = \emptyset$ es decir :

$$B_N = A_N - \alpha_N I = A B_{N-1} - \alpha_N I = \emptyset$$

la demostracion es similar a la anterior , solo que en este caso se desarrolla para n-esima matriz B:

$$B_N = A^N - \alpha_1 A^{N-1} - \alpha_2 A^{N-2} - \ldots - \alpha_N I = \emptyset$$

sea $A_1 = A$, $\alpha_1 = TR(A)/1$, $B_1 = A_1 - \alpha_1 I$

desarrollando para calcular las n-esimas matrices B :

$A_2 = A B_1$, $\alpha_2 = TR(A_2)/2$,

$$B_2 = A_2 - \alpha_2 I = A B_1 - \alpha_2 I = A^2 - \alpha_1 A - \alpha_2 I = \left(\sum_{i=0}^{2-1} -\alpha_{2-i} A^i\right) I + A^2$$

$A_3 = A B_2$, $\alpha_3 = TR(A_3)/3$,

$$B_3 = A_3 - \alpha_3 I = A(A^2 - \alpha_1 A - \alpha_2 I) - \alpha_3 I = A^3 - \alpha_1 A^2 - \alpha_2 A - \alpha_3 I =$$
$$= \left(\sum_{i=0}^{3-1} -\alpha_{3-i} A^i\right) I + A^3$$

en general , el proceso para calcular las i-esimas matrices de B consiste en calcular las potencias de A premultiplicadas por la traza , entonces :

$$B_N = \left(\sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_{N-i} A^i\right) I + A^N \qquad , \quad n > 1$$

desarrollando e igualando a cero , para aplicar el teorma de Cayley-Hamilton se tiene :

$$B_N = A^N - \alpha_1 A^{N-1} - \alpha_2 A^{N-2} - \ldots - \alpha_N I = \emptyset$$

lo cual demuestra que $B_N = \emptyset$.

Y consecuentemente , este hecho muestra que :

si $\quad B_N = A_N - \alpha_N I = \emptyset = A B_{N-1} - \alpha_N I = \emptyset$

entonces : $A B_{N-1} - \alpha_N I = \emptyset$, despejando la matriz inversa $A^{-1} = \dfrac{1}{\alpha_N} B_{N-1}$

es decir , el metodo sirve tambien para invertir matrices.

Por otra parte, el numero de operaciones necesarias para obtener los coeficientes b_i (incluyendo el calculo de la matriz B_N) es igual a : $(n-1)n^3$ multiplicaciones.

II.2 ALGORITMO DE LEVERRIER-FADDEEVA .

El método de Leverrier-Faddeeva , para calcular los coeficientes b_i del polinomio característico $P(\lambda)$, consiste en los siguientes pasos fundamentalmente :

1.- El proceso inicia con : $A_1 = A$;

2.- El cálculo de los coeficientes de $P(\lambda)$, se realizan calculando la traza de la matriz A_i dividida entre la i-ésima iteración: $b_i = \dfrac{TR(A_i)}{I}$;

3.- Las subsecuentes matrices A_i se calculan como el producto de la matriz A por la diferiencia de la matriz A_i y el coeficiente b_i : $A_{i+1} = A(A_i - b_i I)$.
A partir de aquí , se efectúa un ciclaje para calcular los n-coefiecientes del polinomio característico.

OBSERVACIONES :

1.- Según el método , también puede ser calculada la matriz inversa como :

$$A^{-1} = (1/b_N) B_{N-1}$$

es decir, un ciclo antes de obtener el n-esimo coeficiente de $P(\lambda)$, la matriz A_{N-1} corresponde a la matriz adjunta .

2.- Dado que el coeficiente b_N es igual al determinante de la matriz , por la relación $A \cdot \Gamma(A) = DET(A) I$, éste es calculado por el método como : $A_N = A(A_{N-1} - b_{N-1} I)$, y por lo tanto ya no es necesario calcular la n-ésima traza de A_N , en resumen el ciclaje se realiza en (n - 1) iteraciones .

De acuerdo al resumen y a las observaciones precedentes , el algoritmo se limita a realizar tres operaciones básicas : i) Inicializar $A_1 = A$;ii) Calcular el coeficiente b_i ;iii) Calcular la siguiente matriz A_i , como : $A_{i+1} = A(A_i - b_i I)$ y regresar al paso ii , hasta completar (n - 1) ciclos .

Una forma mas detallada del algoritmo de Leverrier-Faddeeva incluira las siguientes variables :

variables	DESCRIPCION
A	MATRIZ DE INSUMO
B	MATRIZ QUE HARA LAS VECES DE A_i
MATRIZ-ADJUNTA	MATRIZ QUE ALMACENARA A_{N-1}
MATRIZ-INVERSA	MATRIZ INVERSA DE A
P	VECTOR EN DONDE SERAN ALMACENADOS LOS COEFICIENTES b_i
DETERMINANTE	DETERMINANTE DEL SISTEMA
TRAZA	ES LA SUMA DE LOS ELEMENTOS DE LA DIAGONAL PRINCIPAL DE A_i .
ORDEN-MATRIZ	TOTAL DE RENGLONES Y COLUMNAS DE LA MATRIZ A
TR	FUNCION QUE DEVUELVE LA TRAZA DE LA MATRIZ A_i

Como ultima observacion , el coeficiente de λ^N siempre es igual a uno , entonces ,el primer elemento del vector P sera uno : P(1) = 1.0

ALGORITMO DE LEVERRIER-FADDEEVA.

OBJETIVO : calcular el polinomio característico $P(\lambda)$;

la matriz adjunta $\Gamma(A)$;

el determinante $DET(A)$;

la matriz inversa A^{-1}.

DATOS DE ENTRADA : ORDEN-MATRIZ , ELEMENTOS DE LA MATRIZ A .

PASO 1 : INICIALIZAR $P(1)=1.0$ y

$B = A$;

PASO 2 : PARA I = 1,...,ORDEN-MATRIZ - 1 HACER desde el paso 2.1 al 2.5 :

PASO 2.1 : TRAZA = TR(B) / I ;

PASO 2.2 : P(I+1) = -TRAZA ;

PASO 2.3 : PARA J = 1,...,ORDEN-MATRIZ HACER el paso 2.3.1 :

PASO 2.3.1 : B(J,J)=B(J,J)-TRAZA;

PASO 2.4 : SI I = (ORDEN-MATRIZ - 1) ENTONCES hacer el paso 2.4.1 :

PASO 2.4.1 : MATRIZ-ADJUNTA = B .

PASO 2.5 : B = A*B ;

PASO 3 : P(ORDEN-MATRIZ + 1) = -B(1,1) ;

PASO 4 : DETERMINATE = -B(1,1) ;

PASO 5 : IMPRIME : MATRIZ-ADJUNTA ;

PASO 6 : SI ABS(DETERMINANTE) > 0 ENTONCES hacer del paso 6.1 al 6.2 :

PASO 6.1 : MATRIZ-INVERSA = (1.0/DETERMINANTE)*MATRIZ-ADJUNTA ;

PASO 6.2 : IMPRIME : MATRIZ-INVERSA

EN CASO CONTRARIO hacer el paso 6.3 :

PASO 6.3 : IMPRIME : "EL DETERMINANTE ES IGUAL A CERO " ,

"NO EXISTE MATRIZ INVERSA".

PASO 7 : IMPRIME : " POLINOMIO CARACTERISTICO : " , $P(1),\ldots,P(N)$.

II.3 ALGUNOS EJEMPLOS DE APLICACION .

Despues de explicar y analizar el metodo de Leverrier-Faddeeva, consideremos, ahora algunas aplicaciones mediante los siguientes ejemplos :

1.- Dada la siguiente matriz A de orden $n = 4$:

a.- Calcular su correspondiente polinomio caracteristico .

b.- Calcular todas las raices, con el metodo de Newton-Raphson doble division sintetica (vease anexo A) .

c.- Calcular sus respectivos vectores caracteristicos .

$$A = \begin{bmatrix} 17 & -1 & -27 & -6 \\ 6 & -14 & -54 & -24 \\ 1 & 1 & -29 & -1 \\ -9 & -19 & 51 & 5 \end{bmatrix}$$

(ver ejemplo en [5],pag.132)

2.- Del ejercicio anterior , mostrar que :

a.- El determinante de A es igual al producto de los correspondientes valores caracteristicos .

b.- Mostrar que la matriz inversa (si existe) se calcula como :

$$A^{-1} = \frac{1}{q_n} B_{n-1} \qquad \text{y en consecuencia } A^{-1}A = A*A^{-1} = I$$

c.- Mostrar que $B_n = A_n - q_n I = 0$

3.- Del Ejercicio 1 inciso c :

a.- Cual es la condicion necesaria para calcular el correspondiente vector caracteristico ?.

b.- Si se aplicase el metodo de Leverrier-Faddeeva para calcular la matriz adjunta de $(A-\lambda I)$, el metodo lo permite , por que ?

RESPUESTAS :

1.a .- De acuerdo al metodo de Leverrier-Faddeeva , el polinomio caracteristico se obtiene : $P(\lambda) = -1^{N}(\lambda^{N} + b_1\lambda^{N-1} + \ldots + b_{N-1}\lambda + b_N)$

donde $A_1 = A$; $b_I = TR(A_I)/I$; $B_I = A_I - q_I I$, y general : $A_I = AB_I$ con $I > 1$.

$$A_1 = A = \begin{bmatrix} 17 & -1 & -27 & -6 \\ 6 & -14 & -54 & -24 \\ 1 & 1 & -29 & -4 \\ -9 & -19 & 51 & 6 \end{bmatrix}$$

$$b_1 = TR(A_1)/1 = -20/1 = -20$$

$$B_1 = A_1 - b_1 I = \begin{bmatrix} 37 & -1 & -27 & -6 \\ 6 & 6 & -54 & -24 \\ 1 & 1 & -9 & -4 \\ -9 & -19 & 51 & 26 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = AB_1 = \begin{bmatrix} 650 & 64 & -460 & -126 \\ 300 & 312 & -144 & -100 \\ 50 & 52 & -24 & -10 \\ -450 & -168 & 1116 & 462 \end{bmatrix}$$

$$b_2 = TR(A_2)/2 = 1400/2 = 700$$

$$B_2 = A_2 - b_2 I = \begin{bmatrix} -50 & 64 & -460 & -126 \\ 300 & -388 & -144 & -100 \\ 50 & 52 & -724 & -10 \\ -450 & -168 & 1116 & -238 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = AB_2 = \begin{bmatrix} 200 & 1000 & 5040 & -120 \\ 3600 & 7040 & 11520 & 7440 \\ 600 & -1160 & 15920 & 1240 \\ -5400 & 8440 & -23280 & 840 \end{bmatrix}$$

$$b_3 = TR(A_3)/3 = 24000/3 = 8000$$

$$B_3 = A_3 - b_3 I = \begin{bmatrix} -7800 & 1000 & 5040 & -120 \\ 3600 & -960 & 11520 & 7440 \\ 600 & -1160 & 7920 & 1240 \\ -5400 & 8440 & -23280 & -7160 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = AB_3 = \begin{bmatrix} -120000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -120000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -120000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -120000 \end{bmatrix}$$

$$b_4 = -480000/4 = -120000$$

sustituyendo en $P(\lambda)$:

$$P(\lambda) = -1^4(\lambda^4 + 20\lambda^3 - 700\lambda^2 - 8000\lambda + 120000)$$

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 20\lambda^3 - 700\lambda^2 - 8000\lambda + 120000$$

1.b .- Dado el polinomio característico $P(\lambda)$, ahora , se calculan las raíces reales o complejas de : $P(\lambda) = \lambda^4 + 20\lambda^3 - 700\lambda^2 - 8000\lambda + 120000 = 0$

sea $X_0 = (10.0 , 0.0)$; $X_I = X_{I-1} - \dfrac{F(X_{I-1})}{F'(X_{I-1})}$

(10.0 , 0.0)						
	(1,0)	(20,0)	(-700 , 0)	(-8000 , 0)	(120000 , 0)	
		(10,0)	(300 , 0)	(-4000 , 0)	(-120000, 0)	
	(1,0)	(30,0)	(-400 , 0)	(-12000, 0)	(0 , 0)	$F(X_{I-1})$
		(10,0)	(400 , 0)	(0 , 0)		
	(1,0)	(40,0)	(0 , 0)	(-12000, 0)		$F'(X_{I-1})$

$X_1 = (10 , 0) - \dfrac{(0 , 0)}{(-12000,0)} = (10,0) - (0,0) = (10,0)$

Error relativo $= \dfrac{(10,0) - (10,0)}{(10,0)} = ABS((0,0) / (10 , 0)) = (0 , 0)$

sea $X_0 = (-30.0 , 0.0)$; $X_I = X_{I-1} - \dfrac{F(X_{I-1})}{F'(X_{I-1})}$

(-30.0 , 0.0)					
	(1,0)	(30,0)	(-400 , 0)	(-12000, 0)	
		(-30,0)	(0 , 0)	(12000, 0)	
	(1,0)	(0,0)	(-400 , 0)	(0 , 0)	$F(X_{I-1})$
		(-30,0)	(900 , 0)	(15000 , 0)	
	(1,0)	(-30,0)	(500, 0)	(15000 , 0)	$F'(X_{I-1})$

$X_1 = (-30 , 0) - \dfrac{(0 , 0)}{(15000,0)} = (-30,0) + (0,0) = (-30,0)$

Error relativo $= \dfrac{(-30,0) - (-30,0)}{(-30,0)} = ABS((0,0) / (-30 , 0)) = (0 , 0)$

sea $X_0 = (20.0\ ,\ 0.0)$; $X_i = X_{i-1} - \dfrac{F(X_{i-1})}{F'(X_{i-1})}$

$$
\begin{array}{r|llll}
(20.0\ ,\ 0.0) & (1,0) & (0,0) & (-400\ ,\ 0) & \\
 & & (20,0) & (400\ ,\ 0) & \\
\hline
 & (1,0) & (20,0) & (0\ ,\ 0) & \text{———} \ F(X_{i-1}) \\
 & & (20,0) & & \\
\hline
 & (1,0) & (40,0) & & \text{———} \ F'(X_{i-1})
\end{array}
$$

$X_i = (20\ ,\ 0) - \dfrac{(0\ ,\ 0)}{(40,\ 0)} = (20,0) - (0,0) = (20,0)$

Error relativo $= \dfrac{(20,0) - (20,0)}{(20,0)} = ABS(\ (0,0)\ /\ (20\ ,\ 0)) = (0\ ,\ 0)$

sea $X_0 = (-20.0\ ,\ 0.0)$; $X_i = X_{i-1} - \dfrac{F(X_{i-1})}{F'(X_{i-1})}$

$$
\begin{array}{r|lll}
(-20.0\ ,\ 0.0) & (1,0) & (20,0) & \\
 & & (-20,0) & \\
\hline
 & (1,0) & (0,0) & \text{———} \ F(X_{i-1}) \\
 & & & \\
\hline
 & (1,0) & & \text{———} \ F'(X_{i-1})
\end{array}
$$

$X_i = (-20\ ,\ 0) - \dfrac{(0\ ,\ 0)}{(1,\ 0)} = (-20,0) - (0,0) = (-20,0)$

Error relativo $= \dfrac{(-20,0) - (-20,0)}{(1,0)} = ABS(\ (0,0)\ /\ (1\ ,\ 0)) = (0\ ,\ 0)$

Las raíces del polinomio característico son : $\lambda_1 = 10\ ,\ \lambda_2 = -30\ ,\ \lambda_3 = 20\ ,\ \lambda_4 = -20$

1.c .-Mediante transformaciones por operaciones elementales , se lleva a la matriz $(A-\lambda I)$ a una matriz triangular superior, para efectuar sustituciones hacia atras y calcular los respectivos vectores característicos X_i asociados a cada λ_i .

$$(A-\lambda_2 I) = (A-(-30)I) = \begin{bmatrix} 47 & -1 & -27 & -6 \\ 6 & 16 & -54 & -24 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ -9 & -19 & 51 & 36 \end{bmatrix} \begin{matrix} \ldots\ldots\ldots\ldots R_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots R_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots R_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots R_4 \end{matrix}$$

Intercambio: $R_1 = R_3$; $R_3 = R_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 6 & 16 & -54 & -24 \\ 47 & -1 & -27 & -6 \\ -9 & -19 & 51 & 36 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 10 & -60 & 0 \\ 0 & -48 & -74 & 182 \\ 0 & -10 & 60 & 0 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -48 & -74 & 182 \\ 0 & -10 & 60 & 0 \\ 0 & -10 & 60 & 0 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -48 & -74 & 182 \\ 0 & -10 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_2 \leftarrow -6R_1+R_2$
$R_3 \leftarrow -47R_1+R_3$
$R_4 \leftarrow 9R_1+R_4$

INTERCAMBIO
$R_2 \leftarrow R_3$
$R_3 \leftarrow R_2$
$R_4 \leftarrow R_3+R_4$

SEA $X_3 = 1$:
$X_2 = 6$;
$X_4 = 362/182$;
$X_1 = 174/182$.

$$\therefore X_2 = [\ 174/182\ ,\ 6\ ,\ 1\ ,\ 362/182\ ]^T$$

$$(A-\lambda_4 I)=(A+20I)=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}37 & -1 & -27 & -6\\ 6 & 6 & -54 & -24\\ 1 & 1 & -9 & -4\\ -9 & -19 & 51 & 26\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\ldots\ldots\ldots\ldots R_1\\ \ldots\ldots\ldots\ldots R_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots R_3\\ \ldots\ldots\ldots\ldots R_4\end{array}$$

Intercambio: $R_1 = R_3$; $R_3 = R_1$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -9 & -4\\ 6 & 6 & -54 & -24\\ 37 & -1 & -27 & -6\\ -9 & -19 & 51 & 26\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1 & 1 & -9 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -38 & 306 & 142\\ 0 & -10 & -30 & -10\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1 & 1 & -9 & -4\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 7 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$R_2 \leftarrow -6R_1+R_2$
$R_3 \leftarrow -37R_1+R_3$
$R_4 \leftarrow 9R_1+R_4$

INTERCAMBIO
$R_2 \leftarrow R_4$
$R_4 \leftarrow R_2$;
$R_2 \leftarrow -0.1R_2$; $R_3 \leftarrow 38R_2+R_3$;
$R_3 \leftarrow 1/60R_3$

SEA $X_4=-7$:
$X_3=3$;
$X_2=-2$;
$X_1=1$.

$$\therefore\ X_4 = [1\ ,-2\ ,3\ ,-7]^T$$

$$(A-\lambda_1 I)=(A-10I)=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}7 & -1 & -27 & -6\\ 6 & -24 & -54 & -24\\ 1 & 1 & -39 & -4\\ -9 & -19 & 51 & -4\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\ldots\ldots\ldots\ldots R_1\\ \ldots\ldots\ldots\ldots R_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots R_3\\ \ldots\ldots\ldots\ldots R_4\end{array}$$

