

0306/
Zej.
1



Universidad Nacional Autónoma de México

Colegio de Ciencias y Humanidades
Unidad Académica de los Ciclos Profesional y de Posgrado
Instituto de Investigaciones en Matemáticas
Aplicadas y en Sistemas

“UN ESTUDIO COMPARATIVO DE POTENCIA ENTRE
ALGUNAS PRUEBAS DE BONDAD DE AJUSTE
PARA EL CASO MULTIVARIADO SIMPLE”

T E S I S

Que para obtener el grado de:
MAESTRO EN ESTADISTICA E
INVESTIGACION DE OPERACIONES
P r e s e n t a e l C.

Héctor Francisco Coronel Brizio

México, D. F.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1989



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

C O N T E N I D O

INTRODUCCION.....	1
I.- LA TRANSFORMACION INTEGRAL DE PROBABILIDAD Y LA TRANSFORMACION DE ROSENBLATT.....	5
II.- PRUEBAS DE UNIFORMIDAD MULTIVARIADA.....	10
III.- DISTRIBUCIONES NULAS.....	18
IV.- ESTUDIO PARA FALLAS EN LA ESPECIFICACION DE PARAMETROS MAS NO EN LA FORMA DISTRIBUCIONAL.....	21
V.- ESTUDIO PARA FALLAS EN LA FORMA DISTRIBUCIONAL.....	37
VI.- EXTENSION AL CASO DE PARAMETROS DESCONOCIDOS.....	66
CONCLUSIONES.....	79
REFERENCIAS.....	82

INTRODUCCION

En el contexto de las pruebas estadísticas de Bondad de Ajuste, existen problemas en los que se requiere del desarrollo de nueva metodología y/o evaluación de la ya existente. Uno de estos problemas corresponde al diseño de pruebas multivariadas y, de manera particular, para la Distribución Normal Multivariada (D'Agostino y Stephens, 1986, p. 4).

Con el objeto de dar solución al problema en el caso multivariado simple, de manera natural surge la inquietud de investigar una extensión de las estadísticas de Kolmogorov-Smirnov y de Cramér-Von Mises; sin embargo Simpson(1951), Rosenblatt(1952) y recientemente Leurgans (1983), han hecho señalamientos en el sentido de que dichas estadísticas no se generalizan adecuadamente a esta situación, debido a que la distribución asociada no es la misma para todas las distribuciones continuas cuando se aplican al caso multivariado.

Rosenblatt(1952) propuso una generalización de la Transformación Integral de Probabilidad que, bajo la hipótesis nula (si ésta especifica una Distribución

absolutamente continua), genera una muestra aleatoria uniformemente distribuida sobre el hipercubo unitario k -dimensional I^k ; trasladando de esta manera el problema general de probar la bondad del ajuste en el caso multivariado simple, al de probar multiuniformidad.

Considerando este enfoque, resulta evidente la importancia de evaluar este procedimiento, con base en un estudio comparativo de potencia entre distintas pruebas de uniformidad multivariada en relación a alternativas derivadas de la Transformación de Rosenblatt.

Después de revisar la literatura existente relacionada con el tema, se encontró como antecedente reciente, un trabajo de Fattorini(1983) en el cual se compararon algunas pruebas de uniformidad multivariada entre las que se incluyeron las de Watson(1961), Anderson (1966) y Weiss(1958) ante un grupo de alternativas a la uniformidad resultantes de aplicar la Transformación de Rosenblatt para el caso Normal con parámetros conocidos. En su estudio, Fattorini supone errores en los parámetros especificados de la Distribución de tal forma que, al aplicar la transformación, se obtienen alternativas a la uniformidad bajo las cuales se hizo un estudio de potencia.

Con base en sus resultados, Fattorini recomienda el uso de las pruebas U^2 y PME (que se describen más adelante) como los mejores métodos para probar la multiuniformidad resultante de transformar las muestras multivariadas normales originales.

El propósito del presente estudio es el de efectuar una comparación entre las pruebas cuyo uso recomienda Fattorini y otras incluídas aquí para probar la bondad del ajuste en el caso multivariado simple, ampliando el análisis ya mencionado mediante la incorporación de un número mayor de alternativas no solo derivadas de errores en los parámetros de la distribución, sino también, de desviaciones de la forma distribucional; en particular, de la normalidad, ya que esta es la distribución supuesta.

En la sección I, se presenta la Transformación de Rosenblatt y se establece una analogía con el procedimiento en el caso univariado simple a través del empleo de la Transformación Integral de Probabilidad, para solucionar el problema de probar bondad de ajuste. En la sección II se describen brevemente las pruebas incluídas en el estudio para luego, en la sección III, establecer las distribuciones nulas bajo las cuales se realizaron los análisis. En la sección IV se presenta un estudio de simulación en el cual se comparan las potencias de las pruebas cuando, las alternativas resultan de aplicar la transformación de Rosenblatt en presencia de errores en los parámetros

especificados de la distribución. Asimismo, en esta sección, se justifica el haber efectuado un estudio ante este tipo de alternativas; necesario ya que, inicialmente, se han supuesto conocidos los parámetros correspondientes.

En la sección V se presentan los resultados del estudio de Montecarlo correspondiente a desviaciones de la normalidad. La sección VI se dedica al análisis de una extensión de la metodología aquí desarrollada para el caso compuesto; i.e., cuando los parámetros de la distribución se desconocen.

Para finalizar, se resumen los aspectos más relevantes del estudio haciéndose algunos comentarios y recomendaciones pertinentes.

I.- LA TRANSFORMACION INTEGRAL DE PROBABILIDAD Y LA TRANSFORMACION DE ROSENBLATT.

En el caso univariado simple, el problema de probar la hipótesis de que una muestra aleatoria X_1, \dots, X_n proviene de una población con función de distribución continua F_0 se resuelve mediante el uso de un resultado conocido como la Transformación Integral de Probabilidad que a continuación se resume.

TEOREMA I.1.- Sea X una variable aleatoria real con función de distribución continua F . Entonces, la variable aleatoria $U = F(X)$ tiene distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$.

Así, bajo la hipótesis nula, las transformadas $U_1 = F(X_1), \dots, U_n = F(X_n)$ constituyen una muestra aleatoria de una distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$ y el problema se reduce al de probar el ajuste a esta distribución.

Una generalización importante de este resultado aplicable al caso multivariado simple, debida a Rosenblatt(1952), es la siguiente.

TEOREMA I.2.- Sea $\underline{X} = (X_1, \dots, X_k)'$ un vector aleatorio de dimensión k con función de distribución absolutamente continua F . Entonces, las k variables aleatorias

$$U_1 = F_1(X_1)$$

$$U_2 = F_2(X_2 | X_1)$$

.

.

.

$$U_k = F_k(X_k | X_{k-1}, \dots, X_1)$$

son independientes y están uniformemente distribuidas en el intervalo $(0, 1)$; en donde F_i es la distribución condicional de X_i dadas $X_{i-1}, X_{i-2}, \dots, X_1$ y F_1 es la distribución marginal de X_1 .

En virtud de lo establecido en el teorema anterior, el probar la hipótesis de que una muestra aleatoria de n vectores $\underline{X}_{(i)} = (X_{1(i)}, \dots, X_{k(i)})'$; $i=1, \dots, n$ proviene de una distribución absolutamente continua F , es equivalente a probar que las observaciones transformadas $\underline{U}_{(i)} = \mathcal{U}(\underline{X}_{(i)})$ constituyen una

muestra aleatoria de una distribución uniforme sobre el hipercubo k -dimensional I^k , en donde ζ representa el mapeo de R^k a I^k proporcionado por la Transformación de Rosenblatt.

Nótese que existen $k!$ transformaciones que corresponden a los posibles arreglos de las coordenadas del vector y esto podría hacernos pensar que el procedimiento no es satisfactorio, ya que el investigador estaría en posibilidades (para dimensiones bajas del vector) de efectuar una prueba con cada una de las $k!$ transformaciones, y elegir aquella particular en la que obtuviera el resultado que desea; sin embargo, como el mismo Rosenblatt señala, este mismo riesgo se corre en cualquier situación en la que existan varias pruebas en el mismo contexto.

NOTA TECNICA

En el caso multinormal, la Transformación de Rosenblatt equivale a transformar el vector estandarizado a través del empleo de una matriz triangular in-

ferior tal que $CC' = \Sigma$. La matriz C es única excepto por los signos (cf. Graybill, 1969, p.299).

A fin de obtener C de Σ , puede utilizarse el llamado "Método de la raíz cuadrada" (o descomposición de Cholesky) que proporciona un conjunto de fórmulas para el cálculo de sus elementos (ver Graybill, 1969, pp. 298-299).

$$\begin{aligned}c_{ii} &= \frac{\sigma_{ii}}{\sigma_{ii}^{1/2}} & 1 \leq i \leq k \\c_{ii} &= \left(\sigma_{ii} - \sum_{\lambda=1}^{i-1} c_{i\lambda}^2 \right)^{1/2} & 1 < i \leq k \\c_{ij} &= \frac{\left(\sigma_{ij} - \sum_{\lambda=1}^{i-1} c_{i\lambda} c_{j\lambda} \right)}{c_{ij}} & 1 < j < i \leq k\end{aligned}$$

Supóngase que el vector \underline{X} tiene distribución Normal con parámetros $\underline{\mu}_0$ y Σ_0 .

Bajo la hipótesis nula de Normalidad, la variable

$$\underline{Z} = C_0^{-1} (\underline{X} - \underline{\mu}_0) \quad , \quad C_0 C_0' = \Sigma_0 \quad .$$

tiene distribución normal con parámetros $\underline{\mu} = \underline{0}$, $\Sigma = I$ y la Transformación de Rosenblatt se reduce a aplicar la Transformación Integral de Probabilidad a cada uno de los elementos

del vector estandarizado \underline{z} ; esto es,

$$\underline{u} = \mathcal{G}(\underline{x}) = (\phi(z_1) , \dots , \phi(z_k))'$$

donde \underline{u} esta uniformemente distribuido sobre I^k .

Aquí, $\phi(\cdot)$ denota la función de distribución de una normal (0,1) evaluada en \cdot .

Podría pensarse que, para el caso normal con parámetros conocidos, sería conveniente estandarizar las observaciones previamente y probar la hipótesis de que las observaciones provienen de una distribución multinormal con vector de medias $\underline{0}$ y matriz de covarianzas identidad; sin embargo, recuérdese que la transformación de Rosenblatt es un procedimiento de tipo más general cuyo empleo se estudiará para el caso de la distribución Normal multivariada, donde dicha transformación equivale a la estandarización de las observaciones a través de la matriz triangular C ya mencionada.

II.- PRUEBAS DE UNIFORMIDAD MULTIVARIADA

II.1.- PRUEBAS A^2 Y U^2 .

Una condición necesaria para que una muestra aleatoria k-variada U_1, \dots, U_n provenga de una distribución uniforme en I^k , es que los elementos $U_{j,i}$ ($j=1, \dots, k; i=1, \dots, n$) de la matriz muestral, constituyan una muestra aleatoria de tamaño nk de una distribución uniforme univariada sobre el intervalo (0,1).

Debido al resultado anterior, es posible detectar desviaciones de la multiuniformidad, a través del empleo de una prueba de uniformidad univariada aplicada a las nk observaciones de la matriz muestral.