$R_2 \leftarrow R_2-R_1$; $R_1 \leftarrow R_1+R_4$; $R_1 \leftarrow -0.5R_1$

$$\begin{bmatrix}1 & 10 & -12 & 5\\ 1 & 23 & 27 & 18\\ 1 & 1 & -39 & -4\\ -9 & -19 & 51 & -4\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1 & 10 & -12 & 5\\ 0 & 13 & 39 & 13\\ 0 & -9 & -27 & -9\\ 0 & 71 & -57 & 41\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1 & 10 & -12 & 5\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 71 & -57 & 41\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1 & 10 & -12 & 5\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & -270 & -30\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$R_2 \leftarrow -1R_1+R_2$
$R_3 \leftarrow -1R_1+R_3$
$R_4 \leftarrow 9R_1+R_4$

$R_3 \leftarrow 9R_2+13R_3$
$R_3 \leftarrow 1/13R_3$

INTERCAMBIO
$R_3 \leftarrow R_4$; $R_4 \leftarrow R_3$;
$R_3 \leftarrow -71R_2+R_3$

SEA $X_3=-1$:
$X_4=9$;
$X_2=-6$;
$X_1=3$.

$$\therefore\ X_1 = [\ 3\ ,\ -6\ ,\ -1\ ,9]^T$$

$$(A-\lambda_3 I) = (A-20I) = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -27 & -6 \\ 6 & -34 & -54 & -24 \\ 1 & 1 & -49 & -4 \\ -9 & -19 & 51 & -14 \end{bmatrix} \begin{matrix} \dots\dots\dots\dots R_1 \\ \dots\dots\dots\dots R_2 \\ \dots\dots\dots\dots R_3 \\ \dots\dots\dots\dots R_4 \end{matrix}$$

INTERCAMBIO :

$R_1 \leftarrow R_3$, $R_3 \leftarrow R_1$;

$R_2 \leftarrow -6R_1 - R_2$; $R_3 \leftarrow 3R_1 + R_3$; $R_4 \leftarrow 9R_1 + R_4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -49 & -4 \\ 0 & 2 & -174 & -18 \\ 0 & -40 & 240 & 0 \\ 0 & -10 & -390 & -50 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 1 & -49 & -4 \\ 0 & 1 & -87 & -9 \\ 0 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & -39 & -5 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 1 & -49 & -4 \\ 0 & 1 & -87 & -9 \\ 0 & 0 & -81 & -9 \\ 0 & 0 & -126 & -14 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 1 & -49 & -4 \\ 0 & 1 & -87 & -9 \\ 0 & 0 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_2 \leftarrow 0.5R_2$
$R_3 \leftarrow 1/40R_3$
$R_4 \leftarrow 0.1R_4$

$R_3 \leftarrow R_2 + R_3$
$R_4 \leftarrow R_2 + R_4$

$R_4 \leftarrow 1/9R_3 - 1/14R_4$
$R_3 \leftarrow 1/9R_3$

SEA $X_4 = -9$:

$X_3 = 1$;
$X_2 = 6$;
$X_1 = 7$.

$$\therefore X_3 = [\,7 \;,\, 6 \;,\, 1 \;,\, -9\,]^T$$

MATRIZ BASE CARACTERISTICA :

$\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = -30$, $\lambda_3 = 20$, $\lambda_4 = -20$

$$\begin{array}{cccc} \begin{bmatrix} 3 & 174/182 & 7 & 1 \\ -6 & 6 & 6 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 9 & 362/182 & -9 & -7 \end{bmatrix} \\ X_1 \quad\quad X_2 \quad\quad X_3 \quad\quad X_4 \end{array}$$

2.a El determinante es igual al producto de los valores característicos :

$\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = -30$, $\lambda_3 = 20$, $\lambda_4 = -20$; $-1^4(10 \times (-30) \times 20 \times (-20)) = 120000$

puesto que $b_4 = \mathrm{TRA}(A_4)/4 = -1^4(-120000) = 120000$, lo cual muestra la igualdad.

2.b La inversa de A se obtiene :

$$A^{-1} = \frac{1}{q_n} B_{n-1}$$, en efecto : $B_n = \emptyset$, donde B_n se calcula como

$B_n = A_n - q_n I$ igualando a cero se obtiene :

$A_n - q_n I = \emptyset$, teniendo en cuenta que $A_n = A B_{n-1}$, sustituyendo se tiene

$A B_{n-1} - q_n I = \emptyset$, premultiplicando por la matriz inversa A^{-1}

$I B_{n-1} - q_n A^{-1} = \emptyset$, despejando para A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{q_n} B_{n-1}$$, lo cual demuestra que el método de Leverrier-Faddeeva invierte matrices . En concecuencia $A^{-1}A = I$.

2.c El cálculo de B_n es igual a cero , de acuerdo al teorema de Cayley-Hamilton :

$$B_n = A_n - q_n I = \emptyset$$

utilizando el ejercicio anterior :

$$\begin{bmatrix} -120000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -120000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -120000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -120000 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -120000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -120000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -120000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -120000 \end{bmatrix} = \emptyset I$$

3.a Para calcular los vectores caracteristicos a partir de la matriz $(A-\lambda I)$ es necesario que el rango de la matriz sea menor que el orden de la matriz, tal que : $(A-\lambda_i I)\Gamma(A-\lambda_i I)=0$.

3.b Puesto que la matriz inversa de A se calcula como : $A^{-1}=\frac{1}{DET(A)}\Gamma(A)$

y puesto que , por el metodo de Leverrier-Faddeeva , la matriz inversa se calcula como: $A^{-1}=\frac{1}{\alpha_N} B_{N-1}$, donde B_{N-1} representa a la matriz adjunta ,esto implica que la matriz adjunta de $(A-\lambda_i I)$ puede ser calculada por el metodo de Leverrier-Faddeeva.

De acuerdo al teorema 1.3.4 el determinante se obtiene como :

$DET(A)I=A\Gamma(A)$

Segundo , en base al teorema 1.4.1 se tiene :

$DET(A-\lambda I)=0$. De acuerdo a estos dos teoremas , se tiene que :

$$DET(A-\lambda I)=(A-\lambda I)\Gamma(A-\lambda I)=0 \qquad (1)$$

Puesto que , al calcular los vectores caracteristicos se pretende encontrar un vector X diferente de cero , tal que :$(A-\lambda I)X=0$. Dado que la ecuacion (1) cumple con dicha condicion , entonces , esto sugiere que los vectores columna de la matriz adjunta ,pueden ser utilizados como un vector caracteristico X_i asociado a un valor caracteristico λ_i .

CAPITULO III

DESARROLLO ANALITICO DE LA EXTENSION

DEL METODO DE LEVERRIER-FADDEEVA

" ... NO HAY EN EL MUNDO NINGUN ESTUDIO QUE HAGA ACTUAR DE MANERA MAS ARMONICA TODAS LAS FACULTADES DE LA MENTE COMO LAS MATEMATICAS ...".

JAMES JOSEPH SYLVESTER.

DESARROLLO ANALITICO DE LA EXTENSION DEL METODO DE LEVERRIER-FADDEEVA

III.1 EXTENSION DEL METODO DE LEVERRIER-FADDEEVA.

El objetivo de este capítulo , es presentar el correspondiente análisis que permite calcular los vectores característicos a partir del método de Leverrier-Faddeeva.

Como ya se ha mencionado anteriormente, la obtención de dichos vectores puede llegar a requerir de una gran cantidad de cálculos , dependiendo del método empleado , y de los resultados que se desee obtener .

Supóngase que se desea calcular todos los vectores característicos y que es utilizada la forma matricial : $(A-\lambda_i I)X_i=\emptyset$.

III.1.1 PLANTEAMIENTO .

Es decir , dada una matriz A de orden n , la cual es una matriz no singular y $P(\lambda)$ es su polinomio característico, del cual todas sus raíces λ_i han sido calculadas Se desea , ahora , calcular sus correspondientes vectores característicos a partir de: $(A-\lambda_i I)X_i=\emptyset$, llamada matriz característica.

La determinación de los elementos X_i , exige la busqueda de n-incognitas . Puesto que A es de orden n y el $DET(A-\lambda_i I)X_i=\emptyset$, entonces la condición para determinar las X_i en función de un parámetro λ_i es que el rango de la matriz característica sea igual a n-incógnitas menos una , es decir :

$$RAN(A-\lambda I)=n-1 .$$

Esto significa que , por el hecho de existir una ecuación linealmente dependiente, entonces , existe una variable libre a la cual puede asignarsele un valor arbitrario ,y en base a ésta calcular el valor de las incognitas restantes .

Además , por el teorema 1.3.4 y 1.4.1 se tiene :

$$DET(A-\lambda I)=(A-\lambda I)\Gamma(A-\lambda I)=\emptyset$$

Por otra parte , se tiene que el método de Leverrier-Faddeeva invierte matrices como $A^{-1}=\alpha_N^{-1}B_{N-1}$. Pero como ahora la matriz es singular , α_N es igual a cero y por lo tanto no existe la inversa .

En otras palabras , α_N se calcula como $TR(A_N)/n$, y a su vez, A_N se calcula como $A_N=A'B_{N-1}$ donde A' es la matriz característica $(A-\lambda I)$.

Atendiendo el hecho de que B_{N-1} representa a la matriz adjunta de $(A-\lambda I)$, entonces se puede escribir :

$$A_N=(A-\lambda I)B_{N-1}=(A-\lambda I)\Gamma(A-\lambda I)=\emptyset \qquad (1)$$

En relación a la forma $(A-\lambda I)X=\emptyset$, la relación (1) sugiere que los vectores columna son una solución no-trivial tal que satisface al sistema $(A-\lambda I)X=\emptyset$.

Dado que los vectores columna de la matriz adjunta representan un vector característico , entonces , el problema se reduce a calcular la matriz adjunta de $(A-\lambda I)$ y para ello se utiliza el método de Leverrier-Faddeeva .

III.1.3 HIPOTESIS.

Si el $DET(A-\lambda I)I=(A-\lambda I)\Gamma(A-\lambda I)=\emptyset$, y B_{N-1} matriz adjunta con α_N igual al determinante , los cuales son calculados por el método de Leverrier-Faddeeva entonces : $DET(A-\lambda I)=A_N=(A-\lambda I)B_{N-1}=(A-\lambda I)\Gamma(A-\lambda I)=\emptyset$.

III.1.3 DEMOSTRACION

Del método de Leverrier-Faddeeva , éste se basa en el cálculo de la secuencia de :

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ calculadas como : $A_i = A B_{i-1}$, $\alpha_i = \frac{TR(A_i)}{i}$, $B_i = A_i - \alpha_i I$.

Donde B_0 es igual a la matriz de identidad, i = 1,2,3,...,n .

Por otra parte , se tiene que la matriz adjunta puede escribirse como una suma de matrices premultiplicadas por una potencia de λ_i : $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_i^k B_{(n-1)-i}$

Donde cada B_k es calculada por el método de Leverrier-Faddeeva .

Por la hipótesis , se sabe que :

$$DET(A-\lambda_i I) = A_n = A' B_{n-1} = (A-\lambda_i I)\Gamma(A-\lambda_i I) = 0$$

Primero , se demostrará que $A' B_{n-1}$ es un polinomio igual a cero :

$$A' B_{n-1} = (A' - \lambda_i I) \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_k^i B_{(n-1)-i}$$

desarrollando para la suma :

$$A' B_{n-1} = (A' - \lambda_i I)(\lambda_k^{n-1} I + \lambda_k^{n-2} B_1 + \lambda_k^{n-3} B_2 + \ldots + \lambda_k^2 B_{n-3} + \lambda_k B_{n-2} + B_{n-1})$$

$$= \lambda_k^{n-1} A' + \lambda_k^{n-2} A' B_1 + \lambda_k^{n-3} A' B_2 + \ldots + \lambda_k^2 A' B_{n-3} + \lambda_k A' B_{n-2} + A' B_{n-1} +$$

$$-(\lambda_k^n I + \lambda_k^{n-1} B_1 + \lambda_k^{n-2} B_2 + \ldots \lambda_k^3 B_{n-3} + \lambda_k^2 B_{n-2} + \lambda_k B_{n-1})$$

$$= -\lambda_k^n I + \lambda_k^{n-1}(A' - B_1) + \lambda_k^{n-2}(A' B_1 - B_2) + \ldots + \lambda_k^2 (A' B_{n-3} - B_{n-2}) +$$

$$\lambda (A' B_{n-2} - B_{n-1}) + A' B_{n-1}$$

simplificando :

$$= -\lambda_k^n I + \lambda_k^{n-1} \alpha_1 I + \lambda_k^{n-2} \alpha_2 I + \ldots + \lambda_k^3 \alpha_{n-3} I + \lambda_k^2 \alpha_{n-2} I + \lambda_k \alpha_{n-1} I + A' B_{n-1}$$

despejando $A' B_{n-1}$:

$$0 = -\lambda_k^n I + \lambda_k^{n-1} \alpha_1 I + \lambda_k^{n-2} \alpha_2 I + \ldots + \lambda_k^3 \alpha_{n-3} I + \lambda_k^2 \alpha_{n-2} I + \lambda_k \alpha_{n-1} I$$

De acuerdo a la demostración anterior , se verifica que :

$$A_N = A' B_{N-1} = (A-\lambda I) \Gamma (A-\lambda I) = 0$$

Y como α_N representa al término independiente del polinomio característico y además al determinante del sistema, el cual se calcula por el método de Leverrier-Faddeeva como $\alpha_N = TR(A_N)/n$.

Por la demostración anterior , $A_N = 0$, por lo tanto , se concluye que :

$$\alpha_N = TR(A_N)/n = DET(A-\lambda I) = 0.$$

CON LO CUAL SE DEMUESTRA LA HIPOTESIS.

III.1.4 CONCLUSIONES

De acuerdo a la demostración precedente , la idea de utilizar los vectores columna de la matriz adjunta de $(A-\lambda I)$ como vectores característicos , está dada por el teorema 1.4.1 . Y en vista de que la matriz adjunta puede calcularse por el método de Leverrier-Faddeeva , sin la previa necesidad de saber si la matriz es singular o no , hace al método completamente general a cualquier particularidad de una u otra matriz.

Por último , se puede decir que el calcular los vectores característicos de matrices cuadradas : dicha tarea consiste en calcular la matriz adjunta $(A-\lambda I)$ y en este caso , el método de Leverrier-Faddeeva resulta ser muy adecuado para dicho cálculo.

III.2 ALGORITMO DE LA EXTENSION DEL METODO DE LEVERRIER-FADDEEVA

Hasta aquí , la descripción de los algoritmos tienen objetivos particulares, primero calcular el polinomio característico y segundo resolverlo , encontrando todos y cada uno de sus valores característicos (raíces) . Ahora , de acuerdo a toda la teoría desarrollada , se elabora el correspondiente algoritmo para calcular los vectores característicos utilizando como función principal el algoritmo II.2, el cual calcula la matriz adjunta de $\langle A-\lambda I \rangle$.

Para calcular la matriz adjunta, los datos de entrada que requiere el algoritmo II.2 son : el orden de la matriz y los elementos de la matriz , que en este caso son calculados como $\langle A-\lambda_i I \rangle$, donde λ_i es el i-esimo valor característico asociado a la i-esima matriz adjunta , y consecuentemente al i-esimo vector característico x_i .

Conforme se calculan las matrices adjuntas de $\langle A-\lambda_i I \rangle$, se extrae un vector columna que representa un vector característico , el cual es incluido en una matriz llamada Matriz Base Característica.

El correspondiente algoritmo realiza las siguientes funciones, para calcular los vectores característicos : i) calcular la matriz característica $\langle A-\lambda_i I \rangle$; ii) calcular la correspondiente matriz adjunta ; iii) imprimir la matriz adjunta ; iv) formar la matriz base con los vectores característicos ; v) imprimir la matriz base .

ALGORITMO DE LA EXTENSION DEL METODO DE LEVERRIER-FADDEEVA .

OBJETIVO : calcular los vectores característicos .
DATOS DE ENTRADA : los n-valores característicos ,
el orden de la matriz ,
la matriz original A .
SALIDA : Matriz Base característica (formada por los vectores característicos)

PASO 1 : PARA CADA I = 1 ,..., ORDEN-MATRIZ HACER del paso 1.1 al 1.5

PASO 1.1 : MC = A ;

PASO 1.2 : PARA CADA J = 1,...,ORDEN-MATRIZ HACER el paso 1.2.1

PASO 1.2.1 : MC[J,J]=MC[J,J] - VALOR CARACTERISTICO[I] ;

PASO 1.3 : APLICAR : ALGORITMO DE LEVERRIER-FADDEEVA;

PASO 1.4 : IMPRIME : " MATRIZ CARACTERISTICA : " , MC ,
" MATRIZ ADJUNTA : " , MATRIZ-ADJUNTA ;

PASO 1.5 : PARA CADA J = 1 ,...,ORDE-MATRIZ HACER el paso 1.5.1

PASO 1.5.1 : MATRIZ-BASE [J,I] = MATRIZ-ADJUNTA[J,I];

PASO 2 : IMPRIME : " MATRIZ BASE CARACTERISTICA " , MATRIZ-BASE;

PASO 3 : TERMINA CALCULO DE VECTORES CARACTERISTICOS .

Por último , es necesario mencionar que , si al calcular los valores característicos estos están definidos en el campo de los números complejos , entonces es necesario utilizar aritmética compleja para calcular la secuencia de A_i , B_i y q_i que proporcionan la matriz adjunta .

Las variables utilizadas en el algoritmo son :

variables	descripción
MC	MATRIZ CARACTERISTICA
MATRIZ ADJUNTA	MATRIZ ADJUNTA DE $(A-\lambda I)$
I, J	CONTADORES DE RENGLONES Y COLUMNAS
VALOR-CARACTERISTICO	VECTOR QUE CONTIENE LOS VALORES CARACTERISTICOS
MATRIZ-BASE	MATRIZ QUE CONTIENE LOS VECTORES CARACTERISTICOS
ORDEN-MATRIZ	NUMERO TOTAL DE RENGLONES Y COLUMNAS DE LA MATRIZ

III.3 APLICACIONES

1.- Del ejercicio 1 . del capítulo II , calcular los vectores característicos aplicando el algoritmo III.2 .

a.- Que diferencias se encuentran en los resultados obtenidos aquí ?.

2.- Mostrar que $(A-\lambda_1 I)r(A-\lambda_2 I)=0$.

RESPUESTAS .

1.- En el ejercicio 1 del capítulo II , los vectores característicos fueron calculados por operaciones elementales , sobre los renglones de la matriz característica. Ahora se aplica el método de Leverrier-Faddeeva para calcular la matriz adjunta y extraer el vector característico de la i-ésima columna .

sea $\lambda_1=10$

$$A_1=A'=(A-\lambda_1 I) \qquad B_1=A_1-b_1 I \qquad A_2=A'B_1$$

$$\begin{bmatrix} 7 & -1 & -27 & -6 \\ 6 & -24 & -54 & -24 \\ 1 & 1 & -39 & -4 \\ -9 & -19 & 51 & -4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 67 & -1 & -27 & -6 \\ 6 & 36 & -54 & -24 \\ 1 & 1 & 21 & -4 \\ -9 & -19 & 51 & 56 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 490 & 44 & -1000 & -246 \\ 420 & -468 & -1224 & -588 \\ 70 & 72 & -1104 & -98 \\ -630 & -548 & 2136 & 82 \end{bmatrix}$$

$b_1=-60$ $\qquad$ $b_2=-1000/2=-500$

$$B_2=A_2-b_2 I \qquad A_3=A'B_2$$

$$\begin{bmatrix} 990 & 44 & -1000 & -246 \\ 420 & 32 & -1224 & -588 \\ 70 & 72 & -604 & -98 \\ -630 & -548 & 2136 & 582 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 8400 & 1620 & -2340 & -1900 \\ 7200 & 9760 & 4680 & 3960 \\ 1200 & -540 & 12780 & 660 \\ -10800 & 4660 & -7020 & 6060 \end{bmatrix}$$

$b_3=36000/3=12000$

$B_3 = A_3 - b_3 I$

$$\begin{bmatrix} -3600 & 1620 & -2340 & -1980 \\ 7200 & -3240 & 4680 & 3960 \\ 1200 & -540 & 780 & 660 \\ -10800 & 4860 & -7020 & -5940 \end{bmatrix}$$

1.a De acuerdo al método de Leverrier-Faddeeva , la matriz adjunta esta dada por el la matriz B_{n-1} , en este caso es B_3 representa dicha matriz . Extrayendo una columna p.e. la uno , el vector caracterísitico es : $[-3600 , 7200 , 1200 , -10800]^T$, el cual es diferente , en un múltiplo de 1200 a los resultados obtenidos en el capitulo II (-3 , 6 , 1 , -9), lo cual se soluciona dividiendo entre 1200 cada elemento del vector característico (obtenido de la matriz adjunta). Y en general dividiendo por un factor común a los elementos de cada columna , p.e. en la columna dos el factor es -540 : en la tres es 780 ; en la cuatro es 660 . Aplicando estas sencillas operaciones , la matriz adjunta se reduce a :

$$B_3 = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 & -3 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -9 & -9 & -9 & -9 \end{bmatrix}$$

2.- El continuar aplicando el método , para calcular el determinante de $(A - \lambda I)$ el cual es , teoricamente , igual a cero :

$$A_4 = A' B_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 7 & -1 & -27 & -6 \\ 6 & -24 & -54 & -24 \\ 1 & 1 & -39 & -4 \\ -9 & -19 & 51 & -4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 & -3 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -9 & -9 & -9 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Consecuentemente : $b_4 = TR(A_4)/4 = 0/4$; $B_4 = A_4 - b_4 I = 0 - 0 I = 0$

CAPITULO IV

IMPLANTACION , DOCUMENTACION Y EVALUACION DEL METODO

IMPLANTACION , DOCUMENTACION Y EVALUACION DEL METODO

RECAPITULACION.

De la teoría desarrollada hasta aquí , para explicar el método de Leverrier-Faddeeva considero conveniente presentar un esquema de trabajo . A través del cual explico de manera general : el objetivo de este trabajo y la secuencia lógica de cómo es desarrollado el algoritmo para solución espectral , la implantación del mismo en un lenguaje de alto nivel y presentar su respectiva documentación.

PRIMERO:

El objetivo de la tesis es : El estudio y desarrollo analítico del método de Leverrier-Faddeeva. Describir sus múltiples alcances y contribuir con modificaciones que desprenden otro método para la obtención de los vectores característicos; así como implantar el algoritmo y sistema de procesamiento electrónico.

SEGUNDO:

El objetivo del método de Leverrier-Faddeeva es : proporcionar soluciones a problemas expresados a través de modelos matemáticos , específicamente matrices cuadradas . Mediante la aplicación de las siguientes fórmulas de recurrencia : $A_i = A B_{i-1}$, $b_i = \frac{TR(A_i)}{i}$, $B_i = A_i - b_i I$

TERCERO:

Una vez calculadas todas las raíces λ_i del polinomio característico, a través del método de NEWTON-RAPHSON (doble división sintética) , se procede a — calcular los correspondientes vectores característicos aplicando nuevamente el método de Leverrier-Faddeeva sobre matrices cuadradas , calculadas como $(A - \lambda I)$.

CUARTO:

Alcances del método de Leverrier-Faddeeva: son diversos , a través del método se puede calcular :

- la matriz adjunta ;
- el determinante del sistema;
- los coeficientes del polinomio característico;
- matriz inversa;
- vectores característicos X_i ,asociados a los valores característicos λ_i .

QUINTO:

Funciones del algoritmo: todas las funciones del algoritmo de Leverrier-Faddeeva para solución espectral , son efectuadas mediante la aplicación de las fórmulas de recurrencia , en base a la siguiente secuencia de resultados:

- calcular los coeficientes del polinomio característico , con $b_i = \frac{TR(A_i)}{i}$
- calcular la matriz adjunta a partir de : $B_{N-1} = A_{N-1} - b_{N-1} I$
- calcular el determinante del sistema como : $A_N = A B_{N-1}$
- si el determinante de la matriz A es diferente de cero , entonces : efectue el cálculo de la matriz inversa $A^{-1} = b^{-1} B_{N-1}$
- calcular los valores característicos λ_i, a través del método de NEWTON-RAPHSON .
- calcular la matriz adjunta de la matriz característica $(A - \lambda I)$, por el método de Leverrier-Faddeeva .
- extraer la i-ésima columna de la matriz adjunta de $(A - \lambda I)$, para ser utilizado como vector característico.
- Imprimir resultados .

SEXTO:

Implantación : en base al algoritmo propuesto es implantado , mediante algún lenguaje de programación de alto nivel, el correspondiente sistema para procesar información expresada a través de matrices cuadradas , y presentar una solución al problema que representa .

IV.1 ALGORITMO DE LEVERRIER-FADDEEVA Y EXTENSION PARA SOLUCION ESPECTRAL

Antes de escribir el algoritmo (completo) para procesar matrices cuadradas , es conveniente seccionar el algoritmo de Leverrier-Faddeeva (II.2) en dos procesos : del paso 1 al paso 1.3 corresponde al cálculo de los coeficientes del polinomio característico y matriz adjunta además del determinante ; del paso 4 al paso 7 corresponde al cálculo de la matriz inversa , impresión del polinomio característico , impresión de matrices e impresión del determinante .

Así , pues , el algoritmo se divide en dos :

- Algoritmo de Leverrier-Faddeeva;
- Algoritmo de depuración .

El algoritmo de Newton-Raphson , permanece sin cambio alguno , al igual que el algoritmo para calcular los vectores característicos (III.2) .

ALGORITMO DE LEVERRIER-FADDEEVA.

OBJETIVO :calcular el polinomio característico $P\langle\lambda\rangle$;
la matriz adjunta $\Gamma\langle A\rangle$;
el determinante $DET\langle A\rangle$.

DATOS DE ENTRADA : orden de la matriz, elementos de la matriz A.

```
PASO 1 : INICIALIZAR P<1>=1.0 y
                     B   =A   ;
PASO 2 : PARA I = 1,...,ORDEN-MATRIZ - 1   HACER desde el paso 2.1 al 2.5 :
         PASO 2.1 : TRAZA  = TR(B) / I ;
         PASO 2.2 : P(I+1) = -TRAZA ;
         PASO 2.3 : PARA J = 1,...,ORDEN-MATRIZ  HACER el paso 2.3.1 :
                    PASO 2.3.1 B(J,J)=B(J,J)-TRAZA;
         PASO 2.4 : SI  I = (ORDEN-MATRIZ - 1) ENTONCES hacer el paso 2.4.1 :
                    PASO 2.4.1 : MATRIZ-ADJUNTA = B .
         PASO 2.5 : B = A*B ;
PASO 3 : P(ORDEN-MATRIZ + 1) =  -B(1,1) ;
```

ALGORITMO DE DEPURACION .

OBJETIVO : calcular la matriz inversa si y solo si es una matriz no singular.

DATOS DE ENTRADA : matriz adjunta , determinante , polinomio caracteristico .

SALIDA : determinante , matriz adjunta y/o inversa , polinomio caracteristico.

PASO 1 : DETERMINATE = -B(1,1) ;

PASO 2 : IMPRIME : MATRIZ-ADJUNTA ;

PASO 3 : SI ABS(DETERMINANTE) > 0 ENTONCES hacer del paso 3.1 al 3.2 :

PASO 3.1 : MATRIZ-INVERSA = (1.0/DETERMINANTE)*MATRIZ-ADJUNTA ;

PASO 3.2 : IMPRIME : MATRIZ-INVERSA

EN CASO CONTRARIO hacer el paso 3.3 :

PASO 3.3 IMPRIME : "EL DETERMINANTE ES IGUAL A CERO " ,

"NO EXISTE MATRIZ INVERSA".

PASO 4 : IMPRIME : " POLINOMIO CARACTERISTICO : " , P(1),....,P(N) .

ALGORITMO DE LEVERRIER-FADDEEVA PARA SOLUCION ESPECTRAL .

OBJETIVO : calcular los coeficientes del polinomio caracteristico ;
la matriz adjunta ;
la matriz inversa;
los valores caracteristicos;
los vectores caracteristicos.

DATOS DE ENTRADA : orden de la matriz , elementos de la matriz A .

PASO 1 : LEE-DATOS DE ENTRADA ;

PASO 2 : APLICAR : ALGORITMO DE LEVERRIER-FADDEEVA ;

PASO 3 : APLICAR : ALGORITMO DE DEPURACION ;

PASO 4 : APLICAR : ALGORITMO DE NEWTON-RAPHSON;

PASO 5 : APLICAR : ALGORITMO DE VECTORES-CARACTERISTICOS ;

PASO 6 : TERMINA PROCESOS .

IV.2 IMPLANTACION Y DOCUMENTACION.

Antes de pasar a la codificación del algoritmo desarrollado hasta aquí, considero conveniente enumerar algunas razones por las cuales se debe seleccionar uno u otro lenguaje de programación. Y presentar la correspondiente documentación del sistema.

1.- La computadora donde es desarrollado e instalado el sistema.

2.- El lenguaje de programación con el que es desarrollado el sistema. Este puede ser FORTRAN, ALGOL, PASCAL o algún otro lenguaje de programación adecuado para realizar cálculos numéricos.

3.- Ventajas y desventajas de uno u otro lenguaje de programación.

4.- Conocimiento del lenguaje a utilizar.

5.- Calidad de presentación.

6.- Portabilidad.

7.- Estructural y autodescriptivo.

Es por ello que el algoritmo de Leverrier-Faddeeva para solución espectral, fue codificado en dos lenguajes de programación (FORTRAN, PASCAL). El primero lo desarrolle en un equipo Burroughs 1800 (véase apéndice A) y el segundo en una microcomputadora PC (compatible con otros sistemas operativos) en lenguaje PASCAL.

Con esta útilma implantación, son procesados todos los problemas planteados en el capítulo V. También se ha obtenido una mejor calidad de presentación, portabilidad, estructuración y autodescripción.

La versión en FORTRAN, más compacta, queda para aquellos lectores que prefieran programar en dicho lenguaje, el cual espero les sea de utilidad.

Por ultimo , la documentacion del sistema[26] servira al lector como guia , y rapida identificacion , del flujo de informacion a traves del sistema . Los elementos que componen esta documentacion son :

- DIAGRAMA GENERAL JERARQUICO . Su objetivo es mostrar todos los modulos que conforman el sistema . Este tipo de diagrama es producto de la tecnica de analisis TOP-DOWN (DE ARRIBA ABAJO).

- DIAGRAMA GENERAL DE PROCESO . El proposito , de este diagrama , es mostrar el flujo de informacion a traves de entradas y salidas de cada modulo del sistema .

- DIAGRAMA DE WARNIER . Presenta una relacion y referencia de los modulos del sistema , que permite guiar al usuario directamente a la pagina de referencia del modulo del sistema en el listado del programa fuente.

- LISTADO DEL PROGRAMA FUENTE . En dicho listado se muestra la codificacion del sistema en lenguaje de programacion de alto nivel (PASCAL).

DIAGRAMA GENERAL JERARQUICO

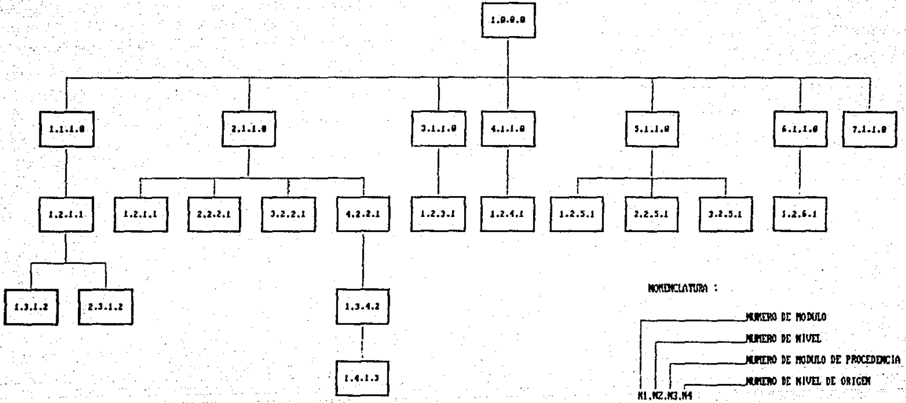


Fig. 1 Sistema Leverrier-Faddeeva para Solución Espectral.

DIAGRAMA DE WARNIER

DIAGRAMA GENERAL DE PROCESO

ENTRADAS **PROCESO** **SALIDA**

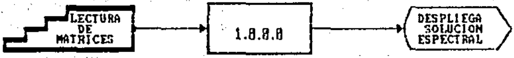


Fig. 2. Módulo principal del sistema de Leverrier-Faddeeva.

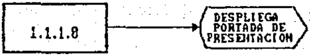


Fig. 3. Módulo de presentación de portada .

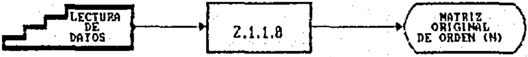


Fig. 4. Módulo de lectura de elementos de la matriz.

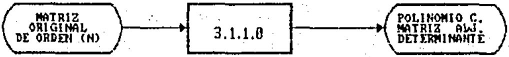


Fig. 5. Módulo del método de Leverrier-Faddeeva .

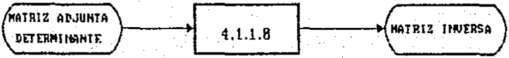


Fig. 6. Módulo para calcular la matriz inversa.

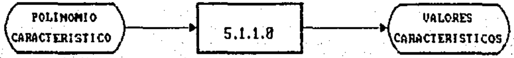


Fig. 7. Módulo para calcular los valores característicos.

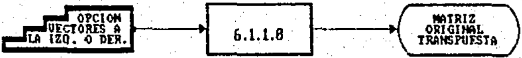


Fig. 8. Módulo para seleccionar el cálculo de vectores caract.

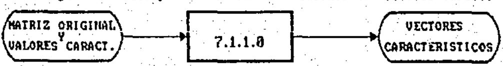
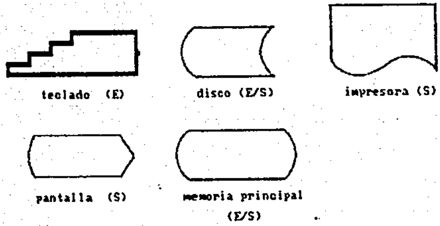


Fig. 9. Módulo para calcular los vectores característicos.

SIMBOLOS DE DIAGRAMACION

Símbolos de diagramación para dispositivos de entrada salida (E/S).



Otros símbolos de diagramación.

Fig. 10 Símbolos de diagramación.

```
{METODO DE LEVERRIER-FADDEEVA PARA SOLUCION ESPECTRAL

 OBJETIVO : CALCULAR EL POLINOMIO CARACTERISTICO ;
                     LA MATRIZ ADJUNTA ;
                     EL DETERMINANTE DEL SISTEMA;
                     LA MATRIZ INVERSA;
                     LA MATRIZ UNITARIA PARA CHECAR QUE
                      LA MATRIZ INVERSA HA SIDO CORRECTAMENTE CALCULADA
                     LOS VALORES CARACTERISTICOS
                     LOS VECTORES CARACTERISTICOS
                         (POR LA  IZQUIERDA  O POR  LA  DERECHA)
}


PROGRAM MFPSE;
TYPE
   MATRIZ            = ARRAY [1..20,1..20] OF REAL;
   VECTOR            = ARRAY [1..20] OF REAL;
   VALOR_COMPLEJO1   = RECORD
                          a,bi :ARRAY [1..20] OF REAL;
                       END;
   VALOR_COMPLEJO2   = RECORD
                          c,di : real
                       END;
   MENSAJE           = STRING[80];
   CADENA            = STRING[20];
   TITULOS           = ARRAY[1..19]         OF STRING[45];
   INDICES           = 0..20;
   LETRAS            = STRING[40];

CONST
   TITULO : TITULOS = ('Metodo de Faddeeva para Soluci"n Espectral',
                       'Matriz ORIGINAL del sistema ..............',
                       'Matriz adjunta ...........................',
                       'Determinante del sistema .................',
                       'Matriz inversa ...........................',
                       'Matriz unitaria del producto A*A^(-1).....',
                       'El determiante es cero... No hay inversa .',
                       'Matriz Caracteristica ( A - aI) ..........',
                       'Matriz Hermitiana ........................',
                       'Matriz Hemi-hermitiana ...................',
                       'Polinomio Caracteristico .................',
                       'Valores Caracteristicos...................',
                       'Vectores Caracteristicos .................',
                       'Matriz Base Caracteristica................',
                       'Solucion X = A^(-1)*B ....................',
                       'El orden de la matriz es :               ',
                       'Error Relativo :                         ',
                       'Epsilon de aproximacion :                ',
                       '........ Termina Metodo Faddeeva .........');
   NUMERO_MAX_ITERACIONES = 300;
   APROXIMACION           = 1.0E-6;
   EPSILON                = 1.0E-3;
```

```
   {Variables globales }
VAR
    MATRIZ_ORIGINAL      ,
    MATRIZ_B     ,
    MATRIZ_C     ,
    MATRIZ_BASE ,
    MATRIZ_ADJUNTA              : MATRIZ          ;
    POLINOMIO_CARACTERISTICO,
    PL1,
    PL2,
    VALOR_CARACTERISTICO        : VALOR_COMPLEJO1 ;
    VECTOR_D                    : VECTOR;
    COL,
    REN,
    ORDEN_MATRIZ       ,
    GRADO_POLINOMIO    ,
    N_RAIZ             ,
    N_TERMINOS         ,
    ITERACIONES                 : INTEGER         ;
    VALOR_MAXIMO       ,
    ERROR_RELATIVO     ,
    DETERMINANTE       ,
    TRAZA                       : REAL            ;
    I,J,K                       : INDICES         ;
    RAIZ_X                      : VALOR_COMPLEJO2 ;
    DATOS                       : CADENA          ;
    LETRERO                     : MENSAJE         ;
```

```
{OBJETIVO  DE LA FUNCION :  HACER UN LLAMADO AL SISTEMA PARA CONOCER  LA
                            FECHA ACTUAL ,Y CALCULAR EL NOMBRE DEL DIA
                            DE LA SEMANA, Y EL NOMBRE DEL MES}

FUNCTION FECHA : LETRAS ;{1.3.1.2}
TYPE
   REGISTROS = RECORD
               AX,BX,CX,DX,BP,SI,DS,ES,FLAGS:INTEGER;
               END;
   INDICES = 0..6;

CONST
    TOTAL_DIAS:ARRAY[1..12] OF INTEGER =
                               (31.28,31,30,31,30,31,31,30,31,30,31);
    NOMBRE_MES:ARRAY[1..12] OF STRING[10]=
                               ('ENERO','FEBRERO'.'MARZO','ABRIL'.
                                'MAYO','JUNIO','JULIO','AGOSTO',
                                'SEPTIEMBRE','OCTUBRE','NOVIEMBRE',
                                'DICIEMBRE');
    NOMBRE_DIAS:ARRAY[0..6] OF STRING[9]=
                               ('Lunes','Martes','Miercoles','Jueves',
                                'Viernes','Sabado','Domingo');

VAR
   REGISTRO : REGISTROS ;
   MES,DIA  : STRING[2];
   ANIO     : STRING[4];
   DX,CX ,X_DIAS , ERROR.
   A,M,D    : INTEGER;
   INDICE_I : INDICES;
   INDICE_J : INTEGER;
BEGIN
   REGISTRO.AX :=$2A SHL 8;
   MSDOS(REGISTRO);
   WITH REGISTRO DO
   BEGIN
       STR(CX,ANIO); STR(DX MOD 256 , DIA); STR(DX SHR 8 , MES);
   END;
   VAL(ANIO,A,ERROR);
   VAL(MES ,M,ERROR);
   VAL(DIA ,D,ERROR);
   X_DIAS := 0;
   IF (A-1900) = 0 THEN  X_DIAS := X_DIAS + 1
   ELSE  X_DIAS := (365*(A-1900)) + ((A-1901) DIV 4) + D;
   FOR INDICE_J := 1 TO M-1 DO
       X_DIAS := X_DIAS + TOTAL_DIAS[INDICE_J];
   FECHA:=NOMBRE_DIAS[X_DIAS MOD 7] + '  '+DIA+ ' , ' + NOMBRE_MES[M] +
                                    ' de ' + ANIO;

END;
```

```
{OBJETIVO  DE LA FUNCION :  REALIZAR LLAMADOS AL SISTEMA PARA INDICAR LA
                            HORA DEL DIA ACTUAL}

FUNCTION HORAS : LETRAS ;   {2.3.1.2}
TYPE
   REGISTROS = RECORD
               AX,BX,CX,DX,BP,DI,SI,DS,ES,FLAGS : INTEGER;
               END;
VAR
   REGISTRO : REGISTROS;
   AH,AL,CH,CL,DH:BYTE;
   HORA,MINUTO,SEGUNDO:STRING[2];
BEGIN
   AH :=$2C;
   REGISTRO.AX:=AH SHL 8 + AL ;
   INTR($21,REGISTRO);
   WITH REGISTRO DO
   BEGIN
    STR(CX SHR 8 , HORA); STR(CX MOD 256 , MINUTO);
    STR(DX SHR 8 ,SEGUNDO)
   END;
   HORAS := HORA + ':' +MINUTO+':'+SEGUNDO
END;
```