Motivado por las recomendaciones de Quesenberry y Miller(1977), Fattorini propone el uso de la estadística U^2 de Watson; cuya fórmula para este caso viene a ser

$$U^2 = w^2 - nk (\bar{u} - 0.5)^2$$

donde

$$w^2 = (1/12nk) + \sum_{i=1}^{nk} \left\{ \frac{(2i-1)}{2nk} - u_{(i)} \right\}^2$$

es la estadística de Cramér-Von Mises, calculada con los elementos ordenados de la matriz muestral y \bar{u} su media aritmética. Las Tablas de la Estadística U^2 pueden consultarse, por ejemplo, en Stephens (1970).

De manera adicional, se propone el uso de la estadística A^2 de Anderson-Darling, ya que se ha demostrado que tiene potencia considerable contra una gran variedad de alternativas a la uniformidad (ver Stephens, 1974, 1986).

La fórmula para el cálculo de A^2 es

$$A^2 = -nk - (1/nk) \sum_{i=1}^{nk} (2i-1) \left[\ln u_{(i)} + \ln \{ 1 - u_{(nk-i+1)} \} \right]$$

los valores críticos de A^2 también pueden consultarse en Stephens(1970) y, para una exposición más detallada, se remite al lector a Stephens(1986).

II.2.- PRUEBAS PME, A_k^2, U_k^2 .

Con la finalidad de construir una prueba multivariada basada en una visión unidimensional de los datos, Fattorini(1982) propone el empleo de una métrica no-euclidiana, a saber,

$$d(\underline{X}, \underline{Y}) = \max_{1 \leq j \leq k} (|X_j - Y_j|), \quad \underline{X}, \underline{Y} \in R^k.$$

Con dicha métrica, la longitud de cada observación muestral sobre I^k se reduce a

$$l_i = \max_{1 \leq j \leq k} (u_{j,i}) \quad ; \quad i=1, \dots, n$$

Bajo la hipótesis de multiuniformidad, las l_i constituyen una muestra aleatoria de una distribución Beta con parámetros $a=k$, $b=1$ (en la notación usual). Por tanto, las longitudes ordenadas tienen valores esperados

$$e_{(i)} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n + 1/k + 1)} \cdot \frac{\Gamma(i+1/k)}{\Gamma(i)}$$

; $i=1, \dots, n$.

Fattorini construye, como medida de discrepancia entre las longitudes esperadas y las observadas, la cantidad

$$PME^* = (1/n) \sum_{i=1}^n \left[\frac{|l_{(i)} - e_{(i)}|}{e_{(i)}} \right]$$

* Abreviatura de "Percentual Mean Difference"

Valores grandes de PME indicarán desviaciones de la uniformidad. Las tablas correspondientes se citan en Fattorini(1983), donde se menciona que se obtuvieron mediante simulación en Fattorini (1982), para valores de $n=5(1)10$; $k=1(1)10$. Como no fué posible obtener tal referencia, el autor de este trabajo se vió en la necesidad de construir la tabla correspondiente para valores de $n=10(10)50$; $k=2(2)6$, que se presenta enseguida (la utilización de esta tabla llevó exactamente a los mismos resultados reportados por Fattorini(1983) por lo cual se considera que coinciden con las tablas reportadas por él en su trabajo de 1982).



TABLA II. 2-1

PERCENTILES SUPERIORES DE LA DISTRIBUCION DE LA ESTADISTICA PME
 PARA VALORES DE $k=2(2)6$ Y $n=10(10)50$

k	n	.01	.05	.10
2	10	0.37261519	0.28650683	0.24625751
	20	0.27389437	0.21635830	0.18414554
	30	0.22135551	0.17579351	0.15372618
	40	0.19683650	0.15510365	0.13526699
	50	0.18045083	0.14060865	0.12066292
3	10	0.24803447	0.19755192	0.17037872
	20	0.18211100	0.14255764	0.12329415
	30	0.15521938	0.12122319	0.10365157
	40	0.13402681	0.10396741	0.09026473
	50	0.12214479	0.09461488	0.08186284
4	10	0.19015558	0.14817689	0.12932736
	20	0.14298695	0.11072543	0.09443227
	30	0.11327761	0.09061293	0.07766051
	40	0.10170064	0.07925264	0.06879316
	50	0.08997579	0.07122590	0.06171054
5	10	0.15726304	0.12007266	0.10253756
	20	0.11255850	0.08814742	0.07530618
	30	0.09268827	0.07232317	0.06268674
	40	0.08282939	0.06335995	0.05494438
	50	0.07284173	0.05736731	0.04982777
6	10	0.13974531	0.10222705	0.08790762
	20	0.09572883	0.07484879	0.06436847
	30	0.07723547	0.06087321	0.05289679
	40	0.06849919	0.05382583	0.04621512
	50	0.06060401	0.04823511	0.04157374

De manera inmediata es posible proponer otras pruebas alternativas a PME, si se nota que el problema radica en probar el ajuste de las longitudes observadas a la distribución Beta con los parámetros ya indicados. Se sugiere entonces el procedimiento usual, que consiste en el uso de la Transformación Integral de Probabilidad para, posteriormente, efectuar una prueba de uniformidad univariada sobre las observaciones transformadas; proponiéndose, concretamente, las pruebas A^2 y U^2 descritas antes.

El objetivo de modificar la prueba PME, se debe a que se espera incrementar la potencia mediante el empleo de estadísticas más refinadas que PME.

La metodología propuesta se resume como sigue:

1. Calcular las longitudes observadas

$$l_i = \max_{1 \leq j \leq k} (u_{j,i}) ; i=1, \dots, n$$

2. Transformar las longitudes observadas mediante:

$$u_i = l_i^k ; i=1, \dots, n$$

3. Aplicar la prueba A^2 o U^2 sobre las n observaciones transformadas.

La aplicación de las pruebas A^2 y U^2 en este contexto se denominará, respectivamente, prueba A_k^2 y prueba U_k^2 .

III.- DISTRIBUCIONES NULAS

Siguiendo el esquema de simulación de Fattorini (1983), se consideraron dos tipos de hipótesis nulas para los efectos de nuestro estudio. La primera de ellas, que aquí llamaremos " de no correlación ", establece que los vectores de observaciones provienen de una distribución Normal multivariada con vector de medias

$$\underline{\mu} = (0, \dots, 0)'$$

y matriz de covarianzas

$$\Sigma = I.$$

La segunda, a la que nos referiremos " de correlación ", establece multinormalidad con parámetros

$$\underline{\mu} = (0, \dots, 0)'$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.6 & \dots & 0.6 \\ 0.6 & 1.0 & \dots & 0.6 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0.6 & 0.6 & \dots & 1.0 \end{bmatrix}$$

Note que se ha impuesto una estructura relativamente simple en tales parámetros; a saber,

$$\underline{\mu} = (\mu, \dots, \mu)'$$

$$\Sigma = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho \\ \rho & 1 & & \rho \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho & \rho & & 1 \end{bmatrix}$$

Es importante señalar que, sin pérdida de generalidad, en ambos casos se han considerado como parámetros de las distribuciones marginales, la media igual a cero y la varianza unitaria como consecuencia de que, al aplicar la transformación de Rosenblatt, estos valores conocidos no influyen en los resultados.

Por otra parte se aclara la necesidad de evaluar los procedimientos bajo los dos tipos de hipótesis nulas descritas anteriormente; ya que, aunque el esquema no es muy general, nos permite estudiar el comportamiento de la metodología propuesta en el caso de variables correlacionadas, donde la transformación de Rosenblatt afecta de manera distinta a cada componente del vector; así como en el caso contrario, donde la transformación es idéntica para todas las componentes.

IV.- ESTUDIO PARA FALLAS EN LA ESPECIFICACION DE PARAMETROS MAS NO EN LA FORMA DISTRIBUCIONAL

Antes de iniciar la descripción de esta parte del trabajo, conviene reflexionar sobre la validez de la misma, ya que bien podría cuestionarse debido a que, en el caso simple, se suponen conocidos los parámetros de la distribución y por tanto pudiera parecer irrelevante el considerar alternativas relacionadas con errores en ellos. A continuación se exponen brevemente las razones.

Primeramente, se efectuó tal estudio con el objeto de comparar los resultados aquí obtenidos con los reportados por Fattorini(1983) debido a que, al obtener alternativas a la uniformidad que resultan de transformar con errores en los parámetros, se evalúan las potencias de las pruebas ya descritas ante este tipo particular de desviaciones de la hipótesis nula, en la que se establece multiuniformidad de las observaciones transformadas.

En segundo lugar, en la práctica, no necesariamente se conocen los parámetros de la distribución, sino que se suponen conocidos. Esto obedece muchas veces a que los parámetros

se relacionan con cantidades en un modelo básico, que bien pudiera no ser el correcto. Así, el señalar un elemento específico de una familia de distribuciones en la hipótesis nula, es una afirmación muy fuerte que puede no ser cierta debido a un error tanto en la forma distribucional como en los parámetros especificados.

En lo que respecta a las distribuciones alternativas relacionadas con desviaciones en los parámetros, se plantearon varios tipos de éstas, tomando en cuenta una estructura de equicorrelación y varianzas idénticas en la matriz de covarianzas; dando mayor énfasis en errores que pudiesen ocurrir en el vector de medias. Nuevamente se señala que, aunque estas alternativas (congruentes con el esquema indicado en la sección anterior) no permiten tener un alto grado de generalidad en cuanto a las conclusiones que se obtengan, son suficientes para explorar el comportamiento de las pruebas ante ciertos tipos de desviaciones de la hipótesis nula.

Para el cálculo de las potencias empíricas de las pruebas, se generaron mil muestras aleatorias de cada una de las alternativas seleccionadas y para cada tamaño de muestra $n=10(10)50$. Las pruebas se efectuaron a un nivel de significancia del 5%.

Para la simulación de vectores multinormales se utilizó un método aparecido en Scheuer y Stoller(1962) y referido por Naylor et al (1966).

Las tablas IV.1 a IV.10 resumen los resultados obtenidos mediante el proceso de simulación. Dichos resultados cubren los casos en que se ha supuesto no correlación entre las componentes de los vectores, así como aquél en que las variables están correlacionadas; restringiéndose todas ellas al caso bivariado. En cada tabla y, para cada alternativa, se señala mediante el símbolo (+), aquella prueba que tuvo el mayor número de casos de rechazo.

A partir de las tablas, es claro que en el planteamiento de las alternativas se ha tomado en cuenta el factor de orden en las componentes del vector de medias, para el caso de variables correlacionadas. Esto se debe a que, a priori, es posible determinar que la potencia dependerá de la componente afectada, en virtud de que la transformación de Rosenblatt, afecta de manera distinta a cada una de las variables. De la misma forma se anticipa que, bajo la hipótesis de no correlación, se anula este efecto ya que las distribuciones condicionales coinciden con las marginales que son idénticas.

Por esta razón, bajo la hipótesis nula de no correlación, no se evalúa la potencia contra todas las alternativas por eliminarse este efecto de orden; excluyéndose todas aquellas constituidas por permutaciones de un mismo conjunto de valores de las componentes del vector de medias.