{OBJETIVO : INICIALIZAR A CERO CADA VARIABLE UTILIZADA DURANTE EL PROCESO DE CALCULO}

```
PROCEDURE INICIALIZA_ARREGLOS(N:INTEGER);{1.2.2.1}
BEGIN
   FOR I := 1 TO N DO
   BEGIN
     POLINOMIO_CARACTERISTICO.a [I]:=0.0;
     POLINOMIO_CARACTERISTICO.bi[I]:=0.0;
     PL1.a [I]:=0.0;
     PL1.bi[I]:=0.0;
     PL2.a [I]:=0.0;
     PL2.bi[I]:=0.0;
     VALOR_CARACTERISTICO.a [I]:=0.0;
     VALOR_CARACTERISTICO.bi[I]:=0.0;
     FOR J := 1 TO N DO
     BEGIN
        MATRIZ_ORIGINAL[I,J]:=0.0;
        MATRIZ_C       [I,J]:=0.0;
        MATRIZ_B       [I,J]:=0.0;
        MATRIZ_ADJUNTA [I,J]:=0.0;
        MATRIZ_BASE    [I,J]:=0.0;
     END
   END
END;
```

{OBJETIVO : INTERUMPIR EL PROCESO DE CALCULO , PARA VISUALIZAR LOS RESULTADOS PARCIALES QUE APARECEN EN LA PANTALLA}

```
PROCEDURE CONGELA_PANTALLA;{1.4.1.1}
BEGIN
WRITELN;
WRITE('PARA CONTINUAR , PULSE CUALQUIER TECLA');
REPEAT UNTIL KEYPRESSED
END;
```

(* OBJETIVO : DESPLEGAR MENSAJES Y RESULTADOS EN LA PANTALLA *)

```
PROCEDURE MENSAJES(COLUMNA,RENGLON : INTEGER : MSG:MENSAJE);
BEGIN
     GOTOXY(COLUMNA,RENGLON);
     WRITELN(MSG);
END;
```

6

```
{OBJETIVO : DESPLEGAR EN PANTALLA LOS RESULTADOS PARCIALES , OBTENIDOS A
            TRAVES DE MATRICES }

PROCEDURE IMPRESION(VAR MATRIX : MATRIZ ; APUNTADOR : INTEGER);
VAR
   I1,J1:INDICES;
BEGIN
   CLRSCR;
   MENSAJES(3,1,LETRERO + '   .   ' + HORAS + ' Hrs');
   MENSAJES(3,5,TITULO[APUNTADOR]);
   FOR I1 := 1 TO ORDEN_MATRIZ DO
   BEGIN
      FOR J1 := 1 TO ORDEN_MATRIZ DO
          WRITE(MATRIX[I1,J1]:6:8, ' ');
      WRITELN
   END;
   WRITELN;
   CONGELA_PANTALLA;
END;
{OBJETIVO  : LEER LOS CORRESPONDIENTES ELEMENTOS DE LA MATRIZ DE  INSUMO
             PRODUCTO}

FUNCTION ELEMENTO : REAL;
VAR
  ERROR : INTEGER;
  ELEMENTO1 : REAL;
BEGIN
    REPEAT
        ERROR := 0;GOTOXY(COL,REN); DATOS := '';
        READ(DATOS);
        IF DATOS = '' THEN
            DATOS := DATOS + '0.0';
        VAL(COPY(DATOS,1,LENGTH(DATOS)),ELEMENTO1,ERROR);
    UNTIL ERROR = 0;
    ELEMENTO := ELEMENTO1;
    COL := LENGTH(DATOS) + 4 + COL
 END;

 {OBJETIVO : INTRODUCIR LOS ELEMENTOS A LA MATRIZ DE INSUMO-PRODUCTO}

 PROCEDURE LEE_MATRIZ ;
 BEGIN
  REN := 9 ;
  MENSAJES(13,8,'TECLEE RENGLON POR RENGLON,LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ');
  FOR I := 1 TO ORDEN_MATRIZ DO
  BEGIN
   COL := 1 ;REN:=REN+1;
   FOR J := 1 TO ORDEN_MATRIZ DO
   BEGIN
    MATRIZ_ORIGINAL[I,J] := ELEMENTO;
    MATRIZ_B[I,J] := MATRIZ_ORIGINAL[I,J]
   END
  END
 END;
```

```
{OBJETIVO  :  DETERMINAR EL TIPO DE MATRIZ A PROCESAR , Y ASIGNARLE  UN
              NOMBRE}

PROCEDURE TIPO_MATRIZ ;
VAR
   HERMITIANA , HEMI_HERMITIANA  : INTEGER;
BEGIN
   HERMITIANA := 0 ; HEMI_HERMITIANA := 0;
   FOR I := 1 TO ORDEN_MATRIZ DO
       FOR J := 1 TO ORDEN_MATRIZ DO
           IF MATRIZ_ORIGINAL[I,J] = MATRIZ_B[J,I] THEN
              HERMITIANA := HERMITIANA + 1
           ELSE
              IF MATRIZ_ORIGINAL[I,J] = (-1.0*MATRIZ_B[J,I]) THEN
                 HEMI_HERMITIANA := HEMI_HERMITIANA + 1;
    IF HERMITIANA = SQR(ORDEN_MATRIZ) THEN
       IMPRESION(MATRIZ_ORIGINAL,9)
    ELSE
       IF HEMI_HERMITIANA = SQR(ORDEN_MATRIZ) THEN
          IMPRESION(MATRIZ_ORIGINAL,10)
       ELSE
          IMPRESION(MATRIZ_ORIGINAL , 2)
END;


 {OBJETIVO : EFECTUAR EL PRODUCTO DE MATRICES }

 PROCEDURE MULTIPLICA_MATRICES;
 VAR
    I1,J1,K1:INDICES;
 BEGIN
  FOR I1 := 1 TO ORDEN_MATRIZ DO
    FOR J1 := 1 TO ORDEN_MATRIZ DO
    BEGIN
     MATRIZ_C[I1,J1]:= 0.0;
     FOR K1 := 1 TO ORDEN_MATRIZ DO
      MATRIZ_C[I1,J1]:=MATRIZ_C[I1,J1]+
                         MATRIZ_ORIGINAL[I1,K1]*MATRIZ_B[K1,J1]
    END
 END;
```

```
{OBJETIVO  :  APLICAR EL METODO DE LEVERRIER-FADDEEVA PARA CALCULAR  LOS
              COEFICIENTES  DEL POLINOMIO CARACTERISTICO Y  CALCULAR  LA
              MATRIZ ADJUNTA}

PROCEDURE METODO_FADDEVVA;
BEGIN
   WITH POLINOMIO_CARACTERISTICO  DO
   BEGIN
      a[1]:= 1.0;
      bi[1]:= 0.0;
      FOR I:= 1 TO ORDEN_MATRIZ -1 DO
      BEGIN
         TRAZA:= 0.0;
         FOR J:= 1 TO ORDEN_MATRIZ DO
            TRAZA:=  TRAZA + MATRIZ_B[J,J];
         a [I+1]:= - TRAZA / INT(I);
         TRAZA:= -a [I+1];
         bi[I+1]:=   0.0;
         FOR J := 1 TO ORDEN_MATRIZ DO
            MATRIZ_B[J,J] := MATRIZ_B[J,J] - TRAZA;
         IF I = (ORDEN_MATRIZ - 1) THEN
            FOR K := 1 TO ORDEN_MATRIZ DO
               FOR J := 1 TO ORDEN_MATRIZ DO
                  MATRIZ_ADJUNTA[K,J]:=MATRIZ_B[K,J];
         MULTIPLICA_MATRICES;
         FOR K := 1 TO ORDEN_MATRIZ DO
            FOR J := 1 TO ORDEN_MATRIZ DO
               MATRIZ_B[K,J] := MATRIZ_C[K,J]
      END;
      a [ORDEN_MATRIZ+1] := -MATRIZ_C[1,1];
      bi[ORDEN_MATRIZ+1] := 0.0;
   END
END;
```

```
{OBJETIVO : DESPLEGAR EN PANTALLA EL POLINOMIO CARACTERISTICO }

PROCEDURE IMPRIME_POLINOMIO_C;
BEGIN
 CLRSCR;
 MENSAJES(3,1,LETRERO + '   .   ' + HORAS + ' Hrs');
 MENSAJES(1,10 ,TITULO[11]);
 WRITELN;WRITE('P(') =  ');
 FOR I := 1 TO ORDEN_MATRIZ - 1 DO
 BEGIN
  WRITE(POLINOMIO_CARACTERISTICO.a[I]:6:8 ,' ^',
      (ORDEN_MATRIZ + 1) - I,'  ');
  IF POLINOMIO_CARACTERISTICO.a[I+1] > 0.0 THEN WRITE(' + ')
 END;
 WRITE(POLINOMIO_CARACTERISTICO.a[ORDEN_MATRIZ]:6:8,'   ');
 IF POLINOMIO_CARACTERISTICO.a[ORDEN_MATRIZ + 1] > 0.0 THEN
    WRITE(' + ');
 WRITE(POLINOMIO_CARACTERISTICO.a[ORDEN_MATRIZ + 1]:6:8 );
 CONGELA_PANTALLA;
END;

{OBJETIVO  :  CALCULAR LA MATRIZ INVERSA
               (SI LA MATRIZ ES NO-SINGULAR )

PROCEDURE DEPURA_INFORMACION;
BEGIN
    IMPRESION(MATRIZ_ADJUNTA,3);
    DETERMINANTE := MATRIZ_C[1,1];
    IF ABS(DETERMINANTE) > APROXIMACION THEN
    BEGIN
        IMPRESION(MATRIZ_C,4);
        DETERMINANTE := 1.0/DETERMINANTE;
        FOR I := 1 TO ORDEN_MATRIZ DO
           FOR J := 1 TO ORDEN_MATRIZ DO
           MATRIZ_B[I,J]:= DETERMINANTE*MATRIZ_ADJUNTA[I,J];
        IMPRESION(MATRIZ_B,5);
        MULTIPLICA_MATRICES;
        IMPRESION(MATRIZ_C,6);
    END
    ELSE
        IMPRESION(MATRIZ_C,7);
     IMPRIME_POLINOMIO_C  ;
END;
```

```
(OBJETIVO  :  EL  SIGUIENTE GRUPO DE PROCEDIMIENTOS SIRVE PARA  EFECTUAR
              ARITMETICA COMPLEJA (SUMA , PRODUCTO , COCIENTE) )

PROCEDURE SUMAR(VAR RESULTADO:VALOR_COMPLEJO2;A,B,C,D:REAL);
BEGIN
    RESULTADO.C  := A + C;
    RESULTADO.DI := B + D
END;


PROCEDURE MULTIPLICACION(VAR RESULTADO:VALOR_COMPLEJO2:A.B.C,D:REAL);
BEGIN
    RESULTADO.C  := A*C - B*D;
    RESULTADO.DI := A*D + B*C
END;

PROCEDURE DIVIDE(VAR  RESULTADO:VALOR_COMPLEJO2 ; A,B,C.D:REAL);
BEGIN
    RESULTADO.C :=  (A*C - B*D) / (SQR(C) + SQR(D));
    RESULTADO.DI:=  (A*D + B*C) / (SQR(C) + SQR(D))
END;
```

```
{OBJETIVO : CALCULAR TODOS LOS VALORES CARACTERISTICOS }

PROCEDURE CALCULA_VALORES_CARAC;
VAR
    PRODUCTO,DIVISION,SUMA : VALOR_COMPLEJO2;
    AJUSTE : REAL;
BEGIN
 N_TERMINOS := ORDEN_MATRIZ + 1 ;
 GRADO_POLINOMIO := ORDEN_MATRIZ;
 FOR N_RAIZ := 1 TO GRADO_POLINOMIO DO
 BEGIN
  RAIZ_X.c := 0.0;
  RAIZ_X.di:= 1.0;
  ITERACIONES := 0;
  REPEAT
   ITERACIONES := ITERACIONES + 1;
   PL1.a[1] := POLINOMIO_CARACTERISTICO.a[1];
   PL1.bi[1]:= POLINOMIO_CARACTERISTICO.bi[1];
   FOR I := 2 TO N_TERMINOS DO
   BEGIN
    MULTIPLICACION(PRODUCTO,RAIZ_X.c,RAIZ_X.di,PL1.a[I-1],PL1.bi[I-1]);
    PL1.a[I] := POLINOMIO_CARACTERISTICO.a[I]  + PRODUCTO.c ;
    PL1.bi[I]:= POLINOMIO_CARACTERISTICO.bi[I] + PRODUCTO.di;
   END;
   PL2.a [1] := PL1.a [1];
   PL2.bi[1] := PL1.bi[1];
   FOR I := 2 TO N_TERMINOS - 1 DO
   BEGIN
    MULTIPLICACION(PRODUCTO,RAIZ_X.c,RAIZ_X.di,PL2.a[I-1],PL2.bi[I-1]);
    PL2.a[I] := PL1.a[I] + PRODUCTO.c;
    PL2.bi[I]:= PL1.bi[I]+ PRODUCTO.di;
   END;
                  { Y =  X - (PL1[N] / PL2[M])  }
   DIVIDE(DIVISION,PL1.a[N_TERMINOS]  , PL1.bi[N_TERMINOS],
                   PL2.a[N_TERMINOS-1],-PL2.bi[N_TERMINOS-1]);
   VALOR_CARACTERISTICO.a [N_RAIZ] := RAIZ_X.c  - DIVISION.c;
   VALOR_CARACTERISTICO.bi[N_RAIZ] := RAIZ_x.di  - DIVISION.di;
                  {n = (X - Y)/Y }
   SUMAR(SUMA,RAIZ_X.c,RAIZ_X.di,-VALOR_CARACTERISTICO.a [N_RAIZ],
                                 -VALOR_CARACTERISTICO.bi[N_RAIZ]);
   DIVIDE(DIVISION,SUMA.c,SUMA.di,VALOR_CARACTERISTICO.a [N_RAIZ],
                                  VALOR_CARACTERISTICO.bi[N_RAIZ]);
   ERROR_RELATIVO:=ABS( DIVISION.c);
   IF  APROXIMACION < ERROR_RELATIVO THEN
   BEGIN
    RAIZ_X.c := VALOR_CARACTERISTICO.a[N_RAIZ];
    RAIZ_X.di:= VALOR_CARACTERISTICO.bi[N_RAIZ]
   END
   ELSE
    BEGIN
     FOR I := 2 TO N_TERMINOS - 1 DO
     BEGIN
      POLINOMIO_CARACTERISTICO.a[I] := PL1.a[I];
      POLINOMIO_CARACTERISTICO.bi[I]:= PL1.bi[I]
     END;
```