TABLA IV.1
 Casos de rechazo para alternativas parametrizadas
 Dimension $k=2$
 Variables no correlacionadas
 Tamaño de muestra $n=10$
 Nivel de significancia: 0.05 Simulaciones: 1000

Alternativa	Pruebas						
	Vector de Medias	Varianza	Correlación	U^2	A^2	FME	A_k^2
$(1, 0)'$	1.0	0.0	278	597	561	653 +	304
$(-1, 0)'$	1.0	0.0	240	586 +	303	304	133
$(1, 1)'$	1.0	0.0	828	994 +	959	961	696
$(-1, -1)'$	1.0	0.0	826	997 +	956	960	699
$(-1, 1)'$	1.0	0.0	414	351	291	447 +	182
$(0, 0)'$	2.25	0.0	374	465 +	227	419	219
$(0, 0)'$	0.36	0.0	609+	85	10	92	331
$(0, 0)'$	1.0	0.9	204	194	380 +	339	138

TABLA IV.2
Casos de rechazo para alternativas parametrizadas
Dimension k=2
Variabes no correlacionadas
Tamaño de muestra n=20

Nivel de significancia: 0.05 Simulaciones: 1000

Alternativa	Pruebas						
	Varianza	Correlación	U^2	Λ^2	FME	λ_k^2	U_k^2
(1, 0) [*]	1.0	0.0	472	859	825	899 +	507
(-1, 0) [*]	1.0	0.0	492	881+	517	536	247
(1, 1) [*]	1.0	0.0	989	1000+	998	996	948
(-1,-1) [*]	1.0	0.0	985	999 +	996	998	951
(-1, 1) [*]	1.0	0.0	723+	624	492	712	318
(0, 0) [*]	2.25	0.0	681	708 +	258	590	412
(0, 0) [*]	0.36	0.0	947 +	550	36	394	693
(0, 0) [*]	1.0	0.9	182	179	574+	547	234

TABLA IV.3
 Casos de rechazo para alternativas parametrizadas
 Dimension $k=2$
 Variables no correlacionadas
 Tamaño de muestra $n=30$
 Nivel de significancia: 0.05 Simulaciones: 1000

Alternativa	Pruebas						
	Varianza	Correlación	U^2	A^2	PME	A_k^2	U_k^2
(1, 0)'	1.0	0.0	706	967	949	984+	738
(-1, 0)'	1.0	0.0	681	972+	668	664	325
(1, 1)'	1.0	0.0	1000 +	1000 +	1000 +	1000 +	998
(-1,-1)'	1.0	0.0	1000 +	1000 +	1000 +	1000 +	1000 +
(-1, 1)'	1.0	0.0	898 +	837	662	830	455
(0, 0)'	2.25	0.0	856	879+	423	735	606
(0, 0)'	0.36	0.0	995 +	884	211	702	890
(0, 0)'	1.0	0.9	194	191	788 +	723	368

TABLA IV.4
 Casos de rechazo para alternativas parametrizadas
 Dimension $k=2$
 Variables no correlacionadas
 Tamaño de muestra $n=40$

Nivel de significancia: 0.05 Simulaciones: 1000

Alternativa	Pruebas							
	Vector de Medias	Varianza	Correlación	U^2	A^2	FME	A_k^2	U_k^2
$(1, 0)^c$	1.0	0.0	0.0	817	996	987	997+	853
$(-1, 0)^c$	1.0	0.0	0.0	806	995 +	781	778	434
$(1, 1)^c$	1.0	0.0	0.0	1000+	1000 +	1000+	1000 +	1000 +
$(-1, -1)^c$	1.0	0.0	0.0	1000+	1000 +	1000+	1000 +	1000 +
$(-1, 1)^c$	1.0	0.0	0.0	976+	936	803	938	596
$(0, 0)^c$	2.25	0.0	0.0	940	951 +	517	838	733
$(0, 0)^c$	0.36	0.0	0.0	1000+	981	369	862	951
$(0, 0)^c$	1.0	0.9	0.9	187	185	890 +	830	461

TABLA IV.5
 Casos de rechazo para alternativas parametrizadas
 Dimension $k=2$
 Variables no correlacionadas
 Tamaño de muestra $n=50$

Nivel de significancia: 0.05			Simulaciones: 1000				
Alternativa			Pruebas				
Vector de Medias	Varianza	Correlación	U^2	Λ^2	PME	Λ_k^2	U_k^2
$(1, 0)'$	1.0	0.0	892	999	998	1000+	914
$(-1, 0)'$	1.0	0.0	906	998 +	851	841	499
$(1, 1)'$	1.0	0.0	1000+	1000 +	1000 +	1000+	1000 +
$(-1, -1)'$	1.0	0.0	1000+	1000 +	1000 +	1000+	1000 +
$(-1, 1)'$	1.0	0.0	986+	978	862	974	712
$(0, 0)'$	2.25	0.0	978	985+	580	917	821
$(0, 0)'$	0.36	0.0	1000+	999	537	954	987
$(0, 0)'$	1.0	0.9	186	201	936+	893	574

TABLA IV.6
 Casos de rechazo para alternativas parametrizadas
 Dimension $k=2$
 Variables correlacionadas
 Tamaño de muestra $n=10$

Nivel de significancia: 0.05			Simulaciones: 1000				
Alternativa	Pruebas						
Vector de Medias	Varianza	Correlación	U^2	A^2	FME	A_k^2	U_k^2
(1, 0)'	1.0	0.6	292	272	359	466+	180
(0, 1)'	1.0	0.6	370	792	763	851+	479
(-1, 0)'	1.0	0.6	270+	247	128	190	86
(0,-1)'	1.0	0.6	353	783 +	376	366	166
(1, 1)'	1.0	0.6	530	898 +	759	827	410
(-1,-1)'	1.0	0.6	519	900 +	760	765	377
(1,-1)'	1.0	0.6	953	987 +	237	417	182
(-1, 1)'	1.0	0.6	927	980	974	999+	911
(0, 0)'	2.25	0.6	376	462 +	221	418	221
(0, 0)'	0.36	0.6	611+	91	12	88	328
(0, 0)'	1.0	0.0	113	108	135	193+	76

TABLA IV.7
 Casos de rechazo para alternativas parametrizadas
 Dimensión $k=2$
 Variables correlacionadas
 Tamaño de muestra $n=20$
 Nivel de significancia: 0.05 Simulaciones: 1000

Alternativa	Pruebas							
	Vector de Medias	Varianza	Correlación	U^2	A^2	PME	A_k^2	U_k^2
$(-1, 0)'$	1.0	0.6	523	487	558	729 +	332	
$(0, 1)'$	1.0	0.6	677	977	963	986 +	806	
$(-1, 0)'$	1.0	0.6	494 +	458	176	293	132	
$(0, -1)'$	1.0	0.6	697	988 +	614	611	250	
$(1, 1)'$	1.0	0.6	858	997 +	972	990	797	
$(-1, -1)'$	1.0	0.6	859	992 +	951	958	691	
$(1, -1)'$	1.0	0.6	999	1000 +	378	648	313	
$(-1, 1)'$	1.0	0.6	999	1000 +	1000	1000	997	
$(0, 0)'$	2.25	0.6	684	709 +	256	588	416	
$(0, 0)'$	0.36	0.6	951 +	549	39	392	695	
$(0, 0)'$	1.0	0.0	168	155	203	263 +	65	

TABLA IV.8
 Casos de rechazo para alternativas parametrizadas
 Dimension $k=2$
 Variables correlacionadas
 Tamaño de muestra $n=30$
 Nivel de significancia: 0.05 Simulaciones: 1000

Alternativa	Pruebas						
	Vector de Medias	Varianza	Correlación	U^2	A^2	FME	A^2_{χ}
$(1, 0)'$	1.0	0.6	711	675	737	879+	507
$(0, 1)'$	1.0	0.6	882	999 +	995	999+	943
$(-1, 0)'$	1.0	0.6	737+	702	259	422	203
$(0, -1)'$	1.0	0.6	874	997 +	794	772	424
$(1, 1)'$	1.0	0.6	970	1000 +	998	999	925
$(-1, -1)'$	1.0	0.6	971	1000 +	994	998	872
$(1, -1)'$	1.0	0.6	1000+	1000 +	558	788	473
$(-1, 1)'$	1.0	0.6	1000+	1000 +	1000+	1000+	1000+
$(0, 0)'$	2.25	0.6	855	882 +	424	739	601
$(0, 0)'$	0.36	0.6	999+	890	216	710	900
$(0, 0)'$	1.0	0.0	242	211	319	385+	105

TABLA IV.9
 Casos de rechazo para alternativas parametrizadas
 Dimension $k=2$
 Variables correlacionadas
 Tamaño de muestra $n=40$

Nivel de significancia: 0.05			Simulaciones: 1000				
Alternativa			Pruebas				
Vector de Medias	Varianza	Correlación	U^2	A^2	PME	A^2_k	U^2_k
(1, 0)'	1.0	0.6	845	820	843	944 +	650
(0, 1)'	1.0	0.6	946	1000 +	1000 +	1000 +	983
(-1, 0)'	1.0	0.6	830 +	794	312	495	237
(0,-1)'	1.0	0.6	965	1000 +	903	885	550
(1, 1)'	1.0	0.6	994	1000 +	1000 +	1000 +	986
(-1,-1)'	1.0	0.6	993	1000 +	1000 +	1000 +	951
(1,-1)'	1.0	0.6	1000 +	1000 +	681	907	603
(-1, 1)'	1.0	0.6	1000 +	1000 +	1000 +	1000 +	1000 +
(0, 0)'	2.25	0.6	944	950 +	511	841	732
(0, 0)'	0.36	0.6	1000 +	979	366	860	951
(0, 0)'	1.0	0.0	337	275	440	515 +	130

TABLA IV.10
 Casos de rechazo para alternativas parametrizadas
 Dimensión $k=2$
 Variables correlacionadas
 Tamaño de muestra $n=50$

Nivel de significancia: 0.05			Simulaciones: 1000				
Alternativa	Pruebas						
Vector de Medias	Varianza	Correlación	U^2	A^2	PME	A_k^2	U_k^2
(1, 0) [*]	1.0	0.6	911	892	895	968+	693
(0, 1) [*]	1.0	0.6	989	1000+	1000+	1000+	997
(-1, 0) [*]	1.0	0.6	923+	895	384	584	299
(0,-1) [*]	1.0	0.6	990	1000+	958	944	647
(1, 1) [*]	1.0	0.6	999	1000+	1000+	1000+	997
(-1,-1) [*]	1.0	0.6	999	1000+	1000+	1000+	980
(1,-1) [*]	1.0	0.6	1000+	1000+	758	954	723
(-1, 1) [*]	1.0	0.6	1000+	1000+	1000+	1000+	1000+
(0, 0) [*]	2.25	0.6	990+	986	583	916	822
(0, 0) [*]	0.36	0.6	1000+	1000+	540	955	980
(0, 0) [*]	1.0	0.0	405	374	514	588+	149

De los resultados numéricos de los procesos de simulación para esta clase de alternativas reportados en las tablas anteriores, se desprenden las siguientes observaciones referentes al comportamiento de las pruebas.

Bajo los dos tipos de hipótesis nulas consideradas, las pruebas U^2 y A^2 mantienen invariante su potencia con respecto a los casos en que se sub-estime o sobre-estime una componente del vector de medias. Por el contrario, las pruebas PME, A_k^2 y U_k^2 tienen como característica que su potencia es mayor cuando se incurre en un error por sub-estimación que cuando éste corresponde a un error por sobre-estimación. Se conjetura que la razón de este comportamiento estriba en que las pruebas U_k^2 , A_k^2 y PME, procesan la información a través de la máxima componente de cada vector observación. Se infiere que un procedimiento basado en las componentes mínimas, tendrá un comportamiento inverso al aquí observado.

Cuando se presentan desviaciones en más de una componente del vector de medias, si éstas son en el mismo sentido (todas positivas o todas negativas), los resultados muestran que todas las pruebas se comportan adecuadamente; en especial A^2 , PME y A_k^2 en muestras pequeñas.

Un caso de interés es cuando no todas las componentes se afectan en el mismo sentido. Al consultar las tablas, se aprecia que las pruebas más potentes fueron A^2 , y A_k^2 . Tiene esta última el inconveniente de que su potencia varía en función del número de componentes sobre y sub-estimadas; comportamiento similar al presentado por PME y U_k^2 .

Bajo la hipótesis nula de no correlación, la potencia de las pruebas no depende de cuales componentes se afecten ni del orden, como ya se mencionó con anterioridad. Bajo la hipótesis nula de correlación, esta potencia depende de las componentes afectadas; observándose que ésta aumenta a medida que las desviaciones se presentan en las últimas componentes.

A este mismo respecto es importante señalar que la prueba U^2 parece ser menos sensible que las otras al efecto de orden indicado.

Para la alternativa correspondiente a la sub-estimación de la varianza, las pruebas más potentes fueron U^2 , A^2 , y A_k^2 con una ligera superioridad de las dos últimas en muestras pequeñas. En el caso contrario, cuando se sobre-estima la varianza, la potencia de las pruebas disminuye considerable-

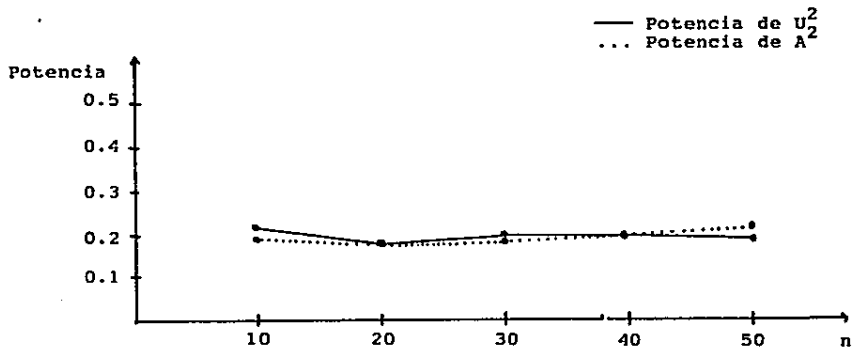
mente para tamaños de muestra pequeños, excepto la de U^2 que se muestra muy superior a las demás.

Una observación importante es que, para la alternativa de sobre-estimación de la varianza, la prueba PME resultó ser sesgada (para probar la hipótesis con $\alpha = 0.05$, se obtuvo una potencia inferior a 0.05). Debido al número de simulaciones, si el número de rechazos observado es menor a 39, se rechaza la hipótesis de que la prueba es insesgada (con un nivel de significancia del 5%).

Referente a las alternativas en que existe error en la correlación, se puede apreciar que, bajo la hipótesis nula de no correlación, las pruebas U^2 y A^2 las detectan con baja potencia v. aparentemente, ésta no aumenta con el tamaño de muestra; siendo PME y A_k^2 las más potentes. No obstante, bajo la hipótesis nula de correlación, este defecto se corrige siendo ahora las pruebas A_k^2 y U^2 las que presentan la mayor potencia. Las gráficas IV.1 y IV.2 siguientes nos permiten apreciar con mayor claridad esta situación.

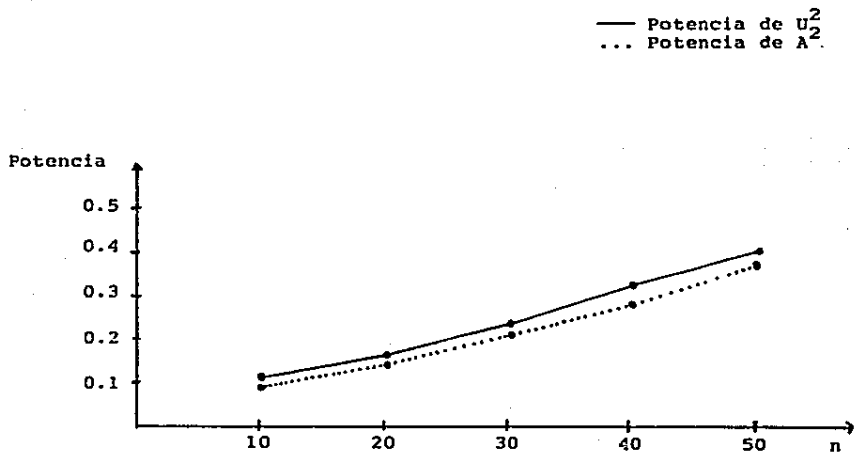
GRAFICA IV.1

Efecto del tamaño de muestra sobre la potencia de las pruebas U^2 y A^2 cuando se ha supuesto no correlación y en realidad $\rho = 0.9$



GRAFICA IV.2

Efecto del tamaño de muestra sobre la potencia de las pruebas U^2 y A^2 cuando se ha supuesto $\rho = 0.6$ y en realidad no existe correlación.



V.- ESTUDIO PARA FALLAS EN LA ESPECIFICACION DE LA FORMA DISTRIBUCIONAL

En esta sección, se describe un estudio de simulación relacionado con desviaciones de la normalidad. El estudio se efectuó bajo los dos tipos de hipótesis nulas indicadas en la sección III y se seleccionaron algunas alternativas a la normalidad para las cuales se calcularon las potencias empíricas de las pruebas.

Se generaron mil muestras para cada una de las alternativas seleccionadas y para cada tamaño de muestra $n=10(10)50$, efectuando las pruebas a un nivel de significancia del 5%.

Debido a la dificultad de elegir las alternativas a la normalidad, se buscó en la literatura existente sobre este tema, e inicialmente se trató de utilizar un generador de distribuciones multivariadas no normales propuesto en un trabajo de Vale y Maurelli(1983); mismo que fué ya utilizado por O'Reilly y Gracia-Medrano(1988) con el cual es posible generar observaciones no normales con medidas marginales de asimetría, kurtosis y correlación predeterminadas. Sin embargo, tal método involucra la solución de un sistema de ecuaciones no lineales

que requiere de aproximaciones iniciales muy cercanas a las soluciones, por tal razón el método utilizado para resolver dicho sistema presentó problemas de convergencia para un buen número de alternativas que se habían elegido. Nótese que, en el trabajo antes citado de O'Reilly y Gracia-Medrano, las alternativas utilizadas resultan ser distribuciones muy cercanas a la normal y por ello reportan potencias relativamente pequeñas en todos los casos.

Se decidió entonces optar por otro método para generar las alternativas no normales, habiéndose encontrado un método para generar vectores bivariados no normales denominado " de las distribuciones condicionales correlacionadas ", citado y utilizado por Andrews et al (1972), que consiste en la generación de observaciones no normales, de manera independiente para cada una de las componentes del vector para, posteriormente, correlacionarlas introduciendo una transformación lineal de las coordenadas independientes.

A continuación se describe el mecanismo utilizado para la generación de las observaciones no normales.

Para generar vectores bivariados no normales, con la misma distribución marginal no normal, se generan valores de variables aleatorias Z_1 y Z_2 con la misma distribución no normal. En nuestro caso, se generaron con media cero y varianza unitaria. Posteriormente se introduce una transformación del tipo

$$Y_1 = a Z_1 + b Z_2$$

$$Y_2 = b Z_1 + a Z_2$$

donde

$$a^2 + b^2 = 1$$

$$2ab = \rho$$

de tal forma que las variables Y_1 , Y_2 tienen la misma distribución no normal con media cero y varianza uno y tienen correlación ρ .

Para el caso de variables no correlacionadas se utilizaron $a = 1$ y $b = 0$; mientras que para el caso de variables correlacionadas los valores elegidos fueron $a = \sqrt{0.9}$ y $b = \sqrt{0.1}$

Otro caso de interés para el estudio que aquí se presenta, es el que corresponde a la generación de observaciones bivariadas donde se tiene una marginal normal y la otra no normal. Para ello, se generaron valores de variables aleatorias Z y W, donde Z tiene distribución Normal estándar y W tiene una distribución no normal estandarizada. La transformación utilizada para tal situación, viene dada por

$$Y_1 = Z$$

$$Y_2 = \rho Z + \sqrt{1 - \rho^2} W$$

obteniéndose observaciones Y_1, Y_2 de media cero, varianza uno y con un coeficiente de correlación igual a ρ .

Las distribuciones marginales no normales involucradas en el presente trabajo, fueron las comunmente utilizadas para el caso univariado, como la Ji cuadrada, la exponencial, Lognormal, Uniforme, Logística, Laplace y t de Student. Se destaca que, en el artículo antes citado de Andrews, las distribuciones bivariadas no normales en las que se involucran distribuciones marginales tales como la Ji cuadrada con diez grados de libertad, la de Laplace

y algunas otras como la logística, son señalados como casos de interés, en los cuales no todas las técnicas detectan este tipo de desviaciones con la misma facilidad.

Siguiendo el esquema de alternativas en O'Reilly y Gracia-Medrano(1988), se consideraron cuatro grupos de alternativas.

- a) Variables no correlacionadas con la misma distribución marginal no normal
- b) Variables correlacionadas con la misma distribución marginal no normal
- c) Variables no correlacionadas: una con distribución normal y la otra no normal
- d) Variables correlacionadas: una con distribución normal y la otra no normal

Las tablas V.1 a V.20 presentan los resultados de simulación relativos a las potencias empíricas de las pruebas ante las alternativas seleccionadas en el estudio, que aparecen allí mismo especificadas. Para cada alternativa, se señala aquella prueba que obtuvo el mayor número de rechazos, mediante el símbolo (+).

TABLA V.1
 Casos de rechazo para alternativas no normales
 Dimension $k=2$
 Variables no correlacionadas
 Misma distribución marginal no normal
 Tamaño de muestra $n=10$

Nivel de significancia: 0.05		Simulaciones: 1000				
Alternativa		Pruebas				
		U^2	A^2	PME	A_K^2	U_K^2
Ji cuadrada	1 g.l.	849+	435	105	357	350
Ji cuadrada	3 g.l.	302+	121	74	169	131
Ji cuadrada	4 g.l.	238+	108	65	145	105
Ji cuadrada	6 g.l.	135+	73	49	110	93
Ji cuadrada	10 g.l.	101+	55	46	100	71
Exponencial	$\lambda = 5$	515+	199	91	236	201
Lognormal	$\sigma = 1$	93	60	58	100+	74
Uniforme (0, 1)		148+	91	101	96	123
Logística	$\sigma = 1$	63+	50	36	51	50
Laplace	$\sigma = 1$	167+	52	23	63	113
Student	3 g.l.	301+	49	18	60	165
Student	4 g.l.	134+	45	29	46	105

TABLA V.2
Casos de rechazo para alternativas no normales
Dimension k=2
Variabiles no correlacionadas
Misma distribución marginal no normal
Tamaño de muestra n=20
Nivel de significancia: 0.05

Alternativa	Simulaciones: 1000				
	Pruebas				
	U^2	A^2	FME	A_k^2	U_k^2
J1 cuadrada 1 g.l.	989+	905	269	593	606
J1 cuadrada 3 g.l.	564+	271	95	253	254
J1 cuadrada 4 g.l.	422+	200	77	197	184
J1 cuadrada 6 g.l.	289+	123	65	153	144
J1 cuadrada 10 g.l.	176+	86	45	114	116
Exponencial $\lambda = 5$	799+	487	133	390	395
Lognormal $\sigma = 1$	94	73	48	99+	90
Uniforme (0, 1)	246+	132	91	110	190
Logística $\sigma = 1$	92+	53	33	59	67
Laplace $\sigma = 1$	306+	105	32	110	185
Student 3 g.l.	587+	161	27	138	334
Student 4 g.l.	241+	64	32	72	146