{ CONTINUA PROCEDIMIENTO PARA CALCULAR LOS VALORES CARACTERISTICOS}

```
     N_TERMINOS := N_TERMINOS - 1
 END;
 UNTIL (APROXIMACION >= ERROR_RELATIVO) OR
              (ITERACIONES >= NUMERO_MAX_ITERACIONES);
 IF APROXIMACION < ERROR_RELATIVO THEN
 BEGIN
  MENSAJES(20,15,'ERROR. NO CONVERGE EL METODO ');
  HALT
 END
END;
CLRSCR;
MENSAJES(1,5,LETRERO + '   .   ' + HORAS + ' Hrs');
MENSAJES(1,8,TITULO[12]);
FOR I := 1 TO GRADO_POLINOMIO DO
BEGIN
 AJUSTE := ABS (FRAC(VALOR_CARACTERISTICO.a[I]));
 IF AJUSTE < 1.0E-3 THEN
    VALOR_CARACTERISTICO.a[I] := TRUNC(VALOR_CARACTERISTICO.a[I]);
 WRITE('',I ,'  = ' ,VALOR_CARACTERISTICO.a[I]:6:8);
 IF ABS(VALOR_CARACTERISTICO.bi[I]) > EPSILON THEN
 BEGIN
  IF VALOR_CARACTERISTICO.bi[I] >= 0.0 THEN   WRITE(' + ');
  WRITE('    ',VALOR_CARACTERISTICO.bi[I]:6:8,CHR(173) )
 END;
 WRITELN;
 END;
 CONGELA_PANTALLA;
END;
```

```
{OBJETIVO  :  TRANSPONER  LA MATRIZ INSUMO-PRODUCTO  PARA  CALCULAR  LOS
              VECTORES  CARACTERISTICOS POR LA IZQUIERDA}

PROCEDURE TRANSPONE_MATRIZ;
BEGIN
   FOR I := 1 TO ORDEN_MATRIZ DO
       FOR J := 1 TO ORDEN_MATRIZ DO
           MATRIZ_B[J,I] := MATRIZ_ORIGINAL[I,J];
   FOR I := 1 TO ORDEN_MATRIZ DO
       FOR J := 1 TO ORDEN_MATRIZ DO
       MATRIZ_ORIGINAL [I,J] := MATRIZ_B[I,J]
END ;


 {OBJETIVO :  PREGUNTAR SI SE DESEA CALCULAR LOS VECTORES CARACTERISTICOS
              POR LA IZQUIERDA O POR LA DERECHA}

 PROCEDURE  VC_P_I_D ;
 VAR
    CARACTER : CHAR;
 BEGIN
  CLRSCR ;
  MENSAJES(3,1,LETRERO('  .   '+HORAS + ' Hrs.'));
  MENSAJES(10,12,'LOS VECTORES A CALCULAR , SON POR LA IZQUIERDA O',
                 +' POR LA DERECHA?');
  CARACTER := ' ';
  REPEAT
   READ(KBD , CARACTER);
  UNTIL UPCASE(CARACTER) IN ['I','D'];
  IF UPCASE(CARACTER) = 'I'  THEN  TRANSPONE_MATRIZ;
 END;
```

```
{OBJETIVO : CALCULAR LOS VECTORES CARACTERISTICOS ASOCIADOS A CADA VALOR
            CARACTERISTICO }

PROCEDURE CALCULA_VECTORES_CARAC;
VAR
  I1,J1,K1:INDICES;
  K2: INTEGER;
BEGIN
   K2:= 0;
   FOR I1 :=1 TO ORDEN_MATRIZ DO
       VECTOR_D[I1] := MATRIZ_ORIGINAL[I1,I1];
   FOR I1 := 1 TO ORDEN_MATRIZ DO
   BEGIN
       IF EPSILON >= ABS(VALOR_CARACTERISTICO.bi[I1]) THEN
       BEGIN
          FOR K1 := 1 TO ORDEN_MATRIZ DO
             FOR J1 := 1 TO ORDEN_MATRIZ DO
                 MATRIZ_B[K1,J1] := MATRIZ_ORIGINAL[K1.J1];
          FOR K1 := 1 TO ORDEN_MATRIZ DO
          BEGIN
             MATRIZ_ORIGINAL[K1,K1] := MATRIZ_ORIGINAL[K1,K1] -
                                   VALOR_CARACTERISTICO.a[I1];
             MATRIZ_B[K1,K1] := MATRIZ_ORIGINAL[K1,K1]
             END;
          METODO_FADDEVVA;
          IMPRESION(MATRIZ_ORIGINAL,8);
          IMPRESION(MATRIZ_ADJUNTA,3) ;
          K2:=K2+1;
          FOR J1 := 1 TO ORDEN_MATRIZ DO
             MATRIZ_BASE[J1,K2] := MATRIZ_ADJUNTA[J1,K2];
          FOR J1 := 1 TO ORDEN_MATRIZ DO
             MATRIZ_ORIGINAL[J1,J1]:= VECTOR_D[J1]
       END
       ELSE
           MENSAJES(1,10,'POR EL MOMENTO SOLO VALORES REALES');
    END;
    IMPRESION(MATRIZ_BASE,14)
 END;
```

```
(OBJETIVO  :  INICIALIZAR TODAS LAS VARIABLES UTILIZADAS EN  EL
              PROGRAMA , LEER LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ Y
              DETERMINAR  EL  TIPO  DE MATRIZ  QUE  SE  VA  A
              PROCESAR .)

PROCEDURE  INICIALIZA;
BEGIN
   CLRSCR;
   LETRERO := FECHA ;
   MENSAJES(3,1,LETRERO + ' . ' + HORAS + 'Hrs');
   MENSAJES(10,4,TITULO[16]);
   COL:=56;REN:=4;
   ORDEN_MATRIZ :=TRUNC(ELEMENTO);
   INICIALIZA_ARREGLOS(ORDEN_MATRIZ);
   LEE_MATRIZ;
   TIPO_MATRIZ
END;

(OBJETIVO : DESPLEGAR PORTADA DE PRESENTACION DEL SISTEMA DE
            LEVERRIER-FADDEEVA PARA SOLUCION ESPECTRAL)


PROCEDURE PORTADA;
BEGIN
   CLRSCR;
   MENSAJES(20,5, 'UNIVERSIDAD  NACIONAL  AUTONOMA  DE  MEXICO');
   MENSAJES(20,6, '--------------------------------------------');
   MENSAJES(20,7, 'ESCUELA  NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES');
   MENSAJES(20,8, '              "A C A T L A N"               ');
   MENSAJES(20,13,'              METODO  DE  LEVERRIER-FADDEEVA');
   MENSAJES(20,14,'              PARA  SOLUCION  ESPECTRAL     ');
   MENSAJES(20,19,'              PRESENTA :');
   MENSAJES(20,20,'              LEON HERNANDEZ FRANCISCO');
   MENSAJES(20,24,'      SANTA CRUZ ACATLAN EDO. DE MEXICO 1988');
   CONGELA_PANTALLA
END;

{ OBJETIVO :  CONTROLAR LA SECUENCIA DEL PROCESO DE  LEVERRIER-FADDEEVA
              PARA  SOLUCION ESPECTRAL}


BEGIN { PROGRAMA PRINCIPAL}
   PORTADA;
   INICIALIZA;
   METODO_FADDEVVA;
   DEPURA_INFORMACION;
   CALCULA_VALORES_CARAC;
   VC_P_I_D ;
   CALCULA_VECTORES_CARAC;
END.
```

IV.3 EVALUACION DEL METODO

De los ejemplos presentados aquí , todos ellos de aplicación diversa , han sido resueltos con el método de Leverrier-Faddeeva , proporcionando cada uno de los resultados descritos al inicio de este trabajo , cumpliendo así con el objetivo del método :

"LA GENERALIDAD" .

En el mismo orden de ideas , las particularidades de cada problema han sido cubiertas satisfactoriamente por el método . Ofreciendo con esto un enorme potencial para un análisis más completo y detallado de problemas planteados a través de modelos matriciales .

CAPITULO V

APLICACIONES Y RESULTADOS

"... DEDICARSE AL ANALISIS MATEMATICO , Y
AL PROPIO TIEMPO VOLVER LA ESPALDA
A SUS APLICACIONES Y A LA INTUICION ,
ES CONDENARLA A UNA ATROFIA INEVITABLE."

R. COURANT

APLICACIONES Y RESULTADOS .

El objetivo de este capítulo , es mostrar algunas áreas del conocimiento dónde puede aplicarse el método de Leverrier-Faddeeva.

V.1 ECONOMÍA.

Areas del conocimiento donde algunos problemas pueden ser expresados a través de modelos matriciales , son por ejemplo : en estudios de macroeconomía , donde el análisis de entradas y salidas se efectua a través de matrices de vinculación (producción y venta) , digamos en el sector industrial , donde b_{ij} son las ventas de la industria i a la industria j y b_{ii} la retención de los bienes producidos por la industria i. La venta de bienes , producida por la industria i, a usuarios externos es denotado por y_i y el total de salida por x_i $(Y_i+\sum_j b_{ij}=X_i)$. El siguiente paso es definir el coeficiente de entrada como : (b = Y +AX) . Usualmente se asume que la salida , en cada industria , cambia en una taza proporcional a la diferencia entre el nivel de ventas y el de producción por lo que el modelo dinámico tomaría la forma : $\dfrac{dx(t)}{dt} = D[(A-I)X(T) + Y(T)]$ donde D es una matriz diagonal de los coeficientes de reacción , de las industrias . Dicha ecuación es un modelo simple del comportamiento dinámico del sistema . Y la cuestión de estabilidad de los sistemas comienza a modelarse al determinar los vectores característicos de la matriz D(A-I) y así conocer el comportamiento de las soluciones del sistema , en particular , para este modelo la existencia de valores característicos con parte real positiva , puede indicar una inestabilidad en el sistema debido a que se requiere una mayor salida que , puede crecer exponencialmente con el tiempo .[19]

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

EJEMPLO[17]:

En la siguiente tabla se muestran las transacciones industriales entre la industria de transporte y de energéticos :

COMPRAS / VENTAS	DEMANDA INTERMEDIA TRANSPORTE	DEMANDA INTERMEDIA ENERGETICOS	DEMANDA FINAL	PRODUCCION BRUTA
TRANSPORTE	350	200	300	850
ENERGETICOS	400	520	550	1470

La primer columna representa las compras que la industria del transporte hace a sí misma y a la industria de energéticos , la segunda columna indica las compras de la industria de energéticos a la de transportes y a ella misma .

La finalidad de estas compras es producir bienes para satisfacer la demanda de los consumidores finales , cuyas compras (que no se emplean como insumos intermedios para producir otros bienes) muestra la tercera columna . La última columna es la suma de los renglones correspondientes y representa la cantidad total vendida a todos los sectores .

Debe observarse la interrelación de industrias , p.e. , para surtir la demanda final del consumidor , la industria de transporte debe comprar bienes a ella misma así como a la industria de energéticos .

Matriz de insumo-producto: $A = \begin{bmatrix} 350 & 250 \\ 400 & 520 \end{bmatrix}$ se transforma en la matriz de coeficientes técnicos :

$$B = \begin{bmatrix} 350/850 & 200/1470 \\ 400/850 & 520/1470 \end{bmatrix}$$

Para la cual se puede establecer la ecuación $(I-B)X=Y$,donde x es el vector de producción bruta : $[85,470]^T$; y es el vector de demanda bruta : $[300 ,550]$.

Si los incrementos previstos en la demanda final para el año siguiente son :

$\Delta Y = \begin{bmatrix} 50 \\ 150 \end{bmatrix}$ por lo que la demanda final será : $Y = \begin{bmatrix} 350 \\ 700 \end{bmatrix}$

Determinar los incrementos necesarios en el vector de producción bruta X para surtir la demanda , se obtiene : $X = (I-B)^{-1}Y$.

La matriz $(I-B)^{-1}$ recibe el nombre de matriz de requerimientos directos e indirectos por unidad de demanda final .

Obtener toda la información posible , aplicando el método de Leverrier–Faddeeva e interpretar resultados .

RESULTADOS:

De los resultados obtenidos por el metodo de Leverrier-Faddeeva para solucion espectral, la matriz inversa de $(I-B)^{-1}$ es :

$$\begin{bmatrix} 2.04438396 & -0.43037978 \\ -1.48868024 & 1.86875964 \end{bmatrix}$$

El correspondiente producto de $(I-B)^{-1}Y = X$, es :

$$\begin{bmatrix} 2.04438396 & -0.43037978 \\ -1.48868024 & 1.86875964 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 358 \\ 788 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 414 \\ 782 \end{bmatrix}$$

Asi , el incremento en la produccion bruta de las industrias es :

$$\Delta X = \begin{bmatrix} 414 \\ 782 \end{bmatrix} , \quad X = \begin{bmatrix} 85 \\ 470 \end{bmatrix} , \quad X + \Delta X = \begin{bmatrix} 499 \\ 1252 \end{bmatrix}$$

Como puede observarse , la produccion bruta crece un 376.5 % en promedio debido a a que el sistema es inestable segun se deduce de los correspondientes valores caracteristicos :

$\lambda_1 = 0.36255629$, $\lambda_2 = 0.87193753$

los cuales son positivos .

En resumen ,se verifica que se necesita una mayor produccion que tiende a crecer con el tiempo .

V.2 ECOLOGIA

Valores y vectores característicos en problemas ecológicos , p.e., depredador y presa , el cual puede representarse por el modelo matemático[21] :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

donde $N_1(t)$ es el número de predadores , $N_2(t)$ es el número de presas y a,b,c,d son constantes .

La solución a este sistema de ecuaciones diferenciales es de la forma :

$$\begin{bmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \end{bmatrix} = c_1X_1e^{\lambda_1 t} + c_2X_2e^{\lambda_2 t}$$

donde λ_1 y λ_2 son los valores característicos correspondientes a los vectores característicos X_1 y X_2 de la matriz , y c_1 y c_2 son constantes que dependen de las condiciones iniciales .

De la solución se observa que si ambos valores característicos son positivos , el sistema ecológico explota , pues las exponenciales tienden a infinito. Si ambos valores característicos son negativos , las poblaciones se exterminan . Si los valores característicos son complejos conjugados , las poblaciones oscilan , pues :

$$e^{(a+bi)t} = e^{at}(\cos(bt)+ \mathrm{sen}(bt)i) .$$

Obtener los valores característicos para las siguientes matrices de coeficientes.

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Interpretar los resultados .

RESULTADOS:

De los resultados obtenidos por el método , para el problema depredador y presa de el ejemplo :

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

se obtuvieron los siguientes valores característicos :

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$

los cuales son positivos e indican que el sistema ecológico explota . Supongamos que , las condiciones iniciales para c_1 y c_2 son igual a 1 y 3 respectivamente, es decir , son el número de población depredadores y presas al inicio del ciclo y la variable t es la unidad de tiempo transcurrido, supongamos que es igual a 1 mes .

Sustituyendo en la ecuación : $c_1 X_1 e^{\lambda_1 T} + c_2 X_2 e^{\lambda_2 T}$

Los correspondientes vectores característicos son :

$$X_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} , \qquad X_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$1 * \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} e^{1} + 2 * \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} e^{4} = \begin{bmatrix} 551 & = \text{depredadores} \\ -224 & = \text{presas} \end{bmatrix}$$

De este resultado , se observa que la población de presas tiende a tener un deficit con respecto al número de depredadores .

Del problema : $\begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, los correspondientes valores característicos son :

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -4$

y los correspondientes vectores característicos son : $X_1[-2 , -2]$, $X_2[5 , 2]$,

$1*[-2,-2]*e^{-1} + 2*[5 , 2]e^{-4} = [-0.55 , -0.66]^T$. Del cual se observa que , efectivamente , la población tiende a desaparecer.

V.3 INGENIERIA

Otros ejemplos de la aplicación de matrices , se encuentra en el análisis de problemas ingeniería . Consideremos la solución de problemas de valores característicos que se presentan en áreas de vibraciones , análisis de circuitos eléctricos , teoría de la elasticidad , etc., etc. [16].

En particular un sistema vibratorio que consta de varios grados de libertad , los valores de los coeficientes se derivan de los valores de m_i , k_i (respectivamente , masa y contantes elásticas) , y X_i son los desplazamientos de las masas respectivas, y los valores característicos representan los cuadrados de las frecuencias naturales del sistema[17] .

Un edificio de cuatro pisos , donde el valor característico mínimo y el vector característico asociado , corresponden al cuadrado de la frecuencia circular y a la configuración de amplitudes , respectivamente , del modo fundamental de vibración del edificio.

Las ecuaciones para el edificio de cuatro pisos producirá una matriz de orden 4 . Se supone que la distribución de pesos del edificio se puede representar en la forma de cargas concentradas al nivel de cada piso , también se supone que las trabes de la estructura son infinitamente rígidas en comparación con las columnas que soportan .

Las constantes elásticas de la configuración , son constantes equivalentes que representan la rigidez agregada de todas las columnas que soportan un piso dado , y se obtuvieron considerando las columnas como elementos elásticos en paralelo .

Utilizando la ecuación de Lagrange o la segunda ley de Newton , se encuentra que las ecuaciones diferenciales de movimiento del sistema son :

Sistema de movimiento de un edificio de cuatro pisos :

$$M_1\ddot{X}_1 + (K_1+K_2)X_1 - K_2X_2 = 0$$
$$M_2\ddot{X}_2 - K_2X_1 + (K_2+K_3)X_2 - K_3X_3 = 0$$
$$M_3\ddot{X}_3 - K_3X_2 + (K_3+K_4)X_3 - K_4X_4 = 0$$
$$M_4\ddot{X}_4 - K_4X_3 + K_4X_4 = 0$$

Donde X_i es igual al desplazamiento del i-ésimo piso ; $M_i = W_i/g$, masa del i-ésimo piso ; K_i constante elástica de las columnas .

De la teoría de vibraciones , se sabe que del sistema de movimientos puede tomar la forma : $\ddot{X} = X_i SEN(pt)$ (2) , en donde las X_i son la amplitud de movimiento del i-esimo piso y p indica la frecuencia circular natural que corresponde a los modos principales de vibración del sistema . La sustitución de la ecuación 2 y de las derivadas correspondientes en el sistema , produce el siguiente conjunto homogeneo de ecuaciones algebraicas :

$$\left(\frac{K_1+K_2}{M_1} - P^2\right)X_1 - \frac{K_2}{M_1}X_2 = 0$$
$$-\frac{K_2}{M_2}X_1 + \left(\frac{K_2+K_3}{M_2} - P^2\right)X_2 - \frac{K_3}{M_2}X_3 = 0$$
$$-\frac{K_3}{M_3}X_2 + \left(\frac{K_3+K_4}{M_3} - P^2\right)X_3 - \frac{K_4}{M_3}X_4 = 0$$
$$-\frac{K_4}{M_4}X_3 + \left(\frac{K_4}{M_4} - P^2\right)X_4 = 0$$

Supongamos que la constantes elásticas tienen los siguientes valores :

K_1 = 12E6 lb/in , K_3 = 8E6 lb/in
K_2 = 10E6 lb/in , K_4 = 6E6 lb/in

Y las masas de cada piso :

M_1 = 6E3 lib/seg² , M_3 = 4E3 lib/seg²
M_2 = 5E3 lib/seg² , M_4 = 3E3 lib/seg²

Del sistema anterior , vemos que P^2 corresponde a λ (valor característico) y que las cantidades $(K_1+K_2)/M_1$, K_2/M_1 , etc. corresponden a los elementos a_{ij} . Sustituyendo para encontrar los valores a_{ij} , se tiene el siguiente sistema :

Sistema homogeneo .

$$\begin{bmatrix} 3666.667 & -1666.667 & 0.0 & 0.0 \\ -2000.00 & 3600.00 & -1600.0 & 0.0 \\ 0.0 & -2000.00 & 3500.0 & -1500.0 \\ 0.0 & 0.0 & -2000.0 & 2000.0 \end{bmatrix}$$

RESULTADOS :

El conjunto de valores caracteristicos que resuelven el problema de el cuadrado de la frecuencia circular son :

$$P^2 = \lambda_1 = 317.62801492 \; : \; P = \lambda_1^{1/2} = 17.8221$$

$$P^2 = \lambda_2 = 1877.30833180 \; : \; P = \lambda_2^{1/2} = 43.3279$$

$$P^2 = \lambda_3 = 4233.44077890 \; : \; P = \lambda_3^{1/2} = 64.0649$$

$$P^2 = \lambda_4 = 6338.29003120 \; : \; P = \lambda_4^{1/2} = 79.6133$$

Y el conjunto de vectores característicos , que muestran los modos principales de desplazamiento :

$$X_1 = [\, -2342894937.1 \, , \, -4787866947.5 \, , \, -6729487948.3 \, , \, -8000000000.0 \,]^T$$

$$X_2 = [\, 4668183828.0 \, , \, 5811831249.3 \, , \, -439878799.91 \, , \, -7157434672.7 \,]^T$$

$$X_3 = [\, 5955843268.2 \, , \, -2825369872.3 \, , \, -6642959483.5 \, , \, 5948632752.1 \,]^T$$

$$X_4 = [\, -4000000000.0 \, , \, 6411895274.8 \, , \, -5973517869.9 \, , \, 2753855600.0 \,]^T$$

V.4 PROCESOS ESTOCASTICOS

Otra área donde se aplican valores y vectores característicos: Procesos estocásticos

Los procesos de Markov fueron estudiados por el matemático ruso A. A. Markov (1856-1922) . Desde entonces la teoría se ha desarrollado mucho , y ha encontrado aplicaciones en campos tan diversos como la física nuclear , la psicología de la educación , en estudios económicos , modelos de epidemias , etc.[20].