TABLA V.3
 Casos de rechazo para alternativas no normales
 Dimension $k=2$
 Variables no correlacionadas
 Misma distribución marginal no normal
 Tamaño de muestra $n=30$

Alternativa	Nivel de significancia: 0.05	Simulaciones: 1000				
		Pruebas				
		U^2	A^2	FME	A_k^2	U_k^2
Ji cuadrada	1 g.l.	1000+	999	520	776	809
Ji cuadrada	3 g.l.	758+	437	157	330	375
Ji cuadrada	4 g.l.	608+	302	116	260	292
Ji cuadrada	6 g.l.	401+	188	96	205	209
Ji cuadrada	10 g.l.	255+	141	91	154	165
Exponencial	$\lambda = 5$	946+	787	258	559	574
Lognormal	$\sigma = 1$	124+	83	72	102	106
Uniforme (0, 1)		396+	176	124	149	275
Logística	$\sigma = 1$	106+	51	43	62	81
Laplace	$\sigma = 1$	443+	132	40	133	269
Student	3 g.l.	744+	313	71	197	465
Student	4 g.l.	311+	89	49	105	195

TABLA V.4
 Casos de rechazo para alternativas no normales
 Dimension $k=2$
 Variables no correlacionadas
 Misma distribución marginal no normal
 Tamaño de muestra $n=40$

Alternativa	Nivel de significancia: 0.05	Simulaciones: 1000				
		Pruebas				
		U^2	A^2	FME	A_k^2	U_k^2
Jí cuadrada	1 g.l.	1000 +	1000	737	898	915
Jí cuadrada	3 g.l.	890 +	641	199	424	467
Jí cuadrada	4 g.l.	743 +	459	164	346	385
Jí cuadrada	6 g.l.	513 +	282	123	236	283
Jí cuadrada	10 g.l.	291 +	152	85	157	176
Exponencial	$\lambda = 5$	988 +	945	391	657	664
Lognormal	$\sigma = 1$	167 +	90	60	108	120
Uniforme (0, 1)		460 +	217	137	177	361
Logística	$\sigma = 1$	101 +	50	41	55	78
Laplace	$\sigma = 1$	527 +	180	59	143	341
Student	3 g.l.	862 +	492	120	336	612
Student	4 g.l.	439 +	125	35	114	259

TABLA V.5
 Casos de rechazo para alternativas no normales
 Dimensión $k=2$
 Variables no correlacionadas
 Misma distribución marginal no normal
 Tamaño de muestra $n=50$

Nivel de significancia: 0.05		Simulaciones: 1000				
Alternativa		Pruebas				
		U^2	A^2	PME	A_k^2	U_k^2
Ji cuadrada	1 g.l.	1000 +	1000	840	943	953
Ji cuadrada	3 g.l.	950 +	786	253	495	531
Ji cuadrada	4 g.l.	831 +	597	222	405	447
Ji cuadrada	6 g.l.	598 +	324	129	254	307
Ji cuadrada	10 g.l.	379 +	182	91	171	186
Exponencial	$\lambda = 5$	999 +	993	505	763	797
Lognormal	$\sigma = 1$	179 +	113	75	120	133
Uniforme (0, 1)		583 +	292	144	231	445
Logística	$\sigma = 1$	132 +	59	44	61	90
Laplace	$\sigma = 1$	650 +	238	87	205	390
Student	3 g.l.	947 +	655	211	463	730
Student	4 g.l.	510 +	177	53	145	286

TABLA V.6
Casos de rechazo para alternativas no normales
 Dimension $k=2$
 Variables correlacionadas
 Misma distribución marginal no normal
 Tamaño de muestra $n=10$

Nivel de significancia: 0.05 Simulaciones: 1000

Alternativa *	Pruebas				
	U^2	Λ^2	FME	Λ_k^2	U_k^2
Ji cuadrada 1 g.l.	608+	266	68	329	351
Ji cuadrada 3 g.l.	217+	98	42	139	132
Ji cuadrada 4 g.l.	158+	77	40	115	99
Ji cuadrada 6 g.l.	121+	87	45	116	89
Ji cuadrada 10 g.l.	83	67	52	93+	76
Exponencial $\lambda = 5$	338+	156	57	195	194
Lognormal $\sigma = 1$	70+	68	53	81	70
Uniforme (0, 1)	85+	68	67	67	70
Logística $\sigma = 1$	82+	57	41	49	54
Laplace $\sigma = 1$	129+	45	28	61	81
Student 3 g.l.	260+	67	22	66	143
Student 4 g.l.	115+	40	21	54	80

(*) Correspondiente a la Distribución de $Y = a X_1 + b X_2$ cuando X_1 y X_2 tienen la misma distribución no normal indicada en la tabla.

TABLA V.7
 Casos de rechazo para alternativas no normales
 Dimension $k=2$
 Variables correlacionadas
 Misma distribución marginal no normal
 Tamaño de muestra $n=20$

Nivel de significancia: 0.05 Simulaciones: 1000

Alternativa *	Pruebas				
	U^2	A^2	FME	λ_k^2	U_k^2
Ji cuadrada 1 g.l.	895 +	579	243	530	630
Ji cuadrada 3 g.l.	426 +	185	55	210	234
Ji cuadrada 4 g.l.	298 +	128	40	177	182
Ji cuadrada 6 g.l.	204 +	91	33	129	121
Ji cuadrada 10 g.l.	141 +	77	42	96	100
Exponencial $\lambda = 5$	655 +	323	95	339	381
Lognormal $\sigma = 1$	76 +	53	32	65	67
Uniforme (0, 1)	149 +	70	59	72	124
Logística $\sigma = 1$	69 +	45	38	46	60
Laplace $\sigma = 1$	204 +	74	39	77	122
Student 3 g.l.	451 +	132	32	129	284
Student 4 g.l.	203 +	68	32	88	128

(*) Correspondiente a la Distribución de $Y = a X_1 + b X_2$ cuando X_1 y X_2

tienen la misma distribución no normal indicada en la tabla.

TABLA V.8
Casos de rechazo para alternativas no normales
 Dimension $k=2$
 Variables correlacionadas
 Misma distribución marginal no normal
 Tamaño de muestra $n=30$

Nivel de significancia: 0.05 Simulaciones: 1000

Alternativa*	Pruebas				
	U^2	A^2	FME	A_k^2	U_k^2
Ji cuadrada 1 g.l.	973 +	870	545	722	818
Ji cuadrada 3 g.l.	577 +	256	111	273	332
Ji cuadrada 4 g.l.	446 +	209	87	225	285
Ji cuadrada 6 g.l.	281 +	134	60	172	180
Ji cuadrada 10 g.l.	173 +	89	53	109	124
Exponencial $\lambda = 5$	789 +	501	222	439	503
Lognormal $\sigma = 1$	108 +	75	50	96	83
Uniforme (0, 1)	215 +	91	74	98	173
Logística $\sigma = 1$	83 +	53	48	58	76
Laplace $\sigma = 1$	297 +	95	51	105	173
Student 3 g.l.	630 +	250	69	212	383
Student 4 g.l.	250 +	83	50	93	162

(*) Correspondiente a la Distribución de $Y = a X_1 + b X_2$ cuando X_1 y X_2 tienen la misma distribución no normal indicada en la tabla.

TABLA V.9
Casos de rechazo para alternativas no normales
Dimension k=2
Variabes correlacionadas
Misma distribución marginal no normal
Tamaño de muestra n=40
Nivel de significancia: 0.05 Simulaciones: 1000

Alternativa*	Pruebas				
	U^2	A^2	FME	A_k^2	U_k^2
Ji cuadrada 1 g.l.	994+	977	750	847	914
Ji cuadrada 3 g.l.	685+	399	161	334	411
Ji cuadrada 4 g.l.	536+	271	109	257	313
Ji cuadrada 6 g.l.	391+	165	74	187	232
Ji cuadrada 10 g.l.	247+	109	58	125	151
Exponencial $\lambda = 5$	898+	682	345	583	688
Lognormal $\sigma = 1$	122+	73	44	83	99
Uniforme (0, 1)	276+	106	73	117	222
Logística $\sigma = 1$	89+	56	50	59	70
Laplace $\sigma = 1$	357+	126	67	139	243
Student 3 g.l.	778+	393	92	313	559
Student 4 g.l.	320+	96	50	99	190

(*) Correspondiente a la Distribución de $Y = a X_1 + b X_2$ cuando X_1 y X_2 tienen la misma distribución no normal indicada en la tabla.

TABLA V.10
 Casos de rechazo para alternativas no normales
 Dimension $k=2$
 Variables correlacionadas
 Misma distribución marginal no normal
 Tamaño de muestra $n=50$
 Nivel de significancia: 0.05 Simulaciones: 1000

Alternativa*		Pruebas				
		U^2	A^2	FME	A_k^2	U_k^2
Ji cuadrada	1 g.l.	999 +	996	895	918	955
Ji cuadrada	3 g.l.	830 +	532	236	451	542
Ji cuadrada	4 g.l.	669 +	391	162	347	407
Ji cuadrada	6 g.l.	498 +	245	100	240	300
Ji cuadrada	10 g.l.	289 +	136	63	157	188
Exponencial	$\lambda = 5$	957 +	835	480	699	777
Lognormal	$\sigma = 1$	135 +	82	53	99	127
Uniforme (0, 1)		321 +	135	77	147	265
Logística	$\sigma = 1$	107 +	51	52	59	84
Laplace	$\sigma = 1$	474 +	178	68	173	303
Student	3 g.l.	860 +	518	120	407	629
Student	4 g.l.	427 +	137	49	127	277

(*) Correspondiente a la Distribución de $Y = a X_1 + b X_2$ cuando X_1 y X_2 tienen la misma distribución no normal indicada en la tabla.

TABLA V.11
 Casos de rechazo para alternativas no normales
 Dimension $k=2$
 Variables no correlacionadas
 Una marginal normal y la otra no normal
 Tamaño de muestra $n=10$
 Nivel de significancia: 0.05 Simulaciones: 1000

Alternativa	Pruebas				
	U^2	A^2	PME	A_k^2	U_k^2
Ji cuadrada 1 g.l.	235+	83	34	123	106
Ji cuadrada 3 g.l.	96	65	54	99+	58
Ji cuadrada 4 g.l.	83	64	59	96+	60
Ji cuadrada 6 g.l.	73	70	55	95+	53
Ji cuadrada 10 g.l.	67	52	39	74+	55
Exponencial $-\lambda = 5$	152+	81	46	114	88
Lognormal $\sigma = 1$	54	50	64+	59	47
Uniforme (0, 1)	67	53	61	62	68+
Logística $\sigma = 1$	50	51	51	53+	49
Laplace $\sigma = 1$	66	48	33	53	71+
Student 3 g.l.	82+	46	27	56	69
Student 4 g.l.	67+	45	33	47	61

TABLA V.12
 Casos de rechazo para alternativas no normales
 Dimension $k=2$
 Variables no correlacionadas
 Una marginal normal y la otra no normal
 Tamaño de muestra $n=20$

Nivel de significancia: 0.05

Simulaciones: 1000

Alternativa	Pruebas				
	U^2	A^2	FME	A_k^2	U_k^2
Ji cuadrada 1 g.l.	533 +	165	36	161	165
Ji cuadrada 3 g.l.	181 +	74	49	102	97
Ji cuadrada 4 g.l.	116 +	79	39	88	67
Ji cuadrada 6 g.l.	82	67	44	84 +	55
Ji cuadrada 10 g.l.	73 +	56	38	69	70
Exponencial $\lambda = 5$	284 +	102	45	131	115
Lognormal $\sigma = 1$	58	60 +	58	80	55
Uniforme (0, 1)	90	70	74	78	91 +
Logística $\delta = 1$	63 +	43	39	46	57
Laplace $\sigma = 1$	78 +	50	34	53	64
Student 3 g.l.	156 +	48	27	61	120
Student 4 g.l.	84 +	54	32	52	70

TABLA V.13
 Casos de rechazo para alternativas no normales
 Dimension $k=2$
 Variables no correlacionadas
 Una marginal normal y la otra no normal
 Tamaño de muestra $n=30$

Nivel de significancia: 0.05 Simulaciones: 1000

Alternativa	Pruebas				
	U^2	A^2	PME	A_k^2	U_k^2
Ji cuadrada 1 g.l.	729+	316	94	202	219
Ji cuadrada 3 g.l.	227+	104	61	125	115
Ji cuadrada 4 g.l.	179+	78	56	96	99
Ji cuadrada 6 g.l.	108+	71	50	82	61
Ji cuadrada 10 g.l.	99+	56	41	68	88
Exponencial $\lambda = 5$	328+	160	66	165	160
Lognormal $\sigma = 1$	77+	63	66	63	60
Uniforme (0, 1)	124+	97	77	82	100
Logística $\sigma = 1$	58	59	49	67+	60
Laplace $\sigma = 1$	122+	61	38	60	95
Student 3 g.l.	213+	79	42	78	160
Student 4 g.l.	98+	44	37	49	80

TABLA V.14
 Casos de rechazo para alternativas no normales
 Dimension $k=2$
 Variables no correlacionadas
 Una marginal normal y la otra no normal
 Tamño de muestra $n=40$

Nivel de significancia: 0.05 Simulaciones: 1000

Alternativa		Pruebas				
		U^2	A^2	FME	A_k^2	U_k^2
Ji cuadrada	1 g.l.	840 +	419	144	243	282
Ji cuadrada	3 g.l.	319 +	145	69	152	149
Ji cuadrada	4 g.l.	227 +	108	61	126	127
Ji cuadrada	6 g.l.	164 +	89	62	90	97
Ji cuadrada	10 g.l.	98 +	76	52	86	65
Exponencial	$\lambda = 5$	457 +	199	70	170	164
Lognormal	$\sigma = 1$	66 +	57	56	65	56
Uniforme (0, 1)		135 +	83	70	86	115
Logística	$\sigma = 1$	64 +	64 +	56	57	48
Laplace	$\sigma = 1$	170 +	54	41	61	122
Student	3 g.l.	259 +	80	35	84	160
Student	4 g.l.	115 +	57	42	64	97

TABLA V.15
 Casos de rechazo para alternativas no normales
 Dimension $k=2$
 Variables no correlacionadas
 Una marginal normal y la otra no normal
 Tamaño de muestra $n=50$

Nivel de significancia: 0.05 Simulaciones: 1000

Alternativa	Pruebas				
	U^2	A^2	FME	A_k^2	U_k^2
Ji cuadrada 1 g.1.	928+	558	229	319	357
Ji cuadrada 3 g.1.	359+	154	82	162	166
Ji cuadrada 4 g.1.	262+	115	63	123	140
Ji cuadrada 6 g.1.	175+	98	64	99	99
Ji cuadrada 10 g.1.	132+	73	59	80	87
Exponencial $\lambda = 5$	599+	266	104	219	232
Lognormal $\sigma = 1$	98+	67	55	86	89
Uniforme (0, 1)	196+	89	67	87	149
Logística $\sigma = 1$	63	48	57	69+	64
Laplace $\sigma = 1$	205+	73	39	58	123
Student 3 g.1.	376+	105	53	113	236
Student 4 g.1.	139+	63	40	64	100

TABLA V.16
 Casos de rechazo para alternativas no normales
 Dimension $k=2$
 Variables correlacionadas

Una marginal normal y la otra no normal
 Los números entre paréntesis corresponden a la potencia cuando
 la primera marginal es no normal; los otros, cuando se afecta la segunda
 Tamaño de muestra $n=10$

Nivel de significancia: 0.05 Simulaciones: 1000

Alternativa*	Pruebas				
	U^2	A^2	PME	A_K^2	U_K^2
Ji cuadrada 1 g.l.	(104) 255+	(48) 78	(6) 22	(54) 123	(119) + 93
Ji cuadrada 3 g.l.	(57) 108+	(37) 46	(18) 35	(41) 75	(70) + 71
Ji cuadrada 4 g.l.	(64) 78+	(40) 45	(17) 35	(42) 76	(69) + 54
Exponencial $\lambda = 5$	(74) 158+	(45) 67	(12) 47	(51) 111	(96) + 91
Student 3 g.l.	(62) 110+	(45) 52	(41) 27	(40) 52	(74) + 72

(*) Correspondiente a la distribución de $Y = aZ + bW$, donde Z es una variable normal estándar y W tiene la distribución indicada en la tabla.

TABLA V.17
 Casos de rechazo para alternativas no normales
 Dimension $k=2$
 Variables correlacionadas

Una marginal normal y la otra no normal

Los números entre paréntesis corresponden a la potencia cuando
 la primera marginal es no normal; los otros, cuando se afecta la segunda
 Tamaño de muestra $n=20$

Nivel de significancia: 0.05 Simulaciones: 1000

Alternativa*	Pruebas				
	U^2	A^2	PME	λ_k^2	U_k^2
Ji cuadrada 1 g.l.	(139) 486+	(61) 145	(24) 50	(106) 153	(223)+ 133
Ji cuadrada 3 g.l.	(94) 148+	(55) 71	(14) 48	(68) 98	(113)+ 88
Ji cuadrada 4 g.l.	(87) 124+	(52) 80	(22) 50	(58) 106	(102)+ 96
Exponencial $\lambda = 5$	(113) 261+	(66) 108	(21) 46	(75) 143	(165)+ 120
Student 3 g.l.	(106) 166+	(39) 47	(40) 45	(46) 54	(124)+ 99

(*) Correspondiente a la distribución de $Y = aZ + bW$, donde Z es una variable normal estándar y W tiene la distribución indicada en la tabla.

TABLA V.18
Casos de rechazo para alternativas no normales
Dimension $k=2$

Variables correlacionadas

Una marginal normal y la otra no normal

Los números entre paréntesis corresponden a la potencia cuando la primera marginal es no normal; los otros, cuando se afecta la segunda

Tamaño de muestra $n=30$

Nivel de significancia: 0.05 Simulaciones: 1000

Alternativa*	Pruebas				
	U^2	A^2	PME	A_k^2	U_k^2
Jí cuadrada 1 g.l.	(206) 730 +	(100) 307	(115) 117	(159) 225	(373)+ 227
Jí cuadrada 3 g.l.	(129) 232 +	(61) 112	(34) 48	(91) 127	(146)+ 117
Jí cuadrada 4 g.l.	(82) 160 +	(50) 92	(37) 56	(68) 97	(131)+ 82
Exponencial $\lambda = 5$	(146) 392 +	(83) 138	(59) 56	(111) 123	(223)+ 138
Student 3 g.l.	(123) 206 +	(40) 69	(92) 51	(61) 69	(180)+ 122

(*) Correspondiente a la distribución de $Y = a Z + b W$, donde Z es una variable normal estándar y W tiene la distribución indicada en la tabla.

TABLA V.19
 Casos de rechazo para alternativas no normales
 Dimension $k=2$
 Variables correlacionadas

Una marginal normal y la otra no normal
 Los números entre paréntesis corresponden a la potencia cuando
 la primera marginal es no normal; los otros, cuando se afecta la segunda
 Tamaño de muestra $n=40$
 Nivel de significancia: 0.05 Simulaciones: 1000

Alternativa *	Pruebas				
	U^2	A^2	FME	A_k^2	U_k^2
Ji cuadrada 1 g.1.	(265) 855 +	(144) 436	(259) 168	(208) 274	(489) + 298
Ji cuadrada 3 g.1.	(152) 317 +	(74) 145	(60) 68	(89) 138	(209) + 147
Ji cuadrada 4 g.1.	(123) 194 +	(70) 96	(54) 44	(86) 101	(151) + 108
Exponencial $\lambda = 5$	(191) 468 +	(94) 223	(98) 87	(145) 209	(292) + 181
Student 3 g.1.	(137) 280 +	(58) 80	(96) 43	(74) 76	(214) + 146

(*) Correspondiente a la distribución de $Y = a Z + b W$, donde Z es una variable normal estándar y W tiene la distribución indicada en la tabla.

TABLA V.20
 Casos de rechazo para alternativas no normales
 Dimension $k=2$
 Variables correlacionadas

Una marginal normal y la otra no normal
 Los números entre paréntesis corresponden a la potencia cuando
 la primera marginal es no normal; los otros, cuando se afecta la segunda
 Tamaño de muestra $n=50$

Nivel de significancia: 0.05

Simulaciones: 1000

Alternativa*	Pruebas				
	U^2	A^2	FME	λ_k^2	U_k^2
Ji cuadrada 1 g.l.	(317) 934+	(141) 578	(385) 242	(266) 332	(584) + 371
Ji cuadrada 3 g.l.	(164) 364+	(97) 143	(98) 69	(121) 141	(257) + 156
Ji cuadrada 4 g.l.	(142) 269+	(75) 113	(63) 59	(100) 121	(196) + 138
Exponencial $\lambda = 5$	(209) 645+	(120) 277	(165) 119	(178) 228	(341) + 242
Student 3 g.l.	(155) 349+	(59) 112	(122) 39	(63) 96	(244) + 188

(*) Correspondiente a la distribución de $Y = aZ + bW$, donde Z es una variable normal estándar y W tiene la distribución indicada en la tabla.

Tomando en cuenta los resultados numéricos de simulación para las alternativas a la normalidad incluídas aquí, se pueden hacer los siguientes señalamientos de tipo general.

No nos es posible determinar la existencia de alguna relación con respecto a las potencias en los casos de variables correlacionadas y no correlacionadas debido a que las alternativas utilizadas no fueron las mismas. Notese que para la hipótesis nula de no correlación, las marginales consistían de variables aleatorias con las distribuciones univariadas señaladas en las tablas mientras que, para la hipótesis nula de correlación, las alternativas estuvieron constituidas por combinaciones lineales de variables aleatorias con distribuciones marginales iniciales indicadas en cada caso.

La prueba PME resultó sesgada contra varias alternativas (la mayoría en tamaños de muestra 10 y 20) dentro de cada uno de los cuatro grupos de alternativas, lo cual viene a ser un inconveniente para su uso.

La prueba U^2 presentó la mayor potencia contra todas las alternativas dentro de todos los grupos, y bajo los dos tipos de hipótesis nulas. No obstante que este análisis involucró un número reducido de alternativas a la normalidad, resulta ser de especial importancia este comportamiento de la prueba U^2 ya que, según el criterio de elección de pruebas generales (ómnibus tests), U^2 viene a ser un candidato a incluir en estudios posteriores, donde se comparen las mejores opciones reportadas hasta ahora en la literatura.

Las pruebas U_k^2 , A^2 y A_k^2 mostraron un comportamiento aceptable pero no comparable con el de U^2 . No se observó un patrón determinado de las mismas ya que compitieron por el segundo lugar en potencia dependiendo de la alternativa en cuestión, el tamaño de la muestra y la hipótesis nula.