Es conveniente pensar en ellos como procesos o cadenas de sucesos , junto con los pasos necesarios para el cambio de un estado a otro .

Generalmente no es posible decir o predecir exactamente que camino va a tomar el proceso , sino únicamente hallar las probabilidades de cada posible dirección . La descripción matemática (modelo) del proceso , en el que las probabilidades vienen determinadas en cada uno de los pasos , se llaman PROCESOS ESTOCASTICOS .

Si $P(s_i \longrightarrow s_j)$ es la probabilidad condicional para que el proceso que se encuentra en el estado s_i se mueva hasta el estado s_j , en un sólo paso ; se designa como p_{ij}. A esto se le llama probabilidad de transición de un sólo paso . Si estas probabilidades son conocidas para todos los pares de estados,podríamos ordenarlas como una matriz cuadrada. Y la matriz resultante se llama MATRIZ DE TRANSICION , simbolizada por $\mathbf{P}$.

La probabilidad de que el proceso pase de s_i a s_j en n-pasos , se llama probabilidad de transición de n-pasos y se denota por $\mathbf{P}^{n}_{ij}$.

En relación a los planteamientos anteriores , hay muchas cuestiones que podríamos hacer acerca del movimiento de una cadena a lo largo de su conjunto de estados . Para el propósito de este trabajo menciono , unicamente , la probabilidad de que una cadena esté en s_j después de n-pasos , sabiendo que empieza en s_i .

En relación a procesos estocásticos, el poder determinar los estados estacionarios de una cadena a lo largo de sus estados, describiré algunos conceptos relativos al tema:

- Propiedades de la matriz de transición :

  i) $0 \leq p_{ij} \leq 1$; ii) $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1 \quad i = 1,2,\ldots n$

  Sea c el vector $(1,1,\ldots,1)^T$, entonces PC=C . Es decir , C es el vector característico a la derecha de P , que corresponde al valor característico $\lambda = 1$.

  iii) Si dos matrices P y Q son matrices estocásticas , entonces , el producto de Q también lo es : QC=C , esto implica que PQC=PC=C .

  Para calcular el vector de probabilidades del estado estacionario (Π) , habrá que decir que : $\Pi_{n+1} = \Pi_0 \mathbf{P}^n$ o $\Pi_{n+1} = \Pi_n \mathbf{P}$.

  El valor de Π se calcula como : $\Pi = \lim_{n\to\infty} \Pi_n$, si tal límite existe ,

  entonces : $\lim_{n\to\infty} \Pi_{n+1} = \Pi$ en consecuencia : $\lim_{n\to\infty} \Pi_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \Pi_n \mathbf{P}$.

  Es decir , Π es el vector característico a la izquierda de P , que corresponde al valor característico $\lambda = 1$.

Una máquina tiene cuatro estados posibles :

(1) Operando en buenas condiciones , (2) Necesita un ligero ajuste ,

(3) Operando en forma incorrecta , (4) Inoperando .

Y se tienen consideradas cinco posibles acciones y costos :

Dejar las cosas tal cual	...(N)	\$ 0.00
Mantenimiento rutinario	...(R)	\$ 100.00
Hacer un ajuste	...(A)	\$ 300.00
Mantenimiento rutinario y además un ajuste	...(F)	\$ 350.00
Reparación completa	...(C)	\$1000.00

En total se tienen 5^4 políticas , sin embargo muchas de ellas carecen de sentido , y por lo tanto será considerada la siguiente política :

1.- Dejar las cosas tal y como están , hasta que la máquina quede inoperante y, hacer la reparación completa .

La siguiente matriz estocástica contiene las probabilidades de transición :

$$\begin{bmatrix} 0.90 & 0.06 & 0.03 & 0.01 \\ 0.0 & 0.88 & 0.01 & 0.01 \\ 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.5 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

Calcular el estado estacionario , y determinar el costo de la política .

De los resultados obtenidos por el método de Leverrier-Faddeeva , se tiene que el correspondiente vector característico , que proporciona el estado estacionario , para política es :

$X_1 = [\ 0.1\ ,\ 0.03\ ,\ 0.012\ ,\ 0.010]^T$, el cual normalizado es igual a :

$X_1 = [\ 0.658\ ,\ 0.197\ ,\ 0.079\ ,\ 0.066]^T$

Así , el costo para la política es de : $.658*(0) + 0.197*(0) + 0.079*(0) + 0.066*1000=66$

es el costo igual a \$66.00

CONCLUSIONES

Para dar una conclusión a este trabajo , considero conveniente explicar que el uso de uno u otro método , aplicable a matrices cuadradas , puede estar en función del tipo de resultado requerido , por la cantidad de tiempo de proceso , por la facilidad de implantación en algún lenguaje de programación , etc. .

Originalmente , este método lo seleccioné por el alcance tan amplio ante otros , sin embargo algún precio debe pagarse por estas ventajas . Puesto que el tiempo de proceso está en función del total de operaciones que requiere el método expuesto , hasta aquí , es necesario indicar que , aunque, la maestra Faddeeva redujo en cierta cantidad el número de operaciones, el método aún consume bastante tiempo de proceso para matrices muy grandes.

En total , el método requiere $(n-1)n^3$ multiplicaciones , más $n-1$ divisiones , más n^2 sumas para calcular desde los coeficientes del polinomio característico hasta la matriz adjunta . Con relación a otros métodos, considero que el total de operaciones aritméticas a ejecutar no sería equitativo entre éstos y el método de Leverrier-Faddeeva, puesto que éste al efectuar cálculos para obtener el polinomio característico, al mismo tiempo, conducen a otros (matriz adjunta y determinante) que son básicos para dichos cálculos, dándole una particularidad especial al método, de la que carecen los demás.

En resumen, el total de operaciones aritméticas a realizar, definitivamente, no es un punto de referencia representativo de la eficiencia de uno u otro método. Por el contrario, la diferiencia, a consideración personal, está dada por la versatilidad de uno y otro método; por la generalidad sobre problemas específicos y particulares.

Otra razon para utilizar el metodo de Leverrier-Faddeeva , es que este utiliza la operacion de division solo en un 2% del total requerido , lo que hace mas exactos los calculos al evitar con mayor frecuencia errores de redondeo producidos por el mismo procesador al efectuar dicha operacion . Hay que recordar que el trabajar con un procesador sea cual fuere su capacidad de palabra , siempre estara trabajando con un limite de digitos despues del punto decimal , es decir no se obtendria el mismo resultado al efectuar la siguiente operacion : (1/3)*6 = (0.3333)*6= 1.9998 que es diferente de 2.0 que es el resultado exacto .

En otro orden de ideas , para matrices mayores a 20 renglones y 20 columnas,significa hablar de volumenes importantes de informacion, por lo que seria conveniente analizar si es necesario utilizar o no el metodo de Leverrier-Faddeeva , p.e. , algunas aplicaciones solo requieren conocer el valor caracteristico menor y su correspondiente vector caracteristico asociado , por lo que convendria utilizar , quizas , el metodo de aproximaciones sucesivas .

Finalmente queda a criterio del lector reconsiderar al metodo, con vistas a reducir aun mas el numero de operaciones necesarias , o bien considere su empleo en aplicaciones con funciones trigonometricas , variable compleja , etc. , etc. . Hasta este momento los elementos de las matrices han estado definidos en el campo de los numeros reales , sin encontrar aun interpretacion o aplicacion alguna a matrices con elementos complejos .

En cuanto al metodo de Leverrier-Faddeeva para solucion espectral como tecnica para calcular el espectro de una funcion, debo mencionar que, existen otras tecnicas particulares para dicho calculo, como Series de Tiempo donde el espectro es utilizado para predecir la tendencia del ajuste de curvas por minimos cuadrados (particularmente ajustes lineales de primero y segundo orden); Series de Fourier, donde el espectro es utilizado para predecir la relacion entre el ancho de banda del espectro de señales aleatorias y los intervalos de correlacion.

De las técnicas mencionadas anteriormente, ambas son utilizadas en una gran variedad de problemas planteados, algunos, a través de modelos de autorregresión de promedios moviles, cuyo estudio se efectua mediante sistemas de ecuaciones diferenciales lineales para expresar la dependencia de una variable sobre otra.

Básicamente para expresar dichos problemas a través de sistemas lineales de ecuadiferenciales, es necesario realizar un conjunto de observaciones en un tiempo, y posteriormente calcular la ecuación que permita conocer el comportamiento futuro, intermedio o pasado de dichas observaciones.

Dependiendo del espectro de la ecuación de ajuste lineal de predicción, se puede hacer una interpretación de los resultados obtenidos para el problema dado. Por ejemplo para un problema ecológico, las raíces característicaas (espectro) indican estacionalidad (apliacación V.2, pag.83); en problemas económicos las raíces reales representan una tendencia constante de crecimiento o decaimiento (aplicación V.1, pag.79); en otros problemas como ingeniería, mecánica o circuítos eléctricos el espectro se utiliza para conocer la amplitud de frecuencia de banda.

En resumen la asociación del método de Leverrier-Faddeeva con series de tiempo, es factible mediante un modelo, adecuado, de ecuaciones diferenciales, para resolver el problema de análisis espectral, teniendo en cuenta que, también, el uso, en un 100%, de mínimos cuadrados resulta importante para el análisis con series de tiempo.

Para este último punto, creo necesario indicar que la técnica de mínimos cuadrados efectua el cálculo de la ecuación de ajuste, aplicando matrices inversas y para tal fin el método de Leverrier-Faddeeva puede ser de utilidad; por otra parte el empleo del — método de Newton-Raphson (Anexo A) resulta adecuado para resolver la ecuación.

Como observación al sistema desarrollado en este trabajo, creo necesario advertir al lector que , las funciones que desempeña son completamente generales , es decir, todos los cálculos se realizan sin detener el proceso para emitir alguna selección de continuidad , por ejemplo , el usuario querrá elegir el cálculo de la matriz inversa y detener el proceso , o calcular solamente algún valor y vector característico en especial y detener el proceso . Estas observaciones pueden servir para perfeccionar el sistema y obtener un mejor producto de programación , también , el programa podría mejorarse de tal forma que fuese más conversacional , p.e. , solicitarle calcular el producto de dos matrices (de acuerdo a algún propósito particular) o bien mejorar el sistema para conservar los resultados , en memoria principal o en dispositivos de almacenamiento secundario , y utilizarlos en calculos posteriores.

El tiempo de proceso para calcular los vectores característicos de matrices de orden n mayores a 20 , podría reducirse considerablemente si el cálculo se efectua como lo — indica Faddeeva : $\lambda_x^{N-1} I + \lambda_x^{N-2} B_1 + \ldots + \lambda_x B_{N-2} + B_{N-1}$ donde las matrices B_i ya fueron calculadas al obtener los coeficientes del polinomio característico , y que pueden ser almacenadas en memoria secundaria y recuperarlas al momento de efecturar el cálculo de los vectores característicos , en lugar de aplicar el método completo sobre la matriz característica $(A - \lambda_i I)$.

Por último , debo decir que , este trabajo de investigación no termina aquí ; aún existe una gran variedad de aplicaciones que requiren del cálculo de valores y vectores característicos, así como de transformaciones lineales que involucran matrices inversas, matrices diagonales, p.e., en aplicaciones de movimiento de imagenes por computadora[27]. En general el potencial del método es extenso y depende de la aplicación que se le de.

B I B L I O G R A F I A

[1] TOM M. APOSTOL . CALCULUS V.2. , SEGUNDA EDICION , EDITORIAL REVERTE S.A. , ESPAÑA 1988. PAGS. [39 - 86] , [119 - 174] , [218,245] .

[2] DENISE-PAPIN & KAUFMAN . CURSO DE CALCULO MATRICIAL APLICADO , URMO S.A. DE EDICIONES ESPAÑA, 1975. PAGS. [21 - 53] , [81 - 88] .

[3] GARRETT BIRKHOFF , SAUNDERS MacLANE . MODERN ALGEBRA, MacMILLAN PUBLISHING CO., INC. NEW YORK ,1977 PAGS. [1 - 58], [168 - 198] , [268 - 317].

[4] RICHARD L. BURDEN , J. DOUGLAS FAIRES , ALBER C. REYNOLDS. NUMERICAL ANALYSIS, PRINDLE,WEBER AND SCHMIDT,INC.,1978 . PAGS. [299 - 431] .

[5] BRICE CARNAHAN, H.A. LUTHER , JAMES O. WILKES. APPLIED NUMERICAL METODS, COPYRIGHT WILEY & SONS , INC.,1969 . PAGS. [218 - 268].

[6] JAVIER SALAZAR RESINES . ENFOQUE DE SISTEMAS EN LA EDUCACION , TEORIA DE GRAFICAS, EDITORIAL LIMUSA , MEXICO 1979. . PAGS. [353-431] , [279 -296]

[7] FLORENCE M. LOVAGLIA, MERRIT A. ELMORE, DONAL CONWAY . ALGEBRA , EDITORIAL HARLA HARPER AND ROW LATINOAMERICA, MEXICO 1986 . PAGS. [39 - 98] .

[8] G. HADDLEY . ALGEBRA LINEAL , EDITORIAL FONDO EDUCATIVO INTERAMERICANO , S.A. 1969. PAGS. [17 - 59].

[9] R. CARBO CARRE, J.A. HERNANDEZ BASORA . INTRODUCCION A LA TEORIA DE MATRICES, EDITORIAL ALHAMBRA S.A. 1983 . PAGS. [1 - 99] , [137 - 173] , [251 - 307] , [325 - 345] .

[10] V.N. FADDEEVA. COMPUTATIONAL METHODS OF LINEAR ALGEBRA , DOVER PUBLICATION , INC., NEW YORK 1959. PAGS. [147 - 239].

[11] LANG SERGE. ALGEBRA LINEAL .VERSION EN ESPAÑOL : MIGUEL LARA APARICIO. BOGOTA, MEXICO , 1976 . PP. 400.

[12] MARIE J. WEISS , ROY DUBISCH . ALGEBRA SUPERIOR , EDITORIAL LIMUSA , MEXICO 1977. PAGS. [174 - 175].

[13] WILLERDING F. MARGARET , STEPHEN H. HOFFMAN . FUNDAMENTOS DE ALGEBRA , EDITORIAL LIMUSA,S.A. . MEXICO 1976 . PAGS. [277 - 298] .

[14] M. RICHARDSON , Ph. D. . ALGEBRA , EDICIONES URMO 1972 . PAGS. [262 - 282] , [283 - 328] [330 - 389] .

[15] GORDON FULLER . ALGEBRA ELEMENTAL , EDITORIAL CECSA. PAGS. [21 - 36] , [243 - 260], [261 - 278].

[16] HEIMENAN ELLIS RICHARD. COLEGE ALGEBRA , MACGRAW-HILL , INC. 1973 . PAGS. [287 - 295].

[17] MERLIN L JAMES , GERALD M. SMITH , JAMES C. WORTFORD . METODOS NUMERICOS APLICADOS A LA COMPUTACION DIGITAL CON FORTRAN , REPRESENTACIONES Y SERVICIOS DE INGENIERIA S.A. MEXICO 1973 . PAGS. [246 - 297].

[18] ANTONIO OLIVERA,FERNANDO SHULTS,RODOLFO LUTHE . METODOS NUMERICOS , EDITORIAL LIMUSA, MEXICO 1984. PAGS. [66 - 97] , [99 - 136] , [139 - 157].

[19] GOURLAY,A. R. COMPUTACIONAL METHODS FOR MATRIX EIGENPROBLEMS , DOVER PUBLICATIONS,INC. NEW YORK 1975. PAGS [10-30].

[20] J. C. TURNER MATEMATICA MODERNA APLICADA: PROBABILIDADES , ESTIDISTICA E INVESTIGACION OPERATIVA , VERSION ESPAÑOLA DE ANDRES ORTEGA KLEIN . ALIANZA EDITORIAL , S.A. , MADRID 1974 . PP. 549

[21] TORRES CZITRON METODOS PARA LA SOLUCION DE PROBLEMAS CON COMPUTADORA DIGITAL , D.R. 1980 POR REPRESENTACIONES Y SERVICIOS DE INGENIERIA ,S.A. MEXICO 1980. PAGS. [23 - 49] , [106 - 144] ; PP. 579 .

[22] RICE , J.R. MATRIX COMPUTATIONS AND MATHEMATICAL SOFTWARE . McGROW-HILL NEW YORK 1983. PP. 248 .

[23] RICE , J.R. NUMERICAL METHODS , SOFTWARE AND ANALYSIS . IMSL REFERENCE EDITION . McGROW-HILL , NEW YORK 1983 . PP. 661 .

[24] WILKINSON ,J.H. Y C. REINSCH HANDBOOK FOR AUTOMATIC COMPUTACION . VOL. 2 : LINEAR ALGEBRA . SPRINGER-VERLAG , BERLIN 1971 . PP. 439.

[25] JOHN HEILBORN PROGRAMAS PARA CIENCIA E INGENIERIA EDISION PARA APPLE II . EDITORIAL OSBORNE/McGROW-HILL , BARCELONA ESP. 1981 . PGS. [219 -228] ,PP. 225.

[26] RICHARD FAIRLEY INGENIERIA DE SOFTWARE, McGRAW-HIL MEXICO 1987. PP. [390].

[27] DONAL HEARN M. PAULINE B. GRAFICAS POR COMPUTADORA , PRETENCE-HALL MEXICO 1988. PP. [388].

[28] SUDHAKAR M. PANDIT, SHIEN-MING WU. TYME SERIES AND SYSTEM ANALYSIS WITH APPLICATIONS, ETID. JOHN WILEY AND SONS INC. U.S.A 1983, PP. [760].

[29] WILLIAM A. SPURR, CHARLES P. BONINI. STATISTICAL ANALYSIS FOR BUSNESS DECISIONS, EDIT. RICHARD D. IRWINN INC. U.S.A 1973 , PP. [723].

[30] SPRINGER H. CLIFFORD, HEKLIHY E. ROBERT, MALL T. ROBERT, BEGGS I. ROBERT, MODELOS PROBABILISTICOS , EDIT. U.T.E.H.A. MEXICO 1972 , PP. [345].