Otro comentario relevante es que las pruebas detectan con poca potencia desviaciones de la normalidad en una marginal. En nuestro estudio para el caso bivariado, esto representó que disminuyó la potencia debido a que se tenía un 50% de observaciones marginales no normales (aunque el 100% eran no normales bivariadas); de lo cual se infiere que, para dimensiones mayores, se requerirá de un tamaño de muestra grande para alcanzar potencias aceptables, puesto que sólo se contará con muestras

donde solo una fracción $1/k$ de las observaciones marginales se desvían de la normalidad. A este mismo respecto y, por la razón antes expuesta, se recomienda nunca prescindir de una inspección gráfica de las marginales para detectar posibles desviaciones de la distribución hipotética. En muchos casos, será preferible efectuar una prueba univariada sobre la distribución marginal; especialmente para dimensiones grandes.

Para el grupo de alternativas donde se tenía una marginal no normal para variables correlacionadas, puede apreciarse que la potencia de las pruebas U^2 , A^2 y A_k^2 , fué mayor cuando la segunda marginal era no normal, mientras que las pruebas restantes mostraron un comportamiento inverso. Este resultado es de relevancia ya que la potencia de las pruebas varía de manera considerable en función de la componente afectada, por lo que se sugiere elegir un orden adecuado para las variables (dependiendo de la prueba de uniformidad a utilizar), antes de aplicar la transformación de Rosenblatt, con el objeto de asegurar la mayor potencia posible. Por ejemplo, si se utiliza la prueba U^2 , deberán elegirse como últimas componentes del vector, aquellas que se considere que se desvían en mayor medida de la distribución hipotetizada.

La implementación de los procedimientos para dimensiones mayores, es inmediato para todas las pruebas; especial-

mente para U^2 y A^2 debido a que son estadísticas usadas en el caso univariado, que se calculan sobre la base de las n_k observaciones de la matriz muestral de datos transformados. Asimismo, se cuenta con las tablas correspondientes; cosa que, en otras pruebas, resulta una dificultad como, por ejemplo, en la de Fattorini.

VI.- EXTENSION AL CASO DE PARAMETROS DESCONOCIDOS

Como ya se ha descrito anteriormente, la metodología para probar bondad de ajuste en el caso multivariado simple, consiste en aplicar la transformación de Rosenblatt a los vectores de observaciones para obtener, bajo la hipótesis nula, observaciones con distribución uniforme sobre el hipercubo k -dimensional I^k para, posteriormente, efectuar una prueba univariada de uniformidad sobre las nk observaciones de la matriz muestral.

En esta sección se explora la posibilidad de extender este procedimiento para el caso compuesto; restringiéndonos a la hipótesis de multinormalidad.

La manera natural de extender la metodología aquí expuesta, para el caso multinormal, es la de aplicar la transformación de Rosenblatt utilizando las estimaciones muestrales del vector de medias y la matriz de covarianzas. Cabe destacar que esta extensión constituye solo un primer intento ya que, en estudios posteriores, será de interés el estudiar un posible refinamiento mediante el empleo de estimadores robustos de los parámetros de la distribución.

Como fué señalado por Gnanadesikan (1977), es razonable esperar que, para tamaños de muestra suficientemente grandes y si, en efecto, la hipótesis nula es cierta, las observaciones sean transformadas al hipercubo mediante este procedimiento. En ese mismo trabajo, Gnanadesikan cita que existe un trabajo de David y Johnson (1948) donde se estudió el efecto de aplicar la transformación Integral de Probabilidad con parámetros estimados en el caso univariado; sin embargo, no se menciona ningún estudio similar en lo que toca a la transformación de Rosenblatt.

Una consecuencia inmediata de la uniformidad asintótica de las observaciones transformadas es que, la distribución asociada a las estadísticas para probar la uniformidad resultante de las observaciones transformadas, convergerá a la distribución univariada de las mismas.

Con el objeto de verificar empíricamente la posibilidad de extensión señalada por Gnanadesikan, se investigó mediante simulación la distribución de las estadísticas de Anderson-Darling y de Watson cuando se utilizan en este contexto.

Denotemos por $\hat{U}_{i,j}$ ($i=1,\dots,k; j=1,\dots,n$) las observaciones resultantes de aplicar la transformación de Rosenblatt con parámetros estimados y sean

$$\hat{U}_{(1)}, \hat{U}_{(2)}, \dots, \hat{U}_{(nk)}$$

las observaciones ordenadas.

Denotemos por \hat{A}_{nk}^2 y \hat{U}_{nk}^2 las estadísticas de Anderson-Darling y de Watson (definidas en la sección II) calculadas a partir de las nk observaciones arriba indicadas.

Las tablas VI.1 y VI.2 muestran algunos percentiles de la distribución de \hat{A}_{nk}^2 y \hat{U}_{nk}^2 obtenidos sobre la base de 10,000 simulaciones para valores de $n=10(10)50$ y para $k=2,3$ bajo la hipótesis de multinormalidad. Asimismo se presentan en la última columna de las tablas, los percentiles correspondientes a la distribución de dichas estadísticas en el caso univariado para probar la hipótesis de normalidad con parámetros estimados (tomados de Stephens, 1986).

TABLA VI.1
Distribución empírica de \hat{A}_{nk}^2 .

Percentiles para valores seleccionados de p y n

Dimensión	p	Tamaño de muestra n					
		10	20	30	40	50	∞
2	0.500	0.322	0.331	0.334	0.337	0.342	0.341
	0.750	0.441	0.455	0.461	0.463	0.469	0.470
	0.850	0.526	0.547	0.553	0.549	0.562	0.561
	0.900	0.591	0.612	0.618	0.612	0.634	0.631
	0.950	0.709	0.734	0.733	0.729	0.751	0.752
	0.975	0.811	0.852	0.853	0.845	0.871	0.873
	0.990	0.977	1.013	0.998	0.983	1.024	1.035
	0.995	1.096	1.139	1.125	1.105	1.141	1.159
3	0.500	0.325	0.333	0.334	0.336	0.337	0.341
	0.750	0.449	0.461	0.457	0.469	0.464	0.470
	0.850	0.539	0.546	0.546	0.560	0.546	0.561
	0.900	0.608	0.621	0.614	0.635	0.619	0.631
	0.950	0.732	0.743	0.734	0.745	0.734	0.752
	0.975	0.848	0.863	0.874	0.870	0.863	0.873
	0.990	0.974	0.998	1.026	1.028	1.026	1.035
	0.995	1.099	1.100	1.144	1.165	1.169	1.159

TABLA VI.2
Distribución empírica de \hat{U}_{nk}^2

Percentiles para valores seleccionados de p y n

Dimensión	p	Tamaño de muestra n					∞
		10	20	30	40	50	
2	0.500	0.048	0.048	0.048	0.048	0.048	0.048
	0.750	0.068	0.069	0.069	0.069	0.070	0.070
	0.850	0.083	0.084	0.084	0.084	0.085	0.085
	0.900	0.094	0.095	0.096	0.095	0.097	0.096
	0.950	0.114	0.116	0.114	0.115	0.117	0.117
	0.975	0.135	0.137	0.134	0.132	0.137	0.136
	0.990	0.158	0.163	0.162	0.164	0.164	0.164
0.995	0.177	0.179	0.184	0.180	0.183	0.183	
3	0.500	0.048	0.048	0.048	0.048	0.048	0.048
	0.750	0.069	0.069	0.069	0.070	0.070	0.070
	0.850	0.084	0.084	0.084	0.085	0.085	0.085
	0.900	0.096	0.097	0.096	0.097	0.095	0.096
	0.950	0.117	0.117	0.115	0.117	0.117	0.117
	0.975	0.137	0.136	0.137	0.135	0.136	0.136
	0.990	0.162	0.164	0.165	0.161	0.163	0.164
0.995	0.175	0.180	0.185	0.184	0.183	0.183	

Para ambas estadísticas se aprecia que su distribución converge empíricamente a la distribución asintótica para el caso univariado. La convergencia es bastante rápida y, para dimensiones dos y tres, no parece existir una diferencia sustancial en la rapidez de convergencia; aunque no es posible conjeturar el comportamiento para dimensiones mayores, a partir de los resultados aquí presentados.

En el caso de la estadística de Watson, su convergencia es notablemente rápida en virtud de que, desde tamaños de muestra 10 y 20, los puntos obtenidos a partir de la distribución empírica igualan a los teóricos, lo que hace evidente la facilidad de utilizar los percentiles correspondientes a la distribución teórica, aún en el caso de parámetros desconocidos.

Si bien es cierto que en algunos casos se observan discrepancias para tamaños de muestra pequeños, recuérdese que estos resultados se obtuvieron por simulación; por lo cual se considera que, al menos para percentiles menores o iguales a 0.95, la convergencia se tiene desde tamaño de muestra 10, para la estadística de Watson. Los percentiles superiores requieren de un tamaño de muestra mayor pero, en todo caso, se aprecia que para tamaño de muestra 50, los percentiles empíricos coinciden con los de la distribución límite correspondiente.

La distribución de $\hat{\Lambda}_{nk}^2$ converge más lentamente que la de Watson, observándose que para tamaño de muestra 50 se tiene una proximidad bastante razonable.

A pesar de que, en ambos casos, la convergencia se aprecia rápida, parece haber una superioridad en este sentido de la estadística \hat{U}_{nk}^2 para la cual pueden utilizarse sus percentiles teóricos prácticamente desde un tamaño de muestra 20; mientras que, para la estadística $\hat{\Lambda}_{nk}^2$, se requerirá de un tamaño de muestra mayor para poder utilizar los percentiles de su distribución límite.

Las estadísticas restantes consideradas en el trabajo, no presentaron esta característica relacionada con la convergencia a una distribución límite conocida; lo cual representa un inconveniente para su utilización. Por medio de simulación, se obtuvieron los percentiles superiores del 5% para las distribuciones de $\hat{\Lambda}_k^2$, \hat{U}_k^2 , y \hat{PME} en tamaños de muestra $n=40,50$; con el objeto de incluirlas en esta parte del estudio.

Aunque no se pretende desarrollar un estudio comparativo exhaustivo para estas extensiones, se consideró importante hacer alguna evaluación exploratoria.

Para ello, se calculó la potencia empírica de las pruebas para dos grupos de alternativas. El primer grupo consistió de las alternativas descritas en la sección V para variables no correlacionadas, bajo la hipótesis de multinormalidad. Los resultados respectivos se presentan en la tabla VI.3 para tamaño de muestra $n=50$.

El segundo grupo estuvo constituido por algunas de las alternativas incluídas en un trabajo reciente de Gracia-Medrano(1989), en el cual se comparó la potencia para pruebas de multinormalidad. Allí se incluyeron varias pruebas que puede decirse, conforman un grupo representativo de la metodología existente, ya que fueron seleccionadas después de un cuidadoso proceso de revisión en el tema.

Del trabajo arriba citado, se tomaron algunas alternativas, para las cuales se calculó la potencia de las pruebas aquí discutidas. Concretamente, las alternativas utilizadas se relacionan con la generación de observaciones bivariadas no normales, con medidas marginales de asimetría, kurtosis y correlación predeterminadas. Para una descripción más detallada del método de generación y las alternativas, se remite al lector al trabajo original antes referido.

Las tablas VI.4 y VI.5 muestran los resultados de simulación concernientes a las potencias empíricas de las pruebas, ante algunas de las alternativas elegidas para un tamaño de muestra $n=40$. Las alternativas consideran la misma distribución marginal no normal en ambas componentes del vector y cubren los casos de variables correlacionadas y no correlacionadas.