[31] GEORGE E. P. BOX , GWILYM M. JENKINS. TYME SERIES ANALYSIS FORECASTING AND CONTROL , EDT. HOLDEN-DAY , U.S.A. 1970 , PP.[700].

ANEXO A

METODO DE NEWTON-RAPHSON

DOBLE DIVISION SINTETICA

POLINOMIOS.[7]

Se define como polinomio algebraico a la suma de n-términos :

$$P(X) = a_N X^N + a_{N-1} X^{N-1} + \ldots + a_1 X + a_0$$

en donde las a_I estan definidas sobre un campo F .

Definición .- $P(X)$ puede factorizarse sobre un campo F si existen : $b_1, b_2, \ldots b_N$ tales que $P(X) = a_N (x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_N)$.

Definición .- El conjunto de soluciones de la ecuación polinomial: $P(X) = Q(X)$ sobre el campo F , es el conjunto : { x tal que x $\in$ F y P(x)=Q(x) } .

De estas dos definiciones , debo decir que son importantes para el desarrollo de este trabajo , pues de ello depende la introducción de dos teoremas: teorema del residuo y del factor , necesarios para explicar posteriormente el método de Newton-Raphson para calcular las raíces del polinomio característico .

TEOREMA.- Sea p y d dos polinomios, y d es diferente de cero , entonces existen dos polinomios únicos q y r tales que :

$$p = q \cdot d + r$$

donde r tiene grado menor que d , o bien $r = 0$.

DEMOSTRACION :

Si dividimos ambos lados de $p = q \cdot d + r$, entre d , podemos expresarlo como una división :

$$\frac{p}{d} = \frac{q \cdot d}{d} + \frac{r}{d}$$

$$\frac{p}{d} = q + \frac{r}{d}$$

donde a p se le llama dividendo , d divisor , q el cociente y r el residuo.

El algoritmo para efectuar la división de dos polinomios es como sigue :

1.- Arreglar los términos del dividendo y del divisor en potencias decrecientes de la variable , dejando cero para los términos inexistentes.

2.- Obtener el primer término del cociente (q) dividiendo el término inicial entre el término inicial del divisor.

3.- Multiplicar el divisor por este término del cociente y restar el producto del dividendo .

4.- Usar el residuo de esta resta , junto con los términos no utilizados del dividendo y seguir con los pasos 2 a 4 , repetidamente , obteniendo cada vez un nuevo término para el cociente .

5.- Cuando el residuo tenga grado menor que el divisor (o bien, sea cero) el proceso ha terminado .

TEOREMA DEL RESIDUO . [7]

Sea $F(x)$ un polinomio sobre el campo F , de grado $n \geq 1$ y $a \in F$. Hay un polinomio sobre F , $q(x)$ y un número $r \in R$, tal que :

$$F(X)=(x-a)^{\circ}q(x)+r$$

Ahora , si : $X=0$,

entonces : $F(a)=r$

DEMOSTRACION :

El uso del algoritmo de la división permite expresar $F(X)$ en la forma :

$$F(X)=(x-a)\cdot q(x)+r$$

en donde r es un residuo constante que no contiene x , ya que $(x-a)$ es de grado uno , por lo tanto :

$$\begin{aligned} F(X)&=(x-a)\cdot q(x)+r \\ &=(0)\cdot q + r \\ &= r \end{aligned}$$

TEOREMA DEL FACTOR . [7]

Si F es una función polinomial y si $F(a)=0$,donde $a \in F$,entonces $(x-a)$ es un factor de $F(X)$.

DEMOSTRACION.

Supongamos que $F(X)=g(x)(x-a)+r$, donde r es una constante . Pero $r=F(a)$ por lo tanto $F(x)=g(x)(x-a)+F(a)$, dado que $F(a)=0$ se obtiene que $F(x)=g(x)(x-a)$ de donde se tiene que $(x-a)$ es un factor.

DIVISION SINTETICA[13]

Al usar el teorema del residuo , a menudo es necesario dividir entre un polinomio de primer grado de la forma $(x-r)$. De ahi que se encuentre provechoso manipular el algoritmo de la división para este caso especial, con vistas a simplificarlo en cuanto al número de divisiones entre los términos de dividendo y divisor.

En resumen , el algoritmo para la división sintética efectua los siguientes pasos:

1.- Arreglar el polinomio $P(X)$ en potencias decrecientes de x , agregando un 0 cuando no exista algún término que complete el arreglo.

2.- Escribir los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_N$ de $P(X)$, en una linea en que conserven el orden y el signo . A la izquierda de esta linea , anotar el valor de r , separándolo de los coeficientes por una raya vertical .

3.- Dejar el próximo renglón en blanco , y escribir a_0 en el tercer renglón , directamente abajo del mismo a_0 (del primer renglón).

4.- Multiplicar a_0 por r y colocar el resultado en el segundo renglón abajo de a_1 después , sumar : $(a_0 r) + a_1 = b_1$ y colocar el resultado en el tercer renglon.

5.- Continuar las operaciones aplicando la fórmula : $(b_{i+1} r) + a_{i+1} = b_{i+2}$ hasta sumar el n-esimo termino del polinomio - donde i= 1,2,3,...,n - . Cada b_i será colocado el tercer renglón .

6.- Los primeros n-números colocados en tercer renglón, son los coeficientes de las variables descendentes que pertenecen al cociente empezando con x^{N-1} , y siendo el último número , de la fila , el residuo.

TEOREMAS CONCERNIENTES A LAS RAICES DE ECUACIONES.[16]

A.1 TEOREMA .- Teorema fundamental del álgebra . Cada ecuación de grado $n \geq 1$ tiene al menos una raíz , real o compleja .

A.2 TEOREMA .- Cada polinomio $F(x)$ de grado $n \geq 1$ puede ser expresado como el producto de n-factores lineales .

A.3 TEOREMA .- Toda ecuación polinomial $F(x) = 0$ de grado n , tiene exactamente n-raíces .

A.4 TEOREMA .- Si el número complejo (a,b) , con b distinto de cero , es una raíz de una ecuación polinomial con coeficientes reales , entonces el número complejo (a,-b) es también una raíz .

A.5 TEOREMA .- Si un número racional b/c en términos mínimos , es una raíz de la ecuación F(x)=0 donde los coeficientes a_i son todos enteros con a_0 distinto de cero entonces , b es un factor de a_n y c un factor de a_0 .

NUMEROS COMPLEJOS.[16]

Definición (Número complejo).- Una pareja ordenada de números reales (a,b) es llamada número complejo .

Definición (Igualdad de números complejos) .- Dos números complejos (a,b) y (c,d) son iguales si y sólo si : a=c y b=d .

Definición .- (a,b) es llamado imaginario si b es distinto de cero ;

(a,b) es llamado número puramente imaginario si a = 0 y b es distinto de cero ;

(a,b) es llamado real si b=0 .

Es costumbre usar la letra i para representar al número complejo (0,1) y su negativo -i representado por (0,-1) .

Definición .- La suma , diferencia , producto y cociente de dos números complejos, son definidos por las siguientes ecuaciones :

SUMA : $(a,b)+(c,d)=(a+b\ ,\ b+d)$

RESTA: $(a,b)-(c,d)=(a-b\ ,\ b-d)$

PRODUCTO: $(a,b)(c,d)=(ac-bd\ ,\ ad+bc)$

DIVISION: $$\frac{(a,b)}{(c,d)}=\frac{(ac+bd\ ,\ bc-ad)}{c^2+d^2}$$

Definición. Los números complejos (a,b) y (a,-b) son llamados números complejos conjugados .

II.3 METODO DE NEWTON-RAPHSON .

Un método conveniente y apropiado para resolver ecuaciones algebraicas de orden n, es el de Newton-Raphson doble división sintética para calcular los correspondientes valores característicos del polinomio $F(\lambda)$ de A .

Dicho método, lo he seleccionado por su flexibilidad tanto para calcular todas las raíces como por su generalidad , así como su facilidad de implantación en cualquier lenguaje de programación .

Supóngase que la función F es continuamente diferenciable dos veces en el intervalo $[a,b]$; o sea $F \in C^2 [a,b]$ (+) .

Sea $x^* \in [a,b]$ una aproximación a b tal que $F'(\lambda)$ es diferente de cero y $\|x^*-b\|$ es muy pequeño .

Y considérese el polinomio de Taylor de primer grado para $F(\lambda)$ alrededor de x^* .

$$F(\lambda)=f(x^*)+\frac{(\lambda-x^*)f'(x^*)}{1!}+\frac{(\lambda-x^*)^2f''(\xi(x^*))}{2!}$$

Donde $\xi(x^*)$ está entre λ y x^* . Como $F(b)=0$ con $\lambda=b$, entonces :

$$0 = f(x^*)+\frac{(b-x^*)f'(x^*)}{1!}+\frac{(b-x^*)^2f''(\xi(x^*))}{2!}$$

Aquí, el método de Newton se deriva suponiendo que el término que contiene a $(b-x^*)^2$ es sumamente pequeño y por eso puede ser prescindible y como ahora la función , en estos términos , no es exactamente igual a cero entonces se tendrá que:

$$0 \simeq f(x^*) + (b-x^*)f'(x^*)$$

despejando para b se tiene :

$$b = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)}$$

De la relacion anterior se tiene que b debe ser una mejor aproximacion , en lugar de x^* .

Esto prepara el ambiente para el metodo de Newton-Raphson , el cual requiere generar la sucesion de $\langle b_n \rangle$ definida por :

$$b_n = b_{n-1} - \frac{f(b_{n-1})}{f'(b_{n-1})} \quad , \quad n \geq 1$$

La convergencia del metodo a cada una de las raices se determina mediante la siguiente forma :

$$\frac{\| b_n - b_{n-1} \|}{b_n} < \varepsilon$$, donde $\frac{\| b_n - b_{n-1} \|}{b_n}$ corresponde al error relativo

y ε es el epsilon de aproximacion a la raiz de $F(\lambda) = 0$.

Puesto que el metodo de Newton-Raphson consiste en calcular la sucesion de b_n , evaluando la funcion $F(b_{n-1})$ y $F'(b_{n-1})$ mediante la ecuacion de recurrencia :

$$b_n = b_{n-1} - \frac{f(b_{n-1})}{f'(b_{n-1})} \quad , \quad n \geq 1$$

resultara conveniente utilizar los teoremas del residuo y del factor para llegar a la siguiente conclusion :

Si $F(\lambda) = (\lambda - b) q_1(\lambda) + f(b)$

y aplicando el teorema del residuo sobre $q_1(\lambda)$:

$$q_1(\lambda) = (\lambda - b) q_2(\lambda) + q_1(\lambda)$$

sustituyendo $q_1(\lambda)$ en la funcion $F(\lambda)$ se obtiene :

$$F(\lambda) = f(b) + (\lambda - b) q_1(\lambda) + (\lambda - b)^2 q_2(\lambda)$$

Aplicando el polinomio de Taylor , $a=b$:

$$G(x)=g(x)+\frac{(x-b)g'(x)}{1!}+\frac{(x-b)^2 g''(b)}{2!}$$

igualando términos de los polinomios $F(x)$, $G(X)$ se tiene :

$$f(b) \quad = g(b)$$

$$q_1(b)1! = g'(x)$$

$$q_2(b)2! = g''(b)$$

De lo anterior se tiene que $f'(b_{N-1})$ puede ser calculado a partir del cociente $q_1(b)$ (el cual resulta de dividir $F(b)/(x-b)$).

Por otra parte , bajo suposiciones razonables , el método de Newton convergirá a b siempre y cuando se escoja una aproximación inicial lo suficientemente exacta . El siguiente teorema afirma lo anterior :

TEOREMA. Sea $F \in C^2 [a,b]$. Si $b \in [a,b]$ es tal que $F(b)=0$ y la derivada de la función $F(b)$ es diferente de cero , entonces , existe un $\delta > 0$ tal que el método de Newton genera una sucesión $(b_N)_{n=1}^{\infty}$ que converge a b para cualquier aproximación inicial $b_0 \in [b-\delta , b+\delta]$.

Puesto que el calcular raíces de ecuaciones algebraicas de orden n , corresponde a encontrar factores lineales de la forma $(x-a)$, resulta conveniente utilizar el algoritmo de la división sintética , para calcular los residuos que son , el resultado de evaluar a $F(b)$ y $F'(b)$, para la sucesión (b_{N-1}).

Hasta el momento poco se ha hablado sobre la naturaleza de las funciones , así como de sus raíces , es decir , si $F(X)=0$ es una función polinomial definido en el campo de los números reales R , entonces sus raíces también están en el mismo campo? .

Fundándome en los teoremas A.2 y A.4 que dicen que toda ecuación de grado $n > 1$ tiene al menos una raíz la cual puede ser compleja, y si esto ocurre entonces el número complejo $\langle a, b\rangle$ es una raíz y su conjugado $\langle a, -b\rangle$ también lo es.

Sea el par ordenado $\langle a, b\rangle$ que representa un elemento del campo de los números complejos, y representa una raíz de la función $F\langle x\rangle$, entonces :

sea $b=\langle a, b\rangle$, $x=\langle c, d\rangle$ y $r=\langle w, v\rangle$
números complejos ;

y $F\langle x\rangle=\langle x-b\rangle q\langle x\rangle+r$

sustituyendo b, x, r en la función :

$F\langle a, b\rangle=\langle\langle c, d\rangle-\langle a, b\rangle\rangle q\langle\langle a, b\rangle\rangle+\langle w, v\rangle$

si $\langle a, b\rangle=\langle c, d\rangle$, es una raíz de $F\langle a, b\rangle=0$, entonces ,

$[\langle c, d\rangle-\langle a, b\rangle]$ es un factor de $F\langle a, b\rangle$ así:

$F\langle a, b\rangle=0\cdot q\langle a, b\rangle+\langle w, v\rangle$

$=\langle w, v\rangle$

y como $F\langle c, d\rangle=0$ entonces $F\langle a, b\rangle=0$ lo cual demuestra que $\langle a, b\rangle$ es una raíz de $F\langle c, d\rangle$.

ALGORITMO DE NEWTON-RAPHSON .

Siguiendo la linea establecida , antes de pasar a describir el algoritmo de Newton-Raphson doble división sintética , procederé a resumir dicho método .

1.- El método inicia dando un valor aproximado a la raíz : $X_0 = (0.0 , 1.0)$.

2.- Se procede a calcular la sucesión de X_I hasta que estas converjan a la X_N tal que el error relativo sea menor a un epsilon dado :

Dicha sucesión será calculada como : $$X_I = X_{I-1} - \frac{F(X_{I-1})}{F'(X_{I-1})}$$

Y puesto que ambas funciones son ecuaciones algebraicas de orden n , se utiliza el algoritmo de la división sintética , para obtener sus correspondientes residuos .

3.- Una vez calculada la raíz X_I , se procede a hacer a $F(X) = q(X)$, donde $q(X) = F(X)/(X - X_I)$.

OBSERVACIONES.

1.- Teniendo en cuenta el teorema fundamental del álgebra , es conveniente ampliar el campo de los números reales al campo de los números imaginarios , para no perder la posibilidad de calcular todas las raíces de la función polinomial , la cual puede tener raíces complejas .

2.- Dado que la sucesión de $\{ X_I \}$ invariablemente converge a la raíz de $F(X)$, entonces , una aproximación inicial a la raíz puede ser (0.0 , 1.0)

3.- Un epsilon igual a 1.0^{-5} , indica que se desea obtener una convergencia de X_I a la raíz de $F(X)$ con 5 dígitos de precisión , tal que $F(X_I) \simeq 0.00001$.

4.- Como la sucesión de x_i puede ser hasta infinito , se ha optado por un límite de 100 iteraciones , para alcanzar la convergencia de la raíz con el epsilon de precisión .

Cabe decir que el empleo de números complejos , para calcular las raíces de la función polinomial , requiere de operaciones aritméticas complejas , las cuales fueron previamente descritas. Para dar mayor claridad al algoritmo, éstas son indicadas — como se hace en la práctica común , al utilizar números reales .

Las variables utilizadas en el algoritmo son :

variables	descripción
N-TERMINOS	NUMERO DE TERMINOS DE LA FUNCION POLINOMIAL.
GRADO-POLINOMIO	GRADO DE LA FUNCION POLINOMIAL.
N-RAIZ	CONTADOR DE RAICES DE LA FUNCION POLINOMIAL.
X	VARIABLE QUE HACE LAS VECES DE X_i .
ITERACIONES	CONTADOR DE SUCESIONES PARA X_i .
EPSILON	PRECISION QUE SE DESEA AL EVALUAR F(X) .
POLINOMIO-CARACTERISTICO	VECTOR QUE CONTIENE LOS COEFICIENTES DE LA FUNCION POLINOMIAL .
P	VECTOR QUE ALMACENA LOS RESULTADOS OBTENIDOS EN LA PRIMER DIVISION SINTETICA $F(X)/(X-X_i)$.
Q	VECTOR QUE ALMACENA LOS RESULTADOS OBTENIDOS EN LA SEGUNDA DIVISION SINTETICA $P(X)/(X-X_i)$.
ERROR-RELATIVO	INDICA LA CONVERGENCIA DE $F(X) \simeq 0.00001$.
Y	VECTOR EN EL QUE SON ALMACENADAS LAS N-RAICES DE LA FUNCION POLINOMIAL .

ALGORITMO DE NEWTON RAPHSON DOBLE DIVISION SINTETICA .

OBJETIVO : calcular todas las raíces , reales o complejas , de la función polinomial .

DATOS DE ENTRADA : Polinomio característico , grado del polinomio.

SALIDA : coeficientes del polinomio característico.

```
PASO 1 : N-TERMINOS = GRADO-POLINOMIO + 1 ;
PASO 2 : PARA  N-RAIZ = 1 , ... ,GRADO-POLINOMIO HACER desde el paso 2.1 al 2.4:
        PASO 2.1 : X = (0.0 , 1.0);
        PASO 2.2 : ITERACIONES = 0 ;
        PASO 2.3 : MIENTRAS ITERACIONES < 101 OR EPSILO > ERROR-RELATIVO
                         HACER desde el paso 2.3.1 al 2.3.8 :
                  PASO 2.3.1 : P(1) = POLINOMIO-CARACTERISTICO(1);
                  PASO 2.3.2 : PARA I = 1,...,N-TERMINOS HACER 2.3.2.1:
                               PASO 2.3.2.1 : P(I) = POLINOMIO-CARACTERISTICO (I)+ (X*P(I-1));
                  PASO 2.3.3 : Q(1) = P(1) ;
                  PASO 2.3.4 : PARA I = 1,...,N-TERMINOS - 1 HACER  2.3.4.1:
                               PASO 2.3.4.1 : Q(I) = P(I) + ( X*P(I-1));
                  PASO 2.3.5 : Y(N-RAIZ) = X - ( P(N-TERMINOS ) / Q(N-TERMINOS - 1))
                  PASO 2.3.6 : ERROR-RELATIVO = ABS((Y(N-RAIZ) - X) / Y(N-RAIZ))
                  PASO 2.3.7 : SI EPSILON < ERROR-RELATIVO ENTONCES HACER 2.3.7.1 :
                               PASO 2.3.7.1 : X = Y(N-RAIZ)
                               EN CASO CONTRARIO HACER desde el paso 2.3.7.2 al 2.3.7.3
                               PASO 2.3.7.2 : POLINOMIO-CARACTERISTICO = P ;
                               PASO 2.3.7.3 : N-TERMINOS = N-TERMINOS - 1 ;
                  PASO 2.3.8 : ITERACIONES = ITERACIONES + 1 ;
        PASO 2.4 : SI EPSILON < ERROR-RELATIVO OR ITERACIONES  > 100  ENTONCES HACER  2.4.1

                  PASO 2.4.1 : IMPRIME : " ERROR EL METODO NO CONVERGE " ; ALTO .
                  EN CASO CONTRARIO HACER 2.4.2
                  PASO 2.4.2 : IMPRIME : "LAS RAICES SON :" , Y(1) ,...,Y(GRADO-POLINOMIO).
```

APENDICE A

PROGRAMA EN LENGUAJE FORTRAN
DEL METODO DE LEVERRIER-FADDEEVA
PARA SOLUCION ESPECTRAL

```
PROGRAM PACK          74/810  OPT=0,ROUND= A/ S/ M/-D,-DS
FTN 5.1+689           89/05/01. 15.39.04        PAGE     1
DO=-LONG/-OT,ARG=-COMMON/-FIXED,CS= USER/-FIXED,
DB=-TB/-SB/-SL/ ER/-ID/-PMD/-ST,-AL,PL=5000
FTN5,I=PACK,L=PACKL.

C          ****************************************************************
C          * PROGRAMA PACK (VERSION 1 , 1984)                              *
C          * METODO DE LEVERRIER-FADDEVA PARA SOLUCION ESPECTRAL            *
C          * AUTOR:                                                         *
C          *          FRANCISCO LEON HERNANDEZ                              *
C          ****************************************************************
CFILE  1(ACCESS='SEQUENTIAL',KIND='PERMITF',STATUS='OLD',MYUSE='IO')
C LA TARJETA ANTERIOR SE UTILIZA EN EQUIPOS BURROUGHS.
C
      PROGRAM PACK(DISCO,INPUT,OUTPUT, UNID,07=DISCO, UNID,05=INPUT,
     *UNID,06=OUTPUT)
       COMMON/UNO/A(10,10),B(10,10)
       COMMON/DOS/C(10,10),AC(10,10),P(10)
       DIMENSION Y(10)
       COMPLEX Y
100    FORMAT(10X,'ANALISIS ESPECTRAL',5(/),10X,
     *                  'DIME EL ORDEN DE LA MATRIZ')
1      WRITE(5,100)
       READ(5,*, ERR=1,END=999)  M
       CALL LEER(M)
       CALL FADEV(M)
       CALL IMPRES(M)
       CALL VALC(M,Y)
       CALL VECC(M,Y)
999    STOP'PROCESO TERMINADO'
       END

PROCEDURES--(LO=A)
NAME------TYPE---------ARGS------CLASS-----

FADEV                   1       SUBROUTINE
IMPRES                  1       SUBROUTINE
LEER                    1       SUBROUTINE
VALC                    2       SUBROUTINE
VECC                    2       SUBROUTINE

STATISTICS--

PROGRAM-UNIT LENGTH              132B =   90
CM LABELLED COMMON LENGTH        632B =  410
CM STORAGE USED               635008 = 26432
COMPILE TIME                  0.109 SECONDS
```

```
SUBROUTINE LEER         74/815   OPT=0,ROUND= A/ S/ M/-D,-DS
FTN 5.1+688            89/06/01. 15.39.04          PAGE      1
DO=-LONG/-OT,ARG=-COMMON/-FIXED,CS= USER/-FIXED,
DB=-TB/-SB/-SL/ ER/-ID/-PMD/-ST,-AL,PL=5000
FTN5,I=PACK,L=PACKL.

C       ****************************************************************
C       * SUBRUTINA LECTURA DE MATRICES
C       ****************************************************************
        SUBROUTINE LEER(M)
        COMMON/UNO/A(10,10),B(10,10)
  100   FORMAT(10X,'COMIENZA A DARME LOS VALORES RENGLON POR RENGLON')
        WRITE(5,100)
        DO 1 I=1,M
        READ(5,*)(A(I,J),J=1,M)
        DO 1 J=1,M
        B(I,J)=A(I,J)
    1   CONTINUE
        CALL IMP(A,M,M)
        RETURN
        END

--STATISTICS--

PROGRAM-UNIT LENGTH              133B =    91
CM LABELLED COMMON LENGTH        310B =   200
CM STORAGE USED                63500B = 26432
COMPILE TIME                   0.118 SECONDS
```

```
SUBROUTINE FADEV        74/810  OPT=0,ROUND= A/ S/ M/-D,-DS
FTN 5.1+689          89/05/01. 15.39.04          PAGE     1
DO=-LONG/-OT,ARG=-COMMON/-FIXED,CS= USER/-FIXED,
DB=-TB/-SB/-SL/ ER/-ID/-PMD/-ST,-AL,PL=5000
FTN5,I=PACK,L=PACKL.

      C       ****************************************************************
      C       * RUTINA PARA PROCESAR LA MATRIZ DE INSUMO PRODUCTO
      C       * POR EL METODO DE LEVERRIER-FADDEVA
      C       ****************************************************************
              SUBROUTINE FADEV(M)
              COMMON/UNO/A(10,10),B(10,10)
              COMMON/DOS/C(10,10),AD(10,10),P(10)
              DO 5 I=1,M-1
              T1=0.
              DO 1 I2=1,M
        1     T1=T1 + B(I2,I2)
              P(I)=T1/I
              DO 2 I2=1,M
        2     B(I2,I2)=B(I2,I2) - P(I)
              DO 3 I3=1,M
              DO 3 J= 1,M
        3     AD(I3,J)=B(I3,J)
              CALL MULT(M)
              DO 4 I3=1,M
              DO 4 J =1,M
        4     B(I3,J)=C(I3,J)
        5     CONTINUE
              RETURN
              END

--STATISTICS--

  PROGRAM-UNIT LENGTH              171B =   121
  CM LABELLED COMMON LENGTH        632B =   410
  CM STORAGE USED                635003B =  26432
  COMPILE TIME                    0.185 SECONDS
```

```
SUBROUTINE MULT        74/816   OPT=0,ROUND= A/ S/ M/-D,-DS
FTN 5.1+698            89/06/01. 15.39.04         PAGE      1
DO=-LONG/-OT,ARG=-COMMON/-FIXED,CS= USER/-FIXED,
DB=-TB/-SB/-SL/ ER/-ID/-PMD/-ST,-AL,PL=5000
FTN5,I=PACK,L=PACKL.

C         ****************************************************************
C         ** SUBRUTINA PARA MULTIPLICAR MATRICES
C         ****************************************************************
          SUBROUTINE MULT(M)
          COMMON/UNO/A(10,10),B(10,10)
          COMMON/DOS/C(10,10)
          DO 1 I=1,M
          DO 1 J=1,M
          C(I,J)=0.0
          DO 1 K=1,M
          C(I,J)=A(I,K)*B(K,J)+C(I,J)
  1       CONTINUE
          END

--STATISTICS--

  PROGRAM-UNIT LENGTH              73B =   59
  CM LABELLED COMMON LENGTH       454B =   300
  CM STORAGE USED               63500B =   26432
  COMPILE TIME                  0.095 SECONDS
```

```
SUBROUTINE IMPRES       74/810  OPT=0,ROUND= A/ S/ M/-D,-DS
FTN 5.1+688            89/06/01. 15.39.04          PAGE     1
DO=-LONG/-OT,ARG=-COMMON/-FIXED,CS= USER/-FIXED,
DB=-TB/-SB/-SL/ ER/-ID/-PMD/-ST,-AL,PL=5000
FTN5,I=PACK,L=PACKL.

 C      ****************************************************************
 C      * SUBRUTINA PARA DEPURAR LA INFORMACION OBTENIDA DURANTE EL
 C      * PROCESO DE FADEV
 C      ****************************************************************
        SUBROUTINE IMPRES(M)
        COMMON/UNO/A(10,10),B(10,10)
        COMMON/DOS/C(10,10),AD(10,10),P(10)
        CALL IMP(A0,M,1)
        P(M)=C(1,1)
        IF (C(1,1))2,4,2
 2      CALL IMP(C,M,2)
        DET=(1./C(1,1))
        DO 3 I=1,M
        DO 3 J=1,M
 3      B(I,J)=DET*AD(I,J)
        CALL IMP(B,M,3)
        CALL MULT(M)
        CALL IMP(C,M,4)
        RETURN
 4      CALL IMP(C,M,5)
        RETURN
        END

--STATISTICS--

 PROGRAM-UNIT LENGTH           155B =  109
 CM LABELLED COMMON LENGTH     632B =  410
 CM STORAGE USED            63500B = 26432
 COMPILE TIME               0.138 SECONDS
```

```
SUBROUTINE VALC          74/810   OPT=0,ROUND= A/ S/ M/-D,-DS
FTN 5.1+688            89/05/01. 15.39.04          PAGE      1
DO=-LONG/-OT,ARG=-COMMON/-FIXED,CS= USER/-FIXED,
DB=-TB/-SB/-SL/ ER/-ID/-PMD/-ST,-AL,PL=5000
FTN5,I=PACK,L=PACKL.

C     ****************************************************************
C     * SUBRUTINA PARA CALCULAR LOS VALORES CARACTERISTICOS DE
C     * LA ECUACION CARACTERISTICA
C     ****************************************************************
      SUBROUTINE VALC(M,Y)
      COMMON/DOS/C(10,10),AD(10,10),P(10)
      DIMENSION PL(10),PL1(10),PL2(10),Y(10)
      COMPLEX PL,PL1,PL2,Y,X
  100 FORMAT(1H1,/,
     *              10X,'  EXPONENTE   ECUACION          CARACTERISTICA   '/,
     *  10X,            '     D E      ---------------------------------'/,
     *  10X,            '    LAMBDA    PARTE REAL      PARTE IMAGINARIA',//)
  101 FORMAT(10X,45(1H-))
  102 FORMAT(///,10X,I5,2E20.14,///)
  103 FORMAT(/,10X,'APROXIMACION RELATIVA:   ',F12.10,/)
  104 FORMAT(/,10X,'                      VALORES CARACTERISTICOS'/,10X,
     *45('-'),/,10X,'RAIZ                   PARTE REAL   PARTE IMAGINARIA'/)
  105 FORMAT(10X,I5,2E20.10)
  106 FORMAT(10X,'**** EL METODO NO CONVERGE EN ',I10,' ITERACIONES'/
     *10X,'PROCEDO A DESCONTINUAR (ABORTAR) EL PROGRAMA')
  107 FORMAT(10X,'ITERACION   ',5X,'ERROR RELATIVO',10X,'RAIZ APROX.')
  108 FORMAT(10X,I5,5X,F12.10,5X,2E20.14)
      PL(1)= 1.0
      DO 1 I=1,M
      P1=-(P(I))
    1 PL(I+1)=P1
      N=M+1
      WRITE(6,100)
      DO 2 I=1,N
    2 WRITE(6,102)(N-I),PL(I)
      APROX=1.0E-6
      APROX1=1.0E-4
      WRITE(6,103)APROX
      WRITE(6,*)'COMIENZA LA BUSQUEDA DE RAICES '
```

```
          NMI=100
          NGRADO=M
C *** COMIENZA LA BUSQUEDA DE LAS RAICES (VALORES CARACTERISCOS)
          DO 8 NRAIZ=1,NGRADO
          X=(0.,1.)
          WRITE(6,107)
   55     DO 5 L=1,NMI
          PL1(1)=PL(1)
          DO 3 I=2,M
    3     PL1(I)=PL(I) + (X * PL1(I-1))
          PL2(1)=PL1(1)
          DO 4 I=2,M
    4     PL2(I)=PL1(I) + (X * PL2(I-1))
          Y(NRAIZ)=X - ( PL1(N)/PL2(M) )
          REL=CABS((X-Y(NRAIZ))/Y(NRAIZ))
          WRITE(6,108) L,REL,Y(NRAIZ)
          IF (REL.LE.APROX) GO TO 6
          IF (REL.LE.APROX1) GO TO 6
          X=Y(NRAIZ)
    5     CONTINUE
          CALL EXIT
    6     WRITE(6,104)
          WRITE(6,102)NRAIZ,Y(NRAIZ)
          DO 7 I=2,M
    7     PL(I)=PL1(I)
          N=N-1
          M=M-1
          NMI=100
    8     CONTINUE
          M=NGRADO
          RETURN
          END
```

--STATISTICS--

PROGRAM-UNIT LENGTH	676B = 446
CM LABELLED COMMON LENGTH	322B = 210
CM STORAGE USED	63500B = 26432
COMPILE TIME	0.440 SECONDS

```
SUBROUTINE VECC          74/810   OPT=0,ROUND= A/ S/ M/-D,-DS
FTN 5.1+638          89/06/01. 15.39.54          PAGE    1
DO=-LONG/-OT,ARG=-COMMON/-FIXED,CS= USER/-FIXED,
DB=-TB/-SB/-SL/ ER/-ID/-PMD/-ST,-AL,PL=5000
FTN5,I=PACK,L=PACKL.

C          ****************************************************************
C          * SUBROUTINA PARA CALCULAR LOS VECTORES CARACTERISTICOS
C          ****************************************************************
           SUBROUTINE VECC(M,Y)
           COMMON/UNO/A(10,10),B(10,10)
           COMMON/DOS/C(10,10),AD(10,10),P(10)
           DIMENSION D(10,10),Y(10),A2(10)
           COMPLEX Y
           REAL MAX
           DO 1 K=1,M
  1        A2(K)=A(K,K)
           DO 8 I=1,M
           VALCI=AIMAG(Y(I))
           VALCR=REAL(Y(I))
           IF ((10.E-5).LT.ABS(VALCI)) GOTO 8
           DO 2 K=1,M
           DO 2 J=1,M
  2        B(K,J)=A(K,J)
           DO 3 K=1,M
           B(K,K)=B(K,K)-VALCR
  3        A(K,K)=B(K,K)
           CALL FADEV(M)
           DO 7  K=1,M
           MAX=AD(1,K)
           DO 4 J=1,M
           IF (ABS(MAX).GE.ABS(AD(J,K))) GOTO 4
              MAX=AD(J,K)
  4        CONTINUE
           IF (MAX) 5,7,5
  5        DO 6  J=1, M
           IF (AD(J,K).NE.0) D(J,K)=AD(J,K)/MAX
  6        CONTINUE
  7        CONTINUE
           CALL IMPRE2(D,M,VALCR,1)
           CALL IMP(A,M,7)
           CALL IMPRES(M)
           DO 88 K =1,M
  88       A(K,K)=A2(K)
  8        CONTINUE
           RETURN
           END

--STATISTICS--

  PROGRAM-UNIT LENGTH              470B =   312
  CM LABELLED COMMON LENGTH        632B =   410
  CM STORAGE USED               63500B = 26432
  COMPILE TIME                  0.305 SECONDS
```

```
SUBROUTINE IMP          74/815  OPT=0,ROUND= A/ S/ M/-D,-DS
FTN 5.1+688             89/06/01. 15.39.04          PAGE     1
DO=-LONG/-OT,ARG=-COMMON/-FIXED,CS= USER/-FIXED,
DB=-TB/-SB/-SL/ ER/-ID/-PMD/-ST,-AL,PL=5000
FTN5,I=FFF,L=FFFL.

C      *****************************************************************
C      * SUBRUTINA PARA IMPRIMIR LAS MATRICES OBTENIDAS DURANTE EL
C      * PROCESO DE FADEV
C      *****************************************************************
       SUBROUTINE IMP(A1,M,N)
       DIMENSION A1(10,10)
       CHARACTER *41 TABLA(7)
       DATA TABLA/'MATRIZ ADJUNTA DE LA MATRIZ PROPORCIONADA',
     *            'MATRIZ DETERMINANTE DEL SISTEMA ..........',
     *            'MATRIZ INVERSA DE LA MATRIZ PROPORCIONADA ',
     *            'MATRIZ UNITARIA DEL PRODUCTO A X A^1      ',
     *            'EL DETERMINATE ES CERO... NO HAY INVERSA  ',
     *            'MATRIZ ORIGINAL DEL SISTEMA ..............',
     *            'MATRIZ ( A - LI) .........................'/
100    FORMAT(/,10X,1A41,/)
200    FORMAT(2X,10F7.4)
       WRITE(6,100)TABLA(N)
       DO 1 I=1,M
1      WRITE(6,200)(A1(I,J),J=1,M)
       RETURN
       END
```

--STATISTICS--

```
PROGRAM-UNIT LENGTH       150B = 104
CM STORAGE USED           63500B = 26432
COMPILE TIME              0.122 SECONDS
```

```
SUBROUTINE IMPRE2      74/810  OPT=0,ROUND= A/ S/ M/-D,-DS
FTN 5.1+688           89/05/01. 15.39.04           PAGE      1
DO=-LONG/-OT,ARG=-COMMON/-FIXED,CS= USER/-FIXED,
DB=-TB/-SB/-SL/ ER/-ID/-PMD/-ST,-AL,PL=5000
FTN5,I=PACK,L=PACKL.
```

```
C     ************************************************************
C     * SUBRUTINA PARA IMPRIMIR LA MATRIZ DE VECTORES CARACTERISTICOS
C     ************************************************************
      SUBROUTINE IMPRE2(A1,M,VALCR,L)
      DIMENSION A1(10,10)
100   FORMAT(1H1,/,10X,'MATRIZ DE SOLUCIONES * NO TRIVIALES *',/,10X,
     *'PARA LAMBDA :  L(',I5,') =',E20.10,/,10X,
     *'CADA VECTOR COLUMNA DE LA MATRIZ PRESENTE',/,10X,
     *'REPRESENTA EL CONJUNTO DE SOLUCIONES * NO TRIVIALES *',/,10X,
     *'PARA UNA SOLA LAMBDA...............',/,10X,
     *'NOTA :',/,10X,'SI EN ALGUN MOMENTO NO APARECE LA MATRIZ DE VECTO
     *RES CARACTERISTICOS',/,10X,'ESTO SE DEBERA A QUE EXISTE ARGUMENTO
     *IMAGINARIO',/,10X,'PARA EL VALOR CARACTERISTICO...... ',//)
110   FORMAT(10X,'A CONTINUACION APARECEN OTRAS MATRICES OBTENIDAS',/
     *10X,'A PARTIR DEL PROCESO DEL CALCULO DEL VECTOR CARACTERISTICO'/
     *10X,'QUE PROPORCIONAN UNA  MAYOR INFORMACION ..................'/)
120   FORMAT(2X,10E7.4)
      WRITE(6,100)L,VALCR
      DO 1 I=1,M
1     WRITE(6,120)(A1(I,J),J=1,M)
      WRITE(6,110)
      RETURN
      END
```

--STATISTICS--

```
PROGRAM-UNIT LENGTH          207B = 135
CM STORAGE USED            63500B = 26432
COMPILE TIME               0.133 SECONDS
```