A partir de las tablas VI.3 a VI.5, es claro que la prueba \hat{A}_{nk}^2 es ahora la más potente, seguida de \hat{U}_{nk}^2 . Las pruebas basadas en máximos, tuvieron un comportamiento aceptable pero, desde luego, no comparable con el de las basadas en las estadísticas de Watson y Anderson-Darling.

De interés especial son los resultados obtenidos para las alternativas del trabajo de Gracia-Medrano(1989), debido a que la potencia de la prueba \hat{A}_{nk}^2 coincide con la de otra prueba propuesta en el trabajo arriba citado, que también utiliza la estadística de Anderson-Darling. Sin embargo, esta última es diferente ya que prueba la uniformidad resultante de aplicar la transformación de Rosenblatt al estimador Rao-Blackwell de la función de distribución de la normal.

TABLA VI.3
 Casos de rechazo para alternativas no normales
 Extensión al caso compuesto
 Variables no correlacionadas
 Misma distribución marginal no normal
 Tamaño de muestra n=50

Nivel de significancia: 0.05		Simulaciones: 1000				
Alternativa		Pruebas				
		\hat{U}_{nk}^2	\hat{A}_{nk}^2	\hat{PME}	\hat{A}_k^2	\hat{U}_k^2
Ji cuadrada	1 g.l.	1000 +	1000 +	1000 +	1000 +	997
Ji cuadrada	3 g.l.	991	1000 +	862	940	784
Ji cuadrada	4 g.l.	957	993 +	694	879	683
Ji cuadrada	6 g.l.	833	924 +	499	720	498
Ji cuadrada	10 g.l.	565	721 +	279	476	296
Exponencial	$\lambda = 5$	1000 +	1000 +	981	996	946
Lognormal	$\sigma = 1$	275	402 +	115	243	275
Uniforme (0,1)		850	914 +	431	668	581
Logística	$\sigma = 1$	191	215 +	89	149	121
Laplace	$\sigma = 1$	761 +	750	391	527	475
Student	3 g.l.	763	785 +	474	665	578
Student	4 g.l.	544	599 +	280	451	359

TABLA VI.4
 Casos de rechazo para alternativas no normales
 Dimensión $k=2$
 Misma distribución marginal no normal
 Tamaño de muestra $n=40$
 Variables no correlacionadas
 Nivel de significancia: 0.05 Simulaciones: 1000

Alternativa		Pruebas				
ν_1	ν_2	\hat{U}_{nk}^2	\hat{A}_{nk}^2	PME	\hat{A}_k^2	\hat{U}_k^2
0.0	0.5	78	100 +	61	68	54
0.5	0.0	181	295 +	124	167	110
0.5	0.5	189	247 +	105	187	125
0.0	1.0	121	133 +	72	104	79
0.0	-1.0	289	359 +	161	254	189

ν_1 y ν_2 denotan las medidas de asimetría y kurtosis respectivamente.

TABLA VI.5
 Casos de Rechazo para alternativas no normales
 Dimension $k=2$
 Misma distribución marginal no normal
 Tamaño de muestra $n=40$
 Variables correlacionadas ($\rho = 0.7$)
 Nivel de significancia: 0.05 Simulaciones: 1000

Alternativa		Pruebas				
\mathcal{V}_1	\mathcal{V}_2	\hat{U}_{nk}^2	\hat{A}_{nk}^2	\hat{PME}	\hat{A}_k^2	\hat{U}_k^2
0.0	0.5	60	72 +	50	63	51
0.5	0.0	196	248 +	95	174	124
0.5	0.5	163	204 +	81	169	93
0.0	1.0	96	115 +	66	101	76
0.0	-1.0	155	185 +	87	162	143

\mathcal{V}_1 y \mathcal{V}_2 denotan las medidas de asimetría y kurtosis respectivamente.

Siguiendo la notación empleada en Gracia-Medrano(1989) denotemos por $\tilde{\Lambda}^2$ la prueba resultante de aplicar la estadística de Anderson-Darling a las observaciones resultantes de transformar con el estimador Rao-Blackwell de la Función de Distribución Normal. De los resultados aquí obtenidos se desprenden las siguientes observaciones :

- a) El procedimiento para implementar la prueba $\hat{\Lambda}_{nk}^2$ es más simple que el correspondiente para la prueba $\tilde{\Lambda}^2$.
- b) Para ambas estadísticas se observa la propiedad de convergencia a la distribución límite de su contraparte univariada, : y no hay : diferencias en cuanto a la rapidez de convergencia.
- c) Las potencias reportadas para $\tilde{\Lambda}^2$ y las obtenidas aquí, para $\hat{\Lambda}_{nk}^2$, no parecen presentar diferencias a no ser las atribuibles a la variación debida a los procesos de simulación.

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado una metodología para probar bondad de ajuste en el caso multivariado simple, consistente en aplicar la transformación de Rosenblatt a las observaciones multivariadas para obtener, bajo la hipótesis nula, una muestra uniformemente distribuida sobre el hipercubo k -dimensional I^k . Se ha indicado que el problema radica, entonces, en probar la multiuniformidad de las observaciones resultantes de aplicar la transformación de Rosenblatt, por lo que se requiere de la utilización de pruebas de uniformidad que sean potentes ante alternativas derivadas de dicha transformación, en presencia de desviaciones de la hipótesis nula.

Para el caso específico de la distribución Normal multivariada (específicamente para el caso bivariado), se efectuó un estudio para comparar la potencia, con base en simulación, de algunas pruebas de uniformidad reportadas en la literatura. Se obtuvo que la más potente, en general, fué la prueba U^2 de Watson.

Se exploró la posibilidad de extender el procedimiento al caso de parámetros desconocidos, mediante la aplicación de la transformación de Rosenblatt, utilizando para ello estima-

ciones de los parámetros de la distribución obtenidos de las muestras originales. Se analizó el caso concreto de la Distribución Normal multivariada aplicando la transformación a la función con los estimadores máximo-verosímiles del vector de medias y la matriz de covarianzas. Se obtuvo por simulación, la distribución empírica de las estadísticas de Watson y de Anderson-Darling cuando éstas se calculan a partir de las observaciones transformadas mediante este procedimiento, y se encontró que ambas distribuciones convergen a sus distribuciones univariadas límite respectivas. Se señaló además, la conveniencia de estudiar una posible extensión de la técnica en el caso multinormal, mediante el empleo de estimadores robustos de los parámetros de la distribución.

Para la extensión del estudio al caso compuesto que se mencionó, los resultados mostraron una superioridad de la estadística de Anderson-Darling sobre las demás consideradas; no obstante que la estadística de Watson tuvo un comportamiento adecuado.

De manera complementaria, se evaluó la potencia de las pruebas extendidas, ante alternativas a la normalidad obtenidas de un trabajo reciente, en el que se comparan distintas pruebas de multinormalidad, entre las que se encontraba una basada también en la estadística de Anderson-Darling, pero distinta en procedimiento ya que en ella se propone aplicar la transformación de Rosenblatt utilizando el estimador Rao-Blackwell de su función de distribución.

En este sentido, se obtuvo un resultado que se considera importante: Bajo ambos procedimientos, se tiene la convergencia de la estadística A^2 a su distribución límite en su contraparte univariada y las potencias parecen ser idénticas. Esto constituye una ventaja al utilizar la extensión aquí discutida, ya que su implementación resulta más sencilla.

Por otra parte, se obtuvieron algunos resultados particulares, como el relacionado con la baja potencia con la que las pruebas detectan la no normalidad en una marginal, por lo que se recomienda nunca prescindir de una inspección gráfica de las marginales para detectar posibles desviaciones de la distribución hipotética. En muchos casos será preferible este procedimiento; especialmente para dimensiones grandes .

Para finalizar se indica que el trabajo aquí desarrollado de ninguna manera pretende ser exhaustivo y deberá pensarse como antecedente para la elaboración de otros estudios donde, de una manera más sistemática, se contemple una variedad mayor de alternativas.

R E F E R E N C I A S

ANDERSON, T.W. (1966): "Some Nonparametric Procedures Based on Statistically Equivalent Blocks", Multivariate Analysis, Vol. 1, pp. 5-27, K.R. Krishnaiah Editor, Academic Press, New York.

ANDREWS, D.F., GNANADESIKAN, R. AND WARNER, J.L. (1972): "Methods for Assessing Multivariate Normality", Multivariate Analysis III, pp. 95-116, K.R. Krishnaiah Editor, Academic Press, New York.

D'AGOSTINO, R.B. AND STEPHENS, M.A. (Eds.) (1986): Goodness-of-fit Techniques, Marcel Dekker, New York.

FATTORINI, L. (1982): "A Simple Test of Multivariate Uniformity Based on a Non-Euclidean Metric", Quaderni dell'Istituto di Statistica, 48, Università di Siena.

FATTORINI, L. (1983): "Power Studies of Some Multivariate Uniformity Tests", Quaderni dell'Istituto di Statistica, 55, Università di Siena.

FLEISHMAN, A.I., (1978): "A Method for Simulating Nonnormal Distributions", Psychometrika, 43, pp. 521-532.

GNANADESIKAN, R. (1977): Methods for Statistical Data Analysis of Multivariate Observations, John Wiley and Sons, New York.

GRACIA-MEDRANO, L.E. (1989): Estudio Comparativo de Pruebas para la Distribución Normal Multivariada, Tesis de Maestría en Estadística e Investigación de Operaciones, Universidad Nacional Autónoma de México.

GRAYBILL, F.A. (1969): Introduction to Matrices With Applications in Statistics, Wadsworth Publishing Company, Inc., Belmont, Ca.

LEURGANS, S. (1983): "On Distribution-Free Tests for Bivariate Observations", Biometrika, 37, pp. 727-728.

NAYLOR, T.H. ; BALINTFY, J.L. ; BURDICK, D.S. AND KONG CHU (1966): Computer Simulation Techniques, John Wiley and Sons, New York.

O'REILLY, F.J. AND GRACIA-MEDRANO, L.E. (1988): "On a Test for Multivariate Normality", Contributed Paper ASA Meeting, New Orleans, U.S.A.

QUESENBERRY, C.P. AND MILLER, F.L. (1977): "Power Studies of Some Tests for Uniformity", Journal of Statistical Computation and Simulation, 5, pp. 169-191.

ROSENBLATT, M. (1952): "Remarks on a Multivariate Transformation" Annals of Mathematical Statistics, 28, pp. 470-472.

RUBINSTEIN, R.Y. (1981): Simulation and the Montecarlo Method, John Wiley and Sons, New York.

SCHEUER, E. AND STOLLER, D. (1962): "On the Generation of Normal Random Vectors", Technometrics, 4, pp. 278-281.

SIMPSON, F.B. (1951): "Note on the Estimation of a Bivariate Distribution Function", Annals of Mathematical Statistics, 22, pp. 476-478.

STEPHENS, M.A. (1970): "Use of the Kolmogorov-Smirnov, Cramer-Von Mises and Related Statistics Without Extensive Tables", Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 32, pp. 115-122.

STEPHENS, M.A. (1974): "EDF Statistics for Goodness of Fit and Some Comparisons", Journal of the American Statistical Association, 69, pp. 730-737.

STEPHENS, M.A. (1986): "Tests for Uniformity", Goodness-of-fit-Techniques, eds. R.B. D'Agostino and M.A. Stephens, Marcel Dekker, New York.

VALE, C.D. AND MAURELLI, V.A. (1983): "Simulating Multivariate Nonnormal Distributions", Psychometrika, 48, pp. 465-471.

WEISS, L. (1958): " A Test of Fit for Multivariate Distributions", Annals of Mathematical Statistics, 29, pp. 595-599.